



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Giovanna Sboldrim Pascolat

Um estudo de estabilidade estocástica via funções de Lyapunov

Presidente Prudente, julho de 2023

Giovanna Sboldrim Pascolat

Um estudo de estabilidade estocástica via funções de Lyapunov

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

Presidente Prudente, julho de 2023

P281e Pascolat, Giovanna Sboldrim
Um estudo de estabilidade estocástica via funções de Lyapunov /
Giovanna Sboldrim Pascolat. -- Presidente Prudente, 2023
96 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Fabiano Borges da Silva

1. Equações Diferenciais Estocásticas. 2. Estabilidade. 3. Método
de Lyapunov. 4. Crescimento Populacional. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um estudo de estabilidade estocástica via funções de Lyapunov

AUTORA: GIOVANNA SBOLDRIM PASCOLAT

ORIENTADOR: FABIANO BORGES DA SILVA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru

Profa. Dra. TATIANA MIGUEL RODRIGUES (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru

Profa. Dra. CLAUDIA LUQUE JUSTO (Participação Virtual)
Departamento de Matemáticas y Estadística / Universidad Católica San Pablo

Presidente Prudente, 04 de julho de 2023

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador e professor Fabiano, por me inserir no mundo das pesquisas e por todo conhecimento compartilhado, sempre com muita dedicação e paciência.

Aos meus pais Elaine e Edmilson, e minha irmã Gabriela por todo suporte desde sempre.

À todos os meus professores e professoras, da Educação Básica ao Ensino Superior, pela contribuição em minha formação. Especialmente às professoras Tatiana e Claudia Justo, por suas imensas contribuições dadas a este trabalho.

À todos meus amigos, tanto os que fiz durante a graduação, como os que já estavam presentes comigo, por todos os ensinamentos e as descontrações.

À Cinthia por toda atenção e paciência com as minhas dúvidas da parte burocrática do programa.

Agradeço também à UNIVESP, que me proporcionou condições de realizar esse estudo. Além disso, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*“Estamos na situação de uma criancinha que entra em uma imensa biblioteca,
repleta de livros em muitas línguas.*

A criança sabe que alguém deve ter escrito aqueles livros, mas não sabe como.

Não compreende as línguas em que foram escritos.

*Tem uma pálida suspeita de que a disposição dos livros obedece a uma ordem misteriosa,
mas não sabe qual ela é”.*

Albert Einstein

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre as equações diferenciais estocásticas (EDEs) e propriedades qualitativas de sua solução, principalmente no que diz respeito a estabilidade estocástica via função de Lyapunov. Em um primeiro momento, foi necessário, com o intuito de fixar a notação utilizada no trabalho, introduzir alguns conceitos, como, por exemplo, o movimento browniano e a integral de Itô. Além disso, também achamos pertinente estudar o método de Lyapunov primeiro para o caso determinístico, pois desse modo ficaria mais fácil entender como o método se estende para as EDEs. Além disso, também foi feita uma análise qualitativa, com simulações, de uma aplicação do método em um modelo de crescimento populacional.

Palavras-Chave: *Equações Diferenciais Estocásticas, Estabilidade, Método de Lyapunov, Crescimento Populacional.*

Abstract

The objective of this work is to present a study on stochastic differential equations (SDEs) and qualitative properties of their solution, mainly with regard to stochastic stability via the Lyapunov function. At first, in order to establish the notation used in the work, it was necessary to introduce some concepts, such as, for example, Brownian motion and Itô's integral. In addition, we also find it pertinent to study Lyapunov's method first for the deterministic case, as this way it would be easier to understand how the method extends to SDEs. In addition, a qualitative analysis was also carried out, with simulations, of an application of the method in a population growth model.

Keywords: *Stochastic Differential Equations, Stability, Lyapunov Method, Population Growth.*

Lista de Figuras

3.1	Foco a) estável: $\lambda < 0$; b) instável: $\lambda > 0$. Fonte: Doering e Lopes (2016).	37
3.2	Interpretação gráfica de um ponto de equilíbrio estável. Fonte: Elaboração Própria.	38
3.3	Interpretação gráfica de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.	39
3.4	Exemplo de um ponto de equilíbrio estável, que não é assintoticamente estável. Fonte: Doering e Lopes (2016).	40
3.5	Demonstração do Teorema de Lyapunov I em \mathbb{R}^2 . Fonte: Doering e Lopes (2016).	44
3.6	Demonstração do Teorema de Lyapunov II em \mathbb{R}^2 . Fonte: Doering e Lopes (2016).	48
3.7	(a) O equilíbrio é (Lyapunov) estável, uma vez que qualquer solução próxima não pode subir e pode apenas se afastar uma distância limitada ditada por seu nível de energia original. (b) Para uma função de Lyapunov estrita, a energia das soluções deve diminuir continuamente até zero, cortando através de conjuntos de níveis de energia. O equilíbrio é assintoticamente estável. Fonte: Alligood, et al. (1998).	50
3.8	Representação de uniformemente limitado. Fonte: Elaboração Própria. .	51
4.1	Uma ilustração de três possíveis trajetórias para $ X(t, s, x) $. Fonte: Elaboração Própria.	58
4.2	Demonstração do Teorema de Lyapunov para EDE. Fonte: Elaboração Própria.	61

4.3	Demonstração do Teorema de Lyapunov para EDE. Fonte: Elaboração Própria.	63
5.1	Algoritmo do método de Euler-Maruyama no software Matlab.	72
5.2	Para $\beta = 0,5$, a solução $X_t = 0$, com $x_0 = 0,2$ e $x_0 = 4$, apresenta um comportamento assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria. . .	73
5.3	Para $K = 45$, a solução $X_t = 0$, com $x_0 = 2$, apresenta comportamento assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.	74
5.4	Para $x_0 = 2$, a solução $X_t = 0$ apresenta comportamento assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.	74
5.5	Para $r = -0,5$, a solução $X_t = 0$ apresenta comportamento assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.	75
5.6	Propriedade assintótica do modelo EDO, visto em (5.1), com os parâmetros $K = 20, r = 0.25$. Fonte: Elaboração Própria.	76
5.7	Ruído suprime explosão. Fonte: Elaboração Própria.	78
A.1	Representação dos subintervalos. Fonte: Elaboração Própria.	83
B.1	Um fluxo laminar em \mathbb{R}^3 . Fonte: Doering e Lopes (2016).	87
B.2	Um fluxo tubular no plano. Fonte: Doering e Lopes (2016).	88
C.1	O gráfico e as curvas de nível de U . Fonte: Doering e Lopes (2016). . .	95
C.2	O retrato de fase de $-\nabla U$. Fonte: Doering e Lopes (2016).	96

Conteúdo

Resumo	5
Abstract	7
Introdução	13
1 Noções básicas de probabilidade e processos estocásticos	15
1.1 Uma introdução à teoria de probabilidade	15
1.1.1 Variáveis aleatórias	17
1.1.2 Esperança e distribuição gaussiana	17
1.2 Uma introdução aos processos estocásticos	19
1.2.1 Movimento browniano	20
1.2.2 Martingales	23
2 Noções básicas de Integral de Itô e EDE	25
2.1 Uma introdução à integral de Itô	25
2.1.1 Fórmula de Itô	28
2.2 Equações diferenciais estocásticas	30
3 Análise de estabilidade: caso determinístico	35
3.1 Método de Lyapunov para EDO	42
3.1.1 Caso determinístico não autônomo	50
4 Análise de estabilidade: caso estocástico	55
4.1 Método de Lyapunov para EDE	59
5 Aplicação em um modelo de crescimento populacional	69

Bibliografia	82
A Regras da fórmula de Itô	83
B Fluxo tubular	87
C Exemplos do Método de Lyapunov (EDO)	91

Introdução

Nem sempre as equações diferenciais estocásticas podem ser resolvidas por expressões explícitas para as soluções, ou mesmo quando é possível obter a solução explícita, as expressões podem ser suficientemente complicadas para impedir a determinação das propriedades fundamentais da solução.

Sendo assim, para que as equações diferenciais nas aplicações sejam úteis é importante que seja possível determinar aspectos básicos da natureza das soluções, por isso a teoria qualitativa tem sua extrema importância. A partir dela, é possível obter técnicas e métodos que permitem investigar o comportamento geral das soluções diretamente a partir da forma das equações diferenciais e não da solução explícita.

Dentre várias propriedades da solução, uma bastante importante do ponto de vista das aplicações é a estabilidade. O primeiro trabalho teórico sobre a estabilidade de um problema surgiu com o matemático e físico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), nesse trabalho foi definido a função de Lyapunov, sendo esta uma função que nos dá características sobre a energia do sistema. Da teoria clássica da mecânica, sabe-se que um sistema vibratório é estável se sua energia total (uma função positiva) for continuamente decrescente (derivada em relação ao tempo negativa) até que um ponto de equilíbrio seja alcançado.

Em um primeiro momento, achamos pertinente apresentar algumas definições e teoremas em relação à função de Lyapunov para o caso das equações diferenciais ordinárias (EDOs), segundo Doering e Lopes (2016) [4], pois acreditamos que assim ficaria mais fácil de entender a ideia principal do método de Lyapunov, ou seja, se situar a respeito de como é definida uma função de Lyapunov e como é dada sua estabilidade, para posteriormente estudarmos como se aplica à Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs), foco central da dissertação.

O método de Lyapunov para as EDOs nos diz que se existe uma função de Lyapunov (função com um mínimo absoluto e não crescente ao longo de qualquer trajetória) em um ponto de equilíbrio, então o ponto de equilíbrio é estável. Além disso, se existe uma função de Lyapunov estrita (função efetivamente decresce ao longo das trajetórias) para o ponto de equilíbrio, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Já para as EDEs, o método segue a mesma ideia, mas passamos a utilizar o termo ponto de equilíbrio estocasticamente estável ou assintoticamente estocasticamente estável e passamos a tentar encontrar uma função de Lyapunov estocástica.

O caso do método de Lyapunov para EDO(s) e EDE(s) possuem técnicas diferentes, mas tem alguns pontos que podem ser comparados. Os dois casos utilizam da definição de ponto de equilíbrio e possuem dois teoremas principais. No caso das EDO(s), as condições-chave nos teoremas do tipo Lyapunov são expressas em termos da derivada, conhecida do cálculo usual. Já no caso das EDE(s), as condições-chaves são expressas em termos do chamado gerador infinitesimal, que é calculado a partir da fórmula de Itô, que pode ser vista como uma regra da cadeia para o cálculo estocástico.

Uma grande vantagem do método de Lyapunov reside no fato de não ser necessário resolver explicitamente a equação. Já a complicação do método é a dificuldade de encontrar essa função de Lyapunov ou função de Lyapunov estocástica, pois não existe um método geral para a construções de funções desse tipo.

Sendo assim, neste trabalho, apresentamos conceitos das EDOs e das EDEs quanto ao que diz respeito ao método de Lyapunov e estabilidade e por fim, apresentamos uma aplicação do método em um modelo de crescimento populacional.

Para que o desenvolvimento do trabalho fosse possível, também se fez necessário alguns conceitos sobre a teoria de probabilidade, processos estocásticos, o movimento browniano, a integral de Itô e a fórmula de Itô.

Dessa forma, o trabalho ficou dividido da seguinte maneira: no Capítulo 1, temos as noções básicas de probabilidade e processos estocásticos que serão essenciais para fixar a notação utilizada no trabalho. No Capítulo 2, é apresentada as noções básicas da integral de Itô e EDE. No Capítulo 3, temos a análise da estabilidade via método de Lyapunov para o caso determinístico. No Capítulo 4, temos a análise da estabilidade via método de Lyapunov para o caso estocástico. E por fim, no Capítulo 5 temos uma aplicação do método num modelo de crescimento populacional.

Noções básicas de probabilidade e processos estocásticos

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos introdutórios da teoria de probabilidade e de processos estocásticos, que serão úteis ao longo do texto, e que podem ser encontrados com mais detalhes, por exemplo, em Evans (2013) [6], Klebaner (2005) [11] e Oksendal (2000) [15]. Esse capítulo não pretende ser uma revisão ampla da teoria da probabilidade e de processos estocásticos, mas apenas uma breve introdução de alguns conceitos e resultados.

1.1 Uma introdução à teoria de probabilidade

É conhecido da literatura que uma medida em conjuntos Ω é uma função que atribui um número real não-negativo para um subconjunto de Ω . Em particular, probabilidade é uma medida que assume valores em $[0, 1]$ em subconjuntos de Ω que chamamos de eventos e definiremos a seguir. Aqui, Ω denota o espaço amostral.

Indicaremos por \mathcal{F} a classe dos eventos aleatórios, que deve possuir certas propriedades essenciais para a teoria de probabilidade. Uma classe \mathcal{F} de subconjuntos de um conjunto não-vazio Ω é chamada **σ -álgebra** de subconjuntos de Ω , isto é $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}(\Omega)$, se:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. Se $A \in \mathcal{F}$ então $A^c \in \mathcal{F}$;
3. Se $A_n \in \mathcal{F}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Outro conceito importante é a definição de probabilidade. Uma maneira de definir uma probabilidade \mathbb{P} no conjunto dos eventos aleatórios é a chamada “estatística”. Neste contexto, definimos a probabilidade de um evento aleatório A , $\mathbb{P}(A)$, como o limite da frequência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes do experimento, com n tendendo ao infinito, isto é,

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \{\text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ “ensaios” independentes}\}.$$

Esta maneira não é única para se definir probabilidade. No nosso trabalho, usamos uma definição axiomática para a probabilidade que se deve a Kolmogorov. Assim probabilidade é uma função

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

tal que se $A \in \mathcal{F}$ temos

- (i) $\mathbb{P}(A) \geq 0$;
- (ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (iii) Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ são disjuntos, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Um espaço de probabilidade é um trio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde

- Ω é um conjunto não-vazio,
- \mathcal{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω ,
- \mathbb{P} é uma probabilidade em \mathcal{F} .

Os subconjuntos que estão em \mathcal{F} são denominados eventos. A cada evento $A \in \mathcal{F}$, associamos sua probabilidade $\mathbb{P}(A)$.

A seguir temos a definição de uma variável aleatória, conceito importante para introduzir processos estocásticos.

1.1.1 Variáveis aleatórias

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Diremos que uma função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória (v.a.) se o conjunto

$$\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

(é um evento), para todo $x \in \mathbb{R}$. Em teoria da medida, X é chamada de função mensurável. Em palavras, X é tal que sua imagem inversa de intervalos abertos (ou fechados) pertencem a σ -álgebra \mathcal{F} . Assim é possível calcular as probabilidades de ocorrência de seus valores.

Como a σ -álgebra \mathcal{F} fornece o conhecimento sobre quais eventos são possíveis de ocorrer, então \mathcal{F} pode ser considerada como o componente de informação: os valores tomados por X são conhecidos por alguém que tenha acesso às informações \mathcal{F} .

1.1.2 Esperança e distribuição gaussiana

Nesse momento, introduzimos o conceito de esperança (média de uma v.a.) e distribuição gaussiana. Novamente, seja X uma variável aleatória em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A esperança de X é definida por

$$\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Além disso, temos a definição da variância da v.a. X , que é uma medida de dispersão e é dada por

$$V(X) := \int_{\Omega} |X(\omega) - \mathbb{E}(X)|^2 d\mathbb{P}(\omega).$$

A variância satisfaz as seguintes propriedades

1. $V(aX + b) = a^2V(X)$;
2. $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Seja X uma variável aleatória no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A função de distribuição de X é a função $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\omega; X(\omega) \leq x).$$

Além disso, se tivermos

$$\frac{d}{dx}F_X(x) = p(x),$$

então dizemos que $p(x)$ é a função densidade de probabilidade de uma v.a. X qualquer.

É importante observar a seguinte relação entre função de distribuição, probabilidade e função de densidade de probabilidade da variável aleatória X

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{\{X \leq x\}} d\mathbb{P}(\omega) = \int_{-\infty}^x p(u)du.$$

A função de densidade de probabilidade $p(x)$ tem as seguintes propriedades:

1. $p(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1$.

Diz-se que uma variável aleatória X tem distribuição normal se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

com os parâmetros constantes μ e $\sigma > 0$. A média e a variância são dadas por

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \text{Var}[X] = \sigma^2.$$

Se X tem uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 , escrevemos $X \sim (\mu, \sigma^2)$.

A seguir, temos o resultado conhecido como desigualdade de Markov

Se X é uma variável aleatória com $X \geq 0$ e $a > 0$, então

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}. \quad (1.1)$$

Por exemplo, a desigualdade de Markov nos diz que, desde que X não assumam valores negativos, a probabilidade de X ser duas vezes maior que seu valor esperado é de no máximo $\frac{1}{2}$, o que podemos ver definindo $a = 2E(X)$.

1.2 Uma introdução aos processos estocásticos

A grosso modo, processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias que, em geral, são utilizadas para estudar a evolução de fenômenos que são observados ao longo do tempo, seguindo a ideia de que dado uma condição inicial, ainda temos diversas trajetórias possíveis para a evolução do sistema.

Se $\mathcal{F} = 2^\Omega$, então qualquer função em Ω é uma variável aleatória. Assim, qualquer sequência de variável aleatória é mensurável, porém o caso mais interessante e utilizado é quando temos uma sequência crescente de informações chamada de filtração.

Devido a esta evolução temporal das variáveis aleatórias, uma filtração é usada para modelar esse fluxo de informações, isto é, conforme o tempo passa, um observador consegue saber mais detalhes sobre os acontecimentos, ou seja, partições mais “finas” de Ω . Por exemplo, seja $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$, onde \mathcal{F}_t e \mathcal{H}_t são duas filtrações dadas que representam o conhecimento que dois observadores podem adquirir até o tempo t . Dessa maneira, o observador \mathcal{H}_t possui mais informações.

Mais precisamente, uma filtração \mathbb{F} é uma coleção de σ -álgebras de eventos \mathcal{F}_n , com

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n, \dots, \mathcal{F}_T\}; \quad \text{onde } \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1},$$

a qual é usada para modelar um fluxo de informações, obtidas com o decorrer dos experimentos. Em geral, se toma $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, ou seja, no instante $n = 0$ não temos nenhuma informação. Com o passar do tempo, obtemos informações mais detalhadas.

Definição 1. Um processo estocástico adaptado a filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_T\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias X_n tal que cada X_n é uma variável aleatória com relação à (Ω, \mathcal{F}_n) para cada $n = 1, 2, 3, \dots, T$.

Exemplo 2. Considere o lançamento de uma moeda não viciada, para $n = 1, 2$. Então $\Omega = \{\omega_1 = (C, C), \omega_2 = (C, K), \omega_3 = (K, C), \omega_4 = (K, K)\}$.

Tome $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, o qual representa o evento em que no tempo $n = 1$ o resultado obtido foi cara. Assim, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ e tome $\mathcal{F}_2 = 2^\Omega$. Considere as seguintes funções em Ω :

- $X(\omega_1) = X(\omega_2) = 15$ e $X(\omega_3) = X(\omega_4) = 5$.

X é uma variável aleatória em \mathcal{F}_1 , já que $\{\omega : X(\omega) = 15\} = \{\omega_1, \omega_2\} = A \in \mathcal{F}_1$ e $\{\omega : X(\omega) = 5\} = \{\omega_3, \omega_4\} = A^c \in \mathcal{F}_1$.

- $Y(\omega_1) = 15, Y(\omega_2) = 75, Y(\omega_3) = 75,$ e $Y(\omega_4) = 5$.

Y não é uma variável aleatória em \mathcal{F}_1 , pois $\{\omega : Y(\omega) = 75\} = \{\omega_2, \omega_3\} \notin \mathcal{F}_1$. Por outro lado, é claro que Y é uma variável aleatória em \mathcal{F}_2 .

Temos que a sequência $\{X, Y\}$ é um processo estocástico adaptado a filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$.

Muitas vezes queremos fazer previsões com o que vai ocorrer num determinado tempo futuro, e por isso é interessante trabalhar com uma sequência infinita de variáveis aleatórias. Existem dois casos de processos: um processo estocástico com tempo discreto (enumerável como na Definição 1) e um processo estocástico com tempo contínuo, como, por exemplo, o movimento browniano que discutiremos na próxima seção.

No caso em que o tempo é contínuo, a ideia é que $t \geq 0$ será interpretado como tempo e o conjunto de índices T será tomado como um intervalo de tempo da forma $(-\infty, +\infty), [0, +\infty)$ ou $[\alpha, \beta]$. Sendo assim, um processo estocástico contínuo é indicado por X_t .

1.2.1 Movimento browniano

O botânico Robert Brown descreveu o movimento de uma partícula de pólen suspensa em um líquido em 1828. Observou-se que uma partícula se movia de forma

irregular e aleatória. Einstein, em 1905, argumentou que o movimento era devido ao bombardeio de outras partículas do fluido, assim ele obteve as equações para o movimento browniano. Em 1900, Louis Bachelier usou o movimento browniano como um modelo de movimento dos preços das ações em sua teoria matemática da especulação. A base matemática do movimento browniano como processo estocástico foi feita por Nobert Wiener em 1931, e esse processo também é chamado de processo Wiener. Aqui, vamos denotar o processo estocástico conhecido como movimento browniano por B_t ou $B(t)$.

Na prática, normalmente observamos apenas uma única realização desse processo, um único caminho, dentre uma infinidade de caminhos possíveis. Qualquer caminho é uma função aleatória de t no intervalo $[0, T]$. Para descrever a distribuição e poder fazer cálculos de probabilidade sobre o futuro incerto, é preciso conhecer as distribuições de dimensões finitas. Assim, precisamos especificar como calcular probabilidades da forma $\mathbb{P}(B(t) \leq b)$ para qualquer momento t , isto é, as probabilidades na forma

$$\mathbb{P}(B(t_1) \leq b_1, B(t_2) \leq b_2, \dots, B(t_n) \leq b_n),$$

para qualquer escolha de pontos no tempo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$, e qualquer $n \geq 1$, com $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

O movimento browniano $B(t)$ serve como modelo básico para a acumulação do efeito de ruído branco. O ruído branco é um dos principais processos estocásticos encontrados na natureza, que possui propriedades parecidas com o movimento browniano. Esse termo é mais utilizado, por exemplo, na física e na engenharia. Mais adiante, no próximo capítulo, iremos dar a definição desse ruído. Se $B(t)$ denota a posição de uma partícula no tempo t , então o deslocamento $B(t) - B(0)$ é o efeito puramente aleatório do ruído ao longo do tempo t . Além disso, $B(t)$ é um processo estocástico com as seguintes propriedades:

- (Independência de incrementos) $B(t) - B(s)$, para $t > s$, é independente do passado, ou seja, de B_u , $0 \leq u \leq s$, ou de \mathcal{F}_s (informação), σ -álgebra é gerada por $B(u)$, $u \leq s$.

- (Incrementos normais) $B(t) - B(s)$ tem distribuição normal com média 0 (esperança é 0) e variância $t - s$. Isso implica (considerando $s = 0$) que $B(t) - B(0)$ possui distribuição $N(0, t)$. Em particular, se $B(0) = 0$, segue que $\mathbb{E}(B_t)^2 = t$.
- (Continuidade dos caminhos) $B(t), t \geq 0$ são funções contínuas em relação ao tempo t .

Quando $B(0) = x$, dizemos que o movimento browniano é iniciado em x . As propriedades acima determinam a distribuição do movimento browniano. Além disso, o tempo no intervalo no qual o movimento browniano é definido é $[0, T]$ para $T > 0$, que é permitido ser infinito.

Definição 3. A definição do movimento browniano em um modelo mais geral é dada por um par $\{B(t), \mathcal{F}_t\}, t \geq 0$, onde \mathcal{F}_t é uma sequência crescente de σ -álgebra (filtração), $B(t)$ é um processo adaptado, isto é, $B(t)$ é \mathcal{F}_t mensurável, de modo que as condições ditas anteriormente se mantêm.

Uma importante representação usada para cálculos em processos com independência de incrementos é que para qualquer $s \geq 0$

$$B(t + s) = B(s) + (B(t + s) - B(s)),$$

onde as duas variáveis são independentes.

A variação quadrática do movimento browniano $[B, B](t)$ é definida como

$$[B, B](t) = [B, B]([0, t]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)|^2,$$

esse limite é assumido sobre todas as partições de $[0, t]$, com $\delta_n = \max_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$. Pode ser visto em Klebaner (2005) [11], que esta variação é igual a t .

Em resumo, temos que o movimento browniano B_t tem as seguintes propriedades, para quase todo ω :

1. É uma função contínua em t , para qualquer t ;
2. Possui variação quadrática em $[0, t]$ igual a t ;
3. Não é monótona em nenhum intervalo, por menor que seja o intervalo;

4. Não é diferenciável em nenhum ponto;
5. Possui variação total infinita em qualquer intervalo, por menor que seja.

O movimento browniano também pode ser definido em dimensões superiores. Mais precisamente, o movimento browniano n -dimensional pode ser visto como um vetor aleatório $B(t) = (B^1(t), B^2(t), \dots, B^n(t))$ com todas as coordenadas $B^i(t)$ sendo movimentos brownianos unidimensionais independentes. E nesse caso, defini-se $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$ como a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $B_s(\cdot); s \leq t$.

1.2.2 Martingales

Um martingale é uma sequência de variáveis aleatórias para o qual, a qualquer tempo específico na sequência observada, a esperança do próximo valor na sequência é igual ao valor presentemente observado, mesmo dado o conhecimento de todos os valores anteriormente considerados. Segue a definição formal de um martingale.

Definição 4. *Um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ é um martingale, se todo t é integrável, $\mathbb{E}|X(t)| < \infty$ e para qualquer $s > 0$*

$$\mathbb{E}(X(t+s)|\mathcal{F}_t) = X(t),$$

onde \mathcal{F}_t é a informação sobre o processo até o momento t , e a igualdade se mantém quase certamente.

Também dizemos que um processo estocástico $X(t)$ é um supermartingale se for uniformemente integrável e

$$\mathbb{E}(X(t+s)|\mathcal{F}_t) \leq X(t).$$

A propriedade martingale significa que, se conhecermos os valores do processo no tempo t , e $X(t) = x$, o valor futuro esperado a qualquer momento futuro é x .

Para exemplificar, seja X_n o dinheiro de um apostador depois que uma moeda honesta foi jogada n vezes, sendo que o apostador ganha 1 se der cara e perde 1 se der coroa. O valor esperado condicional do dinheiro do apostador depois que a moeda for jogada novamente, dado o histórico, é igual ao dinheiro atual. Esta sequência é,

portanto, um martingale. Suponha agora que a moeda possa estar desonesta e que ela dê cara com probabilidade $p < \frac{1}{2}$, o apostador perde dinheiro em média e a riqueza do apostador ao longo do tempo é um supermartingale.

Proposição 5. *Seja $B(t)$ um movimento browniano, então $B(t)$ é um martingale.*

A prova dessa proposição pode ser encontrada em Klebaner (2005, p.65) [11] ou Calin (2015, p.46) [3].

Alguns processos estocásticos possuem a propriedade de Markov, que significa que se soubermos o estado atual do processo, então o comportamento futuro do processo é independente de seu passado. O processo $X(t)$ possui essa propriedade se a distribuição condicional de $X(t+s)$ dada $X(t) = x$, não depende dos valores passados (mas pode depender do valor presente x). Formalmente, temos

Definição 6. *Seja \mathcal{F}_t a σ -álgebra gerada pelo processo até o tempo t , X é um processo de Markov se, para qualquer t e $s > 0$, a distribuição condicional de $X(t+s)$ dado \mathcal{F}_t é a mesma que a distribuição condicional de $X(t+s)$ dado $X(t)$, isto é,*

$$\mathbb{P}(X(t+s) \leq y | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X(t+s) \leq y | X(t)).$$

Um simples exemplo de um processo de markov é um interruptor com dois estados: ligado e desligado. No começo do experimento, o interruptor está ligado. A cada minuto depois, jogamos um dado. Se o resultado do dado mostrar 6, mudamos o estado do interruptor, caso contrário, deixamos como está. O estado do interruptor em função do tempo é um processo de Markov. Isso explica o significado de "não ter nenhuma memória". Se conhecemos o estado do interruptor no tempo n , nós podemos prever sua evolução (em termos de variável aleatória) para todos os tempos futuros, sem requerer conhecimento sobre o estado do interruptor em tempos menores que n .

Proposição 7. *O movimento browniano $B(t)$ possui a propriedade de Markov.*

A prova dessa proposição pode ser encontrada em Klebaner (2005, p.67) [11].

Noções básicas de Integral de Itô e EDE

A definição de equações diferenciais estocásticas (EDEs) se baseia na integral de Itô e suas propriedades. Novamente, esse capítulo tem a finalidade de introduzir alguns conceitos que serão úteis para o desenvolvimento do trabalho. Para ver mais detalhes, consultar, por exemplo, Oksendal (2000) [15], Calin (2015) [3] e Klebaner (2005) [11].

2.1 Uma introdução à integral de Itô

A integral de Itô é definida de maneira semelhante à integral de Riemann. A integral de Itô é tomada com relação aos incrementos infinitesimais de um movimento browniano dB_t , que são variáveis aleatórias, enquanto a integral de Riemann considera a integração em relação às mudanças infinitesimais previsíveis dt . A integral de Itô é uma variável aleatória, enquanto a integral de Riemann é apenas um número real.

Seja $0 \leq a < b$ e $F_t = f(B_t, t)$ um processo mensurável com

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b F_t^2 dt \right] < \infty.$$

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos usando os pontos de partição temos

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

e consideramos a soma parcial

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} F_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Como o processo F_t é mensurável, as variáveis aleatórias F_{t_i} e $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ são independentes; este é um importante recurso na definição da integral de Itô.

Definição 8. A integral de Itô pode ser definida como o limite das somas parciais S_n

$$\text{mq} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b F_t dB_t,$$

desde que o limite exista. Pode-se mostrar que a escolha da partição não influencia o valor da integral de Itô. Esta é a razão pela qual, para fins práticos, basta assumir os intervalos equidistantes, isto é:

$$t_{i+1} - t_i = \frac{(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

A convergência anterior está no sentido da média quadrática (por isso usamos mq – lim na definição acima), ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[(S_n - \int_a^b F_t dB_t)^2 \right] = 0.$$

Sabe-se que a integral estocástica de Itô $\int_a^b F_t dB_t$ existe se o processo $F_t = f(B_t, t)$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Os caminhos $t \rightarrow F_t(\omega)$ são contínuos em $[a, b]$ para qualquer estado $\omega \in \Omega$;
2. O processo F_t é mensurável para $t \in [a, b]$;
3. $\mathbb{E} \left[\int_a^b F_t^2 dt \right] < \infty$.

Por exemplo, existem as seguintes integrais estocásticas (que podem ser resolvidas a partir da fórmula de Itô, próximo tópico abordado):

$$\int_0^T B_t^2 dB_t, \int_0^T \text{sen}(B_t) dB_t, \int_a^b \frac{\cos(B_t)}{t} dB_t. \quad (a > 0)$$

Além disso, a integral de Itô possui as seguintes propriedades:

1. Propriedade isométrica:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_S^T (f(t, \omega) dB_t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt \right],$$

2. $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$, para todo ω ,

3. Linearidade:

$$\int_S^T (cf + g) dB_t = c \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t, \quad (c \text{ constante}) \text{ para todo } \omega,$$

4. Média zero:

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T f dB_t \right] = 0. \quad (2.1)$$

Também podemos tomar a integral de Itô com o tempo de parada. Seja $\mathbb{L}^2(0, T)$ o espaço de todos os processos estocásticos de valor real, progressivamente mensuráveis $G(\cdot)$ tal que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T G^2 dt \right) < \infty.$$

Então se $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ e τ for um tempo de parada com $0 \leq \tau \leq T$, definimos

$$\int_0^\tau G dB_t := \int_0^T \chi_{\{t \leq \tau\}} G dB_t.$$

E além disso, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\mathbb{E} \left(\int_0^\tau G dB_t \right) = 0;$

(ii) $\mathbb{E} \left(\left(\int_0^\tau G dB_t \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^\tau G^2 dt \right).$

A prova dessas condições pode ser encontrada em Evans (2012, p.104) [6].

2.1.1 Fórmula de Itô

Como no caso da integral de Riemann, usar a definição não é uma maneira eficiente de calcular as integrais. A mesma filosofia se aplica as integrais de Itô, nesse trabalho apresentamos um método eficiente para calcular as integrais de Itô, conhecido como fórmula de Itô.

No cálculo usual, uma regra básica para a diferenciação de uma função composta é a regra da cadeia. Se f e g são diferenciáveis, então $f(g(t))$ é também diferenciável e tem derivada

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t).$$

O cálculo de Itô lida com funções aleatórias, ou seja, processos estocásticos. Seja B_t um movimento browniano e f uma função diferenciável. Considere a função composta $f(B_t)$, uma vez que quase todos os exemplos de caminhos de B_t não são diferenciáveis, a igualdade $\frac{d}{dt}f(B_t) = f'(B_t)B'(t)$ não tem mais significado. Por isso precisamos utilizar da fórmula de Itô, que é uma outra versão da regra da cadeia para casos estocásticos.

Além disso, a fórmula de Itô é um tipo de regra da cadeia para o cálculo estocástico que torna possível encontrar soluções de algumas EDEs (equações diferenciais estocásticas).

Proposição 9. (Fórmula de Itô) *Seja $g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ (isto é, g é duas vezes continuamente diferenciável em $[0; \infty) \times \mathbb{R}$). Então $Y_t = g(t, X_t)$ é novamente um processo de Itô, e*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t).(dX_t)^2,$$

onde $(dX_t)^2 = (dX_t).(dX_t)$ é calculado de acordo com as regras

$$dt \times dt = dt \times dB_t = dB_t \times dt = 0 \text{ e } dB_t \times dB_t = dt.$$

Para ver uma interpretação para as regras $dt \times dt = dt \times dB_t = dB_t \times dt = 0$ e $dB_t \times dB_t = dt$, ver Apêndice A.

Seja $g : [0, \infty] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x)) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$. Então $Y(t, \omega) = g(t, X_t)$ é novamente um processo de Itô, cujo número de componente k, Y_k , é dado por

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \cdot dX_i dX_j,$$

onde $dB_i dB_j = \delta_{ij} dt, dB_i dt = dt dB_i = 0, \delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

2.2 Equações diferenciais estocásticas

Aqui iremos apresentar uma ideia das equações diferenciais estocásticas (EDE).

Seja X_t um processo estocástico contínuo. De forma intuitiva se pequenas mudanças no processo X_t podem ser escrita como uma combinação linear de pequenas mudanças em t e pequenos incrementos do movimento browniano B_t , podemos escrever

$$dX(t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad (2.2)$$

onde $b(t, x)$ e $\sigma(t, x) \in \mathbb{R}$. Essa equação é chamada de EDE, que é impulsionada pelo movimento browniano.

Formalmente, a equação (2.2) satisfaz a equação estocástica na forma de integral definida a seguir

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s; X_s)ds + \int_0^t \sigma(s; X_s)dB_s, \quad (2.3)$$

que é usualmente escrita da forma (2.2).

A fórmula de Itô é uma ferramenta bastante útil para determinar a solução de muitas equações diferenciais estocásticas. Para exemplificar, vamos considerar o modelo a seguir de crescimento populacional dada a equação (com N_0 dado):

$$\frac{dN_t}{dt} = a_t N_t,$$

onde $a_t = r_t + \alpha W_t$, W_t = ruído branco, α = constante.

Com base em muitas situações, por exemplo na engenharia, somos levados a supor que W_t possui, pelo menos aproximadamente, estas propriedades:

1. $t_1 \neq t_2 \Rightarrow W_{t_1}$ e W_{t_2} são independentes.
2. $\{W_t\}$ é estacionário, ou seja, a distribuição (conjunta) de $\{W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$ não depende de t .
3. $\mathbb{E}[W_t] = 0$ para todo t .

Seria interessante ter um processo que satisfaça a condição 1 e 2, e o processo que mais se aproxima é os incrementos do movimento browniano. Sendo assim, podemos trocar o ruído branco W_t por $\frac{dB_t}{dt}$ e multiplicar por dt . Para maiores detalhes, ver Oksendal (2000, p.21) [15].

Supondo que $r_t = r = \text{constante}$, representando da maneira que vimos na equação (2.2), onde aqui $\sigma(t, x) = \alpha x$, temos

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t, \quad (2.4)$$

ou

$$\frac{dN_t}{N_t} = r dt + \alpha dB_t.$$

Consequentemente,

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha B_t, \quad (2.5)$$

com $B_0 = 0$.

Para avaliar a integral do lado esquerdo, utilizamos a fórmula de Itô para a função

$$g(t, x) = \ln x; \quad x > 0,$$

e obtemos

$$\begin{aligned} d(\ln N_t) &= \frac{1}{N_t} dN_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{N_t^2} \right) (dN_t)^2 \\ &= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2} \alpha^2 N_t^2 dt = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2} \alpha^2 dt. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2} \alpha^2 dt.$$

Integrando ambos os lados:

$$\int_0^t \frac{dN_t}{N_t} = \int_0^t d(\ln N_t) + \int_0^t \frac{1}{2} \alpha^2 dt$$

$$rt + \alpha B_t = \ln N_t - \ln N_0 + \frac{1}{2} \alpha^2 t$$

$$rt + \alpha B_t = \ln \frac{N_t}{N_0} + \frac{1}{2} \alpha^2 t;$$

então concluímos

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = (r - \frac{1}{2} \alpha^2)t + \alpha B_t$$

ou

$$N_t = N_0 e^{(r - \frac{1}{2} \alpha^2)t + \alpha B_t}. \quad (2.6)$$

Baseado no resultado que garante que para t grande quase sempre $B_t = \sqrt{2t \log \log t}$, ou seja,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1,$$

pode-se chegar que

- Se $r > \frac{1}{2} \alpha^2$, então $N_t \rightarrow \infty$, com $t \rightarrow \infty$ quase sempre;
- Se $r < \frac{1}{2} \alpha^2$, então $N_t \rightarrow 0$, com $t \rightarrow \infty$ quase sempre;
- Se $r = \frac{1}{2} \alpha^2$, então quase sempre N_t irá alternar arbitrariamente entre grande e pequenos valores com $t \rightarrow \infty$.

Para mais detalhes dessa interpretação, ver Oksendal (2000, p.62) [15].

Por fim, apresentamos o resultado de existência e unicidade na versão estocástica.

Proposição 11. (*Existência e unicidade*) *Seja X_t satisfazendo*

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, \quad (2.7)$$

com $X(0) = X_0$. Se as seguintes condições definidas a seguir são satisfeitas,

1. Os coeficientes são localmente Lipschitz na variável x e uniformemente na variável t , isto é, para cada T e N , existe uma constante L dependendo somente de T e

de N de modo que para todos $|x|, |y| \leq N$ e todos $0 \leq t \leq T$:

$$|b(x, t) - b(y, t)| \leq L|x - y|;$$

$$|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq L|x - y|.$$

2. Os coeficientes satisfazem a condição de crescimento linear

$$|b(x, t)| \leq L(1 + |x|);$$

$$|\sigma(x, t)| \leq L(1 + |x|).$$

3. $X(0)$ é independente de $(B_t, 0 \leq t \leq T)$ e $\mathbb{E}X^2(0) < \infty$,

então existe uma única solução para a equação diferencial estocástica (2.7).

A prova dessa proposição pode ser encontrada em Oksendal (2000, p.66) [15].

Análise de estabilidade: caso determinístico

Neste capítulo apresentamos o método de Lyapunov para o caso determinístico para posteriormente, no próximo capítulo, analisarmos o método para o caso estocástico.

Para começar, também analisamos alguns casos em que não é necessário o uso do método de Lyapunov, como, por exemplo, o caso de sistemas lineares ou método de linearização. Além disso, evidenciamos uma seção somente para o caso de EDO(s) não autônomas, que é um caso mais geral, no intuito de ficar mais fácil a comparação do método em relação às EDE(s). Essa comparação será possível por conta da fórmula de Itô, que é um tipo de regra da cadeia para o cálculo estocástico.

Existem diferentes abordagens ao problema da estabilidade: o método da linearização, que busca reduzir o estudo da estabilidade ao caso de sistemas lineares, e o método das funções de Lyapunov, cuja motivação original remonta ao estudo de sistemas mecânicos que dissipam energia. Daqui em diante, seguimos os livros Lopes e Doering (2016) [4] e Viana e Espinar (2018) [17].

Para as EDO(s), em particular, veremos que os resultados encontrados incorporam a versão mais simples de integração de uma desigualdade diferencial pois deduz-se, da não positividade de sua derivada, que uma função do tipo Lyapunov aplicada a uma solução é uma função não crescente. Essa abordagem é útil para resultados qualitativos,

pois apenas a forma da função de Lyapunov e a equação diferencial, e não a forma explícita da solução, são necessárias para estabelecer a não positividade da derivada.

Na dinâmica de um campo de vetores, as singularidades possuem as trajetórias de campo constantes, não movendo sobre o ponto de equilíbrio, ou seja, dizemos que $x_0 \in E$ é uma singularidade, ou um ponto singular do campo f (ou da equação diferencial $x' = f(x)$) se $f(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Por exemplo, para as equações diferenciais lineares $x' = Ax$, a origem $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ é sempre um ponto singular, pois sempre vale $A \cdot 0 = 0$.

Também dizemos que uma singularidade do campo f é um ponto de equilíbrio de f , já que o sistema fica em repouso em um ponto de equilíbrio, pois $x(t) = x_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Decorre que um ponto x_0 de equilíbrio de f pode ser caracterizado como um ponto tal que $\phi(t, x_0) = x_0$, para cada $t \in \mathbb{R}$, onde $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o fluxo associado ao campo f .

No caso de retratos de fase de sistemas de equações diferenciais lineares no plano, podemos simplificar e observar que existem apenas três tipos geométricos de retratos de fase de equações diferenciais lineares hiperbólicas no plano (dizemos que uma matriz $A \in M(2)$ é hiperbólica se a parte real de cada um de seus dois autovalores generalizados é não-nula), classificados de acordo com o número de autovalores generalizados com parte real positiva, a saber:

- a) Os atratores, com ambos autovalores generalizados de parte real negativa: todas soluções tendem à origem com $t \rightarrow +\infty$;
- b) Os repulsores, com ambos autovalores generalizados de parte real positiva: todas soluções tendem à origem com $t \rightarrow -\infty$;
- c) As selas, com um autovalor real positivo e o outro negativo: duas soluções tendem à origem com $t \rightarrow -\infty$, duas com $t \rightarrow +\infty$ e as demais não tendem à origem com $t \rightarrow \pm\infty$.

Exemplo 12. Considere a EDO linear $x' = Ax$. Suponha que o polinômio característico da matriz $A \in M(2)$ tem duas raízes reais iguais $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ e tem a solução a seguir

$$x(t) = (k_1 e^{\lambda t}, k_2 e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} (k_1, k_2) = e^{\lambda t} x(0),$$

com a condição inicial $x(0) = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$. Então, se $\lambda \neq 0$, as curvas definidas pelas soluções são todas semi-retas na origem.

Se λ é negativo, ambas coordenadas das soluções tendem a 0 com $t \rightarrow +\infty$ ao longo da semi-reta definida pelo autovetor e a $+\infty$, com $t \rightarrow -\infty$. O retrato de fase é perfeitamente radial, como indica a Figura 3.1 a). Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um atrator linear, ou que a origem é um poço; mais precisamente, nesse caso, dizemos que a origem é um foco estável.

Se λ é positivo, o retrato de fase é como o anterior, trocando t por $-t$ e, portanto, o sentido das setas, como indica a Figura 3.1 b). Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um repulsor linear; ou então, que a origem é uma fonte; mais precisamente, nesse caso, dizemos que a origem é um foco instável.

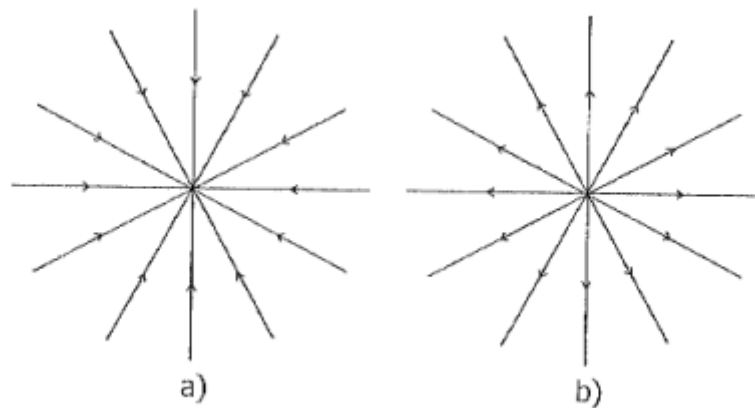


Figura 3.1: Foco a) estável: $\lambda < 0$; b) instável: $\lambda > 0$. Fonte: Doering e Lopes (2016).

A análise dos pontos de equilíbrio de uma equação diferencial é muitas vezes extremamente importante para ajudar no entendimento global do comportamento das trajetórias no espaço de fase. No caso de equações diferenciais definidas por campos de vetores não-lineares, o comportamento das soluções da equação diferencial em torno de uma singularidade pode exibir uma riqueza dinâmica muito maior do que no caso de campos lineares.

Assumindo que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sempre um campo de vetores de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, com fluxo global $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ definido em cada $(t, x) \in \Omega = \mathbb{R} \times E$, temos as seguintes definições:

Definição 13. Seja x_0 um ponto de equilíbrio para o campo f . Dizemos que x_0 é um **ponto de equilíbrio estável** de f se, para qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que

- a) $W \subseteq E \cap U$;
- b) $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$.

Em termos mais analíticos, a singularidade x_0 de f é estável se, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos sempre encontrar $r > 0$, tal que $|\phi_t(x) - x_0| \leq \varepsilon$, para cada $t > 0$ e cada $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$, com $|x - x_0| \leq r$.

Aqui, como é usado na literatura, $|\cdot|$ sempre denota norma euclidiana se estivermos no \mathbb{R}^n , e módulo caso estejamos com apenas uma variável.

Podemos interpretar essa definição graficamente, onde o eixo x representa o tempo. (Ver Figura 3.2)

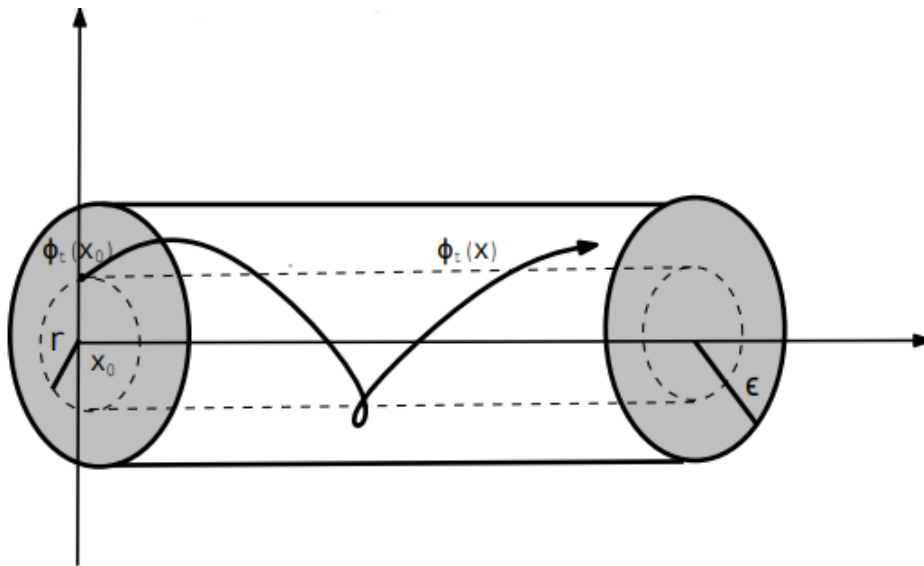


Figura 3.2: Interpretação gráfica de um ponto de equilíbrio estável. Fonte: Elaboração Própria.

Também dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio instável se x_0 não é um ponto de equilíbrio estável. Além disso, dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio isolado se existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que x_0 é a única singularidade de f em $E \cap W$.

Definição 14. Seja x_0 um ponto de equilíbrio para um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é um **ponto de equilíbrio assintoticamente estável** para f se, para qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que

- a) $W \subseteq E \cap U$;
- b) $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$;
- c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$, para qualquer $x \in W$.

Também podemos interpretar essa definição graficamente, onde o eixo x representa o tempo (Ver Figura 3.3).

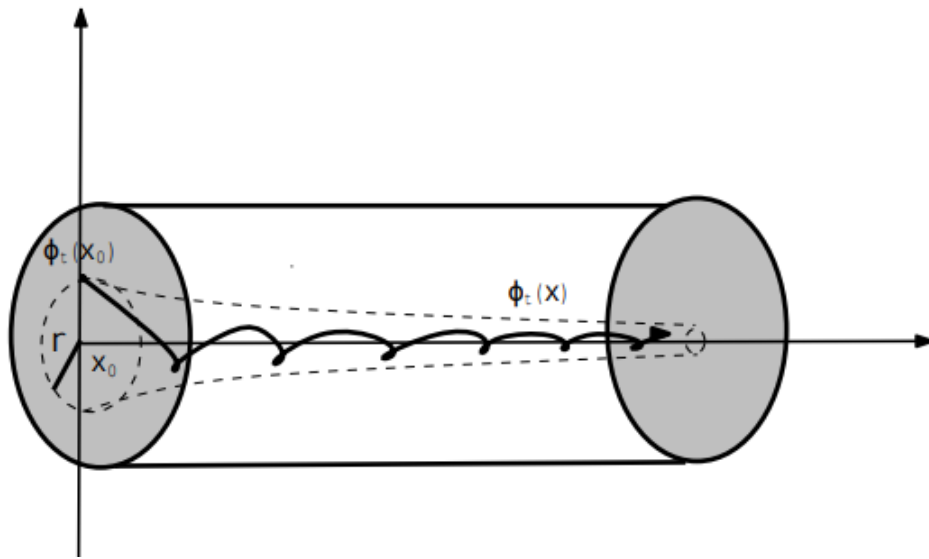


Figura 3.3: Interpretação gráfica de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.

Um ponto de equilíbrio assintoticamente estável é sempre um ponto de equilíbrio isolado. É claro que todo ponto de equilíbrio assintoticamente estável é, em particular, um ponto de equilíbrio estável, mas a recíproca não vale.

Seja o campo linear $f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$. A origem é um ponto de equilíbrio estável desse campo, que não é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Todas as trajetórias percorrem círculos em torno da origem, como pode ser visto na Figura 3.4. Porém, as trajetórias na vizinhança da origem são todas periódicas, rodando em círculos, e não convergem à $x_0 = (0, 0)$, quando t tende ao infinito.

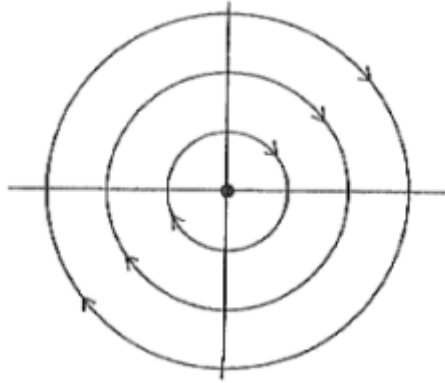


Figura 3.4: Exemplo de um ponto de equilíbrio estável, que não é assintoticamente estável. Fonte: Doering e Lopes (2016).

Sabemos que para campos lineares, um critério necessário e suficiente para que o equilíbrio na origem de um sistema linear em \mathbb{R}^n seja assintoticamente estável, é que todos os autovalores generalizados do campo tenham parte real negativa.

Além disso, existe também um método chamado de método de linearização, que é um método que transforma uma equação não linear, em uma quase linear. Com isso, as propriedades obtidas para sistemas lineares são úteis para os sistemas não lineares, pois agora basta analisar a parte linear dos campos não lineares, ou seja, sua aplicação derivada. Mas esse método só é válido com algumas condições.

Quando a aproximação linear é hiperbólica ela determina completamente a estabilidade do equilíbrio, mas quando a matriz A tem autovalores com parte real nula não é possível, em geral, inferir nada quanto à estabilidade do equilíbrio $x_0 = 0$ para a equação quase linear.

Seja a equação autônoma

$$x' = f(x), \quad (3.1)$$

onde a aplicação $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um campo de vetores de classe C^1 satisfazendo $f(0) = 0$.

Sabendo que as soluções de uma equação autônoma não dependem da escolha do tempo inicial e as propriedades de estabilidade e estabilidade assintótica não são afetadas pela escolha de t_0 , fixaremos $t_0 = 0$ para o caso autônomo.

Em geral, $f(x)$ pode ser vista como a soma de sua série de Taylor:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

Se considerarmos $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ de modo que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Então, $R_n(x)$ é denominado resto da série de Taylor.

Sabendo que $f(0) = 0$, podemos escrever o campo não linear como $f(x) = f(0) + Ax + R(x)$, onde $A(x)$ representa a parte diferencial, matricialmente.

Como f é n -vezes derivável em x_0 então podemos utilizar a Fórmula de Taylor de várias variáveis para decompor a função $f(x) = A(x) + R(x)$ com

$$A = Df(0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|R(x)|}{|x|} = 0.$$

Como $R(x)$ se torna desprezível, podemos escrever a equação (3.1) como uma equação diferencial quase linear:

$$x' = Ax + R(x). \quad (3.2)$$

Isto sugere que busquemos condições para estabilidade (ou instabilidade) em termos da derivada A do campo de vetores no ponto estacionário. Esta abordagem do problema da estabilidade é chamada método da linearização e a equação

$$x' = Ax$$

é chamada linearização da equação (3.1).

Proposição 15. *Se $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um campo de vetores linear hiperbólico então o equilíbrio $x_0 = 0$ é estável para o fluxo da equação (3.2), se e somente se, A é um atrator hiperbólico. Nesse caso, o equilíbrio é assintoticamente estável, para (3.2).*

A prova desse resultado pode ser vista em Viana e Espinar (2018, p.225) [17].

Exemplo 16. *Considere o ponto estacionário $(\pi, 0)$ de um pêndulo harmônico*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(g/l) \sin x \end{cases} \quad (3.3)$$

O campo de vetores é $f(x, y) = (y, -(g/l) \operatorname{sen} x)$ e a derivada $A = \operatorname{Df}(\pi, 0)$ está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Portanto, a linearização de (3.3) no ponto $(\pi, 0)$ é a equação

$$\begin{cases} x' = y. \\ y' = (g/l)x. \end{cases}$$

Note que A tem autovalores reais $\pm\sqrt{g/l}$. Segue que o ponto estacionário é instável, tanto para A quanto para f .

Consideremos agora a equação do pêndulo com atrito

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(g/l) \operatorname{sen} x - cy, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde c é uma constante não negativa. Se a constante $c = 0$, voltamos à equação (3.3) do pêndulo harmônico.

Ao fazer a mesma análise, obtemos que a linearização da equação (3.5) é

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -(g/l)x, \end{cases}$$

e o respectivo campo de vetores linear tem autovalores com parte real nula. Nessas circunstâncias, o método da linearização não permite inferir nada sobre a estabilidade da equação quase linear.

3.1 Método de Lyapunov para EDO

Finalmente, apresentamos critérios que são suficientes para saber se um ponto de equilíbrio de um campo é estável ou, então, assintoticamente estável, mas que não envolvem o conhecimento dos autovalores da parte linear do campo, e sim o conhecimento de uma função de Lyapunov. Primeiro foi visto o Teorema de Lyapunov (Parte I), que usa a definição de uma função de Lyapunov e ponto de equilíbrio estável. Logo em

seguida, analisamos também o Teorema de Lyapunov (Parte II), que usa a definição de uma função de Lyapunov estrita e ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Definição 17. *Sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio de f e $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 . Além disso, seja $x(t) = \phi_t(x) = \phi(t, x)$, onde ϕ_t é o fluxo associado ao campo f . Dizemos que V é uma **função de Lyapunov** para f em x_0 se*

- a) $V(x_0) = 0$, com $V(x) > 0$, para cada $x \in W - \{x_0\}$;
- b) $V(\phi(t_1, x)) \geq V(\phi(t_2, x))$, para quaisquer $x \in E$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t, x) \in W$, se $t_1 \leq t \leq t_2$.

Também dizemos que V é definida positiva se $V(x) > 0$ para cada $x \in W - \{x_0\}$.

A primeira condição dessa definição afirma que V tem um mínimo estrito absoluto na singularidade e a segunda que V não é crescente ao longo de qualquer trajetória $x(t) = \phi_t(x) = \phi(t, x)$ de f , enquanto essa trajetória estiver no domínio W de V .

Examinemos mais de perto a segunda condição exigida de uma função de Lyapunov. Para funções V que são diferenciáveis em $W - \{x_0\}$, essa condição é garantida sempre que

$$(V \circ x)'(t) \leq 0,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, tal que $x(t) \in W$. Essa condição mais forte envolve o conhecimento das soluções $x(t)$. No entanto, lembrando que o fluxo $\phi_t(x)$ de f satisfaz a equação diferencial $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x))$ do campo f , vemos que

$$\begin{aligned} (V \circ x)'(t) &= \frac{d}{dt}V(\phi_t(x)) = \left\langle \nabla V(\phi_t(x)), \frac{d}{dt}\phi_t(x) \right\rangle \\ &= \langle \nabla V(\phi_t(x)), f(\phi_t(x)) \rangle, \end{aligned}$$

onde, $\langle u, v \rangle$ indica o produto interno euclidiano de $u, v \in \mathbb{R}^n$. Isso mostra que, em geral, não precisamos conhecer as soluções explícitas $x(t)$ de $x' = f(x)$ e em seguida conferir se $V(x(t))$ é não-crescente para verificar a segunda condição exigida de uma função de Lyapunov diferenciável, mas apenas conferir se

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0,$$

para x na vizinhança de x_0 , o que é extremamente mais prático.

O método que vamos introduzir a seguir tem a sua origem na observação empírica de que se a energia de um sistema físico é dissipada ao longo do tempo, então o sistema costuma tender a um estado de equilíbrio estável. Este método se aplica igualmente bem a sistemas lineares e não lineares e, como veremos, permite uma análise muito mais global do que aquela que é facultada pelo método da linearização, além de que pode ser aplicado em muitas situações em que o método da linearização é inconclusivo.

A existência de uma função de Lyapunov numa singularidade de um campo garante a estabilidade dessa singularidade, como segue.

Teorema 18. (Teorema de Lyapunov - Parte I). *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de um campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Lyapunov para f em x_0 , então x_0 é um ponto de equilíbrio estável de f .*

Demonstração: Seja x_0 um ponto de equilíbrio de f e suponhamos que exista uma função de Lyapunov de f em x_0 ; mais precisamente, seja $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua na vizinhança W de x_0 em \mathbb{R}^n , tal que $V(x_0) = 0$, com $V(x) > 0$ para cada $x \in W - \{x_0\}$, e tal que $V \circ x : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não crescente para qualquer solução $x : I \rightarrow E$ de $x' = f(x)$, tal que $x(t) \in W$, para cada $t \in I$.

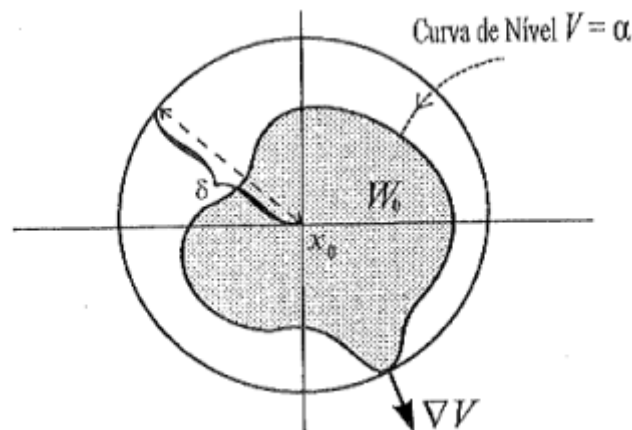


Figura 3.5: Demonstração do Teorema de Lyapunov I em \mathbb{R}^2 . Fonte: Doering e Lopes (2016).

Vamos demonstrar que o ponto de equilíbrio x_0 é estável; em outras palavras, queremos mostrar que, para qualquer vizinhança U de x_0 em \mathbb{R}^n , existe uma vizinhança W_0 de x_0 , tal que $W_0 \subseteq U$ e $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$.

Seja, pois, U uma vizinhança qualquer de x_0 em \mathbb{R}^n . Escolhemos $\delta > 0$, tal que $B(x_0, \delta) \subseteq U \cap W$, onde $B(x_0, \delta) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - x_0| < \delta\}$ denota a bola em \mathbb{R}^n de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio δ . Como V é contínua e a esfera $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \delta\} \subseteq W$ é compacta, temos que

$$\alpha = \min_{|x-x_0|=\delta} V(x) > 0,$$

já que $V(x) > 0$ para $x \in W - \{x_0\}$. Novamente pela continuidade de V , o conjunto definido por $W_0 = \{x \in B(x_0, \delta) \mid V(x) < \alpha\}$ é aberto, pois $W_0 = V^{-1}\{(-\infty, \alpha)\} \cap B(x_0, \delta)$ (união de abertos é um aberto).

Portanto, como $V(x_0) = 0$, W_0 é uma vizinhança de x_0 que, por construção, satisfaz $W_0 \subseteq U \cap W$ (ver na Figura 3.5 que $W_0 \subseteq B(x_0, \delta)$). Resta provar que $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$.

Dado qualquer $x \in W_0$, suponha, para obter uma contradição, que valha $\phi_t(x) \notin U$, para algum $t > 0$. Em particular, $\phi_t(x) \notin B(x_0, \delta)$ e, portanto, como $x \in W_0 \subseteq B(x_0, \delta) \subseteq U \cap W$, em algum instante $0 < t_* < t$, a trajetória por x deve passar uma primeira vez pela esfera de centro x_0 e raio δ , ou seja, $|\phi_{t_*}(x) - x_0| = \delta$. Mas então $V(\phi_0(x)) = V(x) < \alpha \leq V(\phi_{t_*}(x))$, pois α é o mínimo dos valores de $V(x)$ na esfera $S(x_0, \delta)$. Sendo assim,

$$V(\phi_0(x)) < V(\phi_{t_*}(x)),$$

com $0 < t_*$, o que contradiz nossa hipótese que afirma que V não cresce ao longo das trajetórias de f . Isso prova que $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$ e, portanto, que x_0 é um ponto de equilíbrio estável. ■

Apresentamos a seguir um exemplo que utiliza do Teorema de Lyapunov - Parte I (18).

Exemplo 19. *Consideremos a equação diferencial*

$$\begin{cases} x' = 2y(z - 1) \\ y' = -x(z - 1) \\ z' = -z \end{cases}$$

definida pelo campo de vetores não-linear,

$$f(x, y, z) = (2yz - 2y, x - xz, -z).$$

A parte linear desse sistema no ponto de equilíbrio dado pela origem $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ é

$$Df(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $\pm i\sqrt{2}$ e -1 e, portanto, não vale que todos têm parte real negativa e, assim, não podemos utilizar os resultados já conhecidos sobre autovalores para estabelecer a estabilidade do sistema na origem.

Vamos tentar obter uma função de Lyapunov para o sistema na origem no formato quadrático. Se tomarmos $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, com $a, b, c > 0$; temos que:

- $V(0, 0, 0) = 0$ e $V(x, y, z) > 0$, para cada $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.
- V é diferenciável e

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z) \rangle &= \langle (2ax, 2by, 2cz), (2yz - 2y, x - xz, -z) \rangle \\ &= (2b - 4a)xy + (4a - 2b)xyz - 2cz^2. \end{aligned}$$

E assim, se tomarmos $a = 1, b = 2a = 2$ e $c = 1$, resulta que pra todo x, y, z :

$$\langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z) \rangle = -2z^2 \leq 0,$$

para $V(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$.

Logo, pelo Teorema de Lyapunov (Parte I) (18), podemos concluir que (x_0, y_0, z_0) é um ponto de equilíbrio estável do sistema.

Definição 20. Sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio de f e $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 . Dizemos que V é uma **função de Lyapunov estrita** de f em x_0 se

- a) $V(x_0) = 0$, com $V(x) > 0$, para cada $x \in W - \{x_0\}$;
- b) $V(\phi(t_1, x)) > V(\phi(t_2, x))$ para quaisquer $x \in E, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t, x) \in W - \{x_0\}$, se $t_1 \leq t \leq t_2$.

A segunda condição dessa definição agora afirma que V efetivamente decresce ao longo de qualquer trajetória $x(t) = \phi_t(x) = \phi(t, x)$ de f , enquanto essa trajetória estiver em $W - \{x_0\}$. Pelo que vimos acima, se V é uma função diferenciável em $W - \{x_0\}$, isso ocorre se

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0,$$

para cada $x \neq x_0$ na vizinhança de x_0 . Também dizemos que $V'(x)$ é definida negativa se $V'(x) < 0$, para cada $x \in W - \{x_0\}$.

A existência de uma função de Lyapunov estrita numa singularidade de um campo garante a estabilidade assintótica da singularidade, como mostraremos a seguir.

Teorema 21. (Teorema de Lyapunov - Parte II). *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de um campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Lyapunov estrita para f em x_0 , então x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de f .*

Demonstração:

Sejam x_0 um ponto de equilíbrio para f e $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov estrita de f em x_0 , ou seja, V é contínua na vizinhança W de x_0 em \mathbb{R}^n e $V(\phi(t_1, x)) > V(\phi(t_2, x))$, para quaisquer $x \in E, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x), \phi(t_2, x) \in W$. Queremos provar que x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para f , ou seja, que dada uma vizinhança qualquer U de x_0 em \mathbb{R}^n , existe uma vizinhança W_0 de x_0 , tal que $W_0 \subseteq U$ e, além de valer $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$, também vale $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$, para qualquer $x \in W_0$.

Como antes, na demonstração da parte I do Teorema de Lyapunov, tomamos δ , tal que $B(x_0, \delta) \subseteq U \cap E$ e $\alpha = \min V(x)$ com $|x - x_0| = \delta$. Novamente, $\alpha > 0$ e definimos $W_0 = \{x \in B(x_0, \delta) \mid V(x) < \alpha\}$ (ver Figura 3.5). Pelo que demonstramos na parte I do Teorema de Lyapunov, temos $x_0 \in W_0 \subseteq U \cap E \subseteq U$ e $\phi_t(x) \in B(x_0, \delta)$, para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$; em particular, $\phi_t(x) \in U$ para quaisquer $x \in W_0$ e $t > 0$

e, portanto, somente resta mostrar que, para qualquer $x \in W_0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0.$$

É claro que isso vale para $x = x_0$, pois x_0 é um ponto de equilíbrio para f ; o que devemos mostrar, então, é que isso vale para os demais $x \neq x_0$. Vamos procurar uma contradição, supondo, contrariamente, que existam $\tilde{x} \in W_0 - \{x_0\}$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para cada $T > 0$, podemos encontrar $t > T$, tal que $|\phi_t(\tilde{x}) - x_0| \geq \varepsilon_0$. Para cada $T = k$ inteiro, obtemos, então, $t_k > k$, tal que $\phi_{t_k}(\tilde{x}) \notin B(x_0, \varepsilon)$. Por outro lado, pela escolha de δ e de W_0 , temos $\phi_{t_k}(\tilde{x}) \in B(x_0, \delta)$, para cada k , ou seja, a sequência dada por $x_k = \phi_{t_k}(\tilde{x})$ é limitada. Toda sequência limitada num compacto, possui subsequência convergente. Podemos, portanto, tomar uma subsequência convergente, cujo limite x_1 está em U , mas não está em $B(x_0, \varepsilon_0)$; em particular, $x_1 \neq x_0$. Por hipótese, temos $f(x_1) \neq 0$, pois, caso contrário, x_1 seria uma singularidade e, portanto, teríamos $V(\phi_t(x_1)) = V(x_1)$ constante em t , contrariando a hipótese de que V é decrescente ao longo das trajetórias fora de x_0 .

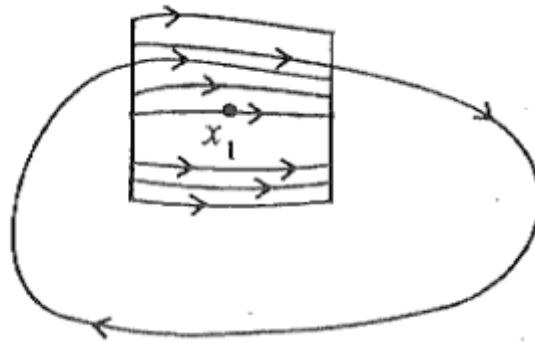


Figura 3.6: Demonstração do Teorema de Lyapunov II em \mathbb{R}^2 . Fonte: Doering e Lopes (2016).

Como x_1 não é um ponto de equilíbrio, o Teorema 32 garante que x_1 tem a propriedade fluxo tubular (ver Apêndice B), ou seja, existe uma vizinhança de x_1 contendo uma caixa na qual as trajetórias de f entram por um lado e saem pelo outro (ver Figura 3.6).

Vamos escolher essa vizinhança tubular de maneira conveniente. Já que $x_1 \in W$ e $x_1 \neq x_0$, temos $V(\phi_{-\varepsilon}(x_1)) > V(x_1) > V(\phi_{\varepsilon}(x_1))$, para qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno:

fixamos a caixa de tal modo que os pontos $\phi_{-\varepsilon}(x_1)$ e $\phi_{\varepsilon}(x_1)$ estejam nas faces extremas de entrada da caixa e de saída da caixa, respectivamente.

Por continuidade de V , é fácil, então, estabelecer que os valores de V nos pontos da face de entrada na caixa são todos estritamente maiores que os valores de V nos pontos da face de saída da caixa. (Isso ocorre pois, por hipótese, V é necessariamente decrescente.)

Por outro lado, como uma subsequência $x_k = \phi_{t_k}(\tilde{x})$ converge a x_1 , a mesma trajetória por \tilde{x} passa infinitas vezes pela caixa; mas entre um tempo de saída da caixa e o seguinte de entrada, V necessariamente decresce. Vemos então que a trajetória por \tilde{x} sai da caixa com valor de V cada vez menor, pois está se aproximando de x_1 , o que acarreta uma contradição. (Os valores de entrada deveriam ser maiores e não menores).

Isso prova que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$, para qualquer $x \in W_0$ e, portanto, que o ponto de equilíbrio x_0 é assintoticamente estável. ■

Apresentamos a seguir um exemplo que utiliza do Teorema de Lyapunov - Parte II (21).

Exemplo 22. Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = x(x^2 + y^2 - 1) - y \\ y' = y(x^2 + y^2 - 1) + x \end{cases}$$

que é associada ao campo $f(x, y) = (x(x^2 + y^2 - 1) - y, y(x^2 + y^2 - 1) + x)$, temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $f(0, 0) = (0, 0)$.

Se tomarmos $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ em torno de $(0, 0)$ temos que

- $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.
- V é diferenciável e

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle &= \langle (x, y), (x^3 + xy^2 - x - y, yx^2 + y^3 - y + x) \rangle \\ &= x^4 - x^2 + x^2y^2 - xy + x^2y^2 + y^4 - y^2 + xy = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - x^2 - y^2 \\ &= (x^2 + y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

Temos que V será definida negativa somente no interior do círculo unitário, ou seja

$$x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow V' < 0.$$

Logo, para uma vizinhança W da origem (interior do círculo unitário), pelo Teorema de Lyapunov (Parte II) 21), podemos concluir que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema.

Para ver mais exemplos utilizando o Teorema de Lyapunov (Parte I) e o Teorema de Lyapunov (Parte II), consultar Apêndice C.

A seguir temos uma ilustração (ver Figura 3.7) que evidencia a diferença entre uma função de Lyapunov e uma função de Lyapunov estrita. Essa representação é o gráfico de V . Em ambas as partes, traçamos $V(x)$ versus a trajetória de solução $x(t)$, que se encontra no plano horizontal. Um equilíbrio é o ponto crítico do gráfico da função de Lyapunov V .

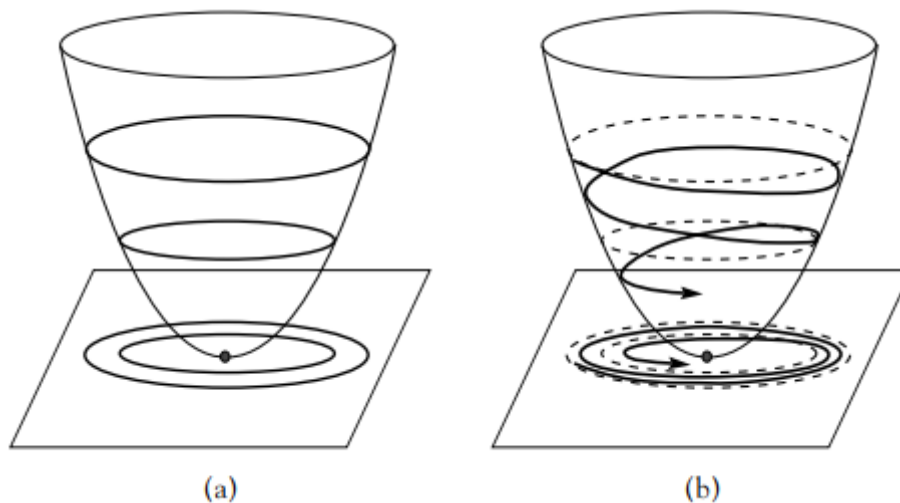


Figura 3.7: (a) O equilíbrio é (Lyapunov) estável, uma vez que qualquer solução próxima não pode subir e pode apenas se afastar uma distância limitada ditada por seu nível de energia original. (b) Para uma função de Lyapunov estrita, a energia das soluções deve diminuir continuamente até zero, cortando através de conjuntos de níveis de energia. O equilíbrio é assintoticamente estável. Fonte: Alligood, et al. (1998).

3.1.1 Caso determinístico não autônomo

A seguir temos algumas definições e resultados sobre soluções limitadas, para o caso determinístico. Aqui, evidenciamos novamente mais algumas definições para

EDO(s), pois trata-se de definições adaptadas para o caso não autônomo que serão mais úteis para serem comparadas com as definições para as EDE(s), tópico abordado no próximo capítulo. O objetivo é apresentar a ideia principal de como seria as definições para o caso não autônomo, então não será feita nenhuma demonstração. A partir dessa seção seguimos o livro do Gard (1998) [7].

Seja $f(t, x)$ contínua em \mathbb{R}^n , definida para todo $t \in [t_0, T]$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $x(t; t_0, x_0)$ a solução do problema determinístico de valor inicial definido a seguir

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \text{ com } x(t_0) = x_0. \quad (3.6)$$

Essa solução é **limitada** se existir uma constante $\beta = \beta(t_0, x_0) > 0$, tal que

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq \beta, \quad \text{para todo } t \geq t_0. \quad (3.7)$$

A solução é dita **uniformemente limitada** se β for independente de $t_0 > 0$ e se para cada $\alpha > 0$, existe uma constante $\beta_\alpha > 0$, tal que

$$|x(t; t_0, x_0)| \leq \beta_\alpha, \quad t \geq t_0, \text{ para todo } t_0, \text{ e } |x_0| < \alpha. \quad (3.8)$$

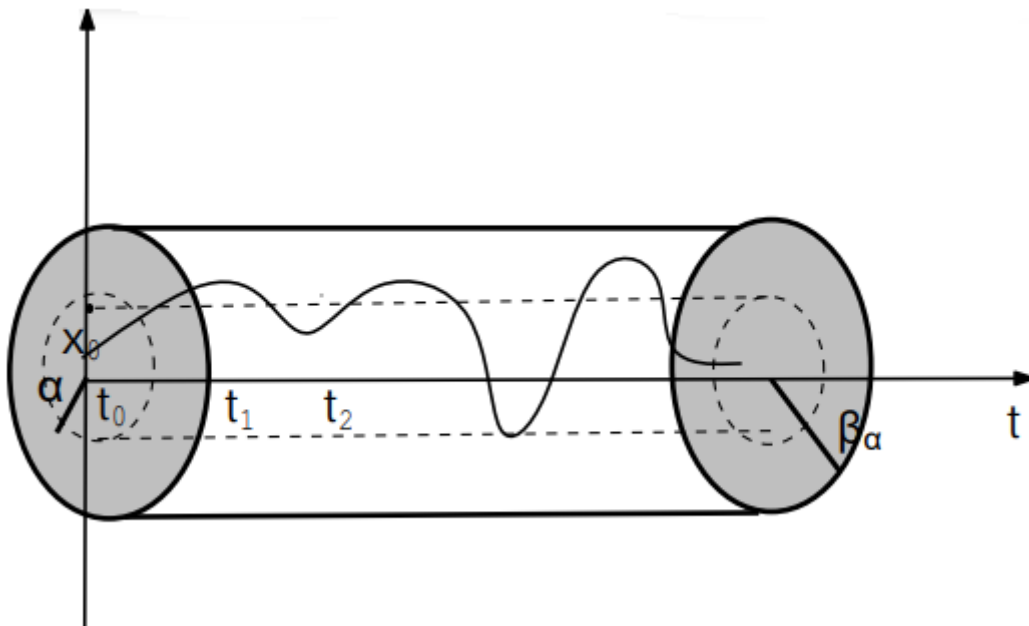


Figura 3.8: Representação de uniformemente limitado. Fonte: Elaboração Própria.

Os seguintes resultados fornecem uma condição em termos de funções do tipo Lyapunov para a limitação de soluções $x(t)$ da equação (3.6). As funções V nestes resultados serão assumidas como não negativas e continuamente diferenciáveis em um conjunto apropriado. As condições-chave nos teoremas do tipo Lyapunov são expressas em termos da derivada de V ao longo das curvas de solução de (3.6),

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} = V'(t, x) \equiv \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot f \right] (t, x(t)),$$

o que torna possível sua verificação sem o conhecimento explícito de $x(t)$.

Proposição 23. *Suponha para $t > 0$ e $|x| \geq K$, onde K é constante, existe uma função não-negativa continuamente diferenciável $V(t, x)$ que satisfaz as condições*

- a) $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$, onde a e b são contínuos, e $a(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$.
- b) $V'(t, x) \leq 0$.

Então as soluções de (3.6) são uniformemente limitadas.

A prova desse resultado pode ser encontrada em Yoshizawa (1966) [19].

A seguir temos uma definição de estabilidade mais geral para o caso determinístico não autônomo e que pode ser visto como uma generalização dos conceitos já vistos anteriormente, mas agora para várias variáveis.

A estabilidade para uma solução de equilíbrio ou outra solução escolhida de uma equação diferencial constitui um conceito qualitativo importante para aplicações. A grosso modo, soluções que começam perto da solução escolhida permanecem sempre próximas a essa solução particular para o tempo tendendo ao infinito. Mais precisamente, considere a equação diferencial (3.6) e suponha também que $f(t, 0) = 0$, para todo t ; então $x(t; t_0, 0) \equiv 0$ é uma solução de (3.6).

Esta solução é dita **estável**, se dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(s, \varepsilon) > 0$, tal que para todos $t > s \geq t_0$,

$$|x(t; s, x)| \leq \varepsilon, \text{ sempre que } |x| < \delta.$$

Se, além disso, existir um $\bar{\delta} = \bar{\delta}(s) > 0$, de tal modo que

$$x(t; s, x) \longrightarrow 0 \quad \text{com } t \longrightarrow \infty, \quad (3.9)$$

sempre que $|x| < \bar{\delta}$, então a solução nula é **assintoticamente estável**.

Se $\delta(\bar{\delta})$ não é dependente de s , a estabilidade (estabilidade assintótica) é uniforme. Se (3.9) vale para todos x_0 , então $x(t) \equiv 0$ é referido como globalmente assintoticamente estável.

A seguir temos duas proposições, que são generalizações dos Teoremas de Lyapunov Parte I e Parte II (18 e 21) e que, por sua vez, podem ser vistas como um caso particular do caso estocástico, que vamos tratar no próximo capítulo. Essas duas proposições se encontram em Gard (1998, p.133) [7].

Seja U uma vizinhança de origem em \mathbb{R}^m , e seja $h : U \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$; se $h(0) = 0$ e $h(x) > 0, x \in U, x \neq 0$, então h é dito positivo definido. Além disso, h é chamado definido negativo se $-h$ é definido positivo.

Proposição 24. *Suponha, por $t > 0$ e $|x| \leq K$, alguma constante K , existe uma função continuamente diferenciável $V(t, x)$ que satisfaz as condições*

(i) $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ onde as funções a e b são contínuas e definidas positivas em \mathbb{R}_+ ,

(ii) $V'(t, x) \leq 0$.

Então a solução nula de (3.6) é (uniformemente) estável.

Proposição 25. *Se as premissas da Proposição 24 forem mantidas, exceto (ii) for substituído por*

$$(ii') \quad V'(t, x) \leq -c(|x|),$$

onde c é uma função definida positiva contínua em \mathbb{R}_+ , então a solução nula de (3.6) é (uniformemente) assintoticamente estável. Além disso, se (i) e (ii') valem para todo x , e a função a que aparece em (i) também satisfaz $a(r) \rightarrow \infty$, com $r \rightarrow \infty$ (V é chamado radialmente ilimitado), então $x(t) \equiv 0$ é globalmente assintoticamente estável.

Análise de estabilidade: caso estocástico

Neste capítulo, analisamos o método de Lyapunov para o caso estocástico, no qual utiliza-se a fórmula de Itô, presente na Proposição 9. Daremos aqui a prova de um Teorema de Lyapunov para o caso estocástico e mostraremos um Corolário que será útil para a nossa aplicação, presente no próximo capítulo.

A seguir teremos algumas definições importantes para analisar o método de Lyapunov para o caso estocástico. Veremos que a partir da fórmula de Itô, pode-se fornecer uma expressão para a diferencial estocástica da função de Lyapunov aplicada a uma solução da equação diferencial estocástica (EDE). Pode-se verificar que a partir da não positividade do “drift” desta expressão, pode-se concluir que a função de Lyapunov aplicada a uma solução é um supermartingale. Na teoria de estabilidade estocástica, existem outras definições de estabilidade, como pode ser visto no livro Mao (2007) [13], aqui seguimos o livro do Gard (1998) [7].

Ao longo das próximas definições, considera-se o seguinte sistema estocástico, sob condições que garantem a existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))dB(t), \quad (4.1)$$

onde $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, G é uma função contínua que assume valores no espaço das matrizes $n \times m$, para cada $t \in [t_0, T]$ e $x \in \mathbb{R}^n$; $f(t, x)$ e $G(t, x)$ são pelo menos localmente Lipschitz em x e $B = \{B_j\}$ é o movimento browniano m -dimensional.

A definição de limitação estocástica é de modo geral, análoga a definição para o caso determinístico não autônomo, presente na equação (3.7). Para soluções da equação (4.1), $X(t) = X(t; t_0, x_0)$ satisfazendo $X(t_0) = x_0$ é **estocasticamente limitado** (ou **limitado em probabilidade**), se para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\beta_\varepsilon = \beta_\varepsilon(t_0, x_0) > 0$, tal que

$$\inf_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{P}(|X(t)| \leq \beta_\varepsilon) > 1 - \varepsilon. \quad (4.2)$$

A definição de limitação estocástica uniforme é definida de forma análoga a equação (3.8): β_ε em (4.2) depende apenas de x_0 .

A limitação estocástica implica que o processo não exhibe tendências para valores cada vez maiores e que a frequência média de flutuações para grandes valores não aumenta com o tempo, ou seja, essencialmente, que grandes valores para X são observados com pouca frequência. Uma condição suficiente para limitação estocástica é que para algum $\alpha > 0$, $\mathbb{E}|X(t)|^\alpha$ é limitada no intervalo $[t_0, T]$.

Assim como a estabilidade, a limitação para soluções de (4.1) também pode ser verificada através de uma função do tipo Lyapunov.

Proposição 26. *Suponha que exista uma função contínua não negativa $V(t, x)$ com derivadas parciais contínuas $\partial V/\partial t$, $\partial V/\partial x_i$ e $\partial^2 V/\partial x_i \partial x_j$ que satisfaz as condições*

$$(i) \ a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|), \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são contínuas, e } a(r) \rightarrow \infty \text{ com } r \rightarrow \infty$$

$$(ii) \ LV(t, x) \leq 0, \text{ para } t > 0 \text{ e } |x| \geq K, \text{ com } K \text{ constante, onde}$$

$$LV(t, x) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot f + \frac{1}{2} \text{tr} \left(GG^T V_{xx} \right) \right] (t, x). \quad (4.3)$$

Seja $\tau = \tau_K$ o primeiro tempo de saída de $\{|x| > K\}$ para a solução $X(t)$ de (4.1) com $X(t_0) = x_0, |x_0| > K$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\beta_\varepsilon = \beta_\varepsilon(x_0) > 0$, tal que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t_0 \leq t \leq \tau} |X(t)| \leq \beta_\varepsilon \right) > 1 - \varepsilon.$$

A prova desse resultado pode ser encontrada em Gard (1988, p.129) [7].

Comparando a Proposição 23, com o resultado acima, observe que $V'(t, x)$ é substituído pela expressão $LV(t, x)$. Essa troca é necessária por conta da fórmula de Itô. Sabemos que:

$$\begin{aligned} dV(t, X(t)) &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} g_{ik} g_{jk} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right] (t, X(t)) dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} (t, X(t)) \sum_{j=1}^m g_{ij}(t, X(t)) dB_j(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

para a função V com derivadas parciais contínuas $\partial V/\partial t$, $\partial V/\partial x_i$, e $\partial^2 V/\partial x_i \partial x_j$.

A expressão presente na equação (4.4) pode ser escrita de forma simplificada por

$$dV = \left[V_t + f^T V_x + \frac{1}{2} \text{tr} (GG^T V_{xx}) \right] dt + V_x^T G dB, \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right), \\ V_{xx} &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quando escrevemos a equação (4.5) na forma integral e tomamos a esperança dos dois lados a integral de Itô resulta em zero, portanto o termo $\int_{t_0}^T V_x^T G dB$ desaparece, obtendo a esperança da equação (4.3). Esse resultado é válido por conta da propriedade de média zero vista na equação (2.1), no Capítulo 2, com isso temos que

$$\mathbb{E} \left(\int_{t_0}^T V_x^T G dB_u \right) = 0.$$

Considere agora, mais uma vez, a equação estocástica (4.1). Seja f e G satisfazendo, além das condições já mencionadas, que

$$f(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad G(t, 0) = 0, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Isso garante que a solução de (4.1) satisfazendo a condição inicial $X(t_0) = 0$ é a solução identicamente nula $X(t) \equiv 0$, para todo $t \geq t_0$. Nessas condições, temos

as seguintes definições do conceito de estabilidade estocástica (a desenvolvida por Has'minskii, tem recebido a maior aceitação).

Definição 27. A solução $X(t) \equiv 0$ é **estocasticamente estável** se para cada $\varepsilon > 0$ e $s \geq t_0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{[s, \infty)} |X(t; s, x)| \geq \varepsilon \right) = 0, \quad (4.6)$$

onde $X(t; s, x)$ denota a solução de (4.1) satisfazendo a condição inicial constante $X(t_0) = x$. Diz-se que a estabilidade é uniforme se o limite em (4.6) for uniforme em s . Has'minskii usa a terminologia “**estável em probabilidade**” para (4.6), o que se justifica já que (4.6) é equivalente à condição:

Para cada $s \geq t_0$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \geq s} |X(t; s, x)| \geq \varepsilon_1 \right) \leq \varepsilon_2, \quad (4.7)$$

sempre que $|x| < \delta$.

Por exemplo, na figura a seguir temos uma ilustração para representar três possíveis trajetórias. Para as denotadas por $X(t; s, x, w)$ e $X(t; s, x, \tilde{w})$, temos que o supremo da norma dessas trajetórias tem valor menor que ε_1 (Ver Figura 4.1). Por outro lado, o supremo da norma da trajetória $X(t; s, x, \bar{w})$ tem valor maior que ε_1 .

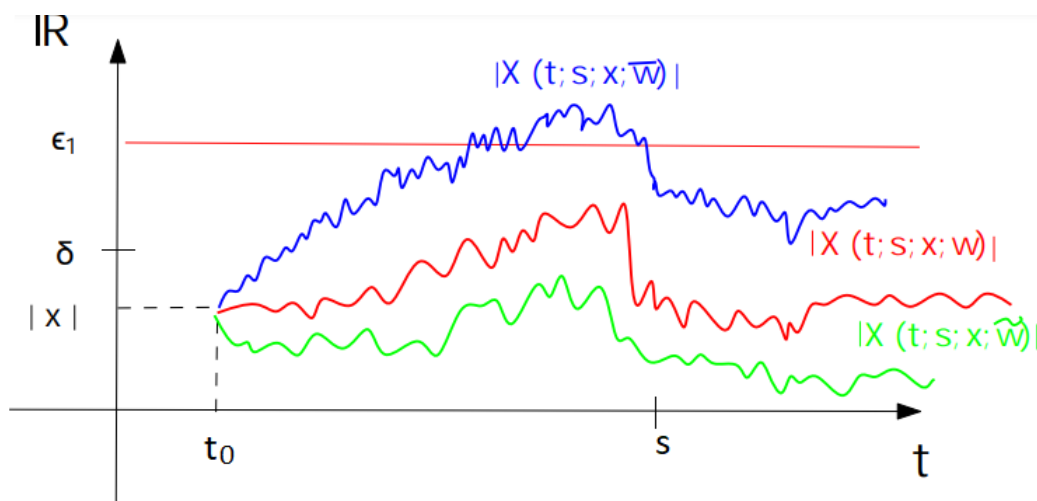


Figura 4.1: Uma ilustração de três possíveis trajetórias para $|X(t, s, x)|$. Fonte: Elaboração Própria.

Definição 28. A solução $X(t) \equiv 0$ é *estocasticamente assintoticamente estável* se, além de satisfazer a condição presente na equação (4.6),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} X(t; s, x) = 0 \right) = 1, \quad s \geq t_0$$

e *estocasticamente assintoticamente estável globalmente* se, além disso,

$$\mathbb{P} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} X(t; s, x) = 0 \right) = 1, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Na próxima seção será dado um exemplo que satisfaz essa definição, que se encontra no Corolário 31.1.

4.1 Método de Lyapunov para EDE

No estudo de estabilidade, os teoremas estocásticos de Lyapunov podem ser obtidos a partir de resultados determinísticos correspondentes substituindo V' pela expressão LV dada por (4.3). A seguir apresentamos o teorema principal desse trabalho. Antes de enunciar esse teorema, apresentamos um lema que será necessário para a demonstração.

Lema 29. (*Lema de Gronwall-Bellman*) Sejam $u(t)$ e $v(t)$ funções não negativas e k uma constante positiva, tal que para $t \geq s$,

$$u(t) \leq k + \int_s^t u(r) v(r) dr.$$

Então,

$$u(t) \leq k \exp \left\{ \int_s^t v(r) dr \right\}.$$

A prova desse Lema pode ser vista em Dragomir (2002, p.2) [5].

Teorema 30. *Suponha que para $t > 0$ e alguma constante K temos as seguintes condições:*

(i) Existe uma função contínua $V(t, x)$ que satisfaz, para $|x| \leq K$,

$$a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|),$$

onde as funções a e b são contínuas e definidas positivas em \mathbb{R}_+ .

(ii) As derivadas parciais $\partial V/\partial t$, $\partial V/\partial x_i$ e $\partial^2 V/\partial x_i \partial x_j$ existem, são contínuas e

$$LV(t, x) \leq 0, \tag{4.8}$$

para $0 < |x| \leq K$, onde L é dado por (4.3).

Então a solução $X(t) \equiv 0$ da EDE (4.1) é (uniformemente) estocasticamente estável.

Demonstração:

Para qualquer $0 < r < K$, seja

$$V_r = \inf_{r \leq |x| \leq K} V(t, x);$$

com $r > 0$ e, pelo item (i), $V_r > 0$.

Temos por hipótese que para $|x| \leq K$, a função $V(t, x)$ satisfaz

$$a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|),$$

onde as funções a e b são contínuas e definidas positivas em \mathbb{R}_+ . Observe que V não necessariamente é diferenciável em $x = 0$. Para utilizar a fórmula de Itô em $V(t, X(t))$, precisamos garantir que $X(t) \neq 0$. Sendo assim, para $\delta < |x| < r$, considere $X(t) = X(t; s, x)$ solução da seguinte EDE:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))dB(t),$$

com condição inicial $X(s) = x$ (Ver Figura 4.2).

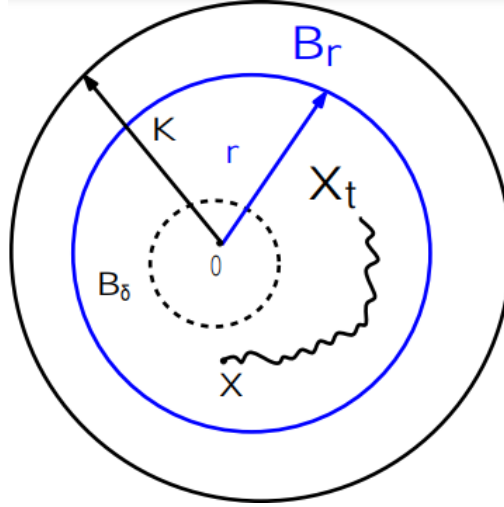


Figura 4.2: Demonstração do Teorema de Lyapunov para EDE. Fonte: Elaboração Própria.

Seja τ_δ o primeiro tempo de saída de $X(t)$ de $B_r \setminus B_\delta$ (chamado de tempo de parada), e seja

$$\tau_\delta(t) = \tau_\delta \wedge t = \min \{ \tau_\delta, t \}.$$

Para encontrar uma EDE para $V(\tau_\delta(t), X\tau_\delta(t))$, usamos a fórmula de Itô.

Na forma matricial, temos

$$dV = \left[V_t + f^T V_x + \frac{1}{2} \text{tr} (GG^T V_{xx}) \right] dt + V_x^T G dB,$$

e usando a fórmula de Itô com tempo de parada (Gard (1998), p. 104) [7], temos

$$\begin{aligned} V(\tau_\delta(t), X\tau_\delta(t)) - V(s, X(s)) &= \int_s^{\tau_\delta(t)} LV(u, X_u) du \\ &+ \int_s^{\tau_\delta(t)} V_x^T G(u, X_u) dB_u. \end{aligned}$$

Pelo item (ii), temos que

$$V(\tau_\delta(t), X\tau_\delta(t)) - V(s, X(s)) \leq \int_s^{\tau_\delta(t)} V_x^T G(u, X_u) dB_u.$$

Pela condição vista no Capítulo 2 (ver equação (2.1)), sabemos que

$$\mathbb{E} \left(\int_s^{\tau_\delta(t)} V_x^T G(u, X_u) dB_u \right) = 0,$$

e, portanto,

$$\mathbb{E}\left[V(\tau_\delta(t), X_{\tau_\delta(t)}) - V(s, X(s))\right] \leq 0,$$

e assim

$$\mathbb{E}\left[V(\tau_\delta(t), X_{\tau_\delta(t)})\right] \leq V(s, x), \quad (4.9)$$

para $t > s$ e $\delta \leq |x| < r$.

Adiante mostraremos que

$$\mathbb{P}(\tau_\delta(t) \rightarrow \tau_r(t), \text{ quando } \delta \rightarrow 0) = 1,$$

onde τ_r é o primeiro tempo de saída de $X(t)$ da bola de raio r sobre a origem (chamado de tempo de parada), e

$$\tau_r(t) := \tau_r \wedge t = \min\{\tau_r, t\}.$$

Sendo assim, fazendo $\delta \rightarrow 0$ na equação (4.9) temos que

$$\mathbb{E}\left[V(\tau_r(t), X(\tau_r(t)))\right] \leq V(s, x),$$

para $t > s$ e $0 < |x| < r$.

Seja $A := \{w \in \Omega : \sup_{s \leq u \leq \tau_r(t)} |X(u)| > r\} \subset \Omega$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(V(\tau_r(t), X_{\tau_r(t)})\right) &= \int_{\Omega} V(\tau_r(t), X_{\tau_r(t)}) d\mathbb{P}. \\ &\geq \int_A V(\tau_r(t), X_{\tau_r(t)}) d\mathbb{P} \\ &\geq \inf_{r \leq |x| \leq k} V(t, x) \mathbb{P}(A) =: V_r \cdot \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{V_r} \mathbb{E}\left(V(\tau_r(t), X_{\tau_r(t)})\right) \leq \frac{1}{V_r} V(s, x).$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$ segue que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq u} |X(u)| > r\right) \leq \frac{1}{V_r} V(s, x).$$

Como $V(s, 0) = 0$ e $V(s, x)$ é contínua em x , segue que

$$V(s, x) \longrightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0,$$

e assim

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \leq u} |X(u)| > r \right) \longrightarrow 0, \text{ quando } x \rightarrow 0,$$

que é o que garante a estabilidade estocástica em $x = 0$.

Agora, resta mostrar que

$$\mathbb{P}(\tau_\delta(t) \rightarrow \tau_r(t), \text{ quando } \delta \rightarrow 0) = 1.$$

Note primeiramente que $\mathbb{P}(\tau_\delta(t) \leq \tau_r(t)) = 1$.

Se mostrarmos que $\mathbb{P}(\tau_\delta(t) < \tau_r(t)) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, então temos que para quase toda trajetória iniciada em x existe $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\tau_{\delta_1}(t) = \tau_r(t),$$

e, portanto, $\tau_\delta(t) = \tau_r(t)$ para todo $\delta < \delta_1$ (Ver Figura 4.3).

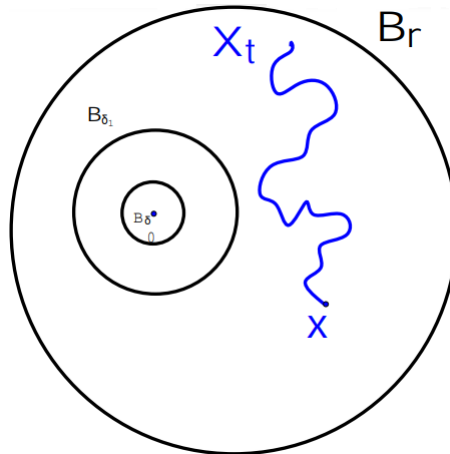


Figura 4.3: Demonstração do Teorema de Lyapunov para EDE. Fonte: Elaboração Própria.

Para isto mostraremos que

$$\mathbb{P}(\tau_\delta(t) < \tau_r(t)) \leq \frac{\delta}{|x|} e^{k(t-s)}, \quad (4.10)$$

com condição inicial $x \neq 0$.

Para provar a equação (4.10) considere o processo

$$Y(t) = |X(t)|^\beta, \text{ com } \beta \in \mathbb{R}.$$

Utilizando a fórmula de Itô, pode-se verificar que

$$\mathbb{E}\left(Y(\tau_\delta(t))\right) \leq |x|^\beta + k\mathbb{E} \int_\delta^{\tau_\delta(t)} Y(u) du$$

(ver Khasminskii (2011, p.150) [10]).

Como $u = \tau_\delta(u)$ para $u < \tau_\delta(t)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y(\tau_\delta(t))) &\leq |x|^\beta + k\mathbb{E} \int_s^{\tau_\delta(t)} \underbrace{Y(\tau_\delta(u))}_{\geq 0} du \\ &\leq |x|^\beta + k\mathbb{E} \int_s^t Y(\tau_\delta(u)) du \\ &\leq |x|^\beta + k \int_s^t \mathbb{E}(Y(\tau_\delta(u))) du. \end{aligned}$$

Aplicando Bellman-Gronwall (Lema 29) em $\mathbb{E}(Y(\tau_\delta(\cdot)))$, com $v \equiv 1$, temos

$$\mathbb{E}(Y(\tau_\delta(t))) \leq |x|^\beta e^{k(t-s)}.$$

Como $Y(t) = |X(t)|^\beta$, segue que

$$\mathbb{E}|X(\tau_\delta(t))|^\beta \leq |x|^\beta e^{k(t-s)},$$

com $\beta \in \mathbb{R}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_\delta(t) < \tau_r(t)) &= \mathbb{P}(|X(\tau_\delta(t))| < \delta) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{|X(\tau_\delta(t))|} > \frac{1}{\delta}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{\delta}\right)^{-1} \mathbb{E}(|X(\tau_\delta(t))|^{-1}). \end{aligned}$$

A última desigualdade é verdadeira por conta da desigualdade de Markov, presente no Capítulo 1, mais especificamente, na equação (1.1).

Com isso, temos finalmente que

$$\mathbb{P}(\tau_\delta(t) < \tau_r(t)) \leq \delta \cdot \frac{1}{|x|} e^{k(t-s)},$$

tomando $\beta = -1$.

■

Teorema 31. *Suponha que as suposições do Teorema 30 se mantenham, exceto que (4.8) é substituído por*

$$LV(t, x) \leq -c(|x|) \quad (4.11)$$

onde a função c é contínua e definida positiva em R_+ . Então a solução nula de (4.1) é a estocasticamente assintoticamente estável. Além disso, se essas suposições são satisfeitas para todo $x \neq 0$ e a função a que aparece no teorema acima também satisfaz

$$a(r) \longrightarrow \infty, \quad \text{quando } r \longrightarrow \infty,$$

então $X(t) \equiv 0$ é estocasticamente assintoticamente estável globalmente.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Gard (1998, p.137) [7]. Aqui, optamos por não provar esse teorema por conta da prova ser bastante técnica com relação ao tempo de parada. Por outro lado, apresentamos a seguir um resultado, que é uma consequência desse teorema, que permite fazer algumas aplicações.

Corolário 31.1. *Considere a equação escalar não autônoma*

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t), \quad (4.12)$$

onde estamos supondo que além das condições de existência e unicidade, as funções f e g satisfazem a seguinte condição (para algumas constantes a e b):

$$\begin{aligned} f(t, x) &= ax + \bar{f}(t, x) \\ g(t, x) &= bx + \bar{g}(t, x), \end{aligned} \quad (4.13)$$

com

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \left[\frac{|\bar{f}(t, x)|}{|x|} + \frac{|\bar{g}(t, x)|}{|x|} \right] = 0, \quad \text{uniformemente em } t.$$

Então a solução $X(t) \equiv 0$ de (4.12) é estocasticamente assintoticamente estável localmente se

$$a - \frac{1}{2}b^2 < 0.$$

Demonstração:

De fato, considere a função $V(x) = |x|^k$, para $k > 0$ e $|x| > 0$.

Sabemos que

$$LV(t, x) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot f + \frac{1}{2} \text{tr} \left(GG^T V_{xx} \right) \right] (t, x). \quad (4.14)$$

Para a nossa escolha de V , temos então

$$LV(x) = [0 + k|x|^{k-1}f + \frac{1}{2}g^2k(k-1)|x|^{k-2}].$$

A partir da equação (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} LV(x) &= \left[k|x|^{k-1} \left(ax + \bar{f}(t, x) \right) + \frac{1}{2} \left(bx + \bar{g}(t, x) \right)^2 k(k-1)|x|^{k-2} \right] \\ &= \left[a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{1}{2}(k-1) \left(bx + \bar{g}(t, x) \right)^2 x^{-2} \right] k|x|^k \\ &= \left[a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{1}{2}(k-1) \left((bx)^2 + 2bx\bar{g}(t, x) + (\bar{g})^2(t, x) \right) x^{-2} \right] k|x|^k \\ &= \left[a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{1}{2}(k-1) \left(b^2 + \frac{2b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{x^2} \right) \right] k|x|^k \\ &= \left[a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(b^2 + \frac{2b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{x^2} \right) \right] k|x|^k \\ &= \left[a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{b^2k}{2} + \frac{bk\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{k(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} - \frac{b^2}{2} - \frac{b\bar{g}(t, x)}{x} - \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} \right] k|x|^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[a - \frac{b^2}{2} + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{b^2 k}{2} + k \left(\frac{b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} \right) - \left(\frac{b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} \right) \right] k |x|^k \\
&= \left[a - \frac{b^2}{2} + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{b^2 k}{2} + (k-1) \left(\frac{b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} \right) \right] k |x|^k.
\end{aligned}$$

Como k pode ser escolhido tão pequeno (próximo de 0) pois temos que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|\bar{f}(t, x)|}{|x|} = \frac{|\bar{g}(t, x)|}{|x|} = 0,$$

presente em (4.13), podemos notar que

$$\left| \frac{\bar{f}(t, x)}{x} \right| + \frac{1}{2} k b^2 + \left| (k-1) \left[\frac{b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{\bar{g}^2(t, x)}{2x^2} \right] \right| < \left| a - \frac{1}{2} b^2 \right|,$$

em $B_r \setminus \{0\}$.

Com isso temos que:

- As derivadas parciais de V existem e temos que

$$LV(x) \leq -ck|x|^k, \quad (4.15)$$

onde $h(|x|) = ck|x|^k$, contínua e positiva definida no \mathbb{R}_+ . No Teorema 31, h é a função procurada para (4.11).

- Ainda temos que vale

$$V(t, x) = |x|^k, \quad (x \neq 0, k > 0).$$

Tomando $a(|x|) = b(|x|) = |x|^k$, logo a e b são funções contínuas e assumem valores positivos.

■

Observação 31.1. Para o caso particular com a equação linear correspondente,

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dB(t), \quad (4.16)$$

com $\bar{f} = 0$ e $\bar{g} = 0$ para qualquer x (inclusive $x \rightarrow \infty$), a análise anterior resulta em (4.15) valendo para todo $x \neq 0$. Como $V(x) = |x|^k$ é radialmente ilimitado, pode-se concluir que $X(t) \equiv 0$ é estocasticamente assintoticamente estável globalmente se $(a - \frac{1}{2}b^2) < 0$, pela segunda parte do Teorema 31.

Note que é possível encontrar a solução de (4.16), assim como foi feito no Capítulo 2 (ver equação (2.6)). E utilizando um processo de limite (apresentado no Capítulo 2) é possível mostrar que a solução dessa EDE tende a 0, quando $t \rightarrow \infty$ independente da condição inicial se $(a - \frac{1}{2}b^2) < 0$.

Aplicação em um modelo de crescimento populacional

Um caminho para se estudar o crescimento de populações, considerando sob a dinâmica influências externas de natureza estocástica é a modelagem por meio das equações diferenciais estocásticas (EDEs). As EDEs surgem quando se incorpora a uma equação diferencial ordinária um "ruído". Os efeitos do ruído estão sempre presentes na dinâmica de populações reais e surgem de diferentes origens, tanto por conta de uma força externa ou variação de um ou mais parâmetros do sistema, devido as incertezas.

O estudo dos ambientes estocásticos é importante, pois eles são mais comuns nos ecossistemas. Muitas vezes, a dinâmica de populações está sujeita a influências externas, tais como fatores ambientais ou interação com outros sistemas dinâmicos e é muito comum que estas influências tenham natureza estocástica. Fatores climáticos, por exemplo, resultam da dinâmica caótica da atmosfera, sendo, portanto, um fator estocástico.

Neste capítulo, apresentamos um modelo de uma EDE para o crescimento populacional, proposto em Lungu e Oksendal (1997) ([12]). Inicialmente, temos o modelo clássico de crescimento populacional, representado pela equação diferencial logística (modelo determinístico). Porém, como a taxa de crescimento de uma população, em mui-

tas situações, está sujeita a flutuações aleatórias, apresentamos o modelo representado pela equação diferencial logística estocástica, sob uma análise qualitativa.

Um modelo clássico de crescimento populacional em um ambiente superlotado (determinístico) é dado pela equação diferencial logística a seguir, na qual o tamanho da população no tempo t é a solução dessa equação.

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{dt} &= rX_t(K - X_t); \quad t \geq 0 \\ X_0 &= x_0 \geq 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $r \in \mathbb{R}$, $K > 0$ são constantes.

A constante K é chamada de capacidade de carga do ambiente para essa população. A capacidade de carga de um organismo em um determinado ambiente é definida como a população máxima desse organismo que o meio ambiente pode sustentar indefinidamente. A constante r é a taxa de crescimento.

Vários fatores podem alterar a taxa de crescimento de uma determinada população. Sendo assim, em muitas situações, a taxa r não é constante, mas sujeita a flutuações aleatórias. Suponha que a constante r seja estocasticamente perturbada, ou seja

$$r \rightarrow r + \beta \dot{w}(t),$$

onde $\dot{w}(t)$ é o ruído branco, definido no Capítulo 2, na Seção 2.2, e β representa a intensidade do ruído. Então este sistema ambientalmente perturbado pode ser descrito, formalmente, pela equação diferencial logística estocástica dada por

$$\begin{aligned} dX_t &= rX_t(K - X_t)dt + \beta X_t(K - X_t)dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

frequentemente usada como modelo para o crescimento de uma população de tamanho X_t .

Podemos notar que a EDE tem os seguintes campos:

$$f(x) = rKx + \bar{f}(x), \text{ onde } \bar{f}(x) = -rx^2; \tag{5.3}$$

$$g(x) = \beta Kx + \bar{g}(x), \text{ onde } \bar{g}(x) = -\beta x^2; \tag{5.4}$$

e $f(0) = g(0) = 0$. Assim temos

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \left[\frac{|\bar{f}(x)|}{|x|} + \frac{|\bar{g}(x)|}{|x|} \right] = 0, \quad (5.5)$$

e, portanto, pelo Corolário 31.1, temos que a solução $X_t = 0$ é estocasticamente assintoticamente estável localmente se $(rK - \frac{1}{2}(\beta K)^2) < 0$, ou seja, para um tempo muito grande se estivermos com uma população com uma condição inicial suficientemente próxima de 0 e $(r - \frac{1}{2}\beta^2 K) < 0$, essa população pode ser extinta com probabilidade 1, quando $t \rightarrow \infty$.

Ainda vale observar que a trajetória com condição inicial x não vai "tocar" a trajetória $X_t = 0$ por conta do Teorema da Existência e Unicidade (11) e que dependendo da condição inicial, a solução $X_t = 0$ não é estocasticamente assintoticamente estável, mesmo que $(rK - \frac{1}{2}(\beta K)^2) < 0$.

A partir dos resultados encontrados na aplicação apresentada, foram realizadas simulações de gráficos que exemplificam a dinâmica estocástica da população, com utilização de programação no programa Matlab. A figura 5.1 representa o algoritmo no software.

O método utilizado para gerar os gráficos foi o método de Euler-Maruyama, que é uma extensão do método de Euler, conhecido por ser um método numérico desenvolvido para resolver equações diferenciais estocásticas.

```

function EulerMaruyama
%This function applies the method of Euler-Maruyama for solving the
%stochastic differential equation:  $dX(t) = rX(t)(K-X(t))dt +$ 
% $\sigma X(t)(K-X(t))dW(t)$ 

r=-0.05;%growth rate
K=3;%Carrying capacity
sigma=0;%stochasticity coefficient
T=10 %time for simulation
N=500;%number of steps in the grid
dt=T/N;%small intervals of time
x0=5;%initial condition

X=x0;%state vector
Xvector=x0;%list of state vectors

for t=1:N
%this loop shall repeat until we achieve the end of the simulation
X=X + r*X*(K - X)*dt + sigma*X*(K - X)*sqrt(dt)*randn;% the SDE
Xvector=[Xvector,X];%save current simulation

end

time=0:dt:T;
plot(time, Xvector)
hold on

ylim([0,20]);
xlim([0, 10]);

end

```

Figura 5.1: Algoritmo do método de Euler-Maruyama no software Matlab.

Destaca-se que essas simulações são aleatórias, pois com os mesmos parâmetros podemos gerar diferentes gráficos, por conta do movimento browniano. Seguem alguns comentários particulares das análises feitas:

1. Seja $K = 10$ e $r = 0,5$ temos que:

Caso 1: para $\beta = 0; 15$,

$$0,5 - \frac{1}{2}(0,15)^2 10 \geq 0.$$

Caso 2: para $\beta = 0; 5$,

$$0,5 - \frac{1}{2}(0,5)^2 10 < 0.$$

Com isso, pode-se notar que, nesse caso, um ruído maior trouxe estabilidade para o problema, com esses valores.

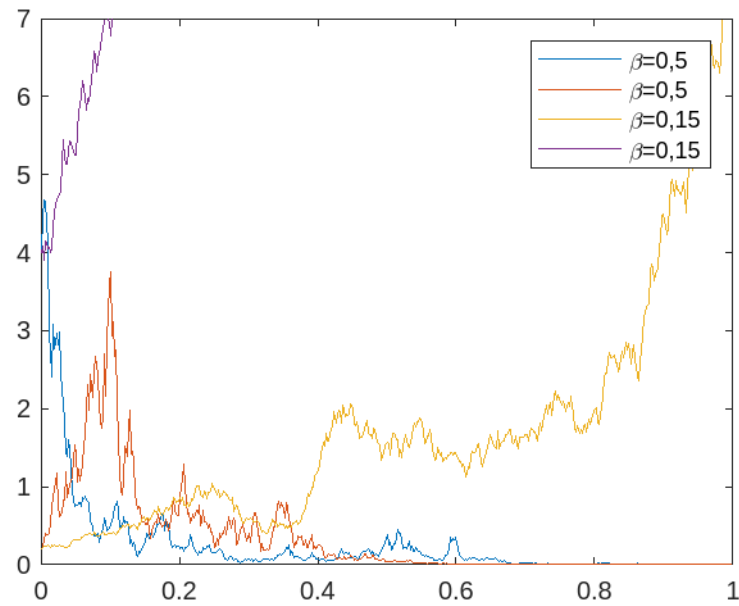


Figura 5.2: Para $\beta = 0,5$, a solução $X_t = 0$, com $x_0 = 0,2$ e $x_0 = 4$, apresenta um comportamento assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.

2. Seja $r = 0,45$, $\beta = 0,15$ e $x_0 = 2$, temos que:

Caso 1: para $K = 10$,

$$0,45 - \frac{1}{2}(0,15)^2 10 \geq 0.$$

Caso 2: para $K = 45$,

$$0,45 - \frac{1}{2}(0,15)^2 45 < 0.$$

Com isso, pode-se notar que, nesse caso, a capacidade do ambiente sendo maior traz estabilidade para o problema, com esses valores.

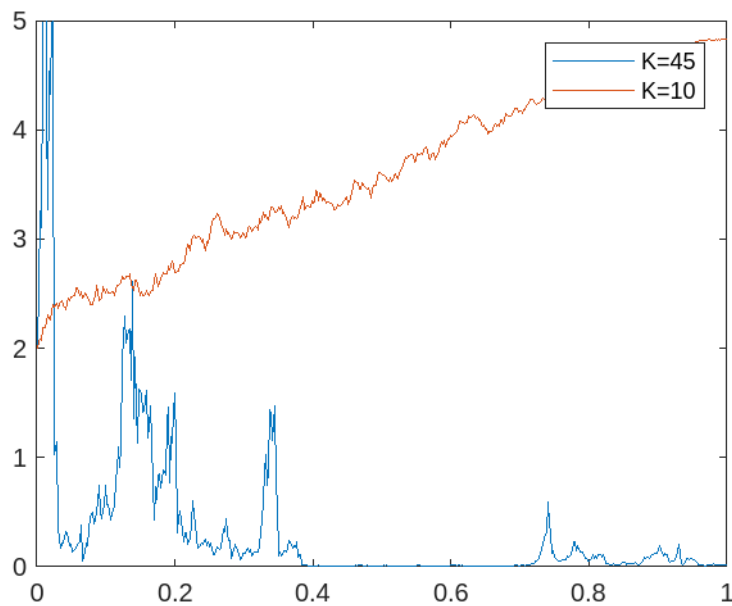


Figura 5.3: Para $K = 45$, a solução $X_t = 0$, com $x_0 = 2$, apresenta comportamento assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.

Além disso, mantida as mesmas condições que garantiram a estabilidade local ($r = 0.45$, $\beta = 0,15$ e $K = 45$) e alterando apenas a condição inicial, temos o seguinte gráfico:

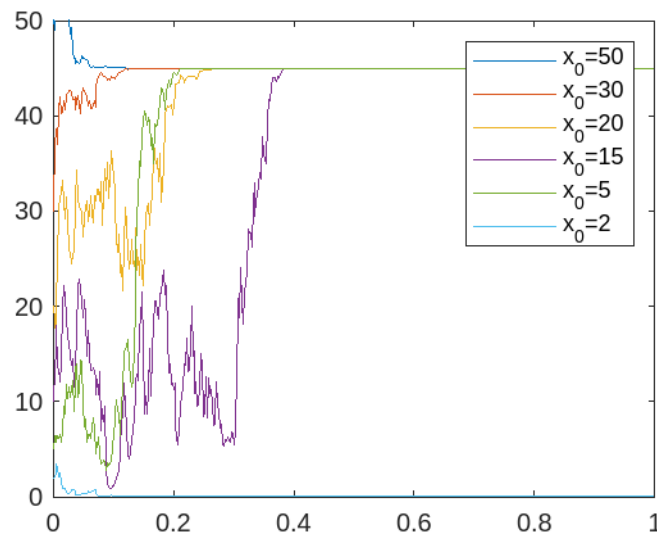


Figura 5.4: Para $x_0 = 2$, a solução $X_t = 0$ apresenta comportamento assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.

Sendo assim, como a aplicação garantia a estabilidade apenas localmente (ou seja, para um valor suficientemente perto do 0), já era de se esperar que ao alterar apenas a condição inicial, a estabilidade fosse alterada.

É interessante notar que para uma condição inicial menor, sob essas condições, a população tenderá a crescer e ficar em torno de 45, que é o valor de K . Mas, para uma condição inicial maior, a população tende a diminuir e ficar em torno de 45, ou seja, o tamanho populacional está restrito ao valor de K , podendo variar um pouco quando atinge a capacidade de carga, flutuando abaixo e acima de seu valor.

3. Seja $K = 10$, $\beta = 0,15$ e $x_0 = 9$, temos que:

Caso 1: para $r = 0,5$,

$$0,5 - \frac{1}{2}(0,15)^2 10 \geq 0.$$

Caso 2: para $r = -0,5$,

$$-0,5 - \frac{1}{2}(0,15)^2 10 < 0.$$

Podemos observar que, nessas condições, a taxa de crescimento negativa trouxe estabilidade para o problema, com esses valores.

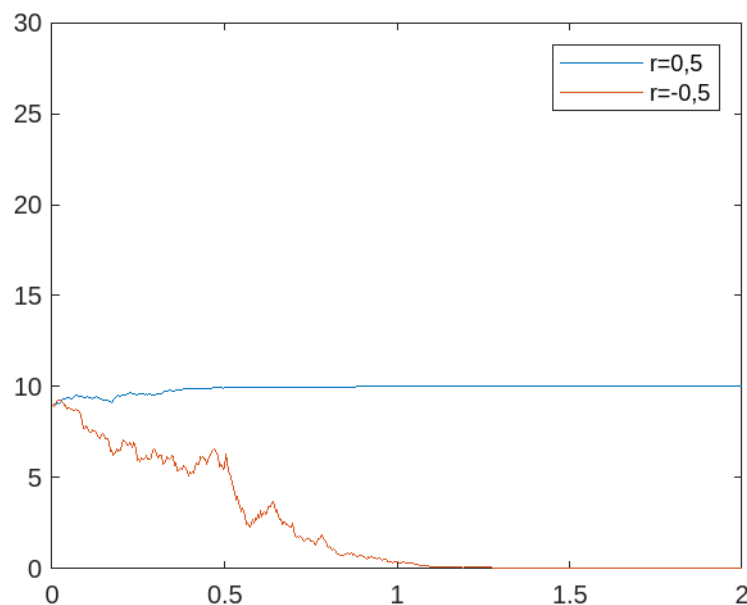


Figura 5.5: Para $r = -0,5$, a solução $X_t = 0$ apresenta comportamento assintoticamente estável. Fonte: Elaboração Própria.

Soluções de equações diferenciais, ordinárias ou estocásticas, podem explodir em tempo finito, o que significa que as trajetórias divergem para infinito em tempo finito.

Por exemplo, a função $f(t) = \frac{1}{(1-t)}$, $t < 1$, explode em $t = 1$. Da mesma forma, a solução $x(t)$ para a equação diferencial ordinária

$$dx(t) = (1 + x^2(t)) dt, \quad x(0) = 0$$

explode. De fato, considere a solução $x(t) = \tan(t)$, que se aproxima do infinito quando t se aproxima de $\pi/2$. O tempo de explosão é $\pi/2$.

Com relação ao modelo de crescimento populacional (5.1) podemos analisar se tem explosão ou não dependendo dos parâmetros. Lembrando que como X_t denota o tamanho da população, estamos interessados apenas nas soluções positivas.

Sendo $r > 0$ e, com isso, $rK > 0$, a Equação (5.1) tem a solução global

$$X_t = \frac{rK}{r + e^{-rKt} (rK - rx_0)/x_0} \quad (t \geq 0),$$

que é positiva e limitada, e além disso, tem a propriedade assintótica de que $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = rK/| -r| = K$.

Seja, por exemplo, os parâmetros $K = 20$, $r = 0.25$ e $x_0 = 100$, temos o seguinte gráfico:

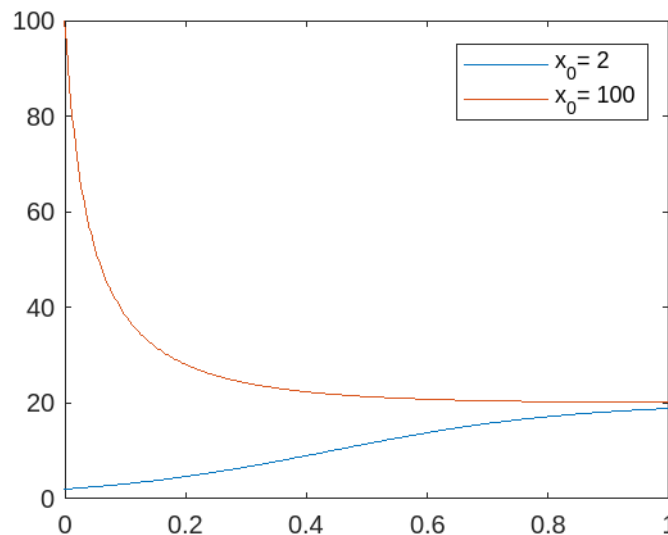


Figura 5.6: Propriedade assintótica do modelo EDO, visto em (5.1), com os parâmetros $K = 20$, $r = 0.25$.
Fonte: Elaboração Própria.

Note que K é a cota superior que é aproximada, mas nunca excedida, por populações crescentes começando abaixo desse valor. Além disso, quando tem mais indivíduos que a capacidade, nota-se que a população tende ao valor de K .

Em contraste, se considerarmos $r < 0$, temos que $rK < 0$, então a Equação (5.1) tem apenas a solução local

$$X_t = \frac{rK}{r + e^{-rKt} (rK - rx_0) / x_0} \quad (0 \leq t < T),$$

que explode ao infinito no tempo finito:

$$T = -\frac{1}{rK} \ln \left(\frac{-rx_0}{rK - rx_0} \right).$$

Situações similares podem ocorrer com soluções para as EDEs, exceto que o tempo de explosão será aleatório. As soluções podem ser consideradas até o momento da explosão.

Um fato interessante para as EDEs, que é um resultado que chama atenção e aparece no artigo Mao et all (2002) [14], nos diz que com probabilidade 1, a solução da Equação (5.2) não tem mais explosão em um tempo finito mesmo para $r < 0$, desde que $\beta > 0$. Em outras palavras, o ruído ambiental estocástico suprime a explosão determinística. Resumindo,

- (i) quando $r < 0$ e $\beta = 0$ a solução explode no tempo finito $t = T$;
- (ii) quando $\beta > 0$ (não importa quão pequeno), a solução não explodirá em um tempo finito.

Seja, por exemplo, parâmetros $K = 3$, $r = -0.05$ e $x_0 = 5$. Calculando o valor do tempo de explosão T para o caso determinístico, obtemos:

$$T = -\frac{1}{3 \cdot (-0,05)} \ln \left(\frac{0,05 \cdot 5}{3 \cdot (-0,05) + 0,05 \cdot 5} \right) \approx 6,1086,$$

ou seja, para esses valores a solução explode no tempo finito 6,1086.

Mantendo o mesmos parâmetros para o caso estocástico, não importa quão pequeno seja $\beta > 0$, a solução não explode em um tempo finito. A Figura 5.7 a seguir deixa claro que para $\beta = 0$ a solução explode em, aproximadamente, $T = 6,1086$ e para diferentes valores de $\beta > 0$, a solução não explode mais.

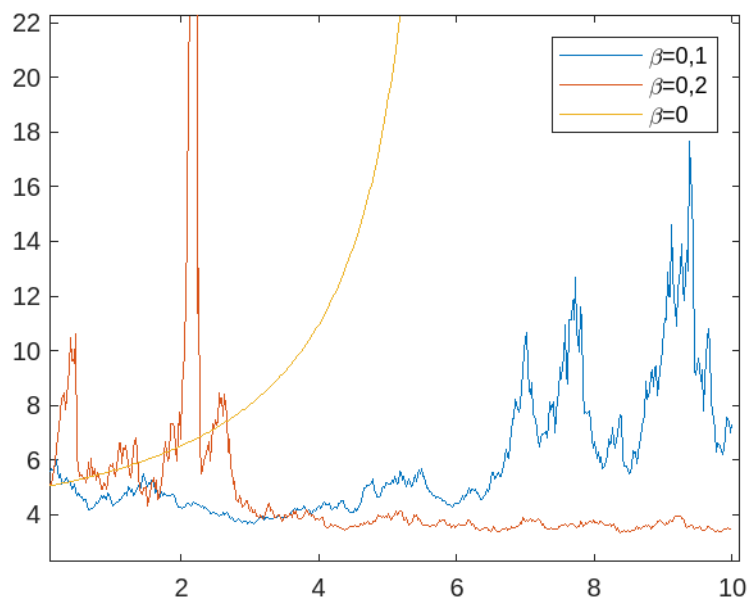


Figura 5.7: Ruído suprime explosão. Fonte: Elaboração Própria.

Considerações finais

Nessa dissertação apresentamos um estudo qualitativo, envolvendo os conceitos de estabilidades e o método de Lyapunov, para o caso determinístico e para o caso estocástico, e ainda evidenciamos uma aplicação em um modelo de crescimento populacional. É importante destacar que existem artigos que possuem mais resultados e aplicações em relação à função de Lyapunov, como, por exemplo, análise de estabilidade estocástica em modelos epidêmicos. Dentre estes trabalhos, podemos destacar os artigos de Zhao e Jiang (2016) [20], Zhao et al (2015) [21] e Jiang et al (2010) [9], que podem servir de inspiração para trabalhos futuros com análise de estabilidade via funções de Lyapunov.

Bibliografia

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke, and D. Chillingworth. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. SIAM Review, vol. 40 n. 3 edition, 1998.
- [2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, and Douglas B. M. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley Sons., 9 edition, 2021.
- [3] O. Calin. *An informal introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015.
- [4] A. O. Doering, C. I e Lopes. *Equações diferenciais ordinarias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [5] S. S. Dragomir. *Some Gronwall type inequalities and applications*. School of Communications and Informatics Victoria University of Technology., 2002.
- [6] L. Evans. *An introduction to stochastic differential equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012.
- [7] T. C. Gard. *Introduction to Stochastic Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., 1988.
- [8] I. I. Gihman and A. V. Skorohod. *Stochastic Differential Equations* . Springer-Verlag, New York, 1972.
- [9] D. Jiang, C. Ji, N. Shi, and J. Yu. The long time behavior of di sir epidemic model with stochastic perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 372(1), 162-180., (2010).
- [10] R. Khasminskii. *Stochastic stability of differential equations*. Springer Science Business Media, 2011., vol. 66 edition, 2011.

-
- [11] F. C. Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press, London., 2 edition, 2005.
- [12] E. M. Lungu and Bernt Øksendal. Optimal harvesting from a population in a stochastic crowded environment. *Mathematical Biosciences* 145 (1), (1997).
- [13] X. Mao. *Stochastic differential equations and applications*. Elsevier., 2 edition, 2007.
- [14] X. Mao, G. Marion, and E. Renshaw. Environmental brownian noise suppresses explosions in population dynamics. *Stochastic Processes and their Applications*, 97(1), 95-110., (2002).
- [15] B. Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer Science & Business Media, New York, 6 edition, 2000.
- [16] F. D. O. Souza, R. M. Palhares, and P. Y. Ekel. Análise de estabilidade assintótica e exponencial em redes neurais artificiais sujeitas a retardo no tempo e a incertezas do tipo politópicas. *Sba: Controle e Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 19, 115-127., (2008).
- [17] M. Viana and J. Espinar. *Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos*. Oxford University Press, 2011-2018.
- [18] Wikipédia. Método de euler-maruyama. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler-Maruyama.
- [19] T. A. R. O. Yoshizawa. *Stability theory by Liapunov's second method*. The Math. Soc. of Japan, Tokyo., 1966.
- [20] Y. Zhao and D. Jiang. The asymptotic behavior and ergodicity of stochastically perturbed svir epidemic model. *International Journal of Biomathematics*, 9(03), 1650042., (2016).
- [21] Y. Zhao, Q. Zhang, and D. Jiang. The asymptotic behavior of a stochastic sis epidemic model with vaccination. *Advances in Difference Equations*, 2015, 1-20., (2015).

Regras da fórmula de Itô

Iremos dar uma interpretação para as regras $dt \times dt = dt \times dB_t = dB_t \times dt = 0$ e $dB_t \times dB_t = dt$ que aparecem na fórmula de Itô, presente na Proposição 9.

Para isso, precisamos lembrar que a sequência X_n converge para X em média quadrada (ou L^2) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|X_n - X|^2 \right] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Pensando no intervalo de 0 até t , podemos subdividir esse intervalo em n subintervalos de medida Δt , ou seja

$$\Delta t = \frac{t - 0}{n} = \frac{t}{n}. \quad (\text{A.2})$$

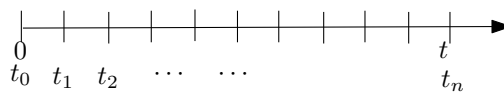


Figura A.1: Representação dos subintervalos. Fonte: Elaboração Própria.

Para provar a primeira regra $dt \times dt = 0$, representamos dt^2 na sua forma integral que pode ser escrita sob a forma de um limite devido ao subintervalos criados em (A.2):

$$dt^2 = \int_0^t ds^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta t_k^2.$$

Assumindo que $\int_0^t ds^2 = 0$, temos devido a equação (A.1) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=1}^n \Delta t_k^2 - 0 \right|^2 \right] = 0.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta t_k^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \Delta t_k^2 \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \Delta t_k^2 \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{t}{n} \right)^2 \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{t}{n} \right)^2 \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2}{n} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Para provar a segunda regra $dt \times dB_t = dB_t \times dt = 0$ representamos $dB_t dt$ na sua forma integral que pode ser escrita sob a forma de um limite devido ao subintervalos criados

$$dB_t dt = \int_0^t dB_s ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k} \Delta t_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(t_k - t_{k-1}).$$

Chamando $x_k = \Delta B_{t_k} \Delta t_k$ e $X_n = \sum_{k=1}^n x_k$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k} \Delta t_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

Assumindo que $\int_0^t dB_s ds = 0$, temos devido a equação (A.1) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=1}^n \Delta x_k - 0 \right|^2 \right] = 0.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t dB_s ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} x_k x_j \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n (\Delta B_{t_k} \Delta t_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \Delta B_{t_k} \Delta t_k \Delta B_{t_j} \Delta t_j \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\Delta B_{t_k}^2] \Delta t_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} E[\Delta B_{t_k} \Delta t_k] \Delta B_{t_j} \Delta t_j \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\Delta B_{t_k}^2] \Delta t_k^2, \end{aligned}$$

pois como já visto o movimento browniano tem incrementos independentes e, portanto $\mathbb{E}[\Delta B_{t_k} \Delta t_k] = 0$.

Continuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\Delta B_{t_k}^2] \Delta t_k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta t_k \Delta t_k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta t_k^3 = 0,$$

e note que para $n = 1$, temos $\Delta t = 1$ e $\Delta t^3 = 1$, para $n = 2$, temos $\Delta t = 0,5$ e $\Delta t^3 = 0,125$, para $n = 8$, temos $\Delta t = 0,125$ e $\Delta t^3 = 0,015625$, portanto, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta t_k^3$ está convergindo para 0.

Para provar a terceira regra $B_t \times B_t = dt$, representamos B_t^2 na sua forma integral que pode ser escrita sob a forma de um limite devido ao subintervalos criados

$$B_t^2 = \int_0^t dB_s^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k}^2.$$

Assumindo que $\int_0^t dB_s^2 = t$, temos devido a equação (A.1) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k}^2 - t \right)^2 \right] = 0.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t dB_s^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k}^2 - t \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k}^2 \right)^2 + t^2 - 2t \sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k}^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k}^4 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Delta B_{t_k}^2 \Delta B_{t_j}^2 + t^2 - 2t \sum_{k=1}^n \Delta B_{t_k}^2 \right], \end{aligned}$$

como $\mathbb{E}[\Delta B_t^4] = 3\Delta t^2$ e $\mathbb{E}[\Delta B_t^2] = \Delta t$ temos

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \sum_{k=1}^n \Delta t_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Delta t_k \Delta t_j + t^2 - 2t \sum_{k=1}^n \Delta t_k \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \sum_{k=1}^n \Delta t_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Delta t_k \Delta t_j + t^2 - 2t^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{t}{n} \right)^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{t}{n} \frac{t}{n} - t^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3n \frac{t^2}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \frac{t^2}{n^2} - t^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 \frac{t^2}{n} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) t^2 - t^2 \right] = [0 + (1-0)t^2 - t^2] = 0. \end{aligned}$$

Fluxo tubular

O fluxo tubular ou laminar, a grosso modo, é formado por uma família de retas paralelas que passam por um “tubo”.

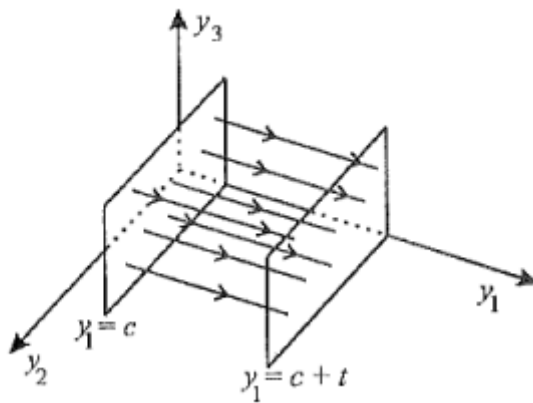


Figura B.1: Um fluxo laminar em \mathbb{R}^3 . Fonte: Doering e Lopes (2016).

Dizemos que o fluxo do campo constante \bar{f} é laminar ou tubular, pois todas as trajetórias que estão no hiperplano afim $y_1 = c$ estarão no hiperplano afim $y_1 = c + t$, após decorrido o tempo t . No caso tridimensional, o retrato de fase do fluxo laminar \bar{f} é descrito pela Figura (B.1)

Em geral, dado um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dizemos que o ponto $x_0 \in E$ tem a propriedade do fluxo tubular se o campo de vetores f , na vizinhança de x_0 , é dado por

\bar{f} , a menos de uma mudança de coordenadas, ou seja, o campo f em x_0 é localmente diferenciavelmente conjugado ao campo constante \bar{f} na origem de \mathbb{R}^n .

Mais precisamente, o ponto $x_0 \in E$ tem a propriedade do fluxo tubular se existem uma vizinhança $U \subseteq E$ de x_0 , denominada vizinhança tubular de x_0 , um aberto $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $r > 0$ e um difeomorfismo $g : U \rightarrow (-r, r) \times W$ que conjuga o fluxo ϕ_t de f em U localmente com o fluxo ψ_t do campo constante $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0)$ em $(-r, r) \times W$, ou seja, vale

$$\psi(t, g(x)) = g(\phi(t, x)),$$

com quaisquer $x \in g^{-1}(\{0\} \times W)$ e $|t| < r$. Note que numa vizinhança tubular U não pode haver singularidades do campo.

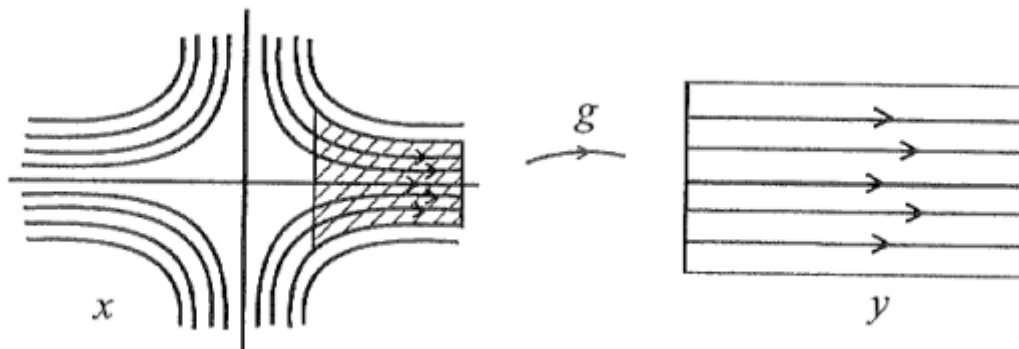


Figura B.2: Um fluxo tubular no plano. Fonte: Doering e Lopes (2016).

No caso do \mathbb{R}^2 , se x_0 tem a propriedade do fluxo tubular, existe uma faixa retangular $U = g^{-1}([-1, 1]^2) = g^{-1}([-1, 1] \times [-1, 1])$ contendo x_0 tal que $\phi_t(x) = g^{-1}(\psi_t(g(x)))$, com quaisquer $x \in g^{-1}(\{0\} \times W)$ e $|t| < r$. As trajetórias descritas pelas soluções de $x' = f(x)$ entram por um lado da faixa e saem pelo outro lado da faixa, ao passo que os outros dois lados dessa faixa são constituídos por duas trajetórias do sistema. Na Figura (B.2), mostramos um pequeno pedaço do retrato de fase de $x' = Ax$, no caso de $A \in M(2)$ ter um autovalor real positivo e outro negativo. As figuras nos dois pedaços de espaços de fase são as mesmas a menos de uma distorção definida pelo difeomorfismo g que os conjuga. Note que a propriedade do fluxo tubular vale apenas

na faixa hachurada e que a vizinhança tubular U não pode ser tomada arbitrariamente grande, pois não pode conter a origem do plano.

Teorema 32. (*Teorema do Fluxo Tubular*). *Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in E$ não é um ponto de equilíbrio, então x_0 tem a propriedade do fluxo tubular.*

A demonstração desse Teorema pode ser encontrada em Doering e Lopes (2016, p.178) [4].

Observe que, se x_0 tem a propriedade do fluxo tubular, então o campo f restrito a uma vizinhança U de x_0 é sempre integrável. O teorema acima afirma, portanto, um fato muito importante: localmente, em torno de um ponto x_0 que não é de equilíbrio, qualquer sistema é integrável.

Exemplos do Método de Lyapunov (EDO)

Exemplo 33. Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x \end{cases}$$

que é associada ao campo $f(x, y) = (y, -\operatorname{sen} x)$, temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $f(0, 0) = (0, -\operatorname{sen} 0) = (0, 0)$.

Se tomarmos

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x,$$

em torno de $(0, 0)$ temos que

- $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para qualquer vizinhança suficientemente pequena da origem tal que $(x, y) \neq (2\pi r, 0)$ para $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- V é diferenciável e $\nabla V(x, y) = (\operatorname{sen} x, y)$ logo,

$$\langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle = \langle (\operatorname{sen} x, y), (y, -\operatorname{sen} x) \rangle = \operatorname{sen} xy - y \operatorname{sen} x = 0.$$

Logo, pelo Teorema de Lyapunov (Parte I) 18, podemos concluir que $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio estável do sistema.

Exemplo 34. Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

que é associada ao campo linear $f(x, y) = (y, -x - 2y)$, temos em $(0,0)$ um ponto de equilíbrio pois, $f(0,0) = (0, -0 - 2 \cdot 0) = (0,0)$.

Se tomarmos

$$V(x, y) = x^2 + y^2,$$

em torno de $(0,0)$ temos que

- $V(0,0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
- V é diferenciável e

$$\langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle = \langle (2x, 2y), (y, -x - 2y) \rangle = 2xy - 2xy - 4y^2 = -4y^2 \leq 0.$$

Logo, pelo Teorema de Lyapunov (Parte I) 18, podemos concluir que $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio estável do sistema.

Exemplo 35. Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = 2yx - x^3 \\ y' = -x^2 \end{cases}$$

que é associada ao campo $f(x, y) = (2yx - x^3, -x^2)$, temos em $(0,0)$ um ponto de equilíbrio pois, $f(0,0) = (2 \cdot 0 \cdot 0 - 0^3, -0^2) = (0,0)$.

Se tomarmos $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ em torno de $(0,0)$ temos que

- $V(0,0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

- V é diferenciável e

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle &= \langle (2x, 4y), (2yx - x^3, -x^2) \rangle \\ &= 4x^2y - 2x^4 - 4x^2y = -2x^4 \leq 0.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Lyapunov (Parte I) 18, podemos concluir que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável do sistema.

Exemplo 36. Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

que é associada ao campo $f(x, y) = (-y - x^3, x - y^3)$, temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $f(0, 0) = (-0 - 0^3, 0 - 0^3) = (0, 0)$.

Se tomarmos $V(x, y) = x^2 + y^2$ em torno de $(0, 0)$ temos que

- $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.
- V é diferenciável e

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle &= \langle (2x, 2y), (-y - x^3, x - y^3) \rangle \\ &= -2xy - 2x^4 + 2yx - 2y^4 = -2x^4 - 2y^4 < 0,\end{aligned}$$

para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

Logo, pelo Teorema de Lyapunov (Parte II) 21, podemos concluir que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema.

Exemplo 37. Consideremos a seguinte equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y - y^3 \end{cases}$$

que é associada ao campo $f(x, y) = (-y - x^3, x - y - y^3)$, temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $f(0, 0) = (-0 - 0^3, 0 - 0^3) = (0, 0)$.

Se tomarmos a função $V(x, y) = x^2 + y^2$, onde V associa cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao quadrado de sua norma, temos que:

- $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.
- V é uma função diferenciável e,

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle &= \langle (2x, 2y), (-y - x^3, x - y - y^3) \rangle \\ &= -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^2 - 2y^4 = -2x^4 - 2y^2 - 2y^4. \end{aligned}$$

Vemos que, para qualquer vizinhança U de $(0, 0)$ e qualquer $(x, y) \in U \setminus \{(0, 0)\}$ temos que

$$-2x^4 - 2y^2 - 2y^4 < 0.$$

Logo, pelo Teorema de Lyapunov (Parte II) 21, podemos concluir que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema.

Nos próximos exemplos, utilizará o seguinte resultado:

Proposição 38. Se x_0 é um ponto crítico isolado que é um ponto de mínimo local estrito da função $U : E \rightarrow \mathbb{R}$, então x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do campo gradiente $f = -\nabla U$ em E .

A demonstração desse resultado se encontra em Doering e Lopes (2016, p.216) [4].

Exemplo 39. Defina $U(x_1, x_2) = x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2$. Sabemos que U é de classe C^2 em \mathbb{R}^2 e que

$$\nabla U(x_1, x_2) = (x_1(2 + 3x_1), 2x_2),$$

de modo que $f(x_1, x_2) = (-2x_1 - 3x_1^2 - 2x_2)$ é o campo gradiente associado a U .

Os únicos pontos de equilíbrio de f são a origem $(0, 0)$ de \mathbb{R}^2 e $(-\frac{2}{3}, 0)$; esse ponto crítico de U não é extremo mas o primeiro é um ponto de mínimo local não-degenerado de U , pois a matriz hessiana das derivadas parciais de segunda ordem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é positivo definida, ou seja, seus dois autovalores são estritamente positivos.

Logo, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de f pela Proposição 38.

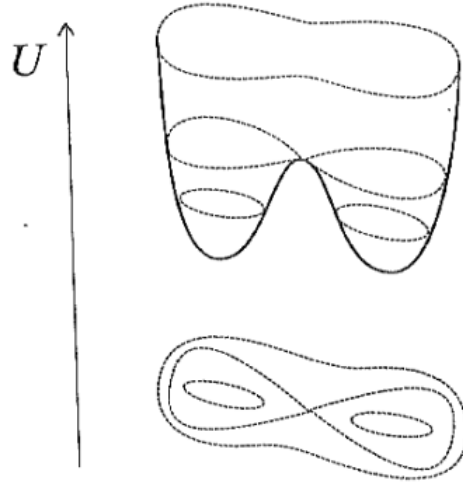


Figura C.1: O gráfico e as curvas de nível de U . Fonte: Doering e Lopes (2016).

Exemplo 40. Defina $U(x_1, x_2) = x_1^4 - 2x_1^3 + x_1^2 + x_2^2 = x_1^2(x_1 - 1)^2 + x_2^2$. É claro que U é de classe C^2 em \mathbb{R}^2 e que

$$f(x_1, x_2) = -\nabla U(x_1, x_2) = (-2x_1(x_1 - 1)(2x_1 - 1), -2x_2),$$

é o campo gradiente associado a U , cujas únicas singularidades são os pontos

$$(0, 0), \quad (1, 0) \text{ e } \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Nesse caso, $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis para o campo f , pois a matriz hessiana de U é positivo definida nesses pontos; no ponto $(\frac{1}{2}, 0)$ não temos essa propriedade, logo não podemos afirmar que esse ponto é de equilíbrio estável.

Como $(\frac{1}{2}, 0)$ é um ponto de sela para U e o campo gradiente de U deve ser normal às curvas de nível de U , podemos deduzir que o retrato de fase de $f = -\nabla U$ perto de $(\frac{1}{2}, 0)$ é uma versão não-linear do comportamento de uma sela. Assim, $(\frac{1}{2}, 0)$ não é um ponto de equilíbrio estável. O gráfico de U é apresentado na Figura C.1 e a descrição global do retrato de fase dessa equação $x' = f(x)$ é dada pela Figura C.2.

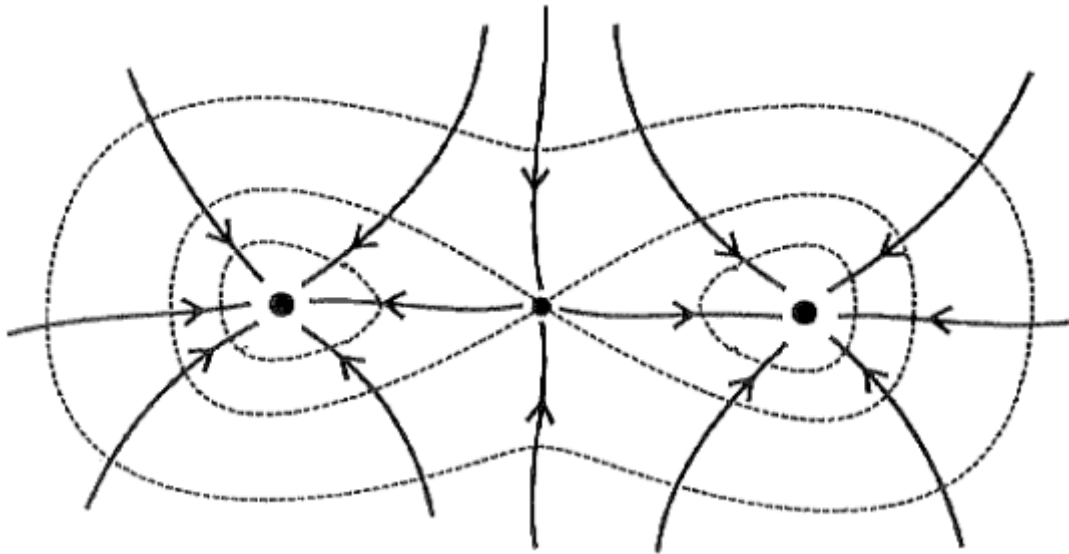


Figura C.2: O retrato de fase de $-\nabla U$. Fonte: Doering e Lopes (2016).

Podemos, também, concluir que $(0,0)$ e $(1,0)$ são singularidades assintoticamente estáveis e que $(\frac{1}{2},0)$ é uma singularidade instável de $f = -\nabla U$ de uma outra forma, usando os autovalores da derivada Df nessas singularidades. De fato,

$$Df(0,0) = Df(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad Df\left(\frac{1}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

de modo que os autovalores nas duas primeiras singularidades são idênticos e iguais a -2 e na última existe o autovalor 1 positivo. Sabemos que se todos autovalores tem parte real negativa então temos um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e se tem algum autovalor com parte real positiva, então temos uma instabilidade na singularidade. Sendo assim, as primeiras duas singularidades são assintoticamente estáveis e a última é instável.