UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Rodrigo dos Santos Bononi

Grupos de Gottlieb de espaços de Moore

São José do Rio Preto
2023

Rodrigo dos Santos Bononi

Grupos de Gottlieb de espaços de Moore

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Thiago de Melo

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2023

B719g

Bononi, Rodrigo dos Santos

Grupos de Gottlieb de espaços de Moore / Rodrigo dos Santos Bononi. -- São José do Rio Preto, 2023

74 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Thiago de Melo

1. Topologia algébrica. 2. Teoria de homotopia. 3. Grupos de Gottlieb. 4. Espaços de Moore. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Rodrigo dos Santos Bononi

Grupos de Gottlieb de espaços de Moore

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Matemática UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Marek Golasiński
University of Warmia and Mazury - Polônia

Prof. Dr. João Peres Vieira
Matemática UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Northon Canevari Leme Penteado
Universidade Federal do Cariri

São José do Rio Preto
28 de junho de 2023

Dedico a Deus, Nossa Senhora Aparecida e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, por me concederem a graça de concluir mais esta etapa de minha vida, por me fortalecer em todos os momentos difíceis e por colocar pessoas maravilhosas em minha vida durante toda essa jornada.

Aos meus pais, Maria Nelci dos Santos Bononi e João Bononi, por todo suporte me fornecido durante toda minha vida. Saibam que são responsáveis por me manter motivado e se hoje estou aqui, os responsáveis são vocês. Amo muito vocês.

À minha sobrinha, Manuela Nizato Bononi, que indiretamente me faz ser uma pessoa melhor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Thiago de Melo, pela paciência, disponibilidade, atenção e cuidado para o desenvolvimento deste trabalho. Também pela amizade e companheirismo durante todo o processo.

À Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pela amizade e companheirismo durante toda minha jornada acadêmica até aqui. Por me apresentar a área Topologia Algébrica e por ser essa pessoa incrível e amável.

Ao Prof. Dr. Marek Golasiński, pelas discussões e sugestões para o desenvolvimento do trabalho, por sua amizade e companheirismo durante sua visita ao Brasil.

Aos professores da Comissão Examinadora.

À CAPES, pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização desse projeto.

À UNESP, em especial, ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - IBILCE, São José do Rio Preto e Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE, Rio Claro.

Aos meus amigos, em especial, Paulo Vecchia, Mariana Carolina Martins e Plínio Sicuti, por todo companheirismo e apoio durante essa longa jornada.

E, por fim, a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste sonho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O dia está na minha frente esperando para ser o que eu quiser.
E aqui estou eu, o escultor que pode lhe dar forma.
Tudo depende de mim.
Charlie Chaplin

RESUMO

Em [3], após terminar a classificação $G_n(M(A,n))$ para $n > 2$ e A um grupo abeliano finitamente gerado, os autores fazem o seguinte comentário: [3, Remark 4.5]: "Seria interessante calcular outros grupos de Gottlieb de espaços de Moore como, por exemplo, $G_{n+1}(M(A,n))$". Fomos então motivados por esse comentário e também por cálculos de $G_{n+k}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n))$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ para A grupo abeliano finito de ordem ímpar, feitos em [8, Chapter 3], para calcular os grupos de Gottlieb $G_{n+k}(M(\mathbb{Z}^t \oplus \mathbb{Z}_2))$ para $k = 1, 2$ e $t \geq 1$, e consequentemente, calcular os grupos de Gottlieb $G_{n+k}(M(\mathbb{Z}^t \oplus A))$ para $k = 1, 2$, $t \geq 1$ e A um grupo abeliano finito com $|A| \equiv 2 \pmod 4$. Além do mais, também motivados por [3, Corollary 3.6], derivado de [3, Theorem 3.4], que diz: $G_N(S^m \vee S^n) = 0$ com $2 \leq m \leq n$ e $N < 2m - 1$, estendemos o resultado para uma quantidade arbitrária de esferas podendo infinitas delas ser S^1. Estes resultados estão disponíveis também no trabalho em conjunto [7].

Palavras-chave: Topologia algébrica. Teoria de homotopia. Grupos de Gottlieb. Espaços de Moore.

ABSTRACT

In [3], after finishing the classification $G_n(M(A,n))$ *for* $n > 2$ *and* A *a finitely generated abelian group, the authors make the following comment: [3, Remark 4.5]: "It would be interesting to compute other Gottlieb groups of Moore spaces like, for example,* $G_{n+1}(M(A,n))$*". We were then motivated by this comment and also by computations of* $G_{n+k}(M(\mathbb{Z}\oplus A,n))$*,* $k = 1,2,3,4,5$ *for* A *finite odd-order abelian group, made in [8, Chapter 3], to calculate the Gottlieb groups* $G_{n+k}(M(\mathbb{Z}^t\oplus\mathbb{Z}_2))$ *for* $k = 1,2$ *and* $t \geq 1$*, and consequently calculate the Gottlieb groups* $G_{n+k}(M(\mathbb{Z}^t\oplus A))$ *for* $k = 1,2$*,* $t \geq 1$ *and* A *a finite abelian group with* $|A| \equiv 2 \pmod 4$*. In addition, also motivated by [3, Corollary 3.6], derived from [3, Theorem 3.4], which says:* $G_N(S^m \vee S^n) = 0$ *with* $2 \leq m \leq n$ *and* $N < 2m-1$*, we extend the result to an arbitrary amount of spheres, infinite of which can be* S^1*. These results are also available in the joint work [7].*

Keywords: Algebraic topology. Homotopy theory. Gottlieb groups. Moore spaces.

Sumário

1 Introdução

Dado um espaço baseado X, seu n-ésimo grupo de Gottlieb $G_n(X)$ com $n \geq 1$ foi introduzido e estudado por Gottlieb em [9], [10] e mostrou ter varias aplicações topológicas. Houve resultados recentes em grupos de Gottlieb de esferas, espaços projetivos e espaços de Moore [8]. O artigo [3] trata de $G_n(\Sigma X_1 \vee \Sigma X_2 \vee \cdots \vee \Sigma X_k)$, onde ΣX_i é a suspensão do espaço X_i, com atenção especial para o caso $k = 2$ e X_i uma esfera. Condições necessárias e suficientes para um elemento do grupo de homotopia $\pi_n(\Sigma X_1 \vee \cdots \vee \Sigma X_k)$ estar em $G_n(\Sigma X_1 \vee \cdots \vee \Sigma X_k)$ são apresentadas.

Somos motivados por [3, Comentário 4.5]: "Seria interessante calcular outros grupos de Gottlieb de espaços de Moore como, por exemplo, $G_{n+1}(M(A, n))$" para calcular os grupos de Gottlieb $G_{n+k}(M(\mathbb{Z}^t \oplus \mathbb{Z}_2))$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$ e $m \geq 1$.

Esta tese está organizado da seguinte forma. O Capítulo 2, que chamamos de preliminares, apresenta algumas teorias, definições e resultados que julgamos necessárias para o entendimento base desta tese, com destaque para a seção que fala sobre produto de Whitehead generalizado, o qual será uma das nossas principais ferramentas em nossos resultados.

No Capítulo 3 apresentamos o grupo de Gottlieb e o espaço de Moore, que serão nossos principais objetos de estudo. Também, no Capítulo 3, apresentamos resultados sobre grupos de Gottlieb de wedge de esferas, muito estudado em [3] e de modo mais geral, resultados sobre grupos de Gottlieb de wedge de espaços de Moore.

O Capítulo 4, em sua maior parte, traz com maior detalhamento os resultados obtidos em [7]. Apresentamos a classificação do n-ésimo grupo de Gottlieb de um espaço de Moore do tipo (A, n), com A abeliano finitamente gerado e $n > 2$ e cálculos do $(n + k)$-ésimo grupo de Gottlieb de alguns espaços de Moore, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, que serviu de motivação para nossos principais resultados desta tese, que se localizam na Seção 4.4 e 4.5, a saber:

Teorema 4.29. *Se* $n \geq 3$ *então* $G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)) = 0$.

Teorema 4.38. *Se* $n \geq 4$ *então* $G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)) = 0$.

Na Seção 4.6 generalizamos alguns resultados apresentados em [3]. Primeiro, os grupos $G_N(\bigvee_{t\in T} S^{n_t})$ com $|T| \geq 2$ e $n_t \geq 2$ para $t \in T$ e $N < 2\min\{n_t\}_{t\in T} - 1$ são calculados e depois fazendo uso de [9] e [10] computamos o principal resultado da seção:

Teorema 4.44. *Se* $|R| \geq 1$ *e* $|T| \geq 1$ *então* $G_N(\bigvee_{r\in R} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = 0$ *para* $N < 2\min\{n_t\}_{t\in T} - 1$.

Um dos pontos-chave para a obtenção dos resultados neste trabalho é o conhecimento do elemento $\iota_{M^2} \wedge \eta_2$, encontrado em [15, Lemma 3.1]. Agradecemos profundamente ao Prof. Marek Golasiński pelas discussões e sugestões para o desenvolvimento do trabalho, em particular nos cálculos realizados com este elemento, bem como pelo contato com o Prof. Juno Mukai, a partir do qual nos foi apresentada a referência acima citada. Os resultados dessas discussões estão também em [7].

2 Preliminares

Ao longo desta tese, a menos que se diga ao contrário, todas aplicações são assumidas como baseadas e todos os espaços conexos, baseados e com o mesmo tipo homotopia de CW-complexos. Usamos a terminologia e notações padrão da teoria de homotopia, principalmente do [19]. Não fazemos distinção entre uma aplicação e sua classe de homotopia. Escrevemos ΩX (resp. ΣX) para o espaço loop (resp. suspensão) de um espaço X e $[X, Y]$ para o conjunto de classes de homotopia das aplicações de X para Y. Escrevemos $X \simeq Y$ e $f \simeq g$ para uma equivalência de homotopia dos espaços X e Y e para indicar aplicações homotópicas, respectivamente. Usaremos também a notação $X \approx Y$ para indicar espaços homeomorfos.

Dados os espaços X e Y, usamos as notações usuais $X \vee Y$ e $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ para o wedge e o smash de X e Y, respectivamente. Escrevemos ι_X para a aplicação identidade de um espaço X, ι_n para a aplicação identidade da n-esfera S^n e $\pi_n(X)$ com $n \geq 1$ para o n-ésimo grupo de homotopia de X.

2.1 Somas Diretas

O conceito de soma direta é de extrema importância na teoria de grupos abelianos. Isso se deve a dois fatos: primeiro, se um grupo se decompõe em uma soma direta, ele pode ser estudado pelas componentes da soma direta, e estes são, em vários casos, de estrutura mais simples; em segundo lugar, novos grupos podem ser construídos como somas diretas de grupos conhecidos. Veremos no decorrer do trabalho que uma decomposição específica de um grupo abeliano finito, a saber, a decomposição primária, será de grande utilidade para obtenções de resultados relevantes na teoria de grupos de Gottlieb de espaços de Moore.

Definição 2.1. Seja B_i, $i \in I$, uma família de subgrupos de A. Denotamos por $\sum\limits_{i \in I} B_i$ o subgrupo de A formado por todas as somas finitas do tipo $a = b_{i_1} + \cdots + b_{i_k}$, com $b_{i_j} \neq 0$ pertencendo a diferentes componentes B_{i_j}, $j = 1, \ldots, k$ e $k \geqslant 0$. Dizemos que os B_i geram A se $\sum\limits_{i \in I} B_i = A$.

Definição 2.2. Dados B e C subgrupos de A, assumimos que satisfazem

1. $B + C = A$;

2. $B \cap C = 0$

Neste caso chamamos A de *soma direta (interna)* dos subgrupos B e C, e escrevemos

$$A = B \oplus C.$$

A condição 1. afirma que todo $a \in A$ pode ser escrito na forma $a = b + c$, com $b \in B$ e $c \in C$, e a condição 2. equivale a unicidade desta forma, pois se $a = b + c = b' + c'$, com $b' \in B$ e $c' \in C$, então $b - b' = c - c' \in B \cap C = 0$ e por outro lado a unicidade da forma $a = b + c$ exclui a possibilidade de $b + 0 = 0 + c$ ser um elemento não nulo comum entre B e C.

Se 2. é satisfeito, então dizemos que os subgrupos B e C são disjuntos. Isto não é consistente com a teoria de conjuntos, pois B e C possuem o elemento neutro em comum, porém esse abuso não acarretará confusão.

Seja B_i, $i \in I$, uma família de subgrupos de A, sujeitos a seguintes condições:

1. $\sum B_i = A$, isto é, os B_i geram A;

2. Para todo $i \in I$,
$$B_i \cap \sum_{j \neq i} B_j = 0.$$

Então A é dito ser *soma direta* dos subgrupos B_i, e escrevemos

$$A = \bigoplus_{i \in I} B_i$$

ou

$$A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$$

se $I = \{1, \ldots, n\}$. Novamente, para todo $a \in A$ podemos escrever de forma única $a = b_{i_1} + \cdots + b_{i_k}$, com $b_{i_j} \neq 0$ pertencendo a diferentes componentes B_{i_j}, $j = 1, \ldots, k$ e $k \geqslant 0$. Como todo elemento de $\sum\limits_{i \in I} B_i$ está contido em um subgrupo gerado por uma quantidade finita de B_i, a condição 2. pode ser substituída por uma condição mais fraca

$$B_i \cap (B_{i_1} + \cdots + B_{i_k}) = 0,$$

onde $i_j \neq i$, e $k \geqslant 1$.

Definição 2.3. Sejam A um grupo de torção e p um número primo. Definimos A_p consistindo de todos os elementos de A cuja sua ordem é uma potência de p, isto é,

$$A_p = \{a \in A \mid \sharp(a) = p^m, \text{para algum inteiro m} \geqslant 0\}.$$

Chamamos A_p de *componente p-primária* de A.

Dado p primo, $0 \in A_p$ e então A_p é não vazio. Se $a, b \in A_p$, $p^m a = p^n b = 0$, para algum inteiro $m, n \geqslant 0$, então $p^{\max\{m,n\}}(a - b) = 0$. Assim, $a - b \in A_p$ e portanto A_p é subgrupo de A. O teorema abaixo garante que A é uma soma direta desses p-grupos específicos. A fatoração abaixo será de suma importância para nosso trabalho.

Teorema 2.4 ([6, Theorem 8.4])**.** *Seja A um grupo de torção. Então A é soma direta das componentes p-primárias A_p de A e essa decomposição em p-grupos é única.*

Teorema 2.5 ([6, Theorem 15.2])**.** *Se A é um grupo finito, então A é soma direta de grupos cíclicos finitos de ordens potências de primos.*

O próximo resultado e suas consequências são de suma importância para os resultados finais obtidos na tese.

Proposição 2.6. *Seja A um grupo finito de ordem $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Então:*

1. *A_{p_i} tem ordem $p_i^{\alpha_i}$, para todo $i = 1, \dots, k$.*

2. *A_{p_i} é a soma direta de grupos cíclicos finitos de ordens potências de p_i, cujo produto destas ordens é exatamente $p_i^{\alpha_i}$, para todo $i = 1, \dots k$.*

Demonstração. 1. Seja $i \in \{1, \dots, k\}$. Como A_{p_i} é um subgrupo de A, segue que $|A_{p_i}|$ divide a $|A|$. Logo, $|A_{p_i}| = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, com $\beta_j \leqslant \alpha_j$ para todo $j = 1, \dots k$. Vamos supor que $\beta_j \geqslant 1$ para algum $j \neq i$, logo p_j divide $|A_{p_i}|$, e portanto, pelo famoso Teorema de Cauchy da Teoria de Galois, segue que existe um elemento $a \in A_{p_i}$ tal que $\sharp(a) = p_j$. Isso gera uma contradição pois A_{p_i} só possui elementos de ordens potências de p_i. Logo $\beta_j = 0$ para todo $j \neq i$ e assim $|A_{p_i}| = p_i^{\beta_i}$. Agora, como o produto das ordens de A_{p_i}, $i = 1, \dots, k$ é igual a ordem de A, segue que $\beta_i = \alpha_i$.

2. Segue imediatamente do teorema anterior. □

Corolário 2.7. *Seja A um grupo finito com $|A| \equiv 2 \pmod 4$. Então A_2 é um grupo cíclico de ordem 2, isto é, $A_2 = \mathbb{Z}_2$ a menos de um isomorfismo.*

Corolário 2.8. *Seja $m = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$ a decomposição em produto de potências números primos de $m > 0$ inteiro. As componentes p-primária de $\mathbb{Z}_m$ (grupo finito cíclico de ordem m) são cíclicos e A_{p_i} tem ordem $p_i^{r_i}$, $i = 1, \dots, n$. Consequentemente*

$$\mathbb{Z}_m = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_n} \approx \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_n^{r_n}}$$

2.2 Cofibrações

A teoria de cofibração é uma das centrais da teoria de homotopia, isto é, veremos que a propriedade de extensão de homotopia do par (X, A) é essencialmente equivalente a propriedade que define uma cofibração para a aplicação inclusão $i\colon A \to X$. O conceito de cofibração é totalmente difundido na teoria de homotopia e tem um papel fundamental nesta tese, já que o principal espaço que será estudado aqui está inteiramente ligado a uma cofibração particular. Vamos aqui nos concentrar na parte que é relevante para o nosso trabalho. Nesta seção vamos sempre considerar espaços baseados e homotopias baseadas.

Definição 2.9. Uma homotopia $h_t \colon X \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ é dita ser uma *deformação* se h_0 é a aplicação identidade de X.

Definição 2.10. Um subespaço A de um espaço topológico X é dito ser um *retrato* de X, se existe uma aplicação contínua $r \colon X \to A$ tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$. A aplicação r é chamada de *retração* de X em A, e escrevemos $r \colon X \supset A$.

Definição 2.11. Um subespaço A de um espaço topológico X é dito ser um *retrato por deformação* de X se existe uma deformação $h_t \colon X \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ tal que $h_1 = i \circ r$, onde $r \colon X \supset A$ é uma retração de X em A e $i \colon A \to X$ é a aplicação inclusão. Se a deformação h_t satisfaz a condição que $h_t(a) = a$, para todo $a \in A$ e $t \in I$, então A é dito ser um *retrato por deformação forte* de X. Neste caso, h_t será chamada de *retração por deformação* de X em A.

Observação 2.12. Se A é um retrato por deformação de X, então A possui o mesmo tipo de homotopia de X. De fato, a inclusão $i \colon A \to X$ é uma equivalência de homotopia com inversa homotópica $r \colon X \supset A$, cuja sua existência é garantida pela definição de retrato por deformação.

Observação 2.13. Dizer que existe uma aplicação contínua $r \colon X \to A$ tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$, é equivalente a dizer que toda aplicação contínua $f \colon A \to Y$, onde Y é um espaço topológico arbitrário, admite uma extensão contínua para X. De fato, para a primeira implicação basta tomar a extensão contínua como sendo $f \circ r$, e para a implicação contrária tome $Y = A$ e $f = id_A$.

Portanto, pela observação anterior, a Definição 2.10 pode ser apresentada de modo equivalente por: Um subespaço A de um espaço topológico X é dito ser um *retrato* de X, se toda aplicação contínua $f \colon A \to Y$, onde Y é um espaço topológico arbitrário, admite uma extensão contínua para X.

Definição 2.14. Um subespaço A de um espaço topológico X é dito ter a *propriedade da extensão de homotopia a X com respeito a Y*, se toda homotopia parcial $h_t \colon A \to Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ de uma aplicação contínua arbitrária $f \colon X \to Y$ (isto é, $h_0 = f|A$) tem uma extensão contínua $\overline{h_t} \colon X \to Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ (ou seja $\overline{h_t}|A = h_t$, para todo $t \in I$) tal que $\overline{h_0} = f$. Neste caso, dizemos também que o par (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia.

Da definição acima, da Observação 2.13 e do Lema da Colagem de aplicações contínuas, segue a seguinte proposição.

Proposição 2.15. *Seja A um subespaço de X*

1. *Se A um subespaço fechado de X e $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ é um retrato do espaço produto $X \times I$ então o par (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia.*

2. *Se o par (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia então $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ é um retrato do espaço produto $X \times I$.*

Definição 2.16. Seja X um CW complexo e A um subespaço de X. Então A é um subcomplexo de X se é uma união de células abertas de X tal que se e^n é um célula aberta com $e^n \subset A$, então $\overline{e^n} \subset A$. Claramente A é um CW complexo. Dizemos que o par (X, A) é um par CW.

Observação 2.17. Se A é um subcomplexo de X, então facilmente mostra-se que A é fechado em X e que a topologia de A como CW complexo coincide com a topologia induzida de X no subespaço A.

Observação 2.18. Da observação anterior, se (X, A) é um par CW a Proposição 2.15 fica resumida da seguinte forma: "*$(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ é um retrato do espaço produto $X \times I$ se e somente se o par (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia.*"

Proposição 2.19. *Se (X, A) é um par CW, então (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopia.*

Demonstração. A demonstração consiste em construir uma retração $r \colon X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ indutivamente e depois aplicar a observação anterior. Para mais detalhes, ver [2, p. 2]. $\square$

Definição 2.20. Uma aplicação $f \colon A \to X$ será chamada de *aplicação de cofibra ou cofibração* se para todo espaço Z, aplicações $g_0 \colon A \to Z$ e $h_0 \colon X \to Z$ e homotopia $g_t \colon A \to Z$ de g_0 tal que $h_0 f = g_0$, existe uma homotopia $h_t \colon X \to Z$ e h_0 tal que $h_t f = g_t$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g_0"] & \\ X \arrow[r, "h_0"'] & Z \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g_t"] & \\ X \arrow[r, dotted, "h_t"'] & Z \end{tikzcd}$$

Se f é uma cofibração, então $Q = X/f(A)$ é chamado de *cofibra* de f e a sequência

$$A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{q} Q$$

é chamada de *sequência da cofibra* de f, onde q é a aplicação quociente. Usamos também a palavra *cofibração* para se referir a sequência da cofibra de f.

Definição 2.21. Dado um espaço qualquer A, definimos o *cone reduzido* de A por $A \times I/((A \times \{1\}) \cup (\{*\} \times I))$ e denotamos por CA. Definimos a inclusão de A em CA, $i \colon A \to CA$, por $i(a) = [a, 0]$.

Proposição 2.22. *$i\colon A \to CA$ é uma cofibração.*

Está claro na Definição 2.14 que um par (X, A) de CW tem a propriedade de extensão de homotopia se, e somente se, a aplicação inclusão $i\colon A \to X$ é uma cofibração. Da Proposição 2.19, temos então o seguinte resultado

Proposição 2.23. *Se (X, A) é um par CW, então a aplicação inclusão $i\colon A \to X$ é uma cofibração.*

Exemplo 2.24.

1. Para quaisquer dois espaços A e B, as injeções $i_1\colon A \to A \vee B$ e $i_2\colon B \to A \vee B$ são cofibrações.

2. Se $f\colon A \to X$ e $f'\colon A' \to X'$ são cofibrações, então $f \vee f'\colon A \vee A' \to X \vee X'$ é uma cofibração.

Portanto, temos os seguintes exemplos de sequências de cofibrações.

- $A \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{q} \Sigma A$, para qualquer espaço A.
- $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A$, para qualquer par (X, A) CW-complexo.
- $A \xrightarrow{i_1} A \vee B \xrightarrow{q_2} B$, para quaisquer espaços A e B.
- $A \vee A' \xrightarrow{f \vee f'} X \vee X' \xrightarrow{q \vee q'} Q \vee Q'$, onde as seguintes sequências de cofibras são dadas por $A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{q} Q$ e $A' \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{q'} Q'$.

Note que todos os exemplos acima, a cofibração é um mergulho, isto é, um homeomorfismo sobre a imagem. Este fato é verdadeiro para todas cofibrações.

Proposição 2.25 ([2, Proposition 3.2.6])**.** *Se $f\colon X \to Y$ é uma aplicação de cofibra, então f é um mergulho.*

Isto nos mostra que a propriedade de cofibração e a propriedade de extensão de homotopia baseada são essencialmente as mesmas. Mais precisamente, se $f\colon X \to Y$ é uma aplicação de cofibra, então a inclusão de $f(X)$, a imagem de f, em Y tem a propriedade de extensão de homotopia e $X \approx f(X)$.

2.3 Pushout

Definição 2.26. Dados os espaços e as aplicações

$$Y \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} X \tag{$*$}$$

um *pushout* de $(*)$ consiste de um espaço P e aplicações $u\colon X \to P$ e $v\colon Y \to P$ são tais que $uf = vg$. Além do mais, pedimos o seguinte: Se Z é qualquer outro espaço e se

$r\colon X \to Z$ e $s\colon Y \to Z$ são tais que $rf = sg$, então existe uma única aplicação $t\colon P \to Z$ tal que $tu = r$ e $tv = s$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"'] \arrow[ddr, bend left, "r"] & \\
Y \arrow[r, "v"] \arrow[drr, bend right, "s"'] & P \arrow[dr, dotted, "t"] & \\
 & & Z.
\end{tikzcd}$$

Chamamos P ou a tripla (P, u, v), de o pushout de $(*)$. O diagrama quadrado acima é chamado de *quadrado pushout*.

Proposição 2.27. *Quaisquer dois pushouts de $(*)$ são homeomorfos.*

Demonstração. Sejam (P, u, v) e (P', u', v') pushouts de $(*)$. Como P é um pushout, existe uma aplicação $t\colon P \to P'$ tal que $tu = u'$ e $tv = v'$. Como P' é um pushout, existe uma aplicação $t'\colon P' \to P$ tal que $t'u' = u$ e $t'v' = v$. Portanto, $t'tu = uet'tv = v$. Pela unicidade da definição de pushout, $t't = \iota_P$. Analogamente, $tt' = \iota_{P'}$, e então t é um homeomorfismo com inversa t'. □

Agora vamos mostrar a existência de um pushout (P, u, v).

Proposição 2.28. *Dado $(*)$, existe um pushout (P, u, v).*

Demonstração. Considere $X \vee Y$, como um subespaço de $X \times Y$, e definimos uma relação de equivalência em $X \vee Y$ por $(f(a), *) \sim (*, g(a))$, para todo $a \in A$. Seja $P = X \vee Y / \sim$ e seja $q\colon X \vee Y\colon \to P$ a aplicação quociente. Defina u e v por $u = qi_1$ e $v = qi_2$, onde $i_1\colon X \to X \vee Y$ e $i_2\colon Y \to X \vee Y$ são as aplicações inclusões. Claramente $uf = vg$. Agora, vamos mostrar que (P, u, v) é um pushout de $(*)$. Se $r\colon X \to Z$ e $s\colon Y \to Z$ são aplicações tais que $rf = sg$, então existe uma aplicação $\nabla(r \vee s)\colon X \vee Y \to Z$ satisfazendo

$$\nabla(r \vee s)(f(a), *) = rf(a) = sg(a) = \nabla(r \vee s)(*, g(a)).$$

Portanto, $\nabla(r \vee s)$ induz uma aplicação $t\colon P \to Z$ tal que $tu = r$ e $tv = s$. Para provar a unicidade de t, seja $m\colon P \to Z$ uma aplicação tal que $mu = r$ e $mv = s$. Então

$$mqi_1 = mu = r = tu = tqi_i,$$

e similarmente, $mqi_2 = tqi_2$. Logo, $mq = tq$, e como q é sobrejetora, segue que $m = t$. □

Proposição 2.29 ([2, Proposição 3.2.10])**.** *Seja*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "u"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & P
\end{tikzcd}$$

um quadrado pushout. Se g é uma cofibração então u também é uma cofibração. Neste caso, v induz um homeomorfismo $v'\colon Y/g(A) \to P/u(X)$ de cofibras.

2.4 Mapping cone e mapping cylinder

Agora vamos introduzir um caso especial de um pushout. Esse caso será muito usado no decorrer da tese.

Definição 2.30. Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação qualquer e considere o quadrado pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "k"] \\ CX \arrow[r, "j"'] & P \end{tikzcd}$$

Chamamos P de *espaço obtido colando um cone de* X *por* f *em* Y ou, mais brevemente, *o mapping cone de* f ou *homotopy cofiber de* f. Nós escrevemos $P = C_f = Y \cup_f CX$. Por causa que $X \longrightarrow CX \longrightarrow \Sigma X$ é uma sequência de cofibra, então pela proposição anterior

$$Y \xrightarrow{k} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X$$

também é uma sequência de cofibra. Chamada de *cofibração principal induzida por* f.(Ver Figura 2.1)

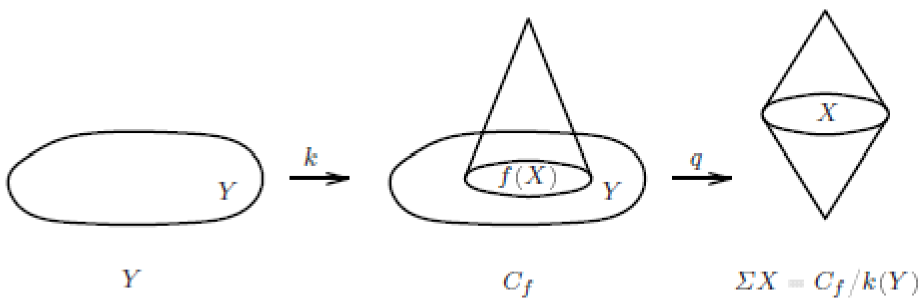

Figura 2.1: [2, Figura 3.1]

O mapping cone é uma construção muito importante para esta tese, tendo em vista que o principais espaços que iremos trabalhar aqui, a saber, os espaços de Moore, são mapping cone de uma aplicação específica. Apresentamos a seguir algumas das suas propriedades.

Proposição 2.31 ([2, Proposition 3.2.12])**.** *Seja* $f\colon X \to Y$ *uma aplicação e* C_f *o mapping cone de* f*. Então uma aplicação* $g\colon Y \to Z$ *pode-se estender para* C_f *se, e somente se,* $gf \simeq *\colon X \to Z$*.*

Proposição 2.32 ([2, Proposition 3.2.14])**.** *Se* $f\colon A \to X$ *é uma aplicação e* $\Sigma f\colon \Sigma A \to \Sigma X$ *é sua suspensão dada por* $\Sigma f[(x,t)] = [(f(x),t)]$*, então existe um homeomorfismo* $\theta\colon C_{\Sigma f} \to \Sigma C_f$ *tal que o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} & \Sigma X \arrow[dl, "k'"'] \arrow[dr, "\Sigma k"] & \\ C_{\Sigma f} \arrow[rr, "\theta"'] & & \Sigma C_f \end{tikzcd}$$

onde k e k' são inclusões.

Proposição 2.33 ([2, Proposition 3.2.15])**.** *Se $f_0 \simeq f_1 \colon X \to Y$, então $C_{f_0} \simeq C_{f_1}$*

Definição 2.34. Dada uma aplicação $f \colon X \to Y$, tomemos a união disjunta de $X \times I \sqcup Y$ e introduzimos a relação de equivalência $(x, 0) \sim f(x)$, para todo $x \in X$, e $(*_X, t) \sim *_Y$, para todo $t \in I$. O espaço quociente obtido é denotado por M_f e chamado de *mapping cylinder* de f. Equivalentemente, definimos $X \ltimes I = X \times I/\{(*, t)|t \in I\}$ e consideremos $(X \ltimes I) \vee Y$. Neste último espaço definimos a relação de equivalência $(\langle x, 0\rangle, *) \sim (*, f(x))$. O espaço quociente resultante é M_f. Existem aplicações $f' \colon X \to M_f$ e $f'' \colon M_f \to Y$ definidas por $f'(x) = \langle x, 1\rangle$, $f''\langle x, t\rangle = f(x)$ e $f''\langle y\rangle = y$, para todo $x \in X$, $y \in Y$ e $t \in I$. Claramente $f = f''f'$.

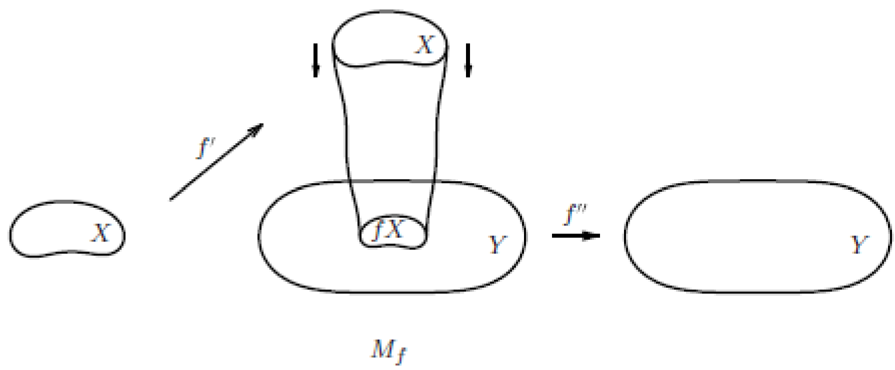

Figura 2.2: [2, Figura 3.4]

Proposição 2.35 ([2, Proposition 3.5.2])**.** *1. $f' \colon X \to M_f$ é uma cofibração.*

2. $f'' \colon M_f \to Y$ é uma equivalência de homotopia.

Observação 2.36. 1. Sejam X um espaço com o tipo de homotopia de um CW complexo K e Y um espaço com o mesmo tipo de homotopia de um CW complexo L,e seja $f \colon X \to Y$ uma aplicação. Se $g \colon K \to L$ é uma aplicação celular homotópica a f, então pode ser mostrado que o mapping cylinder M_g e o mapping cone C_g são CW complexos. Segue então de [2, Exercise 3.27] e da Proposição 2.33 que M_f e C_f possuem o mesmo tipo de homotopia de um CW complexo.

2. A cofibra de $f' \colon X \to M_f$ é justamente o mapping cone C_f de f, e portanto temos a seguinte sequência de cofibra

$$X \xrightarrow{f'} M_f \xrightarrow{p} C_f.$$

Observamos que esta é uma das duas sequências de cofibras em que o mapping cone C_f aparece. A outra é a cofibração principal induzida por f

$$Y \xrightarrow{k} C_f \xrightarrow{q} \Sigma X$$

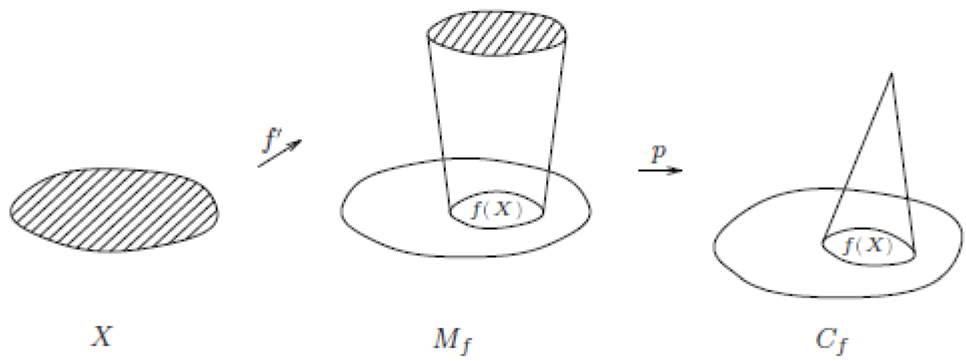

Figura 2.3: [2, Figura 3.5]

Seja $f\colon X \to Y$ uma cofibração e considere a cofibra $Z = Y/f(X)$ de f e o mapping cone C_f de f. Considere

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z$$

a sequência de cofibra de f e $f''\colon M_f \to Y$ a equivalência de homotopia da proposição anterior. A aplicação f'' induz uma aplicação $\alpha\colon M_f/f'(X) = C_f \to Y/f(X)$, onde f' é a cofibração da proposição anterior.

Proposição 2.37 ([2, Proposition 3.5.4])**.** *Com a notação acima, α é uma equivalência de homotopia tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "p"'] & C_f \arrow[d, "\alpha"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

onde k é a inclusão.

2.5 Sequências coexatas

Definição 2.38. Um conjunto S com um elemento fixo denotado por 0 é chamado de *conjunto baseado.* Se S e T são conjuntos baseados, a função $\phi\colon S \to T$ tal que $\phi(0) = 0$ é chamada de *função baseada.* O *Kernel* de ϕ, denotado por Ker ϕ, é o conjunto $\{x \in S \mid \phi(x) = 0\}$ e a *imagem* de ϕ, denotada por Im ϕ, é justamente a imagem da função ϕ. Sejam S_i, $i = 1, 2$ e 3, conjuntos baseados e $\phi_i\colon S_i \to S_{i+1}$ funções baseadas para $i = 1, 2$. Então a sequência

$$S_1 \xrightarrow{\phi_1} S_2 \xrightarrow{\phi_2} S_3$$

é chamada de *exata em* S_2 se Im ϕ_1 = Ker ϕ_2. A sequência (finita ou infinita) de conjuntos baseados e funções baseadas

$$\cdots \longrightarrow S_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} S_i \xrightarrow{\phi_i} S_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é *exata* se é exata em cada S_i. Se

$$\cdots \longrightarrow S'_{i-1} \xrightarrow{\phi'_{i-1}} S'_i \xrightarrow{\phi'_i} S'_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é outra sequência exata, então uma função da primeira sequência exata para a segunda sequência exata consiste de funções baseadas $h_i \colon S_i \to S'_i$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{i-1} \arrow[r, "\phi_{i-1}"] \arrow[d, "h_{i-1}"] & S_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "h_i"] & S_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S'_{i-1} \arrow[r, "\phi'_{i-1}"] & S'_i \arrow[r, "\phi'_i"] & S'_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Agora vamos considerar uma sequência (finita ou infinita) de espaços e aplicações

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots .$$

Esta sequência é chamada de *coexata* se para todo espaço Z, a sequência dos conjuntos baseados e funções

$$\cdots \xrightarrow{f_3^*} [X_3, Z] \xrightarrow{f_2^*} [X_2, Z] \xrightarrow{f_1^*} [X_1, Z]$$

é exata.

Se os S_i são grupos com elemento neutro 0 e os ϕ_i são homomorfismos, então Ker ϕ_i e Im ϕ_i são grupos e esta noção de exatidão se transforma numa noção mais familiar de exatidão algébrica. Vamos nos referir a uma sequência de conjuntos e funções baseados como uma sequência de conjuntos, a uma sequência de grupos e homomorfismos como uma sequência de grupos e a uma sequência de espaços e aplicações como uma sequência de espaços.

Definição 2.39. Sejam

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

e

$$\cdots \longrightarrow Y_{i-1} \xrightarrow{g_{i-1}} Y_i \xrightarrow{g_i} Y_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

duas sequências de espaços. Suponha que ambas sequências sejam finitas a esquerda, isto é, existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que $M \leqslant i$, ou finitas a direita ($i \leqslant N$, para algum N), ou finitas ($M \leqslant i \leqslant N$), ou infinitas (sem restrições para i). Então as sequências são chamadas de *equivalentes* se existem equivalências de homotopia $\alpha_i \colon X_i \to Y_i$ tais que cada quadrado no diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & X_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{i-1} \arrow[r, "g_{i-1}"] & Y_i \arrow[r, "g_i"] & Y_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

seja comutativo a menos de homotopia.

Lema 2.40 ([2, Lemma 4.2.3])**.** *Seja* $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \cdots$ *uma sequência coexata. Então*

1. $\Sigma X_1 \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma X_2 \xrightarrow{\Sigma f_2} \Sigma X_3 \xrightarrow{\Sigma f_3} \cdots$ *é coexata.*

2. *Se a sequência* $Y_1 \xrightarrow{g_1} Y_2 \xrightarrow{g_2} Y_3 \xrightarrow{g_3} \cdots$ *é equivalente a sequência dada, então ela também é coexata.*

Lema 2.41. *1. Se* $f\colon X \to Y$ *é uma aplicação qualquer, então* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} C_f$ *é coexata, onde* k *é a inclusão.*

2. Qualquer sequência de cofibra é coexata

Demonstração. A afirmação 1. é consequência imediata da Proposição 2.31 e a afirmação 2. segue também de modo imediato da Proposição 2.37 e do lema anterior. □

Enunciaremos o resultado que diz que a sequência infinita dos espaços e aplicações obtidos da construção do mapping cone é coexata. O passo principal da prova é a seguinte proposição.

Proposição 2.42 ([2, Proposition 4.2.5])**.** *Sejam* $f\colon X \to Y$ *uma aplicação qualquer,* $k\colon Y \to C_f$ *a inclusão e* $p\colon C_f \to C_f/k(Y) = \Sigma X$ *a projeção. Então a sequência de espaços*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y,$$

é coexata.

Corolário 2.43. *Como* $(\Sigma f)^*\colon [\Sigma Y, Z] \to [\Sigma X, Z]$ *é um homomorfismo de grupos e* $-(\Sigma f)^* = (-\Sigma f)^*$ *obtemos, da proposição anterior, que a seguinte sequência de espaços*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y,$$

é coexata.

Teorema 2.44 ([2, Theorem 4.2.7])**.** *Seja* $f\colon X \to Y$ *uma aplicação qualquer, então a sequência de espaços*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{k} C_f \xrightarrow{p} \Sigma X \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \Sigma^n X \xrightarrow{\Sigma^n f} \Sigma^n Y \xrightarrow{\Sigma^n k} \Sigma^n C_f \xrightarrow{\Sigma^n p} \Sigma^{n+1} X \longrightarrow \cdots$$

é coexata.

Corolário 2.45. *Seja* $f\colon X \to Y$ *uma aplicação e* Z *um espaço quaisquer, então a seguinte sequência de grupos é exata*

$$\longrightarrow [\Sigma^n C_f, Z] \xrightarrow{(\Sigma^n k)^*} [\Sigma^n Y, Z] \xrightarrow{(\Sigma^n f)^*} [\Sigma^n X, Z] \xrightarrow{(\Sigma^{n-1} p)^*} [\Sigma^{n-1} C_f, Z] \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{p^*} [C_f, Z] \xrightarrow{k^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z]$$

2.6 O produto de Whitehead generalizado

Nesta seção estamos interessados em definir uma operação que generalize o produto de Whithead para grupos de homotopia, a saber, o produto de Whitehead generalizado. O produto de Whitehead generalizado, associa para cada $\alpha \in [\Sigma A, X]$ e $\beta \in [\Sigma B, X]$ um elemento $[\alpha, \beta] \in [\Sigma(A \wedge B), X]$, onde A e B são espaços CW complexos e X um espaço topológico. Este produto será de grande utilidade em nosso trabalho, uma vez que o grupo de Gottlieb de um espaço X está totalmente relacionado ao produto de Whitehead generalizado sob condições necessárias e suficientes. Para não haver confusão, usaremos, quando conveniente, o símbolo "$\circ$" para indicar composição.

Proposição 2.46 ([1, Proposition 1.1])**.** *Para todos espaços R e S, o grupo $[\Sigma R, S]$ é abeliano se R é uma suspensão ou se S é um H-espaço.*

Não é difícil mostrar que $[R, \Omega S]$ tem uma estrutura de grupo, para todo espaço R, onde ΩS, o espaço dos laços de S, é a coleção de caminhos $l\colon I \to S$ tal que $l(0) = l(1) = *$ com a topologia compacta-aberta, ver [12, p.7]. Além do mais, existe uma transformação que associa a cada aplicação $f\colon \Sigma R \to S$ uma aplicação $\kappa(f)\colon R \to \Omega S$, definida por $\kappa(f)(r)(t) = f(r,t)$.

Proposição 2.47 ([1, Proposition 1.2])**.** *A transformação $\kappa_*\colon [\Sigma R, S] \to [R, \Omega S]$, definida por $\kappa_*([f]) = [\kappa(f)]$ é um isomorfismo natural.*

Dadas duas classes $\alpha \in [\Sigma A, X]$ e $\beta \in [\Sigma B, X]$, onde A e B são espaços CW e X um espaço qualquer, podemos construir uma nova classe $[\alpha, \beta] \in [\Sigma(A \wedge B), X]$. Sejam $f\colon \Sigma A \to X$ e $g\colon \Sigma B \to X$ representantes de α e β, respectivamente, e sejam $p_1\colon A \times B \to A$ e $p_2\colon A \times B \to B$ as projeções e $\Sigma p_1\colon \Sigma(A \times B) \to \Sigma A$ e $\Sigma p_2\colon \Sigma(A \times B) \to \Sigma B$ suas suspensões.

Denotemos por f' e g' as aplicações $f\Sigma p_1\colon \Sigma(A \times B) \to X$ e $g\Sigma p_2\colon \Sigma(A \times B) \to X$ respectivamente e definimos a aplicação $k'\colon \Sigma(A \times B) \to X$ por

$$k' = (f'^{-1} \cdot g'^{-1}) \cdot (f' \cdot g')$$

em que o produto $\cdot$ e a inversa vem do co-produto de $\Sigma(A \times B)$.

Observe que, $g'|_{\Sigma(A \times *)} = g'^{-1}|_{\Sigma(A \times *)} = 0$ e portanto $k'|_{\Sigma(A \times *)} = f'^{-1} \cdot f' \simeq 0$. Analogamente, $f'|_{\Sigma(* \times B)} = f'^{-1}|_{\Sigma(* \times B)} = 0$ e portanto $k'|_{\Sigma(* \times B)} = g'^{-1} \cdot g' \simeq 0$. Pela propriedade de extensão de homotopia do par CW $(\Sigma(A \times B), \Sigma(A \vee B))$, existe uma aplicação $k\colon \Sigma(A \times B) \to X$ tal que $k \simeq k'$ e $k|_{\Sigma(A \vee B)} = 0$. Assim, k induz uma aplicação $\widetilde{k}\colon \Sigma(A \wedge B) \to X$ tal que $k = \widetilde{k}\Sigma q$, onde $q\colon A \times B \to A \wedge B$ é a projeção.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Sigma A \arrow[dr, "f"] & \\
 & \Sigma(A\times B) \arrow[ur, "\Sigma p_1"] \arrow[rr, bend left, "f'"] \arrow[rr, bend right, "g'"'] \arrow[dr, "\Sigma p_2"'] \arrow[dl, "\Sigma q"'] \arrow[dd, "(f'^{-1}\cdot g'^{-1})\cdot(f'\cdot g')=k'\simeq k"] & & X \\
\Sigma(A\wedge B) \arrow[dr, "\tilde{k}"] & & \Sigma B \arrow[ur, "g"'] & \\
 & X & &
\end{tikzcd}$$

O próximo lema nos fornece que a classe de homotopia da aplicação $\widetilde{k}$ não depende da escolha da aplicação k, e portanto $\widetilde{k}$ não depende das escolhas dos representantes f e g de α e β respectivamente.

Lema 2.48 ([1, Lemma 2.1])**.** *Dadas duas aplicações $r, s\colon \Sigma(A \times B) \to X$, tais que $r|_{\Sigma(A\vee B))} = 0$ e $s|_{\Sigma(A\vee B))} = 0$, r e s induzem aplicações $\widetilde{r}, \widetilde{s}\colon \Sigma(A \wedge B) \to X$ com $r = \widetilde{r}\Sigma q$ e $s = \widetilde{s}\Sigma q$ e se $r \simeq s$ então $\widetilde{r} \simeq \widetilde{s}$.*

Agora, estamos aptos a definir o produto de Whitehead generalizado.

Definição 2.49. Definimos o produto de Whitehead generalizado de α e β como sendo $[\alpha, \beta] = [\widetilde{k}] \in [\Sigma(A \wedge B), X]$.

Observação 2.50. Em [1, p.11], Arkowitz dá uma definição alternativa e equivalente para o Produto de Whitehead generalizado, ao qual não daremos ênfase aqui, porém é de grande importância para demonstrações de resultados envolvendo o produto.

Definição 2.51. Sejam $i_1\colon \Sigma A \to \Sigma A \vee \Sigma B$ e $i_2\colon \Sigma B \to \Sigma A \vee \Sigma B$ as aplicações inclusões. A aplicação $\widetilde{k}$ construída acima, tomando $f = i_1$ e $g = i_2$, é chamada de *aplicação de Whitehead*, e denotada por $w\colon \Sigma(A \wedge B) \to \Sigma A \vee \Sigma B$. Observe que, nesse caso, $k' = k$ e portanto a aplicação w fica unicamente definida.

Teorema 2.52. *Se $f\colon \Sigma A \to X$ e $g\colon \Sigma B \to X$ são aplicações e $\alpha = [f]$ e $\beta = [g]$, então $[\alpha, \beta] = [\nabla \circ (f \vee g) \circ w] \in [\Sigma(A \wedge B), X]$, onde $\nabla\colon X \vee X \to X$ é tal que $\nabla(x, *) = \nabla(*, x) = x$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Sejam $i'_1 = i_1\Sigma p_1$, $i'_2 = i_2\Sigma p_2\colon \Sigma(A \times B) \to \Sigma A \vee \Sigma B$ e $f' = f\Sigma p_1$, $g = g\Sigma p_2\colon \Sigma(A \times B) \to X$. Provemos que

$$\nabla \circ (f \vee g) \circ ((i_1'^{-1} \cdot i_2'^{-1}) \cdot (i'_1 \cdot i'_2)) = (f'^{-1} \cdot g'^{-1}) \cdot (f' \cdot g')$$

Se $v\colon \Sigma(A \times B) \to \Sigma(A \times B)$ é a inversa do co-produto, isto é, se $v\colon \Sigma(A \times B) \to \Sigma(A \times B)$ é a aplicação que satisfaz $[hv] = [h]^{-1}$, para todo $h\colon \Sigma(A \times B) \to X$, então podemos escrever o lado esquerdo da igualdade acima como

$$\nabla \circ (f \vee g) \circ ((i_1'^{-1} \cdot i_2'^{-1}) \cdot (i_1' \cdot i_2')) = \nabla \circ (f \vee g) \circ ((i_1' \circ v \cdot i_2' \circ v) \cdot (i_1' \cdot i_2')) =$$
$$\nabla \circ (f \vee g) \circ ((i_1 \circ \Sigma p_1 \circ v \cdot i_2 \circ \Sigma p_2 \circ v) \cdot (i_1 \circ \Sigma p_1 \cdot i_2 \circ \Sigma p_2)).$$

Agora, observe que $\nabla \circ (f \vee g) \circ i_1 = f$ e $\nabla \circ (f \vee g) \circ i_2 = g$, logo a igualdade acima fica igual a

$$(f \circ \Sigma p_1 \circ v) \cdot (g \circ \Sigma p_2 \circ v) \cdot (f \circ \Sigma p_1) \cdot (g \circ \Sigma p_2) = (f' \circ v) \cdot (g' \circ v) \cdot f' \cdot g' = (f'^{-1} \cdot g'^{-1}) \cdot (f' \cdot g').$$

Da construção do produto de Whitehead, existe uma aplicação $k\colon \Sigma(A \times B) \to X$ tal que $k|_{\Sigma(A \vee B)} = 0$ e $k \simeq (f'^{-1} \cdot g'^{-1}) \cdot (f' \cdot g')$ e portanto k induz $\widetilde{k}\colon \Sigma(A \wedge B) \to X$ tal que $k = \widetilde{k}\Sigma q$. Assim,

$$\widetilde{k}\Sigma q = k \simeq \nabla \circ (f \vee g) \circ ((i_1'^{-1} \cdot i_2'^{-1}) \cdot (i_1' \cdot i_2')) = (\nabla \circ (f \vee g) \circ w) \circ \Sigma q,$$

e portanto, pelo Lema 2.48,

$$[\alpha, \beta] = [\widetilde{k}] = [\nabla \circ (f \vee g) \circ w] \in [\Sigma(A \wedge B), X]. \qquad \square$$

Vamos agora derivar algumas propriedades do produto de Whitehead generalizado. Em todos os casos, usaremos fortemente o Lema 2.48 e propriedades sobre o comutador $(x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot (x \cdot y)$ de dois elementos x e y de um grupo. Vamos denotar o comutador $(x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot (x \cdot y)$ de dois elementos x e y por (x, y). Devemos, no entanto, geralmente denotar a operação de grupo em $[\Sigma R, S]$ aditivamente, para todos os espaços R e S.

Proposição 2.53. *Se X é um H-space, então $[\alpha, \beta] = 0$, para todo $\alpha \in [\Sigma A, X]$ e $\beta \in [\Sigma B, X]$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.46, o grupo $[\Sigma(A \times B), X]$ é abeliano e então o comutador $k' = (f', g')$ da definição do produto é nulo homotópico. Portanto, pelo Lema 2.48, $\widetilde{k} \simeq 0$, ou seja, $[\alpha, \beta] = 0$. $\square$

Dada uma aplicação $f\colon R \to S$, sabemos que podemos definir uma nova aplicação $\Sigma f\colon \Sigma R \to \Sigma S$ por $\Sigma f[(r, t)] = [(f(r), t)]$. Portanto, temos uma transformação $\Sigma_*\colon [R, S] \to [\Sigma R, \Sigma S]$ que para cada aplicação $f \in [R, S]$ associa a uma nova aplicação $\Sigma_*(f) = \Sigma f \in [\Sigma R, \Sigma S]$. Quando R é uma suspensão $[R, S]$ tem estrutura de grupo e prova-se que Σ_* é um homomorfismo, e neste caso Σ_* é chamado de *homomorfismo suspensão.*

As demonstrações das duas proposições seguintes são relativamente fáceis, para mais detalhes, ver [1, p.13].

Proposição 2.54 ([1, Proposition 3.2])**.** *Se $\Sigma_*\colon [\Sigma(A \wedge B), X] \to [\Sigma^2(A \wedge B), \Sigma X]$ é o homomorfismo suspensão, então $\Sigma_*([\alpha, \beta]) = 0$ para todo $\alpha \in [\Sigma A, X]$ e $\beta \in [\Sigma B, X]$.*

Proposição 2.55 ([1, Proposition 3.3])**.** *Para todo $\alpha \in [\Sigma A, X]$ e $\beta \in [\Sigma B, X]$, temos*

$$[\beta, \alpha] = -(\Sigma\sigma)^*([\alpha, \beta]),$$

onde $\sigma\colon B \wedge A \to A \wedge B$ é induzida da aplicação natural $B \times A \to A \times B$ que associa cada elemento (b, a) em (a, b).

Proposição 2.56 ([1, Proposition 3.4])**.** *Se A e B são suspensões, então*

1. $[\alpha + \overline{\alpha}, \beta] = [\alpha, \beta] + [\overline{\alpha}, \beta]$
2. $[\alpha, \beta + \overline{\beta}] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \overline{\beta}]$

para todo α, $\overline{\alpha} \in [\Sigma A, X]$ e β, $\overline{\beta} \in [\Sigma B, X]$.

Definição 2.57. Dado um espaço X, definimos o *cone de X* por

$$TX = X \times I/X \times \{1\}$$

e recordemos que o cone reduzido de X é definido por

$$CX = X \times I/(X \times \{1\} \cup \{*\} \times I)$$

e a aplicação $i\colon X \to CX$, dada por $i(x) = [(x, 0))]$, para todo $x \in X$, é a inclusão de X em CX.

Recordemos que dada uma aplicação $f\colon X \to Y$ o espaço $Y \cup_f CX$ definido como sendo o espaço quociente da união disjunta de Y e CX pela relação $i(x) \sim f(x)$, para todo $x \in X$, é chamado de mapping cone da aplicação f ou de pushout das aplicações f e i e temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "k"] \\ CX \arrow[r, "j"'] & Y \cup_f CX \end{tikzcd}$$

onde $j\colon CX \to Y \cup_f CX$ e $k\colon Y \to Y \cup_f CX$ são as aplicações dadas por $j(a) = [a]$, para todo $a \in CX$ e $k(y) = [y]$, para todo $y \in Y$.

Recordemos também, da definição de pushout, que $Y \cup_f CX$ possui a seguinte propriedade: Dadas duas aplicações $s\colon Y \to Z$ e $r\colon CX \to Z$ tais que $sf = ri$, então existe uma única aplicação $l\colon Y \cup_f CX \to Z$ tal que $lk = s$ e $lj = r$, isto é, existe uma única aplicação $l\colon Y \cup_f CX \to Z$ que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "k"'] \arrow[ddr, bend left, "s"] & \\ CX \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "r"'] & Y \cup_f CX \arrow[dr, dotted, "l"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Dada essa breve revisão, apresentemos agora um dos principais resultados de [1].

Teorema 2.58 ([1, Corollary 4.3])**.** *Seja $w\colon \Sigma(A \wedge B) \to \Sigma A \vee \Sigma B$ a aplicação de Whitehead, então $\Sigma A \times \Sigma B \simeq (\Sigma A \vee \Sigma B) \cup_w C\Sigma(A \wedge B) = C_w$.*

Corolário 2.59 ([1, Corollary 4.4])**.** *Se* $j\colon \Sigma A \vee \Sigma B \to \Sigma A \times \Sigma B$ *é a aplicação inclusão, então* $jw \simeq 0\colon \Sigma(A \wedge B) \to \Sigma A \times \Sigma B$.

Corolário 2.60 ([1, Corollary 4.6])**.** *Se* $p\colon \Sigma A \times \Sigma B \to \Sigma A \wedge \Sigma B$ *é a aplicação projeção,* $j\colon \Sigma A \vee \Sigma B \to \Sigma A \times \Sigma B$ *a aplicação inclusão e* $w\colon \Sigma(A \wedge B) \to \Sigma A \vee \Sigma B$ *a aplicação de Whitehead, então para todo espaço* X *a sequência a seguir é exata*

$$[\Sigma A \wedge \Sigma B, X] \xrightarrow{p^*} [\Sigma A \times \Sigma B, X] \xrightarrow{j^*} [\Sigma A \vee \Sigma B, X] \xrightarrow{w^*} [\Sigma(A \wedge B), X]$$

Teorema 2.61. *Sejam* $\alpha = [f] \in [\Sigma A, X]$ *e* $\beta = [g] \in [\Sigma B, X]$. *Então* $[\alpha, \beta] = 0$ *se, e somente se, existe uma aplicação* $m\colon \Sigma A \times \Sigma B \to X$ *tal que* $[m|_{\Sigma A \times *}] = \alpha$ *e* $[m|_{* \times \Sigma B}] = \beta$, *isto é, existe uma aplicação* $m\colon \Sigma A \times \Sigma B \to X$ *tal que o seguinte diagrama comuta a menos de homotopia:*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma A \vee \Sigma B \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "l"] & \\
\Sigma A \times \Sigma B \arrow[r, "m"'] & X
\end{tikzcd}$$

onde $l = \nabla \circ (f \vee g)\colon \Sigma A \vee \Sigma B \to X$.

Demonstração. Sejam f e g representantes de α e β, respectivamente. Segue do Teorema 2.52 que

$$[l \circ w] = [\nabla \circ (f \vee g) \circ w] = [\alpha, \beta].$$

Suponha $[\alpha, \beta] = 0$. Então $[l \circ w] = w^*(l) = 0 \in [\Sigma A \wedge \Sigma B, X]$, isto é, $[l] \in \mathrm{Ker}\ w^*$. Pelo corolário anterior, temos que $\mathrm{Ker}\ w^* = \mathrm{Im}\ j^*$, logo, existe uma aplicação $m\colon \Sigma A \times \Sigma B \to X$ tal que $j^*([m]) = [m \circ j] = [l]$, ou seja, $m \circ j \simeq l$.

Reciprocamente, se existe uma aplicação $m\colon \Sigma A \times \Sigma B \to X$ que comuta o diagrama a menos de homotopia, isto é, $[m \circ j] = [l]$. Então,

$$[\alpha, \beta] = [l \circ w] = [m \circ j \circ w] = w^*([m \circ j]) = (w^* \circ j^*)([m]) = 0,$$

pois, $\mathrm{Ker}\ w^* = \mathrm{Im}\ j^*$. □

Corolário 2.62. *Seja* ι *a classe da aplicação identidade,* $id\colon \Sigma A \to \Sigma A$, *de* ΣA. *Se* $[\iota, \iota] = 0$, *então* ΣA *é um* H*-espaço.*

Demonstração. Do teorema anterior, existe uma aplicação $m\colon \Sigma A \times \Sigma A \to \Sigma A$, tal que $[m|_{\Sigma A \times *}] = \iota$ e $[m|_{* \times \Sigma A}] = \iota$, isto é, $m \circ j_1 \simeq id$ e $m \circ j_2 \simeq id$, onde $j_1, j_2\colon \Sigma A \to \Sigma A$ são as aplicações inclusões de ΣA no primeiro e no segundo termo do produto, respectivamente. Portanto, m é um produto para ΣA e assim ΣA é um H-espaço. □

3 Grupos de Gottlieb e espaços de Moore

Neste capítulo introduziremos o Grupo de Gottlieb muito estudado em [9, 10] e espaços de Moore. Esses são os conceitos principais para a construção de nosso trabalho. Ao longo do capítulo apresentaremos várias definições e resultados que julgamos necessário para o desenvolvimento desta tese. Durante todo o capítulo, X sempre denotará um CW-complexo conexo por caminhos.

3.1 Grupos de Gottlieb

Definição 3.1. Seja X um espaço topológico com ponto base x_0. Uma homotopia $H\colon X\times I \to X$ é dita ser uma *homotopia cíclica* se $H(x,0) = x = H(x,1)$, para todo $x \in X$. Em outra notação, h_t é uma homotopia cíclica se $h_0 = h_1 = \iota_X$, onde ι_X denota a aplicação identidade de X. Se H é uma homotopia cíclica, o laço dado por $\sigma(t) = H(x_0,t)$ será chamado de *traço* da homotopia cíclica.

Teorema 3.2. *Se $\alpha\colon I \to X$ é o traço de uma homotopia cíclica e $\beta\colon I \to X$ é um laço homotópico a α (rel. {0,1}), então β também é o traço de uma homotopia cíclica.*

Demonstração. Seja $H\colon X \times I \to X$ uma homotopia cíclica e seja α o seu traço. Sejam $L = (X \times \{0,1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$ subcomplexo de $X \times I$ e $k\colon I \times I \to X$ uma homotopia entre α e β, isto é, tal que $k_0 = \alpha$ e $k_1 = \beta$. Defina a homotopia parcial $F\colon L \times I \to X$ dada por $F_s(x,0) = x = F_s(x,1)$ para todo $x \in X$ e $F_s(x_0,t) = k_s(t)$, para todo $t, s \in I$. Agora, como L é um subcomplexo de $X \times I$, a propriedade de extensão de homotopia nos dá que existe uma homotopia $K\colon X \times I \times I \to X$ tal que $K_0(x,t) = H(X,t)$ e $K_s|L = F_s$. Daí,

$$K_1(x_0,t) = F_1(x_0,t) = k_1(t) = \beta(t)$$

e

$$K_1(x,0) = F_1(x,0) = x = F_1(x,1) = K_1(x,1).$$

Logo, K_1 é uma homotopia cíclica cujo traço é β. $\square$

Definição 3.3. Seja $G(X, x_0)$ o conjunto de todos os $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ tal que α é traço de uma homotopia cíclica.

Teorema 3.4. *$G(X, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração. Defina a aplicação $J\colon X \times I \to X$ por $J(x, t) = x$, para todo $(x, t) \in X \times I$. J é uma homotopia cíclica cujo o traço é o laço constante $e\colon I \to X$ dado por $e(t) = x_0$, para todo $t \in I$. Logo, o laço constante, elemento neutro de $\pi_1(X, .x_0)$, pertence ao $G(X, x_0)$.

Sejam $[f]$, $[g] \in G(X, x_0)$. Logo, existem homotopias cíclicas $F, K\colon X \times I \to X$ cujos traços são f e g, respectivamente. Defina $H\colon X \times I \to X$ por

$$H_s(x) = \begin{cases} F_{2s}(x), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ K_{2s-1}(x), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Logo, H é uma homotopia cíclica cujo traço é $f * g$, e portanto $[f * g] = [f] \cdot [g] \in G(X, x_0)$.

Também $[f]^{-1} = [f^{-1}] \in G(X, x_0)$, uma vez que f^{-1} é o traço da homotopia cíclica $L\colon X \times I \to X$ definida por $L(x, t) = F(x, 1 - t)$. $\square$

O grupo $G(X, x_0)$ é chamado de *grupo de Gottlieb* do espaço X associado ao ponto base x_0. É comum encontrar na literatura o termo *espaço de Gottlieb* ou *G-espaço* para um espaço X tal que $G(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$. Em um espaço topológico X conexo por caminhos, o grupo fundamental não depende do ponto base, no sentido de que pontos distintos fornecem grupos fundamentais isomorfos, como mostra o Teorema 3.8. No caso em que X é um CW-complexo conexo por caminhos, o grupo de Gottlieb $G(X, x_0)$ também independe do ponto base, como mostra o próximo resultado. Por causa disso, podemos abreviar $G(X, x_0)$ para $G(X)$ quando não houver confusão.

Seja $\sigma\colon I \to X$ um caminho tal que $\sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$, x_0, $x_1 \in X$. Então σ induz um isomorfismo $\sigma_*\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ tal que $\sigma_*([\alpha]) = [\sigma * \alpha * \sigma^{-1}]$. Esse isomorfismo e o resultado abaixo serão introduzido e demonstrados de modo mais geral no Teorema 3.8 e na Proposição 3.39.

Teorema 3.5. *$\sigma_*\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ restrita a $G(X, x_1)$ é um isomorfismo tal que $\sigma_*(G(X, x_1)) = G(X, x_0)$, isto é, $G(X, x_1)$ é isomorfo a $G(X, x_0)$.*

O teorema abaixo fornece uma nova caracterização para o grupo de Gottlieb e será de grande utilidade em futuras generalizações de grupos de Gottlieb de ordens superiores.

Teorema 3.6. *Seja $\sigma\colon (S^1, s_0) \to (X, x_0)$. Então $[\sigma] \in G(X, x_0)$ se, e somente se, a aplicação $f\colon X \vee S^1 \to X$ dada por $f(x, s_0) = x$ para todo $x \in X$ e $f(x_0, s) = \sigma(s)$ para todo $s \in S^1$ pode ser estendida para $X \times S^1$.*

Demonstração. Suponha que $[\sigma] \in G(X, x_0)$. Então existe $H\colon X \times S^1 \to X$ homotopia cíclica cujo traço é σ, isto é, $H(x, s_0) = x = f(x, s_0)$, para todo $x \in X$ e $H(x_0, s) = \sigma(s) = f(x_0, s)$, para todo $s \in S^1$. Portanto, H estende f.

Reciprocamente, seja $H\colon X\times S^1\to X$ uma aplicação que estende f, ou seja, $H(x,s_0)=f(x,s_0)=x$, para todo $x\in X$ e $H(x_0,s)=f(x_0,s)=\sigma(s)$, para todo $s\in S^1$. Logo, H é uma homotopia cíclica com traço σ. $\square$

Lema 3.7. *Se $f,g\colon (I^n,\partial I^n)\to(X,x_1)$ são aplicações homotópicas relativamente a ∂I^n (isto é, $[f]=[g]$ em $\pi_n(X,x_1)$), σ, $\tau\colon I\to X$ são caminhos que ligam x_0 a x_1 homotópicos relativamente a $\{0,1\}$, e $f_t,g_t\colon I^n\to X$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ são homotopias de f ao longo de σ e de g ao longo de τ respectivamente, então f_1, g_1 são homotópicas relativamente a ∂I^n (isto é, $[f_1]=[g_1]$ em $\pi_n(X,x_0)$).*

Demonstração. Definimos duas aplicações $F,K\colon I^n\times I\to X$ como sendo as homotopias f_t, g_t, isto é, $F(x,t)=f_t(x)$ e $K(x,t)=g_t(x)$, para todos $x\in I^n$ e $t\in I$. Consideremos o subespaço fechado $A=(I^n\times\{0\})\cup(\partial I^n\times I)$ de $I^n\times I$. Da hipótese $f\sim_{\partial I^n} g$ e $\sigma\sim_{\{0,1\}}\tau$, segue que $F|A$ e $K|A$ são homotópicas relativamente a $(\partial I^n\times\{0\})\cup(\partial I^n\times\{1\})$. Como A tem a propriedade da extensão de homotopia em $I^n\times I$ com respeito a qualquer espaço X segue que existe uma homotopia $F_t\colon I^n\times I\to X$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, tal que $F_0=F$, $F_1|A=K|A$, e $F_t(\partial I^n\times\{1\})=x_0$, para todo $t\in I$. A aplicação F_1, que denotaremos por $h_t\colon I^n\to X$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, é uma homotopia de g ao longo de τ. Como $F_t(\partial I^n\times\{1\})=x_0$, para todo $t\in I$, segue que f_1 e h_1 são homotópicas relativamente a ∂I^n.

Resta-nos provar que g_1 e h_1 são homotópicas relativamente a ∂I^n.

Definimos uma aplicação $M\colon I^n\times I\to X$ por

$$M(p,q)=\begin{cases} g_{1-2q}(p), & \text{se } (p\in I^n, 0\leqslant q\leqslant \frac{1}{2})\\ h_{2q-1}(p), & \text{se } (p\in I^n, \frac{1}{2}\leqslant q\leqslant 1).\end{cases}$$

Então, para todo $p\in\partial I^n$, temos $M(p,q)=M(p,1-q)$. Portanto, podemos definir uma homotopia parcial $N_t\colon B\to X$, $(0\leqslant t\leqslant 1)$, de M sobre o bordo $B=\partial(I^n\times I)=(\partial I^n\times I)\cup(I^n\times\partial I)$ de $I^n\times I$ por

$$N_t(p,q)=\begin{cases} M(p,q), & \text{se } (p\in I^n, q\in\partial I)\\ M(p,q-tq), & \text{se } (p\in \partial I^n, 0\leqslant q\leqslant \frac{1}{2})\\ N_t(p,1-q), & \text{se } (p\in \partial I^n, \frac{1}{2}\leqslant q\leqslant 1).\end{cases}$$

Note que, se $\frac{1}{2}\leqslant q\leqslant 1$ então $0\leqslant 1-q\leqslant\frac{1}{2}$ e portanto $N_t(p,1-q)=M(p,(1-q)-t(1-q))=M(p,(1-q)(1-t))$, para todo $p\in\partial I^n$. Logo, para $q=\frac{1}{2}$, $N_t(p,\frac{1}{2})=M(p,\frac{1-t}{2})$, para todo $p\in\partial I^n$.

Agora, B tem a propriedade da extensão de homotopia em $I^n\times I$ com respeito a qualquer espaço X, logo N_t tem uma extensão contínua $M_t\colon I^n\times I\to X$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, tal que $M_0=M$. A aplicação M_1, que denotaremos por $u_t\colon I^n\to X$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, é uma homotopia, tal que $u_0=g_1$, $u_1=h_1$. Além do mais, $u_t(\partial I^n)=M_1(\partial I^n\times t)=x_0$, isto implica que g_1 e h_1 são homotópicas relativamente a ∂I^n, e portanto f_1 e g_1 são homotópicas relativamente a ∂I^n. $\square$

Teorema 3.8. *Para cada $n > 0$, todo caminho $\sigma\colon I \to X$ (ligando x_0 a x_1) fornece, de forma natural, um isomorfismo*

$$\sigma_n\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0),$$

que depende somente da classe de homotopia (relativa a $\{0, 1\}$) do caminho σ . Se σ é o caminho constante $\sigma(I) = x_0$, então σ_n é o automorfismo identidade. Se σ, τ são caminhos com $\sigma(1) = \tau(0)$, então $(\sigma * \tau)_n = \sigma_n \circ \tau_n$. Finalmente, para cada caminho $\sigma\colon I \to X$ e cada aplicação contínua $f\colon X \to Y$, temos a comutatividade do retângulo

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_1) & \xrightarrow{\sigma_n} & \pi_n(X, x_0) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_n(Y, y_1) & \xrightarrow{\tau_n} & \pi_n(Y, y_0) \end{array}$$

onde $\tau = f \circ \sigma$, $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$.

Demonstração. Seja $\sigma\colon I \to X$ um caminho ligando x_0 a x_1. Para provar este teorema, vamos construir σ_n como segue. Seja α um elemento qualquer de $\pi_n(X, x_1)$ e escolhemos um representante

$$f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$$

para α. A ideia geométrica da construção é puxar a imagem de ∂I^n ao longo do caminho σ para o ponto x_0 com a imagem de I^n sendo arrastada continuamente de forma arbitrária. A aplicação obtida após essa homotopia representará um elemento $\beta \in \pi_n(X, x_0)$ que dependerá somente de α e da classe de homotopia (relativa a $\{0,\ 1\}$) de σ. Então definiremos $\sigma_n(\alpha) = \beta$. Os detalhes seguem abaixo.

Primeiramente, vamos provar que existe uma homotopia $f_t\colon I^n \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ de f tal que $f_t(\partial I^n) = \sigma(1 - t)$, para todo $t \in I$. Toda homotopia de f satisfazendo essas condições é chamada de uma *homotopia de f ao longo de σ*. Para este propósito, definimos uma homotopia parcial $\phi_t\colon \partial I^n \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, de f colocando-se $\phi_t(\partial I^n) = \sigma(1 - t)$, para todo $t \in I$. Agora, ∂I^n tem a propriedade da extensão de homotopia em I^n com respeito a qualquer espaço X, consequentemente a homotopia ϕ_t tem uma extensão contínua $f_t\colon I^n \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, tal que $f_0 = f$ e $f_t(\partial I^n) = \sigma(1-t)$, para todo $t \in I$. Como f_1 é uma aplicação contínua que aplica ∂I^n em $\sigma(0) = x_0$, ela representa um elemento $\beta \in \pi_n(X, x_0)$. Definimos então $\sigma_n(\alpha) = \beta$.

Que β depende somente de α e da classe de homotopia (relativa a $\{0,\ 1\}$) de σ é uma consequência imediata do lema anterior. Outra consequência imediata do lema anterior é que β não depende da homotopia de f ao longo de σ.

Portanto, construímos uma transformação

$$\sigma_n\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$$

que depende somente da classe de homotopia (relativa a $\{0,\ 1\}$) do caminho σ e não depende da homotopia escolhida ao longo de σ.

Provemos agora, que se σ, $\tau\colon I \to X$ são caminhos, tais que $\sigma(0) = x_0$, $\sigma(1) = \tau(0) = x_1$ e $\tau(1) = x_2$, então $(\sigma * \tau)_n = \sigma_n \circ \tau_n$. Seja $\alpha \in \pi_n(X, x_2)$ e tomemos $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_2)$ como um representante de α. Consideremos $f_t\colon I^n \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ uma homotopia de f ao longo de τ e $g_t\colon I^n \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ uma homotopia de f_1 ao longo σ. Note que f_1 é um representante de $\tau_n(\alpha)$ e g_1 é um representante de $(\sigma_n \circ \tau_n)(\alpha)$. Definimos uma homotopia $h_t\colon I^n \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ por

$$h_t(s) = \begin{cases} f_{2t}(s), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g_{2t-1}(s), & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Então, $h_0 = f_0 = f$, $h_1 = g_1$, e $h_t(\partial I^n) = (\sigma * \tau)(1 - t)$, para todo $t \in I$, e portanto h_t é uma homotopia de f ao longo de $\sigma * \tau$. Isto implica que g_1 também representa $(\sigma * \tau)_n(\alpha)$. Portanto, $(\sigma_n \circ \tau_n)(\alpha) = (\sigma * \tau)_n(\alpha)$. Como α é arbitrário, segue que $\sigma_n \circ \tau_n = (\sigma * \tau)_n$.

Note que se $\sigma\colon I \to X$ é o caminho constante $\sigma(I) = x_0$, então σ_n é o automorfismo identidade de $\pi_n(X, x_0)$.

Mostremos agora que σ_n é um homomorfismo. Sejam α, β elementos arbitrários de $\pi_n(X, x_1)$ representados pelas aplicações $f, g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$. Sejam f_t, $g_t\colon I^n \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ homotopias ao longo de σ de f e g respectivamente. Então f_1 representa $\sigma_n(\alpha)$ e g_1 representa $\sigma_n(\beta)$. Definimos uma homotopia $h_t\colon I^n \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, por $h_t = f_t + g_t$. Então h_0 representa $\alpha + \beta$, h_1 representa $\sigma_n(\alpha) + \sigma_n(\beta)$ e h_t é uma homotopia ao longo de σ. Isto implica que $\sigma_n(\alpha + \beta) = \sigma_n(\alpha) + \sigma_n(\beta)$ e, consequentemente, σ_n é um homomorfismo.

Finalmente, mostremos que σ_n é um isomorfismo. Para este propósito, seja τ o caminho inverso de σ, isto é $\tau(t) = \sigma(1 - t)$, para todo $t \in I$. Consideremos o caminho $\sigma * \tau$. Já mostramos que $\sigma_n \circ \tau_n = (\sigma * \tau)_n$. Como τ é o caminho inverso de σ, segue que $\sigma * \tau$ é homotópico ao caminho constante $I \mapsto x_0$ relativamente a $\{0,1\}$. Daí, pelo lema anterior, segue que $\sigma_n \circ \tau_n$ é o automorfismo identidade de $\pi_n(X, x_0)$, e portanto σ_n é um epimorfismo. Por um argumento análogo mostramos que $\tau_n \circ \sigma_n$ é o automorfismo identidade de $\pi_n(X, x_1)$, e portanto σ_n é um monomorfismo. Isto completa a prova do teorema. A comutatividade do retângulo é fácil de se verificar. $\square$

Portanto, para um espaço conexo por caminhos X e $n > 0$, os grupos $\pi_n(X, x)$, $x \in X$, são todos isomorfos e podem ser denotados simplesmente por $\pi_n(X)$.

Definição 3.9. Diz-se que temos um *sistema local de grupos* $\{G_x\}_{x \in X}$ em um espaço X, se as seguintes condições são satisfeitas:

G1. Para cada ponto $x \in X$, existe um grupo G_x associado.

G2. Para cada caminho $\sigma\colon I \to X$ ligando x_0 e x_1, existe um homomorfismo $\sigma_\sharp\colon G_{x_1} \to G_{x_0}$.

G3. Se σ é o caminho constante $\sigma(I) = x_0$, então $\sigma_\sharp$ é o homomorfismo identidade de G_{x_0}.

G4. Se dois caminhos σ, $\tau\colon I \to X$ são caminhos equivalentes, isto é, se σ, τ tem os mesmos pontos iniciais e finais e são homotópicos relativamente a $\{0,1\}$, então $\sigma_\sharp = \tau_\sharp$.

G5. Se dois caminhos σ, $\tau\colon I \to X$ são consecutivos, isto é, se $\sigma(1) = \tau(0)$, então $(\sigma * \tau)_\sharp = \sigma_\sharp \circ \tau_\sharp$.

Observação 3.10. De acordo com o Teorema 3.8, a coleção dos grupos de homotopia $\{\pi_n(X,x) \mid x \in X\}$, para um espaço X e um inteiro $n > 0$, forma um sistema local de grupos em X. Similarmente, a coleção dos grupos de homotopia relativa $\{\pi_n(X,A,x) \mid x \in A\}$, $n > 1$, forma um sistema local de grupos no subespaço A de X.

Observação 3.11. Como uma consequência imediata de $G3$ e $G5$, deduzimos como na prova do Teorema 3.8, que cada $\sigma_\sharp$ é um isomorfismo. Consequentemente, se X é um espaço conexo por caminhos, então todos os grupos G_x, $x \in X$, são isomorfos.

Seja $\{G_x\}_{x\in X}$ um sistema local de grupos em X. Como os elementos do grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$ são classes de homotopia (relativa a $\{0,1\}$) dos caminhos em X com pontos iniciais e finais iguais a x_0, isto é, classes de homotopia relativa a $\{0,1\}$ dos laços em X baseados em x_0, deduzimos como uma consequência direta de $G3$ e $G5$ que, para cada $x_0 \in X$, $\pi_1(X,x_0)$ age como um grupo de operadores (ou automorfismo) em G_{x_0} no sentido definido abaixo.

Definição 3.12. Dizemos que um grupo multiplicativo H *age como um grupo de operadores em um grupo aditivo* G, (ou, simplesmente H *age* em G), se, para todo $h \in H$ e todo $g \in G$, um elemento $h \cdot g \in G$ é definido de tal forma que

$$h \cdot (g_1 + g_2) = h \cdot g_1 + h \cdot g_2,\ \ h_2 \cdot (h_1 \cdot g) = (h_2 * h_1) \cdot g,\ \ 1 \cdot g = g,$$

onde g, g_1, $g_2 \in G$, h, h_1, $h_2 \in H$ são elementos arbitrários, $1 \in H$ denota o elemento neutro de H e $*$ indica a operação em H. Neste caso, a aplicação $\omega\colon H \times G \to G$ dada por $\omega(h,g) = h \cdot g$ será chamada de *operação* (ou *ação*) de H sobre G.

Para cada $x_0 \in X$, a ação $\omega\colon \pi_1(X,x_0) \times G_{x_0} \to G_{x_0}$ de $\pi_1(X,x_0)$ sobre G_{x_0} é definida de modo natural por $\omega([\sigma],y) = [\sigma] \cdot y = \sigma_\sharp(y)$, para todo $[\sigma] \in \pi_1(X,x_0)$ e $y \in G_{x_0}$. Particularizando para o sistema local de grupos $\{\pi_n(X,x) \mid x \in X\}$, $n > 0$, em X, obtemos o seguinte resultado

Proposição 3.13. *Para cada $x_0 \in X$, o grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$ age no n-ésimo grupo de homotopia $\pi_n(X,x_0)$, $n > 0$, como um grupo de operadores.*

Neste caso, a ação $\omega\colon \pi_1(X,x_0) \times \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(X,x_0)$ é chamada de *ação de $\pi_1(X,x_0)$ em $\pi_n(X,x_0)$*.

Observação 3.14. Para o caso especial $n = 1$, pode-se ver que, a ação $\omega\colon \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ é tal que, para quaisquer $[\sigma]$, $[\tau]$ em $\pi_1(X,x_0)$, $\omega([\sigma],[\tau]) = [\sigma]\cdot[\tau] = \sigma_\sharp([\tau]) = [\sigma * \tau * \sigma^{-1}]$.

Agora, vamos considerar duas aplicações homotópicas

$$f, g\colon X \to Y.$$

Seja $h_t\colon X \to Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ uma homotopia entre f e g, com $h_0 = f$ e $h_1 = g$. Seja $x_0 \in X$ e denotemos por $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = g(x_0)$. Definimos um caminho $\sigma\colon I \to Y$ por

$$\sigma(t) = h_t(x_0),\ \ t \in I.$$

Então, $\sigma(0) = y_0$ e $\sigma(1) = y_1$. As aplicações f e g induzem os homomorfismos

$$f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0),\ \ g_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_1),$$

para cada $n > 0$. Por outro lado, o caminho σ determina um isomorfismo

$$\sigma_n\colon \pi_n(Y, y_1) \to \pi_n(Y, y_0).$$

Logo, temos o seguinte resultado

Proposição 3.15. *Nas condições acima, $f_* = \sigma_n \circ g_*$.*

Demonstração. Sejam $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ e a aplicação $\phi\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ representante de α. Definimos uma homotopia $\psi_t\colon I^n \to Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, por $\psi_t = h_t \circ \phi$, para todo $t \in I$. Então, $\psi_0 = f \circ \phi$ representa $f_*(\alpha)$ e $\psi_1 = g \circ \phi$ representa $g_*(\alpha)$. Como $\psi(\partial I^n) = \sigma(t)$, para todo $t \in I$, segue que $\rho_t = \psi_{(1-t)}\colon I^n \to Y$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ é uma homotopia, tal que $\rho_0 = g \circ \phi$ representa $g_*(\alpha)$, $\rho_1 = f \circ \phi$ representa $f_*(\alpha)$, e $\rho_t(\partial I^n) = \psi_{(1-t)}(\partial I^n) = \sigma(1-t)$, para todo $t \in I$. Logo ρ_t é uma homotopia de $g \circ \phi$ ao longo de σ, e portanto $\sigma_n(g_*(\alpha)) = [\rho_1] = f_*(\alpha)$. Como α é arbitrário, segue que $f_* = \sigma_n \circ g_*$. □

Corolário 3.16. *Se $f, g\colon X \to Y$ são aplicações homotópicas tais que $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$, então existe um elemento $\beta \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $f_* = \beta \cdot g_*$.*

Demonstração. Da proposição anterior, segue que existe um laço baseado em y_0, $\sigma\colon I \to Y$, tal que $f_* = \sigma_n \circ g_*$. Mas $\sigma_n \circ g_*(\alpha) = \sigma_n(g_*(\alpha)) = [\sigma] \cdot g_*(\alpha)$, para todo $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$. Tome $\beta = [\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$. □

Como outra consequência da proposição anterior temos o famoso teorema em Topologia Algébrica, conhecido como o Teorema da *invariância homotópica dos grupos de homotopia.*

Teorema 3.17. *Se $f\colon X \to Y$ é uma equivalência de homotopia e se $f(x_0) = y_0$, então*

$$f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$$

é um isomorfismo, para todo $n > 0$.

Demonstração. Como f é uma equivalência de homotopia, existe uma aplicação contínua $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f$ e $f \circ g$ são homotópicas as aplicações identidades de X e Y respectivamente. Seja $x_1 = g(y_0)$. Então g induz o homomorfismo

$$g_*\colon \pi_n(Y, y_0) \to \pi_n(X, x_1),$$

para todo $n > 0$. Seja $h_t\colon X \to X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ uma homotopia entre $g \circ f$ e ι_X, com $h_0 = g \circ f$ e $h_1 = \iota_X$. Definimos o caminho $\sigma\colon I \to X$ por $\sigma(t) = h_t(x_0)$, para todo $t \in I$. Então, pela proposição anterior, temos

$$g_* \circ f_* = \sigma_n.$$

Como σ_n é um isomorfismo, para todo $n > 0$, isto implica que f_* é um monomorfismo e g_* é um epimorfismo. Como g é também uma equivalência de homotopia, segue que g_* é também um monomorfismo. Consequentemente, g_* é um isomorfismo e então $f_* = g_*^{-1} \circ \sigma_n$ é também um isomorfismo, para todo $n > 0$. □

Proposição 3.18. *Seja $n \geq 1$ inteiro. O subconjunto de $\pi_1(X, x_0)$ formado pelos elementos que agem trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração. Sabemos que se $e\colon S^1 \to X$ é o laço constante x_0 então e_n é o automorfismo identidade, e portanto e age trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$.

Sejam $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(X, x_0)$ que agem trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$ e $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ um elemento qualquer. Então

$$(\sigma * \tau)_n([f]) = \sigma_n(\tau_n([f])) = \sigma_n([f]) = [f]$$

e

$$[f] = e_n([f]) = (\sigma^{-1} * \sigma)_n([f]) = \sigma_n^{-1}(\sigma_n([f])) = \sigma_n^{-1}([f])$$

ou seja, tanto $[\sigma * \tau] = [\sigma] \cdot [\tau]$ quanto $[\sigma^{-1}] = [\sigma]^{-1}$ agem trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$. □

Definição 3.19. Definimos

$$P(X, x_0) = \{\alpha \in \pi_1(X, x_0) \mid \alpha \text{ age trivialmente em } \pi_i(X, x_0), \forall i \geq 1\}.$$

Observe que $P(X, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$, pois ele é a interseção dos subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ formados pelos elementos que agem trivialmente em $\pi_i(X, x_0)$, para cada $i \geq 1$.

Proposição 3.20 ([9, Remark II])**.** *Sejam $\alpha = [f] \in \pi_1(X, x_0)$ e $n \geq 1$. Então, α age trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$ se, e somente se, toda aplicação $g\colon S^n \to X$ admite uma extensão $F\colon S^n \times S^1 \to X$ tal que $F|_{S^1} = f$.*

Teorema 3.21. *$G(X, x_0) \subseteq P(X, x_0) \subseteq Z(\pi_1(X, x_0))$.*

Demonstração. A primeira inclusão segue do Teorema 3.6 e da proposição anterior, a segunda inclusão segue da Observação 3.14. □

Corolário 3.22. *Se T é um CW-complexo 1-dimensional que não é homotopicamente equivalente a S^1, então $G(T) = \{1\}$.*

Demonstração. Se T é contrátil, então $G(T) \subset \pi_1(T) = \{1\}$. Caso contrário, T é homotopicamente equivalente ao wedge de n círculos, com n podendo ser infinito. O caso $n = 1$ foi excluído por hipótese. Se $n \geq 3$ ou $n = \infty$, [17, Theorem 1] nos garante que $Z(\pi_1(T)) = \{1\}$, e então $G(T) = \{1\}$.

Para $n = 2$, $\pi_1(T) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, o produto livre de $\mathbb{Z}$ com $\mathbb{Z}$. Sejam a e b os geradores de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, os elementos de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ são da forma $g_1 g_2 \dots g_m$ onde $g_i = a^{\alpha_i}$ ou $g_i = b^{\beta_i}$, com α_i, $\beta_i \in \mathbb{Z}$. Se $x = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} \in Z(\pi_1(T))$, então

$$axa^{-1} = x \Rightarrow aa^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} a^{-1} = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m}$$

$$\Rightarrow ab^{\beta_1} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} a^{-1} = b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} \Rightarrow \beta_1 = 0,$$

e então $x = a^{\alpha_1 + \alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m}$. Aplicando o argumento acima várias vezes, conseguimos provar que $\beta_i = 0$, para todo i. Portanto, $x = a^r$, com $r \in \mathbb{Z}$, mas $a^r b = ba^r \Rightarrow r = 0$. Assim, x é a palavra nula, isto é, o elemento identidade de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. As outras possibilidades para x são $x = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_m}$, $x = b^{\beta_1} a^{\alpha_1} \dots a^{\alpha_m} b^{\beta_m}$ e $x = b^{\beta_1} a^{\alpha_1} \dots a^{\alpha_m}$, e para todas elas o argumento anterior, às vezes fazendo $bxb^{-1} = x$, nos dá $x = 0$. Logo, $Z(\pi_1(T))$ é trivial, e portanto $G(T) = \{1\}$. □

Corolário 3.23 ([9, Corollary I.6])**.** *Seja $\mathbb{R}P^n$ o espaço projetivo real de dimensão n. Então $G(\mathbb{R}P^{2n}) = \{1\}$, para todo $n > 0$.*

Corolário 3.24 ([9, Corollary I.7])**.** *Se M é uma superfície fechada (isto é, uma variedade compacta e sem bordo) de dimensão 2 que não é homeomorfa ao toro e nem à garrafa de Klein, então $G(M) = \{1\}$.*

Teorema 3.25 ([9, Theorem I.6])**.** *Seja $\mathbb{R}P^n$ o espaço projetivo real de dimensão n. Então $G(\mathbb{R}P^{2n+1}) = \pi_1(\mathbb{R}P^{2n+1}) \approx \mathbb{Z}_2$, para todo $n > 0$.*

Definição 3.26. Uma aplicação $f \colon A \to X$ é dita *cíclica* se existe $H \colon X \times A \to X$ tal que $H(x, a_0) = x$ e $H(x_0, a) = f(a)$, para todo $x \in X$ e $a \in A$, onde x_0 é ponto base de X e a_0 é ponto base de A.

É fácil ver que f é cíclica se, e somente se, aplicação $\nabla(\iota_X \vee f) \colon X \vee A \to X$ possui uma extensão para $X \times A$.

Proposição 3.27. *Seja $H \colon X \times A \to X$ tal que $H|_X \simeq \iota_X$ e $H|_A \simeq f$. Então f é cíclica. Em particular, se f é cíclica e $f \simeq f'$, então f' é cíclica também.*

Demonstração. Sejam $g_t\colon X \to X$ e $h_t\colon A \to X$ as homotopias tais que $g_0 = H|_X$, $g_1 = \iota_X, h_0 = H|_A$ e $h_1 = f$, então $F_t = \nabla(g_t \vee h_t)\colon X \vee A \to X$ satisfaz $F_0 = H_{X\vee A}$, e como $X \vee A$ é um subcomplexo de $X \times A$, a propriedade de extensão de homotopia nos garante que existe uma homotopia $K_t\colon X \times A \to X$ tal que $K_0 = H$ e $K_t|_{X\vee A} = F_t$. Assim, K_1 satisfaz $K_1(x, a_0) = x$ e $K_1(x_0, a) = f(a)$, para todo $x \in X$ e $a \in A$, e então f é cíclica. □

Observação 3.28. Note que, se $A = S^1$, uma aplicação $f\colon S^1 \to X$ é cíclica no sentido acima se, e somente se, existe uma homotopia cíclica $H\colon X\times S^1 \to X$ tal que $H(x, s_0) = x$ e $H(x_0, s) = f(s)$, para todo $x \in X$ e $s \in S^1$.

Proposição 3.29. *Se $f\colon A \to X$ é cíclica e $h\colon B \to A$ é uma aplicação qualquer, então $fh\colon B \to X$ é cíclica.*

Demonstração. Seja $F\colon X \times A \to X$ a aplicação que satisfaz $F(x, a_0) = x$ e $F(x_0, a) = f(a)$, para todo $x \in X$ e $a \in A$. Defina $K\colon X \times B \to X$ por $K = F(\iota_X \times h)$. Então K satisfaz

$$K(x, b_0) = F(\iota_X \times h)(x, b_0) = F(x, h(b_0)) = F(x, a_0) = x,$$

e

$$K(x_0, b) = F(\iota_X \times h)(x_0, b) = F(x_0, h(b)) = fh(b).$$

Portanto, fh é uma aplicação cíclica. □

Observação 3.30. Nem sempre vale que se $f\colon A \to X$ é cíclica e $g\colon X \to Y$ é uma aplicação qualquer então $gf\colon A \to Y$ é cíclica. Basta tomar, por exemplo, $f = \iota_{S^1}\colon S^1 \to S^1$ e $g\colon S^1 \to S^1 \vee S^1$ a inclusão dada por $g(s) = g(s, s_0)$. Então, f é cíclica, pois $G(S^1, s_0) = \pi_1(S^1, s_0)$ pelo Corolário 3.45, mas gf não o é, pois $[gf]$ é um dos geradores de $\pi_1(S^1 \vee S^1) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, porém pelo Corolário 3.22, $G(S^1 \vee S^1) = \{1\}$.

Mas, para uma classe de aplicações específicas isso é, de fato, verdade.

Proposição 3.31. *Se $g\colon X \to Y$ possui inversa à direita a menos de homotopia e $f\colon A \to X$ é cíclica, então $gf\colon A \to Y$ é cíclica.*

Demonstração. Seja $j\colon Y \to X$ inversa à direita de g a menos de homotopia, isto é, $gj \simeq \iota_Y$ e $F\colon X \times A \to X$ a aplicação que satisfaz $F(x, a_0) = x$ e $F(x_0, a) = f(a)$. Defina $K\colon Y \times A \to Y$ por $K = gF(j \times \iota_A)$. Então K satisfaz

$$K(y, a_0) = g(F(j(y), a_0)) = g(j(y)) = gj(y),$$

e também

$$K(y_0, a) = g(F(j(y_0), a)) = g(F(x_0, a)) = g(f(a)) = gf(a).$$

Como, $gj \simeq \iota_Y$, segue pelo lema anterior que gf é cíclica. □

Os próximos resultados são consequências imediatas da proposição acima.

Corolário 3.32. *Se $r\colon X \to Y$ é uma retração e $f\colon A \to X$ é cíclica, então $rf\colon A \to Y$ é cíclica.*

Corolário 3.33. *Se $g\colon X \to Y$ é uma equivalência de homotopia e $f\colon A \to X$ é cíclica, então $gf\colon A \to Y$ é cíclica.*

Corolário 3.34. *Se $g\colon X \to Y$ possui inversa à direita a menos de homotopia então o homomorfismo $g_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, g(x_0))$ leva $G(X, x_0)$ em $G(Y, g(x_0))$, isto é, $g_*(G(X, x_0)) \subset G(Y, g(x_0))$.*

Vamos agora generalizar o conceito de Grupo de Gottlieb de um espaço CW-complexo X, para $n > 1$, e apresentar algumas propriedades para tais grupos.

Sejam X um espaço CW-complexo e S^n a esfera n-dimensional. Considere a classe das aplicações contínuas

$$F\colon X \times S^n \to X$$

tais que $F(x, s_0) = x$, para todo $x \in X$, onde s_0 é um ponto base de S^n. Então a aplicação $f\colon S^n \to X$ definida por $f(s) = F(x_0, s)$, para todo $s \in S^n$ e x_0 ponto base de X, representa um elemento $\alpha = [f] \in \pi_n(X, x_0)$.

Definição 3.35. O conjunto de todos os elementos $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ obtidos da maneira acima, para alguma F, será denotado por $G_n(X, x_0)$.

Portanto, para todo $\alpha \in G_n(X, x_0)$, existe pelo menos uma aplicação contínua $F\colon X \times S^n \to X$ tal que $F(x, s_0) = x$, para todo $x \in X$ e a aplicação f definida por $f(s) = F(x_0, s)$ é tal que $[f] = \alpha$. Dizemos que a aplicação F é uma *aplicação associada* a α.

Observação 3.36. Para $n = 1$, pelo Teorema 3.6, segue que $G_1(X, x_0) = G(X, x_0)$.

Proposição 3.37. *$G_n(X, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_n(X, x_0)$.*

Demonstração. Sejam $c\colon S^n \to S^n \times S^n$ o co-produto e $v\colon S^n \to S^n$ a inversão do co-produto de S^n (essas duas aplicações existem, pois S^n é um co-H-grupo, uma vez que S^n é uma suspensão de S^{n-1}).

Sejam $\alpha = [f], \beta = [g] \in G_n(X, x_0)$, logo existem aplicações $F, G\colon X \times A \to X$ tais que

$$F(x, a_0) = x, F(x_0, a) = f(a)$$

$$G(x, a_0) = x, G(x_0, a) = g(a),$$

para todo $x \in X$ e $a \in A$. Seja $J\colon X \times (A \vee A) \to X$, definida por

$$J(x, a, a_0) = F(x, a), J(x, a_0, a) = G(x, a).$$

Note que J está bem definida, pois $F(x, a_0) = G(x, a_0) = x$. E também,

$$c(a) = (b, a_0) \Rightarrow J(x_0, c(a)) = F(x_0, b) = f(b) = \nabla(f \vee g)c(a),$$

$$c(a) = (a_0, b) \Rightarrow J(x_0, c(a)) = G(x_0, b) = g(b) = \nabla(f \vee g)c(a),$$

e então, $J(x_0, c(a)) = \nabla(f \vee g)c(a)$, para todo $a \in A$.

Defina $H \colon X \times A \to X$ por $H = J(\iota_X \times c)$, então H satisfaz

$$H(x, a_0) = J(x, a_0, a_0) = x$$

e

$$H(x_0, a) = J(x_0, c(a)) = \nabla(f \vee g)c(a),$$

o que prova que $\nabla(f \vee g)c$ é cíclica. Como por definição

$$[f] + [g] = [f + g] = [\nabla(f \vee g)c],$$

segue que $[f] + [g] \in G_n(X, x_0)$.

Agora, pela Proposição 3.1, como f é cíclica segue que fv é cíclica, e então $-[f] = [fv] \in G_n(X, x_0)$.

Portanto, $G_n(X, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_n(X, x_0)$. □

Definição 3.38. Chamamos $G_n(X, x_0)$ de *n-ésimo grupo de Gottlieb do espaço X em relação a x_0.*

O próximo resultado, assim como para $G_1(X)$, mostra que $G_n(X, x_0)$ visto como subgrupo de $\pi_n(X, x_0)$ independe do ponto base. Seja σ um caminho em X tal que $\sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$. Então, pelo Teorema 3.8, σ induz um isomorfismo $\sigma_n \colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$, para $n \geq 1$.

Proposição 3.39. *$\sigma_n \colon G_n(X, x_1) \to G_n(X, x_0)$ é um isomorfismo .*

Demonstração. Seja $\alpha \in G_n(X, x_1)$, então existe uma aplicação associada $F \colon X \times S^n \to X$ tal que $F(x, *) = x$ e $F(x_1, y) = f(y)$ onde $\alpha = [f]$. Agora, definimos $h_t \colon S^n \to X$ por

$$h_t(y) = F(\sigma(1 - t), y),$$

para todo $y \in S^n$ e $t \in I$. Claramente que $h_0 = f$ e h_1 representa $\sigma_n([f]) \in \pi_n(X, x_0)$, logo, pela Proposição 3.27, segue que $\sigma_n([f]) \in G_n(X, x_0)$. Isto prova que $\sigma_n(G_n(X, x_1)) \subseteq G_n(X, x_0)$. Por outro lado, sabemos que o caminho inverso σ^{-1} induz o isomorfismo inverso $(\sigma^{-1})_n = (\sigma_n)^{-1} \colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$ para σ_n. Do mesmo modo, mostra-se que $(\sigma_n)^{-1}(G_n(X, x_0)) \subseteq G_n(X, x_1)$ e portanto o resultado segue. □

Em virtude do resultado acima, frequentemente escreveremos $G_n(X)$ ao invés de $G_n(X, x_0)$.

Da Observação 3.30 pode-se concluir que não é verdade que uma aplicação $f \colon X \to Y$ sempre induz homomorfismo de $G_n(X)$ em $G_n(Y)$. Porém, assim como para $n = 1$, como consequência da Proposição 3.31, temos os seguintes resultados:

Proposição 3.40. *Se $g\colon X \to Y$ possui inversa à direita a menos de homotopia então o homomorfismo $g_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ leva $G_n(X, x_0)$ em $G_n(Y, g(x_0))$, isto é, $g_*(G_n(X, x_0)) \subset G_n(Y, g(x_0))$, para $n > 0$, onde $g(x_0) = y_0$..*

Corolário 3.41. *Seja Y um CW-complexo. Se $i\colon Y \to X$ tem uma inversa à esquerda a menos de homotopia, então $i_*(\alpha) \in G_n(X, x_0)$ implica que $\alpha \in G_n(Y, y_0)$ onde $i(y_0) = x_0$.*

Demonstração. Pela propriedade de extensão de homotopia para pontos de Y nós podemos encontra uma aplicação $r\colon X \to Y$ tal que $r(x_0) = y_0$ e $r \circ i \cong \iota_Y$(identidade de Y). Seja $h_t\colon Y \to Y$ a homotopia entre $r \circ i$ e ι_Y. Seja $\sigma\colon I \to Y$ o laço baseado em y_0 dado por $\sigma(t) = h_t(y_0)$. Então

$$r_* \circ i_* = \sigma_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_0),$$

onde σ_* é o isomorfismo induzido por σ segundo o Teorema 3.8. Se $i_*(\alpha) \in G_n(X)$, então, pela proposição anterior, $r_*(i_*(\alpha)) \in G_n(Y)$ e consequentemente, pela Proposição 3.39, $\alpha = (\sigma_*)^{-1}(r_*(i_*(\alpha))) \in G_n(Y)$. □

Como consequência da proposição e do corolário anteriores temos o seguinte resultado:

Corolário 3.42 ([10, Theorem 1-7])**.** *Suponha que X e Y sejam ambos espaços com tipos de homotopia de CW-complexos. Se $f\colon X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então f_* conduz $G_n(X, x_0)$ isomorficamente em $G_n(Y, f(x_0))$.*

Considerando a mesma ideia usada para mostrar que $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \approx \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0)$, prova-se:

Teorema 3.43 ([10, Theorem 2-1])**.** *$G_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \approx G_n(X, x_0) \oplus G_n(Y, y_0)$, para $n > 0$.*

Proposição 3.44. *Seja X um H-espaço, então $G_n(X) = \pi_n(X)$, para todo $n > 0$.*

Demonstração. Seja e o elemento identidade de X e denote por $x \cdot y$ a multiplicação de x por y. Dada uma aplicação qualquer $f\colon S^n \to X$ tal que $f(*) = e$, podemos definir a aplicação $F\colon X \times S^n \to X$ da seguinte forma

$$F(x, s) = x \cdot f(s).$$

Como $F(x, *) = x \cdot e = x$ e $F(e, s) = f(s)$, segue que $[f] \in G_n(X)$. Como f é qualquer, o resultado segue. □

Corolário 3.45. *$G_1(S^1) = \pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ e $G_n(S^1) = \pi_n(S^1) = 0$, para $n > 1$.*

Em geral, $G_n(X) \neq \pi_n(X)$. Vamos agora definir outro subgrupo de $\pi_n(X, x_0)$, a saber, $P_n(X, x_0)$, que é uma generalização do $P(X, x_0) \subseteq \pi_1(X, x_0)$. Mostraremos também, assim como para $n = 1$, que $G_n(X, x_0) \subseteq P_n(X, x_0)$.

Definição 3.46. $P_n(X, x_0) = \{\alpha \in \pi_n(X, x_0) \mid [\alpha, \beta] = 0,\ \forall\, \beta \in \pi_k(X, x_0),\ k > 0\}$, ou seja, $P_n(X, x_0)$ é formado pelos elementos de $\pi_n(X, x_0)$ cujo o produto de Whitehead com todos os elementos de todos os grupos de homotopia é nulo.

Observação 3.47. Pode-se mostrar facilmente que $P(X, x_0)$ (Definição 3.19) coincide exatamente com $P_1(X, x_0)$.

Assim como para $P(X, x_0)$ podemos caracterizar $P_n(X, x_0)$ da seguinte forma:

Proposição 3.48. *Seja $\alpha = [f] \in \pi_n(X, x_0)$. Então, $\alpha \in P_n(X, x_0)$ se, e somente se, para todo $k \geq 1$, toda aplicação $g\colon S^k \to X$ admite uma extensão $F\colon S^k \times S^n \to X$ tal que $F|_{S^n} = f$.*

Corolário 3.49. *$G_n(X, x_0) \subseteq P_n(X, x_0)$, $n > 0$.*

Chamamos a atenção agora para o próximo resultado, que nos fornece uma caracterização de $G_n(X)$ quando X é uma suspensão. Esse resultado é obtido imediatamente da definição de $G_n(X)$ e do Teorema 2.61.

Proposição 3.50. *$G_n(\Sigma X) = \{\alpha \in \pi_n(\Sigma X) \mid [\alpha, \iota_{\Sigma X}] = 0\}$, onde $\iota_{\Sigma X}$ é a classe da aplicação identidade de ΣX.*

3.2 Espaço de Moore

Lema 3.51 ([2, Lemma 2.5.1]). *Sejam $n \geq 1$ e X um espaço CW-complexo com $(n-1)$-esqueleto $X^{(n-1)} = \{*\}$ e $dim(X) \leq n+1$, $X = X^{(n)} \cup \bigcup_{\beta \in B} e^{n+1}_\beta$, para $X^{(n)} = \bigvee_{\alpha \in A} S^n_\alpha$, onde S^n_α são esferas n dimensionais e e^{n+1}_β são $(n+1)-$células abertas. Seja Y um espaço e seja $\phi\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ um homomorfismo. Então existe uma aplicação $f\colon X \to Y$ tal que $f_* = \phi\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$.*

Demonstração. Consideremos $k\colon X^{(n)} \to X$ e $i_\alpha\colon S^n_\alpha \to X$ as aplicações inclusões. Então, podemos considerar a sequência

$$\pi_n(X^{(n)}) \xrightarrow{k_*} \pi_n(X) \xrightarrow{\phi} \pi_n(Y)$$

e definir $f_\alpha\colon S^n_\alpha \to Y$ de modo que $\phi k_*([i_\alpha]) = [f_\alpha]$. Logo, $f^n_*([i_\alpha]) = [f_\alpha] = \phi k_*([i_\alpha])$. Agora, o conjunto $\{[i_\alpha] | \alpha \in A\}$ gera $\pi_n(X^{(n)})$ e então $f^n_* = \phi k_*$.

Seja $h_\beta\colon S^n_\beta \to X^{(n)}$ a aplicação colagem da célula e^{n+1}_β. Podemos assumir que h_β é uma aplicação baseada. Então, $kh_\beta \simeq *$, pois kh_β se fatora pelo espaço contrátil $E^{n+1}_\beta = E^{n+1}$. Consequentemente, $f^n_*([h_\beta]) = \phi k_*([h_\beta]) = 0$ e portanto $f^n h_\beta \simeq *$, para todo $\beta \in B$. Como $f^n h_\beta \simeq *$, para todo $\beta \in B$, segue que f^n se estende para uma aplicação $f\colon X \to Y$. Agora, $\phi k_* = f^n_* = f_* k_*$ e $k_*\colon \pi_n(X^{(n)}) \to \pi_n(X)$ é um isomorfismo por [2, Proposition 1.5.24], Portanto, $f_* = \phi$. $\square$

Lema 3.52 ([2, Lemma 2.5.2]). *Para todo grupo abeliano G e inteiro $n \geq 1$, existe um CW-complexo X com as seguintes propriedades:*

i. O $(n-1)$-esqueleto $X^{(n-1)} = \{*\}$

ii. $dim(X) \leq n+1$.

iii. Para todo $i > 0$

$$H_i(X) = \begin{cases} G, & se\ i = n \\ \{0\}, & se\ i \neq n. \end{cases}$$

Demonstração. Seja F o grupo abeliano livre gerado por $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, onde $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto de geradores de G. Tomemos $\psi \colon F \to G$ o homomorfismo que leva a base de F nos geradores de G e seja K o Kernel de ψ. Logo, $G = F/K$. K é um subgrupo de uma grupo abeliano livre, consequentemente ele também é abeliano livre. Escolhemos uma base $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$ para K, e escrevemos $y_\beta = \Sigma_\alpha d_{\beta\alpha} x_\alpha$. Seja $X^{(n)} = \bigvee_\alpha S^n_\alpha$, então $H_n(X^{(n)}) \approx F$, já que $X^{(n-1)} = \{*\}$. Agora, vamos construir X a partir de $X^{(n)}$ colando células e^{n+1}_β via aplicações $f_\beta \colon S^n \to X^{(n)}$ tal que a composição de f_β com a projeção no somando S^n_α tenha grau $d_\alpha\beta$. Então a aplicação bordo d_{n+1} será a inclusão $K \hookrightarrow F$. Logo, X terá os grupos de homologia exigidos em *iii*. □

Definição 3.53. Seja G um grupo abeliano e $n \geq 2$ inteiro. Um espaço CW-complexo conexo por caminhos X é dito ser um *espaço de Moore* do tipo (G, n) se X é simplesmente conexo e para todo $i > 0$

$$H_i(X) = \begin{cases} G, & \text{se } i = n \\ \{0\}, & \text{se } i \neq n. \end{cases}$$

O lema anterior garante a existência de um espaço de Moore X do tipo (G, n). Iremos denotar este espaço (ou qualquer outro espaço homeomorfo a ele) por $M(G, n)$.

Exemplo 3.54. Um caso especial é quando $G = \mathbb{Z}$ ou $G = \mathbb{Z}_m$. Neste caso, $M(\mathbb{Z}, n) = S^n$ e $M(\mathbb{Z}_m, n)$ pode ser considerado como sendo o espaço $S^n \cup_m e^{n+1}$ que é S^n unida com uma célula e^{n+1} colada por uma aplicação $S^n \to S^n$ de grau m. Além do mais, se F é um grupo abeliano livre com uma base de cardinalidade igual a de um conjunto A, então $M(F, n) = \bigvee_{\alpha \in A} S^n_\alpha$. Mais geralmente, se G é um grupo abeliano finitamente gerado, o $M(G, n)$ pode ser considerado como sendo wedges dos tipos $M(\mathbb{Z}_m, n)$ para os somandos cíclicos finitos de G, junto com cópias de $S^n = M(\mathbb{Z}, n)$ para os somandos cíclicos infinitos de G.

Observação 3.55. Note que várias escolhas foram feitas na construção de $M(G, n)$, tais como as escolhas de um conjunto de geradores para G e uma base para F e K. Usando o resultado acima pode-se mostrar facilmente que a menos de tipo de homotopia os espaços $M(G, n)$ são iguais, isto é, independente das escolhas feitas na construção os espaços obtidos possuem o mesmo tipo de homotopia. De fato, vale mais geral, quaisquer dois espaços de Moore do tipo (G, n) possuem o mesmo tipo de homotopia, como mostra o resultado abaixo.

Proposição 3.56 ([2, Proposition 6.4.16]). *Se X e Y são espaços de Moore do tipo (G, n). Então, $X \simeq Y$.*

Observação 3.57. Para $n = 1$, definimos o espaço de Moore $M(\mathbb{Z}, 1) = S^1$. Não consideramos $M(G, 1)$ para outros grupos G.

Os próximos dois teoremas são resultados clássicos da topologia algébrica e serão de grande utilidade no decorrer deste trabalho, a saber, o Primeiro Teorema de Whitehead e o Teorema de Hurewicz.

Teorema 3.58 ([2, Theorem 2.4.7]). *Se $f\colon X \to Y$ é uma aplicação de CW-complexos, então $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ é um isomorfismo para todo n se, e somente se f é uma equivalência de homotopia.*

Teorema 3.59 ([2, Theorem 6.4.8]). *Se X é um espaço 1-conexo e $H_q(X) = 0$ para todo $q < n$, onde $n \geqslant 2$, então $\pi_q(X) = 0$ para todo $q < n$ e o homomorfismo de Hurewicz $h_n\colon \pi_n(X) \to H_n(X)$ é um isomorfismo.*

Lema 3.60 ([2, Lemma 2.5.4]). *1. O homomorfismo de Hurewicz $h_n\colon \pi_n(M(G, n)) \to H_n(M(G, n))$ é um isomorfismo, e então $\pi_n(M(G, n)) = G$.*

2. Se $\phi\colon G \to H$ é um homomorfismo entre grupos abelianos, então existe uma aplicação $f\colon M(G, n) \to M(H, n)$ tal que $f_* = \phi\colon H_n(M(G, n)) \to H_n(M(H, n))$.

Observação 3.61. Para $n \geq 3$, $M(G, n) \approx \Sigma M(G, n-1)$, ver [2, Exercise 3.6.1]. Além do mais, se X é o espaço do Lema 3.52 com $n = 1$, então $M(G, 2) = \Sigma X$. Portanto, todos espaços de Moore $M(G, n)$ são suspensões, ainda mais, $M(G, n)$ é uma suspensão dupla se $n \geq 3$ ou se $n = 2$ e G é abeliano livre. Consequentemente, $[M(G, n), X]$ tem estrutura de grupo, para todo espaço X, e é abeliano se $n \geq 3$ ou se $n = 2$ e G é abeliano livre.

Essa estrutura de suspensão dos espaços de Moore $M(G, n)$ nos permite definir grupos de homotopia com coeficientes.

Definição 3.62. Dados G um grupo abelino e $n \geq 1$ inteiro, com $G = \mathbb{Z}$ se $n = 1$, definimos para todo espaço X o *n-ésimo grupo de homotopia de X com coeficientes em G* por

$$\pi_n(X; G) = [M(G, n), X].$$

Observação 3.63. Observe que $\pi_n(X; \mathbb{Z}) = \pi_n(X)$, o n-ésimo grupo de homotopia de X. Além do mais, uma aplicação $h\colon X \to Y$ induz um homomorfismo $h_*\colon \pi_n(X; G) \to \pi_n(Y; G)$ definida como o homomorfismo induzido $h_*\colon [M(G, n), X] \to [M(G, n), Y]$.

Teorema 3.64 ([2, Theorem 5.6.6]). *Seja A um CW-complexo de dimensão finita e seja X um espaço $(n-1)$-conexo, $n \geq 2$. Então a função suspensão $\Sigma\colon [A, X] \to [\Sigma A, \Sigma X]$ é bijetiva se $\dim A \leq 2n - 2$ e sobrejetiva se $\dim A = 2n - 1$.*

O teorema acima é conhecido como o Teorema Generalizado de Freudenthal e como consequência temos o clássico Teorema da Suspensão de Freudenthal.

Teorema 3.65 ([2, Theorem 5.6.7])**.** *Seja X um espaço $(n-1)$-conexo, $n \geq 2$, então o homomorfismo suspensão $\Sigma\colon \pi_r(X) \to \pi_{r+1}(\Sigma X)$ é um isomorfismo para $r < 2n-1$ e um epimorfismo para $r = 2n-1$.*

Sejam X um espaço, G um grupo abeliano e $n \geq 2$ um inteiro quaisquer. Se $[f] \in \pi_n(X;G)$, então $f_*\colon G = \pi_n(M(G,n)) \to \pi_n(X)$. Daí, podemos definir uma função $\eta = \eta_G\colon \pi_n(X;G) \to \mathrm{Hom}(G, \pi_n(X))$ por, $\eta([f]) = f_*$. Pode-se mostrar que η é um homomorfismo, para detalhes ver [12, p.29].

Lema 3.66. *O homomorfismo $\eta_F\colon \pi_n(X;F) \to \mathrm{Hom}(F, \pi_n(X))$ é um isomorfismo se F é um grupo abeliano livre.*

Demonstração. Seja A o conjunto onde um conjunto de geradores de F está indexado. Temos $M(F,n) = \bigvee_{\alpha \in A} S^n_\alpha$, onde S^n_α é a esfera n-dimensional. Seja $i_\alpha\colon S^n_\alpha \to M(F,n)$ a inclusão de S^n_α na α-ésima copia do wedge. Então $\{[i_\alpha] | \alpha \in A\} \subset \pi_n(M(F,n)) = F$ é uma base para F. Se $f, g\colon M(F,n) \to X$ são aplicações tais que $f_* = g_*\colon \pi_n(M(F,n)) \to \pi_n(F)$, então $f_*([i_\alpha]) = g_*([i_\alpha])$, para todo $[i_\alpha]$. Logo, $fi_\alpha \simeq gi_\alpha$, para todo i_α, e portanto $f \simeq g$. Portanto, η_F é injetora.

Se $\phi\colon F \to \pi_n(X)$ é um homomorfismo, então $\phi([i_\alpha]) = [f_\alpha] \in \pi_n(X)$, para algum $f_\alpha\colon S^n_\alpha \to X$. Definimos $f\colon M(F,n) \to X$ de modo que $fi_\alpha = f_\alpha$. Logo, $f_*([i_\alpha]) = [fi_\alpha] = [f_\alpha] = \phi([i_\alpha])$, para todo $[i_\alpha] \in F$. Como $\{[i_\alpha] | \alpha \in A\} \subset \pi_n(M(F,n)) = F$ é uma base para F, seque que $f_* = \phi\colon \pi_n(M(F,n)) \to \pi_n(X)$. Portanto, η_F é sobrejetora. □

Corolário 3.67. *O homomorfismo $\eta_F\colon \pi_n(M(F',n),F) \to \mathrm{Hom}(F,F')$ é um isomorfismo se F e F' são grupos abelianos livres.*

Teorema 3.68 (Universal coefficient theorem for homotopy [2, Theorem 5.2.9])**.** *Para quaisquer espaço X, grupo abeliano G e inteiro $n \geq 2$, existe um homomorfismo $\zeta\colon \mathrm{Ext}(G, \pi_{n+1}(X)) \to \pi_n(X;G)$ tal que a seguinte sequência curta de grupos é exata*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(G, \pi_{n+1}(X)) \xrightarrow{\zeta} \pi_n(X;G) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Hom}(G, \pi_n(X)) \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Consideremos uma representação de G representada pela sequência abaixo

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 0$$

onde R e F são grupos abelianos livres, ι a aplicação inclusão e ρ a aplicação quociente. Pelo Lema 3.66, ι determina uma aplicação $i\colon M(R,n) \to M(F,n)$ tal que $i_* = \iota\colon \pi_n(M(R,n)) \to \pi_n(M(F,n))$. Agora, pelo modo que i é construída e pelo Lema 3.52, segue que i é exatamente a aplicação obtida das aplicações colagens na construção de $M(G,n)$, e portanto $M(G,n)$ é o mapping cone da aplicação i. Seja

$j\colon M(F,n) \to M(G,n)$ a inclusão de $M(F,n)$ no mapping cone de i. Agora, pelo [2, Corollary 4.1.8], temos a seguinte sequência exata de grupos

$$\pi_{n+1}(X;F) \xrightarrow{i^*} \pi_{n+1}(X;R) \xrightarrow{p^*} \pi_n(X;G) \xrightarrow{j^*} \pi_n(X;F) \xrightarrow{i^*} \pi_n(X;R)$$

que dá origem a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \frac{\pi_{n+1}(X;R)}{i^*(\pi_{n+1}(X;F))} \xrightarrow{p'^*} \pi_n(X;G) \xrightarrow{j'^*} \text{Ker } i^* \longrightarrow 0,$$

onde j'^* e p'^* são aplicações induzidas por j^* e p^* respectivamente.

Usando o Lema 3.66, vemos que existe um isomorfismo $\theta\colon \text{Ker } i^* \to \text{Hom}(G,\pi_n(X))$ tal que $\theta j'^* = \eta$. Agora, da construção do Ext da resolução de G segue que Ker $i^* \approx \text{Hom}(G,\pi_n(X))$. E também, usando o Lema 3.66 e a definição de Ext da resolução de G, segue que

$$\frac{\pi_{n+1}(X;R)}{i^*(\pi_{n+1}(X;F))} \approx \text{Ext}(G,\pi_{n+1}(X)). \qquad \square$$

3.3 Grupo de Gottlieb de wedge de esferas

É bem conhecido, Teorema 3.43, que existe um isomorfismo

$$G_n(X \times Y) \approx G_n(X) \oplus G_n(Y).$$

No entanto, parece não haver tal simplicidade para uma soma que expressaria $G_n(X \vee Y)$ em termos de $G_n(X)$ e $G_n(Y)$. Nesta seção estudamos, embasados em [3], os $G_n(\Sigma X_1 \vee \Sigma X_2 \vee \cdots \vee \Sigma X_k)$, onde X_i é a suspensão do espaço X_i, com particular atenção para o caso $k = 2$ e X_i uma esfera. Damos condições necessárias e suficientes para um elemento de $\pi_n(\Sigma X_1 \vee \Sigma X_2 \vee \cdots \vee \Sigma X_k)$ estar em $G_n(\Sigma X_1 \vee \Sigma X_2 \vee \cdots \vee \Sigma X_k)$.

Seja X um espaço baseado conexo por caminhos com o n-ésimo grupo de homotopia $\pi_n(X)$. Lembremos que o n-ésimo grupo de Gottlieb de X é definido da seguinte forma: $\alpha = [f] \in G_n(X)$ se, e somente se, existe uma aplicação $f'\colon S^n \times X \to X$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} S^n \vee X \arrow[r, "(f,\iota_X)"] \arrow[d, "j"'] & X \\ S^n \times X \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

é homotopicamente equivalente, onde j é a inclusão, ι_X é a aplicação identidade de X e (f,ι_X) é a aplicação determinada por f e ι_X.

Lembremos também do produto de Whitehead generalizado. Dados

$$\alpha \in [\Sigma X, Z] \text{ e } \beta \in [\Sigma Y, Z],$$

pode-se definir uma aplicação $\widetilde{k}(\alpha,\beta)\colon \Sigma(X \wedge Y) \to Z$, no qual detalhes de sua construção pode ser visto na Seção 2.6, cuja classe de homotopia é o produto de Whitehead generalizado

$$[\alpha,\beta] = [\widetilde{k}(\alpha,\beta)] \in [\Sigma(X \wedge Y), Z].$$

Em particular, se $j_1\colon \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma Y$ e $j_2\colon \Sigma Y \to \Sigma X \vee \Sigma Y$ são as aplicações inclusões então $w = \widetilde{k}(j_1, j_2)\colon \Sigma(X \wedge Y) \to \Sigma X \vee \Sigma Y$ é a aplicação de Whitehead.

Proposição 3.69 ([1], Corollary 4.3)**.** *Se $w\colon \Sigma(X \wedge Y) \to \Sigma X \vee \Sigma Y$ é a aplicação de Whitehead e C_w é o mapping cone de w, então existe uma equivalência de homotopia $\mu\colon C_w \to \Sigma X \times \Sigma Y$*

Proposição 3.70 ([3], Proposition 2.2)**.** *Se $\alpha \in \pi_n(\Sigma X \vee \Sigma Y)$, então $\alpha \in G_n(\Sigma X \vee \Sigma Y)$ se, e somente se $[\alpha, id] = 0$.*

Proposição 3.71 ([3], Proposition 2.3)**.** *Seja $\alpha \in \pi_n(\Sigma X \vee \Sigma Y)$. Então $\alpha \in G_n(\Sigma X \vee \Sigma Y)$ se, e somente se $[\alpha, j_1] = 0 = [\alpha, j_2]$.*

Uma extensão direta do resultado anterior para k suspensões produz a seguinte generalização da Proposição 3.71.

Proposição 3.72 ([3], Proposition 2.4)**.** *Seja T uma soma de wedge $\Sigma X_1 \vee \cdots \vee \Sigma X_k$ com $j_s \in [\Sigma X_s, T]$ a classe da aplicação inclusão, $s = 1, 2, \ldots, k$. Então $\alpha \in \pi_n(T)$ está em $G_n(T)$ se, e somente se, $[\alpha, j_s] = 0$, para $s = 1, 2, \ldots, k$.*

Agora, vamos particularizar o estudo para o caso $k = 2$ e X_i uma esfera. Seja $W = S^m \vee S^l$ com $2 \leq m \leq l$. Aqui não distinguiremos aplicação e classe de homotopia. Primeiramente vamos enunciar o resultado de Hilton [11] em relação aos grupos de homotopia de W.

Seja $j_i \in \pi_{n_i}(W)$ a classe das aplicações de inclusões, $i = 1, 2$ $(n_1 = m, n_2 = l)$. Comentemos brevemente sobre os produtos básicos de Whitehead nos grupos de homotopia de W (Ver mais em [11] e [21, Chapter 6]). Os produtos básicos de Whitehead de *peso* r, $r \geq 1$, são definidos da seguinte maneira:

1. Peso 1: j_1, j_2;
2. Peso 2: $[j_1, j_2]$;
3. Peso 3: $[j_1, [j_1, j_2]]$, $[j_2, [j_1, j_2]]$.
4. Peso 4: $[j_1, [j_1, [j_1, j_2]]]$, $[j_2, [j_1, [j_1, j_2]]]$, $[j_2, j_2, [j_1, j_2]]]$

e assim por diante. Estes produtos são ordenados como foram exibidos acima e escrevemos eles em ordem como uma sequência infinita $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$. Então, $\omega_p \in \pi_{n_p}(W)$ para algum inteiro n_p, onde $n_p = |\omega_p|$ é chamado de *grau* de ω_p. O próximo resultado é conhecido como Teorema de Hilton.

Teorema 3.73 ([11, Theorem A])**.** *Para qualquer inteiro positivo k, existe um isomorfismo*

$$\theta\colon \bigoplus_{p=1}^{\infty} \pi_k(S^{n_p}) \to \pi_k(W)$$

que é definido por

$$\theta|_{\pi_k(S^{n_p})} = \omega_{p*}\colon \pi_k(S^{n_p}) \to \pi_k(W).$$

Note que a soma direta é finita para cada k, pois $n_p \to \infty$ e $\pi_k(S^{n_p})$ é trivial para $n_p > k$. Portanto, para cada $x \in \pi_k(W)$,

$$x = \sum_{p=1}^{t_k} \omega_p \circ \alpha_p,$$

para únicos $\alpha_p \in \pi_k(S^{n_p})$.

Agora, seja $m = l = n$, então $W = S^n \vee S^n$, e seja $\varphi\colon S^n \to S^n \vee S^n$ a co-produto usual de S^n. Então, como em [11] e [21], o *invariante de Hopf-Hilton* $H_p\colon \pi_k(S^n) \to \pi_k(S^{n_{p+3}})$ é definido como

$$H_p = q_{p+3*} \circ \theta^{-1}\varphi_*,$$

onde $p \geq 0$ e q_i é a projeção no i-ésimo somando.

A co-multiplicação $\varphi = j_1 + j_2$ e portanto podemos expressar a seguinte formula:

$$\begin{aligned}(j_1 + j_2) \circ (\alpha) &= \omega_1 \circ \alpha' + \omega_2 \circ \alpha'' + \sum_{p=3}^{\infty} \omega_p \circ H_{p-3}(\alpha)\\ &= j_1 \circ \alpha' + j_2 \circ \alpha'' + \sum_{p=3}^{\infty} \omega_p \circ H_{p-3}(\alpha),\end{aligned}$$

para $\alpha \in \pi_k(S^n)$.

A projeção $q_1\colon S^n \vee S^n \to S^n$ tem a propriedade que $q_{1*}(j_1) = \iota_n$, a aplicação identidade de $\pi_n(S^n)$, enquanto que $q_{1*}(j_2) = 0$. Logo, pela bi-aditividade do produto de Whitehead, $q_{1*}(\omega_p) = 0$, para todo $p \geq 3$. Daí, aplicando q_1 em ambos os lados da igualdade acima obtemos que $\alpha' = \alpha$. De modo similar, se obtém que $\alpha'' = \alpha$. Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.74. *Para $\alpha \in \pi_k(S^n)$, vale a relação*

$$(j_i + j_2) \circ (\alpha) = j_1 \circ \alpha + j_2 \circ \alpha + \sum_{p=0}^{\infty} \omega_{p+3} \circ H_p(\alpha).$$

De fato vale um resultado mais geral:

Teorema 3.75 ([21],(8.5) Theorem)**.** *Se X é um espaço qualquer e $\alpha \in \pi_k(S^n)$, β_1, $\beta_2 \in \pi_n(X)$, então*

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ (\alpha) = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha + \sum_{p=0}^{\infty} \omega_{p+3}(\beta_1, \beta_2) \circ H_p(\alpha),$$

onde $\omega_{p+3}(\beta_1, \beta_2)$ é o produto básico de Whitehead trocando j_1 e j_2 por β_1 e β_2 respectivamente.

Lema 3.76. *Se $H_p\colon \pi_k(S^n) \to \pi_k(S^{n_{p+3}})$ é o invariante de Hopf-Hilton e $\alpha \in \pi_k(S^n)$ é uma suspensão, então $H_p(\alpha) = 0$, para $p \geq 0$.*

Demonstração. A co-multiplicação $\varphi = j_1 + j_2$. Então, como α é uma suspensão, é fácil de se verificar que $\varphi_*(\alpha) = (j_1 + j_2)(\alpha) = j_1 \circ \alpha + j_2 \circ \alpha$. Mas $\theta(\alpha, \alpha, 0, 0, \ldots) = j_1 \circ \alpha + j_2 \circ \alpha$. Portanto, $\theta^{-1} \circ \varphi_*(\alpha) = (\alpha, \alpha, 0, 0 \ldots)$, e então $H_p(\alpha) = q_{p+3} \circ \theta^{-1} \circ \varphi_*(\alpha) = 0$. □

Dos teorema e lema anteriores temos o seguinte resultado:

Proposição 3.77. *Se X é um espaço qualquer e $\alpha \in \pi_k(S^n)$ uma suspensão, β_1, $\beta_2 \in \pi_n(X)$, então*
$$(\beta_1 + \beta_2) \circ (\alpha) = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha.$$

Agora precisaremos de um resultado de Barcus e Barratt, para isso, vamos introduzir algumas notações como em [4], para melhor entendimento.

Para elementos λ, δ no grupo de homotopia de um espaço X, definimos indutivamente $\sigma_0(\lambda, \delta) = [\lambda, \delta], \ldots, \sigma_{p+1}(\lambda, \delta) = [\lambda, \sigma_p(\lambda, \delta)]$. Quando $X = S^n \vee S^n$ e $\lambda = j_1$ e $\delta = j_2$ respectivamente, temos que $\sigma_p(j_1, j_2)$ são produtos básicos, mas não todos eles. Seja B_p o invariante de Hopf-Hilton correspondente ao $\sigma_p(j_1, j_2)$, então $B_0 = H_0$, $B_1 = H_1$, $B_2 = H_3$, e assim por diante. Portanto, $B_p \colon \pi_m(S^n) \to \pi_m(S^{(p+2)n-p-1})$, para $p \geq 0$. Para obter a fórmula compacta abaixo, definimos $B_{-1} = id \colon \pi_m(S^n) \to \pi_m(S^n)$.

Lema 3.78 ([4], Corollary 7.4)**.** *Se $\lambda \in \pi_q(S^m)$, $\alpha \in \pi_m(X)$, $\beta \in \pi_n(X)$ e $m, n \geq 2$, então*
$$[\alpha \circ \lambda, \beta] = \sum_{p=-1}^{\infty} (-1)^{(p+1)(n+1)} \sigma_{p+1}(\alpha, \beta) \circ \Sigma^{n-1} B_p(\lambda).$$

O resultado acima é de suma importância para os próximos resultados de [3] e a generalização desse lema, Proposição 4.21, será de grande importância para os resultados desta tese.

Usando a 3.71 e lema anterior pode-se mostrar facilmente o próximo resultado.

Proposição 3.79 ([3], Proposition 3.3)**.** *Sejam $j_1 \in \pi_m(S^m \vee S^l)$ e $j_2 \in \pi_l(S^m \vee S^l)$ as classes de homotopia das aplicações inclusões. Se $\lambda \in \pi_N(S^n)$ é um elemento qualquer, então $j_1 \circ \lambda \in G_N(S^m \vee S^l)$ se, e somente se, $\lambda \in G_N(S^m)$ e $\Sigma^{l-1} B_p(\lambda) = 0$, para $p \geq -1$. Similarmente, se $\lambda \in \pi_N(S^l)$, então $j_2 \circ \lambda \in G_N(S^m \vee S^l)$ se, e somente se, $\lambda \in G_N(S^l)$ e $\Sigma^{m-1} B_p(\lambda) = 0$.*

Sejam $\alpha_1 \in \pi_N(S^m)$ e $\alpha_2 \in \pi_N(S^l)$, $m \leq l$ e $m, N \geq 2$. A proposição anterior nos fornece uma condição necessária e suficiente para um elemento da forma $j_1 \circ \alpha_1$ ou $j_2 \circ \alpha_2$ de $\pi_N(S^m \vee S^l)$ estar em $G_N(S^m \vee S^l)$. Contudo, um elemento qualquer $\theta \in \pi_N(S^m \vee S^l)$ tem forma
$$\theta = j_1 \circ \alpha_1 + j_2 \circ \alpha_2 + \sum_{p \geq 3} \omega_p \circ \alpha_p,$$
onde $\alpha_p \in \pi_N(S^{|\omega_p|})$ e ω_p são produtos básicos (com $j_1 = \omega_1$ e $j_2 = \omega_2$). Então $\theta \in G_N(S^m \vee S^l)$ se, e somente se, $[\theta, j_1] = 0 = [\theta, j_2]$, como os ω_p são produtos básicos, podemos expressar essa condição por, $[\omega_p \circ \alpha_p, j_1] = 0 = [\omega_p \circ \alpha_p, j_2]$, para todo p. Nós expressamos cada um desses produtos de Whitehead (exceto $p = 1$ no primeiro e $p = 2$ no segundo) como uma soma pelo Lema 3.78. Em geral, isso produziria um número muito grande de condições para θ estar em $G_N(S^m \vee S^l)$. Mas, podemos reduzir o número assumindo que N é menor que algum expressão linear em m tal como $N < am - a + 1$

para algum inteiro $a \geq 2$ (e, consequentemente, $N < a_1m + a_2l - a + 1$, para $a_1 + a_2 = a$). Observe que $a_1m + a_2l - a + 1$ é exatamente a dimensão das esfera de chegada dos α_p conforme vai construindo os produtos básicos ω_p, isto é, $a_1m + a_2l - a + 1$ é exatamente os $|\omega_p|$. Ilustramos isso a seguir no caso de $a = 4$.

Se $\theta \in \pi_N(S^m \vee S^l)$ com $m \leq l$ e $N < 4m - 3$, então

$$\theta = \sum_{p=1}^{5} \omega_p \circ \alpha_p,$$

com $\alpha_1 \in \pi_N(S^m)$, $\alpha_2 \in \pi_N(S^l)$, $\alpha_3 \in \pi_N(S^{m+l-1})$, $\alpha_4 \in \pi_N(S^{2m+l-2})$ e $\alpha_5 \in \pi_N(S^{m+2l-2})$. Note que, $\alpha_p \in \pi_N(S^{|\omega_p|}) = 0$, para $p \geq 6$, pois $N < 4m - 3 \leq |\omega_p|$.

O próximo teorema é o principal resultado de [3], iremos aqui reproduzir sua demonstração, pois a técnica usada é fundamental para o entendimento de suas generalizações, que a priori, são fundamentais para o nosso trabalho, como por exemplo, a Proposição 3.84.

Teorema 3.80 ([3, Theorem 3.4])**.** *Com as condições e notações anteriores, $\theta \in G_N(S^m \vee S^l)$ se, e somente se, $\alpha_1 \in G_N(S^m)$, $\alpha_2 \in G_N(S^l)$, $\Sigma^{l-1}\alpha_1 = 0$, $\Sigma^{m-1}\alpha_2 = 0$, $B_p(\alpha_i) = 0$, para $p = 0, 1$ e $i = 1, 2$, e $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.*

Demonstração. $\theta \in G_N(S^m \vee S^l)$ se, e somente se, $[\theta, j_1] = 0 = [\theta, j_2]$. Agora,

$$[\theta, j_2] = [j_1 \circ \alpha_1, j_2] + [j_2 \circ \alpha_2, j_2] + [\omega_3 \circ \alpha_3, j_2] + [\omega_4 \circ \alpha_4, j_2] + [\omega_5 \circ \alpha_5, j_2]$$

e examinando esses cincos termos separadamente usando o Lema 3.78, temos:

$$[j_1 \circ \alpha_1, j_2] = \omega_3 \circ \Sigma^{l-1}\alpha_1 + \sum_{p=0,1} \pm\sigma_{p+1}(j_1, j_2) \circ \Sigma^{l-1}B_p(\alpha_1), \tag{3.1}$$

pois, $B_p(\alpha_1) \in \pi_N(S^{(p+2)m-p-1}) = 0$, para $p \geq 2$.

$$[j_2 \circ \alpha_2, j_2] = j_2 \circ [\alpha_2, \iota_l]. \tag{3.2}$$

$$[\omega_3 \circ \alpha_3, j_2] = [\omega_3, j_2] \circ \Sigma^{l-1}\alpha_3, \tag{3.3}$$

pois, $B_p(\alpha_3) \in \pi_N(S^{(p+2)(m+l-1)-p-1}) = 0$, para $p \geq 0$.

$$[\omega_4 \circ \alpha_4, j_2] = [\omega_4, j_2] \circ \Sigma^{l-1}\alpha_4, \tag{3.4}$$

pois, $B_p(\alpha_4) \in \pi_N(S^{(p+2)(2m+l-2)-p-1}) = 0$, para $p \geq 0$.

$$[\omega_5 \circ \alpha_5, j_2] = [\omega_5, j_2] \circ \Sigma^{l-1}\alpha_5, \tag{3.5}$$

pois, $B_p(\alpha_5) \in \pi_N(S^{(p+2)(m+2l-2)-p-1}) = 0$, para $p \geq 0$. Portanto, das equações acima,

$$\begin{aligned}[\theta, j_2] &= \omega_3 \circ \Sigma^{l-1}\alpha_1 \pm \omega_4 \circ \Sigma^{l-1}B_0(\alpha_1) \pm \omega_6 \circ \Sigma^{l-1}B_1(\alpha_1) \\ &\quad + j_2 \circ [\alpha_2, \iota_l] + [\omega_3, j_2] \circ \Sigma^{l-1}\alpha_3 \\ &\quad + [\omega_4, j_2] \circ \Sigma^{l-1}\alpha_4 + [\omega_5, j_2] \circ \Sigma^{l-1}\alpha_5.\end{aligned}$$

Cada um dos produtos Whitehead que aparecem no lado direito desta expressão é ou um produto básico ou, usando anticomutatividade, o negativo de um produto básico. Por isso, temos a seguinte equivalência:

$$[\theta, j_2] = 0 \quad \Leftrightarrow \alpha_2 \in G_N(S^l);\ \Sigma^{l-1}\alpha_p = 0,\ p = 1, 3, 4, 5;$$
$$\Sigma^{l-1}B_p(\alpha_1) = 0,\ p = 0, 1,$$

uma vez que, $j_2 \circ [\alpha_2, \iota_l] = 0 \Leftrightarrow [\alpha_2, \iota_l] = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 \in G_N(S^l)$.

Agora, consideremos a aplicação suspensão iterada

$$\Sigma^{l-1} \colon \pi_N(S^{m+l-1}) \to \pi_{N+l-1}(S^{m+2l-1}).$$

Pelo Teorema 3.65, Σ^{l-1} é um isomorfismo, pois $N < 2(m+l-1)-1$. Portanto, $\Sigma^{l-1}\alpha_3 = 0$ se, e somente se, $\alpha_3 = 0$. Analogamente, $\Sigma^{l-1}\alpha_p = 0$ se, e somente se, $\alpha_p = 0$, para $p = 4, 5$. Consequentemente, $[\theta, j_2] = 0$ se, e somente se,

$$\alpha_2 \in G_N(S^l); \Sigma^{l-1}\alpha_1 = 0; B_p(\alpha_1) = 0, p = 0, 1; \alpha_i = 0, i = 3, 4, 5.$$

Um cálculo similar pode ser feito para $[\theta, j_1]$ e se assumirmos que $[\theta, j_2] = 0$, então $\alpha_i = 0$, para $i = 3, 4, 5$. Assim,

$$[\theta, j_1] = j_1 \circ [\alpha_1, \iota_m] + [j_2, j_1] \circ \Sigma^{m-1}\alpha_2 + \sum_{p=0,1} \pm\sigma_{p+1}(j_2, j_1) \circ \Sigma^{m-1}B_p(\alpha_2).$$

Os produtos de Whitehead que aparecem à direita são produtos básicos a menos de sinal. Portanto, $[\theta, j_1] = 0$ (junto com $[\theta, j_2] = 0$ e o Teorema de Freudenthal) implica que $\alpha_1 \in G_N(S^m)$, $\Sigma^{m-1}\alpha_2 = 0$, e $B_p(\alpha_2) = 0$, para $p = 0, 1$. Isto prova a primeira implicação do teorema (“ $\Rightarrow$ ”).

A outra implicação as hipóteses facilmente implicam que $[\theta, j_1] = 0 = [\theta, j_2]$, e então $\theta \in G_N(S^m \vee S^l)$. □

Observação 3.81. Se trocarmos a hipótese $B_p(\alpha_i) = 0$, para $p = 0, 1$ e $i = 1, 2$ com a hipótese α_i é uma suspensão, para $i = 1, 2$ e mantermos as outras hipóteses, então concluímos que $\theta \in G_N(S^m \vee S^l)$. Isto segue diretamente do Lema 3.76 e teorema anterior.

Queremos enfatizar que apresentamos o teorema anterior para ilustrar o método usado em [3] de mostrar que um limite superior para N nos leva a um número menor de condições necessárias e suficientes para um elemento estar no grupo de Gottlieb. Claramente este método pode ser usado para outros limites superiores. No corolário abaixo enunciamos este resultado para limites menores do que o dado no teorema.

Corolário 3.82. *Seja $\theta \in \pi_N(S^m \vee S^l)$, $m \le l$, $m, N \ge 2$.*

1. *Se $N < 2m-1$, então $G_N(S^m \vee S^l) = 0$.*
2. *Se $N < 3m-2$, então $\theta = \sum_{p=1}^{3} \omega_p \circ \alpha_p \in G_N(S^m \vee S^l) \Leftrightarrow \alpha_1 \in G_N(S^m)$, $\alpha_2 \in G_N(S^l)$, $\Sigma^{l-1}\alpha_1 = 0$, $\Sigma^{m-1}\alpha_2 = 0$, $B_0(\alpha_i) = 0$, para $i = 1, 2$ e $\alpha_3 = 0$.*

Usando a mesma técnica, aplicando a Proposição 3.72, é possível estender esses resultados para um bouquet de k esferas $Y = S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \cdots \vee S^{n_k}$, onde $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ e fornecer condições para um elemento $\theta = \sum_{p \geq 1} \omega_p \circ \alpha_p \in \pi_N(Y)$ estar em $G_N(Y)$. Os detalhes são formidáveis porém exige muitos cálculos e nós também os omitimos como em [3], porém chamamos a atenção para essa extensão no corolário anterior item 1. Apresentemos essa extensão como uma proposição.

Proposição 3.83. *Seja $\theta \in \pi_N(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \cdots \vee S^{n_k})$, onde $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ e $2 \leq N \leq 2n_1 - 1$, então $G_N(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \cdots \vee S^{n_k}) = 0$.*

Como consequência dessa proposição temos o próximo resultado que será de suma importância para resultados desta tese.

Proposição 3.84. *Se $t > 1$ então $G_{m+i}(M(\mathbb{Z}^t, m)) = 0$ para $i < m - 1$, onde $\mathbb{Z}^t$ é a soma direta de t cópias de $\mathbb{Z}$.*

3.4 Grupo de Gottlieb de wedge de espaços de Moore

Proposição 3.85 ([8, Lemma 3.15])**.** *Se A e B são grupos abelianos de torções cujas componentes primárias são determinadas por conjuntos disjuntos de primos distintos, então a aplicação inclusão $M(A, m) \vee M(B, n) \hookrightarrow M(A, m) \times M(B, n)$ é uma equivalência de homotopia, para $m, n \geq 2$.*

Demonstração. Pela fórmula de Künneth para o par de espaços baseados (X, x_0) e (Y, y_0), temos

$$H_k(X \times Y, X \vee Y) = \bigoplus_{i=0}^{k} H_i(X, x_0) \otimes H_{k-i}(Y, y_0) \oplus \bigoplus_{i=0}^{k} \mathrm{Tor}(H_i(X, x_0), H_{k-i-1}(Y, y_0)).$$

Como as componentes primárias de A e B são determinadas por conjuntos disjuntos de primos, segue que

$$H_i(M(A, m), x_0) \otimes H_{k-i}(M(B, n), y_0) = 0$$

e

$$\mathrm{Tor}(H_i(M(A, m), x_0), H_{k-i-1}(M(B, n), y_0)) = 0,$$

para pontos bases $x_0 \in M(A, m)$ e $y_0 \in M(B, n)$.

Consequentemente, da sequência exata em grupos de homologia do par $(M(A, m) \times M(B, n), M(A, m) \vee M(B, n))$ obtemos que a aplicação inclusão $M(A, m) \vee M(B, n) \hookrightarrow M(A, m) \times M(B, n)$ induz isomorfismo nos grupos de homologia. Agora, como os espaços $M(A, m)$ e $M(B, n)$ são 1-conexos, segue que a aplicação inclusão também induz isomorfismos nos grupos de homotopia, e portanto, pelo Teorema 3.58, segue que a aplicação inclusão $M(A, m) \vee M(B, n) \hookrightarrow M(A, m) \times M(B, n)$ é uma equivalência de homotopia. $\square$

Observação 3.86. A proposição anterior implica que o espaço $M(A,m) \wedge M(B,n)$ é contrátil, para $m,n \geq 2$ e componentes primárias de A e B determinadas por conjuntos disjuntos de primos. Em particular, o espaço $M(\mathbb{Z}_k,m) \wedge M(\mathbb{Z}_l,n)$ é contrátil, para $m,n \geq 2$ e k e l relativamente primos.

Segue diretamente da proposição anterior e dos resultados de Gottlieb em [10, Theorem 1-7, 2-1], o seguinte resultado

Corolário 3.87. *1. Sejam A e B grupos abelianos de torções com componentes primárias determinadas por conjuntos de primos disjuntos. Então $G_k(M(A,m) \vee M(B,n)) = j_{1*}G_k(M(A,m)) \oplus j_{2*}G_k(M(B,n))$, para todo $k \geq 1$, $m,n \geq 2$. Em particular, $G_k(M(\mathbb{Z}_2,m) \vee M(A,n)) = j_{1*}G_k(M(\mathbb{Z}_2,m)) \oplus j_{2*}G_k(M(A,n))$, para todo $k \geq 1$, $m \geq 2$ e $n \geq 2$, se A é um grupo abeliano de torção com a componente 2-primária trivial.*

2. Se $A = \bigoplus_{i=1}^{t} A_{p_i}$ é a decomposição primaria de um grupo abeliano finito A, então

$$G_k(M(A,m)) = \bigoplus_{i=1}^{t} j_{i*}G_k(M(A_{p_i},m)),$$

para todo $k \geq 1$ e $m \geq 2$.

Se $X_k \xrightarrow{j_k} X_1 \vee X_2 \xrightarrow{p_l} X_k$ são as aplicações inclusões e projeções, respectivamente, então $p_l j_k = \delta_{lk}$, para $k,l = 1,2$. Então podemos afirmar:

Proposição 3.88. *Se $\pi_m(X_1 \vee X_2) = j_{1*}\pi_m(X_1) \oplus j_{2*}\pi_m(X_2)$, para algum $m \geq 1$, então $G_m(X_1 \vee X_2) \subseteq j_{1*}G_m(X_1) \oplus j_{2*}G_m(X_2)$.*

Demonstração. Como $p_l j_l = \iota_{X_l}$, segue por [10, Proposition 1-4] que $p_{l*}\colon G_m(X_1 \vee X_2) \to G_m(X_l)$, para $l = 1,2$. Se $\alpha \in G_m(X_1 \vee X_2)$, então $\alpha = j_{1*}\alpha_1 + j_{2*}\alpha_2$, com $\alpha_k \in \pi_m(X_k)$, $k = 1,2$. Logo, $\alpha_k = p_{k*}\alpha$ e $\alpha_k \in G_m(X_k)$, para $k = 1,2$. Então, concluímos que $G_m(X_1 \vee X_2) \subseteq j_{1*}G_m(X_1) \oplus j_{2*}G_m(X_2) \approx G_m(X_1 \times X_2)$. □

Observação 3.89. Se os espaços X e Y são $(m-1)$ e $(n-1)$ conexos, respectivamente, então $\pi_{k+1}(X \times Y, X \vee Y) = 0$, para $k+1 < m+n$. Isto implica que a aplicação inclusão $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ é uma $(m+n-1)$-equivalência de homotopia, isto é, a aplicação inclusão $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ induz isomorfismo $\pi_k(X \vee Y) \xrightarrow{\approx} \pi_k(X \times Y)$, para $k < m+n-1$.

Consequentemente, como os espaços $M(A,m)$ e $M(B,n)$ são $(m-1)$ e $(n-1)$ conexos, respectivamente, a aplicação inclusão $M(A,m) \vee M(B,n) \hookrightarrow M(A,m) \times M(B,n)$ implica um isomorfismo

$$\pi_k(M(A,m) \vee M(B,n)) \xrightarrow{\approx} \pi_k(M(A,m)) \oplus \pi_k(M(B,n)),$$

para $k < m+n-1$. Em particular, $M(A \oplus B,n) = M(A,n) \vee M(B,n)$, e então

$$\pi_k(M(A \oplus B,n)) \xrightarrow{\approx} \pi_k(M(A,n)) \oplus \pi_k(M(B,n)),$$

para $k < 2n - 1$.

O próximo resultado é consequência imediata da proposição e observação anteriores.

Corolário 3.90. *Se $k < m + n - 1$, então*

$$G_k(M(A,m) \vee M(B,n)) \subseteq j_{1*}G_k(M(A,n)) \oplus j_{2*}G_k(M(B,m)),$$

para todo $k \geq 1$ e $m, n \geq 2$.

4 Cálculos de grupos de Gottlieb de espaços de Moore

Neste Capítulo, mais precisamente, nas Seções 4.1, 4.2 e 4.3, apresentamos alguns resultados importantes de [3, 8], que servirão de base e motivação para cálculos de grupos de Gottlieb de espaços de Moore. Nas demais seções, obtemos resultados relevantes no cálculo de grupos de Gottlieb para alguns espaços de Moore do tipo (A, n), com A abeliano finitamente gerado. O material apresentado nas seções finais é parte do trabalho em conjunto [7].

4.1 O n-ésimo grupo de Gottlieb de espaços de Moore

Agora, vamos discutir o n-ésimo grupo de Gottlieb de um espaço de Moore $M(A, n)$ do tipo (A, n), $n > 2$. Assumimos que A é um grupo abeliano finitamente gerado e $M(A, n)$ é uma soma de wedge de suspensões, a saber, esferas e espaços de Moore do tipo finito, como já visto anteriormente. O próximo resultado é consequência de [10, Theorem 5.2 and 5.4].

Teorema 4.1. *Se $n > 2$, então*

$$G_n(M(A,n)) = \begin{cases} 0, & \textit{se } n \textit{ é par} \\ 0, & \textit{se } n \textit{ é ímpar, } \operatorname{rank} A \neq 1 \\ 2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} = \pi_n(S^n), & \textit{se } A = \mathbb{Z},\ n \neq 3,7 \textit{ é ímpar} \\ \mathbb{Z} = \pi_n(S^n), & \textit{se } A = \mathbb{Z},\ n = 3,7 \end{cases}$$

Para fechar todos os casos resta somente os espaços de Moore $M(\mathbb{Z} \oplus A, n)$ com n ímpar e A abeliano finito. Em [3] os autores fizeram esse trabalho. Vamos aqui reproduzir os cálculos. Para isso, vamos enunciar o seguinte resultado que é imediato da Proposição 3.88.

Proposição 4.2. *Sejam X e Y espaços tal que $\pi_n(X \vee Y) = j_{1*}\pi_n(X) + j_{2*}\pi_n(Y)$ e $G_n(Y) = 0$, onde $j_1 \colon X \to X \vee Y$ e $j_2 \colon Y \to X \vee Y$ são as aplicações inclusões. Então $G_n(X \vee Y) \subseteq j_{1*}G_n(X) \subseteq j_{1*}\pi_n(X)$.*

Corolário 4.3. *Assumindo a hipótese da proposição acima e adicionando que $G_n(X) = 0$. Então $G_n(X \vee Y) = 0$.*

Corolário 4.4. *Se n é ímpar, então $G_n(M(\mathbb{Z} \oplus A, n))$ é um grupo cíclico infinito, onde A é um grupo abeliano finito.*

Demonstração. Sejam $M_A = M(A, n)$, $X = M(\mathbb{Z} \oplus A, n) = S^n \vee M_A$ e $\iota_n = [id] \in \pi_n(S^n)$. Pela Observação 3.89, a hipótese da Proposição 4.2 é satisfeita e portanto,

$$G_n(X) = G_n(S^n \vee M_A) \subseteq j_{1*}G_n(S^n) = \begin{cases} 2\mathbb{Z}\{2j_1\}, & \text{se } n \neq 3, 7, \\ \mathbb{Z}\{j_1\}, & \text{se } n = 3, 7. \end{cases}$$

Agora, como $j_{1*}(G_n(S^n))$ é um grupo cíclico infinito, basta mostrar que $G_n(X)$ é um grupo não trivial. Para isso, pela Proposição 3.71, é suficiente mostrar que existe um inteiro positivo k tal que $[kj_1, i_1] = 0$ e $[kj_1, i_2] = 0$.

1. $[kj_1, j_1] = kj_{1*}[\iota_n, \iota_n] = j_{1*}(k[\iota_n, \iota_n]) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 3, 7 \text{ e } k > 0, \\ 0, & \text{se } n \neq 3, 7 \text{ e } k > 0 \text{ par.} \end{cases}$

2. O elemento $j_2 \in [M_A, X]$ tem ordem finita l uma vez que o grupo $[M_A, X]$ tem ordem finita pelo Teorema dos Coeficientes Universais. Portanto, $[lj_1, j_2] = [j_1, lj_2] = 0$.

Basta tomar $k = 2l$ e o resultado segue. □

Observação 4.5. Observe que acima mostramos que existe um k tal que $kj_{1*}G_n(S^n) \subseteq G_n(M(\mathbb{Z} \oplus A)) \subseteq j_{1*}G_n(S^n)$.

No final do Artigo [3], Remark 4.5, surge um comentário natural levantado pelos autores, que é o seguinte: "Seria interessante calcular outros grupos de Gottlieb de espaços de Moore tal como, por exemplo, $G_{n+1}(M(A, n))$."

No intuito de responder essa questão para A grupo abeliano finitamente gerado, desenvolvemos a próxima seção, onde calculamos os grupos $\pi_{n+1}(M(A, n))$, $n \geq 3$, para alguns grupos A.

4.2 Cálculo do $(n+1)$-ésimo grupo de homotopia do espaço de Moore

Sejam $m, n \geq 2$ inteiros. Primeiramente, consideramos o espaço de Moore $M(\mathbb{Z}_m, n)$. Seja $\mathrm{m}\colon S^n \to S^n$ uma aplicação de grau m, seja X o mapping cylinder de m e seja $M = S^n \cup_m e^{n+1}$ o mapping cone de m. Então $M = M(\mathbb{Z}_m, n)$ e temos uma sequência de cofibra

$$S^n \xrightarrow{\mathrm{m}'} X \longrightarrow M$$

onde S^n e M são $(n-1)-$conexas e m' é a aplicação de S^n em X induzida por m. Tomemos a sequência exata da cofibração m', trocando X por S^n e m' por m, uma vez que X e S^n tem o mesmo tipo de homotopia, obtemos a sequência exata

$$\pi_k(S^n) \xrightarrow{\mathrm{m}_*} \pi_k(S^n) \xrightarrow{i_*} \pi_k(M) \xrightarrow{d_k} \pi_{k-1}(S^n) \xrightarrow{\mathrm{m}_*} \pi_{k-1}(S^n) \qquad (*)$$

onde $i = i_{n+1} \colon S^n \to M$ é a inclusão, d_k é o homomorfismo bordo e $k \leq 2n-2$. Segue do Teorema de Freudenthal que $\Sigma \colon \pi_{k-1}(S^{n-1}) \to \pi_k(S^n)$ é um epimorfismo. Portanto se $\alpha \in \pi_k(S^n)$, então $\alpha = \Sigma\beta$, para algum $\beta = [g] \in \pi_{k-1}(S^{n-1})$. Consequentemente $\mathrm{m}_*(\alpha) = [\mathrm{m}\Sigma g] = (\Sigma g)^*[\mathrm{m}]$. Porém $\mathrm{m} = m(\iota_n)$ e $(\Sigma g)^*$ é um homomorfismo. Portanto,

$$\mathrm{m}_*(\alpha) = m[\Sigma g] = m\alpha.$$

Similarmente $\mathrm{m}_*(\lambda) = m\lambda$, para $\lambda \in \pi_{k-1}(S^n)$. Assim, os dois homomorfismo m_* na sequência exata $(*)$ são ambos multiplicações por m que será denotado por $\times m$.

Suponhamos $k = n$ em $(*)$, onde $n \geq 2$. Temos a sequência exata

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \pi_n(M) \xrightarrow{d_n} 0 \xrightarrow{\times m} 0.$$

Portanto, $\pi_n(M) = \mathbb{Z}_m\{i_{n+1}\}$.

Se $k = n+1$ em $(*)$, onde $n \geq 3$. Temos a sequência exata

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_*} \pi_{n+1}(M) \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}.$$

Portanto, se m é par, então $\pi_{n+1}(M) = \mathbb{Z}_2\{i_{n+1}\eta_n\}$, onde η_n é o gerador de $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$, e se m é ímpar, então $\pi_{n+1}(M) = 0$.

Agora, se $k = n+2$ em $(*)$, onde $n \geq 4$. Então temos a sequência exata

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_*} \pi_{n+2}(M) \xrightarrow{d_{n+2}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}_2.$$

Se m é par obtemos $\pi_{n+2}(M)$ como uma extensão de $\mathbb{Z}_2$ por $\mathbb{Z}_2$, assim podendo ser $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_4$. Se m é ímpar, então $\pi_{n+2}(M) = 0$. Em resumo desses cálculos temos a seguinte proposição.

Proposição 4.6. *Seja $m \geq 2$. Então:*

1. *Se $n \geq 2$, $\pi_n(M(\mathbb{Z}_m, n)) = \mathbb{Z}_m\{i_{n+1}\}$.*

2. *Se $n \geq 3$, então*

$$\pi_{n+1}(M(\mathbb{Z}_m, n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\{i_{n+1}\eta_n\}, & \textit{se } m \textit{ é par} \\ 0, & \textit{se } m \textit{ é ímpar} \end{cases}$$

3. *Se m é par e $n \geq 4$, então existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \pi_{n+2}(M(\mathbb{Z}_m, n)) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

e portanto, $\pi_{n+2}(M(\mathbb{Z}_m, n))$ pode ser $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_4$

4. *Se m é ímpar e $n \geq 4$, então $\pi_{n+2}(M(\mathbb{Z}_m, n)) = 0$.*

Agora discutiremos a relação entre os grupos de homotopia do espaço de Moore do tipo $(\mathbb{Z}_m, n)$ e de todos os espaços de Moore do tipo (A, n), para um grupo abeliano A finitamente gerado.

Seja A um grupo abeliano finitamente gerado e seja P o conjunto de todos os primos que dividem a ordem do subgrupo de torção de A. Escrevemos A como uma soma direta

$$A = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ somandos}} \bigoplus_{p \in P} A_p,$$

onde r é o rank de A e A_p é a componente p-primária de A, que é a soma direta de grupos cíclicos de ordem potências de p. Então, para $n \geq 2$, formamos o wedge

$$X = \underbrace{S^n \vee \cdots \vee S^n}_{r \text{ termos}} \vee \bigvee_{p \in P} M(A_p, n)$$

onde $M(A_p, n)$ é o wedge de espaços de Moore da forma $M(\mathbb{Z}_{p^\alpha}, n)$. Claramente X é um espaço de Moore $M(A, n)$. Além do mais, os espaços S^n e $M(A_p, n)$ são CW complexos cujo $(n-1)-$esqueleto é o ponto base. Logo, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.7. *Se $i \leq 2n-2$ e $n \geq 2$, então*

$$\pi_i(X) \approx \underbrace{\pi_i(S^n) \oplus \cdots \oplus \pi_i(S^n)}_{r \text{ somandos}} \bigoplus_{p \in P} \pi_i(M(A_p, n)).$$

Demonstração. Seja

$$Y = \underbrace{S^n \times \cdots \times S^n}_{r \text{ fatores}} \times \prod_{p \in P} M(A_p, n)$$

e seja $j \colon X \to Y$ a inclusão. Então $Y^{2n-1} = X$ e então $j_* \colon \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ é um isomorfismo (Ver [2, Proposition 1.5.24]). Logo,

$$\pi_i(X) \approx \pi_i(Y) \approx \underbrace{\pi_i(S^n) \oplus \cdots \oplus \pi_i(S^n)}_{r \text{ somandos}} \bigoplus_{p \in P} \pi_i(M(A_p, n)).$$

□

Corolário 4.8. *Seja A um grupo abeliano finitamente gerado de rank r cuja componente 2-primária é a soma direta de s grupos cíclicos com ordens potência de 2. Então*

1. *Se $n \geq 3$, então $\pi_{n+1}(M(A, n)) \approx \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{r+s \text{ somandos}}$.*

2. *Se $n \geq 4$, então $\pi_{n+2}(M(A, n)) \approx \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{r \text{ somandos}} \oplus H$, e existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{s \text{ somandos}} \longrightarrow H \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{s \text{ somandos}} \longrightarrow 0.$$

Corolário 4.9. *Seja A um grupo abeliano finito de ordem ímpar, então*

1. *$\pi_{n+1}(M(A, n)) = 0$, para $n \geq 3$*

2. *$\pi_{n+2}(M(A, n)) = 0$, para $n \geq 4$.*

4.3 Grupos de Gottlieb de alguns espaços de Moore

Seja $M^n = \Sigma^{n-2}\mathbb{R}P^2$ para $n \geq 2$, onde $\mathbb{R}P^2$ denota o plano projetivo real. O espaço M^n é um espaço de Moore do tipo $(\mathbb{Z}_2, n-1)$, para $n \geq 3$, muito estudado por Mukai e outros pesquisadores em [8], [15], [16], [13], [14], entre outros trabalhos. Esse vasto estudo servirá como base para a maioria de nossos resultados. A seguir, apresentaremos o que servirá de apoio e também motivação para as próximas seções, onde desenvolvemos nossa contribuição para a pesquisa, disponíveis em [7].

Observação 4.10. Do Teorema 4.1, se A é um grupo abeliano finitamente gerado e $M(A,n)$ é um espaço de Moore do tipo (A,n), $n \geq 2$, então $G_n(M(A,n)) = 0$ se n é par ou se n é ímpar e A é um grupo de torção. Em particular, se $n \geq 3$, então $G_{n-1}(M^n) = 0$. Para $M^2 = \mathbb{R}P^2$, Gottlieb em [9, Corollary 1.6] mostra que $G_1(\mathbb{R}P^2) = 0$.

Da Proposição 4.6, $\pi_n(M(\mathbb{Z}_m,n)) = \mathbb{Z}_m\{i_{n+1}\}$, onde $i_{n+1}\colon S^n \to M(\mathbb{Z}_m,n)$ é a inclusão. De [20, Theorem 4.4] temos $\sharp\iota_{M(\mathbb{Z}_m,n)} = \begin{cases} 2m, & \text{se } m \equiv 2 \pmod 4, \\ m, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Compilando essas informações com a observação acima, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 4.11. $\sharp[i_{n+1}, \iota_{M(\mathbb{Z}_m,n)}] = m$.

Fazendo uso da equação:

$$[\alpha \circ \Sigma\gamma, \beta \circ \Sigma\delta] = [\alpha, \beta] \circ \Sigma(\gamma \wedge \delta), \tag{4.1}$$

e de outros resultados computados em [8], obtemos o importante resultado abaixo, que será de grande utilidade para as próximas seções:

Proposição 4.12 ([8, Proposition 3.10])**.** *1. $P_{n-1}(M^n) = 0$, para todo $n \geq 3$.*

2. $P_3(M^3) = 2\pi_3(M^3) = \mathbb{Z}_2\{2i_3\eta_2\}$ e $P_n(M^n) = 0$, para todo $n \geq 4$.

3. $\tilde{\eta}_{n-1} \notin P_{n+1}(M^n)$ para todo $n \geq 3$ e $P_{n+1}(M^n) = 0$, para $n \geq 3$ ímpar.

4. $P_{n+2}(M^n) = 0$ e $P_{n+3}(M^n) = 0$, para $n \geq 7$ ímpar.

5. $P_{n+4}(M^n) = 0$, para $n \geq 8$.

Corolário 4.13 ([8, Corollary 3.11])**.** *1. $G_{n-1}(M^n) = 0$, para todo $n \geq 3$.*

2. $G_3(M^3) = 2\pi_3(M^3) = \mathbb{Z}_2\{2i_3\eta_2\}$ e $G_n(M^n) = 0$, para $n \geq 4$.

3. $G_{n+1}(M^n) = 0$ para todo $n \geq 3$.

4. $G_{n+2}(M^n) = 0$ e $G_{n+3}(M^n) = 0$, para $n \geq 7$ ímpar.

5. $G_{n+4}(M^n) = 0$, para $n \geq 8$.

Da Proposição 3.88, do corolário anterior e do fato que $\pi_k(M(A,n)) = 0$, para $k < n$, $n \geq 2$, podemos obter o seguinte resultado:

Proposição 4.14. *Seja A um grupo abeliano. Então:*

1. $G_{n-1}(M^m \vee M(A,n)) \subseteq j_{1*}G_{n-1}(M^m)$, *para* $m \geq 3$ *e* $n \geq 2$;
2. $G_{m-1}(M^m \vee M(A,n)) \subseteq j_{2*}G_{m-1}(M(A,n))$, *para* $m \geq 3$ *e* $n \geq 2$;
3. $G_m(M^m \vee M(A,n)) \subseteq j_{2*}G_m(M(A,n))$, *para* $m \geq 4$ *e* $n \geq 3$;
4. $G_{m+1}(M^m \vee M(A,n)) \subseteq j_{2*}G_{m+1}(M(A,n))$, *para* $m \geq 3$ *e* $n \geq 4$;
5. $G_{m+2}(M^m \vee M(A,n)) \subseteq j_{2*}G_{m+2}(M(A,n))$, *para* $m \geq 7$ *ímpar e* $n \geq 5$;
6. $G_{m+3}(M^m \vee M(A,n)) \subseteq j_{2*}G_{m+3}(M(A,n))$, *para* $m \geq 7$ *ímpar e* $n \geq 6$;
7. $G_{m+4}(M^m \vee M(A,n)) \subseteq j_{2*}G_{m+4}(M(A,n))$, *para* $m \geq 8$ *e* $n \geq 7$

É imediato que:

Corolário 4.15. *1.* $G_{n-1}(M^m \vee M(A,n))) = 0$, *para* $m \geq n+1$ *e* $n \geq 2$;

2. $G_{n-1}(M^n \vee M^{n+k}) = 0$, *para* $k \geq 0$ *e* $n \geq 3$;
3. $G_n(M^n \vee M^{n+k}) = 0$, *para* $k \geq 0$ *e* $n \geq 4$;
4. $G_{n+1}(M^n \vee M^{n+k}) = 0$, *para* $k \geq 0$ *e* $n \geq 3$;
5. $G_{n+2}(M^n \vee M^{n+k}) = 0$ *e* $G_{n+3}(M^m \vee M^{n+k}) = 0$, *para* $k \geq 0$ *e* n *ímpar com* $m \geq 7$;
6. $G_{n+4}(M^n \vee M^{n+k}) = 0$, *para* $k \geq 0$ *e* $n \geq 8$.

Observação 4.16. Note que do Corolário 4.13 e do corolário anterior $(2)-(6)$ segue que

$$G_{n+k}(M(\mathbb{Z}_2^t, n)) = G_{n+k}(\underbrace{M^{n+1} \vee \cdots \vee M^{n+1}}_{t \text{ vezes}}) = 0,$$

para $k = 0,1,2,3,4,5$ e qualquer $t \geq 0$, sob as mesmas restrições sobre n acima, onde $\mathbb{Z}_2^t$ é a soma direta de t cópias do grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$.

No Corolário 4.9 vimos que $\pi_{n+1}(M(A,n)) = 0$, para $n \geq 3$ e $\pi_{n+2}(M(A,n)) = 0$, para $n \geq 4$, para A abeliano finito de ordem ímpar. Usando a mesma ideia e algumas informações a mais podemos estender esse resultado para grupos de ordens superiores, como segue:

Proposição 4.17 ([8, Proposition 3.19]). *Seja A um grupo abeliano finito de ordem ímpar. Então:*

1. $\pi_{n+3}(M(A,n)) = 0$, *para* $n \geq 5$ *e* $\pi_{n+4}(M(A,n)) = 0$, *para* $n \geq 6$ *desde que a componente* 3*-primária de A seja trivial, isto é,* $A_3 = 0$;

2. $\pi_{n+5}(M(A,n)) = 0$, *para* $n \geq 7$.

Dos Corolários 3.90, 4.9 e da proposição anterior, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 4.18. *Seja A um grupo abeliano finito de ordem ímpar. Então:*

1. $G_{n+k}(M(A \oplus \mathbb{Z}, n)) \subseteq j_{2*}G_{n+k}(S^n)$, *para* $k = 1, 2$ *e* $n \geq k+2$.

2. $G_{n+k}(M(A \oplus \mathbb{Z}, n)) \subseteq j_{2*}G_{n+k}(S^n)$, *para* $k = 3, 4$, $n \geq k+2$ *e* $A_3 = 0$.

3. $G_{n+5}(M(A \oplus \mathbb{Z}, n)) \subseteq j_{2*}G_{n+5}(S^n)$, *para* $n \geq 7$.

Do Corolário 3.87 sabemos que se $A = \bigoplus_{i=1}^{t} A_{p_i}$ é a decomposição primária de um grupo de torção A, então

$$G_k(M(A,m)) = \bigoplus_{i=1}^{t} j_{i*}G_k(M(A_{p_i}, m)),$$

para todo $k \geq 1$ e $m \geq 2$. Em particular, para A grupo abeliano finito. Da Observação 4.5, sabemos que se n é ímpar e A um grupo abeliano finito, existe um l par tal que $lj_{2*}G_n(S^n) \subseteq G_n(M(A \oplus \mathbb{Z})) \subseteq j_{2*}G_n(S^n)$. O corolário abaixo, sob as condições da proposição anterior, nos diz que $l = 1$, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, se A tem ordem ímpar. Vamos dar atenção para essa demonstração, pois é fundamental a ordem de A ser ímpar para a técnica usada.

Corolário 4.19 ([8, Corollary 3.20])**.** *Seja A um grupo abeliano finito de ordem ímpar. Então:*

1. $G_{n+k}(M(A \oplus \mathbb{Z}, n)) = j_{2*}G_{n+k}(S^n)$, *para* $k = 1, 2$ *e* $n \geq k+2$.

2. $G_{n+3}(M(A \oplus \mathbb{Z}, n)) = j_{2*}G_{n+3}(S^n)$, *para,* $n \geq 5$ *e* $A_3 = 0$.

3. $G_{n+4}(M(A \oplus \mathbb{Z}, n)) = j_{2*}G_{n+4}(S^n) = 0$, *para* $n \geq 6$ *e* $A_3 = 0$.

4. $G_{n+5}(M(A \oplus \mathbb{Z}, n)) = j_{2*}G_{n+5}(S^n) = 0$, *para* $n \geq 7$.

Demonstração. Para os n em que $G_{n+k}(S^n) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, o resultado é imediato. Vamos então considerar os casos que $G_{n+k}(S^n) \neq 0$, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, de [20, Chapter V] temos que $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2\{\eta_n\}$ para $n \geq 3$, $\pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2\{\eta_n^2\}$ para $n \geq 2$, $\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{24}\{\nu_n^+\}$ para $n \geq 5$, $\pi_{n+4}(S^n) = 0$ para $n \geq 6$, $\pi_{n+5}(S^n) = 0$ para $n \geq 7$, onde $\eta_n = \Sigma^{n-2}\eta_2$, $\eta_n^2 = \eta_n\eta_{n+1}$ e η_2 a aplicação de Hopf. Do Teorema 3.68 (Teorema dos Coeficientes Universais), para qualquer espaço X, grupo abeliano A e $n \geq 2$ temos a sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(A, \pi_{n+1}(X)) \longrightarrow [M(A,n), X] \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \pi_n(X)) \longrightarrow 0.$$

Agora, se A tem ordem ímpar e $X = M(A \oplus \mathbb{Z}, n)$ então a sequência exata curta acima implica que $j_2 \colon M(A,n) \to M(A \oplus \mathbb{Z}, n)$ tem ordem ímpar no grupo $[M(A,n), M(A \oplus \mathbb{Z}, n)]$

pois A tem ordem ímpar e se $k = 3, 4$ essa ordem não é divisível por 3, uma vez que $A_3 = 0$. Consequentemente, $[j_1\eta_n, j_2] = [j_1\eta_n^2, j_2] = [j_1\nu_n^+, j_2] = 0$.

Por [8, (1.15), (1.16), (1.32)],

$$\sharp[\iota_n, \eta_n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 2, 6 \text{ ou } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 2, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\sharp[\iota_n, \eta_n^2] = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ 2, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\sharp[\iota_n, \nu_n^+] = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 7 \pmod 8 \text{ ou } n = 2^i - 3 \text{ para } i \geq 3; \\ 2, & \text{se } n \equiv 1, 3, 5 \pmod 8),\ n \geq 9 \text{ e } n \neq 2^i - 3; \\ 12, & \text{se } n \equiv 2 \pmod 4) \text{ e } n \geq 6 \text{ ou } n = 4, 12; \\ 24, & \text{se } n \equiv 0 \pmod 4) \text{ e } n \geq 8,\ n \neq 12. \end{cases}$$

Essas condições determinam completamente $G_{n+k}(S^n)$, $k = 1, 2, 3$ e daí, como estamos nos casos que $G_{n+k}(S^n) \neq 0$, concluímos que $[j_1\eta_n, j_1] = j_1[\eta_n, \iota_n] = 0$, $[j_1\eta_n^2, j_1] = j_1[\eta_n^2, \iota_n] = 0$ e $[j_1 l\nu_n^+, j_1] = j_1[l\nu_n^+, \iota_n] = 0$, para algum $1 \leq l \leq 23$. Agora, da Proposição 3.71, o resultado segue. □

Usando o Corolário 3.87, Corolário 4.9, Proposição 4.17 e por fim a Proposição 3.84, podemos obter o seguinte resultado:

Proposição 4.20. *Seja A um grupo abeliano finito de ordem ímpar. Então:*

1. $G_{n+k}(M(A \oplus \mathbb{Z}^t, n)) = 0$, *para* $k = 1, 2$, $n \geq k + 2$ *e* $t > 1$.
2. $G_{n+3}(M(A \oplus \mathbb{Z}^t, n)) = 0$, *para,* $n \geq 5$, $t > 1$ *e* $A_3 = 0$.
3. $G_{n+4}(M(A \oplus \mathbb{Z}^t, n)) = 0$, *para* $n \geq 6$, $t > 1$ *e* $A_3 = 0$.
4. $G_{n+5}(M(A \oplus \mathbb{Z}^t, n)) = 0$, *para e* $n \geq 7$ *e* $t > 1$.

Depois de tudo que vimos até aqui, na motivação de classificar ao máximo os grupos $G_{n+k}(M(A \oplus \mathbb{Z}^t, n))$, $t \geqslant 1$ e A abeliano finito, é natural se fazer a seguinte pergunta: "Qual é o $(n+1)$-ésimo Grupo de Gottlieb dos espaços de Moore do tipo $(A \oplus \mathbb{Z}^t, n)$ para $t \geqslant 1$ e A abeliano finito de ordem par". Nas próximas seções respondemos essa pergunta para quando A tem ordem par com $|A| \equiv 2 \pmod 4$ e estendemos essa discussão para o $(n+2)$-ésimo grupo de Gottlieb dos espaços de Moore do tipo $(A \oplus \mathbb{Z}^t, n)$ para A abeliano finito de ordem par com $|A| \equiv 2 \pmod 4$.

4.4 Cálculo do $(n+1)$-ésimo grupo de Gottlieb de espaços de Moore

Sejam $i_{n+1}\colon S^n \to M^{n+1} = M(\mathbb{Z}_2, n)$ a aplicação inclusão e $\eta_n = \Sigma^{n-2}\eta_2$, onde η_2 é a aplicação de Hopf, o gerador do grupo $\pi_{n+1}(S^n)$, para $n \geq 2$. De [20, Chapter V] $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2\{\eta\}$, para $n \geq 3$ e da Proposição 4.6, $\pi_{n+1}(M^{n+1}) = \mathbb{Z}_2\{i_{n+1}\eta_n\}$, para $n \geq 3$.

Do Corolário 4.13 sabemos que $G_{n+1}(M^{n+1}) = 0$, para $n \geq 3$, vamos agora usar a Proposição 3.84 e outros resultados para obtermos o $(n+1)$-ésimo grupo de Gottlieb para uma classe maior de espaços de Moore.

Na sequência, nós apresentamos uma fórmula que generaliza outras provada por Barcus e Barratt [4, Corollary (7.4)] no caso em que A e B são esferas e por Rutter [18, Theorem 3.5.1] no caso em que A e B são suspensões. De fato, somente precisamos que A seja um co-H-espaço.

Proposição 4.21 ([5, (3.4) Proposition, p. 51])**.** *Sejam A um co-H-space e B um espaço de dimensão finita. Então, o produto de Whitehead de $\Sigma A \xrightarrow{\alpha} Z$ e $\Sigma B \xrightarrow{\gamma} \Sigma Y \xrightarrow{\beta} Z$ satisfaz a fórmula*

$$[\alpha, \beta\gamma] = \sum_{k=1}^{\infty} [[\alpha, \beta^k] \circ (\iota_A \wedge h_k(\gamma))$$

para os invariantes de James-Hopf

$$h_k\colon [\Sigma B, \Sigma Y] \to [\Sigma B, (\Sigma Y)^{\wedge k}],$$

onde $[[\alpha, \beta^k] = [\ldots[[\alpha, \beta], \beta], \ldots, \beta]$ denota o produto de Whitehead iterado.

Observação 4.22. [5, p. 43]

1. O invariante h_1 é a aplicação identidade de $[\Sigma B, \Sigma Y]$
2. Se γ é uma suspensão então $h_k(\gamma) = 0$, para $k \geq 2$.
3. A decomposição em soma do elemento $[\alpha, \beta\gamma]$ induzida pelos produtos de Whitehead iterado é unicamente determinada pela proposição acima quando $\alpha = j_2$ e $\beta = j_1$ são as aplicações inclusões em $Z = \Sigma A \vee \Sigma B$, ou seja, é uma soma direta induzida pelos produtos de Whitehead iterado.

A proposição e a observação acima serão muito importante para as obtenções de nossos principais resultados, como veremos em sequência.

Proposição 4.23. *Seja $n \geq 3$. Então:*

1. $G_{n+1}(M(\mathbb{Z}^t \oplus \mathbb{Z}_2, n)) = 0$*, para* $t > 1$.
2. $G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)) \subseteq j_{1*}G_{n+1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\{j_1\eta_n\}, & \textit{se } n = 6 \textit{ ou } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$

Demonstração. 1. Sabemos que $G_{n+1}(M(\mathbb{Z}^t \oplus \mathbb{Z}_2, n)) = G_{n+1}(M(\mathbb{Z}^t, n) \vee M^{n+1})$ e portanto, pelos Corolário 3.90 e 4.13 e a proposição anterior o resultado segue.

2. Segue dos Corolários 3.90 e 4.13 e de [8, (1.15)], que diz

$$\sharp[\iota_n, \eta_n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 6 \text{ ou } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

□

Proposição 4.24. *Seja A um grupo abeliano finito com $|A| \equiv 2 \pmod 4$ e $n \geq 3$. Então:*

1. $G_{n+1}(M(A, n)) = 0$.

2. $G_{n+1}(M(\mathbb{Z}^t \oplus A, n)) = 0$ *para* $t > 1$.

3. $G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) \subseteq j_{1*}G_{n+1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\{j_1\eta_n\}, & \textit{se } n = 6 \textit{ ou } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$

Demonstração. 1. Pelo Corolário 3.87 temos

$$G_{n+1}(M(A, n)) = \bigoplus_{i=1}^{t} j_{i*}G_{n+1}(M(A_{p_i}, n)),$$

onde $A = \bigoplus_{i=1}^{t} A_{p_i}$ é a decomposição primária do grupo A. Além disso, por [8, Proposition 3.29], $G_{n+1}(M(A_{p_i}, n)) = 0$ para $p_i > 2$ e pelo Corolário 2.7, $A_2 \approx \mathbb{Z}_2$ para $|A| \equiv 2 \pmod 4$. Daí, segue que

$$G_{n+1}(M(A, n)) = j_{2*}G_{n+1}(M(A_2, n)) \approx G_{n+1}(M^{n+1}).$$

Portanto, pelo Corolário 4.13, concluímos que $G_{n+1}(M(A, n)) = 0$.

2. $G_{n+1}(M(\mathbb{Z}^t \oplus A, n)) = G_{n+1}(M(\mathbb{Z}^t, n) \vee M(A, n))$. Então, pelo Corolário 3.90, pela Proposição 3.84 e pelo item anterior, o resultado segue.

3. Análogo a Proposição 4.23(2), usando agora o primeiro item. □

A Proposição 4.23(2) nos fornece somente duas possibilidades para $G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n))$. Na sequência vamos mostrar que esse grupo também é um grupo trivial. Mas, antes, precisamos de alguns resultados.

Considere o pushout do mapping cone $M^5 = M(\mathbb{Z}_2, 4) = S^4 \cup_{2\iota_4} e^5$ e η_3 o gerador de $\pi_4(S^3) \approx \mathbb{Z}_2\{\eta_3\}$. Como η_3 tem grau 2, então $\eta_3 \circ (2\iota_4) = 0$, e então $\eta_3 \circ (2\iota_4)$ se estende para o disco e^5, logo, pela propriedade universal de pushout, existe uma única aplicação (a menos de homotopia), $\overline{\eta}_3$, tal que $\overline{\eta}_3 i_5 = \eta_3$, essa aplicação é chamada de extensão da aplicação η_3

$$\begin{tikzcd} S^4 \arrow[r, "2\iota_4"] \arrow[d] & S^4 \arrow[d, "i_5"'] \arrow[dr, bend left, "\eta_3"] & \\ e^5 \arrow[r] & M(\mathbb{Z}_2,4) \arrow[r, dotted, "\overline{\eta}_3"'] & S^3 \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

De modo análogo, podemos obter a extensão, $\overline{\eta_n}$, da aplicação η_n, de modo que $\overline{\eta}_n i_{n+2} = \eta_n$, para $n \geq 4$.

$$\begin{tikzcd} S^{n+1} \arrow[r, "2\iota_{n+1}"] \arrow[d] & S^{n+1} \arrow[d, "i_{n+2}"'] \arrow[dr, bend left, "\eta_n"] & \\ e^{n+2} \arrow[r] & M(\mathbb{Z}_2,n+1) \arrow[r, dotted, "\overline{\eta}_n"'] & S^n \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Como o Diagrama 4.3 é obtido do Diagrama 4.2 através de suspensões iteradas, também concluímos que, $\overline{\eta}_n = \Sigma^{n-3}\overline{\eta}_3$, para $n \geq 3$. Por [13, (3.2)] $[M(\mathbb{Z}_2,3), S^2] = \mathbb{Z}_2\{\eta_2^2 p_4\}$, $[M(\mathbb{Z}_2, n+1), S^n] = \mathbb{Z}_4\{\overline{\eta}_n\}$, e vale a relação

$$2\overline{\eta}_n = \eta_n^2 p_{n+2}, \quad (n \geq 3). \tag{4.4}$$

Sejam $\widetilde{\eta}_2 \in \pi_4(M(\mathbb{Z}_2,n))$ e $\widetilde{\eta}_n = \Sigma^{n-2}\widetilde{\eta}_2 \in \pi_{n+2}(M(\mathbb{Z}_2,n))$ os únicos elemento satisfazendo a relação

$$p_{n+1}\widetilde{\eta}_n = \eta_{n+1}, \quad (n \geq 2). \tag{4.5}$$

A aplicação $\widetilde{\eta}_n$ é obtido da sequência de cofibração de $M(\mathbb{Z}_2,n)$ e é chamada de co-extensão de η_n. Além do mais, $\pi_{n+2}(M(\mathbb{Z}_2,n)) = \mathbb{Z}_4\{\widetilde{\eta}_n\}$ e vale a relação

$$2\widetilde{\eta}_n = i_{n+1}\eta_n^2, \quad (n \geq 2). \tag{4.6}$$

Lema 4.25 ([14, Lemma 1.5])**.** *1.* $[M(\mathbb{Z}_2,3), M(\mathbb{Z}_2,2)] = \mathbb{Z}_2\{\overline{\Sigma\lambda_2}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\widetilde{\eta}_2 p_4\}$ *e ainda* $\Sigma(\overline{\Sigma\lambda_2}) = \widetilde{\eta}_3 p_5$

2. $[M(\mathbb{Z}_2,n), M(\mathbb{Z}_2,n-1)] = \mathbb{Z}_2\{i_n\overline{\eta}_{n-1}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\widetilde{\eta}_{n-1}p_{n+1}\}$, $n \geq 4$.

Observação 4.26. Do lema acima, concluímos que a aplicação suspensão

$$\Sigma\colon [M(\mathbb{Z}_2,n), M(\mathbb{Z}_2,n-1)] \to [M(\mathbb{Z}_2,n+1), M(\mathbb{Z}_2,n)]$$

não é um isomorfismo para $n = 3$, porém é isomorfismo para $n \geq 4$.

Recordamos que da Proposição 4.23(2) temos que

$$G_{n+1}(M(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2,n)) \subseteq j_{1*}G_{n+1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\{j_1\eta_n\}, & \text{se } n = 6 \text{ ou } n \equiv 3 \pmod 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para os casos que $j_{1*}G_{n+1}(S^n)$ não são triviais, temos que $j_1\eta_n \in G_{n+1}(M(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2,n))$ se, e somente se, $[j_1\eta_n, j_1] = 0 = [j_1\eta_n, j_2]$, onde $j_1\colon S^n \hookrightarrow M(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2,n)$ e

$j_2 \colon M(\mathbb{Z}_2, n) \hookrightarrow M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)$ são as aplicações inclusões. Agora $[j_1\eta_n, j_1] = j_1([\eta_n, \iota_n]) = 0$, pois $G_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2\{\eta_n\}$, logo $j_1\eta_n \in G_{n+1}(M(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, n))$ se, e somente se, $[j_1\eta_n, j_2] = 0$.

Para estudar o produto $[j_1\eta_n, j_2]$, vamos usar a Proposição 4.21 e a Observação 4.22, daí temos:

$$\begin{aligned}[j_2, j_1\eta_n] &= [j_2, j_1] \circ (\iota_{M(\mathbb{Z}_2, n-1)} \wedge \eta_n) + \sum_{k=2}^{\infty} [[j_2, j_1^k] \circ (\iota_{M(\mathbb{Z}_2, n-1)} \wedge h_k(\eta_n)) \\ &= [j_2, j_1] \circ (\iota_{M(\mathbb{Z}_2, n-1)} \wedge \eta_n)\end{aligned} \tag{4.7}$$

para $n \geq 3$, onde h_k é o invariante de James-Hopf e $[[j_2, j_1^k] = [\ldots[[j_2, j_1], j_1], \ldots, j_1]$ o produto iterado de Whitehead.

Agora, lembramos uma fórmula muito útil que se encontra na prova de [15, Lemma 3.1]. Novamente, agradecemos aos professores Marek Golasiński e Juno Mukai, por nos apresentarem tal decomposição.

Lema 4.27 ([7, Lemma 3.7])**.** $\iota_{M^2} \wedge \eta_2 = i_4\bar{\eta}_3 + \tilde{\eta}_3 p_5$.

Demonstração. A cofibração $S^4 \xrightarrow{i_5} M^5 \xrightarrow{p_5} S^5$ induz a sequência exata

$$\cdots \to \pi_5(M^4) = \mathbb{Z}_4\{\tilde{\eta}_3\} \xrightarrow{p_5^*} [M^5, M^4] \xrightarrow{i_5^*} \pi_4(M^4) = \mathbb{Z}_2\{i_4\eta_3\} \to 0.$$

Mas, $\iota_{M^2} \wedge \eta_2 \in [M^5, M^4] = \mathbb{Z}_2\{i_4\bar{\eta}_3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\eta}_3 p_5\}$ e

- $i_2 \wedge \eta_2 = i_2\iota_1 \wedge \iota_2\eta_2 = (\iota_2 \wedge i_2) \circ (\iota_1 \wedge \eta_2) = i_4\eta_3 = (i_4\bar{\eta}_3) \circ i_5$,
- $i_2 \wedge \eta_2 = \iota_{M^2} i_2 \wedge \eta_2\iota_3 = (\iota_{M^2} \wedge \eta_2) \circ (i_2 \wedge \iota_3) = (\iota_{M^2} \wedge \eta_2) \circ i_5$.

Consequentemente, $i_5^*(\iota_{M^2} \wedge \eta_2 - i_4\bar{\eta}_3) = 0$ e a sequência exata acima implica

$$\iota_{M^2} \wedge \eta_2 = i_4\bar{\eta}_3 + x\tilde{\eta}_3 p_5 \tag{4.8}$$

com $x = 0, 1$.

Agora, consideremos a sequência exata

$$0 \to \pi_5(S^4) = \mathbb{Z}_2\{\eta_4\} \xrightarrow{p_5^*} [M^5, S^4] \xrightarrow{i_5^*} \pi_4(S^4) = \mathbb{Z}\{\iota_n\} \to \ldots$$

determinada pela cofibração $S^4 \xrightarrow{i_5} M^5 \xrightarrow{p_5} S^5$. Então, $p_2 \wedge \eta_2 \in [M^5, S^4]$ e $p_5^*(\eta_4) = \eta_4 p_5 \neq 0$.

Além do mais,

- $p_2 \wedge \eta_2 = \iota_2 p_2 \wedge \eta_2\iota_3 = (\iota_2 \wedge \eta_2) \circ (p_2 \wedge \iota_3) = \eta_4 p_5 \neq 0$,
- $p_2 \wedge \eta_2 = p_2\iota_{M^2} \wedge \iota_2\eta_2 = (p_2 \wedge \iota_2) \circ (\iota_{M^2} \wedge \eta_2) = p_4(\iota_{M^2} \wedge \eta_2) \neq 0$.

Logo, a equação (4.8) nos conduz para $p_4(\iota_{M^2} \wedge \eta_2) = p_4 i_4\bar{\eta}_3 + x p_4\tilde{\eta}_3 p_5 = x p_4\tilde{\eta}_3 p_5$. Como, $p_4(\iota_{M^2} \wedge \eta_2) \neq 0$, derivamos que $x = 1$ e a prova segue. □

Suspendendo ambos os lados da equação obtida acima e usando o Lema 4.25 obtemos o seguinte resultado:

Lema 4.28. $\Sigma^{n-2}(\iota_{M^2} \wedge \eta_2) = i_{n+2}\overline{\eta}_{n+1} + \widetilde{\eta}_{n+1}p_{n+3} \neq 0$*, para* $n \geq 2$*.*

Agora, vamos enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.29. *Seja* $n \geq 3$*. Então* $G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)) = 0$*.*

Demonstração. Escrevendo $\iota_{M(\mathbb{Z}_2,n-1)} \wedge \eta_n = \Sigma^{n-2}\iota_{M^2} \wedge \Sigma^{n-2}\eta_2 = \Sigma^{2(n-2)}(\iota_{M^2} \wedge \eta_2)$ vemos pelo lema anterior que $\iota_{M(\mathbb{Z}_2,n-1)} \wedge \eta_n \neq 0$, para todo $n \geq 2$. Daí, por (4.7), segue que $[j_2, j_1\eta_n] \neq 0$, para todo $n \geq 3$. Portanto, $j_1\eta_n \notin G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n))$ e então $G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)) = 0$, para $n \geq 3$. □

Corolário 4.30. *Seja A um grupo abeliano finito com ordem* $|A| \equiv 2 \pmod 4$*. Então* $G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) = 0$*, para* $n \geq 3$*.*

Demonstração. Seja $A = \bigoplus_{i=1}^{t} A_{p_i}$ a decomposição primária de A com $p_1 = 2$. Pelos Corolários 3.90 e 3.87 temos

$$G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) \subseteq j_{1*}G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus A_2, n)) \bigoplus_{i=2}^{t} j_{i*}G_{n+1}(M(A_{p_i}, n)).$$

Além disso, já vimos que $G_{n+1}(M(A_{p_i}, n)) = 0$ para $p_i > 2$ e $A_2 \approx \mathbb{Z}_2$ para $|A| \equiv 2 \pmod 4$. Daí, segue que

$$G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) \subseteq G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus A_2, n)) \approx G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)).$$

Portanto, pelo teorema anterior, concluímos que $G_{n+1}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) = 0$. □

Com isso, nós computamos todos os $G_{n+1}(M(B, n))$, para $n \geq 3$, onde B é um grupo abeliano finitamente gerado tal que o seu subgrupo de torção A tem ordem $2 \pmod 4$.

4.5 Cálculo do $(n+2)$-ésimo grupo de Gottlieb de espaços de Moore

Nesta seção, computamos os grupos $G_{n+2}(M(B, n))$, para $n \geq 4$, sob as mesmas condições para B como anteriormente, ou seja, B é um grupo abeliano finitamente gerado tal que o seu subgrupo de torção A tem ordem ordem $2 \pmod 4$. Primeiramente, recordamos do Corolário 4.13 que $G_{n+2}(M(\mathbb{Z}_2, n)) = 0$, para $n \geq 2$ e que de [20, Chapter V] temos $\pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2\{\eta_n^2\}$ para $n \geq 2$. Além do mais, por [8, (1.16)],

$$\sharp[\iota_n, \eta_n^2] = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com isso, de maneira semelhante às Proposições 4.23 e 4.24, da seção anterior, podemos obter os seguintes resultados:

Proposição 4.31. *Seja* $n \geq 4$*. Então:*

1. $G_{n+2}(M(\mathbb{Z}^t \oplus \mathbb{Z}_2, n)) = 0$, *para* $t > 1$.

2. $G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)) \subseteq j_{1*}G_{n+2}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\{j_1\eta_n^2\}, & \textit{se } n \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$

Proposição 4.32. *Seja A um grupo abeliano finito com $|A| \equiv 2 \pmod 4$. Para $n \geq 4$, temos:*

1. $G_{n+2}(M(A, n)) = 0$.

2. $G_{n+2}(M(\mathbb{Z}^t \oplus A, n)) = 0$ *para* $t > 1$.

3. $G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) \subseteq j_{1*}G_{n+2}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\{j_1\eta_n^2\}, & \textit{se } n \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$

Agora vamos mostrar que o grupo dado na Proposição 4.31(2) também é um grupo trivial e para isso iremos usar as mesmas técnicas usadas para obter a Proposição 4.23(2). Mas, antes, precisamos fornecer e obter alguns resultados importantes.

Compilando os resultados dos [13, Lemma 3.7] e [16, Lemma 2.1], obtemos:

Lema 4.33. *1.* $[M^5, M^3] = \mathbb{Z}_2\{i_3\eta_2\overline{\eta}_3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\widetilde{\eta}_2\eta_4 p_5\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\tau p_5\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\overline{\Sigma\lambda}_2\widetilde{\eta}_3 p_5\}$

2. $[M^6, M^4] = \mathbb{Z}_2\{i_4\eta_3\overline{\eta}_4\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\widetilde{\eta}_3\eta_5 p_6\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\delta p_6\}$

3. $[M^7, M^5] = \mathbb{Z}_2\{i_5\eta_4\overline{\eta}_5\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\widetilde{\eta}_4\eta_6 p_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i_5\nu_4 p_7\}$

Para $n \geq 6$, temos o seguinte:

Lema 4.34. $[M^{n+2}, M^n] = \mathbb{Z}_2\{i_n\eta_{n-1}\overline{\eta}_n\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\widetilde{\eta}_{n-1}\eta_{n+1}p_{n+2}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i_n\nu_{n-1}p_{n+2}\}$, *para todo* $n \geq 6$.

Demonstração. Fazendo uso da sequência de cofibra

$$S^{n+1} \xrightarrow{i_{n+2}} M^{n+2} \xrightarrow{p_{n+2}} S^{n+2} ,$$

pelo Corolário 2.45 com $Z = M^n$, obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \pi_{n+2}(M^n) \xrightarrow{p_{n+2}^*} [M^{n+2}, M^n] \xrightarrow{i_{n+2}^*} 2\pi_{n+1}(M^n) \longrightarrow 0 ,$$

para todo $n \geq 6$.

Por [8, Lemma 1.27], temos que $\pi_{n+2}(M^n) = \mathbb{Z}_2\{\widetilde{\eta}_{n-1}\eta_{n+1}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i_n\nu_{n-1}\}$, para todo $n \geq 6$. Sabemos também que $\pi_{n+1}(M^n) = \mathbb{Z}_4\{\widetilde{\eta}_{n-1}\}$, para $n \geqslant 6$. Logo, a sequência exata acima fica da seguinte forma:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2\{\widetilde{\eta}_{n-1}\eta_{n+1}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i_n\nu_{n-1}\} \xrightarrow{p_{n+2}^*} [M^{n+2}, M^n] \xrightarrow{i_{n+2}^*} \mathbb{Z}_2\{2\widetilde{\eta}_{n-1}\} \longrightarrow 0 ,$$

para todo $n \geq 6$.

Definimos $\theta\colon \mathbb{Z}_2\{2\widetilde{\eta}_{n-1}\} \to [M^{n+2}, M^n]$ no gerador por $\theta(2\widetilde{\eta}_{n-1}) = i_n\eta_{n-1}\overline{\eta}_n$. Assim, $(i^*_{n+2}\theta)(2\widetilde{\eta}_{n-1}) = i_n\eta_{n-1}\overline{\eta}_n i_{n+2}$. Por (4.3) e (4.6), obtemos $(i^*_{n+2}\theta)(2\widetilde{\eta}_{n-1}) = 2\widetilde{\eta}_{n-1}$ e portanto $i^*_{n+2}\theta = \iota_{\mathbb{Z}_2\{2\widetilde{\eta}_{n-1}\}}$. Logo, a sequência exata acima splita e assim o resultado segue. □

Observação 4.35. Dos Lemas 4.33 e 4.34 concluímos que o homomorfismo suspensão $\Sigma\colon [M^{n+2}, M^n] \to [M^{n+3}, M^{n+1}]$ é um isomorfismo, para $n \geq 5$.

Seja ν' o gerador da componente 2-primária $\mathbb{Z}_4$ de $\pi_6(S^3)$, $\pi^3_6 = \mathbb{Z}_4\{\nu'\}$ (ver [19, Proposition 5.6]) e ν_4 (aplicação de Hopf) gerador da parte livre $\mathbb{Z}$ de $\pi_7(S^4)$. De [16, (2.1) e (2.2)], temos que $\Sigma\nu'$ é gerador da componente 2-primária $\mathbb{Z}_4$ de $\pi_7(S^4)$ e valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&\pi_6(M^4) = \mathbb{Z}_4\{\delta\} \oplus \mathbb{Z}_4\{\widetilde{\eta}_3\eta_5\}, && 2\delta = i_4\nu', \\
&\pi_7(M^5) = \mathbb{Z}_4\{i_5\nu_4\} \oplus \mathbb{Z}_4\{\widetilde{\eta}_4\eta_6\}, && \Sigma\delta = 2(i_5\nu_4) \in \pi_7(M^5), \\
&[\iota_{M^4}, i_4] = \delta p_6, && \pm\nu' = \overline{\eta}_3\widetilde{\eta}_4.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Do Lema 4.27 temos que $\iota_{M^2} \wedge \eta_2 = i_4\overline{\eta}_3 + \widetilde{\eta}_3 p_5$. Para $\iota_{M^2} \wedge \eta_2^2$ temos o seguinte:

Lema 4.36. $\iota_{M^2} \wedge \eta_2^2 = i_4\eta_3\overline{\eta}_4 + \widetilde{\eta}_3\eta_5 p_6$.

Demonstração. $\iota_{M^2} \wedge \eta_2^2 = \iota_{M^2} \wedge (\eta_2\eta_3) = (\iota_{M^2} \wedge \eta_2)(\iota_{M^2} \wedge \eta_3) = (\iota_{M^2} \wedge \eta_2)(\Sigma(\iota_{M^2} \wedge \eta_2)) = (i_4\overline{\eta}_3 + \widetilde{\eta}_3 p_5)(\Sigma(\iota_{M^2} \wedge \eta_2)) = (i_4\overline{\eta}_3)(\Sigma(\iota_{M^2} \wedge \eta_2)) + (\widetilde{\eta}_3 p_5)(\Sigma(\iota_{M^2} \wedge \eta_2)) = (i_4\overline{\eta}_3)(i_5\overline{\eta}_4 + \widetilde{\eta}_4 p_6) + (\widetilde{\eta}_3 p_5)(i_5\overline{\eta}_4 + \widetilde{\eta}_4 p_6) = i_4\overline{\eta}_3 i_5\overline{\eta}_4 + i_4\overline{\eta}_3\widetilde{\eta}_4 p_6 + \widetilde{\eta}_3 p_5 i_5\overline{\eta}_4 + \widetilde{\eta}_3 p_5\widetilde{\eta}_4 p_6 = i_4\overline{\eta}_3 i_5\overline{\eta}_4 + i_4\overline{\eta}_3\widetilde{\eta}_4 p_6 + \widetilde{\eta}_3 p_5\widetilde{\eta}_4 p_6$, uma vez que $i_5^* p_5^* = 0$.

De (4.2), (4.5) e (4.9), obtemos:

$$\iota_{M^2} \wedge \eta_2^2 = i_4\eta_3\overline{\eta}_4 + i_4(\pm\nu')p_6 + \widetilde{\eta}_3\eta_5 p_6 = i_4\eta_3\overline{\eta}_4 \pm i_4\nu' p_6 + \widetilde{\eta}_3\eta_5 p_6$$

$$M^6 \xrightarrow{p_6} S^6 \xrightarrow{\nu'} S^3 \xrightarrow{i_4} M^4$$

De (4.9) temos que $i_4\nu' = 2\delta$ e $[\iota_{M^4}, i_4] = \delta p_6$, então $i_4\nu' p_6 = (2\delta)p_6 = (\delta + \delta)(\Sigma p_5) = \delta(\Sigma p_5) + \delta(\Sigma p_5) = 2(\delta p_6) = 2[\iota_{M^4}, i_4] = [\iota_{M^4}, 2i_4] = [\iota_{M^4}, 0] = 0$. Logo, o resultado segue. □

Fazendo uso dos Lemas 4.33 e 4.34 obtemos um elemento suspendido não trivial:

Lema 4.37. $\Sigma^{n-2}(\iota_{M^2} \wedge \eta_2^2) = i_{n+2}\eta_{n+1}\overline{\eta}_{n+2} + \widetilde{\eta}_{n+1}\eta_{n+3}p_{n+4} \neq 0$*, para* $n \geq 2$.

Sabemos da Proposição 4.31(2) que, para $n \geqslant 4$:

$$G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)) \subseteq j_{1*}G_{n+2}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2\{j_1\eta_n^2\}, & \text{se } n \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para os casos que $j_{1*}G_{n+2}(S^n)$ não são triviais, temos que $j_1\eta_n^2 \in G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n))$ se, e somente se, $[j_1\eta_n^2, j_1] = 0 = [j_1\eta_n^2, j_2]$, onde $j_1\colon S^n \hookrightarrow M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)$ e

$j_2\colon M(\mathbb{Z}_2, n) \hookrightarrow M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)$ são as aplicações inclusões. Agora $[j_1\eta_n^2, j_1] = j_1([\eta_n^2, \iota_n]) = 0$, pois $G_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2\{\eta_n^2\}$, logo $j_1\eta_n^2 \in G_{n+2}(M(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, n))$ se, e somente se, $[j_1\eta_n^2, j_2] = 0$.

Para estudar o produto $[j_1\eta_n^2, j_2]$, vamos usar novamente a Proposição 4.21 e a Observação 4.22, daí temos:

$$\begin{aligned}[j_2, j_1\eta_n^2] &= [j_2, j_1] \circ (\iota_{M(\mathbb{Z}_2,n-1)} \wedge \eta_n^2) + \sum_{k=2}^{\infty} [[j_2, j_1^k] \circ (\iota_{M(\mathbb{Z}_2,n-1)} \wedge h_k(\eta_n^2)) \\ &= [j_2, j_1] \circ (\iota_{M(\mathbb{Z}_2,n-1)} \wedge \eta_n^2).\end{aligned} \tag{4.10}$$

O principal resultado desta seção vem agora:

Teorema 4.38. *Seja $n \geq 4$. Então, $G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)) = 0$.*

Demonstração. $\iota_{M(\mathbb{Z}_2,n-1)} \wedge \eta_n^2 = \Sigma^{n-2}\iota_{M^2} \wedge \Sigma^{n-2}\eta_2^2 = \Sigma^{2(n-2)}(\iota_{M^2} \wedge \eta_2^2)$ e consequentemente, do lema anterior, $\iota_{M(\mathbb{Z}_2,n-1)} \wedge \eta_n^2 \neq 0$, para todo $n \geq 2$. Daí, por (4.10), segue que $[j_2, j_1\eta_n^2] \neq 0$, para todo $n \geq 3$. Portanto, $j_1\eta_n^2 \notin G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n))$ para todo $n \geq 4$ e o resultado segue. □

Corolário 4.39. *Seja A um grupo abeliano finito com ordem $|A| \equiv 2 \pmod 4$. Então $G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) = 0$, para $n \geq 4$.*

Demonstração. Pelos Corolários 3.90 e 3.87 temos

$$G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) \subseteq j_{1*}G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus A_2, n)) \bigoplus_{i=2}^{t} j_{i*}G_{n+1}(M(A_{p_i}, n)),$$

onde $A = \bigoplus_{i=1}^{t} A_{p_i}$ é a decomposição primária do grupo A e $p_1 = 2$. Além disso, como $G_{n+2}(M(A_{p_i}, n)) = 0$ para $p_i > 2$ com $n \geq 4$ e $A_2 \approx \mathbb{Z}_2$ para $|A| \equiv 2 \pmod 4$, segue que

$$G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) \subseteq G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus A_2, n)) \approx G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, n)).$$

Portanto, pelo teorema anterior, concluímos que $G_{n+2}(M(\mathbb{Z} \oplus A, n)) = 0$. □

Assim, terminamos todos os cálculos dos $G_{n+2}(M(B, n))$, $n \geq 4$, para os grupos B abelianos finitamente gerados tais que o seu subgrupo de torção A (parte de torção de B) tem ordem $2 \pmod 4$.

4.6 Cálculo do grupo de Gottlieb de bouquet infinito de esferas

Em vista de [3, Corollary 3.6], derivado de [3, Theorem 3.4], $G_N(S^m \vee S^n) = 0$ com $2 \leq m \leq n$ e $N < 2m - 1$. Aplicando a Proposição 3.72, pode-se fornecer uma versão generalizada de [3, Theorem 3.4] que conduz para uma versão generalizada de [3, Corollary 3.6]: $G_N(S^{n_1} \vee \cdots \vee S^{n_k}) = 0$ para $N < 2\min\{n_i\}_{i=1}^{k} - 1$ e $n_t \geq 2$, conforme a Proposição 3.83.

Nesta seção, primeiro computamos $G_N(\bigvee_{t\in T} S^{n_t})$ com $|T| \geq 2$ e $n_t \geq 2$ para $t \in T$ e $N < 2\min\{n_t\}_{t\in T} - 1$. Depois, fazendo uso de [9] e [10] estudamos $G_N(\bigvee_{s\in S} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t})$ com $|S| \geq 1$, $|T| \geq 1$ e $n_t \geq 2$ para $t \in T$ e $N < 2\min\{n_t\}_{t\in T} - 1$.

O resultado abaixo é um generalização de [3, Corollary 3.6] para infinitas esfera:

Proposição 4.40. *Seja T um conjunto com $|T| \geq 2$ e $n_t \geq 2$ para $t \in T$. Então $G_N(\bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = 0$ para $N < 2\min\{n_t\}_{t\in T} - 1$.*

Demonstração. Seja $\alpha = [f] \in G_N(\bigvee_{t\in T} S^{n_t})$. Como $\bigvee_{t\in T} S^{n_t}$ não é compacto mas $f(S^N)$ é compacto, existem $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ e $f' \colon S^N \to \bigvee_{i=1}^k S^{n_i} \subseteq \bigvee_{t\in T} S^{n_t}$, tal que $if' = f$, onde $i \colon \bigvee_{i=1}^k S^{n_i} \hookrightarrow \bigvee_{t\in T} S^{n_t}$ é a aplicação inclusão, em outras palavras, a imagem da f está contida somente em uma quantidade finita de esferas.

Vamos chamar de $W = \bigvee_{t\in T} S^{n_t}$ e $T = \bigvee_{i=1}^k S^{n_i}$.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "i"] \\ S^N \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

Agora, como $\alpha = [f] \in G_N(W)$, existe uma aplicação contínua $F \colon S^N \times W \to W$ tal que $F|_{S^N} = f$ e $F|_W = \iota_W$. Defina $F' \colon S^N \times T \to T$, por $pF|_{S^N \times T}$, onde $p \colon W \to T$ é a aplicação projeção.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "p"] \\ S^N \times T \arrow[ur, "F|_{S^N \vee T}"] \arrow[r, "F'"'] & T \end{tikzcd}$$

Logo, $F'|_{S^N} = pf = f'$ e $F'|_T = \iota_T$, e portanto $f' \in G_N(T)$. Porém, pela Proposição 3.83, temos que $G_N(T) = 0$, logo $f' = 0$, e então $f = if' = 0$. Portanto, $G_N(\bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = 0$. □

Uma vez computado $G_N(\bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = 0$ para $N < 2\min\{n_t\}_{t\in T} - 1$, surge uma pergunta natural: “O que acontece se algum n_t for igual a 1, ou ainda mais, se uma quantidade finita ou infinita de n_t's forem iguais a 1?”. Para essa discussão, vamos começar com $N = 1$, para isso precisamos:

Teorema 4.41 ([9, Theorem IV.1])**.** *Suponha que X tenha o mesmo tipo de homotopia de um poliedro conexo e compacto. Então, $G_1(X) = 0$ se a característica de Euler-Poincaré $\chi(X) \neq 0$.*

Como $\chi(S^1 \vee S^n) = (-1)^n$ para $n \geq 1$ e $\chi(\bigvee_{i=1}^k S^1) = 1 - k$, deduzimos do Teorema 4.41 que

$$G_1(S^1 \vee S^n) = 0 \tag{4.11}$$

para $n \geq 1$ e

$$G_1(\bigvee_{i=1}^k S^1) = 0 \tag{4.12}$$

para $k \geq 2$.

Além do mais, aplicando (4.12) como na prova da Proposição 4.40, temos:

$$G_1(\bigvee_{t\in T} S^1) = 0 \tag{4.13}$$

para $|T| \geq 2$.

Então, podemos afirmar:

Proposição 4.42. *Se R e T são conjuntos com $|R| \geq 1$ e $|T| \geq 1$ então $G_1(\bigvee_{r\in R} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = 0$ para $n_t \geq 2$ com $t \in T$.*

Demonstração. Primeiramente, note que o caso $|R| = |T| = 1$ segue de (4.11).

Aplicando o Teorema de Seifert-van Kampen, temos:

- $\pi_1(S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = j_{1*}\pi_1(S^1 \vee S^{n_{t_0}}) * j_{2*}\pi_1(\bigvee_{t\in T\setminus\{t_0\}} S^{n_t}) = j_{1*}\pi_1(S^1 \vee S^{n_{t_0}})$ com $|T| \geq 2$ para a aplicação inclusão $j_1\colon S^1 \vee S^{n_{t_0}} \hookrightarrow S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}$ e $j_2\colon \bigvee_{t\in T\setminus\{t_0\}} S^{n_t} \hookrightarrow S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}$.

- $\pi_1(\bigvee_{r\in R} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = j_{1*}\pi_1(\bigvee_{r\in R} S^1) * j_{2*}\pi_1(\bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = j_{1*}\pi_1(\bigvee_{r\in R} S^1)$ com $|R| \geq 2$ para a aplicação inclusão $j_1\colon \bigvee_{r\in R} S^1 \hookrightarrow \bigvee_{r\in R} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}$ e $j_2\colon \bigvee_{t\in T} S^{n_t} \hookrightarrow \bigvee_{r\in R} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}$.

Agora, da Proposição 3.88 e equações (4.11) e (4.13) segue que

$$G_1(S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}) \subseteq G_1(S^1 \vee S^{n_{t_0}}) = 0$$

e

$$G_1(\bigvee_{r\in R} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}) \subseteq G_1(\bigvee_{r\in R} S^1) = 0$$

com $|R| \geq 2$ e a prova segue. □

Para estender essa discussão precisamos de um resultado de [10]:

Teorema 4.43 ([10, Theorem 6-1 and 6-2])**.** *Seja $p\colon \widetilde{X} \to X$ uma aplicação de recobrimento. Se $n \geq 1$, então $p_*^{-1}(G_n(X)) \subseteq G_n(\widetilde{X})$. Consequentemente, para $n \geq 2$, se identificarmos $\pi_n(X)$ com $\pi_n(\widetilde{X})$ sob o isomorfismo p_*, então $G_n(X) \subseteq G_n(\widetilde{X})$.*

Agora, considere o espaço $X = \bigvee_{r\in R} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}$ com $|R| \geq 1$, $|T| \geq 1$ e $n_t \geq 2$ para $t \in T$. Então, pelo Teorema de Seifert-van Kampen, $\pi_1(X) = \pi_1(\bigvee_{r\in R} S^1)$ e então o espaço

$$\tilde{X} = \bigvee_{g\in\pi_1(\bigvee_{r\in R} S^1)} \left(\bigvee_{t\in T} S^{n_t}\right)$$

é uma cobertura universal de X.

Portanto, Proposição 4.40, Proposição 4.42 e Teorema 4.43 nos conduz para o principal resultado desta seção:

Teorema 4.44. *1. Se $|R| \geq 1$ então $G_N(\bigvee_{r\in R} S^1 \vee S^n) = 0$ para $N \leq 2n - 1$.*

2. *Se* $|R| \geq 1$ *e* $|T| \geq 2$ *então* $G_N(\bigvee_{r\in R} S^1 \vee \bigvee_{t\in T} S^{n_t}) = 0$ *para* $N < 2\min\{n_t\}_{t\in T} - 1$.

Demonstração. 1. Se $N = 1$, o resultado segue da Proposição 4.42. Se $N \geq 2$, segue da Proposição 4.40, que $G_N(\tilde{X}) = 0$ para $N \leq 2n - 1$, onde $\tilde{X} = \bigvee_{g\in\pi_1(\bigvee_{r\in R} S^1)} S^n$ e do Teorema 4.43 segue o resultado.

2. Se $N = 1$, o resultado segue da Proposição 4.42. Se $N \geq 2$, segue da Proposição 4.40, que $G_N(\tilde{X}) = 0$ para $N < 2\min\{n_t\}_{t\in T} - 1$, onde $\tilde{X} = \bigvee_{g\in\pi_1(\bigvee_{r\in R} S^1)} \left(\bigvee_{t\in T} S^{n_t}\right)$ e do Teorema 4.43 segue o resultado. □

Referências

[1] Martin Arkowitz. The generalized Whitehead product. *Pacific J. Math*, 12:7–23, 1962.

[2] Martin Arkowitz. *Introduction to Homotopy Theory.* Springer, Cambridge, 1 edition, 2011.

[3] Martin Arkowitz and Ken-ichi Maruyama. The Gottlieb group of a wedge of suspensions. *The Mathematical Society of Japan*, 66:735–743, 2014.

[4] William D. Barcus and Michael G. Barratt. On the homotopy classification of the extensions of a fixed map. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:57–74, 1958.

[5] Hans Joachim Baues. *Commutator calculus and groups of homotopy classes*, volume 50 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981.

[6] László Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. I.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 36. Academic Press, New York-London, 1970.

[7] Marek Golasiński, Thiago de Melo, and Rodrigo Bononi. On Gottlieb groups $G_{n+k}(M(\mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_2, n))$ for $k = 1, 2$, 2023. (preprint).

[8] Marek Golasiński and Juno Mukai. *Gottlieb and Whitehead Center Groups of Spheres, Projective and Moore Space.* Springer, 1 edition, 2014.

[9] Daniel H. Gottlieb. A certain subgroup of the fundamental group. *American Journal of Mathematics*, 87:840–856, 1965.

[10] Daniel H. Gottlieb. Evaluation subgroups of homotopy groups. *American Journal of Mathematics*, 91:729–756, 1969.

[11] Peter J. Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. *J. London Math. Soc.*, 30, 1955.

[12] Peter J. Hilton. *Homotopy theory and duality.* Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1965.

[13] Tomohisa Inoue, Toshiyuki Miyauchi, and Juno Mukai. Self-homotopy of a suspension of the real 5-projective space. *JP J. Geom. Topol.*, 12(2):111–158, 2012.

[14] Juno Mukai. Some homotopy groups of the double suspension of the real projective space $\mathbf{R}P^6$. volume 13, pages 235–249. 1997. 10th Brazilian Topology Meeting (São Carlos, 1996).

[15] Juno Mukai. Self-homotopy of a suspension of the real 4-projective space. In *Groups of homotopy self-equivalences and related topics (Gargnano, 1999)*, volume 274 of *Contemp. Math.*, pages 241–255. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[16] Juno Mukai. The suspension order of the real even dimensional projective space. *J. Math. Kyoto Univ.*, 43(4):755–769, 2004.

[17] Kunio Murasugi. The center of a group with a single defining relation. *Math. Ann.*, 155:246–251, 1964.

[18] John W. Rutter. A homotopy classification of maps into an induced fibre space. *Topology*, 6:379–403, 1967.

[19] Hirosi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of Mathematics Studies, No. 49. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[20] Hirosi Toda. Order of the identity class of a suspension space. *Ann. of Math. (2)*, 78:300–325, 1963.

[21] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.