

unesp  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RAFAEL SILVA BRANDÃO DOS SANTOS

FORMATO DIFERENCIADO DE ALETA

Guaratinguetá
2013

RAFAEL SILVA BRANDÃO DOS SANTOS

FORMATO DIFERENCIADO DE ALETA

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Júlio Santana Antunes

Guaratinguetá
2013

Santos, Rafael Silva Brandão dos
S237f Formato diferenciado de aleta / Rafael Silva Brandão dos Santos –
Guaratinguetá : [s.n], 2012.
44 f : il.
Bibliografia: f. 44

Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012.
Orientador: Prof. Dr. Júlio Santana Antunes

1. Calor – Transmissão 2. Calor – Condução I. Título

CDU 536.24

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

FORMATO DIFERENCIADO DE ALETA

RAFAEL SILVA BRANDÃO DOS SANTOS

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO
COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADO EM ENGENHARIA MECÂNICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO
DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Antonio Wagner Forti
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. JÚLIO SANTANA ANTUNES
Orientador/UNESP-FEG

Prof. Dr. PEDRO MAGALHÃES SOBRINHO
UNESP-FEG

Prof. Dr. CELSO EDUARDO TUNA
UNESP-FEG

Guaratinguetá
Fevereiro de 2013

DADOS CURRICULARES

RAFAEL SILVA BRANDÃO DOS SANTOS

NASCIMENTO	23.11.1989 – SÃO PAULO / SP
FILIAÇÃO	Joaquim Brandão dos Santos Geozenira Domingas da Silva
2008/2013	Curso de Graduação Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista

dedicado aos meus pais, aos meus familiares e amigos, professores e auxiliares que me proporcionaram, cada um a sua maneira, formas diferentes de pensar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, aos meus familiares e amigos, considero essencial agradecer ao professor orientador deste trabalho pela paciência com o autor. Agradeço aos colaboradores da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá pelo auxílio prestado.

Obrigado.

SANTOS, R. S. B. **Formato diferenciado de Aleta**. 2013. 44f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia de Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013.

RESUMO

Aletas são uma maneira de melhorar a troca de calor, elas ampliam as superfícies em contato com o fluido do meio. Além de muito utilizadas nas indústrias, essas superfícies estendidas aparecem em vários formatos e podem ser comparadas quanto as suas eficiências de maneira a selecionar a mais rentável. Este trabalho propõe um novo perfil de aleta de modo a aumentar o perímetro da área da base, o perfil levantado é de área transversal constante e também é comparado a outros tipos. Aqui são mostradas as deduções das equações para esse novo elemento, e através do perímetro calculado e gráficos os resultados são confrontados

Palavras-chave: Aleta. Perímetro. Troca de calor

SANTOS, R. S. B. **Formatdifferentiated fin**.2013. 44f. GraduateWork (Graduate in MechanicalEngineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013.

ABSTRACT

Fins are a way to improve heat exchange, they increase the surface area in contact with the fluid medium. Besides widely used in industries, such extended surfaces appear in various formats and can be compared for their efficiencies in order to select the most profitable. This work proposes a new profile of fin so as to increase the perimeter of the base. The raised profile cross sectional area is constant and is also compared to other types. Here are shown the deductions of equations for this new element, and through the perimeter and graphs calculated results are compared

Key-words:Fin. Perimeter. Heat exchange

LISTA DE SÍMBOLOS

A_s	Área Superficial
A_T	Área do perfil circular modificado
A_{tr}	Área transversal da aleta
C_1	Uma constante qualquer
C_2	Uma constante qualquer
C_3	Uma constante qualquer
C_4	Uma constante qualquer
dq_{conv}	Calor que sai do elemento diferencial por convecção
h	Coeficiente de convecção
k	Condutividade térmica
K	Uma constante que equivale a razão entre A_T e P^2
M	Parte da expressão da taxa de transferência de calor
m	Parte da expressão da taxa de transferência de calor
N	Número de circunferências menores
P	Perímetro
q_f	Taxa de transferência de calor da aleta
q_x	Calor que entra no elemento diferencial por condução
q_{x+dx}	Calor que sai do elemento diferencial
r	Raio da circunferência menor
R	Raio da circunferência maior
S	Hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são R e r .
T	Temperatura
T	Temperatura de vizinhança

- α Ângulo formado pelos pontos da circunferência de raio r que tocam a de raio R com o centro desta última
- β Metade do ângulo α
- θ Diferença de temperatura de um ponto da aleta com a temperatura de vizinhança

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Considerações Iniciais	12
1.2	Motivação	12
1.3	Justificativa	13
1.4	Objetivo	13
2	DESENVOLVIMENTO.....	14
2.1	Sobre Aletas	14
2.2	Aplicações.....	14
2.3	Classificação de aletas	15
2.4	Equações	16
2.5	Equação para o objeto de estudo	17
2.6	Observando a equação	20
2.6.1	Função para o Caso (A).....	20
2.6.2	Função para o Caso (B).....	21
2.6.3	Função para o Caso (C).....	23
2.6.4	Função para o Caso (D).....	24
2.7	Transferência de calor e perímetro	25
2.8	Um novo perfil	26
2.8.1	Equilátero x Quadrado	26
2.8.2	Equilátero x Circular.....	27
2.8.3	Modificando o perfil circular.....	27
2.8.4	Uma manipulação matemática.....	32
3	MATERIAIS E MÉTODOS.....	34
3.1	Materiais	34
3.2	Métodos	35
3.2.1	Primeira etapa.....	35

3.2.2	Segunda etapa.....	35
3.2.3	Terceira etapa	35
3.2.4	Quarta etapa.....	35
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	36
4.1	Problema	36
4.1.1	Enunciado do Problema	36
4.1.2	Resolução do Problema.....	36
4.1.3	Resolução do Problema para o novo perfil.....	37
4.1.4	Resultados do problema.	38
4.2	Novo perfil x Circular.....	39
4.3	Novo perfil x Quadrado	40
4.4	Novo perfil x Equilátero	41
4.5	Comparação	41
5	CONCLUSÕES	42
6	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	43
7	REFERÊNCIAS.....	44

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Transferência de calor é a transição de energia térmica de um corpo quente para um corpo frio, essa transição de energia térmica também é conhecida como fluxo de calor ou troca térmica. Muitos estudos e esforços têm sido realizados para fazer proveito dessa energia em benefício da sociedade.

Desde a primeira revolução industrial o homem aprendeu a usar a fonte de calor para realizar suas tarefas, e até hoje é utilizada. Ainda temos conjunto a gás, motores, caldeiras, várias máquinas térmicas, mas em alguns momentos, queremos o contrário, queremos nos livrar de excesso de calor.

O excesso de calor pode ser prejudicial para o bom funcionamento de equipamentos, assim como também pode chegar a comprometer a estrutura do material. Para sanar este problema foram criados sistemas de lubrificação eficientes capazes manter a temperatura dos corpos em condições de operação. Em outros casos usam-se aletas.

Aletas são superfícies estendidas de um corpo com a função de aumentar a troca de calor, por convecção, com o fluido ao seu redor. Sobre seu comportamento e perfil que este trabalho está focado.

1.2 Motivação

Tendo em vista a necessidade de se remover calor de alguns equipamentos ou de aumentar a eficiência de alguns trocadores de calor por meios de aletas. Em especial

componentes eletrônicos que superaquecem e necessitam eliminar o excesso de calor sem aumentar sua área.

Tais problemas serviram como motivação em busca de perfis mais eficazes para solucionar estes obstáculos. Perfis que possam substituir em comprimento e área seu antecessor, trazendo maior eficiência.

1.3 Justificativa

Verificando-se o interesse das indústrias em reduzir o tamanho de seus produtos economizando material, mas mantendo a qualidade e robustez de suas mercadorias (este é o caso da indústria eletrônica). Este trabalho propõe um perfil de aleta que possa substituir de maneira eficiente, aletas de formato convencional (citadas mais à frente).

1.4 Objetivo

Este trabalho objetiva elaborar um perfil de aleta que apresente maior eficiência na troca de calor quando comparado com perfis convencionais de mesma área de base e comprimento, tornando a substituição de uma aleta por outra, algo conveniente.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Sobre Aletas

Segundo INCROPERA, DEWIT, BERGMAN e LAVINE (2008) o coeficiente de convecção h pode ser ampliado aumentando-se a velocidade do fluido, ou diminuindo a temperatura de vizinhança, ou até mesmo ambos, mas em algumas situações não é possível mexer nestes parâmetros devido às dificuldades técnicas dos equipamentos envolvidos, e alterar a temperatura de vizinhança pode não ser uma alternativa.

Encontra-se viabilidade em aumentar a taxa de transferência de calor que ocorre pela superfície com o aumento desta. Para fazer isso se deve estender a superfície em direção ao fluido. São estas extensões que denominamos de aletas.

2.2 Aplicações

Exemplos de aplicações de aletas são fáceis de encontrar. “São exemplos os dispositivos para resfriar o cabeçote de motores de motocicletas e de cortadores de grama, ou para resfriar transformadores de potência elétrica. Considere também os tubos aletados usados para promover a troca de calor entre o ar e o fluido de trabalho em um aparelho de ar condicionado" (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN; LAVINE, 2008).

A Figura 1 mostra a aplicação de aletas em trocadores de calor.

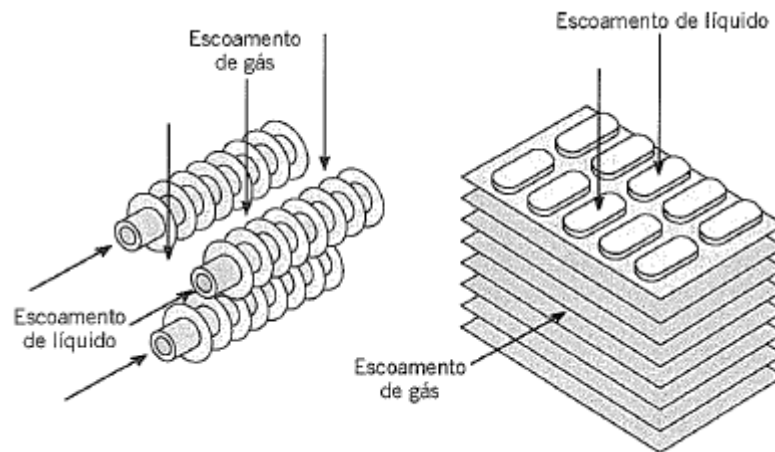


Figura 1: Esquema de trocadores de calor com tubos aletados típicos (retirado de INCROPERA; DEWITT; BERGMAN; LAVINE, 2008).

2.3 Classificação de aletas

Aleta plana: uma superfície estendida de uma parede plana, pode ter uma área transversal uniforme, ou que varia com a distância da parede.

Aleta anular: aleta fixa a um diâmetro, sua área transversal varia com o afastamento do diâmetro ao qual se encontra fixada.

Aleta piniforme (ou pino): aleta de seção transversal circular, podendo ser constante ou variar com a distância. A Figura 2 ilustra as aletas classificadas acima.

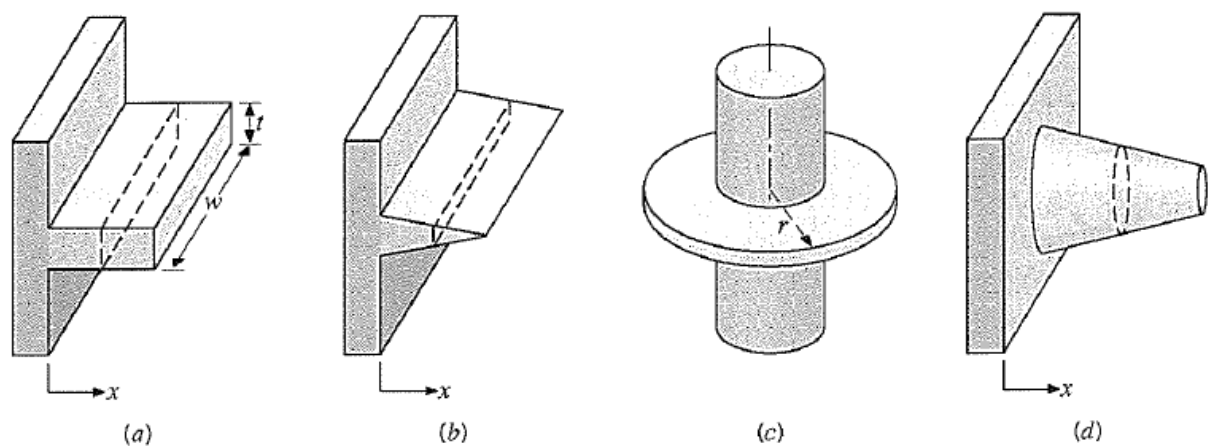


Figura 2: Configurações de aletas. (a) Aleta com seção transversal uniforme. (b) Aleta com seção transversal não-uniforme. (c) Aleta anular. (d) Aleta piniforme. (retirado de INCROPERA; DEWITT; BERGMAN; LAVINE, 2008).

2.4 Equações

Para determinar a transferência de calor da superfície estendida é necessário conhecer a distribuição de temperatura, desta forma será feito um balanço energético em um elemento diferencial (o elemento é destacado na Figura 3), considerando a distribuição unidimensional, ou seja, a aleta é fina e sua distribuição na direção normal é desprezível.

Serão levados em conta que o objeto de estudo está em regime estacionário, com coeficientes de condutividade térmica e convecção constantes ao longo da superfície.

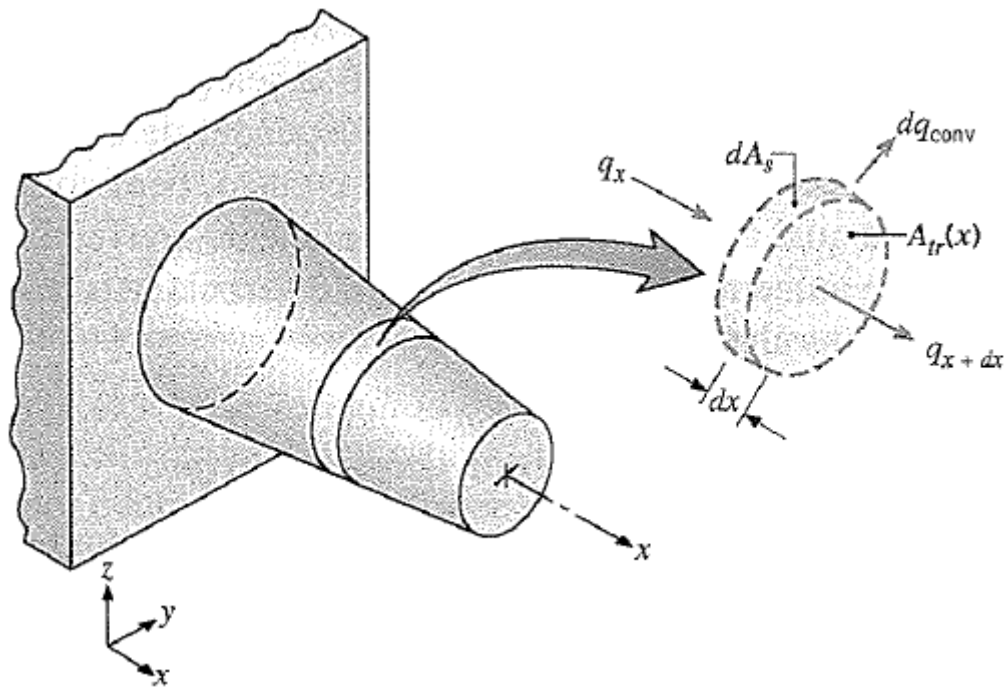


Figura 3: Balanço de energia em uma superfície estendida (retirado de INCROPERA; DEWITT; BERGMAN; LAVINE, 2008).

Aplicando balanço de energia no elemento destacado na Figura 3:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv} \quad (2.1)$$

Com a lei de Fourier $q_x = -kA_{tr} \frac{dT}{dx}$ (2.2)

Rearranjando a taxa de condução de calor $q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx$ (2.3)

Substituindo a equação 2.2 em 2.3:

$$q_{x+dx} = -kA_{tr} \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left(A_{tr} \frac{dT}{dx} \right) dx \quad (2.4)$$

A taxa de transferência de calor:

$$dq_{conv} = h dA_s (T - T_\infty) \quad (2.5)$$

Substituindo 2.2, 2.4 e 2.5 em 2.1:

$$\frac{d}{dx} \left(A_{tr} \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h dA_s}{k dx} (T - T_\infty) = 0 \quad (2.6)$$

Ou seja:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{dA_{tr}}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_{tr}} \frac{h dA_s}{k dx} \right) (T - T_\infty) = 0 \quad (2.7)$$

A equação 2.7 vai fornecer a distribuição de temperatura na aleta ao longo de x.

2.5 Equação para o objeto de estudo

O objeto de estudo deste trabalho tem uma característica que auxilia na resolução da equação 2.7 por se tratar de uma aleta de área transversal uniforme.

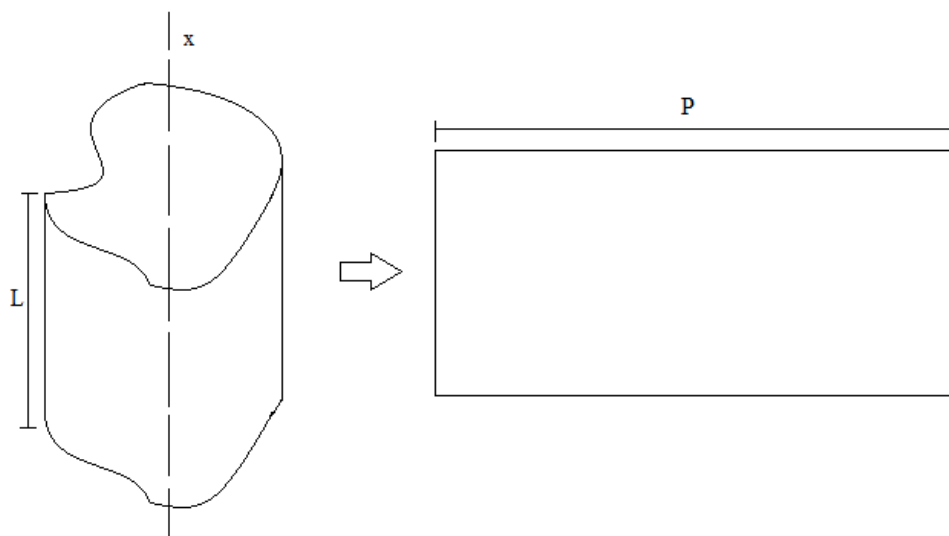


Figura 4: Aleta aberta (criado pelo próprio autor)

Observe na Figura 4 que a área superficial A_s da aleta é igual ao perímetro (P) multiplicado pelo comprimento em x, que significa: $A_s = P \cdot x$

$$\text{Logo } \frac{dA_s}{dx} = P \quad (2.8)$$

$$\text{Como a área transversal é uniforme. Então } \frac{dA_{tr}}{dx} = 0. \quad (2.9)$$

Simplificando 2.7 com 2.8 e 2.9, temos:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_{tr}}(T - T_\infty) = 0 \quad (2.10)$$

Para deixar a equação 2.10 próxima dos livros de transferência de calor, será feita uma troca de variáveis: $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ (2.11)

$$\text{Desta maneira } d^2\theta/dx^2 = d^2T/dx^2, \text{ sendo } m^2 = \frac{hP}{kA_{tr}}. \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (2.13)$$

A equação 2.13 é conhecida, trata-se de uma equação de Cauchy-Euler, com solução do tipo: $\theta = C_1e^{mx} + C_2e^{-mx}$ (2.14)

C_1 e C_2 são constantes, que podem ser determinadas com condições de contorno especificadas, para isso T_b será a temperatura da base da aleta e $\theta_b = T_b - T_\infty = \theta(0)$. (2.15)

A ponta da aleta pode ser submetida a quatro situações diferentes:

Caso (A): Convecção na ponta da aleta.

Caso (B): Ponta adiabática.

Caso (C): Ponta com temperatura definida.

Caso (D): Aleta infinita.

Exemplo do caso (A):

A Figura 5 representa a convecção no caso (A).

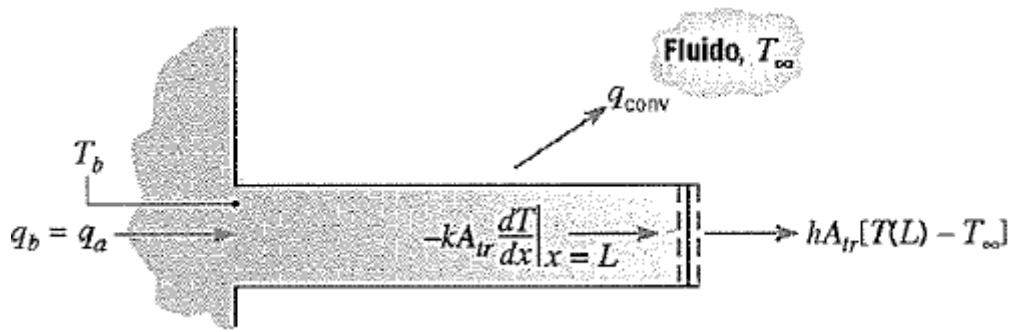


Figura 5: Condução e convecção em uma aleta de seção transversal uniforme (retirado de INCROPERA; DEWITT; BERGMAN; LAVINE, 2008).

$$\text{Logo } h\theta(L) = -k \frac{d\theta}{dx} \text{ em } x = L \quad (2.16)$$

Usando a equação 2.14: $h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = km(C_2 e^{-mL} - C_1 e^{mL})$, sendo $\theta_b = C_1 + C_2$. Temos:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh(mL) + (h/mk) \sinh(mL)} \quad (2.17)$$

O calor trocado na base da aleta (q_f): $q_f = -kA_{tr} \frac{dT}{dx} = -kA_{tr} \frac{d\theta}{dx}$ em $x=0$

$$\text{Então } q_f = \sqrt{hPkA_{tr}} \theta_b \frac{\sinh(mL) + (h/mk) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk) \sinh(mL)}$$

$$\text{Considerando } M = \sqrt{hPkA_{tr}} \theta_b \quad (2.18)$$

Fazendo o mesmo para os demais casos se obtém a Tabela 1:

Tabela 1: Distribuição de temperaturas e perda de calor para aletas de seção transversal uniforme (retirado de INCROPERA; DEWITT; BERGMAN; LAVINE, 2008).

Caso	Condições na Extremidade ($x = L$)	Distribuição de Temperaturas θ/θ_b	Taxa de Transferência de Calor da Aleta q_f
A	Transferência de calor convectiva: $h\theta(L) = -kd\theta/dx _{x=L}$	$\frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$	$M \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$
B	Adiabática: $d\theta/dx _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$	$M \tanh mL$
C	Temperatura especificada: $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$	$M \frac{(\cosh mL - \theta_L/\theta_b)}{\sinh mL}$
D	Aleta infinita ($L \rightarrow \infty$): $\theta(L) = 0$	e^{-mx}	M

2.6 Observando a equação

Para comparar aletas, deve-se compará-las sob as mesmas condições, portanto mesma área transversal, coeficiente de convecção (mesma aplicação), coeficiente de condução (mesmo material) e temperatura da base. Isso significa que se o perfil da aleta for alterado, mantendo a situação descrita, serão verificadas mudanças na taxa de transferência de calor da aleta q_f .

Retornando para as equações (2.18) e (2.12), levando em consideração as observações do parágrafo anterior, estas equações se transformam em funções, onde o perímetro (P) é a única variável:

$$m = C_1 P^{1/2} \quad (2.19)$$

$$M = C_2 P^{1/2} \quad (2.20)$$

2.6.1 Função para o Caso (A)

Fazendo uso das equações (2.19) e (2.20) a taxa q_f será em uma função do perímetro.

Reescrevendo q_f para o caso (A):

$$q_f(P) = C_2 P^{1/2} \frac{\sinh(C_3 P^{1/2}) + (C_4 P^{-1/2}) \cosh(C_3 P^{1/2})}{\cosh(C_3 P^{1/2}) + (C_4 P^{-1/2}) \sinh(C_3 P^{1/2})} \quad (2.21)$$

Onde C_1, C_2, C_3, C_4 são constantes que assumirão, sempre, valores positivos.

Fazendo o gráfico de (2.21), para diferentes valores das constantes, pode-se avaliar o comportamento da função com a variação do perímetro P.

Sendo $x = P$ e $y = q_f(P)$, a Figura 6 representa a função:

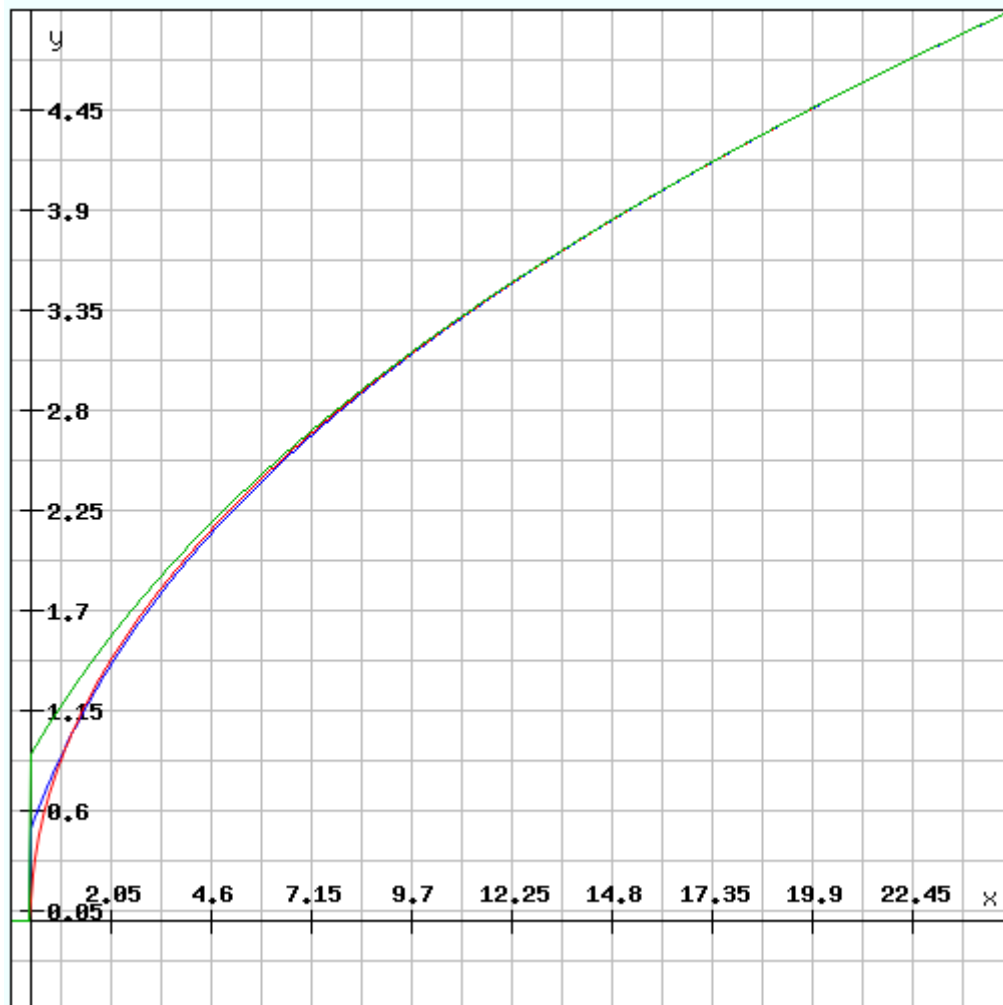


Figura 6: Transferência de calor x perímetro para o caso (A) (gráfico criado com auxílio dorechneronline.de).

2.6.2 Função para o Caso (B)

Fazendo uso das equações (2.19) e (2.20) a taxa q_f será em uma função do perímetro.

Reescrevendo q_f para o caso (B):

$$q_f(P) = C_2 P^{1/2} \tanh(C_3 P^{1/2}) \quad (2.22)$$

Onde C_1, C_2, C_3 são constantes que assumirão, sempre, valores positivos.

Fazendo o gráfico de (2.22), para diferentes valores das constantes, pode-se avaliar o comportamento da função com a variação do perímetro P .

Sendo $x = P$ e $y = q_f(P)$, a Figura 7 representa a função:

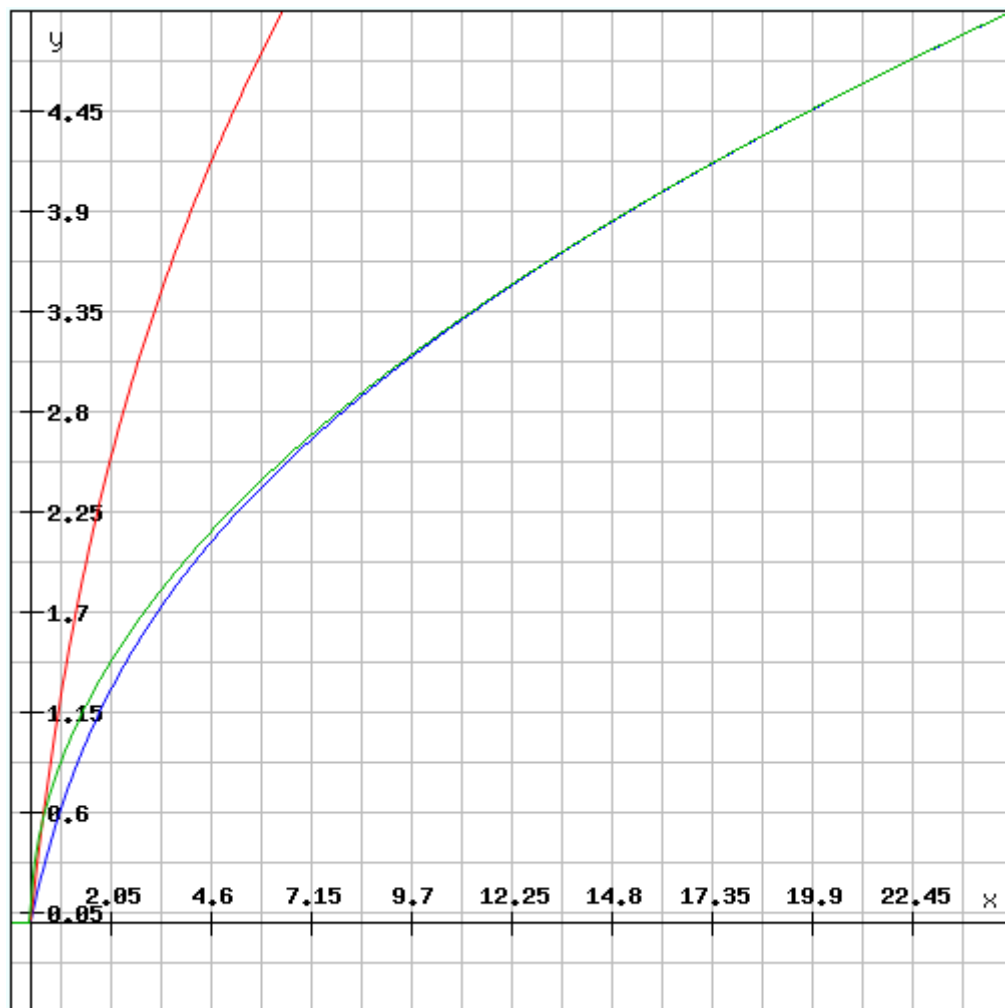


Figura 7: Transferência de calor x perímetro para o caso (B) (gráfico criado com auxílio dorechneronline.de).

2.6.3 Função para o Caso (C)

Fazendo uso das equações (2.19) e (2.20) a taxa q_f será em uma função do perímetro.

Reescrevendo q_f para o caso (C):

$$q_f(P) = C_2 P^{1/2} \frac{\cosh(C_3 P^{1/2}) - C_5}{\sinh(C_3 P^{1/2})} \quad (2.23)$$

Onde C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 são constantes que assumirão, sempre, valores positivos.

Fazendo o gráfico de (2.22), para diferentes valores das constantes, pode-se avaliar o comportamento da função com a variação do perímetro P .

Sendo $x = P$ e $y = q_f(P)$, a Figura 8 representa a função:

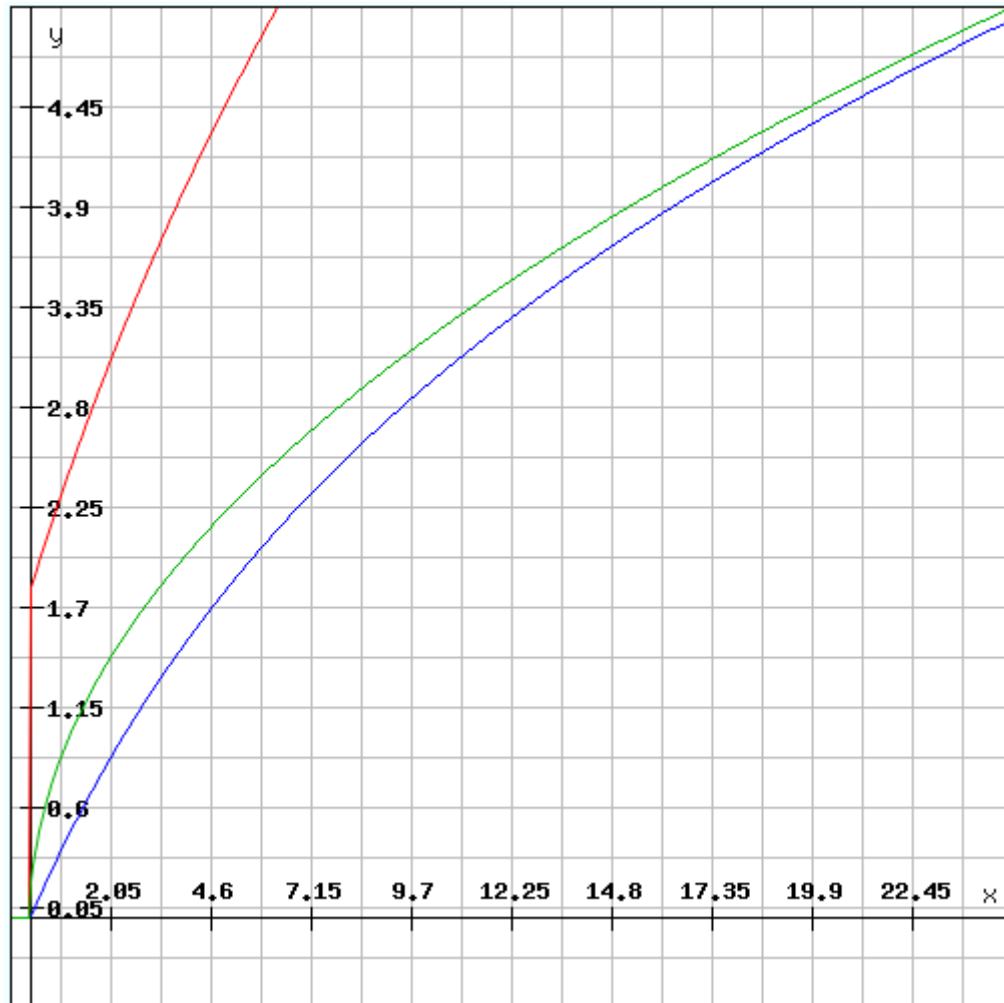


Figura 8: Transferência de calor x perímetro para o caso (C) (gráfico criado com auxílio dorechneronline.de).

2.6.4 Função para o Caso (D)

Fazendo uso das equações (2.19) e (2.20) a taxa q_f será em uma função do perímetro.

Reescrevendo q_f para o caso (D):

$$q_f(P) = C_2 P^{1/2} \quad (2.24)$$

Onde C_2 é constante que assumi, sempre, valor positivo.

Fazendo o gráfico de (2.22), para diferentes valores da constante, pode-se avaliar o comportamento da função com a variação do perímetro P.

Sendo $x = P$ e $y = q_f(P)$, a Figura 9 representa a função:

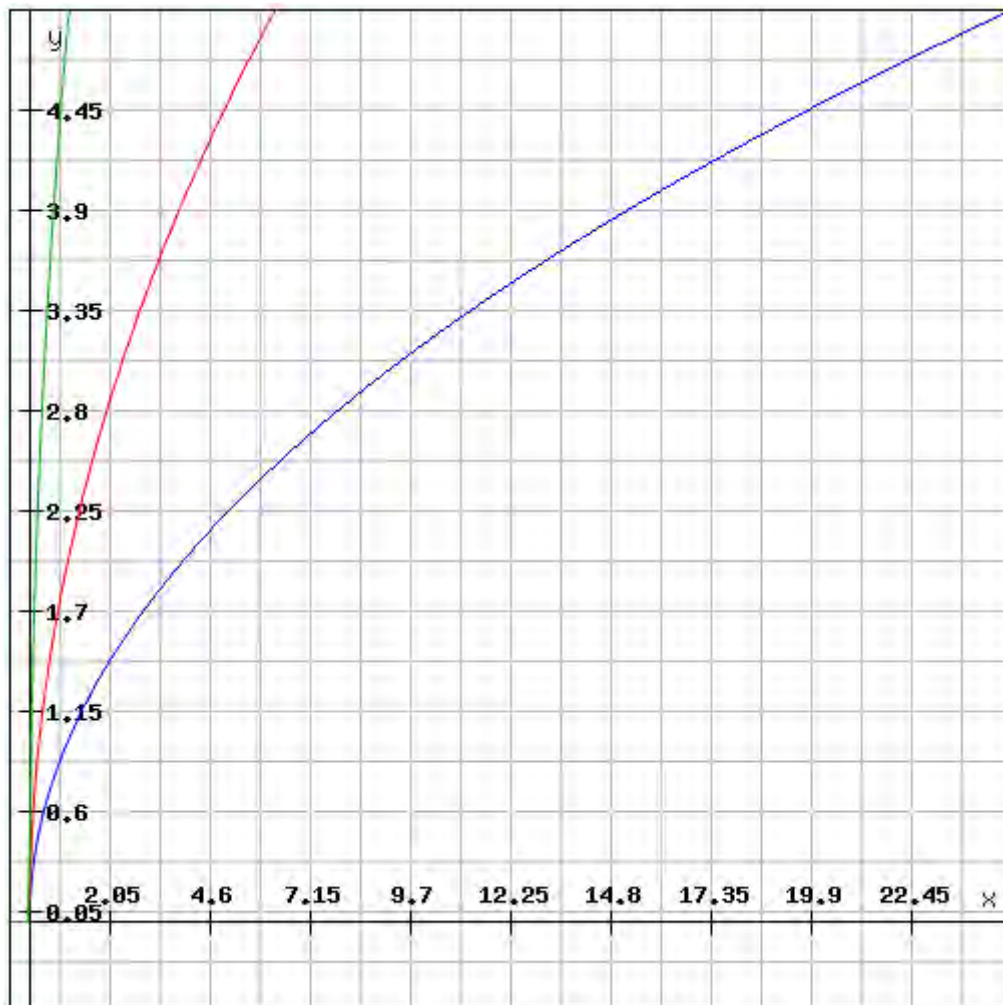


Figura 9: Transferência de calor x perímetro para o caso (D) (gráfico criado com auxílio dorechneronline.de).

2.7 Transferência de calor e perímetro

As figuras 6,7, 8 e 9 mostram o comportamento de q_f com o perímetro P , tendo sido as constantes das funções variadas para obter um melhor resultado. E nessas figuras se observa que a função cresce com o perímetro, denotando que estando duas aletas em mesmas condições e comprimento, a mais eficiente (troca mais calor) será a com maior perímetro.

Esse fato é facilmente interpretado fisicamente, quanto maior o perímetro, maior a área superficial onde ocorre a troca de calor por convecção. A partir desta informação um novo perfil deve ser elaborado.

2.8 Um novo perfil

Será comparado um perfil de aleta com área transversal no formato de um triângulo equilátero de lado l com uma quadrada de lado a e outra circular de diâmetro D , como na Figura 10.

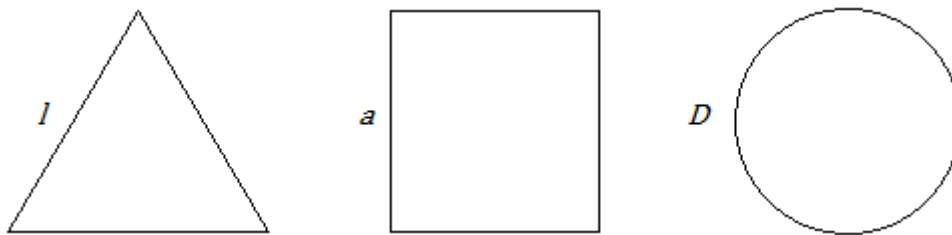


Figura 10: Formatos a serem comparados (criado pelo próprio autor).

2.8.1 Equilátero x Quadrado

Nesta parte será comparado o perfil equilátero com o quadrado, determinando qual possui maior perímetro.

As áreas são iguais: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = a^2$

Logo: $l = 1,51967a$

Mas o perímetro: $\begin{cases} P_{\text{equilátero}} = 3l = 4,55901a \\ P_{\text{quadrado}} = 4a \end{cases}$

Portanto $P_{equilátero} > P_{quadrado}$

Resumindo, o perfil equilátero é mais eficiente que o quadrado.

2.8.2 Equilátero x Circular

Nesta parte será comparado o perfil equilátero com o circular, determinando qual possui maior perímetro.

As áreas são iguais: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi D^2}{4}$

Logo: $l = 1,346774D$

Mas o perímetro: $\begin{cases} P_{equilátero} = 3l = 4,04D \\ P_{circular} = \pi D \end{cases}$

Portanto $P_{equilátero} > P_{circular}$

Resumindo, o perfil equilátero é mais eficiente que o circular.

2.8.3 Modificando o perfil circular

Além do perfil equilátero se mostrar mais eficiente, outro ainda pode ser estudado, que assume uma forma circular, rodeada por ondulações, como se juntássemos as pontas soltas de uma telha, tomando a seguinte forma:

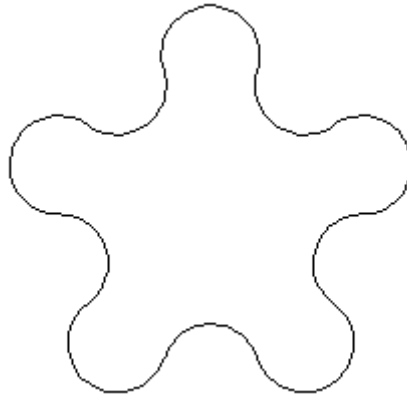


Figura 11: Formato sugerido (criado pelo próprio autor).

A Figura 11 é feita sobre uma circunferência de raio R , o raio r das circunferências menores (mostrados na Figura 12) tem uma relação com o numero de circunferências que se deseja no desenho, a próxima figura mostrará a primeira etapa de construção desse perfil.

Sendo N o numero de circunferências menores, será feita um exemplo para $N=10$:

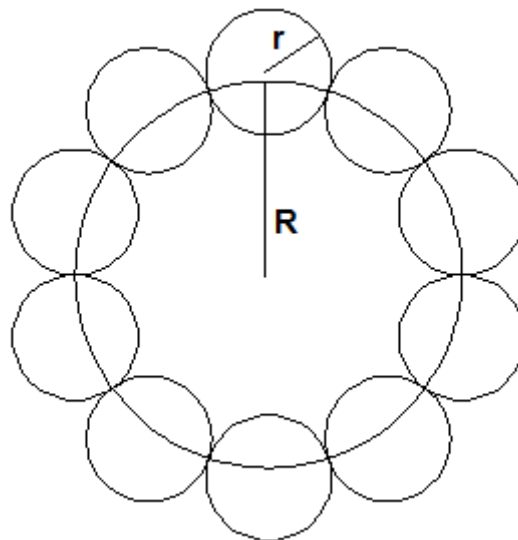


Figura 12: Primeira etapa de construção (criado pelo próprio autor).

Os dois pontos da circunferência menor que tocam a maior formam com o centro desta ultima um ângulo α de 36° , de fato $\alpha = \frac{360^\circ}{N} = \frac{360}{10} = 36^\circ$. Observe, na Figura

13, que os centros das circunferências menores não tocam a maior, mas todas se tangenciam nesta.

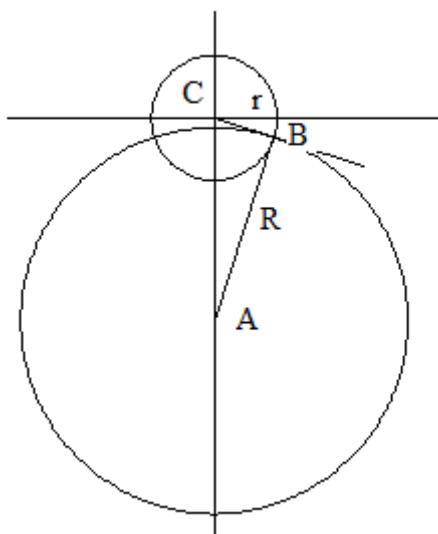


Figura 13: Circunferências em destaque (criado pelo próprio autor).

Veja que \widehat{ABC} é um ângulo reto porque é onde a reta tangência a circunferência menor e $\widehat{CAB} = \frac{\alpha}{2} = \beta = \frac{180^\circ}{N} = 18^\circ$. O triângulo ABC da Figura 14:

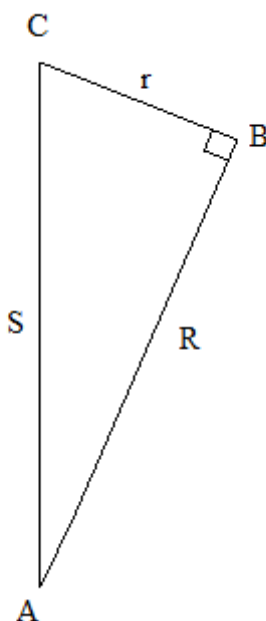


Figura 14: O triângulo ABC (criado pelo próprio autor).

Fazendo os cálculos:

$$\tan \beta = \frac{r}{R}, \text{ ou seja, } r = R \tan \beta \quad (2.25)$$

Depois de obter a forma da Figura 12, usando a circunferência maior como limite, corta-se alternadamente as circunferências menores, obtendo a Figura 15:

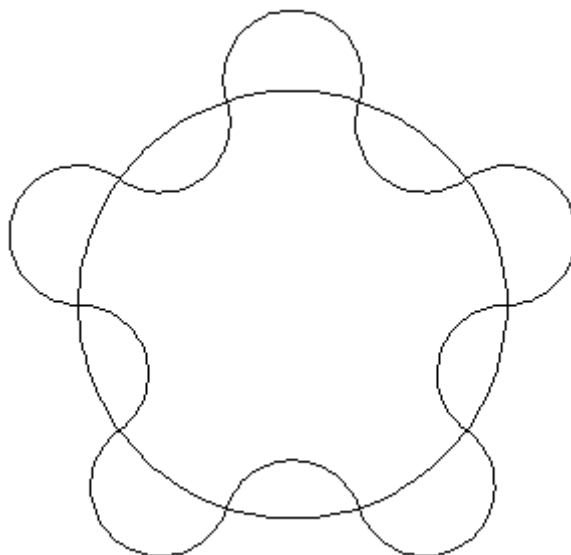


Figura 15: Etapa 2 de construção (criado pelo próprio autor).

Para calcular a área da Figura 11 uniremos os setores 1 e 2 da Figura 16:

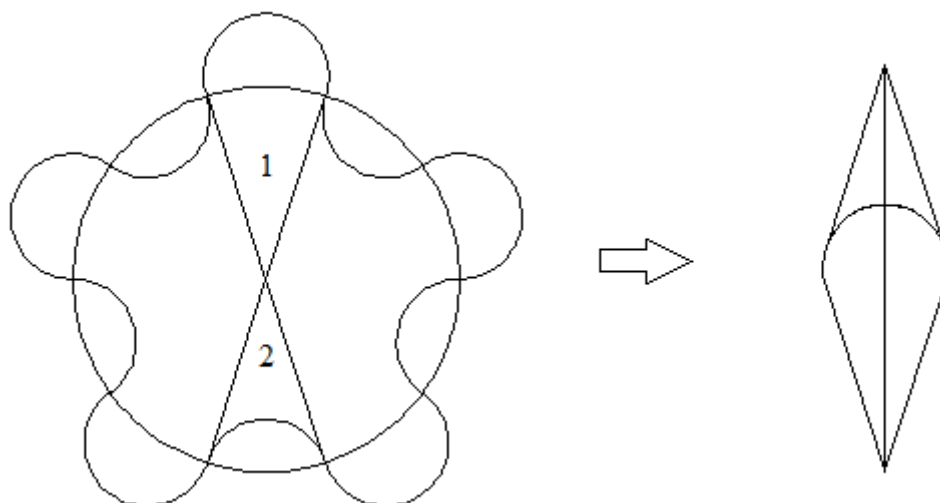


Figura 16: União dos setores 1 e 2 (criado pelo próprio autor).

Neste Caso a junção dos setores 1 e 2 dão uma área fácil de calcular existem cinco setores 2 e cinco setores 1 na Figura 15, se esta fosse composta por N circunferências menores, teríamos N/2 de cada setor e logo N/2 da união deles, sendo N um inteiro par.

Destacando a junção:

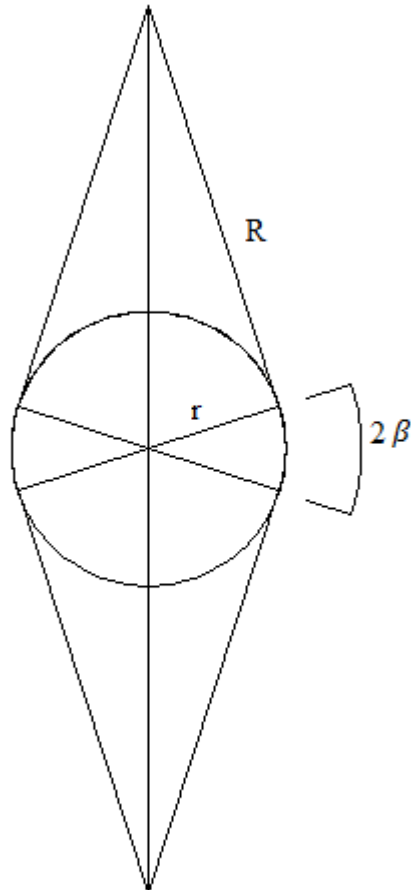


Figura 17: União dos setores 1 e 2 destacado (criado pelo próprio autor).

A Figura 17 é composta por quatro triângulos idênticos ao da Figura 14 e dois setores de ângulo 2β e raio r , então a área parcial:

$$A_{\text{Triângulo}} = \frac{Rr}{2} \text{ e } A_{\text{Setor}} = \beta r^2$$

$$A_{\text{Parcial}} = 4A_{\text{Triângulo}} + 2A_{\text{Setor}} = 2Rr + 2\beta r^2$$

Substituindo a equação 2.25:

$$A_{\text{Parcial}} = 2R^2 \tan \beta + 2R^2 \beta \tan^2 \beta = 2R^2 (\tan \beta + \beta \tan^2 \beta), \text{ com } \beta \text{ em radianos}$$

$$\text{Mas, a área total } A_T = \frac{N}{2} A_{parcial} = NR^2(\tan\beta + \beta\tan^2\beta) \quad (2.26)$$

Colocando os setores 1 e 2 lado a lado:

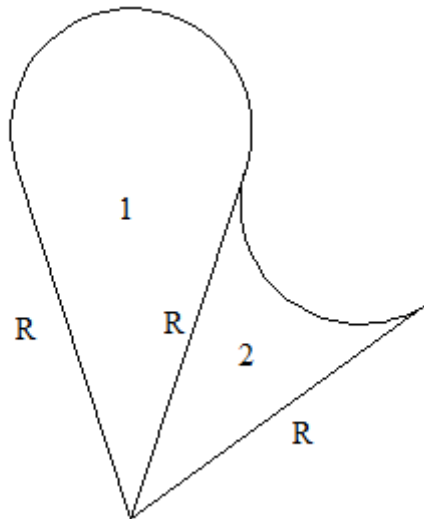


Figura 18: Setores 1 e 2 lado a lado (criado pelo próprio autor).

O perímetro exposto da Figura 18 é igual ao da circunferência menor, também se pode constatar a afirmação pela Figura 18 onde a união dos setores forma a circunferência menor, como existem $N/2$ setores 1 e 2 lado a lado.

$$\text{O perímetro } P: P = 2\pi r \frac{N}{2} = N\pi r \quad (2.27)$$

$$\text{Substituindo a equação 2.25 em 2.27: } P = N\pi R \tan\beta \quad (2.28)$$

2.8.4 Uma manipulação matemática

Deixaremos A_T em função de P , por motivos que ficarão mais claros na descrição dos métodos.

$$\text{Obtendo } P^2 \text{ pela equação 2.28: } P^2 = N^2\pi^2 R^2 \tan^2\beta \quad (2.29)$$

Dividindo-se A_T/P^2 :

$$\frac{A_T}{P^2} = \frac{NR^2}{N^2R^2\pi^2} \frac{(\tan\beta + \beta\tan^2\beta)}{\tan^2\beta}$$

Logo a equação (2.30):

$$\frac{A_T}{P^2} = \frac{1}{N\pi^2} \left(\frac{1}{\tan\beta} + \beta \right)$$

Sendo $K = \frac{A_T}{P^2} = \frac{1}{N\pi^2} \left(\frac{1}{\tan\beta} + \beta \right)$, e lembrando que β em radianos: $\beta = \pi/N$

A equação (2.30) fica $A_T = KP^2$

Chega-se em (2.31):

$$K = \frac{1}{N\pi^2} \left[\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{N}\right)} + \frac{\pi}{N} \right]$$

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Visando encontrar uma aleta com maior perímetro, o N (número de circunferências menores) deverá ser estipulado por meio de K a constante da equação (2.31), K será obtido por comparação da área transversal. Tendo o valor de N em mãos, calculam-se os parâmetros geométricos R e r do novo perfil, sabe-se que o comprimento L é o mesmo da aleta que esta sendo comparada.

3.1 Materiais

Para os cálculos será necessário o gráfico de K em função de N :

Com $x = N$ e $y = K$, se obtém a Figura 19.

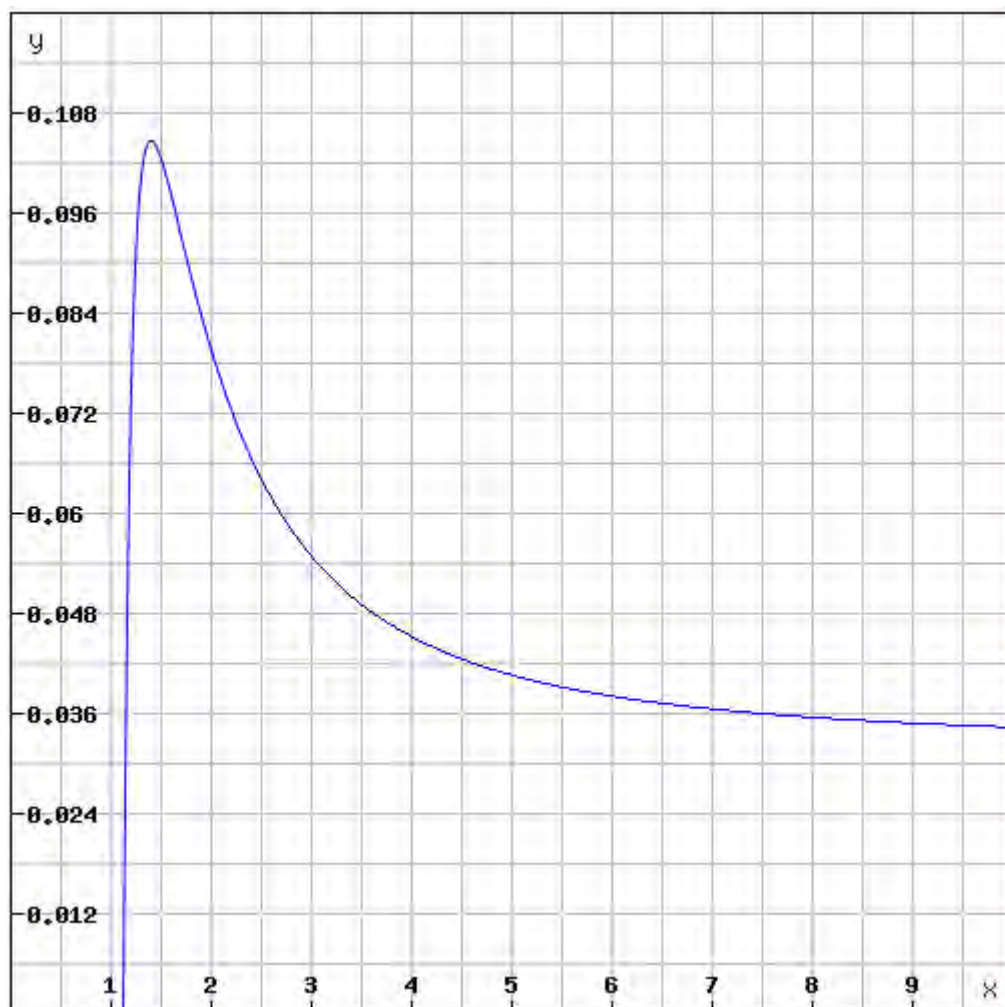


Figura 19: Gráfico de K por N (gráfico criado com auxílio do rechneronline.de).

E as equações da Tabela 1.

3.2 Métodos

Os métodos para selecionar a aleta serão descritos em etapas

3.2.1 Primeira etapa

Nesta primeira parte se deve igualar a área de base da aleta em uso com a equação de A_T (2.30), assim se obtém P em função de K .

3.2.2 Segunda etapa

Agora se compara $P(K)$, obtido na primeira etapa, com o perímetro da aleta em uso lembrando que $P(K)$ deve ser maior.

$$P(K) > P_{Aleta\ em\ uso} \quad (3.1)$$

3.2.3 Terceira etapa

De (3.1) se chega a uma condição para os valores de K , com o gráfico da Figura 19 se encontra um N , inteiro e par, que atenda a condição de K .

3.2.4 Quarta etapa

Com N conhecido se obtém os valores de $\beta = \pi/N$, e de (2.26) se retira o valor de R e por (2.28) se consegue o valor de P , r se tira pela relação trigonométrica (2.25). O raio S formado pelos centros das circunferências menores (Figura 14) é um raio para auxiliar no desenho da base da aleta e calculado por Pitágoras: $S = \sqrt{R^2 + r^2}$.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Problema

Visando mostrar a aplicação do método de substituição da aleta, será resolvido um problema.

4.1.1 Enunciado do Problema

“Uma aleta piniforme, com comprimento de 40 mm e diâmetro de 2 mm, é fabricada com uma liga de alumínio ($k=140 \text{ W/(m.K)}$).

- (a) Determine a taxa de transferência de calor na aleta para $T_b = 50^\circ\text{C}$, $T_\infty = 25^\circ\text{C}$, $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ e condição de extremidade adiabática.
- (b) Um engenheiro sugere que com a manutenção da extremidade da aleta em uma temperatura baixa a taxa de transferência de calor na aleta pode ser aumentada. Para $T(x = L) = 0^\circ\text{C}$, determine a nova taxa de transferência de calor na aleta. As outras condições são iguais as da parte (a).”

(O problema acima é o exercício 3.128 retirado de INCROPERA; DEWITT; BERGMAN; LAVINE, 2008)

4.1.2 Resolução do Problema

Neste item será iniciada a resolução do problema proposto para uma posterior comparação:

Parte (a)

$$M = \sqrt{1000 \left(\frac{W}{m^2K} \right) \times \pi \times 2 \times 10^{-3} m \times 140 \left(\frac{W}{mK} \right) \times \pi \times \frac{(2 \times 10^{-3} m)^2}{4} \times (50 - 25)^\circ C} = 1,314W$$

$$m = \sqrt{\frac{1000 \left(\frac{W}{m^2K} \right) \times \pi \times 2 \times 10^{-3} m}{140 \left(\frac{W}{mK} \right) \times \pi \times \frac{(2 \times 10^{-3} m)^2}{4}}} = 119,5m^{-1}$$

Para resolver a parte (A) deste problema usaremos as equações da Tabela1, representadas como caso B.

$$q_f = 1,314W \times \tanh(119,5m^{-1} \times 40 \times 10^{-3}m) = 1,314W$$

Parte (b)

Para resolver a parte (B) deste problema usaremos as equações da Tabela 1, representadas como caso C.

$$q_f = 1,314W \times \frac{\cosh(119,5m^{-1} \times 40 \times 10^{-3}m) - (0 - 25)^\circ C / (50 - 25)^\circ C}{\sinh(119,5m^{-1} \times 40 \times 10^{-3}m)} = 1,336W$$

4.1.3 Resolução do Problema para o novo perfil.

Primeira etapa.

$$A_T = \pi \times \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{4} = KP^2$$

Logo $P = 1,772 \times 10^{-3} \times K^{-1/2}$ em metros.

Segunda etapa.

$$P(K) > \pi(2 \times 10^{-3}), \text{ ou seja, } K < 0,0795$$

Terceira etapa.

Um valor de N que atende a condição de K, com auxílio do gráfico da Figura 19, é 4.

Quarta etapa.

$$A_T = NR^2(\tan\beta + \beta\tan^2\beta) = 2R^2 \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \pi \times 10^{-6} m^2$$

$$R = 9,38 \times 10^{-4} m$$

$$P = N\pi R \tan\beta = 4\pi \times 9,38 \times 10^{-4} m \times 1 = 0,01179 m$$

Parte (a).

$$M = \sqrt{1000 \left(\frac{W}{m^2 K}\right) \times 0,01179 m \times 140 \left(\frac{W}{m K}\right) \times \pi \times \frac{(2 \times 10^{-3} m)^2}{4} \times (50 - 25)^\circ C}$$

$$= 1,800 W$$

$$m = \sqrt{\frac{1000 \left(\frac{W}{m^2 K}\right) \times 0,01179 m}{140 \left(\frac{W}{m K}\right) \times \pi \times \frac{(2 \times 10^{-3} m)^2}{4}}} = 163,7 m^{-1}$$

Para resolver a parte (A) deste problema usaremos as equações da Tabela 1, representadas como caso B.

$$q_f = 1,800 W \times \tanh(163,7 m^{-1} \times 40 \times 10^{-3} m) = 1,800 W$$

Parte (b)

Para resolver a parte (B) deste problema usaremos as equações da Tabela 1, representadas como caso C.

$$q_f = 1,800 W \times \frac{\cosh(163,7 m^{-1} \times 40 \times 10^{-3} m) - (0 - 25)^\circ C / (50 - 25)^\circ C}{\sinh(163,7 m^{-1} \times 40 \times 10^{-3} m)}$$

$$= 1,805 W$$

4.1.4 Resultados do problema.

Em relação ao perímetro:

Tabela 2: Ganho de perímetro da área da base.

Perímetro (metros)	
Aleta de base circular	$6,283 \times 10^{-3}$
Aleta com o novo perfil	$1,179 \times 10^{-2}$
Ganho (%)	87,65

Em relação à transferência de calor:

Tabela 3: Ganho na taxa de transferência de calor.

Transferência de calor (Parte A)	
Aleta de base circular	1,314W
Aleta com o novo perfil	1,800W
Ganho (%)	36,99

Tabela 4: Ganho na taxa de transferência de calor

Transferência de calor (Parte B)	
Aleta de base circular	1,336W
Aleta com o novo perfil	1,805W
Ganho (%)	35,10

O aumento do perímetro proporcionou uma elevação da taxa de calor trocado. Para os resultados da parte A, 73 aletas com o novo perfil trocam a mesma quantidade de calor que 100 aletas de base circular. Se fosse um conjunto de aletas responsáveis pelo resfriamento de um equipamento eletrônico, a superfície aletada poderia ser reduzida proporcionando ganho de espaço.

4.2 Novo perfil x Circular

Comparação entre os dois perfis citados, tendo a circunferência um diâmetro D.

Primeira etapa.

$$A_T = \pi x \frac{D^2}{4} = KP^2$$

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\pi DK}^{-1/2}$$

Segunda etapa.

$$P(K) > \pi D, \text{ ou seja, } \frac{1}{2} \sqrt{\pi DK}^{-1/2} > \pi D$$

Portanto $K < 0,0795$ (como visto no problema 1)

Da Figura 19, qualquer $N \geq 4$ satisfaz a condição, sendo N par, aumentando a taxa de transferência de calor.

4.3 Novo perfil x Quadrado

Comparação entre os dois perfis citados, tendo o quadrado da base um lado medindo a.

Primeira etapa.

$$A_T = a^2 = KP^2$$

$$P = aK^{-1/2}$$

Segunda etapa.

$$P(K) > 4a, \text{ ou seja, } aK^{-1/2} > 4a$$

Portanto $K < 0,0625$

Da Figura 19, qualquer $N \geq 4$ satisfaz a condição, sendo N par, aumentando a taxa de transferência de calor.

4.4 Novo perfil x Equilátero

Comparação entre os dois perfis citados, tendo o triângulo equilátero lado medindo l .

Primeira etapa.

$$A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = KP^2$$

$$P = 0,658lK^{-1/2}$$

Segunda etapa.

$$P(K) > 3l, \text{ ou seja, } 0,658lK^{-1/2} > 3l$$

Portanto $K < 0,048$

Da Figura 19, qualquer $N \geq 4$ satisfaz a condição, sendo N par, aumentando a taxa de transferência de calor.

4.5 Comparação

Comparando os resultados para os valores obtidos nos itens 4.2, 4.3 e 4.4 se verifica que o perfil elaborado neste trabalho possui maior perímetro para N maior ou igual a quatro que se reflete em um aumento da taxa de transferência de calor.

5 CONCLUSÕES

Quando o número de circunferências menores for maior ou igual a 4 ($N \geq 4$) qualquer aleta comumente usada tem perímetro menor que a do novo perfil, o perímetro aumenta com a diminuição de K , a constante da equação (2.31), e este diminui com N , o que significa que quanto maior N maior será o perímetro P .

Se P pode ser ampliado com N , o problema 1 poderia fazer uso de aletas ainda mais eficazes. A vantagem da substituição não está apenas no aumento da troca de calor como também na oportunidade de se diminuir o espaço de um conjunto aletado, pela redução do número de aletas.

O fato de se reduzir espaço importante em aplicações industriais, principalmente da indústria eletrônica que procura otimizar espaço e ampliar funções que podem ser colocadas no lugar anteriormente ocupado.

Se espaço não for problema, a substituição continuaria sendo uma boa opção de dissipação de calor prevenindo o equipamento de superaquecimento, ou auxiliando a manter a temperatura indicada.

Ainda existem problemas não estudados neste trabalho, o novo perfil é de difícil usinagem, o que requer mais tempo e prática para usinar. Outro fator a ser estudado é a resistência da aleta que não foi analisado podendo ser frágil para uma determinada aplicação sob esforços.

6 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Deste trabalho em diante se propõe elaborar o mesmo perfil, porém ao invés de alternar o corte das circunferências menores em torno da maior, desta vez mantendo um tipo de corte o que facilita os cálculos e facilitaria a usinagem.

Outra proposta é elaborar um perfil piniforme de revolução como a aleta parabólica cuja área transversal não é constante. Aletas deste tipo podem vir a serem eficientes, mas as dificuldades das equações atrapalham os estudos.

Também se propõe a busca por um perfil de baixa resistência aerodinâmica e que possua boa eficiência.

7 REFERÊNCIAS

FRANK P. INCROPERA. et. al. **Fundamentos de transferência de calor e de massa**. 6. ed., Rio de Janeiro, LTC, 2008.

Rechneronline.**function-graphs**: Desenho de gráficos online. Disponível em: <<http://rechneronline.de/function-graphs/>>. Acesso em 12 fev. 2013.

STEWART, James. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002. 660 p

ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R.. **Equaçõesdiferenciais**. 3. ed. vol. 1 São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R.. **Equações diferenciais**. 3. ed. vol. 2 São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.