

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

VALDIR DOS SANTOS JUNIOR

**PERIDINÂMICA: Estudo da limitação de Modelos Peridinâmicos Baseados Em
Ligações em relação ao Coeficiente de Poisson.**

Ilha Solteira, 2022

SP - Brasil

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

VALDIR DOS SANTOS JUNIOR

**PERIDINÂMICA: Estudo da limitação de Modelos Peridinâmicos Baseados Em
Ligações em relação ao Coeficiente de Poisson.**

Trabalho de graduação apresentada à
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira –
UNESP como parte dos requisitos para
obtenção do grau de engenheiro mecânico.

Nome do orientador
Marcio Antonio Bazani

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S237p Santos Junior, Valdir dos.
Peridinâmica: estudo da limitação de modelos peridinâmicos baseados em ligações em relação ao coeficiente de poisson / Valdir dos Santos Junior -- Ilha Solteira: [s.n.], 2022
61 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) -
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2022

Orientador: Marcio Antonio Bazani
Inclui bibliografia

1. Peridinâmica. 2. Coeficiente de Poisson. 3. MATLAB.


Raiane da Silva Santos

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ATA DA DEFESA – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

TÍTULO: PERIDINÂMICA: Estudo da limitação de Modelos Peridinâmicos
Baseados Em Ligações em relação ao Coeficiente de Poisson.

ALUNO: Valdir dos Santos Junior RA: 141051159

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcio Antonio Bazani

Aprovado (X) - Reprovado () pela Comissão Examinadora

Comissão Examinadora:

Prof. _____



Presidente (Orientador) Prof. Dr. Marcio Antonio Bazani

Doutorando João Angelo Ferres Brogin



Mestrando Rafael da Silva Raqueti

Mestrando Rafael da Silva Raqueti

Ilha Solteira (SP) 11 de Fevereiro de 2022.

RESUMO

Durante muitos anos a mecânica do contínuo tem sido aplicada em diversos problemas e obtido resultados satisfatórios, porém, esta propõe um modelo unificado para sólidos, desconsiderando as forças ocorrendo em suas estruturas internas. Quando se trata de análise de estruturas com descontinuidades, como trincas, a mecânica do contínuo tem dificuldade em ser empregada. Baseando-se nisso, uma nova abordagem para este problema foi desenvolvida por Stewart Silling em 2000, a Peridinâmica. Esta é uma teoria moderna que combina a mecânica do contínuo com estudo de trincas, por meio da integração das forças de interação entre partículas próximas separadas por distâncias finitas. Para isso, utiliza-se da Segunda Lei de Newton para fazer a análise dinâmica ocorrendo no interior dos sólidos. O objetivo deste trabalho é estudar e validar o modelo baseado em ligações, LBB (Linearized Bond Based) para materiais com coeficiente de Poisson menor que 0.25, tendo como referência um modelo PMB (Prototype micro brittle). Para isto, será usado um programa feito em MatLab por Túlio Patriota entre 2018 e 2019. O resultado do trabalho foi satisfatório, visto que para o material com coeficiente de Poisson menor que 0,25 os erros do método LBB em relação ao PMB foram de 0,370% para trabalho externo e de 0,446% e 0,402% para os picos do gráfico de densidade de energia de deformação. Para o material com coeficiente de Poisson maior que 0,25 os erros do método LBB em relação ao PMB foram de 11,049% para trabalho externo e de 12,104% e 9,412% para os picos do gráfico de densidade de energia de deformação.

Palavras chave: Mecânica dos meios contínuos, Dinâmica, Resistência de materiais, MATLAB (Programa de computador).

ABSTRACT

For many years, continuum mechanics has been applied in several problems and obtained satisfactory results, however, it proposes a unified model for solids, disregarding the forces occurring in their internal structures. When it comes to the analysis of structures with discontinuities, such as cracks, continuum mechanics is difficult to be employed. Based on this, a new approach to this problem was developed by Stewart Silling in 2000, Peridynamics. This is a modern theory that combines continuum mechanics with crack study, through the integration of interaction forces between nearby particles separated by finite distances. For this, Newton's Second Law is used to perform the dynamic analysis occurring inside the solids. The objective of this work is to study and validate the bond-based model, LBB (Linearized Bond Based) for materials with a Poisson ratio lower than 0.25, having as reference the PMB (Prototype micro brittle) model. For this, a program made in MatLab by Túlio Patriota between 2018 and 2019 will be used. The result of the work was satisfactory, since for the material with a Poisson ratio lower than 0.25, the errors of the LBB method in relation to the PMB were of 0.370% for external work and 0.446% and 0.402% for peaks in the strain energy density graph. For material with a Poisson ratio greater than 0.25, the errors of the LBB method in relation to the PMB were 11.049% for external work and 12.104% and 9.412% for the peaks of the strain energy density graph.

Keywords: Mechanics of continuous media, Dynamics, Strength of materials, MATLAB (Computer program).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Massas e vazios.....	14
Figura 2 - Massas e vazios 2.....	15
Figura 3 - Diferenças de abordagens.....	18
Figura 4 - Representação Peridinâmica.....	19
Figura 5 - Vizinhança mostrada em um corpo.....	22
Figura 6 - Diferença Tensor e estado.....	23
Figura 7 - Representação de uma malha.....	24
Figura 8 - Gráfico de força e fator de dano PMB.....	26
Figura 9 - Gráfico de força e fator de dano PMB DTT.....	31
Figura 10 - Deformação transversal e longitudinal.....	31
Figura 11 - Exemplo proposto.....	35
Figura 12 - Exemplo proposto no programa.....	35
Figura 13 - Gráfico de Trabalho externo (vidro)	36
Figura 14 - Gráfico de Densidade De Energia De Deformação (vidro)	37
Figura 15 - Comparação com o resultado experimental obtido por R. & K.	39
Figura 16 - Gráfico de Trabalho externo (policarbonato)	39
Figura 17 - Gráfico de Densidade De Energia De Deformação (Policarbonato)	40
Figura 18 - Sistema cartesiano com um objeto sofrendo deformação.....	45
Figura 19 - Sistema cartesiano com um objeto sofrendo deformação 2	47
Figura 20 - Corpo seccionado.....	49
Figura 21 - Vetores de tensão em um cubo.....	50
Figura 22 - Programa: Parâmetros.....	54
Figura 23 - Programa: PD.....	55
Figura 24 - Programa: Mesh.....	55
Figura 25 - Programa: Initial Damage.....	56
Figura 26 - Programa: Model.....	56
Figura 27 - Programa: Boundary conditions.....	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Propriedades do vidro de garrafa de refrigerante.....	36
Tabela 2	- Propriedades do Policarbonato usado por Ramulu e Kobayashi.....	38

SUMÁRIO

1. OBJETIVO	10
2. INTRODUÇÃO	11
2.1 Mecânica Do Contínuo	11
2.2 Conceito de Contínuo	12
2.3 Cinemática	15
3. PERIDINÂMICA	17
3.1 Formulação Peridinâmica	20
3.2 Bases Teóricas	22
3.3 Coeficiente De Poisson	24
3.4 Implementação numérica	25
3.4.1 Equação governante discreta	26
3.4.2 Tamanho do horizonte e Razão de Malha	27
3.4.3 Soluções Dinâmica e Quase Estática	28
3.4.4 Modelos constitutivos	28
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	34
4.1 Condições de contorno	34
4.2 Aplicação 1: “Soda-lime glass”	36
4.3 Aplicação 2: “Polycarbonate”	38
5. CONCLUSÃO	42
6. REFERÊNCIAS	43
APÊNDICE A	45
APÊNDICE B	54
APÊNDICE C	58

1. OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo estudar os princípios da Peridinâmica bem como comprovar a limitação dos modelos peridinâmicos de solução baseado em ligações (Bond-Based) em relação ao coeficiente de Poisson dos materiais utilizados. Para isso, será utilizado um programa em MATLAB criado por Tulio Patriota [5] em sua dissertação de mestrado.

2. INTRODUÇÃO

Durante muitos anos a teoria da mecânica do contínuo tem sido aplicada em diversos problemas e obtido resultados satisfatórios, porém, quando se trata de análise de estruturas com descontinuidades, como trincas, a mecânica do contínuo tem dificuldade em ser empregada.

2.1 Mecânica Do Contínuo

A mecânica do contínuo considera o objeto em estudo único e que sua massa preenche todo espaço que ocupa. Dessa forma, a modelagem dessa teoria ignora que tal objeto é composto por grãos ou átomos e, portanto, não é contínuo. Tal abordagem se popularizou devido a necessidade de criar modelos em escalas de comprimento muito grandes, onde as distâncias interatômicas são desprezíveis, tornando a modelagem, na maioria dos casos, altamente precisa.[14]

Esses modelos podem ser usados para derivar equações diferenciais que descrevem o comportamento de tais objetos usando leis físicas, como conservação de massa, conservação de momento e conservação de energia, e algumas informações sobre o material são fornecidas por relações constitutivas. A mecânica do contínuo lida com as propriedades físicas de sólidos e fluidos que são independentes de qualquer sistema de coordenadas particular em que são observados. As propriedades físicas são então representadas por tensores, que são objetos matemáticos com a propriedade de serem independentes de sistemas de coordenadas. A mecânica do contínuo é utilizada tanto na mecânica dos sólidos quanto na mecânica dos fluidos, porém, apenas a primeira será abordada neste trabalho. [14]

2.2 Conceito de Contínuo

Todo material apresenta “rachaduras” a um nível microscópico, porém caso o material não apresente descontinuidades muito grandes, como trincas, os fenômenos físicos podem ser modelados supondo um material contínuo, ou seja, a matéria é distribuída uniformemente por todo o material, sem a existência de espaço em seu interior. Logo, podemos definir um material contínuo como aquele que pode ser subdividido em elementos infinitesimais, cujas propriedades são iguais ao material todo.[14]

A composição interna dos materiais, como átomos e moléculas podem ser negligenciadas pela mecânica do contínuo se a relação entre a distância média que uma partícula percorre antes de colidir com outra (λ) e o comprimento característico que define a escala de um sistema físico for muito menor que a unidade. Essa relação é conhecida como número de Knudsen, que para a maioria dos sólidos e líquidos costuma ser bem menor que a unidade. [1]

$$Kn = \frac{\lambda}{L}, \quad (1)$$

Sendo:

Kn : Número de Knudsen

λ : = caminho livre médio

L = escala de comprimento fisicamente representativa

Se o número de Knudsen é próximo ou maior que um, o caminho médio livre de uma molécula é comparável a escala de comprimento do problema, e a consideração de continuidade não é mais uma boa aproximação. Neste caso a mecânica estatística deve ser usada. [1]

Além disso, para a aplicação da mecânica do contínuo também se deve observar qual a escala de análise do meio. A mecânica do contínuo inicia sua aplicação para análises na macroescala (10^{-3} mm), considerando uma média das

variáveis da microescala (10^{-6}mm). Como exemplo prático podemos citar o concreto onde na nanoescala (10^{-9}mm) é possível distinguir a estrutura do cimento e agregados, na microescala (10^{-6}mm) é possível identificar os grãos de cimentos após a hidratação, na macroescala (10^{-3}mm) pode-se ver claramente os agregados e possíveis vazios; acima e com idealizações é possível considerar o concreto como homogêneo em suas propriedades médias. Outra forma de verificar a possibilidade de utilização da mecânica do contínuo é por meio da densidade de massa do elemento em estudo. [1]

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (2)$$

Sendo:

ρ : densidade

m : massa total

V : volume total

Considerando um quadrado de lado 'l' com círculos de diferentes diâmetros distribuídos de forma irregular por toda sua área, como o mostrado abaixo:

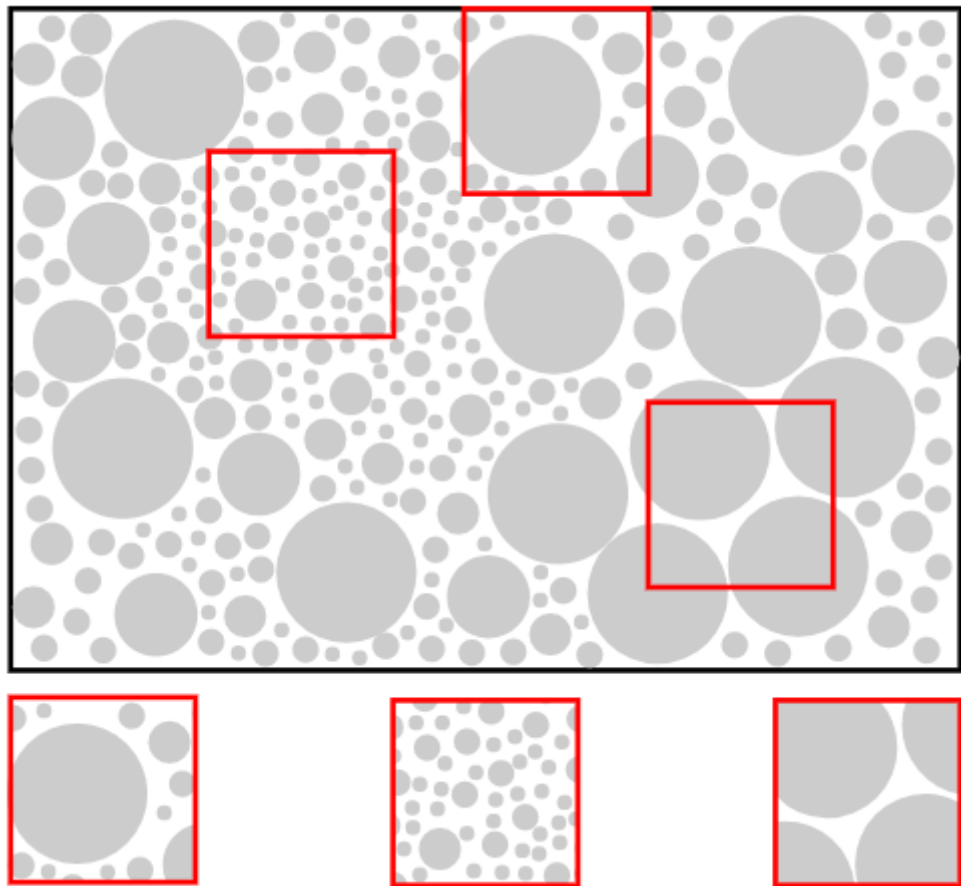


Figura 1

Fonte: [1] <http://www.estruturas.ufpr.br/material/mecanicaContinuo>

Imaginando que as áreas acinzentadas são massa e as áreas brancas dentro do quadrado são vazios. Considerando os quadrados menores com contorno vermelho, pode-se notar uma grande diferença entre a quantidade massa, representada por área acinzentada, dentro de cada um. Todavia, aumentado o tamanho dos quadrados, vemos que a variação na densidade passa a diminuir, como visto na figura a seguir:

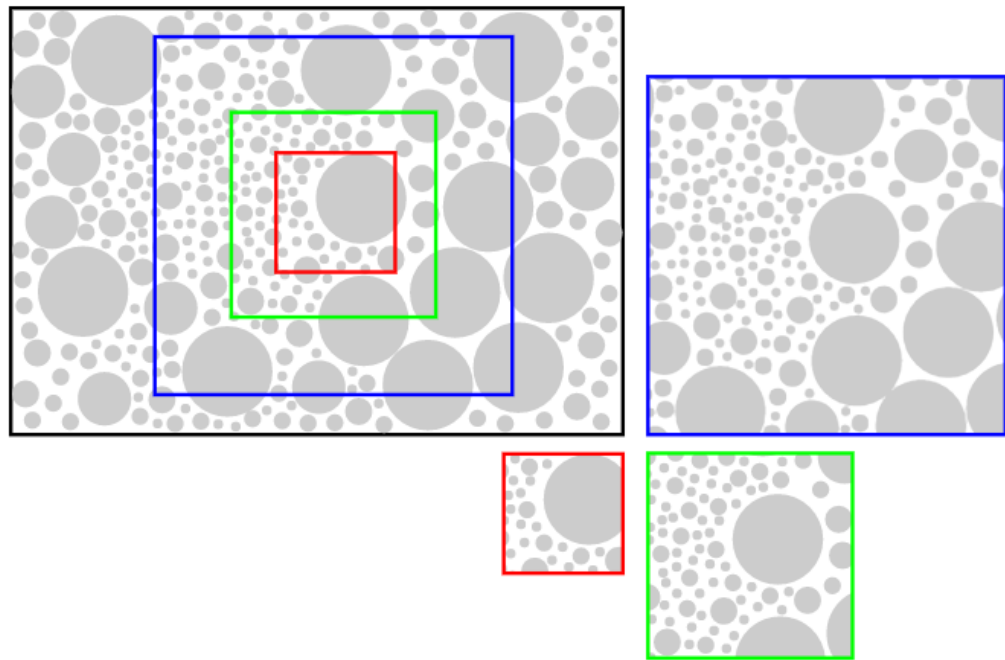


Figura 2

Fonte: [1] <http://www.estruturas.ufpr.br/material/mecanicaContinuo>

Ao analisar uma área com as dimensões do quadrado azul em qualquer região da figura, teremos uma densidade muito parecida. Quando a densidade for constante, qualquer que for a área selecionada da figura, a mecânica do contínuo poderá ser aplicada. [1]

2.3 Cinemática

Cinemática pode ser definida como o estudo das mudanças geométricas em um contínuo sem levar em conta as forças que causam esses. A formulação local equivalente a equação peridinâmica do movimento para a mecânica do contínuo será:

$$\rho(x)\ddot{u}(x,t) = \nabla \cdot \sigma + b(x,t), \quad (3)$$

Sendo:

σ o tensor de tensões de Cauchy;

∇ o operador divergente;

O equacionamento da teoria cinemática para a obtenção do tensor de tensões de Cauchy se encontram no apêndice A.

Levando em consideração as limitações da teoria clássica da mecânica do contínuo, houve a necessidade de uma outra abordagem, a Peridinâmica.

3. PERIDINÂMICA

Um dos maiores problemas enfrentados no estudo da mecânica dos sólidos está relacionado à formação e propagação de trincas nas estruturas. Casos típicos incluem falha de componentes mecânicos devido a trincas e/ou fraturas como resultado de cargas dinâmicas, gradientes térmicos elevados, impacto, explosões, etc. [3]

Os projetos estruturais geralmente são feitos se baseando na mecânica do contínuo que, como visto anteriormente parte do princípio que o material em estudo não tem subdivisões em sua composição. A estrutura desenvolvida para sua teoria é baseada em derivadas parciais para representar os deslocamentos relativos e as forças entre elementos vizinhos. Por definição, as derivadas parciais em relação às coordenadas espaciais não são definidas nas descontinuidades dos corpos e, por esta razão, a abordagem clássica da mecânica do contínuo não é adequada para a modelagem de problemas como os mencionados anteriormente. [4]

Para superar este problema, várias técnicas foram implementadas ao decorrer dos tempos com relativo sucesso. Tem-se como exemplo o método dos elementos finitos. Todavia, o método dos elementos finitos pode não ser uma opção adequada para problemas em que mais de algumas rachaduras se desenvolvem na amostra, como na maioria dos estudos de fragmentação. Essas aproximações limitam, ao menos parcialmente, a utilidade dessas técnicas nos casos em que não existe descontinuidade inicialmente e esta se forma após a geração da malha e aplicação do carregamento. [15]

Tendo em vista tais limitações de outros métodos, na tentativa de superar estes problemas das formulações matemáticas clássicas, uma nova teoria chamada peridinâmica (Silling, 2000) foi formulada. O nome “Peridinâmica” descende da junção do grego “Peri” que significa “Perto” e “Dinâmica” que é a parte da mecânica que estuda o comportamento dos corpos em movimento. Esta teoria se baseia no uso de equações integrais para calcular a força sobre uma região não local ao redor de cada ponto, substituindo assim a divergência do tensor de tensão nas equações de movimento, e como as derivadas espaciais não são usadas, as equações

peridinâmicas permanecem válidas nos pontos ou superfícies de descontinuidade, como uma rachadura. [4]

Na imagem abaixo pode-se ver a diferença entre a abordagem clássica e a abordagem peridinâmica:

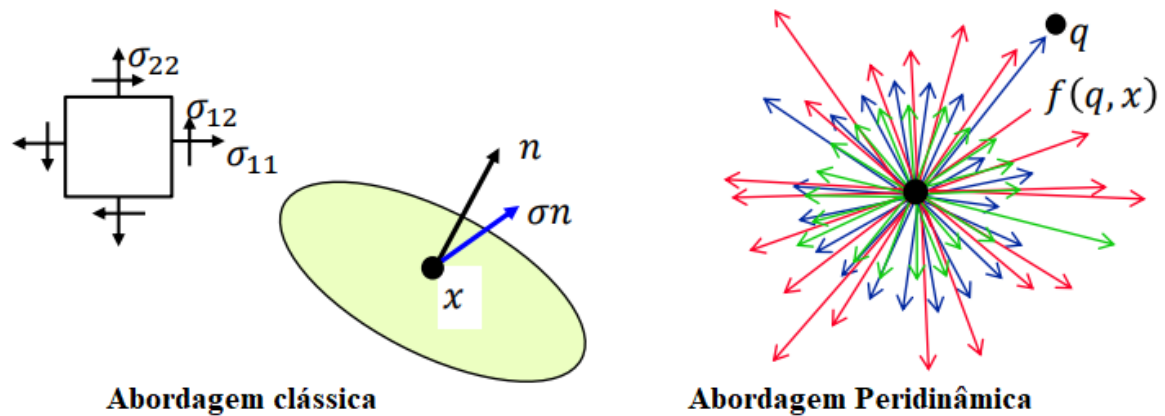


Figura 3

Fonte: Peridynamics: Historical and future perspectives – Silling

A peridinâmica é uma teoria matemática desenvolvida por Stewart Silling, em 2000, que unifica a mecânica de meios contínuos com rachaduras e descontinuidades. O método permanece válido na presença de descontinuidades, incluindo rachaduras, o que o diferencia de outros como o método de elementos finitos. O método peridinâmico se dá por meio da integração das forças de interação entre partículas próximas separadas por distâncias finitas. Para isso, utiliza-se da Segunda Lei de Newton para fazer a análise dinâmica ocorrendo no interior dos sólidos.[3]

A figura a seguir é uma representação dos fundamentos da peridinâmica.

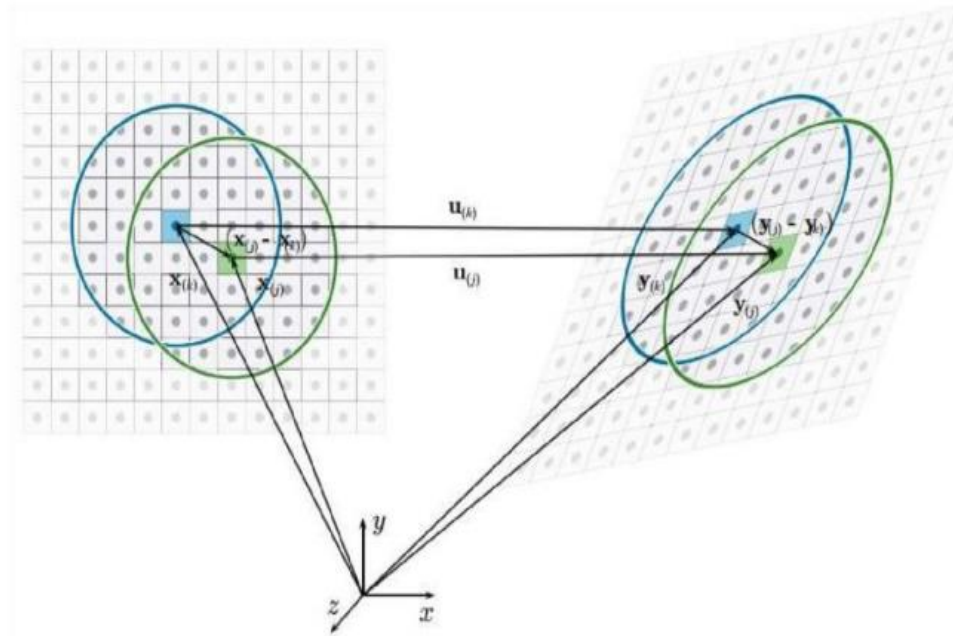


Figura 4

Fonte:[2] M. Speronello, 2015.

Cada ponto exerce uma força em seu adjacente que, quando não submetidos a uma força externa, se anulam. Quando submetidos à uma carga externa, ocorre um desequilíbrio causando uma deformação na estrutura e um deslocamento dos pontos materiais. Na figura 1 $x_{(k)}$ e $x_{(j)}$ são as posições iniciais dos pontos materiais; $y_{(k)}$ e $y_{(j)}$ são os mesmos pontos após um intervalo infinitesimal de tempo quando o corpo é submetido à uma carga externa; $u_{(k)}$ e $u_{(j)}$, que são os deslocamentos dos pontos materiais. Os círculos azul e verde na imagem 1 são definidos por um raio que chamamos de horizonte. A análise é feita até que um ponto material saia do horizonte do outro, pois nesse instante, a força de interação se anula, caracterizando a falha do material.

A aplicação da Segunda Lei de Newton com as variáveis apresentadas resulta na seguinte equação:

$$\rho(x)\ddot{u}(x,t) = \int [\underline{T}(x(k),t)(x(j) - x(k)) - \underline{T}(x(j),t)(x(k) - x(j))]dH + b(x,t), \quad (4)$$

Onde:

$\rho(x)$ é a densidade do material;

$\ddot{u}(x,t)$ é a aceleração do ponto;

$\int [\underline{T}(x(k),t)(x(j) - x(k)) - \underline{T}(x(j),t)(x(k) - x(j))]dH$ representa as forças ocorrendo no interior do material;

$b(x,t)$ representa o carregamento externo;

3.1 Formulação Peridinâmica

Analisando a figura (4) deste documento pode-se chegar as seguintes equações:

$$u(k) = y(k) - x(k). \quad (5)$$

$$u(j) = y(j) - x(j). \quad (6)$$

A posição relativa entre dois pontos de diferentes horizontes no estado não deformado (ξ), será:

$$\xi(k,j) = x(j) - x(k). \quad (7)$$

O deslocamento relativo entre dois pontos de diferentes horizontes (η), será:

$$\eta(k,j) = u(j) - u(k). \quad (8)$$

Somando as equações (7) e (8), tem-se:

$$\xi(k,j) + \eta(k,j) = y(j) - y(k). \quad (9)$$

O deslocamento relativo (S), que relaciona a posição de dois pontos no estado não deformado com o estado deformado, será:

$$S(k, j) = \frac{|y(j) - y(k)| - |x(j) - x(k)|}{|x(j) - x(k)|}. \quad (10)$$

Substituindo os valores obtidos anteriormente na equação 9 teremos:

$$S(k, j) = \frac{\xi(k, j) + \eta(k, j) - \xi(k, j)}{\xi(k, j)}. \quad (11)$$

A ligação entre os pontos materiais é quebrada assim que o valor de S ultrapassa um determinado valor denominado de S0, que carrega consigo características do material constituinte do corpo, funcionando dessa forma como um critério de parada, sendo S0 calculado com a equação:

$$S(k, j) = \left(\frac{4\pi G}{9E\delta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

Sendo:

G: Energia de fratura,

E: Modulo de elasticidade do material

δ: Raio do Horizonte.

Relacionando S com S0, pode-se escrever uma função de Heaviside, utilizada como critério de parada:

$$R(t, \eta, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } S < S_0 \\ 0 & \text{se } S > S_0 \end{cases}$$

Com as funções que representam R, S e S0, pode-se escrever a função f que representa a força interna de ligação entre os pontos materiais.

$$f(t, \eta, \xi) = R(t, \eta, \xi) c S(\eta, \xi), \quad (13)$$

Sendo c um parâmetro micro-modulo conhecido como constante de ligação que depende do modulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν , descrito pela equação a seguir:

$$c = \frac{6E}{(\pi\delta^3)(1-\nu)}. \quad (14)$$

Com a função que representa f , pode-se escrever a Equação fundamental do Método Peridinâmico:

$$\rho(x)\ddot{u}(x,t) = \int_h f(t, \eta, \xi) dH + b(x,t). \quad (15)$$

3.2 Bases Teóricas

Este tópico tem como objetivo apresentar uma introdução ao modelo peridinâmico baseado em estados. Abaixo vê-se um corpo representado no espaço E^3 definido em um estado de referência ' $t = 0$ ', e ' $X(x,t)$ ', que representa a posição do ponto ' x ' no tempo ' t '. Diferentemente da abordagem clássica da mecânica do contínuo, a abordagem peridinâmica considera os deslocamentos diferenciais em uma vizinhança $N\delta$ do ponto x . Aqui, $N\delta$ é uma esfera de raio δ centrada em x . O vetor $\xi = x' - x$ é chamado de vetor de ligação e o conjunto de todos os vetores de ligação na vizinhança pertence a $H\delta$. [5]

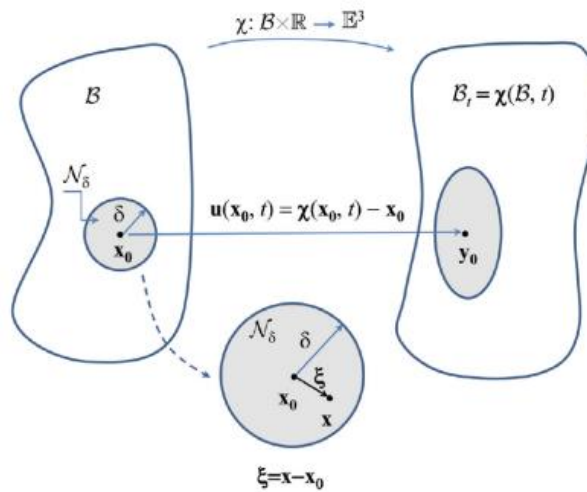


Figura 5 - Vizinhança mostrada em um corpo Fonte: Aguiar & Fosdick [7]

Abaixo é mostrado a representação matemática de um estado peridinâmico. Este é uma função tensorial da forma:

$$A(x, t) \langle \cdot \rangle : H\delta \rightarrow L_m,$$

Onde L_m é o conjunto de tensores de ordem m. Um estado duplo é um estado que depende de duas ligações e tem a forma:

$$A(x, t) \langle \cdot, \cdot \rangle : H\delta \times H\delta \rightarrow L_m,$$

Para denotar um estado que depende de outro estado, introduzimos

$$A(x, t) \langle \xi \rangle = \hat{A}(x, t)[h] \langle \xi \rangle,$$

que denota a dependência do estado A do estado h.

A figura a seguir ilustra a diferença entre a abordagem clássica, com tensores, e a abordagem peridinâmica, com estados.

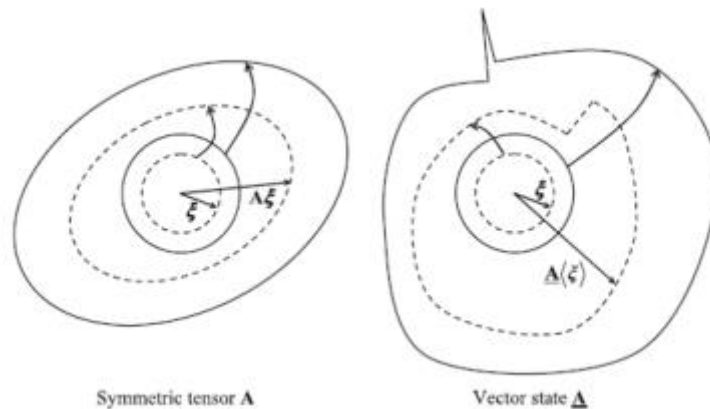


Figura 6

Fonte: Silling et al.

Pode-se perceber que o tensor simétrico de segunda ordem gera uma circunferência em um elipsoide enquanto um estado pode gerar uma circunferência em uma curva mais complexa e, possivelmente, descontínua. [5]

Conforme apontado por Silling et al. [7], as diferenças entre eles residem em três pontos principais:

- Um estado não é uma função linear de a;
- Um estado não é uma função contínua em a,

- O espaço real euclidiano é de dimensão infinita (abordagem peridinâmica), enquanto o espaço dos tensores de segunda ordem tem a dimensão de nove.

A principal melhoria dos métodos peridinâmicos baseados em estados em relação aos modelos baseados em ligações se dá devido ao primeiro não ter uma restrição quanto ao coeficiente de Poisson do material estudado. Os métodos baseados em ligações apresentam resultados satisfatórios apenas em materiais com coeficiente de Poisson abaixo de 0,25.

3.3 Coeficiente De Poisson

Ao exercer uma tensão em um material qualquer, este tende a sofrer uma deformação longitudinal proporcional ao esforço aplicado. Esta é determinada pelo Módulo de Young (E). Ao se definir o módulo de Young, apenas é considerado a deformação longitudinal. Todavia, qualquer material elástico ao ser esticado sofre ao mesmo tempo uma deformação transversal, proporcional a deformação longitudinal.

[6]

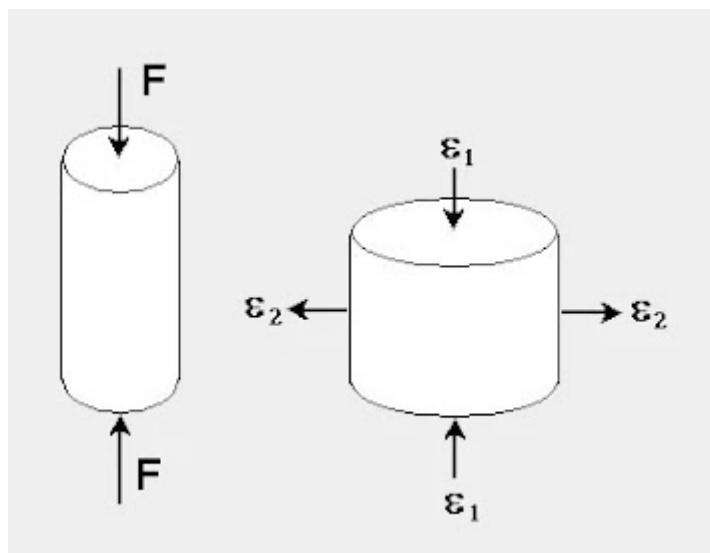


Figura 7

Fonte: mateirias.gelsonluz.com

A razão entre a deformação transversal associada a uma deformação longitudinal na direção do esforço de tração de um material homogêneo e isotrópico, chama-se o coeficiente (ou razão) de Poisson, ν :

$$\nu = -\frac{E_x}{E_z} = -\frac{E_y}{E_z}, \quad (16)$$

Onde,

ν é o Coeficiente de Poisson

E_x é a extensão na direção x (Transversal)

E_y é a extensão na direção y (Transversal)

E_z é a extensão na direção z (Longitudinal)

Geralmente o coeficiente de Poisson apresenta valores positivos entre 0 e 0.5, porém materiais específicos (*auxéticos*) podem apresentar valores negativos. Isso significa que as dimensões da sua secção transversal aumentam ao serem tracionados, contrariamente ao que acontece com a generalidade dos materiais. [17]

A determinação do Coeficiente de Poisson efetua-se em máquinas de ensaios de tração, sendo necessários dois dispositivos de medida de grande sensibilidade: um para medir a deformação transversal e o outro para medir a deformação longitudinal. [6]

3.4 Implementação numérica

Levando em consideração que soluções analíticas de problemas peridinâmicos não são comuns nos dias atuais, simulações numéricas desses problemas são, portanto, necessárias para obter soluções aproximadas que possam ser utilizadas para avançar no entendimento sobre o assunto ou em aplicações práticas. [5]

3.4.1 Equação governante discreta

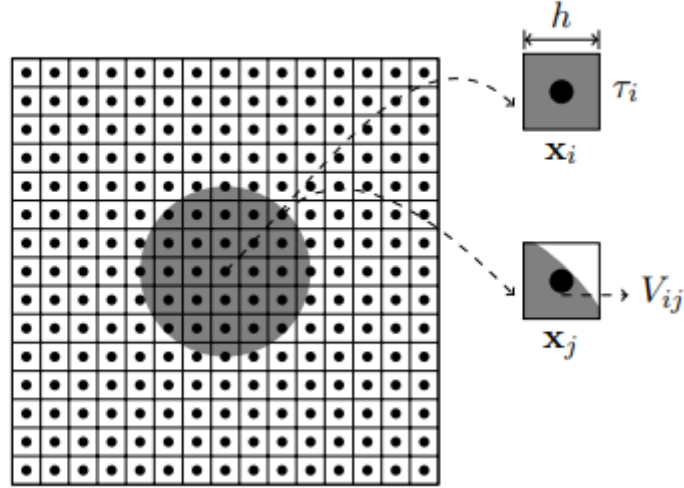


Figura 8

Fonte: [5] PATRIOTA, Tulio. Numerical investigation of damage models in two-dimensional peridynamics using MATLAB

Cada ponto i , onde as variáveis físicas são avaliadas, tem uma posição x_i no centro de uma célula quadrada τ_i com área h^2 e densidade ρ_i . A equação governante (1) é integrada espacialmente usando uma regra de quadratura de ponto médio. Assim, em um ponto x_i a equação governante discreta da peridinâmica pode ser escrita como:

$$\rho_i \ddot{u}_i = \sum_{j \in F_i} f_{ij} \Delta V_{ij} + b_i, \quad (17)$$

Sendo $\ddot{u}_i = \ddot{u}(x_i)$ e $b_i = b(x_i)$

F_i é uma família de índices relacionados ao i -ésimo nó definido por:

$$F_i = \{j \mid |x_j - x_i| < \delta\}, \quad (18)$$

$f_{ij} = f(x_i, x_j, u)$ é a força de interação entre nós com índices i e $j \in F_i$. e
 ΔV_{ij} é o volume do nó j dentro da δ -vizinhança do i -ésimo nó.

3.4.2 Tamanho do horizonte e Razão de Malha

O tamanho do horizonte (δ) é um parâmetro do material, pois este deve ser determinado de acordo com distância de interação microscópica entre os átomos. Sendo assim, este não deveria depender da geometria escolhida. Todavia, isso apenas se aplica em microestruturas, onde o horizonte pode ser visto como a distância de interação microscópica entre os átomos. Para macroestruturas, no entanto, seu tamanho é geralmente escolhido pequeno o suficiente para produzir resultados conclusivos sem custo computacional desnecessário. [5]

Quando falamos de simulações numéricas, é necessário levar em conta também a razão de malha, que mede o refinamento da malha dentro de uma vizinhança δ :

$$d = \delta/h. \quad (19)$$

Quanto maior for d , mais precisa é a quantidade integral avaliada na vizinhança δ de um ponto material. Trabalhos numéricos geralmente se referem a dois tipos de convergência: δ -convergência, onde mantém-se d fixo e diminui-se δ até que a solução apresente mudanças muito grandes, assim define-se o valor mínimo de δ para ter uma solução satisfatória. O outro tipo é a d -convergência, onde mantém-se δ fixo e aumenta-se a razão de malha (d) até que a solução tenha uma pequena variação em relação a anterior, assim define-se uma boa razão de malha para aquele horizonte escolhido. Tal conceito foi introduzido no trabalho numérico unidimensional em Bobaru et al. [10]

Túlio Patriota definiu, em sua tese de mestrado, que este valor deve estar entre 4 e 6 para uma razão de malha econômica que garanta a precisão da integração numérica em duas dimensões. Além disso, recomenda-se realizar uma análise de δ -convergência para escolher um tamanho de horizonte adequado. Um horizonte pequeno com uma razão de malha pequena pode levar a soluções errôneas. [5]

3.4.3 Soluções Dinâmica e Quase Estática

No programa em questão, existem dois métodos de solução: o dinâmico e a quase estático. Sua diferença se dá pelo segundo método considerar problemas com pequenas deformações, ou, como o nome do método diz, problemas estacionários. Na formulação do método quase estático o termo ' $\rho(x)\ddot{u}(x,t)$ ' da equação governante da peridinâmica é nulo e, por conta disso, o método 'Quase estático' não pode resolver problemas envolvendo trincas.[5]

Assim, a equação governante discreta assume a forma:

$$\sum_{j \in Fi} f_{ij} \Delta V_{ij} + b(x_i) = 0. \quad (20)$$

3.4.4 Modelos constitutivos

Quando Silling propôs a teoria pela primeira vez, a interação entre dois pontos materiais dependeria apenas das quantidades avaliadas nos pontos. Para um sólido peridinâmico, por exemplo, a força entre dois pontos materiais x e x' é uma função do campo de deslocamento apenas nesses pontos. Como esses pontos formam uma ligação (um vetor que conecta os dois pontos), o modelo depende apenas da ligação e, portanto, esse ramo da peridinâmica é conhecido como baseado em ligações (bond-based).[11]

A equação governante da peridinâmica para modelos baseados em ligações é:

$$\rho(x)\ddot{u}(x,t) = \int f(q,x)dV_q + b(x,t). \quad (21)$$

Para implementar modelos peridinâmicos precisa-se determinar a densidade de forças internas (f_{int}) e a densidade de energia de deformação ($W(x_i)$).

Modelo baseado em ligações linearizado (LBB)

Este é o modelo mais simples. É uma versão linearizada do modelo PMB sem danos (trincas), que tem a função de densidade de força interna discreta dada por:

$$f_{int}(x_i, u) = \sum_{j \in Fi} c_{LBB} \omega(\xi_{ij}) \xi_{ij} \frac{\xi_{ij} \otimes \xi_{ij}}{|\xi_{ij}|^2} \eta_{ij} \Delta V_{ij}, \quad (22)$$

Sendo $\xi_{ij} = x_j - x_i$ e $\eta_{ij} = u(x_j + \xi_j) - u(x_i)$.

$$C_{LBB} = \frac{6E}{m_v},$$

Sendo m_v o volume ponderado; ω é uma função de influência que pondera a influência da ligação de acordo com seu comprimento; η_{ij} é o vetor deslocamento da ligação.

A densidade de energia de deformação discreta correspondente é:

$$W_{LBB}(x_i) = \frac{1}{4} \sum_{j \in Fi} c_{LBB} \frac{\omega_\delta}{|\xi_{ij}|} (|\xi_{ij}|)(\eta_{ij} \cdot \xi_{ij})^2 \Delta V_{ij}. \quad (23)$$

Protótipo do modo micro quebradiço (PMB)

$$f_{int}(x_i, u) = \sum_{j \in Fi} C_{PMB} \omega(\xi_{ij}) \mu(s_{ij}, \max) \xi_{ij} \frac{|\xi_{ij} + \eta_{ij}| - |\xi_{ij}|}{|\xi_{ij}|} e_{ij} \Delta V_{ij}, \quad (24)$$

Onde μ é o fator de dano, $C_{PMB} = C_{LBB}$ e e_{ij} é o vetor unitário na direção da ligação deformada dado por:

$$e_{ij} = \frac{(\xi_{ij} + \eta_{ij})}{|\xi_{ij} + \eta_{ij}|},$$

$(s_{ij}, \max)$ é o alongamento relativo máximo da ligação entre os nós i e j até o tempo de simulação atual.

A densidade de energia de deformação discreta correspondente é:

$$W_{PMB}(x_i) = \frac{1}{4} \sum_{j \in Fi} c_{PMB} \omega(|\xi_{ij}|) \mu(s_{ij}, \max)(s_{ij})^2 |\xi_{ij}| \Delta V_{ij}, \quad (25)$$

Sendo:

$$s_{ij} = \frac{|\xi_{ij} + \eta_{ij}| - |\xi_{ij}|}{|\xi_{ij}|}. \quad (26)$$

PMB modificado (DTT)

Q. Du, Y. Tao, e X. Tian propuseram uma versão modificada do modelo PMB para garantir uma solução de campo de deslocamento bem colocada para o problema peridinâmico. Para tanto, eles consideraram que tanto o estado escalar da força quanto o fator de dano são contínuos. Para isso, eles introduziram os parâmetros S que evitam as descontinuidades. [12]

Os melhores valores de S foram encontrados pelos autores a partir de resultados numéricos e estão listados abaixo:

$$\begin{aligned} S_1^- &= -0.99, \\ S_0^- &= -0.98, \\ S_0^+ &= 0.95S_c, \\ S_1^+ &= 1.0S_c, \end{aligned}$$

Onde S_c é o alongamento relativo crítico, relacionado aos valores experimentais da tenacidade à fratura. Esta relação é obtida considerando que a energia necessária para quebrar todas as ligações que cruzam uma superfície é a energia de superfície para fratura de um material frágil.[12]

Nas figuras a seguir pode-se ver a comparação entre o estado escalar da força e o fator de dano para os modelos PMB e PMB modificado, respectivamente.

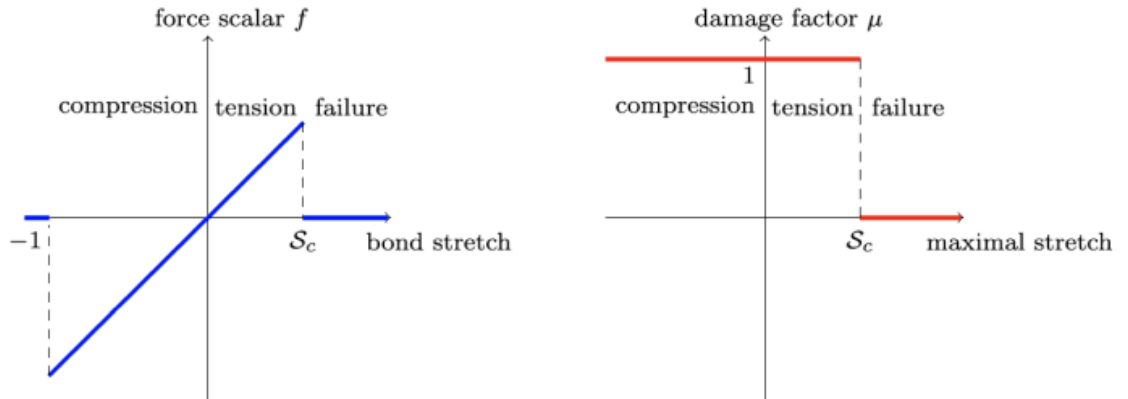


Figura 9 - PMB

Fonte: [5] PATRIOTA, Tulio. Numerical investigation of damage models in two-dimensional peridynamics using MATLAB

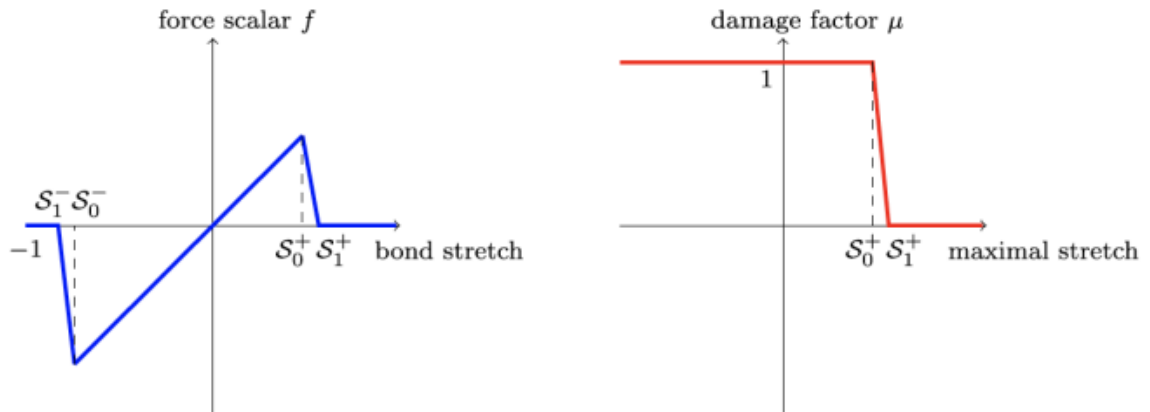


Figura 10 – PMB DTT

Fonte[4]: [5] PATRIOTA, Tulio. Numerical investigation of damage models in two-dimensional peridynamics using MATLAB

A função de densidade de força interna discreta dada por:

$$f_{int}(x_i, u) = \sum_{j \in \mathcal{F}_i} C_{PMB} \omega(|\xi_{ij}|) \mu(s_{ij}, \max) F(s_{ij}) e < \xi_{ij} + \eta_{ij} > \Delta V_{ij}, \quad (27)$$

Onde,

$$F = \begin{cases} S_0^- \frac{x - S_1^-}{S_0^- - S_1^-}, & \text{se } x \in (S_1^-, S_0^-) \\ x, & \text{se } x \in (S_0^-, S_0^+) \\ S_0^+ \frac{S_1^+ - x}{S_0^+ - S_1^+}, & \text{se } x \in (S_0^+, S_1^+) \\ 0, & \text{se nenhuma for cumprida} \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (-1, S_0^+) \\ \frac{S_1^+ - x}{S_0^+ - S_1^+}, & \text{se } x \in (S_0^+, S_1^+) \\ 0, & \text{se nenhuma for cumprida} \end{cases}$$

A densidade de energia de deformação discreta correspondente é:

$$W_{DTT}(x_i) = \frac{1}{4} \sum_{j \in Fi} c_{PMB} \omega(|\xi_{ij}|) \mu(s_{ij}, \max) p \frac{|\xi_{ij}^+ \eta_{ij}| - |\xi_{ij}|}{|\xi_{ij}|} |\xi_{ij}| \Delta V_{ij}, \quad (28)$$

Sendo

$$p = \begin{cases} \frac{S_0^-}{S_0^- - S_1^-} \left(\frac{x}{2} - S_1^- x \right) + A1, & \text{se } x \in (S_1^-, S_0^-) \\ \frac{x^2}{2}, & \text{se } x \in (S_0^-, S_0^+) \\ \frac{S_0^+}{S_1^+ - S_0^+} \left(S_1^+ x - \frac{x^2}{2} \right) + A3, & \text{se } x \in (S_0^+, S_1^+) \\ A4, & \text{se } x \in (S_1^+, +\infty) \end{cases}$$

Sendo A1, A3 e A4 constantes a ser determinadas ao aplicar condições de contorno de continuidade.

Todavia, em 2007, um novo estudo publicado por S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, and E. Askari. introduziu a definição e utilização de estados

peridinâmicos. Na abordagem peridinâmica baseada em ligações (bond based), a razão de Poisson é limitada a 0,25, enquanto a forma baseada em estados não tem essa restrição. [9]

Como descrita anteriormente, a equação governante da peridinâmica para modelos baseados em estados é:

$$\rho(x)\ddot{u}(x, t) = \int [\mathbb{T}(x(k), t)(x(j) - x(k)) - \mathbb{T}(x(j), t)(x(k) - x(j))]dH + b(x, t). \quad (4)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como visto anteriormente, os métodos de solução baseados em ligações têm uma limitação de materiais com o coeficiente de Poisson de no máximo 0,25. Sendo assim, foi proposto realizar dois testes utilizando o programa desenvolvido por Tulio Patriota: o primeiro com um material com coeficiente de Poisson abaixo de 0,25 (*Soda-lime glass*) e o segundo com um material com coeficiente de Poisson acima de 0,25 (*polycarbonate*).

Ambos os testes foram feitos com as mesmas condições de contorno e para dois modelos de solução diferente: o LBB e PMB DTT. Os dados e resultados seguem a seguir:

4.1 Condições de contorno

Em ambas as aplicações será usada a mesma condição de contorno:

Malha: 50x20 mm

Tensão (σ): 40Mpa

Razão de malha: 4

Obs: Tais condições de contorno foram escolhidas devido a necessidade de um hardware potente para fazer simulações mais complexas. A razão de malha de 4 foi escolhida devido a indicação de Tulio Patriota em sua tese de mestrado para soluções “econômicas” porém eficientes.

O solucionador usado foi o “Quasi-static”

Abaixo está o desenho do problema proposto e, em seguida, sua representação no programa usado.

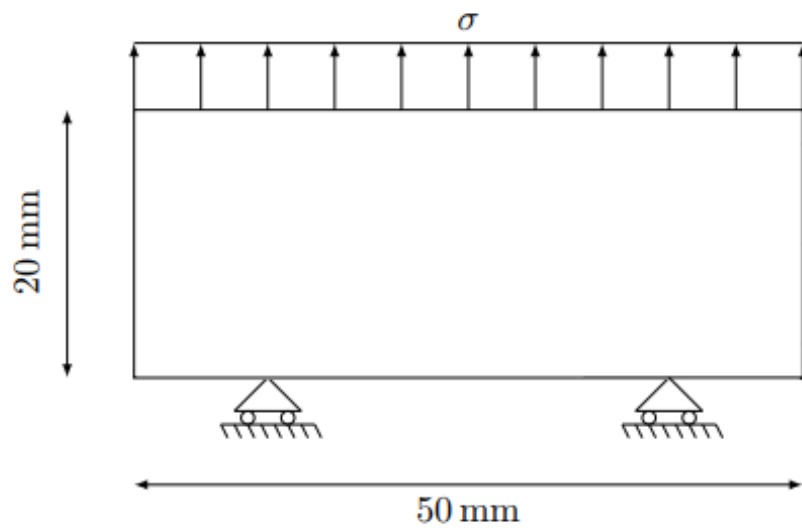


Figura 11

Fonte: próprio autor

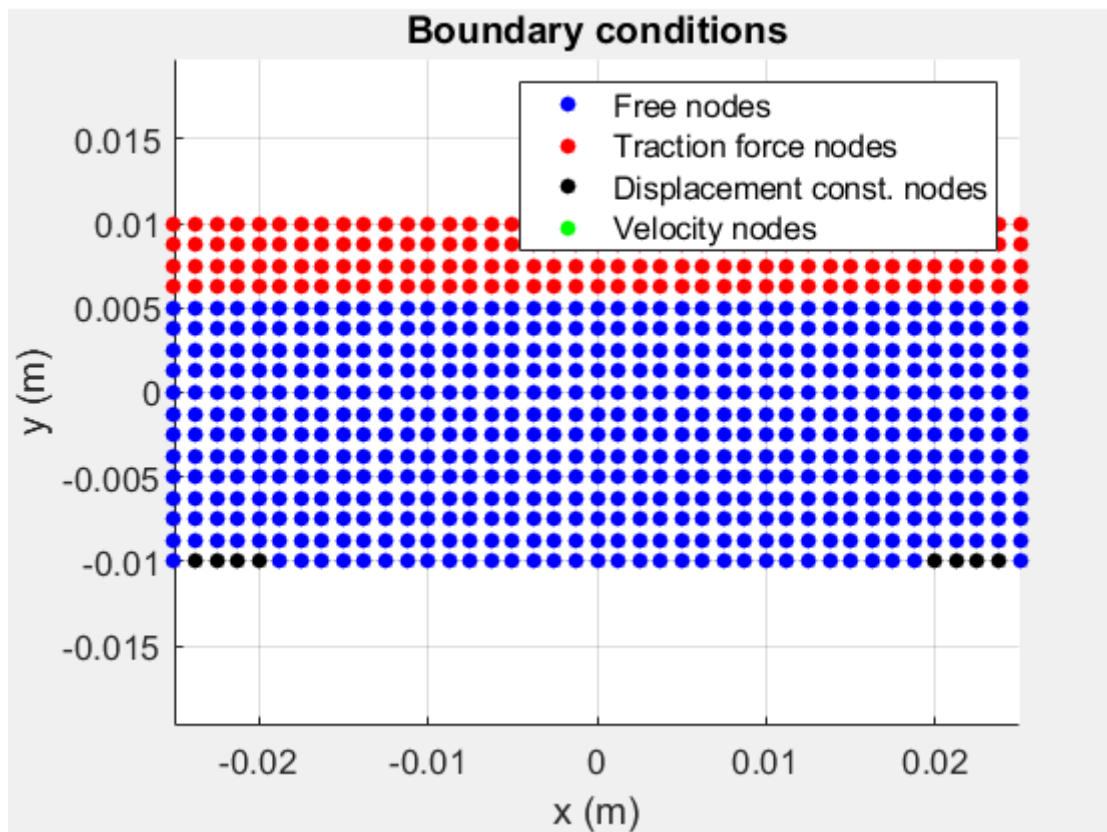


Figura 12

Fonte: Próprio autor

4.2 Aplicação 1: “Soda-lime glass”

Segue abaixo a tabela contendo as propriedades do material:

Propriedades do material	Valor
Módulo de Young's (E) (GPa)	72
Densidade ρ (kg m^{-3})	2440
Coeficiente de Poisson	0.22
Taxa de liberação de energia (G0) (J m^{-2})	3.8

Tabela 1 – Propriedades do ‘Soda-lime glass’ – Fonte: Patriota, Tulio

Para este problema, Tulio utilizou um horizonte (δ) de 5 mm, logo, neste trabalho este valor também será utilizado.

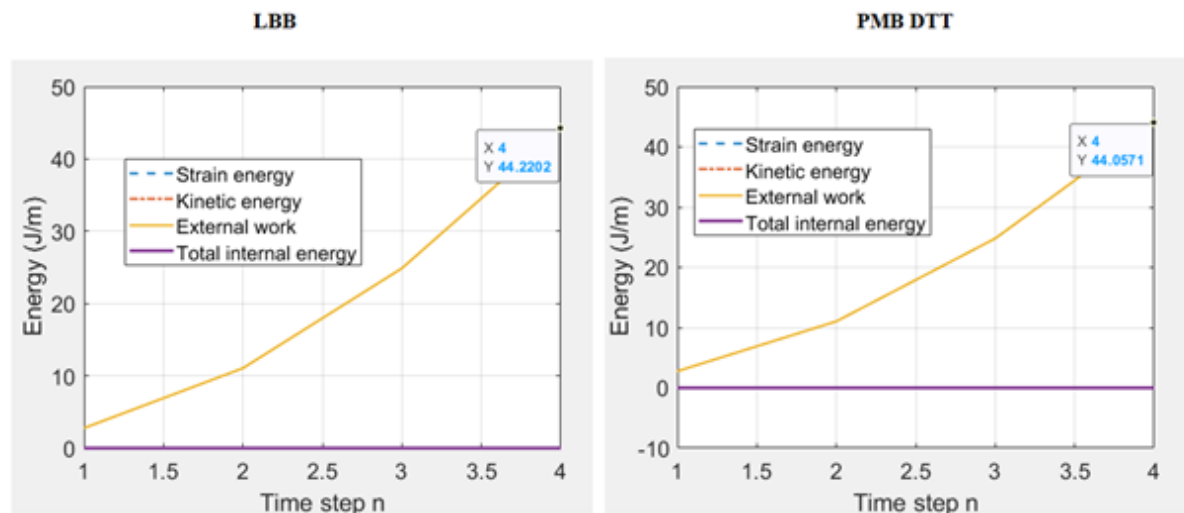


Figura 13 – Trabalho externo

Fonte: Próprio autor

Para o modelo LBB o valor máximo de trabalho foi de 44,2202 J / m e para o modelo PMB DTT este valor foi de 44,0571 J / m.

Assim, o erro relativo será:

$$E_r = \frac{|44,0571 - 44,2202|}{44,0571} \cdot 100\%$$

$$E_r = 0,370\%.$$

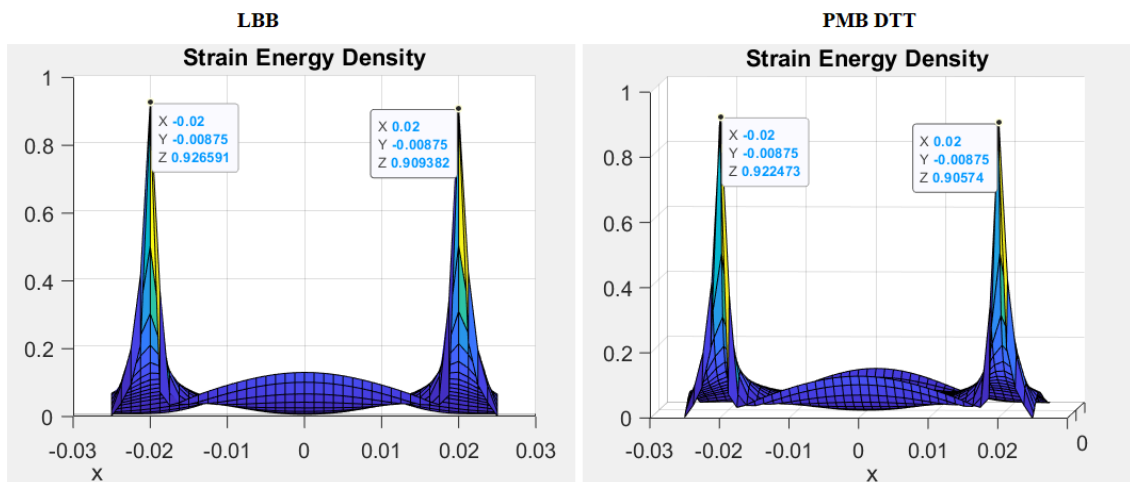


Figura 14 - Densidade De Energia De Deformação

Fonte: Próprio autor

Para o modelo LBB o gráfico atingiu picos no eixou z com valores de 0,926591 e 0,909382 J / m². Para o modelo PMB DTT o gráfico atingiu picos no eixou z com valores de 0,922473 e 0,90574 J / m².

Assim, os erros relativos serão:

$$E_r = \frac{|0,922473 - 0,926591|}{0,922473} \cdot 100\%$$

$$E_r = 0,446\%$$

$$E_r = \frac{|0,90574 - 0,909382|}{0,90574} \cdot 100\%$$

$$E_r = 0,402\%.$$

Como pode-se ver, tanto no trabalho externo quanto na densidade de energia de deformação, os resultados foram bastante próximos, o que valida o modelo LBB para este material.

4.3 Aplicação 2: “*Polycarbonate*”

Segue abaixo a tabela contendo as propriedades do material

Propriedades do material	Valor
Módulo de Young's (E) (GPa)	2,46
Densidade ρ (kg m ⁻³)	1192
Coeficiente de Poisson	0.38
Fator de intensidade de estresse crítico KI (MPa $\sqrt{m}$)	1.5

Tabela 2 – Propriedades do ‘*polycarbonate*’ usado por Ramulu e Kobayashi

– Fonte: Patriota, Tulio

Para este material não temos o valor de Taxa de liberação de energia, necessário para nosso modelo. Todavia, Tulio Patriota utiliza da seguinte relação para obter G_0 :

$$G_0 = \frac{K_I^2}{E}, \quad (29)$$

Assim, tem-se:

$$G_0 = \frac{1.5^2}{2.48} = 0.91 \text{ J m}^{-2}.$$

Para encontrarmos um valor de horizonte ideal, Tulio Patriota fez diversas simulações com diversos valores de horizonte e as comparou com um exemplo real de trinca do mesmo material. Segue abaixo os resultados:

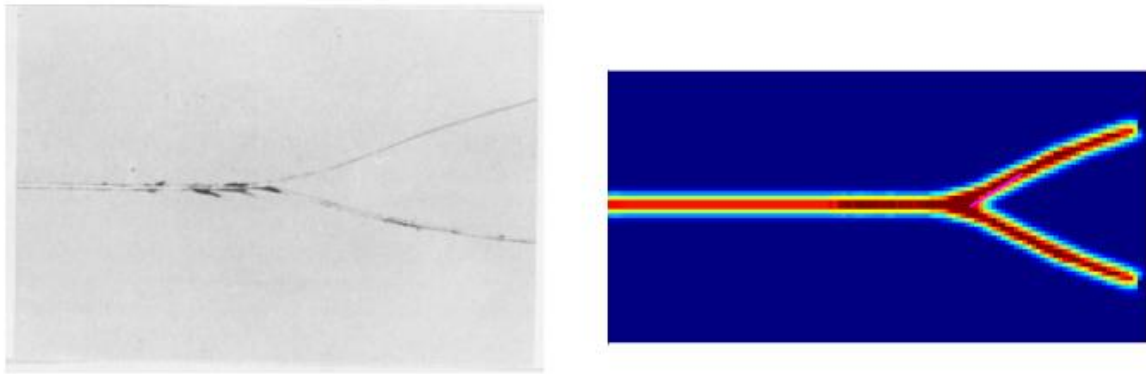


Figura 15 - Resultado experimental obtido por Ramulu & Kobayashi a esquerda e o resultado da simulação de Túlio Patriota para $\delta = 5$ mm.

Fonte: Patriota, Tulio

Como pode-se ver, os resultados para esse horizonte e demais propriedades de material foram bastante satisfatórios, assim, para o nosso problema, temos:

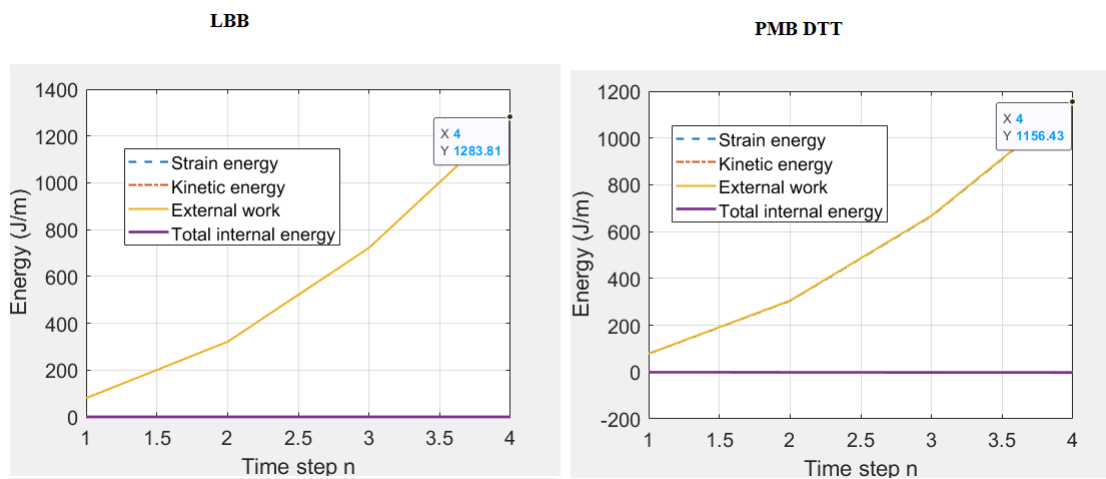


Figura 16

Fonte: Próprio autor

Para o modelo LBB o valor máximo de trabalho foi de 1283,81 J / m e para o modelo PMB DTT este valor foi de 1156,43 J / m.

Assim, o erro relativo será:

$$E_r = \frac{|1283,81 - 1156,43|}{1156,43} \cdot 100\%$$

$$E_r = 11,049\%.$$

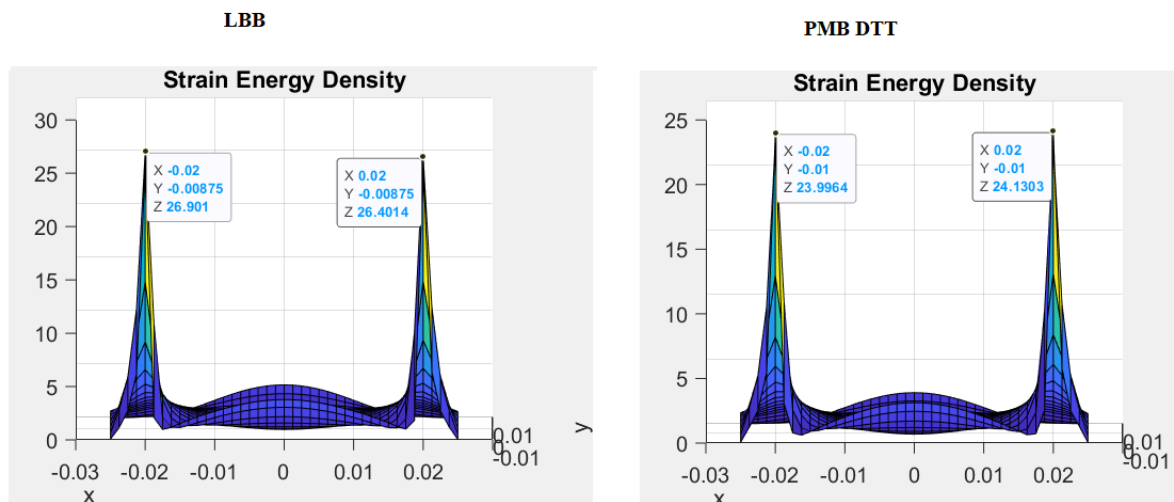


Figura 17

Fonte: Próprio autor

Para o modelo LBB o gráfico atingiu picos no eixo z com valores de 26,901 e 26,4014 J / m². Para o modelo PMB DTT o gráfico atingiu picos no eixo z com valores de 23,9964 e 24,1303 J / m².

Assim, os erros relativos serão:

$$E_r = \frac{|26,901 - 23,9964|}{23,9964} \cdot 100\%$$

$$E_r = 12,104\%$$

$$E_r = \frac{|26,4014 - 24,1303|}{24,1303} \cdot 100\%$$

$$E_r = 9,412\%.$$

Como pode-se ver, os erros para o material com coeficiente de Poisson maior que 0,25 são bem maiores, o que comprova a limitação dos modelos baseados em ligações nessas aplicações.

Para provar a ineficácia de modelos baseados em ligações em materiais com coeficiente de Poisson maior que 0,25 o ideal seria compara-los com modelos baseados em estado peridinâmicos, como o LPS. Todavia, devido ao fato de que no momento em que este trabalho foi feito não haver um hardware mais potente a disposição, não foi possível realizar tais simulações. No computador usado as simulações com o modelo LPS, além de demorarem mais de 12 horas para serem feitas, em todas as ocasiões a mensagem “Matlab parou de funcionar” era exibida, devido a limitação do processador.

Além disso, outra possível melhoria para os trabalhos sobre Peridinâmica seria a verificação de vários materiais com coeficiente de Poisson diferente. Porém, a Peridinâmica é uma teoria bastante recente, e poucos dados sobre testes empíricos podem ser encontrados na internet, o que dificulta bastante a obtenção de dados para realizar tais simulações.

5. CONCLUSÃO

A Peridinâmica é uma ciência bastante nova, porém já tem se mostrado bastante eficaz não apenas no estudo da propagação de trincas, mas também em diversas aplicações. Isso naturalmente desperta o interesse de pesquisadores e empresas no mundo todo e com isso mais descobertas são feitas, o que afeta diversas áreas da ciência e tecnologia. Atualmente, a implementação numérica da peridinâmica é feita por meio de softwares desenvolvidos por pesquisadores em seus trabalhos e, por isso, apresentam uma linguagem tipicamente acadêmica, o que dificulta o acesso e entendimento por parte de pessoas que não fazem parte destas comunidades. Todavia, com o passar do tempo, o interesse de empresas na eficiência da abordagem peridinâmica fará com que softwares comerciais mais simples e mais eficientes sejam desenvolvidos para que a peridinâmica seja aplicada com amplitude em diversas áreas da indústria.

Os modelos peridinâmicos inicialmente propostos, os baseados em ligações, são bastante eficientes em algumas aplicações, porém, modelos mais robustos se fazem necessário em aplicações mais complexas. Levando isso em consideração, é evidente a importância desses modelos mais simples, não apenas porque foram o início desse estudo, mas também pela facilidade em sua implementação e a não necessidade de um hardware potente para sua utilização.

REFERÊNCIAS

- [1] ARGENTA, Marco André. Mecânica do Contínuo. Universidade Federal do Paraná, 2021. Disponível em: <http://www.estruturas.ufpr.br/material/mecanicaContinuo> . Acesso em 07 de ago. de 2021.
- [2] Speronello, M. Study of computational peridynamics, explicit and implicit time integration, viscoelastic material. Dissertação (Mestrado em engenharia aeroespacial) – Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università degli Studi di Padova. 2015.
- [3] A.Agwai, I.Guven, E.Madenci – Predicting crack propagation with peridynamics: a comparative study (2011).
- [4] VAZIC, Bozo, PREMCHANDER, Andrew. Peridynamics. University of Strathclyde. Disponível em: <http://www.peridynamics.org/> - acesso em 15 de set. de 2021.
- [5] PATRIOTA, Tulio. Numerical investigation of damage models in two-dimensional peridynamics using MATLAB, POLITECNICO DI MILANO SCHOOL OF INDUSTRIAL AND INFORMATION ENGINEERING, 2019
- [6] R.C. Hibbeler, Resistência dos Materiais, Terceira Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2000.
- [7] A. R. Aguiar and R. L. Fosdick. A constitutive for a linearly peridynamic model. Mathematics and Mechanics of Solids, 2013.
- [8] S. A. Silling, P. N. Demmie, and T. Warren. Peridynamic simulation of high-rate material failure. Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM, Technical Report, 2007.
- [9] S. A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, and E. Askari. Peridynamic States and Constitutive Modeling. Journal of Elasticity, 2007 .

-
- [10] F. Bobaru, J. T. Foster, P. H. Geubelle, and S. A. Silling. Handbook of Peridynamic Modeling. Chapman and Hall/CR, 2016.
- [11] S. A. Silling. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and longrange forces. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48(1):175–209, 2000.
- [12] Q. Du, Y. Tao, and X. Tian. A peridynamic model of fracture mechanics with bond-breaking. Journal of Elasticity, 132(2):197—218, 2017.
- [13] S. A. Silling, M. Zimmermann, and R. Abeyaratne. Deformation of a Peridynamic Bar. Journal of Elasticity, 73(1):173–190, 2003.
- [14] Lai, M.; Rubin, D.; Kreml, E., Introduction to Continuum Mechanics, 4 th Edition, Elsevier, 2010
- [15] Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas, 2001, Soriano, H. L., Ed. Ciência Moderna, 1a Ed., Rio de Janeiro
- [16] Gelson Luz. Gelson Luz blog Materiais Disponível em: <https://materias.gelsonluz.com> – Acesso em 20 de jan. de 2022
- [17] Fernandes, V.; Martendal, C. Engenheiro de Materiais. Disponível em: <https://engenheirodemateriais.com.br/> - Acesso em 31 de jan. de 2022

Apêndice A

Descrição de movimento

Na figura a seguir, temos um sistema de coordenadas cartesiano, fixo no espaço e tempo, definido por $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$, bem como um objeto sofrendo deformação ao longo do tempo.

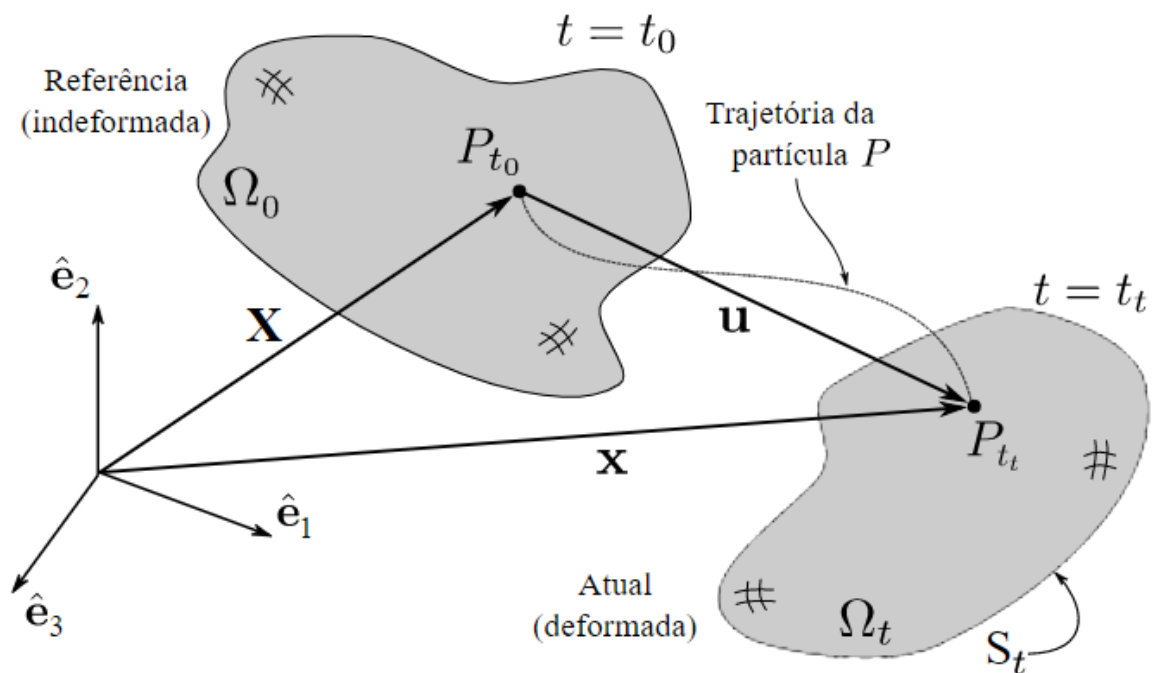


Figura 18 – Sistema cartesiano com um objeto sofrendo deformação

Fonte: [1] <http://www.estruturas.ufpr.br/material/mecanicaContinuo>

Analisando a partícula P , sua posição pode ser caracterizada pelo vetor posição. O vetor posição na configuração de referência, $t = t_0$ é:

$$\mathbf{X} = X_1 \hat{e}_1 + X_2 \hat{e}_2 + X_3 \hat{e}_3 = X_i \hat{e}_i \quad (30)$$

Para $t = t$ o vetor posição será:

$$x = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3 = x_i\hat{e}_i \quad (31)$$

O deslocamento (u) da partícula pode ser definido pela diferença entre o vetor posição na configuração atual ($t = t$) e o vetor posição na configuração de referencia ($t = 0$), como mostra a expressão seguinte:

$$u = x - X \quad (31)$$

Ou

$$u_i = x_i - X_i \quad (33)$$

Derivando a expressão que define o deslocamento pode-se determinar a velocidade da partícula P, pela seguinte expressão:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(u+X)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dX}{dt} \quad (34)$$

Sendo o componente X sempre constante, sua derivada será nula, assim, temos:

$$v = \frac{du}{dt} \quad (35)$$

Assim também pode-se definir a aceleração da partícula P pela variação de sua velocidade, como mostrada na seguinte equação:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} \quad (36)$$

Gradiente de deformações

Considerando as duas partículas, P e Q, em um mesmo corpo em duas configurações: referência, para $t = t_0$ e após sofrer deformação, em $t = t$.

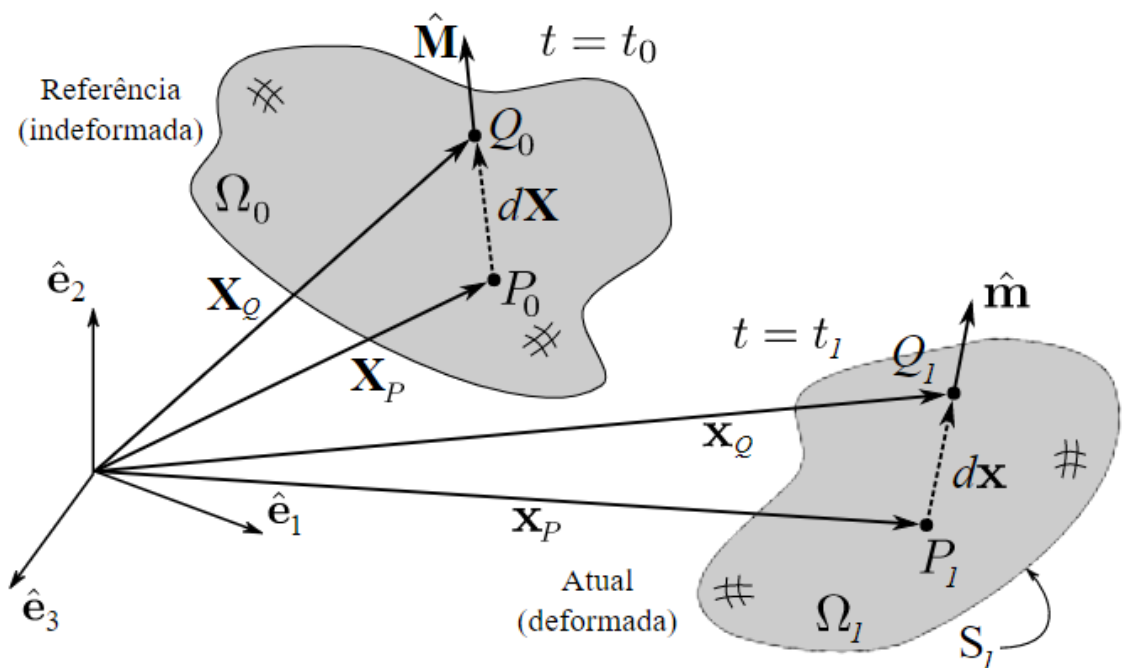


Figura 19

Fonte: [1] <http://www.estruturas.ufpr.br/material/mecanicaContinuo>

As partículas P_0 e Q_0 são separadas pelo vetor $d\mathbf{X}$, cuja direção é definida pelo vetor unitário $\hat{\mathbf{M}}$. Após o movimento as partículas ocuparão novos locais P_1 e Q_1 respectivamente, posicionadas uma em relação a outra, agora pelo vetor $d\mathbf{x}$, com direção definida por $\hat{\mathbf{m}}$.

Utilizando da descrição lagrangiana do movimento para a linha $\overrightarrow{P_0 Q_0}$ pode-se escrever:

$$dx = x_Q(X_Q, t) - x_P(X_P, t) \quad (37)$$

Substituindo o valor de X_Q , $X_Q = X_P + dX$ na equação 11 tem-se:

$$dx = x_p(X_P + dX, t) - x_p(X_P, t) \quad (38)$$

Sendo $X_p(X_1, X_2, X_3)$, $dX_p(dX_1, dX_2, dX_3)$ e $x_p(x_1, x_2, x_3)$ os vetores e suas respectivas coordenadas, portanto:

$$dx = [x_p(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, t) - x_p(x_1, x_2, x_3, t)]\hat{e}_i \quad (39)$$

Aplicando séries de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(a)}{\partial X^n} (x - a)^n \quad (40)$$

Sendo 'a' o ponto de aplicação da função.

Como a expansão em séries de Taylor é pela variação parcial em torno do ponto, no caso o ponto $X_i + dX_i$ (componentes de X e dX), relativo a X_i , sendo:

$$a = X_1 + dX_1 \text{ para } X_1$$

$$a = X_2 + dX_2 \text{ para } X_2$$

$$a = X_3 + dX_3 \text{ para } X_3$$

Ainda fazendo n variar de 0 a 2 somente, ou seja, truncando o somatório em 2 termos (com 0 é zero) e mantendo t fixo na configuração atual:

$$\begin{aligned}
 x_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) = & \\
 \frac{\partial x_i}{\partial X_1} (X_1 - (X_1 + dX_1)) + \frac{\partial x_i}{\partial X_2} (X_2 - (X_2 + dX_2)) + \frac{\partial x_i}{\partial X_3} (X_3 - (X_3 + dX_3)) & \\
 + & \\
 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial X_1^2} (X_1 - (X_1 + dX_1))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial X_2^2} (X_2 - (X_2 + dX_2))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial X_3^2} (X_3 - (X_3 + dX_3))^2 & \\
 + & \\
 \text{Erro} &
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Ressaltando que as expressões $X_i - (X_i + dX_i)$ representam a subtração de componentes de dois vetores 'X' e 'X + dX', sobrando apenas as componentes de dX_i . Assim, segue-se:

$$\begin{aligned}
 x_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) = & \\
 \frac{\partial x_i}{\partial X_1} (dX_1) + \frac{\partial x_i}{\partial X_2} (dX_2) + \frac{\partial x_i}{\partial X_3} (dX_3) & \\
 + \text{zz} & \\
 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial X_1^2} X_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial X_2^2} X_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial X_3^2} X_3^2 &
 \end{aligned}$$

$$+ Erro$$

(42)

Sendo as distâncias ∂X_i^2 muito pequenas se comparadas a dX_i , pode-se desconsidera-las:

$$dx = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (dX_j) \hat{e}_i + Erro \quad (43)$$

Pode-se desconsiderar o Erro, devido a sua ordem ser maior que quadrática, assim tornando-se irrelevante.

$$dx = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (dX_j) \hat{e}_i \quad (44)$$

O gradiente de deformação (F) pode ser definido por:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (45)$$

Assim, tem-se:

$$dx = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (dX_j) \hat{e}_i = F_{ij} dX_j \hat{e}_i = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} (dX_j) \hat{e}_i = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (46)$$

Tensor de Tensões de Cauchy

Quando uma força externa atua sobre um corpo, seus átomos ou moléculas que formam o contínuo são afetados e modificam a sua posição para atingir o equilíbrio. A resistência interna a esse movimento é chamada de força interna e pode ser interpretada como uma média das forças interatômicas, para caracterizá-la como uma variável macroscópica. A força interna em cada ponto material (partícula) é representada pelo campo vetorial de trações (uma força por área unitária). Esse conceito é o início para estabelecermos o estado de tensões de uma partícula. [6]

O tensor de tensões de Cauchy deve ser medido na configuração deformada do corpo e é obtido a partir do vetor de tensões.

Um corpo na configuração deformada foi seccionado por um plano Π passando pelo ponto $P(\mathbf{x}, t)$. Esse plano é definido pela sua normal $\hat{\mathbf{n}}$ (vetor unitário). Considerando uma área deformada Δa no entorno do ponto $P(\mathbf{x}, t)$ cuja força interna seja $\Delta \mathbf{f}$, tem-se:

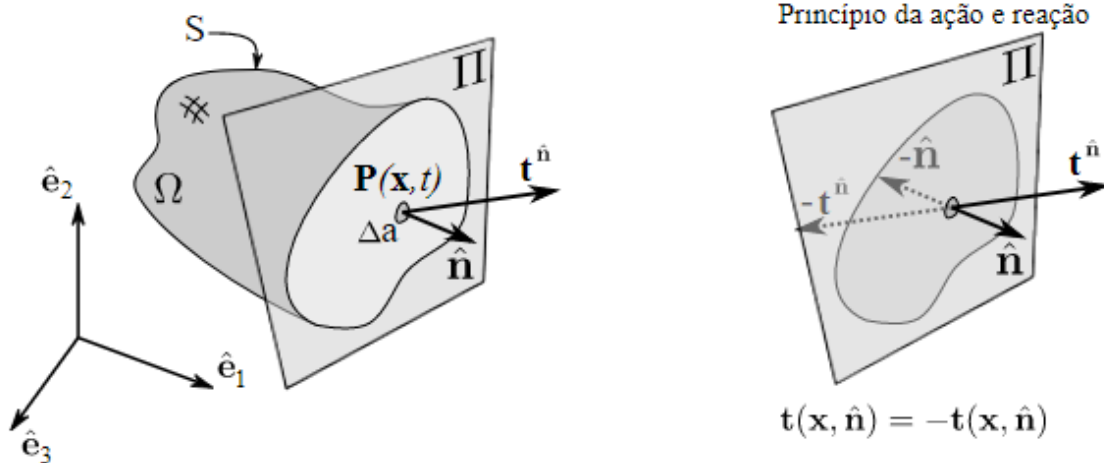


Figura 20

Fonte: [1] <http://www.estruturas.ufpr.br/material/mecanicaContinuo>

O vetor de tensões no ponto $P(x,t)$, que está associado a normal $\hat{n}$, será:

$$t^{\hat{n}}(x, t, \hat{n}) = \Delta a_{lim} \rightarrow 0 \left(\frac{\delta f}{\Delta a} \right) \quad (47)$$

Esse vetor de tensões representa a força por área deformada.

O postulado fundamental de Cauchy estabelece que o vetor de tensões $t^{\hat{n}}$ é função da posição x e da normal $\hat{n}$ de qualquer plano arbitrário que passe por $P(x,t)$.

Cauchy provou também que ao definirmos o vetor de tensões em função de três normais de três planos perpendiculares entre si, que passam por $P(x,t)$, também pode-se descrever o estado de tensão do ponto. Se adotarmos esses planos perpendiculares aos vetores unitários da base $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ tem-se três vetores de tensão associados a essas direções para o ponto $P(x,t)$.

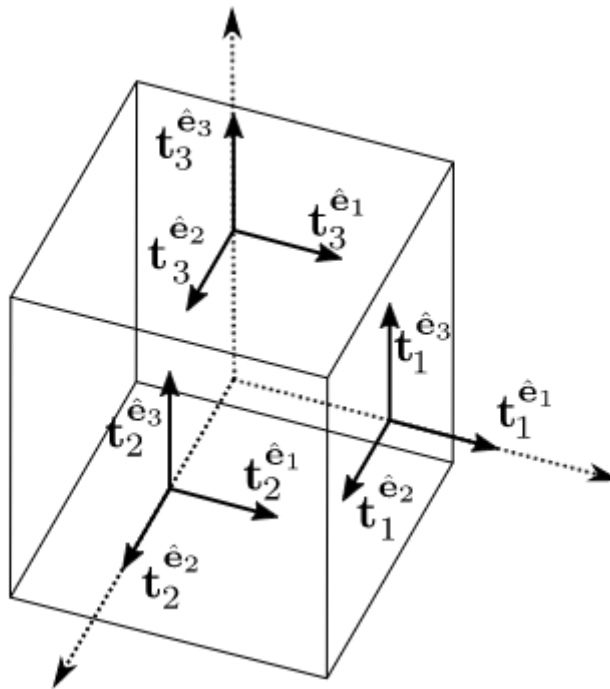


Figura 21

Decompondo cada vetor de tensão nas três direções tem-se:

$$\begin{aligned}
 t^{\widehat{e}_1} &= t_1^{\widehat{e}_1} \widehat{e}_1 + t_2^{\widehat{e}_1} \widehat{e}_2 + t_3^{\widehat{e}_1} \widehat{e}_3 \\
 t^{\widehat{e}_2} &= t_1^{\widehat{e}_2} \widehat{e}_1 + t_2^{\widehat{e}_2} \widehat{e}_2 + t_3^{\widehat{e}_2} \widehat{e}_3 \\
 t^{\widehat{e}_3} &= t_1^{\widehat{e}_3} \widehat{e}_1 + t_2^{\widehat{e}_3} \widehat{e}_2 + t_3^{\widehat{e}_3} \widehat{e}_3
 \end{aligned} \tag{48}$$

Assim, o tensor de tensões de Cauchy pode ser obtido ao compor um tensor de tensões considerando os três vetores simultaneamente:

$$\sigma = t^{\widehat{e}_1} \widehat{e}_1 + t^{\widehat{e}_2} \widehat{e}_2 + t^{\widehat{e}_3} \widehat{e}_3 = \sigma_{ij} \widehat{e}_i \widehat{e}_j \tag{49}$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Apêndice B

USO DO PROGRAMA

O programa em questão foi desenvolvido por Túlio Vinícius Berbert Patriota durante seu mestrado entre 2018 e 2019, utilizando o software MATLAB, para simular situações envolvendo trincas.

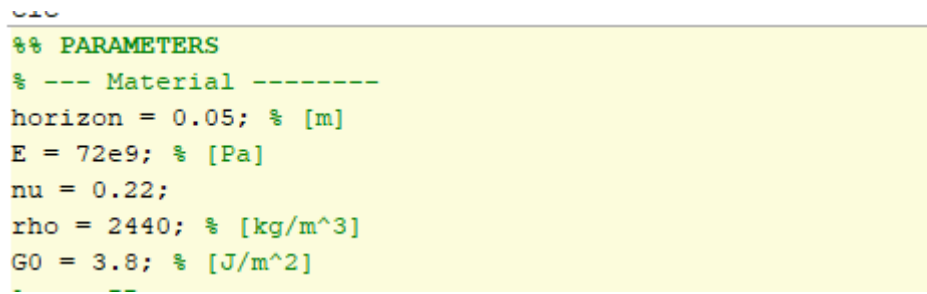
Após a instalação conforme indicado pelo autor, deve-se abrir quatro arquivos na pasta: “experiment_template.m”, “generateMesh.m”, “prescribedBC.m” e “modelParameters.m”

Na aba “experimente_template.m” deve-se preencher os dados da simulação conforme descrito abaixo:

Parâmetros

MATERIAL

Em “Material” deve-se colocar os parâmetros do material a ser simulado.



```
%%  
%% PARAMETERS  
% --- Material -----  
horizon = 0.05; % [m]  
E = 72e9; % [Pa]  
nu = 0.22;  
rho = 2440; % [kg/m^3]  
G0 = 3.8; % [J/m^2]
```

Figura 22

Fonte: Próprio autor

Sendo:

“horizon” o horizonte;

“E” o módulo de Young;

“nu” a razão de Poisson;

“G0” a Taxa de liberação de energia;

PD

```
% --- PD -----  
m = 4; % mesh ration (m = horizon/h)  
h = horizon./m; % [m]  
omega = 3; gamma = 1;% Influence function options (1 - Exp., 2 - constant, 3 - conical)  
par_omega = [horizon omega gamma];  
PA_alg = "PA-AC"; % "FA", "PA-HBB", "PA-AC"  
SE_alg = "None"; % "None", "Volume method"
```

Figura 23

Fonte: Próprio autor

Na sequência, em PD deve-se preencher a razão de malha “nome” de acordo com a simulação que se deseja realizar. Para este programa, recomenda-se um valor entre 4 e 6, devido a sua implementação ser apenas em 2D, conforme descrito neste trabalho em “3.4”

MESH

Em “mesh” é onde se define as dimensões da malha para realizar a simulação, sendo “a” e “b” as dimensões de altura e comprimento, respectivamente.

```
% --- Mesh -----  
a = 0.15; % height [m]  
b = 1; % length [m]  
[x,A] = mesh.generateMesh(h,[a b]); % Generates rectangular mesh
```

Figura 24

Fonte: Próprio autor

INITIAL DAMAGE

Em “initial damage” deve-se determinar a situação da trinca (se houver) no início da simulação.

Obs: Caso não haja trinca no problema não é necessário mudar esses valores, pois não influenciarão no resultado.

```
% --- Initial damage ---
notch_length = 0.05; % Example 5 cm
damage.crackIn = [-0.3 -0.075;-0.3 -0.075+notch_length]; % Coordinates of the crack initial segment
```

Figura 25

Fonte: Próprio autor

“notch_length” representa o tamanho inicial da trinca;

“damage.crackIn” é a localização da trinca na placa;

MODEL

```
% ---- MODEL -----
damage.damageOn = false; % True if applying damage to the model, false if not
model.name = "LBB"; % "PMB", "LBB", "Lipton Free Damage" "LPS 2D" "Linearized LPS"
solver = "Quasi-Static"; % "Quasi-Static", "Dynamic/Explicit"
[model,c,T,damage] = models.modelParameters(model,par_omega,damage,E,nu,G0); % Check if it works
```

Figura 26

Fonte: Próprio autor

Em “MODEL” é onde se ajustará o programa de acordo com o modelo desejado.

Deve-se atribuir para “damage.damageOn” “false” caso o problema não envolver trinca e “true” caso este envolver trinca.

Em “model.name” deve-se atribuir o modelo desejado entre aspas.

Obs: o modelo LBB é o mais simples e, por isso não é capaz de simular propagação de trincas.

Em “solver” deve-se atribuir “Quase-Static” para um problema estacionário ou “Dynamic/Explicit” para um problema dinâmico. Para mais informações, olhe o item 3.3.3 deste documento.

SIMULAÇÃO

Boundary conditions

```
% ----- Boundary conditions -----  
sigmay = 4.0; % [MPa] Example  
stresses = [0 sigmay 0]*1e6; % [sigma_x, sigma_y, tau_xy] - Pa/m^2  
stress_app = '-'; % '-' means BC provided directly (use prescribedBC.m). 't', 'l', 'r' and 'b' repr  
pc = prescribedBC(x,stresses); % SET YOUR BCs IN THIS FUNCTION  
[ndof,idb,bc_set,bodyForce,noFailZone] = mesh.boundaryCondition(x,stresses,m,h,A,3,stress_app,pc);
```

Figura 27

Fonte: Próprio autor

Em “sigmay” é onde define-se o valor da tensão da direção y.

“stresses” é um vetor contendo os dois valores de tensão em cada direção (x e y) e a tensão cisalhante τ_{xy} .

Em stress_app, deve-se colocar ‘-’ para duas aplicações de tensão encima da malha; ‘t’ para uma distribuição de tensão por toda a parte superior da malha; ‘l’ para uma distribuição de tensão na lateral esquerda da malha; ‘r’ para uma distribuição de tensão na lateral direita da malha; ‘b’ para uma distribuição de tensão por toda a parte inferior da malha.

Apêndice C

ALGORITMOS USADOS

Vidro de garrafa de refrigerante

```
function out = experiment_template()
close all
clc
%% PARAMETERS
% --- Material -----
horizon = 0.005; % [m]
E = 72e9; % [Pa]
nu = 0.22;
rho = 2440; % [kg/m^3]
G0 = 3.8; % [J/m^2]
% --- PD -----
m = 4; % mesh ration (m = horizon/h)
h = horizon./m; % [m]
omega = 1; gamma = 1; % Influence function options (1 - Exp., 2 - constant,
3 - conical)
par_omega = [horizon omega gamma];
PA_alg = "PA-AC"; % "FA", "PA-HBB", "PA-AC"
SE_alg = "None"; % "None", "Volume method"
% --- Mesh -----
a = 0.02; % height [m]
b = 0.05; % length [m]
[x,A] = mesh.generateMesh(h,[a b]); % Generates rectangular mesh
% --- Initial damage ----
notch_length = 0.05; % Example 5 cm
damage.crackIn = [-0.3 -0.075;-0.3 -0.075+notch_length]; % Coordinates of
the crack initial segment
% ---- MODEL -----
damage.damageOn = false; % True if applying damage to the model, false if
not
model.name = "LBB"; % "PMB", "LBB", "Lipton Free Damage" "LPS 2D"
"Linearized LPS"
solver = "Quasi-Static"; % "Quasi-Static", "Dynamic/Explicit"
[model,c,T,damage] =
models.modelParameters(model,par_omega,damage,E,nu,G0); % Check if it works

%% SIMULATION
b_parallelComp = false; % true for parallel computation

% ----- Boundary conditions -----
sigmay = 40; % [MPa] Example
stresses = [0 sigmay 0]*1e6; % [sigma_x, sigma_y, tau_xy] - Pa/m^2
stress_app = 't'; % '-' means BC provided directly (use prescribedBC.m).
't', 'l', 'r' and 'b' represents top, left, right and bottom edges of
retangular domain (tbr in next updates)
pc = prescribedBC(x,stresses); % SET YOUR BCs IN THIS FUNCTION
```

```

[ndof,idb,bc_set,bodyForce,noFailZone] =
mesh.boundaryCondition(x,stresses,m,h,A,3,stress_app,pc);

% ----- GENERATE FAMILY -----
[family,partialAreas,maxNeigh,surfaceCorrection] =
neighborhood.generateFamily_v2(x,A,horizon,m,1,false,PA_alg,SE_alg); % PA
Algs: FA (choose for inhomogeneous mesh), PA-HHB and PA-AC. SE Algs:
"None", "Volume"
    % It is possible to save multiple family files. Each file will be
    % identified as 'familyX.mat' where X is an integer. Here, X=1
% ----- Generate history variables -----
history = models.historyDependency(x,maxNeigh,model);

% ----- SOLVER -----
switch solver
case "Dynamic/Explicit"
    dt = 0.5e-6; % Time step
    t_tot = 500e-6;% Final time
    t = 0:dt:t_tot;
    n_tot = length(t);
    data_dump = 4; % Interval time steps to record outputs
    timeEval0 = tic;

    [t_s,u_n,phi,energy] =
solvers.solver_DynamicExplicit(x,t,idb,bodyForce,bc_set,family,A,partialAreas,
surfaceCorrection,T,c,rho,model,par_omega,history,noFailZone,damage,b_parallelComp,data_dump);

    t_cpu = toc(timeEval0);
    filename =
strcat('sim_m',int2str(m),'_d',int2str(horizon*1e3),'PMB','.mat'); % Choose
your file name
    save(filename,'x','idb','u_n','phi','energy','t_cpu');
    out.x = x; out.idb = idb; out.un = u_n; out.energy = energy; out.t
= t_cpu; out.phi = phi;
    disp("File saved as " +filename)
case "Quasi-Static"
    if damage.damageOn
        error('Disable damage to run a quasi-static solver')
    end
    n_tot = 4; % Number of load steps
    [u_n,r,energy] =
solvers.solver_QuasiStatic(x,n_tot,idb,bodyForce,bc_set,family,partialAreas
,surfaceCorrection,T,c,model,par_omega,ndof,A,damage,history,noFailZone);
    out.x = x; out.un = u_n; out.energy = energy;
otherwise
    error("Solver not yet implemented.")
    pause
end

%% POST-PROCESSING
switch solver
case "Dynamic/Explicit"
    postproc.PostProcessing_Dyn(x,u_n,n_tot,idb,energy,phi,t,t_s);
case "Quasi-Static"
    postproc.PostProcessing(x,u_n,n_tot,idb,energy);
otherwise
end
end

```

Polycarbonato

```
function out = experiment_template()
close all
clc
%% PARAMETERS
% --- Material -----
horizon = 0.005; % [m]
E = 2.48e9; % [Pa]
nu = 0.38;
rho = 1192; % [kg/m^3]
G0 = 0.91; % [J/m^2]
% --- PD -----
m = 4; % mesh ration (m = horizon/h)
h = horizon./m; % [m]
omega = 1; gamma = 1; % Influence function options (1 - Exp., 2 - constant,
3 - conical)
par_omega = [horizon omega gamma];
PA_alg = "PA-AC"; % "FA", "PA-HBB", "PA-AC"
SE_alg = "None"; % "None", "Volume method"
% --- Mesh -----
a = 0.02; % height [m]
b = 0.05; % length [m]
[x,A] = mesh.generateMesh(h,[a b]); % Generates rectangular mesh
% --- Initial damage ----
notch_length = 0.05; % Example 5 cm
damage.crackIn = [-0.3 -0.075;-0.3 -0.075+notch_length]; % Coordinates of
the crack initial segment
% ---- MODEL -----
damage.damageOn = false; % True if applying damage to the model, false if
not
model.name = "LBB"; % "PMB", "LBB", "Lipton Free Damage" "LPS 2D"
"Linearized LPS"
solver = "Quasi-Static"; % "Quasi-Static", "Dynamic/Explicit"
[model,c,T,damage] =
models.modelParameters(model,par_omega,damage,E,nu,G0); % Check if it works

%% SIMULATION
b_parallelComp = false; % true for parallel computation

% ----- Boundary conditions -----
sigmay = 40; % [MPa] Example
stresses = [0 sigmay 0]*1e6; % [sigma_x, sigma_y, tau_xy] - Pa/m^2
stress_app = 't'; % '-' means BC provided directly (use prescribedBC.m).
't', 'l', 'r' and 'b' represents top, left, right and bottom edges of
retangular domain (tbr in next updates)
pc = prescribedBC(x,stresses); % SET YOUR BCs IN THIS FUNCTION
[ndof,idb,bc_set,bodyForce,noFailZone] =
mesh.boundaryCondition(x,stresses,m,h,A,3,stress_app,pc);

% ----- GENERATE FAMILY -----
[family,partialAreas,maxNeigh,surfaceCorrection] =
neighborhood.generateFamily_v2(x,A,horizon,m,1,false,PA_alg,SE_alg); % PA
Algs: FA (choose for inhomogeneous mesh), PA-HHB and PA-AC. SE Algs:
"None", "Volume"
```

```

        % It is possible to save multiple family files. Each file will be
        % identified as 'familyX.mat' where X is an integer. Here, X=1
% ----- Generate history variables -----
history = models.historyDependency(x,maxNeigh,model);

% ----- SOLVER -----
switch solver
case "Dynamic/Explicit"
    dt = 0.5e-6; % Time step
    t_tot = 500e-6;% Final time
    t = 0:dt:t_tot;
    n_tot = length(t);
    data_dump = 4; % Interval time steps to record outputs
    timeEval0 = tic;

    [t_s,u_n,phi,energy] =
solvers.solver_DynamicExplicit(x,t,idb,bodyForce,bc_set,family,A,partialAre
as,surfaceCorrection,T,c,rho,model,par_omega,history,noFailZone,damage,b_pa
rallelComp,data_dump);

    t_cpu = toc(timeEval0);
    filename =
strcat('sim_m',int2str(m),'_d',int2str(horizon*1e3),'PMB','mat'); % Choose
your file name
    save(filename,'x','idb','u_n','phi','energy','t_cpu');
    out.x = x; out.idb = idb; out.un = u_n; out.energy = energy; out.t
= t_cpu; out.phi = phi;
    disp("File saved as " +filename)
case "Quasi-Static"
    if damage.damageOn
        error('Disable damage to run a quasi-static solver')
    end
    n_tot = 4; % Number of load steps
    [u_n,r,energy] =
solvers.solver_QuasiStatic(x,n_tot,idb,bodyForce,bc_set,family,partialAreas
,surfaceCorrection,T,c,model,par_omega,ndof,A,damage,history,noFailZone);
    out.x = x; out.un = u_n; out.energy = energy;
    otherwise
        error("Solver not yet implemented.")
        pause
end

end

%% POST-PROCESSING
switch solver
case "Dynamic/Explicit"
    postproc.PostProcessing_Dyn(x,u_n,n_tot,idb,energy,phi,t,t_s);
case "Quasi-Static"
    postproc.PostProcessing(x,u_n,n_tot,idb,energy);
otherwise
end
end

```