

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**GEOMETRIA ESFÉRICA POR MEIO DE MATERIAIS
MANIPULÁVEIS**

Joana d’Arc da Silva Reis

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Murari

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2006

516

R375g

Reis, Joana D'Arc da Silva

Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis /
Joana D'Arc da Silva Reis. – Rio Claro : [s.n.], 2006
158 f. : il., tabs., fots.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Claudemir Murari

1. Geometria. 2. Educação matemática. 3. Softwares de
geometria dinâmica. 4. Caleidoscópio. 5. Ensino de
Geometria. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela STATI – Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Claudemir Murari (orientador)

Henrique Lazari

Ruy Madsen Barbosa

Joana D’Arc da Silva Reis (aluna)

Rio Claro, 09 de Junho de 2006.

Resultado: _____

*A minha mãe, Cléa, e a minha avó, Ninete,
pelo amor e carinho com participaram de toda
minha caminhada.*

*A meus irmãos, Paulo e João, pela fiel
“torcida”.*

AGRADECIMENTOS

Quero expressar meus agradecimentos para todos aqueles que participaram da caminhada que resultou nesta dissertação. Em particular,

Ao Claudemir Murari, pela orientação desta dissertação e pela confiança depositada na minha capacidade em realizá-la.

A Lenis Murari e a Marisa da Silveira, pelas sugestões e correções que melhoraram o texto.

Aos professores Henrique Lazari, Marie-Claire Ribeiro Póla, Geraldo Perez e Chateaubriand Nunes Amâncio, pelas sugestões apontadas durante a qualificação.

Aos amigos Maurício e Emerson, por darem oportunidade de interlocução.

A todos meus colegas contemporâneos que participaram de debates, aulas, seminários etc. e, assim, nutriram minhas reflexões.

À Elisa e Ana, funcionárias do Departamento de Matemática, pela presteza e atenção.

Aos funcionários da Secção da Pós-Graduação do IGCE, pelo apoio técnico.

Ao Luís, meu amigo e companheiro, por seu grande apoio e compreensão nas horas mais difíceis.

SUMÁRIO

RESUMO	7
INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 1	9
CAPÍTULO 2	79
CAPÍTULO 3	84
CONSIDERAÇÕES FINAIS	138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141
ANEXOS	144

ÍNDICE

RESUMO	7
ABSTRACT	8
INTRODUÇÃO	9
CAPÍTULO 1: A PROBLEMÁTICA	11
1. Ensino de Geometria	11
2. Resolução de Problemas & Investigações Matemáticas	13
3. A Informática Na Educação E as Metáforas sobre o seu Papel	16
4. Caleidoscópios	26
5. A Geometria nos “Elementos” de Euclides	36
6. O “Nascimento” das Geometrias Não-Euclidianas	39
CAPÍTULO 2: METODOLOGIA DE ESTUDO	79
1. O Método Qualitativo	79
2. Procedimentos	81
CAPÍTULO 3: APRESENTAÇÃO E ESTUDO DOS DADOS	84
CONSIDERAÇÕES FINAIS	138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141
ANEXOS	144

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo identificar materiais manipuláveis e descrever o seu uso em um processo de ensino e aprendizagem de Geometria Esférica. Para isso, foi desenvolvido um curso de extensão universitária sobre Geometria Esférica utilizando tais materiais e, desse modo, investigar esta utilização em um ambiente natural de sala de aula. Primeiramente, foram feitos estudos nos livros e dissertações que abordam as Geometrias Não-Euclidianas, bem como uma pesquisa sobre os recursos pedagógicos disponíveis que pudessem ser utilizados neste contexto, tais como *softwares* de geometria dinâmica, caleidoscópios, além de outros materiais manipuláveis. Após esta etapa, fizemos um estudo piloto para verificar a adequação e o encadeamento na aplicação das atividades. Em seguida, elaboramos e aplicamos o curso de extensão intitulado “Geometria Esférica” que foi direcionado a alunos do 3º ao 8º semestres da Graduação em Matemática da UNESP de Rio Claro. Os sujeitos de nossa pesquisa foram dez alunos deste programa de formação. Os dados coletados foram analisados qualitativamente, buscando compreender como estes materiais manipuláveis podem colaborar na aquisição de conceitos e propriedades básicas da Geometria Esférica. De acordo com os resultados, acreditamos que esta pesquisa pode auxiliar na busca por propostas alternativas para o ensino de Geometria, possibilitando uma melhor experiência de aprendizagem do futuro professor, enquanto aluno de graduação.

ABSTRACT

This research aims to identify handling materials and to describe their use in a teaching learning process of Spherical Geometry. For this, we developed a course on Spherical Geometry for students of higher education using those materials and, thus, investigate this use in a natural classroom environment. First, we studied books and dissertations about Non-Euclidean Geometries, as well as, we had done a search about available pedagogic sources that could be used in this context, such as *softwares* of dynamic geometry, kaleidoscope, besides others handling materials. After this stage, we made a pilot study to verify the adaptation and chaining in the application of the activities. Following, we elaborated and applied the course entitled “Spherical Geometry” that was addressed to the math students at the third to the eighth semesters of UNESP College, at Rio Claro city. The subjects of our research were ten students from this institution. The collected material were analyzed qualitatively, in order to understand how these handle materials can collaborate in the acquisition of concepts and basic proprieties of the Spherical Geometry. According to our results, we think that this research can assist in a search for alternatives purposes to the Geometry teaching, making possible a better experience of learning for the future teacher, while graduated student at a college.

INTRODUÇÃO

Sabemos que o ensino de Geometrias Não-Euclidianas, em geral, não faz parte dos currículos dos cursos de graduação em Matemática. Mas, se considerarmos a geometria como instrumento para a percepção, compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive, a realização de atividades sobre Geometrias Não-Euclidianas pode contribuir nesses aspectos, assim como em outras áreas do conhecimento. Outro aspecto interessante é que nem toda regra ou propriedade da Geometria Euclidiana pode ser aplicada na Geometria Esférica, possibilitando assim, reflexões e comparações sobre essas geometrias.

1. Trajetória pessoal de investigação

A primeira leitura que fiz sobre as geometrias não-euclidianas, particularmente a esférica e elíptica, foi na Universidade Estadual de Londrina, quando fazia o curso de Especialização em Educação Matemática. Minha orientadora neste curso, Denise Trindade Moreira, apresentou dois livros sobre o tema. As obras foram, “Non – Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere” (Lénárt, 1996) e “As Aventuras de Anselmo Curioso: Os mistérios da geometria” (Petit, 1982).

Na monografia escrita para conclusão deste curso, apresento um projeto de ensino de geometria, comparando conceitos básicos da geometria plana e esférica. Este projeto inclui o uso de materiais manipuláveis, esferas de isopor, alfinetes e fitas, por exemplo.

O livro de Lénárt é didático, com uma sequência de atividades investigativas comparando a geometria plana e esférica. Vem acompanhado de um material composto por uma esfera de acrílico transparente, uma régua e transferidor esférico, um compasso esférico, toros, hemisférios transparentes e canetas para transparência que se encaixam no compasso.

O livro de Petit é uma história em quadrinhos, que conta a aventura de Anselmo em suas investigações acerca das geometrias. Apesar de ser bastante original, há na introdução uma advertência de que não é um tratado, nem um curso, pois não possui o rigor matemático apropriado para tal. Trata-se de uma apresentação lúdica de conceitos básicos sobre as geometrias não-euclidianas e, o estudo inicial sobre o tema mostrou outras geometrias, até então, desconhecidas por mim e muitos de meus colegas.

Após a primeira etapa de estudo, senti necessidade de continuar a pesquisa, pois muitas questões surgiram neste trilhar. Desse modo, ingressei no programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, na Universidade Estadual Paulista, para desenvolvimento da pesquisa, sob a orientação do professor Claudemir Murari.

No decorrer desse estudo, descobrimos o *software* de geometria dinâmica *Cinderella* e caleidoscópios que se mostraram interessantes recursos, pois permitem a construção e visualização de figuras sobre a superfície esférica. Deste modo, apresentamos neste trabalho um estudo sobre o uso de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da Geometria Esférica.

Sob essa perspectiva, organizou-se este trabalho em três capítulos, contendo ao final nossas considerações.

No Capítulo I, descrevemos a Problemática, com a finalidade de justificar a importância deste trabalho, bem como os aportes teóricos para esta pesquisa.

No Capítulo II, apresentamos a metodologia em que se fundamenta esta investigação.

No Capítulo III, foram reunidos os dados coletados, as descrições e a discussão dos dados com o intuito de buscar possíveis respostas a esta investigação.

Ao final, fazemos nossas considerações finais e apresentamos um possível encaminhamento para novas investigações a respeito do tema.

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA

1. Ensino de Geometria

A Geometria constitui uma parte importante da Matemática. Estuda o espaço, as formas nele existentes e as suas relações. Sua importância pode ser percebida tanto do ponto de vista prático quanto na organização do pensamento lógico e dedutivo. Oliveira (2004) diz que:

Desconhecer a Geometria pode interferir na apreensão da relação homem e espaço físico, pois a “leitura interpretativa” do mundo exterior se torna incompleta, a organização do pensar geométrico fica limitada, dificultando a compreensão da matemática e sua conexão com outras disciplinas.

Da forma clássica, originária dos gregos, aos dias atuais, a Geometria teve um papel relevante no desenvolvimento e aprofundamento das descobertas matemáticas. Hoje, existem diversas geometrias e diferentes são os seus campos de atuação, mas isto não confere primazia de uma sobre a outra. Uma geometria pode ser mais adequada somente na solução de certos tipos de problemas.

Entretanto, o ensino de geometria tem ignorado este fato, visto que as Geometrias Não-Euclidianas raramente são exploradas, mesmo nos cursos de matemática. Os motivos desta ausência em grande parte dos programas escolares, em todos os níveis, não foi objetivo de nossa pesquisa, porém Pataki (2000) aponta que a falta de conhecimento sobre o tema, por parte do professor, pode ser um dos motivos que contribui com essa ausência.

Historicamente, o ensino de Geometria está marcado pelo “formalismo rigoroso” que privilegia o método axiomático em seu aspecto formal. Os conceitos e propriedades da Geometria, neste modelo, são apresentados como idéias prontas e acabadas, ignorando uma característica importante da Matemática, apresentada por Veloso (1998, p. 59.): “a existência de múltiplas perspectivas possíveis na construção dos conceitos e na exploração e resolução de situações problemáticas”.

Em contrapartida, as publicações nesta área apontam várias tendências didático-pedagógicas para o ensino de Matemática e, em decorrência disso, para o ensino de

Geometria que as abordam de forma mais exploratória e investigativa. Entre as tendências existentes, destacamos a Resolução de Problemas e as Investigações Matemáticas. Não temos a intenção de desconsiderar a importância das outras tendências, mas sim, indicar nossas fontes de inspiração nesta pesquisa.

Ainda, sobre ensino e aprendizagem de Geometria, vários estudos sugerem que a utilização de materiais manipuláveis, definida por Reys (1971, apud Nacarato, 2005, p. 3): “objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar”, pode contribuir com um aspecto importante desses processos, o desenvolvimento da visualização, cujo significado, no dicionário Aurélio, é o de “transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis”.

De acordo com (Nacarato, p. 4), o desenvolvimento da habilidade de representar mentalmente um objeto que não está ante os olhos do sujeito, no momento de sua ação sobre este objeto, “depende da exploração de modelos ou materiais que possibilitem ao aluno a construção de imagens mentais”.

Consideramos quatro elementos fundamentais, enunciados por Pais (p.66, 1996), que intervêm neste processo: objeto, conceito, desenho e imagem mental.

O termo “objeto”, neste caso, está associado aos modelos ou materiais. Por exemplo, o objeto associado ao conceito de esfera pode ser uma esfera de isopor, madeira, acrílica ou outros materiais. Esses objetos também são chamados de “modelos físicos”¹ para o ensino de geometria.

Em virtude de sua natureza, estes objetos permitem a manipulação física de modelos geométricos. Porém, lembramos que eles são apenas modelos físicos que podem contribuir na formação das idéias e não substitutos delas. Podemos considerar o objeto como uma forma de representação primária do conceito. “Primária no sentido de que ele é a forma mais acessível e imediata à sensibilidade humana” (Pais, p. 68, 1996).

A representação de conceitos geométricos por desenhos é um recurso bastante usado no ensino e aprendizagem da geometria. A sua presença pode ser observada tanto nas aulas como nos livros didáticos. Contudo, tanto os objetos quanto os desenhos, são somente representações dos conceitos geométricos.

¹ Termo usado por Pais, p. 67.

De acordo com Pais (1996, p. 69) “este recurso gráfico é utilizado para representar desde as noções fundamentais, até o caso de figuras ilustrando conceitos ou teoremas clássicos”. Entretanto, alguns aspectos devem ser observados sobre os recursos gráficos de desenhos e os seus meios de representação, neste trabalho. Pois, além dos recursos tradicionais, lápis, papel, régua e compasso, utilizamos um *software* de Geometria Dinâmica nas representações geométricas. Este último permite a manipulação de figuras já construídas.

2. Resolução de Problemas & Investigações Matemáticas

Começar o ensino de um tópico específico da Matemática pelo produto de sua gênese, isto é, pelas definições acabadas, dissociadas do verdadeiro processo de formação do pensamento como geralmente ocorre nas tendências formalista e tecnicista, significa sonegar ao aluno o acesso efetivo a esse conhecimento, isto é, a essa forma especial de pensamento e linguagem e, portanto, a essa forma especial de leitura do mundo. (Fiorentine, 1995, p. 13).

Em relação à palavra problema, a seguinte definição foi aceita: “uma situação em que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que leve à solução” (Lester, 1983). Por este motivo, é possível que uma mesma situação represente um problema para algumas pessoas e para outras não, quer porque não se interessem pela situação, quer porque conheçam procedimentos automáticos para solucioná-la. No último caso, a tarefa se constituiria em exercício, o qual, não exige um processo de reflexão ou tomada de decisões sobre seqüência de passos necessários a sua solução.

Diferentemente do ensino fundamentado na transmissão de conhecimentos, a Resolução de Problemas pode constituir não somente um conteúdo educacional, mas também uma forma de conceber as atividades educacionais. Embora a perspectiva adotada nessa pesquisa seja a de “ensinar através da resolução de problemas”, apresentar um pouco do referencial teórico sobre o tema pode ser importante para um melhor esclarecimento a respeito deste assunto e do desenvolvimento deste texto.

Três abordagens distintas da resolução de problemas se destacam: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar através da resolução de

problemas (Onuchic, 1999, e suas referências). Distinguir os diferentes tipos pode ajudar a entender os significados que são atribuídos ao termo “resolução de problemas”.

Na concepção “**ensinar sobre resolução de problemas**”, destaca-se o modelo de resolução de problemas de Polya ou uma variante deste. Segundo Polya, existem quatro fases no processo de resolução de problemas matemáticos: compreender o problema, descoberta de um plano, execução do plano e verificação. Estas fases devem ser ensinadas aos alunos assim como algumas estratégias de resolução que lhes serão úteis. O professor tem o papel de questionador, tendo como objetivo auxiliar o aluno e desenvolver nele a capacidade de resolver futuros problemas por si mesmo.

Ao “**ensinar a resolver problemas**”, a preocupação do professor é aplicar o conhecimento matemático na resolução destes. Aos alunos são apresentados conceitos e exemplos das estruturas matemáticas para que apliquem na resolução de problemas. A aprendizagem matemática tem como finalidade capacitar o aluno em aplicar esse conhecimento.

Finalmente, no modo “**ensinar através da resolução de problemas**”, o processo de ensino e aprendizagem tem como ponto de partida um problema, que é proposto de modo a contribuir na formação de conceitos e no desenvolvimento de estratégias de resolução antes de sua apresentação em linguagem matemática formal. Aqui, escrita com iniciais maiúsculas, a Resolução de Problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, isto é, um meio de se ensinar matemática. Daí, a razão das letras iniciais serem maiúsculas.

Nesta abordagem pedagógica, o professor deve possibilitar ao aluno o máximo de independência para que ele possa desenvolver autenticamente seus próprios mecanismos de resolução do problema, através de elaborações de conceitos próprios. A estruturação didática de tais situações tem o objetivo de apresentar problemas de modo que os alunos aceitem o desafio.

Segundo Ponte (2003, p. 13), “Investigar é procurar conhecer o que não sabe”. Nas Investigações Matemáticas, como metodologia de ensino e aprendizagem, os alunos são colocados diante de uma situação, objeto, fenômeno ou mecanismo, que possibilitem a descoberta de padrões, relações, semelhanças e diferenças, de forma a conseguir chegar a generalizações. Esta situação é semelhante ao trabalho de investigação dos matemáticos.

As “tarefas” nas investigações matemáticas podem ser bastante elaboradas ou mais simples e, podem ser apresentadas a partir de uma pequena variação de um fato ou procedimento conhecido.

Ponte e Matos afirmam que as Investigações Matemáticas têm aspectos comuns com a resolução de problemas. Os processos de raciocínios envolvidos podem ser complexos e requerem bastante empenho e criatividade por parte do aluno. Entretanto, apresenta diferenças entre elas:

Enquanto os problemas matemáticos tendem a caracterizar-se por assentarem em dados e objetivos bem concretos, as investigações têm um ponto de partida muito menos definido. Assim, a primeira tarefa do aluno é tornar a questão mais precisa, uma característica que as investigações matemáticas têm em comum com a formulação de problemas. (Ponte e Matos, p. 1-2)

Na perspectiva da Resolução de Problemas, temos as seguintes classificações:

“Problema em aberto: são os que não contêm no seu enunciado pista alguma para a sua resolução”. (Buriasco, 2002) Eles não podem ser resolvidos por algoritmos ou conhecimentos matemáticos específicos, podem ter mais de uma maneira de resolução e admitem mais de uma solução.

“Situações-problema que podem ser definidas como aquelas nas quais a primeira coisa a fazer é identificar o problema inerente, cuja solução vai ajudar a manejar as próprias situações” Buriasco (2002). Neste tipo de situação, o aluno primeiramente terá que detectar o(s) problema(s) envolvido(s) para depois criar estratégias de resolução. Pode-se dizer que o aluno terá que “modelar” uma situação. Em Barbosa (2001), essa situação é classificada como ambiente de aprendizagem da modelagem de nível 1.

De acordo com as classificações apresentadas anteriormente, percebe-se, na Resolução de Problemas, um aspecto comum com a Investigação Matemática. São as situações em que a primeira coisa a fazer é identificar o problema e definir um ponto de partida.

3. A informática na educação e as metáforas sobre seu papel

Segundo Janete Bolite Frant (2001), as pesquisas que investigam a utilização da tecnologia como ferramenta mostram a idéia de que o computador tem função mediadora do conhecimento, uma ferramenta que pode facilitar o ensino e a aprendizagem de matemática. Mesmo não partilhando da idéia de “agente facilitador”, podemos verificar que nesse caso, a ampliação dos recursos didáticos ocorre no sentido de apresentar uma outra ferramenta que difere das tradicionalmente utilizadas, como por exemplo, os livros didáticos. Nas pesquisas que defendem a utilização do ambiente computacional como meio de expressão, também ampliam as possibilidades de trabalho do professor. Assim, como a fala, a escrita e a pintura podem ser meios de expressão, as animações são exemplos que utilizam as tecnologias com essa finalidade.

Saindo da visão dicotômica, ferramenta ou meio de expressão, Janete Bolite Frant (2001) apresenta outra metáfora sobre o papel das tecnologias no funcionamento da mente humana. A tecnologia é vista como uma prótese, embora não seja como algo reparador, sentido normalmente atribuído ao termo. Por exemplo, se um artefato é usado para preencher a parte que falta em um osso fraturado, repara o osso danificado. Neste caso, a idéia de prótese vai além de reparar uma falta, é vista como um objeto que modifica a percepção de quem a usa. Citando o mesmo exemplo da referência, a bengala de um cego não é um objeto reparador e, também não é apenas auxiliador da visão, ela modifica essa percepção. O uso da tecnologia como prótese está no sentido de fazer diferente.

Borba e Penteado (2001) apresentam a metáfora seres-humanos-com-mídias e, apoiando-se em idéias de Tikhomirov e Levy, propõem a interação entre tecnologia e ser humano, na qual o conhecimento é produzido pelo coletivo formado por seres humanos com mídias, constituindo assim o sistema “ser-humano-computador”. Neste caso, a tecnologia é considerada como um novo “ator” que modifica os processos de produção do conhecimento.

Sobre o papel da tecnologia na educação, acreditamos no sentido que esta modifica esse processo, um ponto comum as duas metáforas apresentadas anteriormente: prótese e seres-humanos-com-mídias. Neste caso, não pretendemos investigar se há melhora no

ensino e aprendizagem de Geometria Esférica, buscamos apenas discutir essas mudanças, quando utilizamos um *software* de Geometria Dinâmica nesse processo.

3.1. Softwares de Geometria Dinâmica

Os programas de Geometria Dinâmica têm como característica a interatividade, além de permitirem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades e serem destinados ao ensino e aprendizagem de geometria. Como exemplos, temos: Cabri Géomètre, Geometricks, Sketchpad e Cinderella. Estes programas apresentam recursos com os quais os alunos podem realizar construções geométricas de modo mais rápido e preciso do que com a régua e compasso tradicionais. Nos ambientes proporcionados por estes programas, é possível construir figuras que podem ser modificadas com o deslocamento de seus elementos, conservando invariantes suas propriedades geométricas.

As construções geométricas e as transformações ocorridas pelo “arrastar”² podem ser visualizadas em tempo real. Outro recurso disponível é o de animação, que movimenta automaticamente um ou mais objetos geométricos de uma figura. Os programas para geometria dinâmica têm potencialidades para modificar os modos de resolução de problemas e de exploração de situações problemáticas. A abordagem da geometria através deste tipo de *software* acrescenta a perspectiva dinâmica no estudo da geometria.

No Ambiente de Geometria Dinâmica, o aluno pode formular e testar suas próprias conjecturas, visualizar conceitos, estabelecer relações, compreender e descobrir propriedades geométricas. Isso é possível, pois o aluno pode construir e simular diversos casos de uma figura (Zulatto, 2002). O *software* oferece “menus” de criação e construção em linguagem geométrica formal, facilitando a comunicação entre o sistema informático e o usuário.

Gravina & Santarosa (1998) relatam que em AGD’s:

O aluno age sobre os objetos matemáticos num contexto abstrato, mas tem como suporte a tela do computador. A multiplicidade de desenhos enriquece a concretização mental, não existindo mais as situações prototípicas responsáveis pelo entendimento inadequado, (p. 19).

² Ver Zulatto, 2002 p. 22-23.

Acreditamos que a afirmação de não existir mais as situações prototípicas é muito forte, pois não depende somente das características do *software*, mas também da concepção do professor na sua utilização. Se este concebe esse ambiente como “papel, régua e compasso” eletrônicos, explorando somente atividades “estáticas”, as situações poderiam ocorrer da mesma forma que no contexto tradicional.

3.2.O *software Cinderella*

O *software Cinderella* foi desenvolvido por Jürgen Richter-Gebert e Ulrich H. Kortenkamp, originalmente em alemão. O responsável pela versão de Portugal é Jorge Nuno Silva. É um programa de Geometria Dinâmica, termo inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Resmussen. Além das características mencionadas anteriormente sobre os programas de Geometria Dinâmica, o Cinderella permite construções geométricas no plano euclidiano, hiperbólico e elíptico e, também mostra as projeções das figuras de um plano em outro. A figura 1 apresenta a janela principal, “vista” euclidiana.

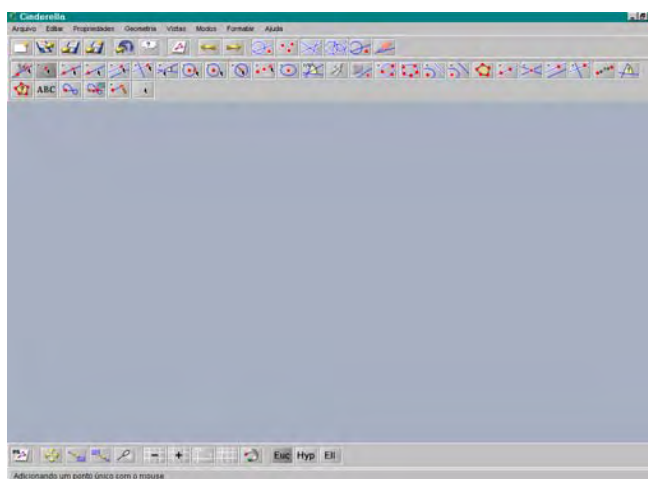


fig. 1: vista euclidiana do *Cinderella*

Outra janela, também importante para esse estudo, mostra a “vista” elíptica. Essa, é apresentada na figura 3 desse capítulo.

A possibilidade de utilização do programa Cinderella no ensino estende-se além da Geometria Euclidiana. Ele pode ser usado para o ensino das Geometrias Não-Euclidianas,

Geometria Analítica, Geometria Projetiva, Geometria Descritiva e em outras áreas como a Física, por exemplo.

Após esta breve apresentação do programa, mostraremos possibilidades e deficiências dos seus recursos.

3.2.1. Recursos do *Cinderella*

O programa oferece muitos recursos para construções geométricas, permitindo a criação de desenhos nos planos euclidiano, elíptico e hiperbólico, como a curva conchóide vista no plano euclidiano (fig. 2) e também no plano elíptico (fig. 3).

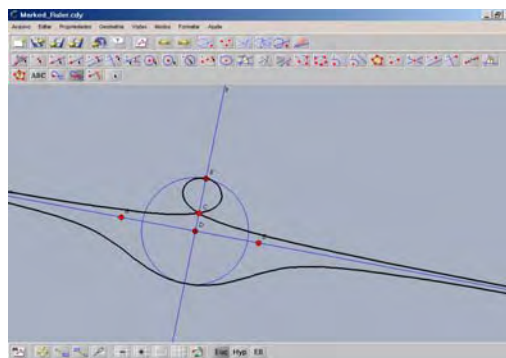


fig. 2: curva conchóide no plano euclidiano

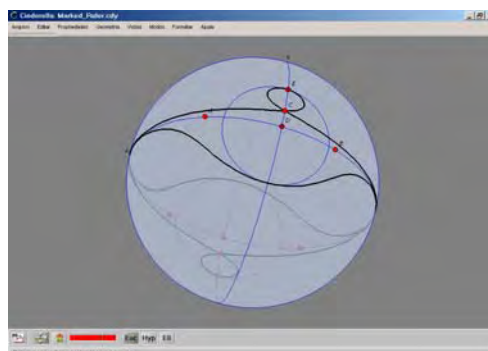


fig. 3: vista elíptica da curva conchóide

Um exemplo de construção no disco hiperbólico de Poincaré é mostrado na figura 4.

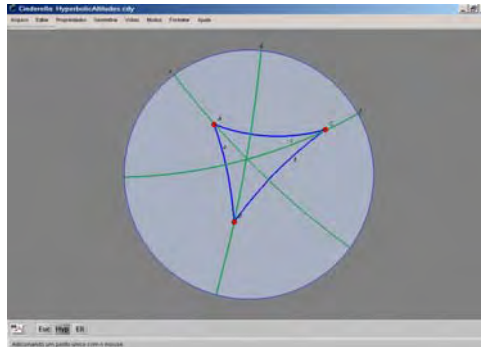


fig. 4: triângulo no plano hiperbólico

Construções no Cinderella podem ser exportadas para uma página da World Wide Web (WWW). As atividades interativas e as animações também podem ser disponibilizadas na WWW diretamente, sem conhecimento algum de HTML. O “menu ajuda” contém o conteúdo integral do manual e permite a navegação de acordo com a necessidade de cada indivíduo. Outra possibilidade é a de efetuar provas automáticas, porém sem o uso de métodos simbólicos para criar uma prova formal. A prova é entendida como verificação de uma conjectura previamente implementada. Outro detalhe interessante é que o programa pode ser instalado em qualquer plataforma (Linux, Windows, MacOS, etc.) pelo mesmo CD.

3.2.2. Ferramentas do *Cinderella*.

As informações a seguir referem-se as principais ferramentas de construções na geometria plana e elíptica, e foram incluídas apenas para auxiliar os interessados em conhecer um pouco mais este programa.

As operações sobre arquivos são semelhantes a outros programas. As construções são gravadas num formato especial. Os arquivos das construções têm extensão ".cdy".

• Ferramentas genéricas da vista euclidiana



- Esta ação apaga toda a construção. Tudo é reposto nas configurações iniciais.



- Carrega uma construção.



- Grava uma construção. Se necessário pede um nome para o arquivo.



- Pede um nome e grava o arquivo.



- Imprime todas as vistas ativas. Esta operação usa rotinas de impressão do Java. A qualidade é inferior à da opção "Imprimir PS".



- Esta operação gera automaticamente uma página *Web* interativa.



- Com esta operação pode gerar exercícios para os alunos, que podem ser usados num *browser standard*.



- Esta operação anula a última ação executada.



- Esta operação anula a última ação executada.



- Apaga todos os elementos seleccionados, bem como todos os elementos que deles dependam.



- Selecciona todos os elementos geométricos.



- Selecciona todos os pontos.



- Selecciona todas as retas.



- Selecciona todas as circunferências e cônicas.



- Cancela a seleção ativa.



- Selecciona elementos de uma construção.

• Ferramentas de construção da vista euclidiana



- Cria ponto



- Este modo é utilizado para mover os elementos livres de uma construção.



- Cria reta por um ponto



- Cria uma reta paralela a uma outra, por um ponto dado.



- Cria uma perpendicular a uma reta por um ponto dado.



- Cria uma reta com um ângulo pré-definido numericamente relativamente a uma reta dada.



- Cria uma circunferência dada pelo seu centro e por um ponto.



- Cria uma circunferência dados o centro e o raio.



- Cria uma circunferência com raio pré-definido.



- Define o ponto médio entre dois pontos.



- Define a bissetriz do ângulo entre duas retas.



- Efetua reflexões em pontos, retas ou circunferências.



- construção de uma circunferência que passe por três pontos dados.



- criar-se um polígono a partir de uma seqüência de vértices.



- Este modo é utilizado para mover os elementos livres de uma construção.



- Constrói o ponto de intersecção de duas retas previamente selecionadas.

• Ferramentas de medições da vista euclidiana



- Determina distância entre dois pontos.



- Determina a medida do ângulo formado entre duas retas.



- Determina a área de um polígono.

• Ferramentas especiais da vista euclidiana



- Cria e edita um texto numa vista euclidiana. Somente a vista euclidiana suporta textos.



- Cria uma animação, definida por um ponto "móvel" e um "caminho".



- Cria um segmento por dois pontos. Os segmentos não são elementos ativos. Isto significa que não pode utilizar em construções posteriores (como gerar intersecções). Os segmentos são elementos puramente gráficos.

• Ferramentas de construções na vista elíptica.

Todas as ferramentas de construções nesta vista estão no menu “modos”.

3.2.3. Deficiências no *software*.

O Cinderella não possui os recursos de “macro” e “scripts”, isto é, arquivamento das construções para serem utilizadas numa outra situação. Embora seja possível elaborar “tesselações”, não é possível colorir toda a esfera. Falta a opção de selecionar elementos com janelas. Não é possível construir retas com ângulos fixos passando por um ponto pré-determinado na geometria elíptica.

Tendo feito algumas considerações sobre as possibilidades e deficiências dos recursos presentes no *software* Cinderella, passarei aos aspectos das interações com Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD's). Cabe alertar o leitor que as referências feitas aos AGD's serão apenas, as que julgamos pertinentes ao propósito da pesquisa, pois a literatura sobre os (AGD's) é extensa e uma análise mais detalhada extrapolaria o escopo do trabalho.

Em seguida, serão apresentadas algumas implicações do uso de um AGD para o ensino e aprendizagem de geometria através da Resolução de Problemas.

3.3. Novas mídias, novos problemas

Ao decidirmos que a utilização de um software de geometria dinâmica vai ser incorporada a nossa prática em sala de aula, particularmente, no ensino de geometria, devemos atentar para as implicações de sua utilização no seu contexto educacional.

Em um AGD podemos construir figuras geométricas com recursos próximos dos tradicionais, como régua, compasso, lápis e papel. No entanto, o uso desta tecnologia pode ir além do “fazer mais rápido e preciso”, inclui o “fazer diferente”. Para compreender melhor, veja o exemplo a seguir:

Inscriva uma circunferência num triângulo dado, de modo que ao “arrastar” os vértices desse triângulo, ela permaneça inscrita em qualquer caso do triângulo modificado.

Este é um problema para ser investigado em um AGD, pois o modo “arrastar” permite simular diversos casos de uma figura. Um problema similar a este, para ser resolvido com os recursos da mídia tradicional, ficaria assim: prove que é possível inscrever uma circunferência em qualquer triângulo dado.

Nota-se que o objetivo comum nos dois casos é de verificar o 4º teorema do 4º livro da obra “Elementos” de Euclides que diz: “é possível inscrever uma circunferência num triângulo dado” (Gerdes e Cherinda, 1991, p.15). Em outras palavras, cada triângulo tem uma circunferência inscrita.

Os exemplos apresentados ilustram o fato de que um ambiente informático de geometria dinâmica modifica uma prática pedagógica, neste caso, a formulação e a resolução de problemas. No primeiro exemplo, o problema formulado para um ambiente interativo que possibilita a simulação de “todos” os casos de uma figura não seria adequado para mídia tradicional. Em contrapartida, o problema geométrico que pede uma demonstração em linguagem matemática não poderá ser escrito, mas pode ser investigado neste ambiente, auxiliando a verificação de determinadas conjecturas, podendo partir para sua demonstração, garantindo assim, sua generalização.

Segundo Pierre Lévy (1997), a simulação de todos os casos possíveis oferece ao usuário do programa uma espécie de intuição sobre as relações de causa e efeito presentes no modelo e, o conhecimento adquirido nesse sistema “não se assemelha nem ao conhecimento teórico, nem a uma experiência prática, nem ao acúmulo de uma tradição oral”.

Alguns problemas de construções geométricas para serem resolvidos no modo tradicional, como a construção de uma circunferência passando por três pontos dados, não poderiam ser caracterizados dessa maneira no ambiente Cinderella. Existe uma ferramenta

de construção automática do traçado, e isso faz com que ele deixe de ser um problema e passe a ser um recurso.

4. Caleidoscópios

O caleidoscópio surgiu na Inglaterra, seu inventor foi David Brewster. Unindo as palavras gregas *kalos* (καλος) “belo”, *eidos* (ειδος) “imagem” e *scopéo* (σκοπειν) “vejo”, caleidoscópio quer dizer: “vejo belas imagens”.

Trata-se de um tubo cilíndrico, cujo fundo é de vidro opaco e, no interior são colocados alguns fragmentos de vidro colorido e três espelhos. Colocando-se diante da luz e observando no interior do tubo, através de um furo feito na tampa e, fazendo rolar lentamente o objeto, assiste-se a um “espetáculo” de imagens. Os pequenos vidros coloridos, com os reflexos dos espelhos, multiplicam-se e, mudando de lugar a cada movimento da mão, dão lugar a numerosos desenhos simétricos e sempre diferentes.

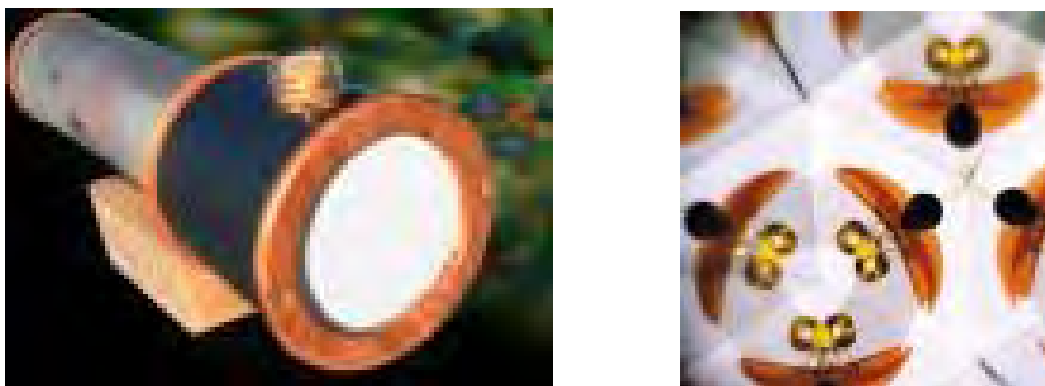


fig. 5: foto de um caleidoscópio comercial e imagem

Feita esta apresentação inicial sobre caleidoscópios, apresentamos algumas propriedades físicas e matemáticas, na formação e visualização de imagens geradas por reflexões de objetos em espelhos planos.

4.1. Reflexões em espelhos

Na ausência de iluminação, o olho humano não consegue distinguir objetos. Por outro lado, uma deficiência visual também pode impedir a visão deles, mesmo com a presença de luz. Para a Física, o fenômeno da visão resulta da combinação de dois elementos: a luz e o olho. Para enxergar nitidamente os objetos, é necessário que estes estejam iluminados, ou seja, é preciso haver uma fonte de luz e o objeto precisa estar dentro do campo de visão dos olhos e seu tamanho também influencia na distância máxima em que poderemos reconhecê-lo. Portanto, um objeto que não emita luz própria, só pode ser visto se for iluminado, isto é, se receber luz de alguma fonte. Somente quando a luz refletida pelo objeto atinge nossos olhos ele se torna visível.

A reflexão ocorre quando os raios que incidem sobre uma superfície voltam para o meio no qual ocorreu a incidência. Porém, a reflexão da luz pode ter efeitos diferentes, dependendo do tipo de objeto. Por exemplo, a reflexão da luz no tapete e no espelho. Olhando para um tapete, enxergamos ele próprio, mas olhando para o espelho, vemos apenas imagens de outros objetos. Esta diferença ocorre devido à superfície refletora da luz: no tapete, a superfície é rugosa, enquanto que, no espelho é muito lisa. Quando a luz incide em uma superfície lisa, ela é refletida regularmente. Essa regularidade da reflexão é que permite a formação de imagens. Isso não acontece nos corpos cujas superfícies são rugosas, pois não produzem imagens. As superfícies rugosas, quando iluminadas, nos revelam somente sua própria forma, textura e cor. No tapete, ocorre “reflexão difusa” e, no espelho, “reflexão regular”.

4.2. Imagens nos espelhos planos

Um espelho plano pode ser uma placa de vidro cuja superfície posterior recebeu uma fina película metálica polida (prata por exemplo). Os raios que partem de um objeto, diante de um espelho plano, refletem-se no espelho e atingem nossos olhos. Quando você vê a imagem do objeto no espelho, ela parece se situar atrás dele. Essa imagem, formada no prolongamento dos raios refletidos é que denominamos de imagem virtual. A imagem real se forma na intersecção dos raios refletidos.

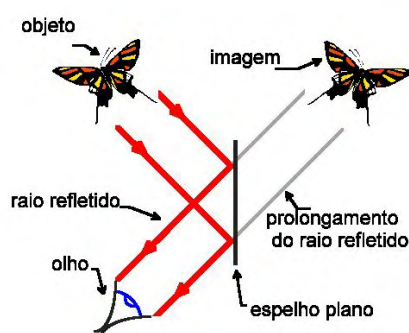


fig. 6: formação a imagem no espelho plano

Quando se observa um objeto através da imagem fornecida pelo espelho plano, vemos que esta fica invertida (chamada de imagem especular). Para um ponto do objeto que está à direita, o ponto imagem correspondente se apresenta à esquerda, e vice-versa.

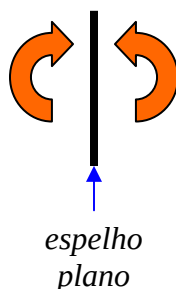


fig. 7: imagem especular

Em relação à reflexão nos espelhos, Batistela (2004) apresenta um estudo sobre este fenômeno que obedece às leis da ótica geométrica a seguir:

- a) o raio normal à superfície no ponto de incidência e o raio refletido estão num mesmo plano.
- b) o ângulo de incidência i (do raio incidente com a normal) é igual ao ângulo de reflexão (do raio com a normal): $i=r$.

A imagem virtual de um ponto, obtida através do espelho, é o encontro dos raios refletidos ou dos prolongamentos destes. Assim, para a reflexão de um ponto P , sendo vista pelo observador O , seguimos com o esquema encontrado em Batistela (2005).

Um ponto-objeto P frente a um espelho plano sendo visto por um observador (olho) O através do espelho, parece ao observador estar em P' , atrás do espelho (sua imagem virtual), impressão causada pelo fato de O , o observador, receber o raio luminoso refletido, e que, vindo de P , incide no espelho e, segundo as duas leis dadas, reflete-se atingindo O , podendo assim ser visualizado. Em razão da primeira lei, os pontos P , I , O e P' estão num mesmo plano; e em razão da segunda, resulta que P' é o simétrico de P em relação à reta intersecção desse plano com o plano do espelho, desse modo se justifica a denominação simetria reflexional ou reflexão dada à simetria axial.

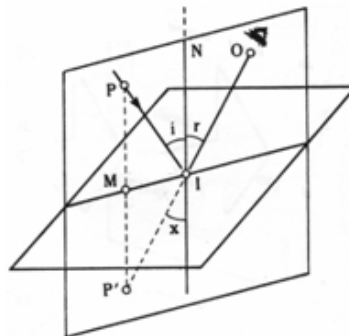


fig. 8: imagem virtual de um ponto

Pesquisas com uso de um espelho em atividades de ensino e aprendizagem de Geometria, apresentados por Batistela (2005) utilizam, principalmente na exploração de conceitos e propriedades da reflexão de pontos e figuras, eixo de simetria, figuras com estrutura simétrica reflexional, congruência e orientação.

4.3.O caleidoscópio de dois espelhos

A sua construção é simples: são dois espelhos retangulares unidos, de modo que possibilite a abertura de vários ângulos. Dependendo do ângulo formado entre dois espelhos planos articulados, obtemos repetição perfeita de imagens. Alspaugh (1970) denominou estes dois espelhos articulados de *caleidoscópio geométrico*. Este instrumento oferece possibilidades de exploração de tópicos da geometria, tais como: polígonos regulares, coordenadas de pontos em um plano, reflexões e simetria.

A seguir, veja a tabela que relaciona o ângulo entre os espelhos com o número de imagens obtidas pelas reflexões e com as construções geométricas que podem ser visualizadas.

Ângulo	Nº de imagens	Possíveis construções
180°	2	Linhas paralelas, círculos.
120°	3	Triângulos, círculos.
90°	4	Quadrados, paralelogramos linhas paralelas, círculos.
72°	5	Pentágonos, círculos
60°	6	Hexágonos, triângulos, círculos.
51 3/7°	7	Heptágonos, círculos.
45°	8	Octógonos, quadrados, círculos.
40°	9	Eneágonos, círculos.
36°	10	Decágonos, pentágonos, círculo.

Fonte: Alspaugh, C. A., Kaleidoscope Geometry, Arithmetic Teacher 17, (1970), p. 117.

4.4. Caleidoscópios generalizados (esféricos)

Ball & Coxeter (1987) chamaram de “caleidoscópios generalizados” aqueles que permitem a visualização de pontos-objetos numa esfera. Ele é formado por três espelhos articulados entre si. Nestes, o terceiro espelho é colocado horizontalmente ao invés de verticalmente, determinando, de forma semelhante aos caleidoscópios planos, a formação de três ângulos entre eles. Dois dos quais medem 90°.

Uma generalização natural é o caso em que esses três ângulos são, $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ onde l , m e n são divisores inteiros de 180°. Para que estes caleidoscópios possibilitem a

visualização perfeita de uma rede de triângulos esféricos que recubram totalmente (sem sobreposições ou lacunas) a esfera, é necessário que os ângulos formados pelos espelhos determinem um triângulo sobre a mesma, tal que sua área seja um divisor inteiro da área total da esfera a ser visualizada.

Desse modo, tomemos uma esfera de raio unitário, cuja área desta será 4π , enquanto que a área do triângulo formado pelos ângulos $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ sobre essa esfera é $\frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} - \pi$, (Geometria esférica). Então, temos que a área da esfera dividida pela área de cada triângulo é um número positivo inteiro, assim: $4\pi / (\frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} - \pi) > 0$. Dividindo todos os membros dessa inequação por π e observando que o denominador deve ser maior que zero, obtemos a inequação: $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$, para que tenhamos ângulos que possibilitem repetição “perfeita” de imagens desse triângulo tesseland a esfera.

Ball & Coxeter (1987) mostram as soluções para essa inequação: (2,2,n); (2,3,3); (2,3,4) e (2,3,5). Devemos lembrar que as soluções correspondem a l , m e n , que são divisores de 180° , assim referenciados (l , m , n). Então, para cada terna de solução correspondem os caleidoscópios cujos ângulos são o resultado da divisão de 180° por esta terna. Para a terna (2,3,3), por exemplo, corresponde o caleidoscópio com ângulos (90° , 60° , 60°). Com análoga correspondência, obtemos os caleidoscópios de ângulos (90° , 60° , 45°) e (90° , 60° , 36°) para as ternas (2,3,4) e (2,3,5), respectivamente. As quatro ternas determinam a existência de caleidoscópios, mas o autor só utiliza os referentes as três últimas soluções acima citadas, em cujas ternas os ângulos são bem determinados.

Os espelhos desses caleidoscópios podem ser cortados na forma de setores circulares, mas nada impede que o sejam na forma triangular. Os ângulos entre eles devem ser conforme deduzidos acima e, ainda, devem ser considerados os ângulos centrais dos setores circulares, formados entre os espelhos. Assim, aos caleidoscópios com as ternas de ângulos (90° , 60° , 60°), (90° , 60° , 45°) e (90° , 60° , 36°) formados entre os espelhos deverão ter, respectivamente, os seguintes ângulos centrais dos setores circulares: ($70^\circ 52'$, $54^\circ 54'$, $54^\circ 54'$); ($54^\circ 54'$, $35^\circ 16'$, 45° ;) e ($20^\circ 54'$, $31^\circ 43'$, $37^\circ 23'$). Isto devido à lei dos co-senos para os ângulos da Geometria esférica.

4.4.1. A construção do caleidoscópio generalizado

A construção dos caleidoscópios tem aspectos teóricos e práticos. Assim, sugerimos o roteiro, apresentado por Batistela (2005), para a construção desses caleidoscópios.

Confeccione os moldes dos espelhos com cartolina de acordo com as medidas e ângulos determinados. Vá a uma vidraçaria e solicite os espelhos de acordo com as medidas dos moldes em cartolina, especificados a seguir:

- a) 3 espelhos com ângulos centrais de medida $54^{\circ}44'$, (cortados na forma de setores circulares, como a figura 9, cujo modelo corresponda também ao material dos itens e ao g)
- b) 1 com ângulo central de $70^{\circ}32'$;
- c) 1 com ângulo central de $35^{\circ}16'$;
- d) 1 com ângulo central de $31^{\circ}43'$;
- e) 1 com ângulo central de $37^{\circ}23'$;
- f) 1 com ângulo central de $20^{\circ}54'$;
- g) 1 com ângulo central de 45° ;



fig. 9: molde do caleidoscópio

A sugestão é de que os setores circulares sejam cortados com medida de raio aproximado de 17 cm.

Batistela (2005) indica que esses espelhos cortados na forma de setor circular com os centros extraídos como mostra a figura..., podem ser manuseados com mais facilidade, “embora não seja necessária a forma arredondada para o efeito pretendido”.

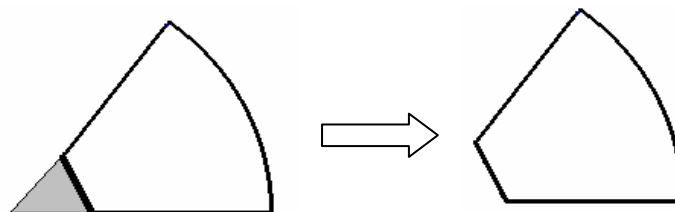


fig. 10: molde de caleidoscópio cortado

Além dos espelhos, relacionamos abaixo outros materiais utilizados:

- ✓ Um pedaço de aproximadamente 2 metros de material emborrachado, papelão ou madeira, para encapar esses instrumentos de modo que proteja a estrutura. Por exemplo, o e.v.a;
- ✓ Cola de contato resistente. (Optamos pelo tipo de cola utilizado por

marceneiros);

- ✓ Estilete para cortar o e.v.a.;
- ✓ Um rolo fita adesiva;
- ✓ Um pincel para espalhar a cola.

A cola de contato deve ser aplicada na parte “embaçada” do espelho e sobre o e.v.a., numa área correspondente ao tamanho dos espelhos que serão encapados. Una as duas superfícies que contém cola, pressione alguns segundos e observe se ocorreu total aderência dos materiais. Atente para que os ângulos se formem devidamente entre os espelhos.

A mesma atenção deve ser dada aos tamanhos sugeridos para os espelhos e os truncamento dos seus setores circulares. Esses detalhes de aperfeiçoamento na construção dos instrumentos foram descritos por Rose, p..., a fim de possibilitar uma boa visualização e constituir-se num instrumento adequado para trabalho.

Tome os seguintes trios de espelhos cortados na forma de setores circulares com ângulos de ($70^{\circ}32'$, $54^{\circ}44'$, $54^{\circ}44'$); ($54^{\circ}44'$, $35^{\circ}16'$, 45°) e ($20^{\circ}54'$, $31^{\circ}43'$, $37^{\circ}23'$). Articule-os de modo a ficarem da forma de uma pirâmide triangular, com as faces espelhadas voltadas para o interior, e com os lados bem ajustados entre eles.

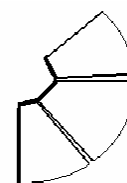


fig. 11: molde completo

Depois de devidamente ajustados, apoiados num plano, como na figura ao lado, passe cola de contato sobre as costas dos espelhos articulados e sobre o e.v.a. numa área um pouco maior que a correspondente aos três espelhos. Após o tempo especificado na embalagem, cole os espelhos sobre o e.v.a., fixando-os na forma de um funil triangular. Depois de fixados, chega-se a um objeto da forma de um funil triangular, com uma abertura maior, no lado oposto ao ponto de intersecção dos três espelhos, que é usada para a substituição de desenhos, ou seja, de bases caleidoscópicas que geram imagens.

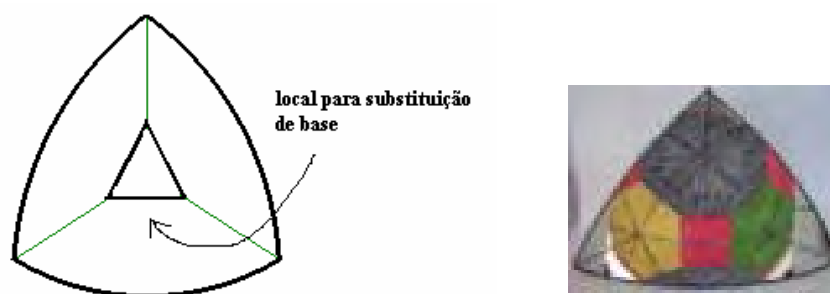


fig. 12: base do poliedro entre os espelhos

Procedendo da mesma forma com os três trios de setores circulares, construímos os três caleidoscópios generalizados situados à direita da foto a seguir.

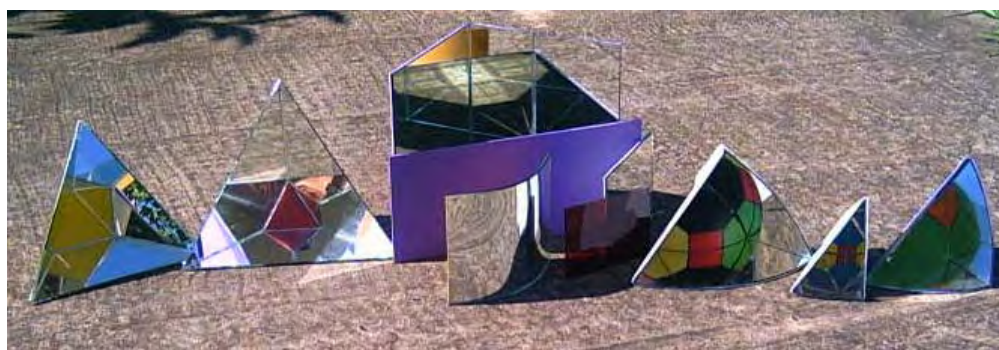


fig. 13: foto de um kit de caleidoscópios

Em atividades educacionais de matemática, os caleidoscópios são usados para produzir imagens previsíveis e, regularidades podem ser encontradas. Barbosa (1993), Murari (1999) e Martins (2003) observaram em suas pesquisas que os caleidoscópios e *softwares* educacionais são materiais capazes de despertar o interesse em investigações sobre geometria. Estes trabalhos apresentam atividades com esse material para investigar simetria, pavimentações do plano euclidiano e tesselações no espaço, usando a Resolução de Problemas.

Ball & Coxeter (1987) utilizaram os caleidoscópios generalizados para visualização de vértices de poliedros pela variação de pontos-objetos colocados no triângulo esférico, formado entre os três espelhos. Batistella (2004) apresenta uma utilidade inédita para estes caleidoscópios: a visualização de poliedros arquimedianos.

A contribuição deste estudo será apresentar o uso dos caleidoscópios generalizados em duas tesselações esféricas. Com este material, duas propriedades de um objeto podem ser observadas: o real e o virtual que são as imagens produzidas frente aos espelhos.

4.5. Além do *software* e dos caleidoscópios

Esferas de isopor, folha de papel A4, fitilho, alfinetes, foram utilizados como representações do plano esférico, plano euclidiano, linhas e pontos, respectivamente. Eles permitem o manuseio, trabalhando com o sentido do tato, além da visão.



fig. 14: materiais “palpáveis”

5. A Geometria nos “Elementos” de Euclides.

Euclides foi um matemático grego que viveu na 1ª metade do século III a.C. Embora sejam escassos seus dados biográficos, sabe-se que ele fundou uma escola em Alexandria. Em sua obra escrita, por volta de 300 a.C., *Os Elementos*, Euclides apresenta a geometria de forma organizada e dedutiva. Começa admitindo certos axiomas e postulados que são afirmações aceitas sem demonstração. Usando axiomas e postulados, Euclides passa a demonstrar, por dedução lógica, outras proposições, chamadas teoremas. Nesta obra, observa-se um tratamento diferente da geometria comparada aos Egípcios que, provavelmente, era ligado à problemas práticos (Eves, 1993). Atribui-se a Euclides a criação desta forma postulacional de raciocínio. Entre os gregos antigos, a maioria dos matemáticos fazia a distinção entre postulado e axioma, porém, hoje em dia, já não se faz esta distinção. Entende-se postulado e axioma com mesmo significado.

“Elementos” se impôs como uma obra clássica em geometria nos dois milênios seguintes, permanecendo sem contestação até fins do séc. XIX. (Eves, 1997).

Os axiomas e os postulados de Euclides podem ser enunciados como em (Carmo, 1987, p. 25-26).

- ✓ 1º postulado: “dois pontos determinam uma reta”.
- ✓ 2º postulado: “a partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário”.
- ✓ 3º postulado: “é possível escrever um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário”.
- ✓ 4º postulado: “todos os ângulos retos são iguais”. O ângulo reto é definido do seguinte modo: “se duas retas que se cortam formam quatro ângulos iguais, o ângulo comum assim determinado é chamado de reto”.
- ✓ 5º postulado: “se uma reta r corta duas outras retas r_1 e r_2 (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores de um lado de r é menor do que dois retos, então r_1 e r_2 , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r ”.

- ✓ Axioma 1: “duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si”.
- ✓ Axioma 2: “somando-se a mesma quantidade a valores iguais obtêm-se resultados iguais”.
- ✓ Axioma 3: “subtraindo-se a mesma quantidade de valores iguais obtêm-se resultados iguais”.
- ✓ Axioma 4: “coisas que coincidem uma com a outra são iguais”.
- ✓ Axioma 5: “o todo é maior que a parte”.

Existem evidências que o desenvolvimento lógico da teoria das paralelas ocasionou muitas dificuldades aos gregos antigos. Euclides definiu retas paralelas como “retas coplanares que não se interceptam por mais que sejam prolongadas em ambas as direções” e adotou como suposição seu 5º postulado, chamado de postulado das paralelas. Entretanto, este, não possui a característica de ser “simples” e nem de ser “auto-evidente” como os demais, e para os gregos antigos, parecia mais uma proposição. (Eves, 1997, p.539).

Dentre os substitutivos para o postulado das paralelas, o mais freqüentemente encontrado nos livros é o conhecido pelo nome de Postulado de Playfair, assim enunciado:

“Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma reta paralela à reta dada”.

Esta formulação já era conhecida de Proclus no século V, porém foi difundida nos tempos modernos por um livro escrito pelo matemático John Playfair. Posteriormente, o fato de considerarem que o 5º postulado era o menos intuitivo e de redação mais complexa fez com que alguns matemáticos acreditassem que esse postulado era na verdade uma proposição, que chamaríamos hoje de teorema e, portanto, teria que ser demonstrado.

Existem várias obras tentando demonstrar o 5º postulado de Euclides partindo-se dos demais postulados que foram também colocados por ele, todas sem sucesso. Dentre os que tentaram obter a demonstração do postulado das paralelas pelo método da redução ao absurdo (*reduction ad absurdum*), apresento a do jesuíta Girolano Saccheri (1667 - 1733), publicada em 1773.

Tomando um quadrilátero $ABCD$ com vértices A, B, C e D , com lado AB congruente ao lado CD e ambos perpendiculares ao lado BC , Saccheri demonstrou que os ângulos A e

D deviam ser, necessariamente, congruentes, podendo ocorrer uma, e somente uma das três possibilidades:

- Os ângulos A e D eram ambos retos;
- Ambos eram ângulos obtusos;
- Ambos eram ângulos agudos.

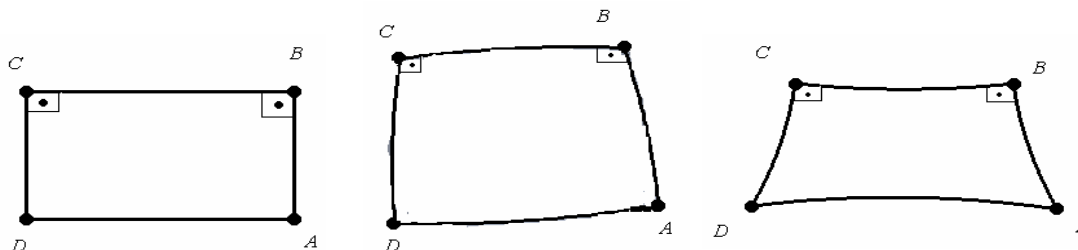


fig. 15: quadriláteros de Saccheri

Saccheri verificou, ainda, que no 1º caso, a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo seria igual a dois retos. No 2º caso, maior que dois retos, e no 3º caso, menor que dois retos. Considerando que as conseqüências da 2ª e 3ª possibilidades se chocaram contra a intuição, optou pela 1ª e concluiu que o 5º postulado de Euclides era verdadeiro. Entretanto, o problema persistia. (KLEIN, 1994)

Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) e Adrien Marie Legendre também tentaram deduzir o 5º postulado, negando a hipótese, buscando chegar a uma contradição ou a um absurdo. Não obtiveram êxito, mas Legendre demonstrou que a proposição: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, era equivalente ao 5º postulado (Klein, 1994, p. 39).

As várias tentativas de Legendre na demonstração do postulado das paralelas, de 1794 a 1833, aparecem nas edições de seu livro chamado *Éléments de Géométrie*. Em uma delas ele incidiu num erro lógico chamado “tautologia”, quando supõe ser verdadeiro o que se deseja provar. (Ávila, 1992, p.16, 17, 25 e 26).

Janos Bolyai (1802 - 1860) e Nicolai I. Lobatchevsky (1793 - 1856) foram os primeiros a publicar a independência do 5º postulado e, devido a isso, sua dedução não pode ser feita. Resolveram a questão construindo “Geometrias”, a Elíptica e a Hiperbólica, nas quais o postulado das paralelas não era válido. Apresentaremos as geometrias não-euclidianas no próximo tópico deste capítulo, após outras considerações sobre os “Elementos” de Euclides.

No século XX, o exame dos fundamentos e da estrutura lógica da matemática que levou à criação da *axiomática*, ou o estudo dos sistemas de postulados e suas propriedades, promoveu análises críticas e revelaram deficiências na estrutura lógica da obra de Euclides. Dentre os defeitos, freqüentemente assumia a unicidade da reta por dois pontos, porém, seu postulado I garante a existência de pelo menos uma reta por dois pontos, mas não que seja única. Além de outros como este, definiu todos conceitos técnicos, como ponto, reta, etc. Isto é impossível definir explicitamente, pois a definição de um conceito técnico envolve outros conceitos técnicos, que por sua vez envolvem outros e assim por diante. Do ponto de vista lógico, ficaria impossível provar todas as proposições envolvidas nestes “círculos viciosos”.

No método axiomático moderno, esses conceitos são apresentados como um conjunto de conceitos primitivos, aceitos sem definição, e os postulados são afirmações que se assumem sobre os conceitos primitivos, evitando os círculos viciosos. Entendemos esse procedimento adotado na antiguidade grega, pelo fato de que, para eles, a geometria não era um estudo abstrato, mas uma tentativa de análise do espaço físico idealizado. Para os gregos, pontos eram idealizações de partículas muito pequenas e retas de fios muito finos. Pesquisas modernas visando encontrar um conjunto de postulados logicamente satisfatórios para a geometria euclidiana e a descoberta de Geometrias Não-Euclidianas igualmente consistentes, foram importantes no desenvolvimento da *axiomática*. (Eves, 1997, p.655-657).

6. O “Nascimento” das Geometrias Não-Euclidianas

Janos Bolyai (1802-1860) e Nicolai Ivanovitch Lobachesvsky (1793-1856) desenvolveram uma geometria tão consistente quanto a Geometria Euclidiana. Abordaram essa questão através do postulado das paralelas, na forma conhecida por Playfair, considerando as três possibilidades: dada uma reta s e um ponto P no mesmo plano, e $P \notin s$, pode-se traçar “mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma paralela a s por P ”. Estas situações equivalem, respectivamente, às hipóteses de ambos os ângulos agudos, retos e obtusos, no quadrilátero de Saccheri. Assumindo reta como infinita, elimina-se o terceiro caso.

Lobatchevsky foi o primeiro a publicar o trabalho sobre geometria não-euclidiana, isso por volta do ano de 1829. Ele substituiu o 5º postulado de Euclides pelo seguinte: “Sejam dados um plano, uma reta s e um ponto P que não está em s . Há, então, pelo menos duas retas passando por P e paralelas a s ”.

Por volta de 1832, Bolyai desenvolveu o que ele chamava de “ciência absoluta do espaço”, referindo-se com isso à coleção das proposições que independem do postulado das paralelas e que, por conseqüência, valem tanto na geometria euclidiana como na nova geometria, onde o 5º postulado foi assim substituído: Por um ponto P , fora de uma reta s , passam infinitas retas paralelas à s .

Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) descartou a infinitude da reta admitindo somente que a reta seja ilimitada e desenvolveu uma outra geometria consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso. Porém, nessa geometria, outros postulados sofreram alguns ajustes, dos quais discorreremos mais tarde.

Félix Klein (1849 - 1925) batizou de “geometria hiperbólica” a de Bolyai e Lobachesvsky, de “geometria plana” a de Euclides e de “geometria elíptica” a de Riemann.

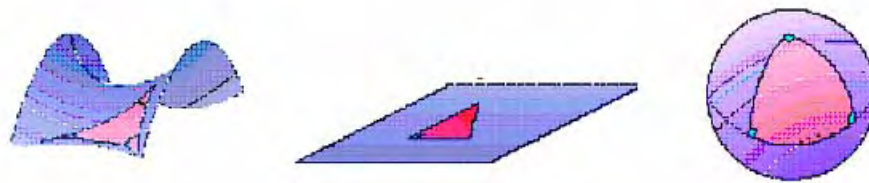


fig. 16: superfícies planas

6.1. Estudos Matemáticos sobre a Esfera

Os livros XI, XII, XIII da obra *Elementos* de Euclides, que tratam da geometria espacial, cobrem grande parte do conteúdo encontrado nos textos para o ensino médio a este respeito, com exceção ao que diz respeito à esfera. Apenas no livro XIII, desenvolvem-se construções dos cinco poliedros regulares numa esfera e obtêm-se as relações de seus lados com os raios das esferas inscritas e circunscritas para cada poliedro.

Dentre os trabalhos de Arquimedes (a.C. 287 – 212 a. C), temos dois que dizem respeito à geometria espacial: “Sobre a Esfera e o Cilindro” e “Sobre Cones e os

Esferóides”. O primeiro deles apresenta o teorema que fornece as áreas de superfícies e calotas na esfera.

A proposição 34 afirma que a área de uma superfície esférica é quatro vezes a área do seu círculo máximo; definindo círculo máximo, como qualquer círculo determinado pela intersecção da superfície da esfera com um plano que passa por seu centro. Dado que área deste círculo de raio r é igual πr^2 , então a área da esfera de raio r será $4 \pi r^2$.

Para provar a proposição 34, utilizou-se o enunciado do corolário desta proposição, fornecido também neste livro, que é o seguinte: “a área da superfície esférica é exatamente dois terços da área da superfície total do cilindro reto circunscrito a ela e que o volume da esfera também corresponde a dois terços do respectivo cilindro”, (Eves, 1997, p. ..)

Sendo r o raio da esfera, então o cilindro descrito na proposição tem base circular de raio r e altura $2r$.

Sabendo-se que a área do cilindro é calculada somando-se duas áreas da base e a área lateral, que é calculada multiplicando o comprimento da circunferência da base pela altura, logo o sua área é $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$. Pelo corolário, a área da superfície esférica sendo dois terços da área do cilindro, temos que sua área é $2/3 \cdot 6\pi r^2 = 4\pi r^2$.

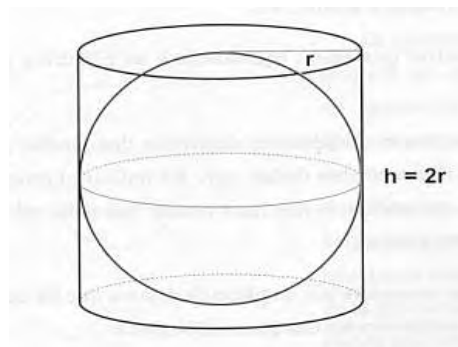


fig. 17: o cilindro e a esfera

De forma análoga, encontra-se o volume da esfera, que é calculado por $4/3 \cdot \pi r^3$. Porém, o método empregado por Arquimedes para esses cálculos era outro, o *método da exaustão*.

O livro “Sobre o Cone e os Esferóides” contém uma investigação dos volumes das quádras de revolução. Pappus atribui a Arquimedes trinta poliedros semi-regulares, que hoje são conhecidos como *poliedros arquimedianos*.

Em 1906, foi achado por Heiberg um importante documento para a história da Matemática, pois menciona procedimentos que Arquimedes usava para a descoberta de muitos dos seus teoremas. Este tratado, intitulado *O método*, mostra que as descobertas dos resultados eram feitas de maneira heurística, e depois colocadas em termos “rigorosos”

mediante o *método da exaustão* (lembramos que este termo é uma notação moderna e que não era usado pelos gregos antigos), de Eudoxo (c. 408 – 355 a.C). Esse método admitia que uma grandeza poderia ser subdivida indefinidamente, e sua base é a proposição:

(...) se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor do que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie (Eves, 1997, p. 419).

A Hiparco, creditam-se a introdução da divisão do círculo em 360° , além de ser um grande defensor da localização dos pontos sobre a superfície terrestre por meio de latitudes e longitudes. Outro fato importante é que há indícios de que Hiparco estava a par dos processos equivalentes a várias fórmulas, hoje usadas na resolução de triângulos esféricos retos.

Um importante tratado sobre a esfera na Grécia antiga foi *Sphaerica*, escrito por Menelau. Neste, tem-se, pela primeira vez, a definição de “triângulos esféricos” e muitas proposições estabelecidas, inclusive o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e o desenvolvimento da trigonometria esférica da época.

Entretanto, no sentido Riemanniano, o aspecto central é o estudo de curvatura e sua relação com a topologia. Todavia, apresentaremos alguns conceitos básicos para melhor compreensão do texto, como segue:

▪ **Geometria Intrínseca e Geometria Extrínseca**

A geometria intrínseca é estudada do ponto de vista da própria superfície, sendo que a menor distância entre dois pontos sobre a superfície curva é chamada de geodésica. Já a geometria extrínseca é estudada por meio de uma dimensão maior.

▪ **Propriedades Locais e Propriedades Globais**

As propriedades locais são observáveis em pequenas regiões circulares da superfície, em torno de cada ponto. As propriedades globais levam em consideração a superfície como todo.

▪ **Geometria Homogênea e Geometria Não-Homogênea**

A geometria homogênea é aquela cuja geometria local é a mesma em toda parte, sendo assim, todos os pontos que constituem a superfície têm as mesmas características. Exemplo: a esfera. Quando a geometria local se modifica de um ponto para outro em uma mesma superfície, dizemos que é uma geometria não-homogênea. Exemplo: toro.

▪ **Superfícies Abertas e Superfícies Fechadas**

Uma superfície é aberta quando não há distância máxima entre seus pontos. Quando limitada em toda sua extensão é chamada de superfície fechada.

No estudo da superfície esférica, sob o enfoque da Geometria Riemanniana, pode-se levar em consideração seus aspectos globais, pois mantém curvatura constante e as propriedades locais são as mesmas em toda superfície. Assim, neste caso, a geometria é homogênea e sua superfície fechada. As geodésicas, aqui, são grandes círculos, cujo raio também é r .

A esfera no espaço R^3 é uma superfície importante devido as suas aplicações em problemas relacionados ao nosso cotidiano. Do ponto de vista matemático, a esfera no espaço R^3 é confundida com o sólido geométrico, razão pela qual, muitas pessoas calculam o volume da esfera. Esse tratamento vem como herança da Geometria Euclidiana. De um ponto de vista mais cuidadoso, a esfera no espaço R^3 é um objeto matemático parametrizado por duas dimensões, o que significa que podemos obter medidas de área e de comprimento, mas o volume tem medida nula. Há outras esferas, cada uma definida no seu respectivo espaço n -dimensional.

6.2. Geometria Esférica e algumas considerações sobre a Geometria Elíptica

Nesse item apresentaremos o embasamento matemático de nossa pesquisa. São aqueles que envolvem conceitos e propriedades básicas de Geometria Esférica e a obtenção das tesselações esféricas geradas em caleidoscópios, através das bases neles colocadas.

Geometria Esférica, geometria sobre a superfície esférica, não é o mesmo que Geometria Elíptica ou Riemanniana. Essa, caracteriza-se pelo fato de identificar pontos antípodas. No decorrer do texto, esclareceremos melhor essa diferença.

Na Geometria Esférica, alguns conceitos são os mesmos daqueles atribuídos na Geometria Euclidiana. Mas existem outros que diferem. Veja a seguir:

Ponto

Na geometria esférica, o conceito de ponto é o mesmo que na geometria euclidiana. Já na geometria elíptica, o ponto é um par de pontos antípodas. Pontos antípodas são obtidos pelas intersecções de uma reta (no conceito euclidiano) que passa pelo centro da esfera, com sua superfície esférica.

Reta

A intersecção de um plano (euclidiano) com uma esfera passando pelo seu centro, determina uma “reta” na geometria esférica. Assim, uma “reta” sobre uma esfera é a sua circunferência máxima ou geodésica, também chamada de grande círculo. Na geometria elíptica as retas são denominadas por geodésicas ou linhas.

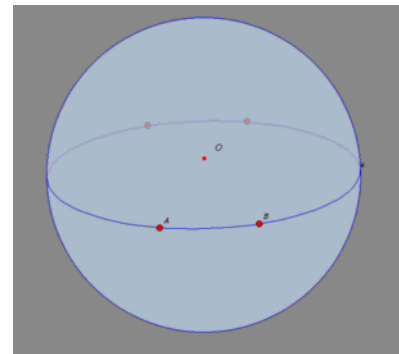


fig. 18: reta na superfície esférica

Ângulo

Define-se ângulo esférico como sendo a intersecção de duas circunferências máximas, e a sua medida é a mesma do ângulo formado pelas tangentes às retas no ponto de intersecção.

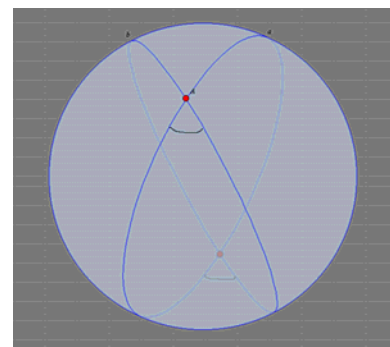


fig. 19: ângulo na superfície esférica

Distância

Dados dois pontos A e B sobre uma esfera, define-se a distância entre eles como o comprimento do menor arco da circunferência máxima que contém esses pontos. As unidades de medidas de comprimento utilizadas são graus ou radianos, pois generalizam as medidas para qualquer esfera.

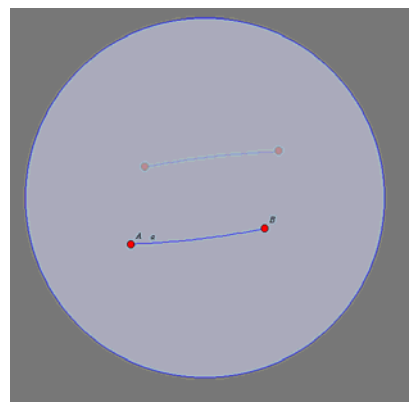


fig. 20: distância na superfície esférica

Fuso Esférico

É uma região do plano esférico, compreendida entre duas circunferências máximas (“retas”). Essas “retas” têm dois pontos em comum, chamados *vértices* do fuso. O ângulo do fuso é, por definição, o ângulo formado entre duas circunferências máximas que constituem os lados do fuso. Este conceito é o mesmo da geometria euclidiana.

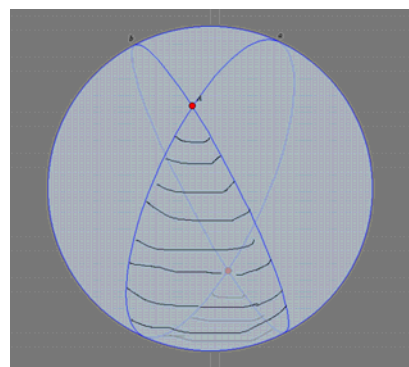


fig. 21: fuso esférico

Triângulo Esférico

Considerar A , B e C , três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. Unindo esses pontos, dois a dois, por arcos de circunferências máximas, todos menores que uma semicircunferência, teremos um triângulo esférico ABC , com lados $a=BC$, $b = AC$ e $c=AB$.

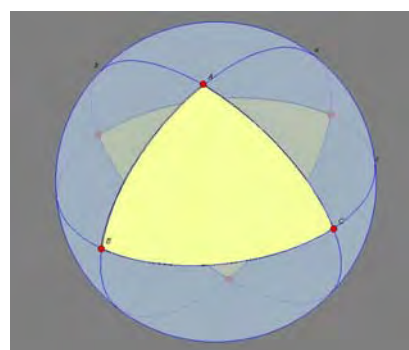


fig. 22: triângulo esférico

Pontos polares (pólos)

Os pontos de intersecção do eixo de rotação da Terra com sua superfície são chamados de Pólo Norte e Pólo Sul.

Equador

É a circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo de rotação da Terra e que divide a “esfera” terrestre em duas partes iguais, denominadas Hemisfério Norte e Hemisfério Sul.

Meridianos

São as diversas circunferências máximas, perpendiculares ao equador e que passam pelos dois pólos.

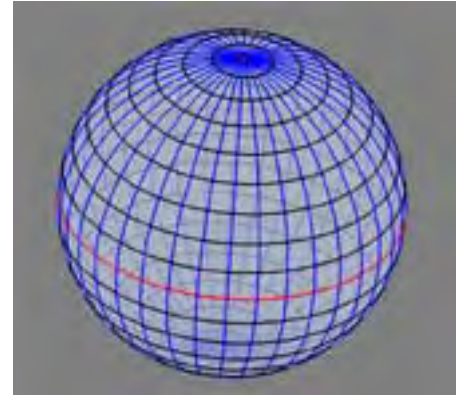


fig. 23: coordenadas esféricas

Paralelos

São as circunferências na superfície esférica, paralelas ao equador.

Hemisfério

Um plano que corta a esfera pelo seu centro, divide-a em duas partes chamadas de hemisférios. Também podemos dizer que qualquer círculo máximo divide a esfera em dois hemisférios.

Na fig. 23, a linha vermelha representa o equador, as circunferências paralelas ao equador (em preto) representam os paralelos e as circunferências máximas azuis, perpendiculares ao equador, representam os meridianos. Os dois pontos de intersecção dos meridianos representam os pontos polares.

Diedro

Na geometria euclidiana, ângulo diedro ou ângulo diédrico, é a reunião entre dois semiplanos de mesma origem, não contida num mesmo plano. A origem comum dos semiplanos é a aresta do diedro

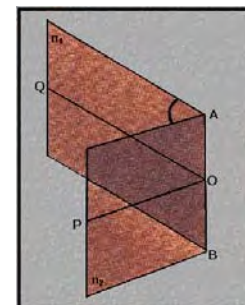


fig. 24: diedro

e os dois semiplanos são suas faces (fig.24). Entretanto, na geometria esférica, consideramos diedro, o ângulo formado por duas “semicircunferências” máximas de mesma origem.

Triedro

O triedro ou ângulo triédrico, na geometria euclidiana, é reunião dos três setores angulares definidos por três semi-retas Va , Vb , Vc , de mesma origem V , não coplanares. V é chamado de vértice e Va , Vb e Vc são as arestas. O ângulo triedro pode ter um, dois ou três ângulos retos, e nestes casos podem ser chamados respectivamente, de triedro retângulo, birretângulo e trirretângulo.

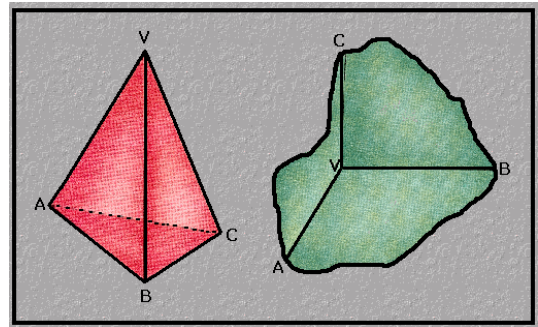


fig. 25: triedro

Na geometria esférica, consideramos vértice do triedro, o ponto O interior da esfera, eqüidistante a todos os pontos de sua superfície (centro da esfera). As arestas correspondem aos raios da esfera e os setores angulares, são setores das suas circunferências máximas.

6.2.1. Algumas considerações sobre “círculo” e “circunferência”

Alguns autores não fazem diferenciação entre os conceitos de *círculo* e *circunferência*, assumindo que *círculo* pode ser tanto o contorno desta curva fechada, quanto à região interna por ela delimitada. Nesta pesquisa, assumiremos que *circunferência* é o contorno e *círculo* é a região interna delimitada por esta *circunferência*.

As circunferências do plano euclidiano apresentam relações matemáticas que diferem da geometria esférica. No plano euclidiano, se dividirmos o comprimento de qualquer circunferência pelo seu diâmetro, obtemos π . O comprimento de suas circunferências pode ser calculado pela fórmula: $C = 2 \pi r$. C é a medida do seu comprimento e r o raio da circunferência. A área (S) de um círculo, nesta geometria, pode ser calculada através de $S = \pi r^2$, sendo r o seu raio. A medida do raio na geometria plana pode ser calculada por um segmento de reta euclidiana, que liga o ponto O (centro desta circunferência), a qualquer ponto pertencente a essa circunferência.

Porém, as circunferências traçadas na geometria esférica possuem dois centros, os pontos que chamamos de P e P' , sendo P' antípoda de P . Os raios, assim como os “segmentos”, são arcos das circunferências máximas do plano esférico. Chamando de l o raio da circunferência centrada em P , observamos que o raio dessa circunferência, com centro P' , vale $180^\circ - l$. Quando o raio de uma circunferência tem medida igual a 90° , obtemos uma circunferência máxima nessa geometria. Na geometria elíptica, a circunferência possui apenas um centro, pois P e P' são considerados como um único ponto. Observamos, aqui, outra diferença em relação à geometria plana, pois sobre o plano euclidiano não existe circunferência máxima. Veja a figura 26.

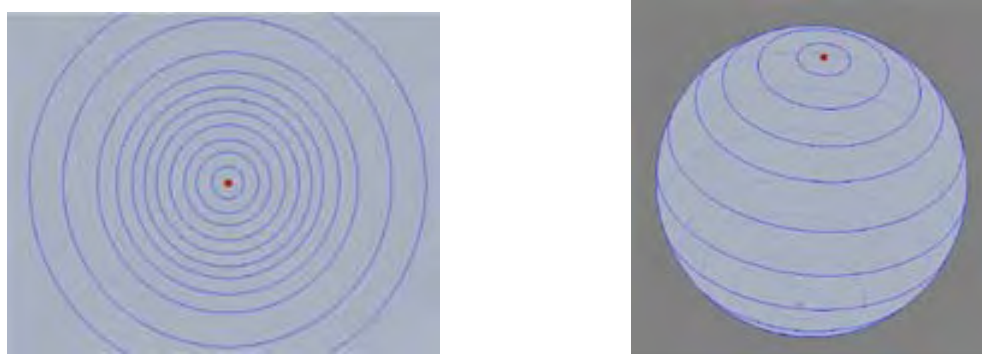


fig. 26: circunferências no plano euclidiano e no plano esférico

Para calcular o comprimento de uma circunferência na geometria esférica e elíptica, usamos a fórmula dada: $C = 2\pi \operatorname{sen} l$, onde C é o seu comprimento e l o seu raio.

Demonstração:

Consideremos a circunferência C sobre uma superfície esférica, de centro em P e raio l .

Tomando um ponto B , tal que $B \in C$, então o “segmento esférico” $\overline{PB} = l$.

Chamando de O o ponto equidistante a todos os pontos pertencentes a essa esfera, temos $\overline{OP} = \overline{OB}$. Lembramos que, aqui, $\overline{OP}$ e $\overline{OB}$ são segmentos de retas euclidianas, sendo $\overline{OP}$ e $\overline{OB}$ raios da esfera que contém essa circunferência.

Denominando R , o raio da esfera e r o raio

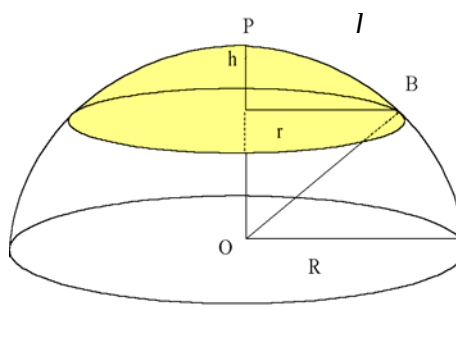


fig. 27: círculo na geometria esférica

da circunferência, formado pela intersecção do plano euclidiano que contém C com esta esfera, temos:

$$\hat{O} \text{ em } P\hat{O}B, \text{ tal que } \operatorname{sen} \hat{O} = \frac{r}{R}$$

Sendo, $C = 2\pi r$ e substituindo r por $R \operatorname{sen} \hat{O}$.

$C = 2\pi \cdot R \operatorname{sen} \hat{O}$. Considerando R igual a uma unidade e, sabendo que l é o arco correspondente ao ângulo $\hat{O}$, e com mesma medida em graus, chegamos que $C = 2\pi \operatorname{sen} l$.

Para o cálculo da área de um “círculo” na geometria esférica, também podemos utilizar propriedades da “geometria espacial”, um modelo euclidiano para figuras geométricas que ocupam um espaço tridimensional, pois a área de um “círculo” na geometria esférica corresponde à área de uma “calota esférica” na geometria euclidiana.

Calotas esféricas são as duas regiões formadas por cada uma das partes em que fica dividida a superfície esférica, mediante uma secção plana. Sua área (A) pode ser obtida pela expressão: $A = 2\pi R h$. (h) é a distância entre a secção e o pólo dessa esfera, e (R) é o raio da esfera. A área (S) de um “círculo” na geometria esférica, em função do seu raio (l), pode ser obtida pela expressão: $S = 2\pi (1 - \cos l)$.

Demonstração:

Sabendo que $S = A$, temos $h = R - x$, onde x é a distância entre a secção e o centro da esfera.

Chamando de O o ponto equidistante a todos os pontos pertencentes à circunferência desse círculo, temos:

$$\cos \hat{O} = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \cdot \cos \hat{O}$$

Por substituição, obtemos: $S = 2\pi R \cdot (R - R \cdot \cos \hat{O})$

Assumindo $R = 1$, significa que $l = \hat{O}$

Chegamos a $S = 2\pi \cdot (1 - \cos \hat{O})$

Sabendo que l é o arco correspondente ao ângulo $\hat{O}$ e com mesma medida em graus.

$S = 2\pi \cdot (1 - \cos l)$, como queríamos demonstrar. Lembramos que a unidade de medida de área usada na geometria esférica e elíptica é em graus ou π radianos (rad).

Assim, 360° ou $2\pi \text{ rad}$ corresponde a área de um hemisfério, pois $4\pi \text{ rad}$ corresponde a toda área da superfície esférica.

6.2.2. Um problema de navegação

Conhecendo as coordenadas geográficas do ponto de partida e do ponto de chegada. Que direção deve-se seguir? O matemático que esclareceu esta questão foi o português Pedro Nunes (1502-1578). Ele mostrou que um arco de



fig. 28: *loxodrômica*

círculo máximo é a rota direta e mais curta, não é uma linha de rumo constante. Neste caso é necessário, em viagem, sempre ajustar o rumo para chegar ao destino desejado seguindo a rota do círculo máximo. Em alternativa, pode seguir-se uma linha de rumo constante, que hoje se chama *loxodrômica*, mas a viagem fica mais longa. Os estudos de Pedro Nunes tiveram bastante influência na Europa em matéria de teoria da navegação e cartografia.

Após esta breve explanação de conceitos básicos da geometria esférica, apresentamos a demonstração da fórmula do cálculo da área de um triângulo esférico. Neste caso, também podemos verificar que a soma dos ângulos internos desses triângulos são maiores que 180° ou π radianos.

Com relação à área S de um triângulo esférico, temos o seguinte teorema: Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então, $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{r^2}$, onde S é a área desse triângulo e r seu raio. Sua demonstração foi apresentada em 1629 pelo geômetra francês Albert Girard, motivo pelo qual, é chamado de teorema de Girard. Vejamos a demonstração, semelhante à encontrada em Reis (2000) a seguir.

Sabendo que a área da superfície esférica vale $4\pi r^2$, sendo r o raio da esfera, então, para obter a área do fuso esférico S_α com medida do ângulo α , aplicamos uma regra de três simples, pois sua área é diretamente proporcional à medida do seu ângulo.

Ângulo do fuso	Área do fuso
2π	$4\pi r^2$
α	S_α

$$\text{Assim: } \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{4\pi r^2}{S_\alpha} \Rightarrow 2\pi \cdot S_\alpha = \alpha \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow S_\alpha = 2\alpha r^2.$$

A área delimitada pelo fuso completo é dada por $\Phi_\alpha = 2 S_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha = 4\alpha r^2$.

Consideremos, agora, um triângulo esférico, cujos ângulos internos têm medidas α , β e γ . Feito isto, prolonguemos seus lados de modo a construirmos três fusos completos, com os mesmos ângulos desse triângulo, conforme vemos na figura 29.

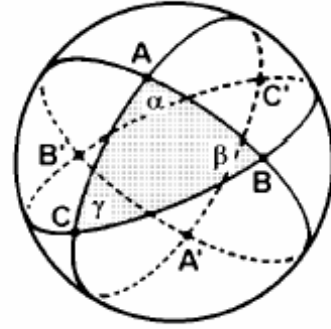


fig. 29: triângulo esférico

Somando as áreas destes três fusos completos obtemos:

$$\Phi_\alpha + \Phi_\beta + \Phi_\gamma = 4\pi r^2 + 2S + 2S', \text{ onde } r \text{ é o raio da esfera, } S \text{ a área do triângulo e } S' \text{ a área do triângulo formado pelos pontos antípodas ao triângulo } S.$$

Isto é válido, porque os três fusos completos cobrem toda a esfera e ainda duas vezes mais a área S e S' , devido ao fato de cada um ser contado três vezes, uma vez em cada fuso duplo. Assim, como as áreas da S e S' são iguais, pois são subtendidas por ângulos iguais a α , β e γ , temos que:

$$\Phi_\alpha + \Phi_\beta + \Phi_\gamma = 4\pi r^2 + 2S + 2S'$$

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 4S$$

$$\alpha r^2 + \beta r^2 + \gamma r^2 = \pi r^2 + S$$

$$(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot r^2 = S$$

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{S}{r^2}$$

Sendo $(\alpha + \beta + \gamma)$ a soma dos ângulos internos do triângulo esférico e $\frac{S}{r^2} > 0$, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S}{r^2}, \text{ como queríamos demonstrar. A diferença}$$

$$\frac{S}{r^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi \text{ é chamada o “excesso esférico”}.$$

Logo, num triângulo esférico a soma dos ângulos internos é maior que π radianos ou 180° .

Propriedades dos triângulos esféricos:

- ✓ A soma dos 3 lados a, b , e c de um triângulo esférico é maior que 0° e menor que 360° .

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ$$

- ✓ A soma dos 3 ângulos de um triângulo esférico é maior que 2 retos e menor que 6 retos.

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

- ✓ Cada lado de um triângulo esférico é menor que a soma e maior que a diferença dos outros dois.

- ✓ Se 2 lados de um triângulo esférico são iguais, os ângulos opostos também são iguais. A recíproca é verdadeira.

- ✓ Se $a = b$, então $A = B$ e reciprocamente

- ✓ Ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-versa.

- ✓ A soma de dois ângulos é menor que o terceiro acrescido de 180° e a diferença é menor que o suplemento do terceiro.

$$A + B < C + 180^\circ$$

$$A - B < 180^\circ - C$$

$$|b - c| < a < b + c$$

$$|c - a| < b < c + a$$

$$|a - b| < c < a + b$$

Em relação aos casos de semelhança e congruência de triângulos esféricos, podemos verificar que a única ocorrência de semelhança neste caso é (LLL), isto é, quando a razão é 1 e os triângulos são congruentes.

6.2.3. Trigonometria Esférica

A trigonometria plana trata da resolução de triângulos no plano, assim como a trigonometria esférica trata da resolução de triângulos esféricos. No plano, o raio do círculo trigonométrico é definido com valor de uma unidade. O raio da esfera trigonométrica também vale uma unidade.

Um triângulo esférico de vértices A , B e C , tem o domínio na esfera limitado por três circunferências máximas, que se cortam em A , B e C .

Os lados, a , b e c , são, respectivamente, os arcos da circunferência máxima opostos a A , B e C .

Em todo triângulo sobre uma superfície esférica, podem-se distinguir seis ângulos.

$\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$: são os ângulos diedros definidos pelas circunferências máximas que se cortam nos pontos A , B e C .

$\angle AOB$, $\angle BOC$ e $\angle AOC$ são os ângulos com vértices no ponto O (centro da esfera). Desse modo, temos:

$$\frac{a}{k} = \angle BOC, \quad \frac{b}{k} = \angle AOC \quad \text{e} \quad \frac{c}{k} = \angle AOB.$$

Como $k = 1$, chegamos que: $a = \angle BOC$, $b = \angle AOC$ e $c = \angle AOB$.

Os ângulos do triângulo esférico ABC foram simbolizados por $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e os lados opostos, com as minúsculas respectivas: a , b e c . A cada triângulo esférico ABC , corresponde um ângulo triédrico convexo, $O-ABC$, cujo vértice está no centro O da esfera. Os lados do triângulo esférico têm por medidas os respectivos arcos de circunferências máximas do ângulo triédrico correspondente. A medida de cada lado é igual à medida do respectivo ângulo central.

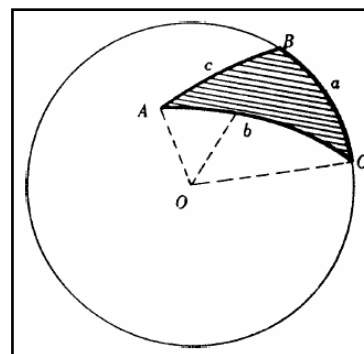


fig. 30: triângulo esférico

6.2.4. Fórmulas gerais da trigonometria esférica

A trigonometria esférica estabelece relações entre os 6 elementos de um triângulo esférico, tornando possível o cálculo de 3 desses elementos, quando forem conhecidos os outros 3. Assim, cada elemento desconhecido é calculado em função de outros 3.

1º caso: combinação de 3 lados a cada um dos ângulos

Esta importante fórmula da trigonometria esférica, relacionando os lados de um triângulo esférico com um de seus ângulos, foi explicitada por Taurinus.

Da figura 32, obtém-se: $\operatorname{tg} b = AL$, $\sec b = OL$, $\operatorname{tg} c = AK$ e $\sec c = OK$

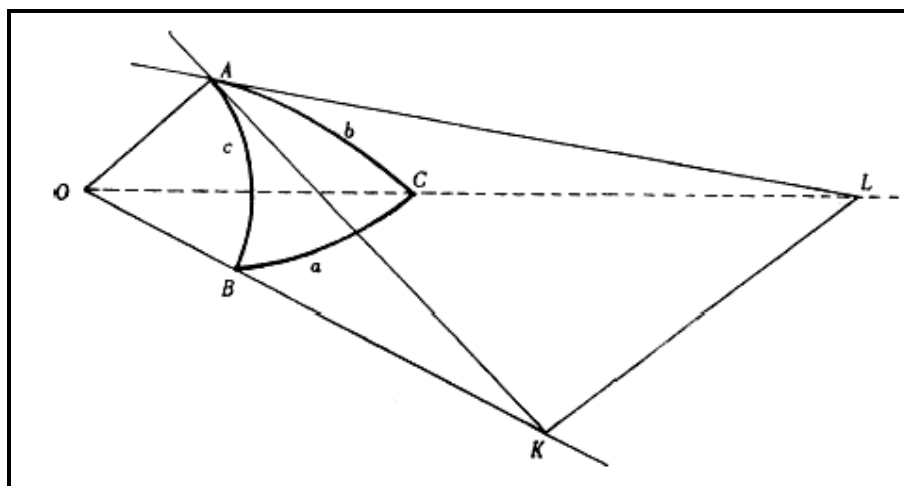


fig. 31: elementos de um triângulo esférico

Os triângulos planos retilíneos KOL e KAL permitem-nos escrever:

$$(KL)^2 = (OL)^2 + (OK)^2 - 2 \cdot OL \cdot OK \cdot \cos a$$

$$(KL)^2 = (AL)^2 + (AK)^2 - 2 \cdot AL \cdot AK \cdot \cos A$$

Igualando e substituindo:

$$(OL)^2 + (OK)^2 - 2 \cdot OL \cdot OK \cdot \cos a = (AL)^2 + (AK)^2 - 2 \cdot AL \cdot AK \cdot \cos A$$

$$\sec^2 b + \sec^2 c - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a = \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A,$$

Substituímos:

$$\sec^2 b \text{ por } 1 + \operatorname{tg}^2 b \text{ e } \sec^2 c \text{ por } 1 + \operatorname{tg}^2 c,$$

Obtemos:

$$1 + \operatorname{tg}^2 b + 1 + \operatorname{tg}^2 c - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a = \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A, \text{ ou}$$

seja:

$$-2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a = -2 + \operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 b + \operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A$$

$$-2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a = -2 - 2 \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A$$

Dividindo por (-2) ambos os membros da igualdade acima, teremos:

$$\sec b \cdot \sec c \cdot \cos a = 1 + \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por $\cos b \cdot \cos c$, virá:

$$\frac{1}{\cos b} \cdot \frac{1}{\cos c} \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c = \cos b \cdot \cos c + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \cdot \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} \cdot \cos A \cdot \cos b \cdot \cos c$$

Por simplificação, obtemos: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$

De forma semelhante, chegamos as outras duas combinações, completando assim o grupo das chamadas fórmulas fundamentais da trigonometria esférica:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C$$

Outra importante fórmula da trigonometria esférica, relacionando os ângulos com um dos lados dos triângulos esféricos, veremos a seguir.

2º caso: combinação de 3 ângulos a cada um dos lados

Por simples aplicação da propriedade do triângulo polar ou suplementar, chegaríamos ao seguinte conjunto de fórmulas:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos a$$

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos b$$

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos c$$

3º Caso: combinação de 2 ângulos a 2 lados opostos (analogia dos senos ou lei dos senos)

Partindo das fórmulas fundamentais, por fáceis substituições algébricas, deduziríamos:

Todo o trabalho restante da Trigonometria Esférica se resume, praticamente, na simplificação destas fórmulas gerais, que são suficientes para resolver qualquer caso clássico que se apresente.

6.3. Poliedros de Platão e Arquimedes nas tesselações esféricas.

6.3.1. Os sólidos Platônicos

Não conhecemos em que circunstâncias históricas iniciaram o interesse pelos poliedros. Do ponto de vista matemático, existem fontes egípcias, chinesas e babilônicas contendo a resolução de problemas relativos a pirâmides. Em escavações arqueológicas, junto de Pádua foi descoberto um dodecaedro etrusco (500 a.C) de um mineral que era um objeto de jogo, e os egípcios usavam dados com a forma de icosaedro.

Os cinco poliedros regulares: tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro ficaram conhecidos na história como sólidos platônicos em virtude de um famoso texto de Platão incluído no diálogo Timeu. Um poliedro é regular quando todas as faces são polígonos regulares congruentes, todas as arestas são congruentes e todos os vértices são congruentes. Isto significa que existe uma simetria do poliedro que transforma cada face, cada aresta e cada vértice numa outra face, aresta ou vértice.

Em *Elementos*, os poliedros são tratados nos livros XI, XII e XIII. No livro XIII, a partir da proposição 13, Euclides estuda sistematicamente os sólidos platônicos. As construções do tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro e dodecaedro, como sólidos inscritos numa dada superfície esférica, são demonstradas nas proposições 13, 14, 15, 16 e 17, respectivamente. A proposição 18 estabelece as relações entre as arestas destes sólidos e o diâmetro da superfície esférica. E, finalmente, após a esta proposição, Euclides afirma e demonstra que, além dos cinco poliedros citados, não pode ser construído mais nenhum, cujas faces sejam polígonos regulares, iguais entre si.

6.3.2. Os sólidos arquimedianos

Se na definição que demos de poliedro regular mantivermos a condição das faces serem polígonos regulares, mas não de serem todas congruentes, obtemos uma família mais ampla de sólidos, estudada por Arquimedes (287-212 a.C.). Nota-se que as arestas são todas congruentes, e os vértices também. As faces são polígonos regulares, mas enquanto nos platônicos eram apenas de um tipo, aqui poderão ser de mais de um. É ainda necessário acrescentar a condição de que todo o vértice pode ser transformado noutro vértice por uma simetria do poliedro. A estes sólidos é habitual chamar *arquimedianos* ou *semi-regulares*.

Sem os prismas e antiprismas, a família dos arquimedianos é finita. Existem treze tipos de vértices diferentes e cada um desses tipos de vértices corresponde um sólido arquimediano.

Os livros de Arquimedes sobre estes sólidos estão perdidos, mas foi Johanes Kepler (1571-1630) quem se interessou de novo por estes sólidos a ponto de lhes atribuir nomes e desenhar as respectivas ilustrações no *Harmonices Mundi* de 1619. Como a cada tipo de vértice corresponde um arquimediano, a notação para os tipos de vértices serve para designar os diferentes sólidos. Cada um dos poliedros arquimedianos pode ser obtido por meio de uma sucessão de cortes, também chamados truncaduras, por vezes seguidas de transformações convenientes, a partir dos sólidos platônicos. As truncaduras, em cada vértice, são feitas por planos perpendiculares ao eixo de simetria de rotação que passa por esse vértice. Obtêm-se assim, polígonos regulares como faces. Conforme a distância do vértice a que a truncatura se faz, assim se vão obtendo os poliedros arquimedianos.

Se partirmos do tetraedro e do cubo (ou do octaedro), conseguimos chegar por truncaduras diretas aos seguintes arquimedianos: tetraedro truncado, cubo truncado, octaedro truncado, cuboctaedro;

Se partirmos do icosaedro (ou do dodecaedro), conseguimos chegar aos seguintes arquimedianos: icosaedro truncado, icosidodecaedro, dodecaedro truncado.

Nota-se, na figura 33, que o cuboctaedro fica “entre” o cubo e o octaedro, podendo ser obtido por truncaduras tanto a partir do cubo como do octaedro. Daí o seu nome. Do mesmo modo, na figura 36, o icosidodecaedro fica “entre” o icosaedro e o dodecaedro.

Os poliedros são sólidos delimitados por faces planas poligonais. Os poliedros de Platão possuem faces formadas por um mesmo tipo de polígono regular e os de Arquimedes (arquimedianos) têm suas faces constituídas por polígonos regulares de tipos diferentes.

Existem cinco poliedros de Platão, e são eles: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, aos quais podemos atribuir as seguintes notações, respectivamente: (3,3,3); (4,4,4); (3,3,3,3); (5,5,5); (3,3,3,3,3). Esse tipo de notação, mostra qual(ais) tipo(s) de polígono(s) regular(es), quantos são, e qual a ordem que aparecem em cada vértice do poliedro.

Exemplos:

(3,3,3): significa que temos três triângulos regulares em cada vértice.

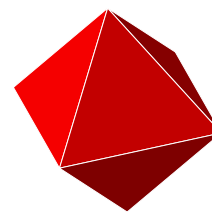


fig. 32: octaedro

$(3,8,8)$: significa que temos 1 triângulo, 2 octógonos em cada vértice.

Os poliedros arquimedianos existentes recebem as seguintes notações: $(3,6,6)$; $(3,8,8)$; $(3,4,3,4)$; $(4,6,6)$; $(3,4,4,4)$; $(4,6,8)$; $(3,3,3,3,4)$; $(3,10,10)$; $(3,5,3,5)$; $(5,6,6)$; $(3,4,5,4)$; $(4,6,10)$; $(3,3,3,3,5)$. Veja a seguir, as figuras que correspondem respectivamente, a essas notações:

Tetratroncoedro $(3,6,6)$: obtido por truncamento do tetraedro.

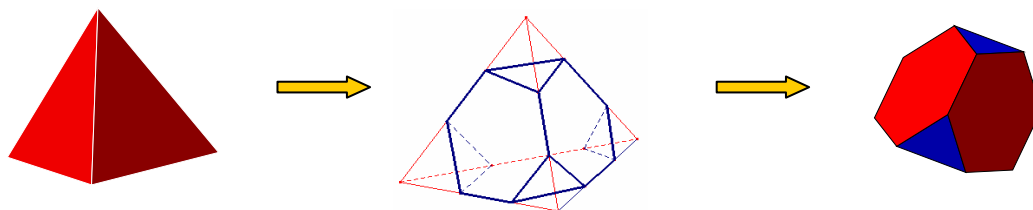


fig. 33: truncamento do tetraedro

Do $(3,6,6)$, obtemos $(3,3,3,3)$, por truncamento.

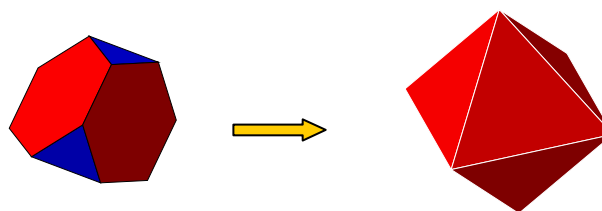


fig. 34: tetratrocaedro truncado

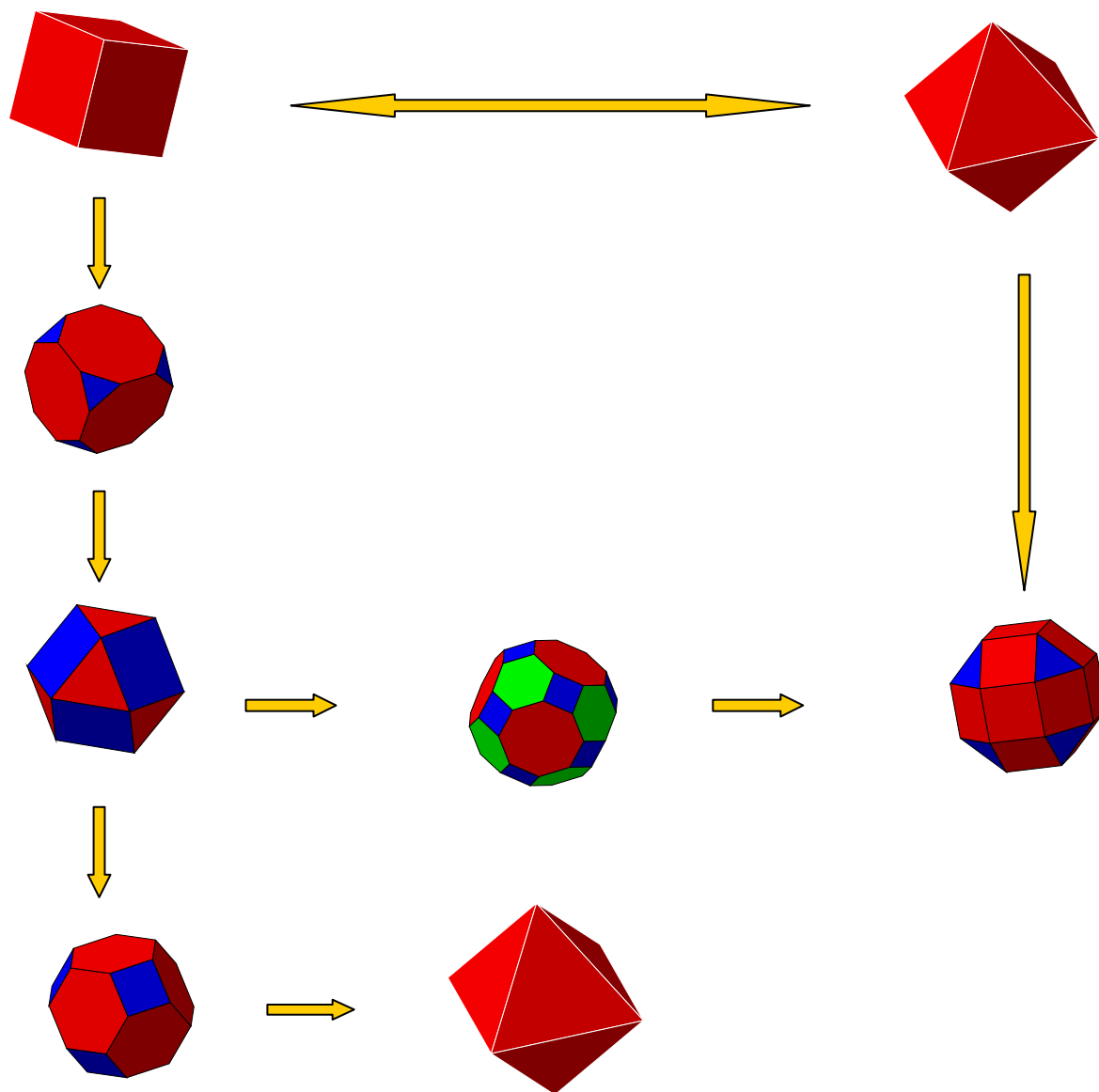


fig. 35: cuboctatroncoedros obtidos por truncamento do cubo

Terminologias dos Cuboctatroncoedros conforme as seguintes notações:

(3,8,8): cubo truncado

(3,4,3,4): cuboctaedro

(4,6,6): cuboctaedro truncado

(3,4,4,4): octaedro truncado

(4,6,8): rombicuboctaedro

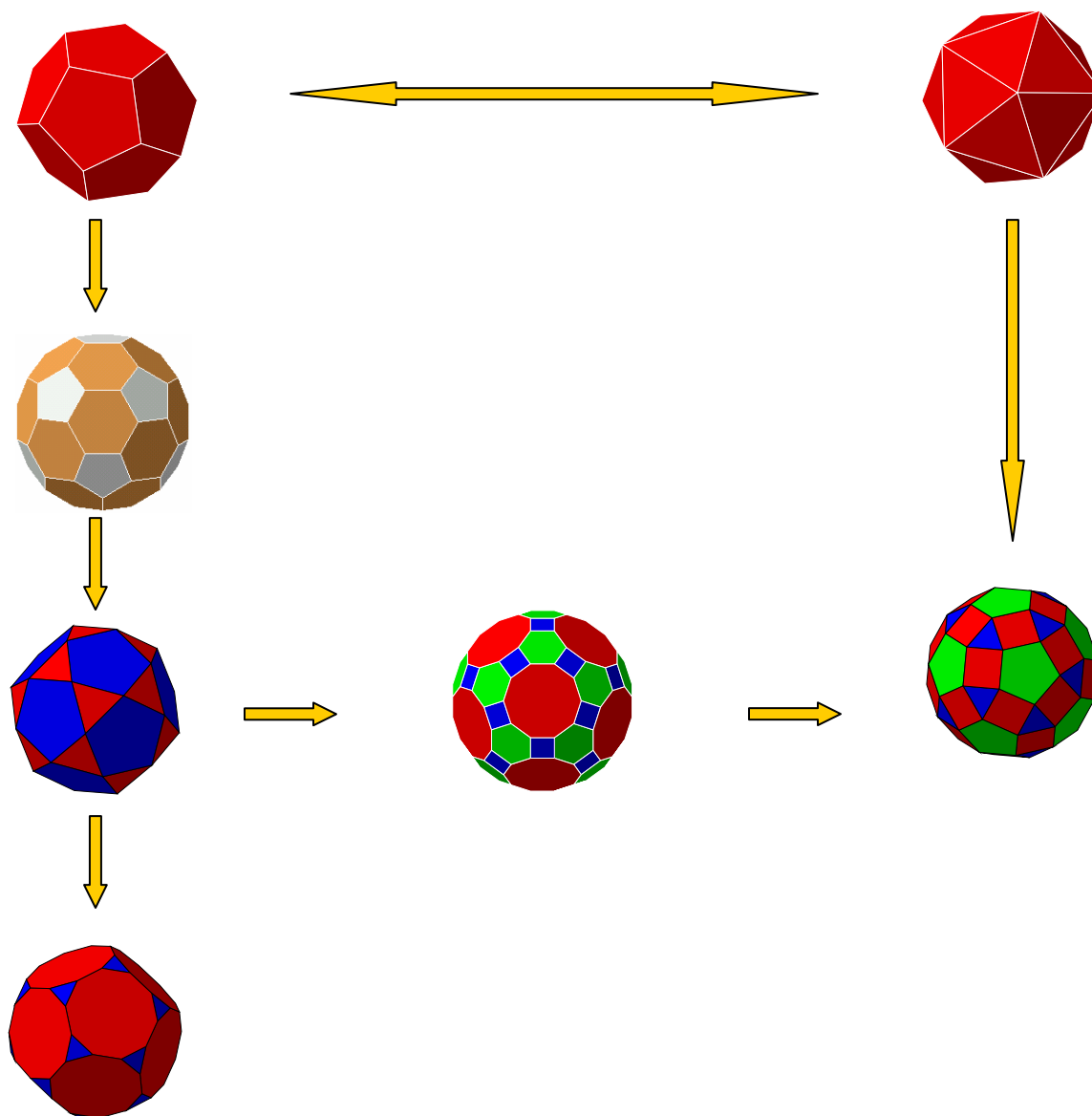


fig. 36: Dodecaicositroncoedros: obtidos por truncamento do dodecaedro e do icosaedro

Terminologias dos Dodecaicositroncoedros conforme as seguintes notações:

(3,10,10): dodecaedro truncado

(3,5,3,5): icosidodecaedro

(5,6,6): icosaedro truncado

(3,4,5,4): rombicoidodecaedro

(4,6,10): icosidodecaedro truncado

Abordaremos agora, os poliedros de Platão e Arquimedes nas tesselações esféricas.

Em inglês, o termo *tesselation*, traduzido como tesselação, tem um sentido análogo à palavra pavimentação. Os dois termos referem-se ao recobrimento de uma região qualquer. Imagine agora esses poliedros inflados, de modo que cada um se torne uma esfera. Teremos, então, obtido tesselações desses poliedros na superfície esférica. A tesselação ocorre quando há o recobrimento da superfície sem lacunas ou sobreposições de polígonos. Veja alguns exemplos:

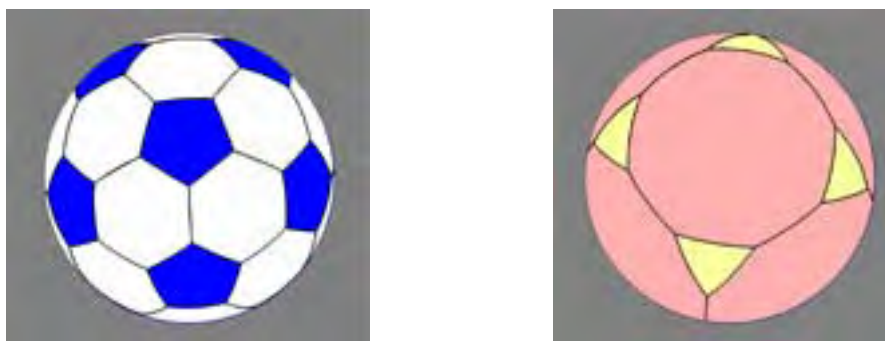


fig. 37: tesselações esféricas

Mostraremos, a seguir, as tesselações esféricas com régua e compasso eletrônicos, isto é, no *software* de geometria dinâmica. Os cálculos das medidas de lados e áreas dos polígonos esféricos nessas tesselações, também apresentados, não foram atividades aplicadas no curso de extensão. Mas acreditamos que possam contribuir nesse estudo, assim como apresentar outra abordagem para o tema.

Os poliedros de Platão nas tesselações esféricas:

Octaedro esférico (3,3,3,3)

A tesselação por oito triângulos esféricos (octaedro esférico), cuja notação é (3,3,3,3), implica que, temos quatro triângulos em cada vértice. Vemos na figura 38 o octaedro e o octaedro esférico.

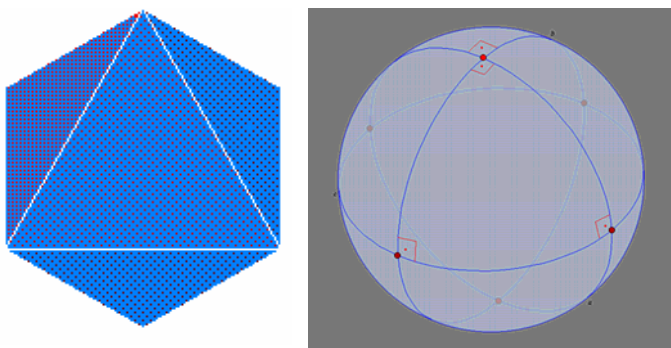


fig. 38: octaedro e octaedro esférico

1. Traçar uma “reta” pelos pontos A e B : modos – linhas - linha por dois pontos.
2. Por A e B , traçar duas perpendiculares: modos – linhas – definir ortogonal.
3. Marcar C o ponto de interseção das “retas”: modos – ponto único.
4. Pelo ponto C , traçar uma perpendicular à linha AC : modos – linhas - definir ortogonal.
5. Esconder a “reta” BC : modos – modos de seleção – opacidade – invisível.

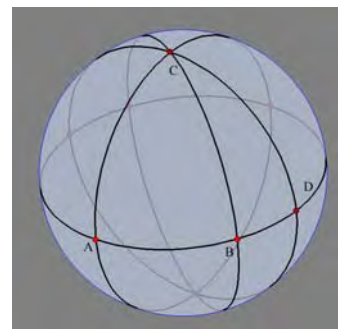


fig. 39: construção do octaedro

Como o *software* Cinderella utiliza os conceitos matemáticos da geometria elíptica projetiva, os pontos antípodas são entendidos como um único ponto. Outro detalhe é que ele não reconhece como linha (reta), a circunferência máxima de raio igual a $1,57 \text{ rad}$. Desse modo, não permite traçar perpendiculares a essas circunferências. Em virtude disso, seguimos os passos de 1 a 4. Todavia, existem outras maneiras de se fazê-la.

Aqui, verificamos que, tanto os lados quanto os ângulos dos oito triângulos esféricos são iguais a 90° ou $\pi/2 \text{ rad}$. O triângulo esférico trirretângulo é também chamado de octante.

Cubo esférico (4,4,4)

Na tesselação por seis quadrângulos esféricos (“cubo esférico”), cuja notação é (4,4,4), significa que temos três quadrângulos esféricos em cada vértice. Não são nomeados por quadrados porque, nesta geometria, não existe polígono formado por quatro lados congruentes com os quatro ângulos retos.

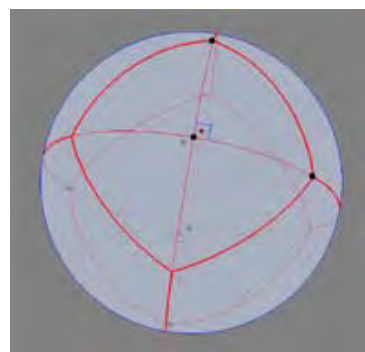
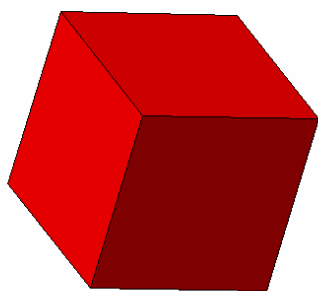


fig. 40: cubo e cubo esférico

1. Parte-se da construção do octaedro esférico. Traçar as bissetrizes de todos os triângulos: linhas – bissetriz.
2. Marcar os pontos de intersecção no centro de cada triângulo esférico. São os vértices do cubo esférico: ponto – ponto único.
3. Esconder todas as retas: modos – editar – seleccionar todas linhas – propriedades – opacidade – invisível.
4. Ligar os pontos por segmentos, formando os seis quadrângulos: modos – especial – segmento.

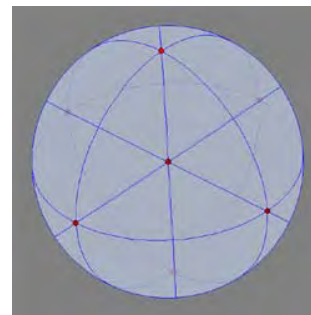


fig. 41: construção do cubo esférico

Sabemos que a área de cada quadrângulo esférico (S_4) no “cubo esférico” é $2\pi/3$, pois: $6 S_4 = 4\pi \Rightarrow S_4 = 2\pi/3$

Como temos três quadrângulos esféricos em cada vértice, seus ângulos medem $2\pi/3 \text{ rad}$ ou 120° cada.

Traçando as diagonais de um dos quadrângulos, dividimos esse, em quatro triângulos congruentes e isósceles, com medida de um dos ângulos igual a 90° e os outros dois, igual a 60° cada.

Chamamos de α , β e δ , os lados que formam o triângulo e respectivamente A , B e O , os ângulos diedros opostos aos lados.

Sabemos que:

$\alpha = \beta$, pois têm medidas iguais a metade da diagonal do quadrângulo.

$A = 60^\circ$ e $B = 60^\circ$, pois A e B são bissetrizes dos ângulos do quadrângulo, e $O = 90^\circ$, pois divide o plano esférico em quatro ângulos congruentes.

Dada a lei dos cossenos: $\cos O = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos \delta$

Por substituição, temos: $\cos 90^\circ = -\cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \delta$

$$0 = -\cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ \cdot \cos \delta$$

$$\cos^2 60^\circ = \sin^2 60^\circ \cdot \cos \delta$$

$$\cos \delta = 1/3$$

$$\delta \cong 70,53^\circ$$

Podemos verificar que a aresta do tetraedro esférico é congruente a diagonal (d) do cubo esférico nessa mesma superfície. Seguindo a notação anterior, sabemos que $d = 2 \cdot \alpha$

$$\text{De: } \cos A = -\cos B \cdot \cos O + \sin B \cdot \sin O \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Temos: } \cos 60^\circ = -\cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos \alpha$$

$$1/2 = -1/2 \cdot 0 + \sqrt{3}/2 \cdot 1 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3}/3$$

$$\alpha \cong 54,735^\circ$$

$$d \cong 109,47^\circ$$

Tetraedro esférico

A tesselação por quatro triângulos esféricos (tetraedro esférico), cuja notação é (3,3,3), significa que temos três desses triângulos, em cada vértice.

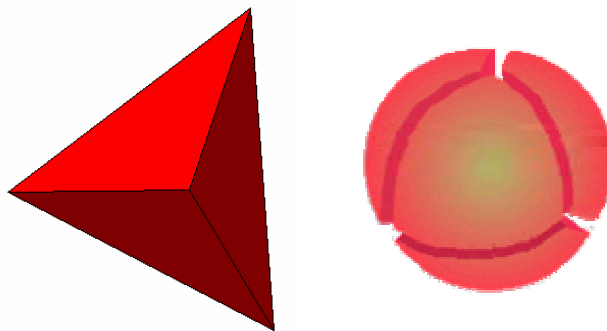


fig. 42: tetraedro e tetraedro esférico

- 1- No cubo esférico, traçar uma diagonal de uma das faces. Apagar o restante.
- 2- Use a diagonal com lado do triângulo como abertura do compasso. Traçar as circunferências com centro nos pontos de extremidade da diagonal. Marcar os pontos nas intersecções. São os vértices do tetraedro esférico.

Uma observação importante aqui, é que essa construção no *Cinderella* só permite a visualização dos vértices. Isso ocorre porque toda construção em um hemisfério é a mesma do outro hemisfério e as arestas desses triângulos esféricos equiláteros são maiores que 90° .

Sabemos que a área (S_3) de cada triângulo no tetraedro esférico vale π , pois toda superfície esférica tem área 4π . Como são quatro triângulos esféricos congruentes cobrindo toda a superfície esférica, temos $S_3 = 4\pi/4 \Rightarrow A = \pi$. Lembramos que, neste caso, o raio da esfera em questão tem o valor de uma unidade. Todos os ângulos internos dos triângulos no tetraedro esférico medem $2\pi/3 \text{ rad}$ ou 120° . Nas tesselações esféricas, a soma dos ângulos dos polígonos em cada vértice é $2\pi \text{ rad}$ ou 360° . Como neste caso, possuem

três ângulos congruentes em cada vértice, concluímos que suas medidas apresentadas anteriormente estão corretas.

Aplicando a lei dos cossenos: $\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos \alpha$, encontramos os lados dos triângulos no tetraedro esférico.

Sabendo que os triângulos são equiláteros, isto é, com três lados e três ângulos congruentes, obtemos:

$$\cos A = -\cos A \cdot \cos A + \sin A \cdot \sin A \cdot \cos \alpha$$

$$\cos A = -\cos^2 A + \sin^2 A \cdot \cos \alpha$$

$$\cos A + \cos^2 A = \sin^2 A \cdot \cos \alpha$$

$$\cos A \cdot (1 + \cos A) = (1 - \cos^2 A) \cdot \cos \alpha$$

$$\cos A \cdot (1 + \cos A) = (1 + \cos A) \cdot (1 - \cos A) \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \cos A / (1 - \cos A)$$

$$\cos \alpha = \cos 120^\circ / (1 - \cos 120^\circ)$$

$$\cos \alpha = -1/3$$

$$\alpha \cong 109,47^\circ$$

Dodecaedro esférico

A tesselação (5,5,5), dodecaedro esférico (fig.43) é formado por doze pentágonos esféricos regulares. Podemos verificar que os ângulos internos dos pentágonos medem 120° cada, pois temos três pentágonos esféricos em cada vértice.

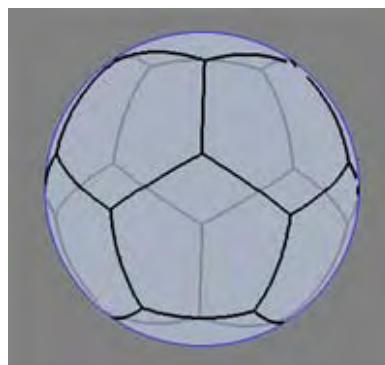
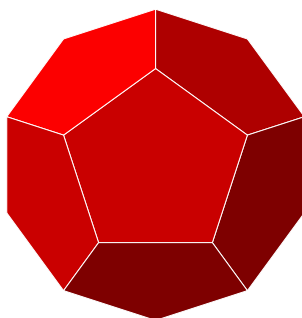


fig. 43: dodecaedro e dodecaedro esférico

- 1- Do cubo esférico. Escolher uma das arestas e construir um triângulo esférico equilátero: modos – circunferência - compasso
- 2- Encontrar o centro desse triângulo esférico equilátero na intersecção das bissetrizes dos seus ângulos formando três ângulos de 120° : modos – linha – bissetriz
- 3- Os segmentos que ligam o centro aos vértices do triângulo esférico equilátero são lados do pentágono esférico. Ligar o vértice do triângulo esférico equilátero, que não coincidem com vértices da face do cubo esférico, aos outros vértices dessa face.
- 4- Continuar o processo até construir os doze pentágonos esféricos.
- 5- Eliminar as linhas que não são arestas do dodecaedro esférico.

Para encontrar a medida dos lados dos pentágonos esféricos, dividimos um pentágono esférico em 5 triângulos congruentes, da seguinte maneira:

Traçamos as bissetrizes dos seus ângulos internos e chamamos de P o ponto de intersecção dessas bissetrizes. Ligando P aos vértices A e B do pentágono esférico, obtemos um dos 5 triângulos congruentes e isósceles. O ângulo formado em P mede 72° , pois P divide a superfície esférica em cinco ângulos congruentes. Os dois ângulos formados em A e B , vértices do triângulo APB , coincidentes com os vértices do pentágono esférico, medem 60° , pois são bissetrizes desses ângulos de 120° cada. Chamando de ρ , o lado do triângulo (também lado do pentágono), oposto a P , temos:

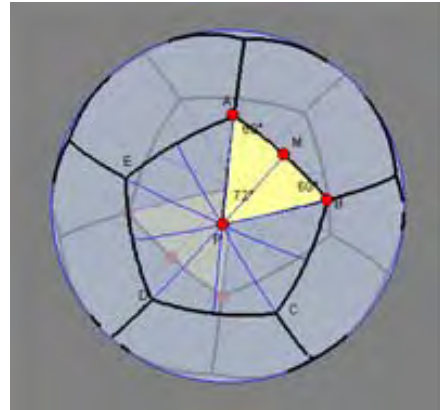


fig. 44: construção do dodecaedro

$$\cos P = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos \rho$$

$$\cos 72^\circ = -\cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \rho$$

$$\cos 72^\circ + \cos^2 60^\circ = \sin^2 60^\circ \cdot \cos \rho$$

$$\cos \rho = (\cos 72^\circ + \cos^2 60^\circ) / \sin 60^\circ$$

$$\rho \cong 41,81^\circ$$

Icosaedro esférico

A tesselação (3,3,3,3,3), o icosaedro esférico, é formada por vinte triângulos esféricos equiláteros. Em cada vértice temos cinco triângulos esféricos. Desse modo, podemos verificar que os ângulos dos triângulos esféricos medem 72° cada.

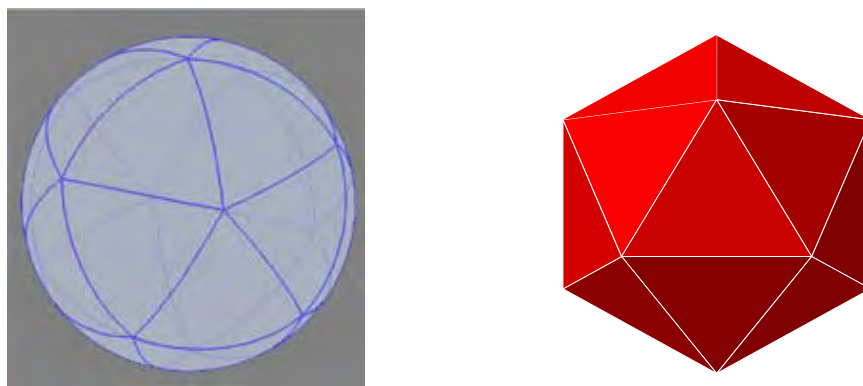


fig. 45: icosaedro esférico e icosaedro

- 1- Em uma face dodecaedro esférico, traçar as bissetrizes dos ângulos desse polígono: modos – linha – bissetriz.
- 2- Marcar o ponto de intersecção (centro do pentágono esférico). Repetir o processo nas outras faces: modos – ponto – ponto único.
- 3- Traçar os segmentos que ligam os centros dos pentágonos esféricos: modos – gráfico – segmento.
- 4- Eliminar as linhas que não são arestas do icosaedro esférico: modos – modos de seleção (selecionar os elementos) – propriedades – opacidade – invisível.

Novamente, aplicamos a lei dos cossenos para calcular a medida dos lados (l) de cada triângulo esférico nessa tesselação.

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{A} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{A} \cdot \cos l$$

$$\cos \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = \sin^2 \hat{A} \cdot \cos l$$

$$\cos \hat{A} \cdot (1 + \cos \hat{A}) = (1 - \cos \hat{A}) \cdot (1 + \cos \hat{A}) \cdot \cos l$$

$$\cos l = \cos \hat{A} / (1 - \cos \hat{A})$$

$$\cos l = \cos 72^\circ / (1 - \cos 72^\circ)$$

$$l \cong 63,43^\circ$$

As tesselações a seguir foram atividades desenvolvidas com uso de caleidoscópios generalizados e esferas de isopor. Entretanto, mostraremos essas construções no *Cinderella* com intenção de ampliar as alternativas de trabalho em sala de aula.

A tesselação esférica (5,6,6), representada pela bola de futebol, temos em cada vértice um pentágono e dois hexágonos. O poliedro correspondente está ao lado.



fig. 46: bola de futebol e poliedro (5,6,6)

Essa tesselação pode ser obtida por truncamento do icosaedro esférico. Observe que os centros do pentágono esférico coincidem com os vértices do icosaedro esférico e que os centros dos hexágonos coincidem com o centro dos seus triângulos esféricos.

Como os polígonos em questão são regulares, ligando seu centro a cada um dos seus vértices, dividimos esses em n triângulos congruentes, onde n é número de lados do polígono. Podemos calcular o ângulo de cada triângulo, com vértice no centro do polígono correspondente, dividindo 360° por n . No caso em que $n = 5$, temos ângulos iguais a 72° . Quando $n = 6$, temos ângulos iguais a 60° .

Do icosaedro inflado, seguem os passos para construção:

- 1- Traçar as bissetrizes pelos vértices do triângulo de uma das faces. Marque o ponto de intersecção (centro do triângulo). Repita o procedimento nas outras faces.
- 2- Traçar novamente as bissetrizes dos ângulos formados em 1, com vértice no centro. Marcar os pontos que interceptam os lados do triângulo. Repetir o procedimento com as faces restantes.
- 3- Tomar os pontos, encontrados no passo 2, como vértices do hexágono esférico. Ligue-os de maneira que forme esse polígono. Repetir o procedimento com as faces restantes.
- 4- Apague as bissetrizes dos passos 1 e 2.

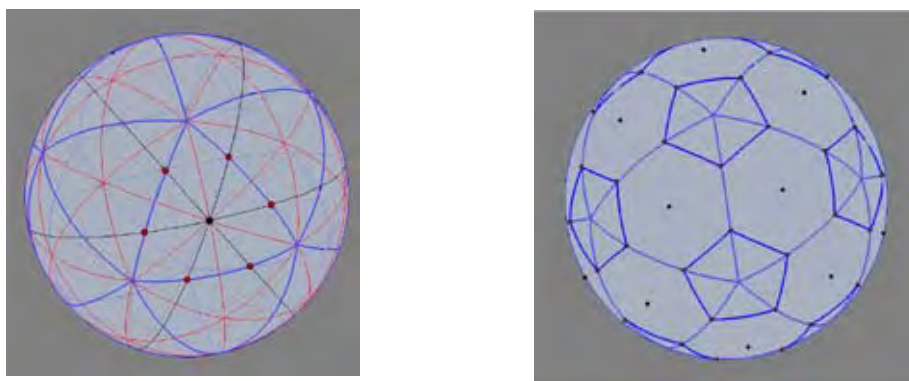


fig. 47: construção da tesselação (5,6,6)

No poliedro formado por 12 quadrados, 8 hexágonos regulares e 4 octógonos regulares, podemos inflá-lo para obter a tesselação esférica (4,6,8). Lembramos que neste caso, o quadrado forma um quadrângulo esférico, isto é, um quadrilátero com quatro lados e quatro ângulos congruentes, porém seus ângulos não são retos.

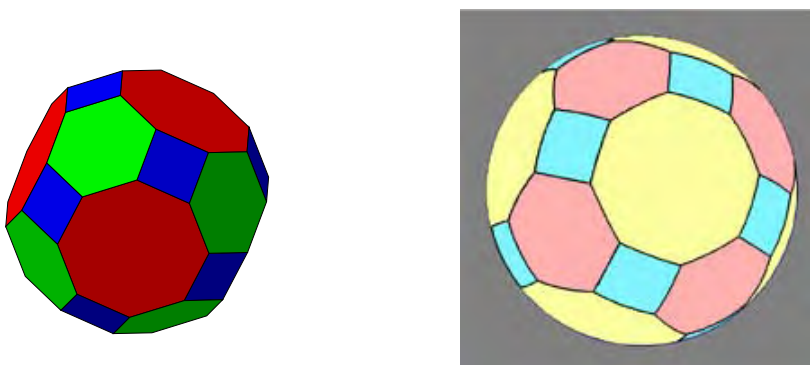


fig. 48: poliedro (4,6,8) e respectiva tesselação esférica

A tesselação (4,6,8) é obtida por truncamentos do cubo esférico. Observe na figura 49 que os centros dos hexágonos esféricos coincidem com os vértices do cubo esférico, os centros dos quadrângulos esféricos coincidem com os pontos médios de suas arestas e que os centros dos octógonos esféricos coincidem com o centro dos quadrângulos desse cubo esférico.

Dividindo os polígonos regulares em triângulos congruentes, podemos concluir que os ângulos com vértices, fixado no centro do hexágono esférico, mede 60° cada e no octógono esférico mede 45° .

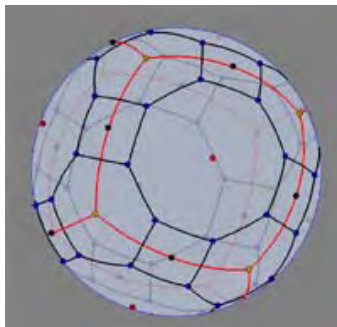


fig. 49: cubo esférico truncado

Em uma das faces do cubo esférico, segue os passos para a construção:

- 1- Traçar as diagonais da face e na intersecção, marcar o centro do octógono esférico.
- 2- Com vértice no centro do octógono, traçar as bissetrizes dos ângulos formados entre as diagonais, obtendo oito ângulos de 45° cada.
- 3- Traçar as bissetrizes dos oito ângulos formados no item anterior.
- 4- Traçar as bissetrizes dos dois ângulos formados com a diagonal e as arestas, pela origem em um dos vértices do cubo esférico. Repita os passos nos outros vértices.
- 5- Marcar os pontos de intersecção dos passos 3 e 4, obtendo oito vértices dessa tesselação. Depois, trace as arestas do octógono esférico.
- 6- Repetir os passos de 1 a 5 em todas as faces do cubo esférico.

Na figura 50, os passos 1 e 2 estão representados pelas linhas vermelhas e 3 e 4 pelas linhas azuis. Os pontos azuis e linhas pretas são representações do passo 5

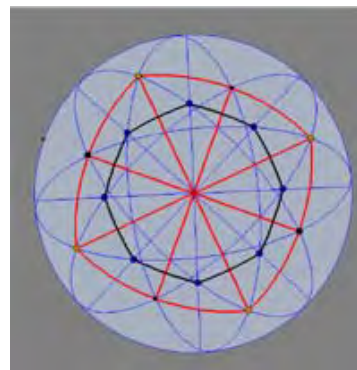


fig. 50: construção da tesselação (4,6,8)

Outras tesselações esféricas obtidas por truncamento do cubo, não foram trabalhadas no curso.

Tesselação (3,4,3,4)

- 1 - Principiar pela construção do cubo esférico. Encontrar os pontos médios entre seus vértices consecutivos: modos – ponto – ponto médio (marcar todos os pontos).
- 2 - Marcar os pontos de intersecção.
- 3 - Ligar estes pontos por retas, formando 6 quadrângulos e 8 triângulos eqüiláteros: modos – linha – linha por dois pontos.

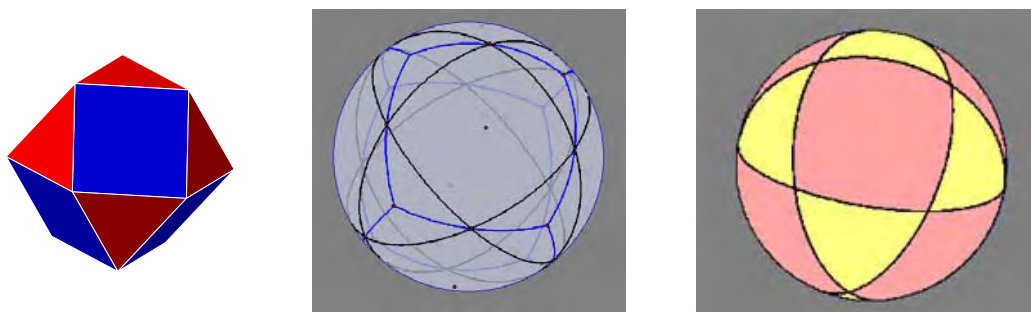


fig. 51: seqüência de construção (3,4,3,4)

Tesselação (3,8,8)

- 1 - Tomar por base a construção do cubo esférico. Em seguida, traçar as diagonais de uma das faces do cubo: modos – linha – linha por dois pontos.
- 2 - Traçar bissetrizes entre as diagonais, até se obter 16 ângulos congruentes: modos – linha – bissetriz.
- 3 - Marcar os pontos alternadamente, para formar os vértices de um octógono esférico. 4 –
- 4 - Repetir este processo nas outras duas faces: modos – ponto único.
- 5 - Esconder as linhas de construção: editar – selecionar todas as linhas – propriedades – opacidade – invisível.
- 6 - Ligar os pontos por segmentos, formando 6 octógonos e 8 triângulos esféricos regulares: modos – especial – segmento.

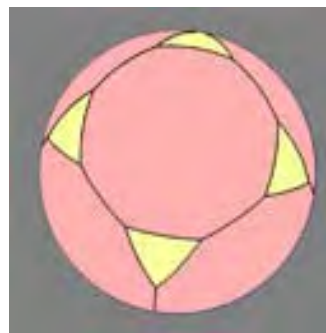
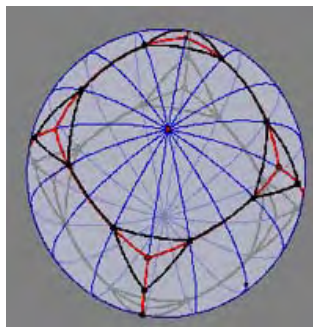
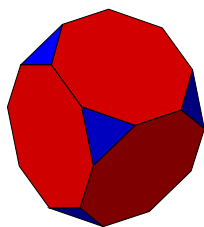


fig. 52: sequência de construção da tesselação (3,4,3,4)

Tesselação (3,4,4,4)

1 - Proceder, inicialmente, a construção do cubo esférico. Após, traçar as diagonais de uma das faces (linha azul): modos – linha por dois pontos.

2 - Traçar as bissetrizes das diagonais (linha amarela): modos – linha – bissetriz.

Marcar a intersecção de uma bissetriz com uma aresta da face: modos – ponto – ponto único.

3 - Por este ponto de intersecção, traçar uma perpendicular à bissetriz: modos – linha – definir ortogonal (selecione a linha amarela, depois o ponto).

4 - Traçar as bissetrizes entre as perpendiculares (linha azul): modos – linha bissetriz.

5 - Marcar os pontos de intersecção entre as linhas azuis. Eles são dois vértices de um dos quadrângulos desta tesselação.

6 - Encontrar os outros vértices do quadrângulo: modos – especial – reflexão (selecione a linha amarela como espelho e os vértices encontrados no passo anterior).

7 - Repetir este processo em outras duas faces do cubo esférico.

8 - Traçar as arestas deste poliedro esférico: modos – especial – segmento.

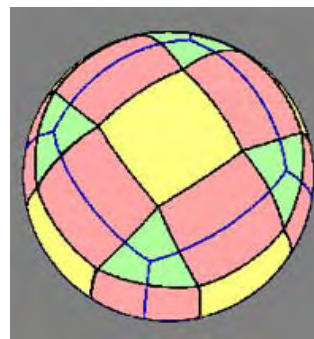
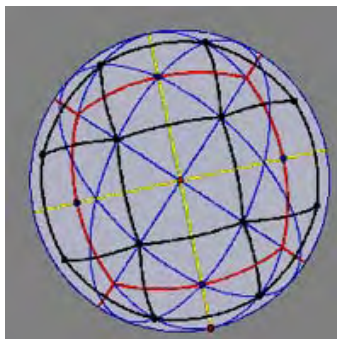
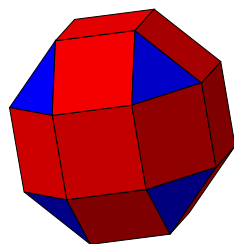


fig. 53: sequência de construção da tesselação (3,4,4,4)

Tesselação (4,6,6)

1. Iniciando pela construção do cubo esférico, traçar as diagonais em uma das faces: modos – linha – linha por dois pontos.
2. Traçar as bissetrizes das diagonais obtidas no item anterior: modos – linha – bissetriz.
3. Em um dos vértices desta face, traçar as bissetrizes entre a diagonal e as arestas do cubo esférico, formando 4 ângulos de 30° : modos – linha – bissetriz.
4. Marcar as intersecções das retas obtidas nos passos 2 e 3. São dois vértices de um quadrângulo (amarelo): modos – ponto – ponto único.
5. Encontrar os outros vértices, por reflexão de ponto, na diagonal do cubo esférico: modos – especial – reflexão.
6. Repetir o procedimento em outras duas faces do cubo esférico.

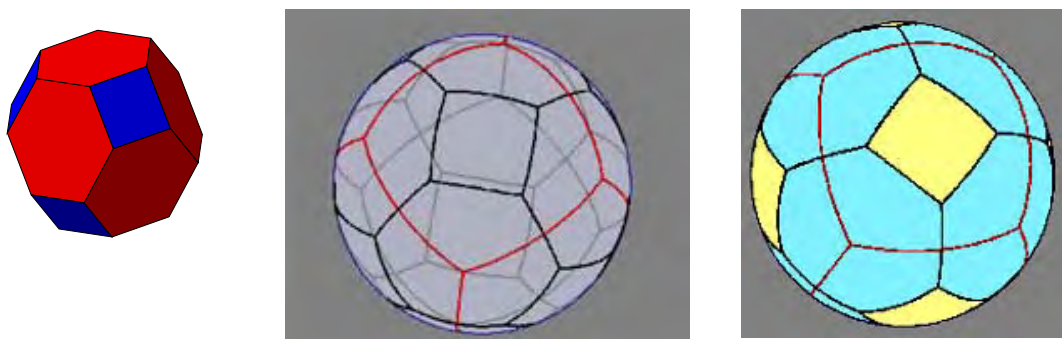


fig. 54: construção da tesselação (4,6,6)

Tesselação (3,3,3,3,4)

A tesselação esférica (3,3,3,3,4) não pode ser feita através do *Cinderella*. Isto acontece porque estamos tratando de duas geometrias diferentes: a geometria esférica e a geometria elíptica.

Na geometria esférica podemos construir todas as 18 tesselações esféricas obtidas com os polígonos regulares esféricos. Nesta geometria, as construções são feitas sobre toda a superfície esférica e cada par de pontos antípodos são considerados como dois pontos distintos.

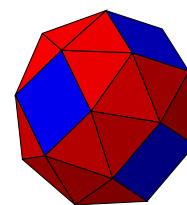


fig. 55: poliedro (3,3,3,3,4)

Porém, na geometria elíptica, utilizada nas construções do *Cinderella*, cada par de pontos antípodas são considerados como um único ponto. Por isso, ao construir-se uma figura geométrica em uma das superfícies da esfera, obtém-se uma outra congruente a ela, na face oposta, formada pelo conjunto de pontos antípodas desta figura. Assim, o software *Cinderella* somente efetuará construções das tesselações esféricas que possuírem pares de figuras antípodas. Como a tesselação (3,3,3,3,4) não possui essa característica, ela não pode ser construída neste *software*.

6.4.Caleidoscópio Generalizado

Dois espelhos retangulares planos e articulados, colocados verticalmente, se constituirão num caleidoscópio quando o ângulo entre eles se apresentar na forma π / n , sendo n inteiro. Analogamente, para três espelhos planos verticais, articulados, os ângulos devem ser $\pi / l, \pi / m$ e π / n , (onde l, m e n são inteiros).

$$\text{Como: } \pi / l + \pi / m + \pi / n = \pi \Rightarrow 1 / l + 1 / m + 1 / n = 1$$

O conjunto solução nos dá três tipos de caleidoscópios (equilátero, isósceles-retângulo e escalenos). Em Murari (1999) temos um detalhamento desses caleidoscópios, que são utilizados para visualização de tesselações planas.

O conjunto de três espelhos triangulares planos, sendo um, horizontal ao plano, articulados de maneira que formem uma pirâmide triangular, aberta na base, constituem um triedro de espelhos. Uma generalização natural é o caso em que estes três ângulos diedrais são $\pi / l, \pi / m$ e π / n . Desde que, para espelhos planos, um objeto e imagem são equidistantes do plano, podemos ver que todas as imagens de um ponto no caleidoscópio generalizado pertencem a uma esfera, cujo centro é o ponto de intersecção dos planos dos três espelhos. Sobre a esfera, estes planos cortam-se formando um triângulo esférico, de ângulos $\pi / l, \pi / m$ e π / n .

O resultado das reflexões desses espelhos do triângulo esférico é a divisão da esfera toda em uma rede de tais triângulos, contendo imagens de qualquer objeto colocado dentro do primeiro triângulo. Tomando o raio da esfera como unitário, a área da esfera é $4 \cdot \pi$, enquanto a área de cada triângulo é $(\pi / l) + (\pi / m) + (\pi / n) - \pi$. Dessa forma,

$$\frac{4\pi}{\pi(1/l + 1/m + 1/n - 1)} > 0 \Rightarrow 1/l + 1/m + 1/n - 1 > 0$$

O conjunto solução são as ternas $(2,2,n)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ e $(2,3,5)$, isto é, triângulos esféricos com ângulos de $(90^\circ, 90^\circ, n)$, $(90^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 60^\circ, 45^\circ)$ e $(90^\circ, 60^\circ, 36^\circ)$ respectivamente.

Nesse caso, temos quatro tipos de caleidoscópios. Suas construções devem ser feitas observando-se que os ângulos são as medidas dos lados de triângulos esféricos, de ângulos π/l , π/m e π/n . Por existirem muitas possibilidades, não vamos considerar o primeiro caso $(2,2,n)$. Temos, então, os ângulos respectivos, os quais irão determinar a maneira como os espelhos deverão ser cortados para formação dos caleidoscópios generalizados que, no nosso caso são, aproximadamente:

$$(54.73^\circ, 54.73^\circ, 70.53^\circ); (35.26^\circ, 45^\circ, 54.73^\circ); (20.90^\circ, 31.72^\circ, 37.38^\circ)$$

Como 1 grau equivale a 60 minutos ($1^\circ = 60'$), aproximadamente, teremos:

$$(54^\circ 44', 54^\circ 44', 70^\circ 32'); (35^\circ 16', 45^\circ, 54^\circ 44'); (20^\circ 54', 31^\circ 43', 37^\circ 23')$$

Veja a seguir, os cálculos dos ângulos triedros, isto é, ângulos dos espelhos triangulares.

No triângulo esférico de ângulos: $(90^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$

$$\cos 90^\circ = -\cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ \cdot \cos a$$

$$0 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \cos a$$

$$\cos a = 1/3$$

$$a \cong 70,53^\circ \text{ ou } a \cong 70^\circ 32'$$

$$\cos 60^\circ = -\cos 90^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 90^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos b$$

$$1/2 = -0 \cdot (1/2) + 1 \cdot (\sqrt{3}/2) \cdot \cos b$$

$$\cos b = (\sqrt{3}/3)$$

$$b \cong 54,73^\circ \text{ ou } b \cong 54^\circ 44'$$

$$c \cong 54,73^\circ \text{ ou } c \cong 54^\circ 44'$$

No triângulo esférico de ângulos: $(90^\circ, 60^\circ, 45^\circ)$

$$\cos 90^\circ = -\cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos a$$

$$0 = -(\sqrt{2}/2) \cdot (1/2) + (\sqrt{2}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) \cdot \cos a$$

$$\cos a = \sqrt{3}/3$$

$$a \cong 54,73^\circ \text{ ou } a \cong 54^\circ 44'$$

$$\cos 60^\circ = -\cos 45^\circ \cdot \cos 90^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos b$$

$$1/2 = -(\sqrt{2}/2) \cdot 0 + (\sqrt{2}/2) \cdot 1 \cdot \cos b$$

$$\cos b = (\sqrt{2}/2)$$

$$b = 45^\circ$$

$$\cos 45^\circ = -\cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos c$$

$$\sqrt{2}/2 = -1/2 \cdot 0 + (\sqrt{3}/2) \cdot 1 \cdot \cos c$$

$$\cos c = \sqrt{6}/3$$

$$c \cong 35,26^\circ \text{ ou } c \cong 35^\circ 16'$$

No triângulo esférico de ângulos: $(90^\circ, 60^\circ, 36^\circ)$

$$\cos 90^\circ = -\cos 36^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 36^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos a$$

$$0 = -\cos 36^\circ \cdot (1/2) + \sin 36^\circ \cdot (\sqrt{3}/2) \cdot \cos a$$

$$\cos a = (\sqrt{3}/3) \cdot \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}$$

$$a \cong 37,38^\circ \text{ ou } a \cong 37^\circ 23'$$

$$\cos 60^\circ = -\cos 36^\circ \cdot \cos 90^\circ + \sin 36^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos b$$

$$1/2 = -\cos 36^\circ \cdot 0 + \sin 36^\circ \cdot 1 \cdot \cos b$$

$$\cos b = 1/(2 \cdot \sin 36^\circ)$$

$$b \cong 31,72^\circ \text{ ou } b \cong 31^\circ 43'$$

$$\cos 36^\circ = -\cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos c$$

$$\cos 36^\circ = -(1/2) \cdot 0 + (\sqrt{3}/2) \cdot 1 \cdot \cos c$$

$$\cos c = (2 \cdot \sqrt{3}/3) \cdot \cos 36^\circ$$

$$c \cong 20,90^\circ \text{ ou } c \cong 20^\circ 54'$$

Variando um ponto-objeto no interior desses caleidoscópios, obteremos vértices de poliedros. Em particular, se o ponto estiver sobre uma das arestas onde os dois espelhos se encontram, ou sobre um espelho e equidistante dos outros dois, ou no centro da esfera, então as faces dos poliedros visualizados são polígonos regulares. Em Ball e Coxeter (1987), encontramos as figuras abaixo que mostram tesselações esféricas, cujos ângulos dos triângulos esféricos correspondem, respectivamente, as três últimas ternas anteriormente mencionadas.



fig. 56: tesselações esféricas de Ball e Coxeter

Feito a apresentação dos aportes teóricos que embasaram este trabalho, delimitaremos a seguir nossa pesquisa.

7. Delimitação da pesquisa

Diante da problemática do ensino de Geometrias Não-Euclidianas apresentada, esta pesquisa tem como objetivo identificar materiais manipuláveis e descrever o seu uso em um processo de ensino e aprendizagem de Geometria Esférica. Para isso, decidiu-se por desenvolver um curso de extensão universitária sobre Geometria Esférica, utilizando tais materiais e, desse modo, investigar esta utilização em um ambiente natural de sala de aula.

Visto que esse estudo está voltado para seu aspecto formal, isto é, na aquisição de um conhecimento específico e desse modo não observamos o uso desses materiais somente em atividades lúdicas. Não é o uso específico do material que interessa aqui, mas as ações e as reflexões sobre essas ações na sua utilização.

Todavia, também consideramos a seguinte posição:

(...) “não é o simples uso de materiais que possibilitará a elaboração conceitual por parte dos alunos, mas a forma como esses materiais são

utilizados e os significados que podem ser negociados e construídos a partir deles” (Nacarato, 2004/2005, p. 5).

Desse modo, entendemos que o problema não está no uso dos materiais manipuláveis, mas na maneira como isso vai ser feito.

Assim, procuramos investigar o seguinte problema norteador:

Quais materiais manipuláveis e como eles podem colaborar no ensino e aprendizagem de Geometria Esférica?

No próximo capítulo abordaremos a metodologia de pesquisa adotada e, posteriormente a apresentação e discussão dos dados.

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA DO ESTUDO

Para definir nosso caminho de pesquisa, lembramos que nosso objetivo é estudar o uso de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem de Geometria Esférica. Salientamos que, não buscamos saber se o uso de materiais manipuláveis melhora o ensino e aprendizagem de Geometria Esférica, mas sim, pensar em possíveis formas para sua utilização. Nesse sentido, Borba (2001) apresenta:

(...) a importância de se pensar em *designs* de pesquisa onde a situação que não está dada pode ser estudada. Assim, não basta apenas estudar o “retrato de como está a sala de aula”, mas sim, pensar em estudar possíveis cenários de mudança (Borba, 2001, p. 142)

1. O método qualitativo

A pesquisa quantitativa considera que tudo pode ser quantificado, o que significa traduzir em números as opiniões e informações para classificá-las e analisá-las. Requer o uso de recursos estatísticos. Por outro lado, a pesquisa qualitativa considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são as bases do processo de pesquisa qualitativa. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento chave. Por ser descritiva, os pesquisadores analisam seus dados indutivamente e o processo e seu significado são os focos principais de abordagem.

A pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como a tentativa de uma compreensão detalhada de significados e características apresentadas, em lugar da produção de medidas quantitativas de características ou comportamentos. Como afirma Goldenberg (2000. p.14), na abordagem qualitativa, “a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma trajetória, etc”.

Cinco características básicas que configuram esse tipo de estudo são apresentadas por

Bogdan e Biklen (1982):

1. “A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento”.
2. “Os dados coletados são predominantemente descritivos”.
3. “A preocupação com o processo é muito maior que com o produto”.
4. “O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador”.
5. “A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo”.

O caráter descritivo da investigação qualitativa tem por objetivo a compreensão dos motivos, sentimentos, interesses, crenças, decisões ou outros conhecimentos pessoais através da observação, interação e comunicação entre o investigador e o indivíduo, ou grupo investigado. Através da investigação descritiva, o investigador procura compreender e interpretar os fenômenos educativos, conhecer as concepções, atitudes, processos de ensino-aprendizagem, de raciocínio, etc.

Bogdan & Biklen (1994), afirmam que: “Ao recolher dados descritivos, os investigadores qualitativos abordam o mundo de forma minuciosa. (...) A descrição funciona bem como método de recolha de dados, quando se pretende que nenhum detalhe escape ao escrutínio”.

Por estas características, optamos pela metodologia de pesquisa qualitativa, já que estava em consonância com a pergunta da pesquisa. O pesquisador foi observador participante, cujo papel era de professor do curso de extensão. Dessa forma, não atuava apenas como observador, mas também dialogando com a turma. Estudou-se um processo educacional em um ambiente natural, pois a pesquisa foi feita com dez alunos durante o desenvolvimento de um curso de Geometria Esférica, em dois laboratórios: o de ensino e o de informática. Os dados foram coletados das experiências dos participantes, buscando compreender os significados que eles atribuíram a estas experiências. Nenhuma hipótese *a priori* foi levantada, buscou-se compreensão a partir da investigação dos dados. Como afirmam Bogdan & Biklen (1994): “Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos”.

Ainda em função dos objetivos da pesquisa, seguimos uma metodologia qualitativa interpretativa que nos possibilitou estudar o uso dos materiais manipulativos na elaboração e no desenvolvimento de atividades sobre Geometria Esférica. A investigação que realizamos é de natureza essencialmente descritiva, como apresentamos a seguir.

2. Procedimentos

Primeiramente, foram feitos estudos nos livros didáticos e dissertações que abordam as Geometrias Não-euclidianas e uma pesquisa sobre os recursos pedagógicos disponíveis que pudessem ser utilizados neste contexto, tais como: *softwares* de geometria dinâmica, metodologias de ensino, textos e materiais manipulativos.

Após esta etapa, trabalhamos na elaboração e aplicação de um estudo piloto com o objetivo de verificar a adequação e o encadeamento na aplicação das atividades elaboradas anteriormente, a utilização dos recursos didáticos, bem como ajustar a forma de registros de dados.

Na sequência, decidimos por organizar um curso optativo de extensão intitulado “Geometria Esférica”, cujos participantes seriam os sujeitos de nossa pesquisa. Este curso foi direcionado a alunos do 3º ao 8º semestres da Graduação em Matemática da UNESP de Rio Claro, pois estes já teriam cursado alguma disciplina de geometria euclidiana na universidade. Os sujeitos de nossa pesquisa foram dez alunos deste programa de formação que participaram de forma voluntária num contexto extracurricular.

Foram dados nomes fictícios aos sujeitos, mantendo apenas a primeira letra do nome de cada um.

2.1. Estudo piloto

A coleta de dados do piloto da pesquisa foi feita com uma aluna do 4º ano de Graduação em Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro. A participante foi entrevistada com intuito de levantar dados que seriam pertinentes, no sentido de apresentar o sujeito da pesquisa. Um questionário foi aplicado

(em anexo) para verificar suas percepções sobre geometria. A gravação em fita K7 e as respostas por escrito do questionário foram guardadas, a fim de registrar os dados.

Os próximos encontros, três ao todo, com duração de duas horas cada, foram para o desenvolvimento dos trabalhos. A dinâmica dos encontros transcorreram da seguinte maneira: as atividades, uma a uma, que foram apresentadas e desenvolvidas com a utilização do(s) recurso(s) didático(s) sugerido(s) e com liberdade para interpretação e elaboração das estratégias de resolução. Foi feita uma pequena apresentação com os principais comandos, quando o *software* foi usado como recurso pela primeira vez, e ficamos disponíveis para responder posteriores dúvidas relativas a sua operação.

Para registro dos dados desses encontros, os recursos usados foram uma filmadora com microfone e fitas VHS, além das anotações diárias no caderno de campo. No caso do uso do *software*, as construções foram salvas no computador e depois gravadas em CDs, como arquivos separados e enumerados na sequência da execução para investigar cada questão. Os dados eram analisados preliminarmente, antes da próxima intervenção, possibilitando correções e alterações neste processo.

Em posse das análises do estudo piloto, seguiu-se o processo de elaboração do curso. Outras pesquisas no referencial teórico, em função de novos questionamentos, mostraram-se fundamentais, tanto no aspecto dos conteúdos matemáticos como na execução do curso.

As mudanças no planejamento da pesquisa não significaram sua inviabilidade, mas correções que se mostraram necessárias e que, quando feitas, puderam tornar a pesquisa realizável. Como enfatiza Goldenberg (2000):

A pesquisa científica requer flexibilidade, capacidade de observação e de interação com os pesquisados. Seus instrumentos devem ser corrigidos e adaptados durante todo o processo de trabalho, visando aos objetivos da pesquisa. No entanto, não se pode iniciar uma pesquisa sem prever os passos que deverão ser dados. (p. 79).

2.2. O curso

Inicialmente, no curso de extensão, aplicamos um questionário com o intuito de levantar alguns dados sobre os sujeitos da pesquisa. As perguntas foram relacionadas as

suas opiniões sobre o curso de graduação e suas concepções acerca da Geometria. As questões elaboradas foram respondidas individualmente pelos alunos.

Seguiu-se o desenvolvimento do curso. Primeiramente, as atividades eram entregues aos alunos, deixando-os livres para conjecturar, explorar os materiais, formar grupos e trocar idéias com outros colegas. Enquanto elaboravam as estratégias de resolução, eram observados pelo professor pesquisador que, por vezes, participava ativamente, de modo a levantar questionamentos e apresentar soluções secundárias para o grupo. Em posse das soluções por escrito, seguia-se então a apresentação e discussão sobre as diferentes soluções apresentadas com a turma, buscando um consenso sobre o resultado obtido. Estabelecido o consenso, era feita uma síntese, colocadas as definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações, quando necessárias. Terminada uma atividade, entregava-se outra, seguindo o procedimento descrito anteriormente.

Os registros de dados foram duas fitas VHS, oito fitas K7 e as respostas por escrito dos alunos, a fim de registrar os dados, além das anotações diárias no caderno de campo. No caso do uso do *software*, as construções foram salvas no computador e depois gravadas em CDs, como arquivos separados e enumerados na sequência da execução.

O estudo dos dados foi de natureza qualitativa interpretativa, buscando compreender como os materiais manipuláveis colaboraram na aquisição de conceitos e propriedades básicas da Geometria Esférica, durante o desenvolvimento dos alunos nas atividades propostas com esses materiais.

Devido a grande quantidade de dados coletados, selecionamos aqueles que evidenciaram nossas interpretações. Focalizamos o “olhar” para os eventos importantes, que neste trabalho, são aqueles que mostram como os materiais colaboraram para uma compreensão sobre um conceito ou propriedade matemática. Inicialmente foi elaborado um primeiro roteiro de acompanhamento e anotações, que foi seguido de um segundo roteiro e assim sucessivamente, até levantar e descrever os eventos importantes. Os dados escritos e as construções geométricas, feitos pelos alunos, são inseridos nas transcrições dos episódios em que ocorreram.

CAPÍTULO 3: APRESENTAÇÃO E ESTUDO DOS DADOS

Estudo I: O piloto

Foi proposto a Mel o seguinte problema para ser respondido usando lápis e papel:

Como dois barcos poderiam navegar, mantendo sempre a mesma distância um do outro? Explique e represente as suas trajetórias da melhor maneira possível.

A idéia deste problema surgiu em uma aula da disciplina Tendências em Educação Matemática, ministrada pelo professor Marcelo Borba. Ele apresentou, oralmente, uma situação semelhante a nossa versão do problema. Notamos que alguns alunos da disciplina consideravam os barcos navegando em uma superfície plana euclidiana. Após discussões com outros colegas sobre o problema, percebeu-se que este tinha grande potencial para iniciar uma discussão sobre o conceito de reta na Geometria Esférica.

Mel responde, como mostramos a seguir:

“A única maneira que vejo é: imagine 2 retas paralelas; trace uma reta perpendicular a essas retas. Se colocarmos os barcos nas intersecções entre essas retas, eles poderão manter sempre a mesma distância se tiverem a mesmo sentido e a mesma velocidade”.

Após a leitura da resposta, perguntamos: os barcos navegam numa superfície euclidiana?

Mel: “Não. O planeta Terra é uma esfera um pouco achatada, assim...” (gesticulando com as mãos referindo-se ao achatamento dos pólos).

A seguir, mostramos o *Cinderella* e algumas de suas ferramentas, principalmente no que se refere à geometria elíptica com vista esférica. Além disso, disponibilizamos esferas de isopor, barbante colorido, elásticos coloridos e alfinetes, então pedimos que ela usasse os materiais manipuláveis para construir figuras que representassem as trajetórias dos navios, de modo a “ilustrar” a resposta escrita. Vejamos um trecho desta exploração.

Nos diálogos transcritos a seguir, usaremos a letra P para indicar a fala da Pesquisadora.

P: Então tente.

Mel utilizou uma esfera de isopor, um pedaço de barbante e caneta. Manipulou estes objetos, “desenhando” sobre a esfera (fig. 57) e, após, fez a representação utilizando o *software* (fig. 58). Percebemos que, na utilização do material, Mel fez um “ajuste” visual de maneira intuitiva, que levou a um falso conceito de reta na geometria esférica, considerando circunferências menores como retas paralelas (fig. 57). Já no *software* este ajuste não foi possível, veja a figura 58 que ilustra este episódio.

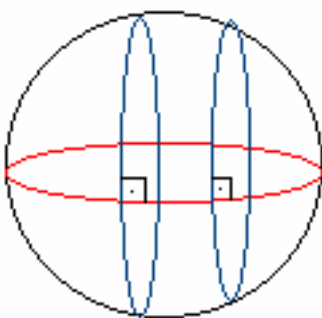


fig. 57: representação da construção na esfera de isopor feita por Mel

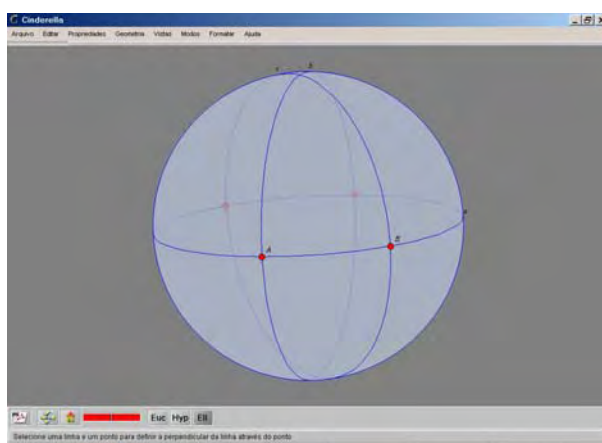


fig. 58: retas perpendiculares: figura no *software*

Mel: “Uai! O que está acontecendo? As paralelas se encontram?” (referindo-se a figura 58)

Esta observação gerou “conflito” em Mel, o seu conceito de paralelas entrou em “choque” com esta constatação. Na tentativa de encontrar uma explicação, usou elásticos

para representar as linhas das trajetórias, levantou e testou outras hipóteses até chegar à conclusão que duas linhas “retas” sempre se encontrariam em uma superfície esférica.

Algumas perguntas de Mel sobre esta experiência, foram: as “linhas” podem ser consideradas como retas? O que é uma reta e quais as suas características?

Em uma reflexão sobre o uso de barbante e de elásticos na representação de “retas” na geometria esférica, podemos observar que Mel não percebeu, em uma primeira experiência, que o barbante só ficava esticado quando a circunferência representada sobre a superfície esférica era a máxima. Da mesma forma não se incomodou com o fato do barbante cair todas a vezes que tentava representar uma circunferência no hemisfério inferior da superfície esférica. Também não relacionou o fato de que os elásticos escapavam toda vez que tentava representar circunferências menores na superfície da esfera de isopor.

Em virtude disso, utilizamos fitilho para representar linhas durante o curso de extensão. O seu formato achatado e não “cilíndrico”, como os fios de barbante e elásticos, mostrou ser mais adequado nas representações das linhas “retas” sobre a superfície esférica, pois os ajustes necessários para representar circunferências menores sobre esta superfície ficam mais visíveis com este material.

Outro aspecto observado no uso dos materiais, durante o estudo piloto, foi quanto aos “materiais palpáveis”, os quais consistem em: esferas de isopor, alfinetes, elásticos e pedaços de barbante. Usamos o termo palpável para os referidos materiais, porque as representações geométricas podem ser percebidas através do tato, além da visão. Já, no *software*, só as percebemos com o sentido da visão.

Fazendo uma primeira leitura do episódio em que Mel faz ajustes e chega a um falso conceito, poderíamos pensar que os “materiais palpáveis” são menos adequados do que o *software*, nas investigações sobre a Geometria Esférica. Porém, esta idéia muda quando levamos em consideração outros episódios desse estudo, que descreveremos a seguir.

Nas próximas atividades propostas a Mel (em anexo), observamos que ela inicialmente usava os “materiais palpáveis” para investigar algumas hipóteses. Somente depois da exploração destes materiais, passa a utilizar os recursos do *software* para verificar suas conjecturas iniciais. Por várias vezes explorou concomitantemente os dois tipos de

matérias manipulativos e, além disso, geralmente representou com os “materiais palpáveis” suas idéias apresentadas oralmente.

Olhando por outro ângulo, percebemos que as representações geométricas nos “materiais palpáveis” podem ser menos precisas do que no *Cinderella*, mas, mesmo assim, foi a primeira opção de Mel. Dessa forma, acreditamos que manipulação através do tato, além da visão, pode ser, do mesmo modo importante, nas investigações e explorações de atividades sobre Geometria Esférica.

O desenvolvimento do conceito de reta na Geometria Esférica, durante o estudo piloto, se apresentou como aspecto relevante nesta investigação. Modificamos a versão da questão lançada por notarmos que, para pequenas distâncias, a visualização do encontro das retas poderia ficar comprometido, quando observamos uma pequena parte das representações de linhas sobre uma superfície esférica. Assim, o problema foi proposto no curso de extensão do seguinte modo:

Como seriam as trajetórias de dois barcos navegando por um longo percurso, de modo que mantenham sempre a mesma distância um do outro? Explique e represente as suas trajetórias da melhor maneira possível.

Estudo II: O curso

Iniciamos o curso de extensão apresentando oralmente os objetivos, a metodologia e o desenvolvimento, através de uma conversa informal com a turma, procurando conhecer cada um dos alunos. Além disso, aplicamos um questionário com intuito de apresentar os sujeitos da pesquisa e algumas concepções acerca da Geometria.

Os sujeitos deste estudo foram dez alunos de Graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro. O laboratório de informática e o de matemática foram os ambientes da pesquisa. Dentre as perguntas do questionário inicial (anexo I), selecionamos sete para este estudo.

1. Por que você decidiu participar deste curso de Geometria Esférica? Quais são suas expectativas em relação a este curso?
2. Fez opção por Licenciatura ou Bacharelado?
3. Quais são os objetos de estudo da Geometria?

4. Como você define superfície esférica e esfera?
5. O que você sabe sobre as geometrias Não-Euclidianas?
6. Conhece algum *software* de geometria dinâmica? Qual foi seu contato com ele?
7. O que você afirmaria sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo?

As questões tinham como finalidade identificar:

- Algumas características dos sujeitos da pesquisa, relacionadas as suas experiências e opções como estudantes.
- O conhecimento e as concepções relativas à Geometria.

Os motivos mais mencionados que os levaram a participar deste curso de extensão foram curiosidade e interesse sobre o tema.

Sujeitos	Motivos
Cacá	Curiosidade e conteúdo extracurricular
Crica	Interesse em aprender
Dedé	Curiosidade
Dida	Interesse em aprender
Emer	Curiosidade
Ivo	Curiosidade
Jota	Curiosidade e conteúdo extracurricular
Juca	Interesse e conteúdo extracurricular
Ledo	Interesse em aprender
Mina	Curiosidade

Licenciatura foi a opção mencionada por todos os sujeitos, embora alguns também pretendiam fazer bacharelado.

Sujeitos	Licenciatura e/ou Bacharelado
Cacá	Licenciatura
Crica	Licenciatura
Dedé	Licenciatura
Dida	Ambos
Emer	Licenciatura
Ivo	Licenciatura
Jota	Licenciatura
Juca	Ambos
Ledo	Licenciatura
Mina	Licenciatura

Sobre quais são os objetos de estudo da geometria, muitos responderam somente: “ponto(s), reta(s), plano(s) e espaço”. Entretanto, observamos que: “lápiz, régua, compasso, borracha, papel, inteligência, imaginação, postulados e teoremas” também foram citados como objetos de estudo.

Sujeitos	Objetos de estudo da Geometria
Cacá	O ponto, a reta, o plano e o espaço
Crica	Ponto, reta, plano, espaço
Dedé	Ponto, reta, plano, espaço...
Dida	Pontos, retas, planos e espaço
Emer	Lápis, régua, compasso, borracha, papel e a imaginação. Postulados e teoremas também fazem parte!
Ivo	Ponto, reta, plano e o espaço
Jota	Plano, ponto, reta, espaço, etc...
Juca	Propriedades e relações de entes geométricos (pontos, retas, plano, etc.)
Ledo	Lápis, régua, borracha, compasso, papel e a inteligência. Postulados e teoremas
Mina	Ponto, reta, plano

Dentre as respostas apresentadas, observamos a de Ledo. Ele define superfície esférica e esfera apresentando modelos físicos como exemplos. Esta falta de rigor é considerado um erro pelos matemáticos, mas, de acordo com Machado (1990, p. 146): “Dado que há muito se reconhece o fato de a Geometria dizer respeito tanto ao espaço físico quanto ao espaço intelectual (...)”, não podemos descartar sua idéia num contexto educacional.

Sujeitos	Superfície esférica e esfera
Cacá	Não respondeu
Crica	Superfície Esférica é a parte que envolve uma esfera, esta, por sua vez é uma bola compacta
Dedé	Superfície Esférica são todos os pontos eqüidistantes de um ponto chamado <u>centro</u> . A esfera são todos os pontos que pertencem à

	superfície esférica e os pontos que estão dentro desta superfície
Dida	S. esférica → estudo de concavidades, calotas. Esfera → algo maciço
Emer	Superfície esférica: lado externo de uma bola no espaço. Esfera: lado externo e interno de uma bola no espaço
Ivo	Não respondeu
Jota	Não sei
Juca	Superfície Esférica: é uma superfície, gerada por uma esfera. Esfera: pode ser definida comumente como sólido, que pode ser obtido por revolução de uma circunferência em torno de um eixo cartesiano.
Ledo	Superfície Esférica: seria a casca da laranja, o contorno da bola. Esfera: o inteiro, a bola.
Mina	Não respondeu

Metade dos alunos afirmou ter algum conhecimento sobre Geometria Não-Euclidiana.

Sujeitos	
Cacá	Sei que foi passado no mini-curso da Semana da Matemática de 2003(...)
Crica	pode-se formar um triângulo cuja soma dos ângulos internos é maior que 180° ; (...) assunto visto na semana da matemática (...)
Dedé	Nada
Dida	O que não pertence ao plano e ao espaço, mais do que 3 dimensões
Emer	Sei que o quinto postulado de Euclides não é válido na Geometria não-euclidiana
Ivo	Não respondeu
Jota	Praticamente nada
Juca	A grosso modo sei que a geometria não-euclidiana é aquela que não é euclidiana, ou

	seja, é uma geometria que não segue todos os axiomas de Euclides
Ledo	Muito pouco, quase nada
Mina	Nada

Somente um dos alunos afirmou não conhecer nenhum *software* de Geometria Dinâmica. Este fato pode ser uma explicação para facilidade deles na utilização do *Cinderella*.

Sujeitos	
Cacá	Somente o Geometricks. Um curso em 2003
Crica	Geometricks.
Dedé	“não”
Dida	Geometricks, mas não terminei o curso, não foi tudo aquilo que eu esperava
Emer	Sim. (Geometricks). Fiz um curso no 1º ano
Ivo	Geometricks
Jota	Maple. Muito pouco
Juca	Conheço o Geometricks. Meu contato com ele foi durante um mini-curso o ano passado, foi um contato rápido e sem muitos aproveitamentos
Ledo	Conheço o Geometricks. Um curso feito ano passado
Mina	geometrics, Maple.

Apesar da metade dos alunos afirmar ter algum conhecimento sobre as Geometrias Não-Euclidianas, apenas três indicaram que a soma dos ângulos internos de um triângulo, neste caso, não é 180° .

Sujeitos	
Cacá	Na geometria euclidiana é igual a 180°
Crica	Na Geom. Plana, a soma dos ângulos internos é igual a 180°, o que não se pode afirmar na Geom. ã Euclidiana
Dedé	180°
Dida	Em geometria Euclidiana, suas somas= 180° . Em geometria não-Euclidiana, não sei qual é a soma
Emer	Na Geometria Euclidiana a soma é 180°. Na Geometria não euclidiana não podemos afirmar isso.
Ivo	Não respondeu
Jota	A soma é igual a 180
Juca	Não afirmaria nada, antes do saber o que seria um triângulo e qual geometria este triângulo é pertinente
Ledo	Na Geometria Euclidiana é igual a 180 e na ã-Euclidiana não podemos afirmar isso
Mina	é igual a 180° na geometria euclidiana

Seguiremos apresentando o desenvolvimento das atividades do curso de extensão

Episódio 1

Investigar a situação problema

Materiais: Ficha de atividade e lápis.

Como seriam as trajetórias de dois barcos navegando **por um longo percurso**, de modo que mantenham sempre a mesma distância um do outro? Explique e represente as suas trajetórias da melhor maneira possível.

Questionamentos dos alunos durante a elaboração da solução:

Juca: Em qual geometria ? A euclidiana?

P: Não especifiquei isso no problema. Só pedi para falar como seriam as trajetórias e representar da melhor maneira possível.

Juca: Eu que decido?

P: A interpretação do problema é sua.

Crica: Tem desvio no caminho? Uma ilha, por exemplo.

P: Não disse isso no problema. Você é que vai ter que analisar esta situação.

Dedé: Posso fazer assim? Depois mostra uma figura que podemos representar do seguinte modo:

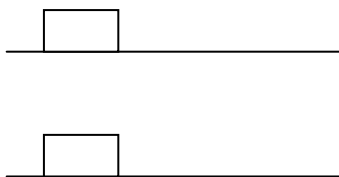


fig. 59: representação do desenho de Dedé

P: Se um for prá cá e outro prá lá'. Desenhei sobre a figura.

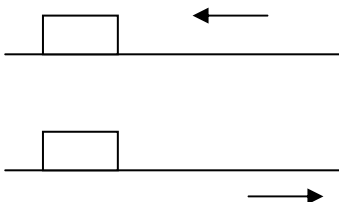


fig. 60: representação sobre o desenho de Dedé

Dedé: Aí não dá.

P: E se as velocidades dos barcos fossem diferentes?

Dedé: Também não dá certo.

Os outros diálogos durante a leitura e interpretação do problema foram muito semelhantes ao apresentados anteriormente.

Produção escrita dos alunos:

Cacá:

Ou um puxa o outro por uma corda, esta sempre esticada; ou os dois, lado a lado ligando por uma tábua.

Crica:

Um atrás do outro com velocidade relativa dos barcos igual a zero. Como se o barco da frente puxasse o barco de trás com uma corda (sempre esticada!).

Outra forma é manter os dois barcos ligados pela lateral por algum instrumento não dobrável de forma que sempre fiquem na mesma distância.

Dedé

Eles deveriam ter durante todo percurso mesma direção, mesmo sentido, mesma velocidade.

Esta seria uma maneira possível.

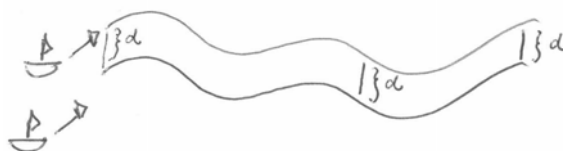


fig. 61: desenho 1 de Dedé

Dida:

Se pudéssemos calcular o ângulo, no qual representa a distância dos barcos. Mas teríamos que ter certeza de que o raio não varia. Desde que o ângulo não mude durante a esfera sua distância não mudará.

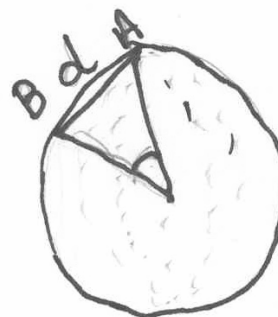


fig. 62: desenho 1 de Dida

Emer

Eles manteriam a mesma distância um do outro se navegarem sobre a mesma trajetória, no mesmo sentido e com velocidade iguais.

Se os dois barcos estiverem em trajetórias diferentes. Para que mantenham a mesma distância, deverão navegar na mesma direção e sentido. O barco que estiver trafegando no círculo de raio menor deverá navegar com velocidade um tanto maior p/ que fiquem sempre a mesma distância.

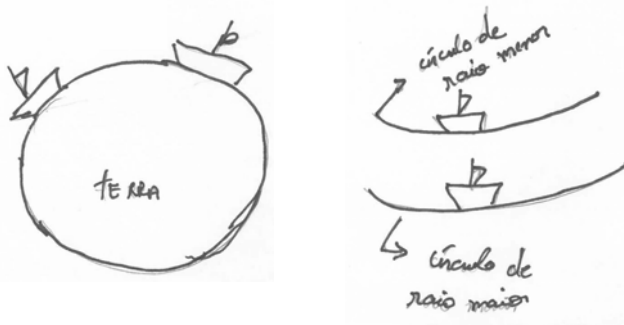


fig. 63: desenho 1 e 2 de Emer

Ivo

Um barco seguindo o outro, com velocidade constante, ou seja mesma distância com a mesma velocidade a distância entre os barcos será sempre a mesma. Agora se pensarmos que um esteja ao lado do outro, daí teremos duas possibilidades, com raio igual ou diferente. Se for igual as velocidades terão que ser iguais, se forem diferentes, é só compensar aumentando ou diminuindo a velocidade.

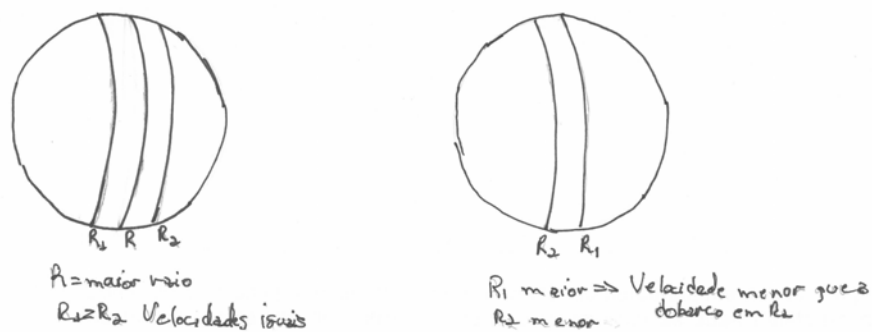


fig. 64: desenho 1 e 2 de Ivo

Jota

Os barcos andando paralelamente, com velocidade constante.

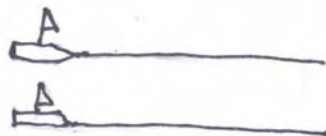


fig. 65: desenho 1 de Jota

Juca

Solução: Consideremos o oceano um plano euclidiano e três barcos A, B e C. A e B devem sempre manter a mesma distância d , usaremos um barco C, como um barco ideal que não muda a posição em relação à distância d . Como a figura.

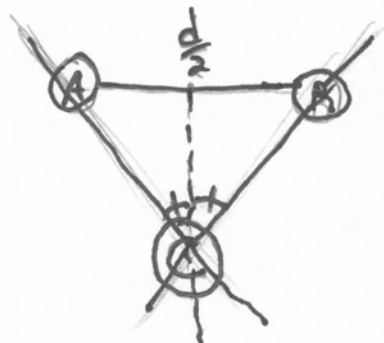


fig. 66: desenho 1 de Juca

Ledo

1º caso: Ambos os barcos se locomovem com velocidade constante iguais, na mesma direção, sentido e trajetória.

2º caso: Ambas viajariam no mesmo sentido, na mesma direção, porém com trajetórias paralelas. Pelo esquema (exemplo) temos que $v_1 > v_2$, porém o período dos dois barcos é o mesmo”. “Logo $V_1 / v_1 = V_2 / v_2 \rightarrow V_1 > V_2$ ”.

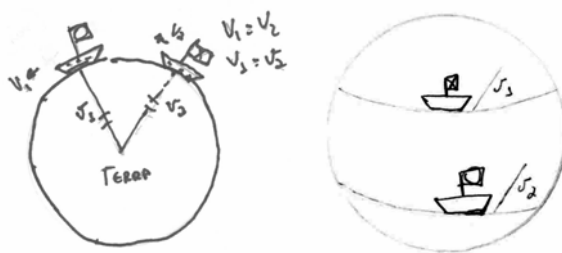


fig. 67: desenho 1 e 2 de Ledo

Mina

Supondo: velocidade constante e $v_1 = v_2$. Posições iniciais sempre o mesmo sentido distância d .

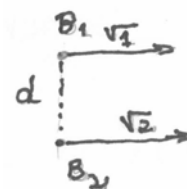


fig. 68: desenho 1 de Mina

Uma primeira observação neste caso que diferiu do estudo piloto foi a grande variedade de respostas apresentadas pela turma e em alguns casos individualmente. Além disso, os alunos relacionaram algumas propriedades Físicas envolvidas.

Síntese da discussão da atividade com a turma:

Apresentei as soluções: “um barco puxando outro com uma corda totalmente esticada” e “dois barcos ligados lateralmente por uma “barra fixa” e perguntei como poderia representar com figuras estas trajetórias.

Juca: No plano ou na superfície esférica?

P: Qual é mais adequado neste caso?

Alunos: Na superfície esférica.

P: Por que é mais adequada superfície esférica e não a plana?

Alunos: O planeta Terra tem a forma mais próxima da esfera do que plana.

Veja as representações dos desenhos na lousa na resposta dada por Si, uma aluna que desistiu do curso após o segundo dia de aula.

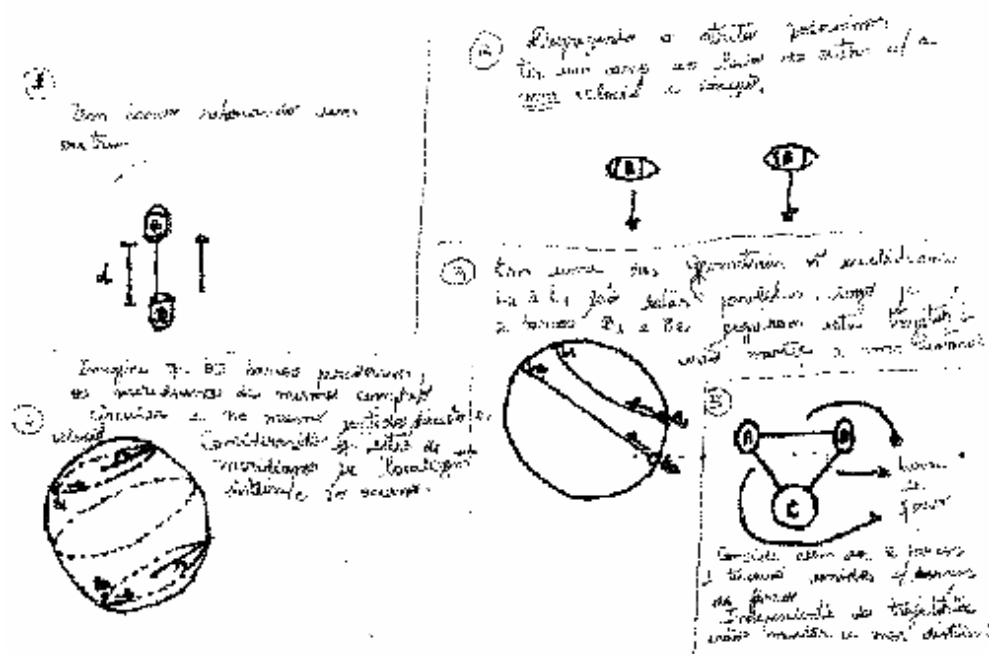


fig. 69: resposta apresentada pela aluna Si.

1. “Um barco rebocando um outro”.

A primeira resolução mostrou um exemplo prático e sucinto, mas não representa as possíveis trajetórias neste caso. Mas a figura 1, sugere uma trajetória retilínea.

2. “Desprezando o atrito poderíamos ter um barco ao lado do outro com a mesma velocidade e direção”.

Em dois, também não representa a trajetória. Porém, a figura 2, sugere que os barcos A e B navegam paralelamente.

3. “Em uma das geometrias não euclidiana L_2 e L_1 são retas paralelas, logo se, 2 barcos B_1 e B_2 seguirem esta trajetória irão manter a mesma distância.

Na terceira resolução, chama as circunferências concêntricas sobre a superfície esférica de retas paralelas e não menciona a questão da velocidade dos barcos.

4. “Imagine que os barcos percorram os meridianos de um mesmo comprimento circular e no mesmo sentido, direção e considerando que estes dois meridianos se localizem inteiramente no oceano”.

De outra maneira, em quatro, representa as trajetórias sobre circunferências concêntricas e neste caso trata como tal, isto é, um modelo “circular”. Chama de meridiano, as circunferências de mesmo “comprimento circular”.

5. “Considere além dos 2 barcos 1 terceiro unidos com barras de ferro. Independente da trajetória irão manter sempre a mesma distância”.

Em cinco, a resolução foi com um exemplo prático. Considera três barcos unidos entre si, por barras de ferro, concluindo que neste caso, ocorre independente da trajetória adotada.

P: Se considerarmos a superfície esférica o modelo mais adequado. Quais das linhas que representam as trajetórias dos barcos poderiam ser consideradas retas?

P: Essa aqui?

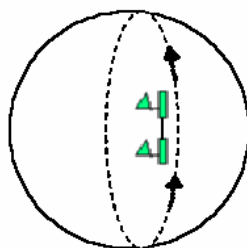


fig. 70: representação 1 do desenho na lousa

A linha representada na figura 69 foi considerada reta por grande parte dos alunos.

P: E estas duas linhas? (referindo-se as duas linhas azuis da figura 71).

Também foram consideradas retas por vários alunos.

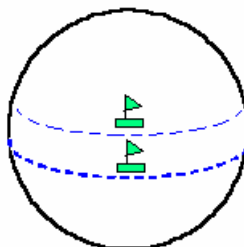


fig. 71: representação 2 do desenho na lousa

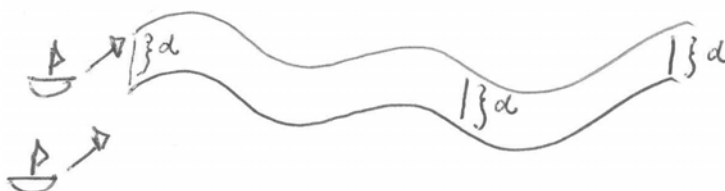


fig. 72: representação 3 do desenho na lousa

As linhas da figura 72 não foram consideradas retas por ninguém.

P: Supondo a situação da figura 73 sobre a superfície esférica. As duas linhas indicadas por ($\rightarrow$) poderiam ser consideradas retas paralelas?

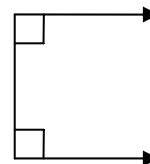


fig. 73: representação 4 do desenho na lousa

Após um breve silêncio, poucos alunos (identificados três nas gravações de fita K7), responderam afirmativamente, mas sem muita convicção. Essa afirmação baseou-se no fato de que um dos alunos afirmou em tom de pergunta. “Sim, não é?”. E dois afirmaram que “achavam” que sim.

Em síntese, a questão que sucedeu esta discussão foi “saber” o que é uma reta e quais as suas características. As questões relacionadas ao conceito de reta com a turma foram discutidas no desenvolvimento das atividades propostas na Ficha 2, entregue aos alunos.

Episódio 2.

Material: fichas de atividades, lápis, esfera de isopor, alfinetes, fitilho colorido.

As discussões ocorreram durante o fechamento das atividades com a turma.

2.1. O que é uma linha reta?

2.2. Você poderia desenhar uma linha reta sobre a esfera? Explique.

2.3. Em uma folha de papel, represente dois pontos distintos e descreva o menor caminho entre eles. Na esfera de isopor, represente dois pontos distintos usando alfinetes e utilize fitilho para descrever o menor caminho entre eles. A superfície da esfera de isopor representará um plano esférico.

Compare nos dois casos como você pode calcular a menor distância em ter dois pontos, no plano e na esfera.

Produção escrita dos alunos

Cacá

[2.1]: Na Geometria Euclidiana seria **a menor distância entre dois pontos.**

Na geometria Esférica seria circunferência, ou melhor, secções da esfera passando pelo centro.

[2.2]: Uma circunferência por exemplo. Como se fosse um meridiano da Terra.

[2.3]: No plano: Com régua.

Na esfera: Não sei responder.

Crica

[2.1]: Num plano a linha reta é indicada pela **menor distância entre dois pontos.**

Numa esfera, por exemplo, seria uma circunferência, onde esta reta não teria nem começo, nem fim.

[2.2]: Sim. Como feito na questão anterior.

[2.3]: No plano: Basta pegar uma régua e medir a distância entre eles.

Na esfera: Considerando apenas a parte exterior da esfera, a menor distância entre dois pontos é o arco do setor circular. Circunferência esta formada pelo corte da esfera pelo centro dela, cujo raio r é igual ao raio da esfera.

Dedé

[2.1]: O menor segmento entre dois pontos distintos é um segmento de reta. A reta é a extensão do segmento de reta.

[2.2]: Se considerarmos a menor distância entre os dois pontos sobre a esfera, acharemos uma reta sobre a esfera.

[2.3]: No plano: Se esticarmos uma linha de um ponto a outro, a medida da linha seria a menor distância entre os pontos.

Na esfera: O mesmo princípio se aplica na esfera, se esticarmos um barbante, de um ponto a outro a medida do barbante é a menor distância entre os pontos.

Dida

[2.1]: **Menor distância entre dois pontos.**

[2.2]: Fixaria uma esfera em uma varinha e giraria essa esfera, e com um pincel fixado em uma parede levaria essa esfera até ele. Desde que ambos continuem fixos, estarei traçando uma linha reta.

[2.3]: No plano: Desde que a linha esteja bem esticada, é só ligar os pontos.

Na esfera: É a menor distância, na circunferência máxima entre dois pontos.

Emer

[2.1]: Dado um segmento qualquer. Todos os pontos que possuem uma distância d desse segmento constitui uma reta.

[2.2]: Sim, traçando um segmento qualquer. Todos os pontos que possuem um distância d desse segmento constitui uma reta.

[2.3]: No plano: Com uma reta milimetrada, podemos calcular a distância entre dois pontos quaisquer.

Na esfera: É o menor arco que você pode construir entre os dois pontos.

O menor caminho entre eles seria uma reta, na geometria euclidiana.

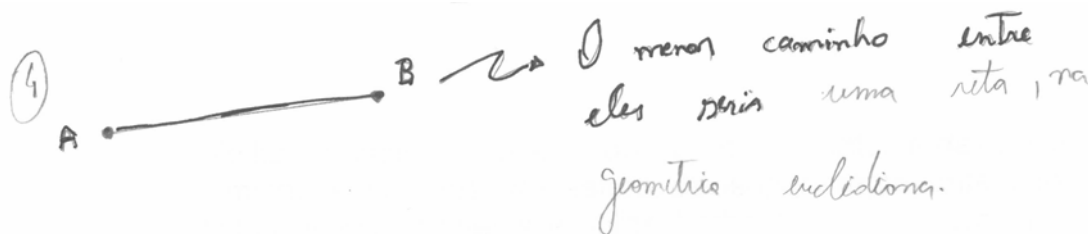


fig. 74: desenho 3 de Emer

Ivo

[2.1]: Numa geometria euclidiana, é **a menor distância entre dois pontos**. Numa geometria não-euclidiana eu pensaria como a linha reta do equador do planeta.

[2.2]: Partindo da Euclidiana, não. Mas fora isso daria o exemplo da linha do equador novamente, onde, eu poderia pegar qualquer ponto dessa reta, que a distância desse ponto até o centro seria a mesma.

[2.3]: No plano: traçaria uma reta e mediria.

Na esfera: pegaria um barbante, e seguraria no primeiro ponto esticaria ao máximo o barbante em cima de uma mesa (plana) e mediria. Ou outro caminho, se eu tivesse o ângulo formado pelos dois pontos em relação ao centro e conhecesse os raios.

Jota

[2.1]: É a menor distância entre dois pontos (segmento de reta), contido em uma reta.

[2.2]: Sem escrita.

[2.3]: No plano: Utilizando instrumentos de medições ou através de coordenadas cartesianas, caso os pontos possuem coordenadas.

Na esfera: Sabemos que a distância entre A e B é um arco de circunferência e seja r o raio da esfera e α o ângulo formado pelo centro da esfera e os pontos A e B, assim o comprimento de arco é $s = r \cdot \alpha$.



fig. 75: desenho 2 de Jota

Juca

[2.1]: Eu definiria como sendo linha reta, dado dois pontos distintos, **a menor distância entre esses dois pontos**.

[2.2]: Sim. Pois sempre é possível, dado 2 pontos sobre uma superfície esférica traçar a menor circunferência possível que contenha os dois pontos.

[2.3]: No plano: Uma reta que fosse pelos dois pontos, formando um segmento de reta de um ponto ao outro.

Na esfera: É o menor arco que passa pelo dois pontos.

Ledo:

[2.1]: Na geometria euclidiana uma linha reta é a menor distância possível entre dois pontos.

[2.2]: “Acredito que sim. É só você acompanhar a curvatura da esfera. Um exemplo [banal] seria uma viagem de avião em linha reta”.

[2.3]: No plano: Utilizando uma reta milimetrada, já que essa distância é uma reta.

Na esfera: Tomaria um plano passando pelos dois pontos e pelo centro da esfera, calculando o ângulo α formado e o raio r , logo $l = \alpha \cdot r$.

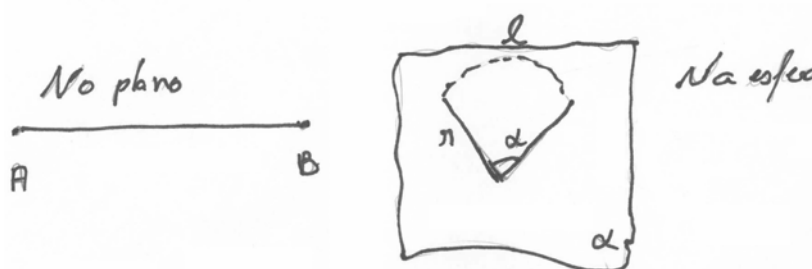


fig. 76: desenho de Ledo

Mina

[2.1]: plano: A linha reta no plano é uma reta.

Superfície deformada: é a menor distância entre os pontos considerando a superfície.

[2.2]: Como um arco de circunferência.

[2.3]: No plano: através de uma reta passando pelo ponto.

Na esfera: através da medida do arco menor formado pelos dois pontos.

Síntese da discussão com a turma:

Notou-se que seis respostas atribuíram a mesma idéia de segmento para reta. Assim, orientamos a discussão do seguinte modo:

P: Podemos dizer que a reta pode ser representada por uma linha que liga dois pontos?

Vários alunos responderam (precipitadamente) que sim.

P: Então eu posso representar a reta desta maneira?



fig. 77: representação de desenho na lousa

A resposta foi imediata. Não (em coro).

P: E desta maneira?



fig. 78: representação de desenho na lousa

Alguns afirmaram que sim e outros indicaram que a linha deveria ser prolongada nos dois pontos, indicando que a reta é infinita.

O texto e as citações que seguem foram apresentados oralmente para turma.

Ponto, **reta** e plano são noções primitivas da Geometria. Atualmente são conceitos aceitos sem definições pelos geômetras, mas nos *Elementos* de Euclides essas definições eram apresentadas. Seguem duas versões que traduzem a definição de linha e de linha reta apresentada por Euclides.

- ✓ “E linha é comprimento sem largura”
- ✓ “Linha reta é a que jaz, por igual, com seus pontos sobre si mesma”

Bicudo, p.9, 2001.

- ✓ “Linha é quantidade somente longa, isto é, sem largura nem grossura”
- ✓ “Linha reta é a que corre direita de um extremo ao outro sem torcer para nenhuma parte”

Souza, p. 121. 1998 (Malba Tahan)

Dentre as interpretações das definições de Euclides sobre reta encontramos:

- “A reta é a linha tal que basta imobilizarmos dois de seus pontos para que todos os outros fiquem também imóveis”

Brunschvicg, L, apud, Souza, p. 123, 2001

- “A fim de assegurar-se da retidão da linha traçada, age-se de tal sorte que o olho esteja na extremidade da linha como faz o sargento para alinhar seus homens. Corrigidos todos os desvios que puderem perceber, a linha reduz-se a um ponto; está reta”

Leibniz, apud, Souza, p. 123, 2001

A primeira interpretação apresenta uma definição de reta baseada na idéia de movimento e a outra se refere à prática. Assim, continuamos a discussão com os alunos no sentido de “saber” características da reta e não de chegar a uma “definição formal” desse conceito.

P: Considerando a superfície da esfera um plano (esférico) e as citações anteriores. Que características teriam a reta sobre este plano?

Alunos: Seria uma circunferência e finita.

P: Qualquer circunferência?

Dida: Só a maior.

P: Vejam uma das respostas apresentadas:

“(…) dados 2 pontos sobre uma superfície esférica traçar **a menor circunferência possível** que contenha os dois pontos”.

P: A menor circunferência que contenha os pontos não poderia ser considerada uma “reta” neste caso?

Vários alunos responderam de imediato, não. Alguns se mostraram indecisos.

P: Por que só a maior?

As respostas dos alunos não foram no sentido de explicar, mas de apresentar exemplos.

“Como a linha do equador ou os meridianos da Terra”.

Continuamos a discussão sobre reta na Geometria Esférica no desenrolar das atividades contidas na ficha 3, entregue aos alunos.

Episódio 3

Material: fichas de atividades, lápis, esfera de isopor, alfinetes e fitilho.

- 3.1. O primeiro postulado de Euclides diz: “Dois pontos determinam uma reta” ou de outra maneira “fique postulado traçar uma linha reta a partir de todo ponto até todo ponto”. O quê você poderia afirmar deste postulado considerando o plano esférico. Escreva suas conjecturas.
- 3.2. Prolongando a linha que representa a menor distância entre dois pontos no plano e fazer o mesmo no plano esférico. Que conclusões você observou?

Cacá

[3.1]: É válido. Mas se os pontos forem os polares, por eles passam infinitas retas.

[3.2]: **No plano:** Prolongar a menor distância seria construir uma reta infinita. **Na esfera:** Já na esfera, seria prolongar até chegar no primeiro ponto.

Crica

[3.1]: É válido para todos dois pontos com exceção dos pontos polares, pois por estes dois pontos, passam infinitas retas.

[3.2]: **No plano:** Torna-se uma reta. **Na esfera:** Torna-se uma circunferência.

Dedé

[3.1]: Se a distância entre dois pontos for igual a distância entre um par de pontos polares, então passam infinitas retas nesse ponto. Caso contrário, dois pontos determinam uma reta.

[3.2]: **No plano:** Nos dá a reta. **Na esfera:** Nos dá a geodésica.

Dida

[3.1]: Dois pontos na circunferência máxima determinam uma reta.

[3.2]: **No plano:** Se prolongarmos uma reta a partir de A e outra de B com sentido contrários essas retas nunca se interceptaram. **Na esfera:** Analogamente ao plano, só que teremos um ponto de intersecção.

Emer

[3.1]: Poderia afirmar que, por dois pontos no plano esférico passa-se mais de uma reta.

[3.2]: **No plano:** As extremidades de um segmento nunca se encontram. **Na esfera:** As extremidades de um segmento acabam se encontrando em um único ponto.

Ivo

[3.1]: Teria que se acrescentar um terceiro ponto, o centro, que determinaria um plano, onde a linha teria que estar contida para ser considerada uma reta.

[3.2]: **No plano:** Os prolongamentos (“as pontas”) nunca se encontram, e essa reta teria tamanho infinito. **Na esfera:** “As pontas” se encontrariam, formando um “anel” na esfera.

Jota

[3.1]: Determinam a maior circunferência.

[3.2]: **No plano:** Determinam uma reta. **Na esfera:** Determinam uma circunferência, gr é a maior dentre as circunferências.

Juca

[3.1]: Considerando a esfera e os pontos distintos dos pólos, passará uma única reta. Caso os pontos sejam polares, existirão infinitas retas.

[3.2]: **No plano:** Determina uma reta que se prolonga indefinidamente no plano. **Na esfera:** Determinará uma circunferência máxima (geodésica) contendo os dois pontos.

Ledo

[3.1]: Esses dois pontos em uma esfera determinam uma circunferência e eles determinam um arco.

[3.2]: **No plano:** As extremidades de um segmento nunca se encontram. **Na esfera:** As extremidades se encontram determinando uma circunferência.

Mina

[3.1]: Considerando o plano esférico determinamos uma circunferência maior.

[3.2]: **No plano:** Obtenho uma reta. **Na esfera:** Obtenho a maior circunferência.

Síntese das discussões das atividades com a turma

P: Podemos dizer que dois pontos sobre o plano esférico determinam uma reta, exceto quando forem um par de pontos polares (também chamado de pontos antípodas)?

A maioria concordou que sim.

P: Neste caso podemos dizer que o primeiro postulado da Geometria Euclidiana também é válido para Geometria esférica? Mesmo tendo as exceções dos pontos polares?

Os alunos não se mostraram seguros em relação em afirmar que sim ou não neste caso.

P: Caso seja válido, o primeiro postulado poderia ficar do seguinte modo?

Dois pontos, exceto os pontos polares, determinam uma reta.

Alguns alunos disseram que sim.

P: Alguém já viu um axioma ou postulado em matemática que apresenta exceções no seu enunciado?

Vários alunos responderam que não.

P: Então como fica esta situação?

Alguns alunos afirmaram que este postulado não era válido para Geometria Esférica.

A discussão foi encaminhada para mostrar que o primeiro postulado pode ser válido e sem exceções. A primeira reformulação deste postulado para a Geometria que considera o plano uma superfície esférica, foi apresentada por Riemann.

“Dois **pares** de pontos (antípodas) determinam uma reta”.

No lugar de pontos ele considerou um par de pontos antípodas. Esta Geometria Não-Euclidiana foi batizada de Geometria Elíptica. E, Felix Klein considerou cada par de pontos antípodas como um único ponto na Geometria Elíptica. Assim, o primeiro postulado pode ser enunciado do mesmo modo que na Geometria Euclidiana.

Episódio 4

Materiais: fichas de atividades, lápis, esfera de isopor, alfinetes e fitilho.

4.1. Como você definiria pontos polares na esfera?

- 4.2. Qual a medida da distância entre o par de pontos polares em qualquer esfera?
- 4.3. Qual é medida da distância entre um ponto polar e a linha do equador em uma esfera qualquer?

Cacá

- [4.1]: São aqueles que maior distância é a menor entre eles têm a mesma medida.
- [4.2]: $1/2$ do comprimento da maior circunferência.
- [4.3]: $1/4$ do comprimento da maior circunferência.

Crica

- [4.1]: Ptos polares são aqueles que admitem maior distância entre dois pontos na esfera.
- [4.2]: $1/2$ do comprimento da maior circunferência da esfera.
- [4.3]: A linha do equador fica na metade da distância entre os pólos.

Dedé

- [4.1]: Seja $d = \max \{\text{distância entre dois pontos}\}$. Pontos polares são 2 pontos que distam d .
- [4.2]: Metade do comprimento de uma geodésica.
- [4.3]: $1/4$ do comprimento de uma geodésica.

Dida

- [4.1]: Pontos eqüidistantes pertencentes na circunferência máxima, pelos quais passam infinitas retas.
- [4.2]: Seria metade da linha que passa pela circunferência máxima.
- [4.3]: $1/4$ da linha máxima, que passa pela circunferência máxima.

Emer e Ledo

- [4.1]: Def: O segmento de reta passando pelo ponto centro. Da esfera intercepta a esfera em dois pontos. Esses pontos são os pontos polares.
- [4.2]: Traçaria um segmento de reta passando pelo par de pontos. Irá formar assim uma semicircunferência. Conhecendo o diâmetro, facilmente calculamos a semicircunferência.

[4.3]: A maior distância possível entre a linha do equador e um ponto polar é um quarto do comprimento da circunferência maior.

Jota

[4.1]: É a maior distância entre dois pontos.

[4.2]: A metade da circunferência que passa pelos pólos.

[4.3]: É 1/4 do comprimento da circunferência que passa pelos pólos.

Juca

[4.1]: **São pontos que formam um arco de 180° sobre a esfera.**

[4.2]: Sendo A, B pontos polares, eles distam metade do comprimento da maior circunferência sobre a esfera. / $C = (2 \pi \cdot r / 2) = \pi \cdot r$.

[4.3]: Sejam A, B pontos polares e C um ponto de intersecção que pertence à linha do equador. Logo / $dac = \pi \cdot (r / 2) = (\pi / 2) \cdot r$.

Mina

[4.1]: É a maior distância entre dois pontos.

[4.2]: Medindo metade do comprimento da circunferência maior.

[4.3]: Medindo 1/4 da medida do comprimento da circunferência maior.

Observamos com as respostas apresentadas que somente um dos alunos mencionou graus como unidade de medida de distância. A maioria das respostas estabeleceu relações com o comprimento da circunferência máxima sobre a superfície esférica, o que foi plausível, pois, de acordo com a afirmação: “O significado matemático é obtido através do estabelecimento de conexões entre a idéia matemática particular em discussão e os outros conhecimentos pessoais do indivíduo” (Bishop e Gofree, 1986, apud Nacarato et al., 2004/2005, p. 3). Neste caso, os alunos conheciam a fórmula do comprimento de uma circunferência em função do seu raio.

Síntese das discussões das atividades com a turma

As discussões foram encaminhadas com intuito dos alunos perceberem que graus ou radianos são unidades de medidas das distâncias entre dois pontos sobre a superfície

esférica adequadas, quando não queremos relacioná-las diretamente com a medida do raio dessa esfera.

Episódio 5

Material: fichas de atividades, lápis, esfera de isopor, alfinetes, fitilho, uma esfera e uma régua de Lènárt.

- 5.1. Como pode ser construída uma régua para traçar retas no plano esférico?
- 5.2. Qual unidade de medida seria mais adequada? Por quê?
- 5.3. Como você poderia construir retas paralelas?
- 5.4. O quinto postulado de Euclides, também chamado de postulados das paralelas.

Modernamente, é apresentado com as seguintes palavras:

“Por um ponto P exterior a uma reta s , consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta s ”. Como fica este postulado considerando a geometria esférica?

Cacá

[5.1]: Uma circunferência de acordo com o raio da esfera.

[5.2]: Em radianos.

Não respondeu o restante das questões.

Crica

[5.1]: Uma circunferência de acordo com o raio da esfera.

[5.2]: Em radianos.

Não respondeu o restante das questões

Dedé e Mina

[5.1]: 1°) Com uma fita métrica; / 2°) Com um elástico formando uma circunferência.

[5.2]: 1°) Graduação milimetrada; / 2°) Graduação em radianos ($0 - 2\pi$) ou graus ($0^\circ - 360^\circ$).

[5.3]: Por um ponto P exterior a uma reta s , consideradas em um mesmo plano, não existe retas paralelas a s .”

Dida e Emer

[5.1]: Com um fio flexível esticado sobre a esfera podemos construir essa reta.

[5.2]: A graduação em graus, pois é o que estamos mais acostumados a utilizar.

[5.3]: **Dado uma reta e um ponto P pertencente a essa reta. Traçamos por P e perpendicular a r outra s . Por s tomamos um ponto $A \neq P$ uma outra reta t perpendicular a s . A reta t é paralela à r .**

[5.4]: Não podemos utilizar esse Postulado. Ele falha.

Ivo, Jota e Juca

[5.1]: Uma fita que seja extensível.

[5.2]: Radianos, pois as retas são círculos máximos e para medir comprimento do círculo é conveniente usar radianos, ou graus.

[5.3]: **$r \parallel s$, por construção da perpendicular da perpendicular.**

[5.4]: Considerando a geometria esférica, o 5º postulado de Euclides não vale, pois não existem retas paralelas.

Ledo

[5.1]: Com um fio flexível bem esticado, sobre a esfera, podemos traçar uma reta.

[5.2]: Acredito que o grau. Pois é a graduação, para este caso, mais usado com frequência.

[5.3]: **Dados uma reta e um ponto P fora de r . Tracemos por P Uma reta $s \perp$ à r .**

Tomemos um ponto A em s , por esse ponto traçamos uma perpendicular a s , essa reta será paralela a r .

[5.4]: Por um ponto P exterior a uma reta s , considerando em uma mesma esfera, não existe uma reta paralela a reta s .

Síntese das discussões das atividades com a turma

As discussões foram direcionadas para pensar em um modelo de régua esférica graduada que permitisse a construção de segmentos com medidas determinadas. Apresentamos uma esfera e régua esférica de Lénart para exemplificar como poderia ser este modelo. Este material não foi explorado pela turma em atividades sobre construções

geométricas porque possuíamos apenas um exemplar e não tivemos interesse em adquirir mais destes materiais devido ao seu preço e à dificuldade de importação.

Usamos tiras de acetato transparente como régua esférica, pois é um material bem mais barato e pode ser encontrado facilmente em papelarias. Os alunos concluíram que as graduações em uma régua esférica só servem para um determinado tamanho de esfera.

Não sentiram a necessidade de fazer a construção descrita por 3 alunos (em negrito na transcrição) para responderem que não existem “retas” paralelas na Geometria Esférica.

Episódio 6

Atividades investigadas com o uso do *software Cinderella*.

6.1. Sejam A , B e C três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. A figura formada pelos arcos geodésicos todos menores que 180° , que unem esses pontos dois a dois chama-se triângulo esférico. Marque três pontos distintos sobre a esfera e ligue os pontos dois a dois, usando o “modos” linha por dois pontos, construindo um triângulo esférico. No “modos” medir, encontre as medidas dos ângulos internos do triângulo. Qual a soma dos ângulos internos do seu triângulo? _____. Compare com os resultados de seus colegas.

Qual a diferença da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico em relação ao triângulo plano?

6.2. Existe triângulo com dois ângulos retos? E três ângulos retos? Explique.

Um evento interessante:

Mina: Eu não aceito que a circunferência seja uma reta!

P: Se considerarmos a Geometria Euclidiana, não é mesmo!

A justificativa apresentada foi no sentido de que ponto, reta e plano são termos primitivos e, a partir de Hilbert, aceitos sem definição. Além disso, podem ser interpretados em termos de espaço euclidiano ou riemanniano. Por exemplo: “reta” no espaço riemanniano pode ser interpretada no espaço euclidiano como uma “circunferência

máxima” de uma superfície esférica, superfície tal que pode ser interpretada como “plano” no espaço riemanniano.

Mina: “Se eu quiser aceitar só no sentido euclidiano?”(...)

P: Você pode! (surpresa com situação)

Encerramos esse assunto no momento.

Após alguns dias, foi falado a Mina que, para entender Geometria Não-Euclidiana ela teria que aceitar outros modelos de retas. Esse assunto teve um fim amigável.

Produção escrita dos alunos

Cacá e Crica

[6.1]: $186,84^\circ$.

Δ plano $\rightarrow$ soma sempre 180° .

Δ esférico $\rightarrow$ soma triângulo variam de 180° à 540° aproximadamente.

[6.2]: Sim.

$\Delta ABC \rightarrow$ ângulos: 90° , 90° e $64,89^\circ$.

$\Delta ABC \rightarrow$ ângulos: 90° , 90° e 90° .

Existe, pois a soma dos ângulos está entre 180° e 540° .

Dida

[6.1]: 204° . Esférico a soma foi maior que 180° .

[6.2]: Existe um triângulo com dois ângulos retos, traçamos uma linha e uma ortogonal e tracemos outra ortogonal a essa linha. Existe um Δ com 3 ângulos retos. 1º definimos uma linha e uma ortogonal a ela, na intersecção traçamos circunferência por raio e calculemos o ponto médio dessa circunferência A a linha e tracemos outra perpendicular.

Emer e Ivo

[6.1]: $218,05^\circ$. No triângulo plano a soma dos ângulos internos é 180° enquanto no esférico é maior que 180° .

[6.2]: Traçando duas linhas ortogonais, com a intersecção sendo os pólos, traço uma linha do “equador”. Assim formo um triângulo com três ângulos retos. Também é possível fazer um triângulo com dois ângulos retos.

Juca

[6.1]: $217,40^\circ$. No triângulo plano a soma dos ângulos internos é de 180° e um triângulo esférico apresenta medida maior que 180° .

[6.2]: Na geometria Plana não, já na Geometria Esférica é possível triângulos com 2 e 3 ângulos retos, pois a soma dos ângulos é maior que 180° . ($180^\circ < x < 540^\circ$).

Ledo e Emer

[6.1]: $194,93^\circ$. A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° , enquanto a do triângulo na geometria plana é igual a 180° .

[6.2]: Sim. Um lado passando pelo equador e um de seus vértices sendo o pólo desse equador. Existe sim um triângulo com três ângulos retos, pois a soma de seus ângulos internos está entre 180° e 540° .

$$\left\{ \begin{array}{l} <) \text{ cd} = 99.97 \\ <) \text{ ca} = 49.15 \\ <) \text{ da} = 50.82 \end{array} \right.$$

Mina, Dedé e Jota

[6.1]: $187,88^\circ$.

Δ plano $\rightarrow$ soma sempre 180° .

Δ esférico $\rightarrow$ soma triângulo variam de 180° à 540° aproximadamente.

[6.2]: Sim. Existe, pois a soma dos ângulos está entre 180° e 540° .

O uso do *software* nesta atividade auxiliou a verificação de uma propriedade já conhecida pelos alunos mas, além disso, eles também observaram que quanto maior a medida dos lados de um triângulo esférico, maior a soma dos seus ângulos internos.

Episódio 7

- 7.1. Na geometria esférica é possível construir um quadrado? Explique.
- 7.2. Construa um quadrilátero esférico com todos os lados congruentes. Encontre as medidas dos seus ângulos. Escreva suas conclusões.
- 7.3. O que você pode afirmar sobre a soma dos ângulos internos de um hexágono regular na geometria esférica?

Síntese do desenvolvimento das atividades com a turma

Dedé respondeu oralmente as questões sem a necessidade de fazer qualquer investigação, com ou sem o *software*. Ele não dependeu da exploração de modelos ou materiais para visualização das propriedades envolvidas.

Os outros alunos utilizaram o *software* para investigar as questões e verificar se Dedé estava correto.

Veja as duas seqüências de construções no *Cinderella* feitas pelos alunos.

1º- Desenharam duas linhas (retas na geometria esférica) perpendiculares indicadas com a cor azul na figura 79. Marcaram o ponto de intersecção destas linhas.

2º- Desenharam a circunferência indicada com cor preta e centro na intersecção das duas retas perpendiculares.

3º- Marcaram os 4 pontos de intersecção desta circunferência e as linhas perpendiculares (azuis).

4º- Desenharam os lados do quadrilátero esférico inscrito nesta circunferência, indicados com cor vermelha.

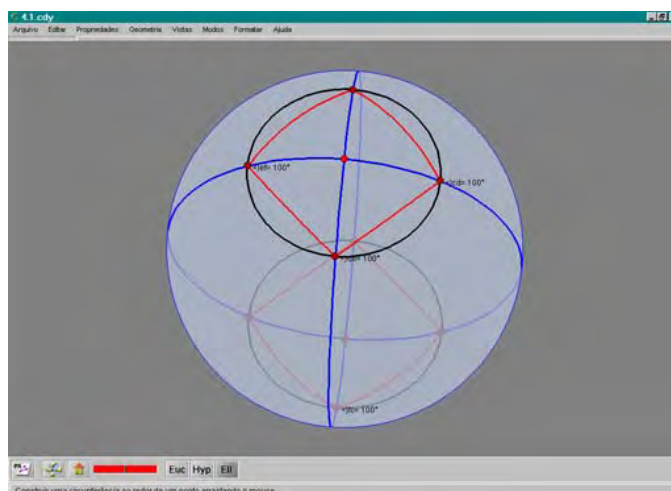


fig. 79: construção dos alunos no *Cinderella*

Após a construção, mediram os 4 ângulos deste quadrilátero esférico e constataram que eles eram congruentes, mas maiores que 90° . Mediram os seus 4 lados e verificaram que eles também eram congruentes. Moveram a circunferência, aumentando e diminuindo o seu raio. Perceberam que as medidas dos lados e ângulos do quadrilátero esférico alteravam, porém a condição de congruência se mantinha nos dois casos.

Outro aspecto observado pelos alunos, foi perceber que quanto menor a circunferência e, conseqüentemente, menor a medida dos lados do quadrilátero esférico, mais próximo de 90° eram as medidas dos ângulos do referido quadrilátero. Concluíram também que para os seus ângulos serem retos, os 4 vértices deste quadrilátero coincidiriam em um único ponto.

Na segunda seqüência de construção executaram os seguintes passos:

1º- Desenharam as duas linhas perpendiculares indicadas com a cor azul na figura... e marcaram o ponto de intersecção destas linhas.

2º- Desenharam a circunferência (em vermelho) com seu centro na intersecção dessas duas linhas.

3º- Definiram os pontos de intersecção desta circunferência com cada uma das linhas (azuis).

4º- Por um dos pontos marcados no item anterior, desenharam a linha (preta) perpendicular à linha (azul) que contém o respectivo ponto. O mesmo foi feito no outro ponto.

5º- Definiram o ponto de intersecção dessas linhas (pretas).

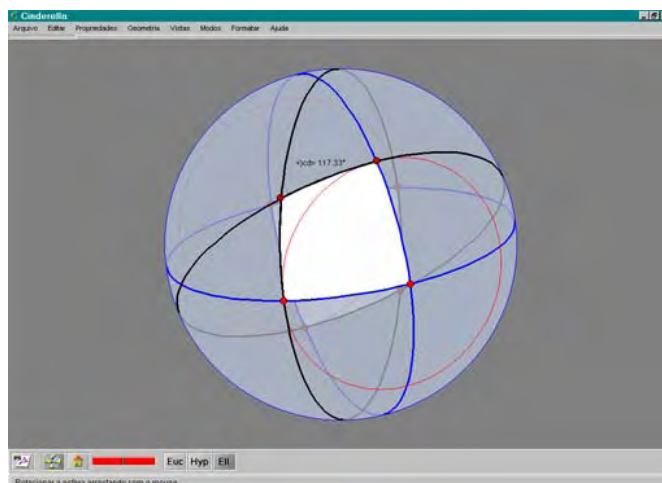


fig. 80: construção dos alunos no *Cinderella*

Os 4 pontos (vermelhos) indicados são vértices do quadrilátero esférico preenchido com a cor branca na figura. Por construção, este quadrilátero possui três ângulos retos. Não podemos dizer o mesmo do seu ângulo cujo vértice está no ponto de intersecção das duas linhas (pretas).

Após a sua construção, os alunos verificaram que a medida do ângulo com vértice no ponto de intersecção das duas linhas (pretas) era maior que 90° . Concluíram que um quadrilátero esférico pode ter no máximo três ângulos retos.

Concluíram também que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono esférico não tem valor fixo e é sempre maior do que o seu respectivo polígono plano.

Em relação à investigação sobre os ângulos de um hexágono regular esférico, os alunos não precisaram construí-lo para saber que a medida de cada um de seus ângulos é maior que 120° . As duas construções no *Cinderella*, feitas por Emer e Ledo, tiveram outra intenção. Verificar se as medidas dos lados desse polígono esférico inscrito em uma circunferência eram congruentes ao raio desta circunferência, do mesmo modo que na Geometria Plana. Concluíram que esta propriedade não era válida nesta geometria. Vejas essas construções no *Cinderella*:

Nesta figura vemos que o ponto verde, representante do último vértice construído do hexágono regular esférico, não está sobre a circunferência (preta).

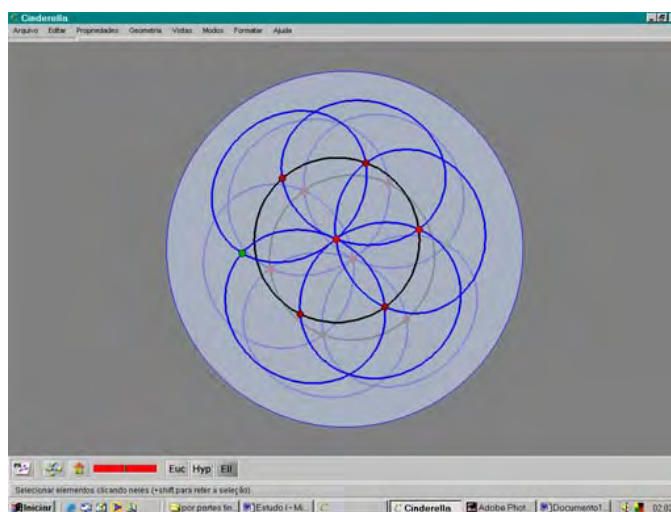


fig. 81: construção dos alunos Emer e Ledo no *Cinderella*

Por um ponto (no centro da figura) traçaram as retas, dividindo o plano esférico em seis ângulos congruentes, medindo 60° cada. Traçaram uma circunferência com centro no mesmo ponto. Nas intersecções desta circunferência com as retas, definiram como vértices do hexágono esférico. Encontraram a medida do raio da circunferência e da distância entre dois vértices consecutivos do referido polígono esférico. Tinham medidas diferentes.

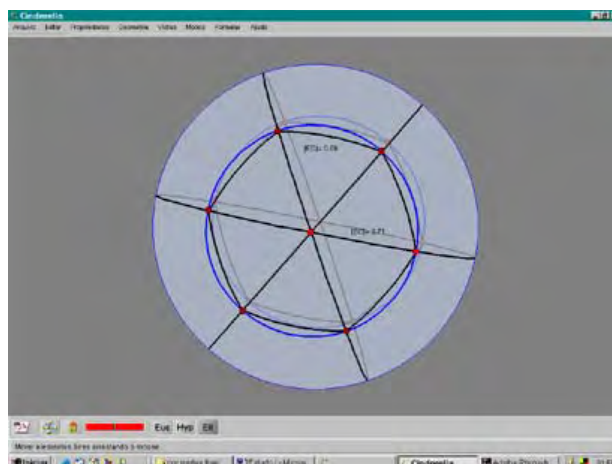


fig. 82: construção dos alunos Emer e Ledo no *Cinderella*

A seguir, temos a produção escrita dos alunos.

Emer e Ledo

[7.1]: Não. Pois não é possível traçar paralelas na geometria esférica.

[7.2]: $\angle cb = 96,04^\circ$ / $\angle dc = 89,88^\circ$ / $\angle ab = 90^\circ$ / $\angle ad = 96,95^\circ$.

[7.3]: A soma dos ângulos internos de um hexágono regular é maior na geometria esférica do que na geometria plana.

Dida

[7.1]: Não. Consigo construir no máximo 3 ângulos retos.

[7.2]: Seus ângulos são maiores que 90° e menores que 180° . Quando os pontos se cruzam no centro da circunferência forma 90° , mas aí torna-se um ponto e quando atinge a circunferência máxima dá 180° .

[7.3]: No mínimo 120° , se todos pontos se coincidirem. No máximo 180° , se todos os pontos se coincidirem. $120^\circ < \text{ângulo} < 180^\circ$.

Juca

[7.1]: Não. Pois basta o fato de não existir paralelas para que não possa existir figuras que dependem de paralelismo, tais como quadrado, retângulo, paralelogramo.

[7.2]: As medidas dos ângulos foram iguais e são $102,27^\circ$. Podemos dizer também que a soma é maior que 360° .

[7.3]: A soma dos ângulos internos, é maior do que na Geometria Plana.

Ivo

[7.1]: Não, não é possível construir quatro lados paralelos, com 4 ângulos retos.

[7.2]: Os ângulos serão maior que 90° e no máximo 180° . Para serem 90° , teria que ser um plano. Como quanto menor fica esse quadrado, fica mais perto de uma superfície plana, então para ser igual a 90° os quatro vértices teriam que estar sobrepostos.

[7.3]: É maior que 120° (soma dos ângulos na geometria plana), enquanto maior for esse hexágono, maior será essa soma. E no máximo essa soma dá 1080° .

Mina, Cacá e Crica

[7.1]: Não, pois não existem retas paralelas na geometria elíptica.

[7.2]: Quadrilátero esférico regular: ângulos de $110,41$ e distância de $1,07$ entre pontos. A soma dos ângulos internos é maior que 360° .

[7.3]: A soma dos ângulos internos será sempre maior que 720° , pois cada ângulo será sempre maior que 120° .

Episódio 8

Construções no *Cinderella*: Tesselações esféricas por poliedros Platão.

Octaedro esférico (3,3,3,3)

As construções dos alunos seguiram a sequência abaixo ou uma pequena variação dela.

1º - Traçaram uma “reta” por dois pontos A e B

- 2° - Por A e B , traçaram duas perpendiculares
- 3° - Pelo ponto C , interseção das “retas”, traçaram uma perpendicular à linha AC .
- 4° - Esconderam a “reta” BC e obtiveram os respectivos vértices e as arestas do poliedro inflado.

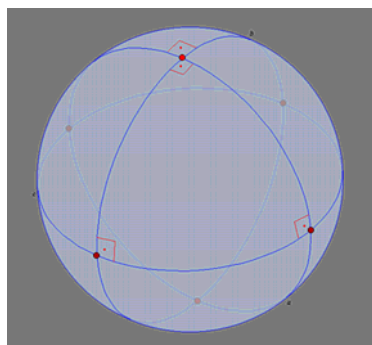


fig. 84: construção dos alunos no Cinderella

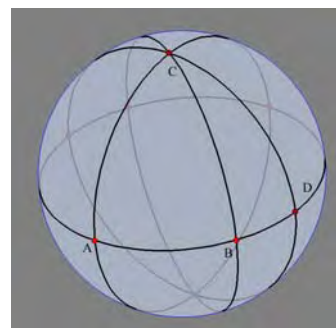


fig. 83: construção dos alunos no Cinderella

Um evento interessante foi a primeira construção de Cacá e Crica. Elas iniciaram a construção com um ponto e depois traçaram a circunferência máxima com centro neste ponto. Quando tentaram traçar uma perpendicular à circunferência máxima, verificaram que o *software* não executava este comando e ficaram intrigadas com este fato.

A explicação para o ocorrido é que o *Cinderella* não reconhece como linha (reta) a circunferência máxima de raio igual a $1,57 \text{ rad}$. Desse modo, não permite traçar perpendiculares às circunferências traçadas.

Alguns alunos fizeram outra tentativa interessante de construção. Traçaram um ponto (ou par de pontos antípodas) e depois traçaram uma circunferência por dois pontos. No “modos” mover, aumentaram o raio desta circunferência, que neste caso podem ser visualizadas duas circunferências simétricas a um plano que passa pelo centro da esfera, até elas se encontrarem em uma, que divide a superfície esférica em dois hemisférios. Chegaram na “linha do equador” do ponto traçado anteriormente. Também não conseguiram traçar uma perpendicular a “linha do equador”. Como foi dito anteriormente, o *Cinderella* não reconhece circunferências como linhas (retas) e, além disso, não permite fazer construções quando há figuras geométricas justapostas.

Cubo esférico (4,4,4)

Somente Juca conseguiu chegar nesta figura sem auxílio da ficha com a seqüência de construção. Ele percebeu que os incentros dos triângulos esféricos da tesselação (3,3,3,3), feita anteriormente, poderiam ser os vértices do cubo esférico. Testou sua conjectura e visualizou os vértices da tesselação esférica (4,4,4).

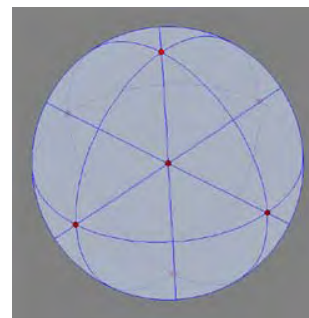


fig. 85: construção no *Cinderella* de Juca

Os outros alunos receberam a ficha com a seqüência de construção para conseguir chegar nesta tesselação esférica.

Nas tesselações (3,3,3), (5,5,5) e (3,3,3,3,3) os alunos executaram as respectivas seqüências de construção apresentadas nas fichas de atividades da aula. Estas, foram descritas no capítulo 1. Enfatizamos que neste momento, somente os vértices destas construções puderam ser visualizados pelos alunos, pois ainda não sabíamos como traçar todos (ou quase todos) os segmentos dos respectivos lados dos poliedros esféricos.

Não é possível traçar todos os lados (segmentos) dos poliedros esféricos, nem colorir todos os polígonos esféricos que tessalam a superfície esférica no *Cinderella*. As figuras apresentadas no primeiro capítulo que “parecem” que isto pode ser feito, na verdade só mostra a parte que pode ser visualizada como se estivesse completa, mas não está. Veja as figuras sob um outro ângulo.

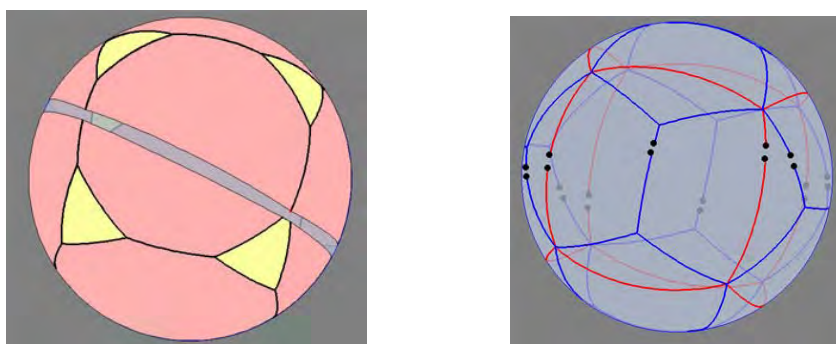


fig. 86: parte incompleta de duas tesselações esféricas

Episódio 10: Atividades com caleidoscópios

Um evento importante afetou o desenvolvimento das atividades com o uso de caleidoscópios, pois quase todos professores entraram em greve e os alunos pretendiam viajar neste período. Assim, tivemos pouco tempo para o andamento dessas atividades.

Inicialmente, desenvolvemos atividades com o uso de um, dois e três espelhos planos para a visualizar figuras e pavimentações na Geometria Plana.

No próximo encontro, usamos régua flexível, compasso, fitilho e alfinete, para construir, de maneira informal, mas, baseados em conceitos matemáticos, a tesselação (5,6,6) e (4,6,8) em esferas de isopor. Segundo D’Ambrósio (1986), esse relaxamento nos padrões de rigor matemático é criticado pelos “puristas”, mas de modo algum, interfere negativamente nesse processo, pois como ele mesmo diz:

“Uma atitude assim parece-me perfeitamente sadia, e conduz a graus de rigor e níveis de abstração que permitirão atingir, no seu devido tempo, toda pureza procurada pelos puristas, e acreditamos que mais rapidamente e mais ligada à realidade do que tradicionalmente se faz”.
(D’Ambrósio, 1986, p.16).

Usamos este material pela facilidade de aquisição, custo baixo e a possibilidade de recortar com estilete, instrumento simples, as bases para visualizações nos caleidoscópios.

Tesselação (5,6,6)

Seguimos a seguinte sequência de construção semelhante a encontrada em Murari (2004).

Usamos uma esfera de isopor de raio R . Sobre ela esboçamos os vinte triângulos esféricos equiláteros que formam o icosaedro esférico.

Os triângulos esféricos foram desenhados com o uso de régua flexível, compasso, alfinetes e barbante. Marcamos um ponto A , na esfera com um alfinete. A partir dele estendemos o barbante para pontilhar o lado do triângulo (cuja medida é R . $63,4^\circ$) obtendo o ponto B . Traçamos com a régua flexível esse segmento. Com o compasso centrado nos pontos A e B , e com esse raio de abertura, traçamos dois arcos, cuja intersecção é o ponto

C. Usamos o barbante como guia para pontilhar os lados AB e BC . Completamos o traçado do triângulo. Com o compasso, e a partir dos vértices A , B e C repetimos o procedimento anterior, “tessellando” a esfera com triângulos esféricos congruentes, cujo resultado será o da (fig. 87).

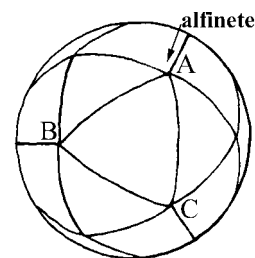


fig. 87: icosaedro esférico

Inscrivemos em cada triângulo um hexágono regular (Fig. 88)

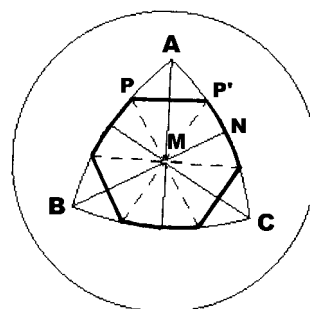


fig. 88: hexágono inscrito no triângulo esférico

Recortando o triângulo esférico AMN , chegamos na sua base caleidoscópica (fig. 88). Colorimos as duas regiões (R_1 e R_2) com cores diferentes. Colocamos no interior de um caleidoscópio generalizado, cujos ângulos diedrais entre os espelhos são de $36^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ e visualizamos a tesselação $(5,6,6)$, a bola de futebol.

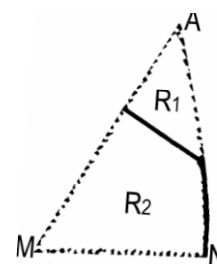


fig. 89: base caleidoscópica $(5,6,6)$

Esta base, cujas regiões foram coloridas de amarelo e preto (fig. 90), foi colocada no caleidoscópio generalizado, fornecendo o visual de uma bola com hexágonos amarelos e pentágonos pretos

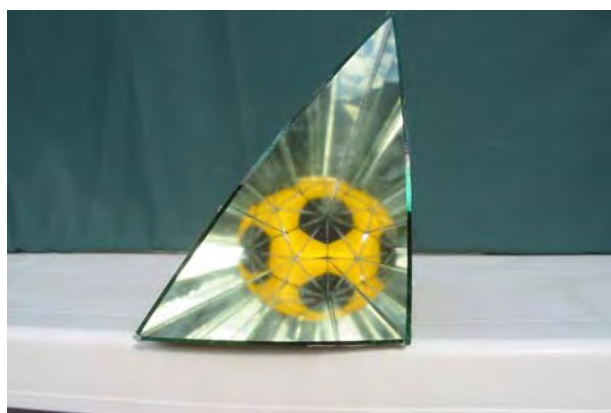


fig. 90: visualização da tesselação $(5,6,6)$ no caleidoscópio generalizado

Tesselação (4,6,8):

Usamos uma esfera de isopor de raio R . Sobre ela esboçamos os oito triângulos esféricos eqüiláteros que formam o octaedro esférico e continuamos a seqüência de construção dessa base caleidoscópica conforme apresentamos.

- 1) Com uso de compasso, traçamos as bissetrizes dos ângulos em cada um dos triângulos esféricos “trirretângulos” (fig. 91).

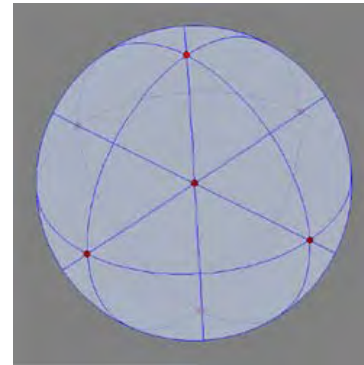


fig. 91: bissetrizes do trirretângulo

- 2) Aachamos o incentro de cada um dos seis triângulos esféricos, obtidos anteriormente. Repetimos este passo nos outros triângulos “trirretângulos” (fig. 92).

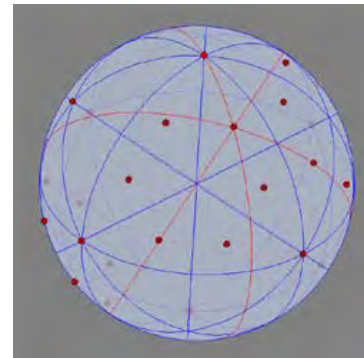


fig. 92: vértices do hexágono inscrito no trirretângulo

- 3) Conectamos cada incentro com outros três incentros adjacentes (fig. 93).

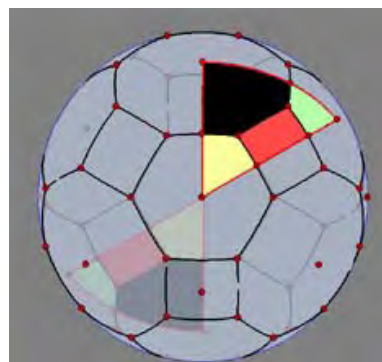


fig. 93: base caleidoscópica da tesselação (4,6,8)

- 4) Recortamos o triângulo esférico como mostra a parte colorida da fig. 93 e chegamos na base caleidoscópica da tesselação (4,6,8). Colocamos no interior de um caleidoscópio generalizado, cujos ângulos diedrais entre os espelhos são 60° , 60° , 90° e visualizamos a tesselação (4,6,8). Veja a foto a seguir:

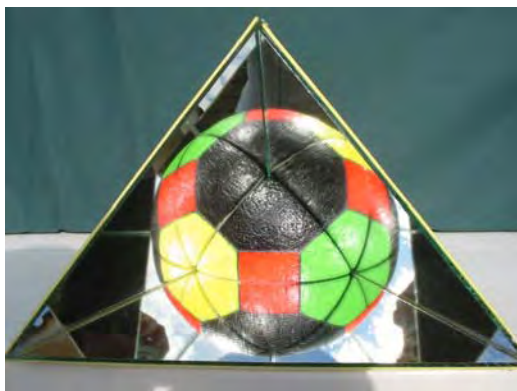


fig. 94: visualização da tesselação (4,6,8) no caleidoscópio generalizado

Durante estas atividades os alunos demonstraram bastante empolgação com as visualizações das imagens frente aos espelhos, tanto nas observações de figuras da geometria plana quanto nas tesselações da esfera. Aliás, um dos aspectos deste material, é possibilidade de gerar belas imagens.

Um detalhe importante relativo aos aspectos matemáticos dos caleidoscópios generalizados é que podemos visualizar somente um hemisfério da superfície esférica. Por isso, a Geometria Elíptica é mais próxima às características deste material.

A seguir apresentamos duas fotos das construções dos alunos usando esferas de isopor. Lembramos que para obtermos imagens mais nítidas, tivemos que ressaltar as figuras representadas pelos alunos sobre a superfície esférica.



fig. 95: construção de alunos

Além destas, observe as duas fotos da tesselação esférica (5,6,6) feitas com uma esfera de isopor.



fig. 96: fotos da tesselação (5,6,6) na esfera de isopor

Além dos caleidoscópios generalizados, existem outros, que geram imagens de tesselações esféricas de modo mais artístico. Veja as imagens.

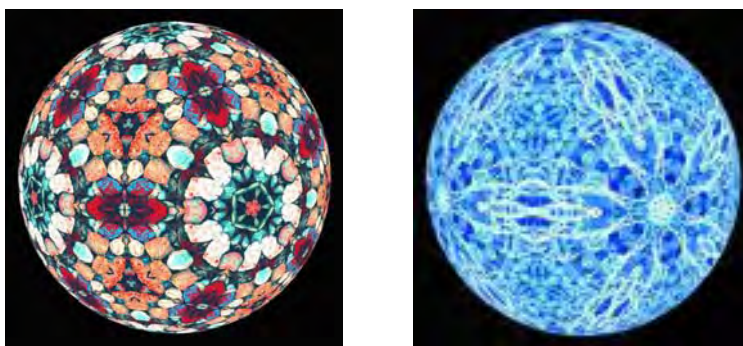


fig. 97: imagens geradas por caleidoscópios esféricos

Avaliação dos alunos

1. Quantos pontos definem uma única reta na Geometria Esférica? E na Geometria Elíptica? Explique nos dois casos.
2. Dado um triângulo esférico de lados iguais a 90° . Quantas alturas podem ser construídas neste triângulo? Qual a medida da altura deste triângulo?
3. Escreva tudo que você lembra sobre as diferenças entre a Geometria Esférica e a Geometria Plana.
4. Escreva suas dúvidas sobre as Geometrias Esférica e Elíptica que não ficaram esclarecidas durante o curso.

Cacá

1. Na geometria elíptica dois pontos definem uma única reta. Na geometria esférica também, com exceção dos pontos polares, pois através deles passam infinitas retas.
2. Podem ser construídas infinitas alturas, pois qualquer segmento que sai do vértice em relação ao lado oposto vai ter sempre 90° .
3. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior que 180° e menor que 540° ; na geometria esférica
A reta é infinita e limitada na geometria esférica, enquanto na plana ela é infinita e ilimitada
“Na geometria esférica não existe retas paralelas (nem polígonos que dependem de paralelismo)”
4. Algumas dúvidas sobre construção de polígonos

Crica

1. Dois pontos definem uma única reta na geom. Esférica e na geom. Elíptica, porém, na geometria elíptica os pontos polares são os mesmos, então por estes pontos passam infinitas retas. Portanto, nesta geometria basta pegar dois pontos q. não são polares

2. Infinitas, pois todas as retas que sai de um vértice encontra o lado oposto com 90°
3. A soma dos ângulos internos de um triângulo na geom. Plana é 180° e na geom. esférica é maior que 180° e menor que 540°
 A reta é infinita e ilimitada na g. e. e na g. p. a reta é infinita e ilimitada
 Não existem retas paralelas na g. e.
 Não existe nenhum polígono dependente de paralelismo na g. e.
4. Demonstração da área do triângulo

Dedé

1. Na geometria esférica, dois pontos definem uma reta, se eles não forem polares. Se os pontos forem polares, passam infinitas retas por eles. Na geometria elíptica, dois pontos definem uma reta
2. Podem ser construídas infinitas alturas, pois qualquer reta que passe pelo vértice e pela base é ortogonal a base. A medida da altura é de 90°
- 3.

Plana	Esférica
A soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180°	A soma dos ângulos de um triângulo é maior que 180° e menor que 540°
A reta é ilimitada	A reta é limitada
Existem retas paralelas não coincidentes	Não existem retas paralelas não coincidentes
Existe quadrado. Existe paralelogramo.	Não existe quadrado. Não existe paralelogramo

As retas nem sempre dividem o plano no mesmo número de regiões.

4. Não apresentou dúvidas.

Dida

1. Na geometria elíptica, era necessário apenas um ponto para se traçar uma reta, exemplo, software Cinderella. E na geometria esférica, são necessários dois pontos, exemplo, bola de isopor.

2. Teremos infinitas alturas, pois ao fixar um dos pontos, os outros dois permaneceram ao equador, considerando esse ponto como o fuso. A medida de cada altura será 90° , pois fixando o fuso e a linha do equador, a medida de qualquer altura será $1/4$ da circunferência de raio maior
3. Plana
 - I) Soma dos A.I. do triângulo será 180° .
 - II) Podemos formar quadriláteros c/ 4 ângulos retos.
 - III) Uma reta é infinita e ilimitada.
 - IV) O quinto postulado de Euclides pode ser demonstrado
- Esférica.
 - I) Soma dos A.I. do triângulo será $180 < A.I. < 540^\circ$.
 - II) Não podemos formar quadriláteros c/ 4 ângulos retos, termos no máximo 3 ângulos retos.
 - III) Uma reta é infinita e limitada.
 - IV) O quinto postulado de Euclides não pode ser demonstrado.
4. Porque o *Cinderella*, ao rachurar um polígono, ele se atrapalha, e acaba pintando a área que define ângulos internos

Emer

1. Na Geometria Esférica apenas dois pontos definem uma reta, se eles não forem polares. Na Geometria Esférica a reta pelos dois pólos da esfera e esses pólos é que definem esses dois pontos. Na Geometria Elíptica apenas um ponto define uma reta, pois os pontos que definem os pólos são considerados os mesmos
2. Podem ser construídas infinitas retas. A altura também terá medida 90°
3.
 - Na geometria esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° e menor que 540°
 - Na geometria esférica podem existir, em um triângulo, dois ou três ângulos de medida 90°
 - Na geometria esférica o postulado de Euclides não é válido

- Na geometria esférica não há retas paralelas como na geometria plana

4. Devido a que, os pontos que definem os pólos são considerados os mesmos na geometria elíptica e na geometria plana não?

Ivo

1. Na geometria esférica: Dois pontos,
Na geometria elíptica: Apenas um ponto, ele tem um correspondente, que considerado o mesmo ponto (pólos)
2. Infinitas. A medida dessas alturas será igual a 90°
- 3.

Plana	Esférica
Existem paralelas. Existem polígonos que dependem de paralelismo. Uma reta é infinita e ilimitada. Três pontos definem um único triângulo. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°	Não existem paralelas. Não existem polígonos que dependem de paralelismo. Uma reta é infinita e limitada. Três pontos definem quatro triângulos. A soma dos ângulos internos de um triângulo varia entre maior que 180° e menor que 540°

4. Dúvidas sobre a trigonometria, polígonos e como calcular arcos (eu sei que isso é colegial, mas ficou dúvida) e áreas

Jota

1. Na geometria esférica os pontos polares definem infinitas retas. Já dois pontos não polares definem uma única reta. Na geometria elíptica dois pontos definem uma reta. Os pontos polares são considerados um único ponto definindo infinitas retas
2. Infinitas alturas. A medida da altura é de 90°
- 3.

Plana	Esférica
A reta é ilimitada e infinita	A soma dos ângulos de um triângulo é maior que 180° e menor que 540°
A soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180°	A reta é limitada
Existe quadrado	Não existe quadrado
Existem retas paralelas	Não existem retas paralelas
Existe paralelogramo	Não existem paralelogramos

4. Demonstração da área do triângulo

Juca

1. Na geometria esférica dois pontos distintos determinam uma única reta, chamada geodésica, que é o círculo máximo sobre a esfera. Na geometria elíptica basta um único ponto para determinar uma reta, uma vez que dado um ponto A, o antípoda deste ponto é o próprio A

2. Teremos infinitas alturas, pois fixadas um ponto, os demais serão equadores, logo sempre existirão alturas.

Traçada uma altura, teremos que $h = 90^\circ$, como mostra o desenho, pois, qualquer fuso que pegue, será 90° . A medida dessas alturas será igual a 90°

3.

Geometria Plana	Geometria Esférica
- Uma reta é infinita e não-limitada - Dado um ponto e uma reta, existe uma única reta paralela passando por este ponto - Dados três pontos, não-colineares, existe um único triângulo - Um triângulo ABC, possui os ângulos internos igual a 180°	- Uma reta é infinita, porém limitada - Não existem paralelas - Dados 3 pontos determinam 8 triângulos - Dado um triângulo, os ângulos são de $180^\circ < x < 540^\circ$

4. Algumas dúvidas sobre a trigonometria na esfera e sobre processos algébricos, para determinar distâncias e áreas, fora isso foi possível fixar bem os conceitos básicos

Mina

1. Na geometria esférica $\rightarrow$ pontos polares definem infinitas retas. Sendo que dois pontos não polares definem uma única reta
Na geometria elíptica $\rightarrow$ dois pontos definem uma única reta. Os pontos polares definem infinitas retas
2. Infinitas alturas. A medida da altura é de 90°

3.

Plana

- A reta é ilimitada e infinita
- Soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°
- Existe quadrado
- Existem retas paralelas
- Existe paralelogramo

Esférica

- A reta é limitada e infinita
- Soma dos ângulos internos de um triângulo varia de 180° a 540°
- Não existe quadrado
- Não existem retas paralelas
- Não existe paralelogramo

4. Demonstração da área do triângulo

A avaliação evidenciou as interpretações dos alunos, as escolhas e questionamentos feitos por eles, a capacidade de se comunicarem matematicamente, os conhecimentos

matemáticos utilizados, as descobertas de propriedades e as elaborações de conceitos matemáticos dos alunos.

No estudo das produções escritas, construções de figuras e nas participações orais dos alunos, durante o curso, pudemos verificar que a aquisição de conceitos e propriedades sobre a Geometria Esférica, assim como, reflexões sobre esta geometria comparada à Geometria Euclidiana e Elíptica ocorreu de forma satisfatória. De forma geral, observamos alguns pontos positivos no trabalho dos alunos como, atitude investigativa diante dos problemas propostos, afinidades na utilização do *software*, questionamentos e soluções interessantes para as atividades.

A maior dificuldade encontrada no desenvolvimento deste trabalho foi a conciliação do horário do curso com os alunos, principalmente, quando as aulas eram em véspera de prova de alguma disciplina obrigatória, o que ocasionava baixa frequência.

Pontos positivos e negativos do curso, apontado pelos alunos:

Sujeitos	Positivos	Negativos
Cacá	O curso foi legal, divertido e curioso.	Eu acho que ao invés de trazer atividades todos os dias de curso, formular uma apostilinha pois muita gente desistiu, pois não sabia onde ia chegar e com uma apostila pronta saberiam onde ia chegar e o que iriam aprender.
Crica	Colocar dúvidas para que, pela nossa própria curiosidade chegarmos numa resposta e depois trabalhar nisso.	Correria nas demonstrações. Sugestão: ter uma apostila para podermos acompanhar o curso e ter noção (do começo do curso) do que será aprendido. Trabalhar um pouco mais com a esfera de acrílico.
Dedé	O curso foi bastante esclarecedor, pois tratou do assunto de uma maneira clara e simples, ao mesmo tempo sendo bastante	Não apresentou pontos negativos

	abrangente. O curso foi muito bem elaborado, pois cada ponto, cada assunto foi tratado um por vez.	
Dida	Como eu disse no primeiro questionário, queria tentar ter uma boa base sobre geometria esférica, e agora ao final do curso, consegui alcançar essa base. Um dos pontos positivos do curso, foi o acesso aos computadores, o <i>software</i> ajudou muito nas visualizações das figuras. O professor conseguiu tirar todas minhas dúvidas de aula. E poder debater com os colegas as questões de aula foi de grande proveito.	Os pontos negativos foram as muitas horas de curso, acho que se houvessem umas 20 h, já daria para ter uma boa noção, e outro ponto crítico foi o horário, que muitas vezes eram véspera de prova.
Emer	Esse curso foi muito bom no sentido de nos dar a oportunidade de conhecer um assunto que não iremos ver no decorrer da graduação.	Talvez deveríamos ter um pouco mais de horas no curso, ou seja, que o curso fosse mais duradouro para que pudéssemos ir mais afundo na disciplina a qual é muito interessante. Mas, também a falta de tempo nos prejudica se formos pensar nisso!
Ivo	Apenas uma coisa já me satisfaz, eu “desabitolei” muitas coisas por exemplo se me perguntassem há um mês o que era uma reta eu responderia sem pensar, seria certo, mas eu não pensaria nas definições, hoje eu penso, por exemplo, o que é um polígono? É isso, aquilo..., agora eu penso, e isso me ajuda em muitas coisas, para eu não errar e de repente falar bobagens.	Horário, principalmente, e foi um pouco desestimulante, podemos perceber pelo número de desistências.

Jota	O curso foi bastante proveitoso, aprendemos coisas novas e interessantes, de maneira legal, que podemos agora comparar a geometria plana com uma geometria não-euclidiana, percebendo as características diferentes e iguais entre as duas. E podemos agora com essa base que tivemos aprofundarmos nessa geometria.	Sugestão: Esse curso poderia se tornar um curso na grade da matemática.
Juca	O curso, apresentou uma boa fundamentação nos conceitos básicos, (...) O uso do computador foi uma ferramenta interessante uma vez que auxiliou o apelo geométrico e visual, dos conceitos envolvidos.	(...) mas deixou a desejar em nível de cálculos. Acho que deveríamos ter seguido um livro-texto, assim não perderíamos o rumo.
Ledo	Não apresentou	Não apresentou
Mina	O curso foi bem ministrado, as aulas bem esclarecidas e conteúdo interessante, importante e novo (diferente das já propostas normalmente)	Pouco tempo, sendo um assunto abrangente e que necessitaria de uma maior apreciação deste.

De acordo com a avaliação escrita dos alunos, o curso proporcionou o estudo sobre Geometria Esférica de acordo com objetivos apresentados no início do curso. Relataram que a utilização do *software* de geometria foi interessante e colaborou na visualização de conceitos e propriedades geométricas. Outros pontos positivos mencionados referem-se à escolha do tema e as elaborações das atividades, que proporcionaram um esclarecimento e boa fundamentação sobre os conhecimentos básicos pertinentes à Geometria Esférica e reflexões sobre esta comparada à Geometria Plana. Os aspectos negativos citados estão relacionados ao horário das aulas e à duração do curso, sendo que, alguns acharam muito e outros alunos, pouco tempo. Dos três alunos que escreveram sobre o material escrito, dois gostariam de ter recebido tudo no início do curso e não a cada aula, como foi feito, e outro

adotaria um livro texto. Um aluno gostaria que tivesse mais atividades envolvendo cálculos e outros acharam pouco tempo para as atividades que envolviam demonstrações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Lembramos que nosso propósito de pesquisa foi identificar materiais manipuláveis e descrever o seu uso no ensino e aprendizagem de Geometria Esférica em um ambiente natural de sala de aula. A grande variedade de materiais que poderia ser utilizada neste contexto nos levou a selecionar alguns de tipos diferentes que, se não foram suficientes, pelo menos possibilitaram chamar a atenção para futuras pesquisas sobre o tema.

Os materiais selecionados foram esferas de isopor, esfera de Lénart para representar o plano esférico com modelos físicos, o *software Cinderella* como modelo virtual da superfície esférica, e caleidoscópios generalizados representando um modelo misto, composto por aspectos físicos e virtuais. Apesar de ser um bom material, a esfera de Lénart não corresponde à realidade financeira de muitas escolas de nosso país e, por isso, usamos só como exemplo mas não desenvolvemos atividades explorando este recurso. Os materiais destinados às construções de figuras geométricas nos modelos físicos do plano esférico foram alfinetes para representar pontos, fitilhos para representar linhas, tiras de acetato transparentes como régua esférica e compasso comum.

No estudo dos dados coletados no curso de extensão, percebemos que a utilização de esferas de isopor, alfinetes e fitilho para representações geométricas podem ser menos precisas do que no *Cinderella*, mas a manipulação através do tato, além da visão, mostrou ser um aspecto importante nas investigações e explorações dos alunos. Os modelos físicos mostraram ser mais adequados para atividades de percepção e concepção de objetos geométricos. O uso do *software* auxiliou a verificação de propriedades já conhecidas e a descoberta de outras. Um outro diferencial do *Cinderella* está na possibilidade de movimentar os objetos geométricos depois da sua construção.

Os caleidoscópios generalizados possibilitaram a visualização de duas tesselações esféricas utilizando padrões geométricos construídos. Além disso, contribuiu para um ambiente de estudo agradável e participativo. Estes materiais também podem ser usados para visualização de outras tesselações esféricas, porém, como já dissemos anteriormente, não foi possível explorar toda sua potencialidade em virtude do curto tempo para fazê-lo.

Em nosso estudo, observamos que os materiais manipuláveis não colaboraram de forma significativa com as atividades que envolviam demonstrações. Isso pode ser

percebido por alguns registros escritos na avaliação dos alunos e também pelo fato que somente Dedé atingiu o objetivo em um dos episódios (em anexo) que envolviam demonstrações.

De forma geral, observamos alguns pontos positivos no trabalho dos alunos como, atitude investigativa diante dos problemas propostos, afinidades na utilização do *software*, questionamentos e soluções interessantes para as atividades.

Em síntese, podemos concluir que este curso proporcionou momentos de experimentação, conjectura, partilha e discussão. No estudo das produções escritas dos alunos, pudemos verificar que a aquisição de conceitos e propriedades básicas sobre a Geometria Esférica, assim como reflexões sobre ela comparada à Geometria Euclidiana e Elíptica ocorreu de forma satisfatória, conforme eles mesmos se expressaram no registro das avaliações da turma:

“Como eu disse no primeiro questionário, queria tentar ter uma boa base sobre geometria esférica, e agora ao final do curso, consegui alcançar essa base”

“O curso foi bastante proveitoso, aprendemos coisas novas e interessantes, de maneira legal, que podemos agora comparar a geometria plana com uma geometria não-euclidiana, percebendo as características diferentes e iguais entre as duas. E podemos agora com essa base que tivemos aprofundarmos nessa geometria.”

“O curso, apresentou uma boa fundamentação nos conceitos básicos (...)”

“Esse curso foi muito bom no sentido de nos dar a oportunidade de conhecer um assunto que não iremos ver no decorrer da graduação.”

“(...) poder debater com os colegas as questões de aula foi de grande proveito”

“O curso foi bem ministrado, as aulas bem esclarecidas e conteúdo interessante, importante e novo (diferente das já propostas normalmente).”

De acordo com os resultados, acreditamos que esta pesquisa pode auxiliar na busca por propostas alternativas para o ensino de Geometria, possibilitando uma melhor experiência de aprendizagem do futuro professor, enquanto aluno de graduação. Além disso, a experiência proporcionada por esta investigação poderá ser aproveitada em outras, ampliando nossa capacidade de relacionar mais elementos a serem tratados, tanto por nós quanto pelos que poderão fazer uso do material. Portanto, investigar *o uso* de materiais manipuláveis por alunos, passou a ser nossa região de inquérito, ou seja, uma intersecção que considera *o uso*, algo a ser evidenciado enquanto necessidade que temos de determinar as idéias com as quais estabeleceremos relações que considerem aluno-material-produção matemática, em seus diferentes aspectos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALSPAUGH, C. A. Kaleidoscopic geometry. **Arithmetic Teacher**, Washington, n. 17, p. 116-117, 1970.
- BALL, W.W. R. and COXETER, H.S.M. Mathematical Recreations and Essays. New York: Dover, 1987.
- BARBOSA, R.M. Descobrindo padrões em mosaicos. São Paulo: Atual, 1993.
- BICUDO, I. O Primeiro Livro dos ELEMENTOS de Euclides – Vol I. Editora SBHMat: Rio Claro (SP), 2001.
- BORBA, M.C; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. Belo Horizonte : Editora Autêntica, 2001.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994. 336 p.
- CARMO, M. P. Geometrias Não-Euclidianas. In: Matemática Universitária, n. 6, dez., 1987, p. 25-48.
- COUTINHO, L. Convite às Geometrias Não-Euclidianas. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- D'AMBRÓSIO, U. Da Realidade à Ação: reflexões sobre educação e matemática. Campinas – SP: Editora Unicamp, 1986.
- GRAVINA, M. A; SANTAROSA, L. M. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados, In: IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.
- GERDES, P. & CHERINDA, M. Teoremas famosos da Geometria. Maputo: Instituto Superior Pedagógico, 1991.
- GOLDENBERG, M. A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, p. 79, 2000.
- KLEIN, Carlos Jeremias. Geometrias Não-Euclidianas: Breve histórico e algumas considerações filosóficas. In: Terra e Cultura. Ano 9, n. 19, 1994, p. 37-42.
- LÉNÁRT, I. Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: activities comparing planar and spherical geometry. Berkeley: Key Curriculum Press, 1996.
- LESTER, F. K. Trends and issues in mathematical problem solving research. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). Acquisition of mathematical concepts and process. New York: Academic Press, 1983.

LÉVY, P. As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática. São Paulo: editora 34, 1997.

MACHADO, N. J. Matemática e Realidade. São Paulo: Cortez, 1987.

MARTINS, R.A. Ensino-Aprendizagem de Geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais. Rio Claro, 2002. Mestrado - Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Universidade Estadual Paulista.

MURARI, C. Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios. Rio Claro, 1999. Doutorado - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista.

MURARI, C. **Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios.** 1999. 2 v. Tese (Doutorado em Educação Matemática) -Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

MURARI, C. A tesselação (5,6,6) – a bola de futebol – visualizada em caleidoscópio generalizado. Recife: SBEM, CD – Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, GT – 03, CC., 2004.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. Revista da Educação Matemática – ano 9 - 10, 2004 – 2005, p. 1 – 6.

OLIVEIRA, S. S. Temas Regionais em Atividades de Geometria: uma proposta na formação continuada de professores de Manaus (AM). Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

ONUCHIC, L. L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

PAIS, L. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. Campinas (SP): Zetetiké, 1996.

PATAKI, I. Geometria esférica para formação de professores: uma proposta interdisciplinar. 2003. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PETIT, J.P. As Aventuras de Anselmo Curioso: os mistérios da Geometria. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1982.

PONTE, J. P; BROCARD, J; OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas em Sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P; MATOS, J. F. Processos Cognitivos e Interacções Sociais nas Investigações Matemáticas. Tradução do artigo extraído do livro *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice*, editado por J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes, publicado pela primeira vez em 1992 por Springer - Verlag (p. 239-254).

SOUZA, Márcia Cristina Garrido. O 5º Postulado de Euclides: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico. Rio de Janeiro, 1998. Dissertação (Mestrado) - UFRJ/IM.

SOUZA, J. C. M. (Malba Tahan). Matemática Divertida e Curiosa. Rio de Janeiro: Editora Record, 1998.

ZULATTO, R. B. A. Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas. Rio Claro, 2002. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista-UNESP.

ANEXOS

Questionário do estudo piloto

- 1) Você cursou o Ensino Fundamental em escola pública ou privada?
- 2) Você cursou o Ensino Médio em escola pública ou privada?
- 3) Quais as razões que te fez escolher o curso de matemática nesta instituição?
- 4) Porquê você decidiu participar deste curso de geometria esférica e elíptica? Quais são suas expectativas em relação a este curso?
- 5) Fez opção por Licenciatura ou Bacharelado?
- 6) Quais são suas impressões no estudo de geometria nesta instituição?
- 7) Quais são os objetos de estudo da geometria?
- 8) Como você define superfície esférica e esfera?
- 9) O quê você sabe sobre a geometria não-euclidiana?
- 10) Conhece algum *software* de geometria dinâmica? Qual foi seu contato com o *software*?
- 11) O quê você afirmaria sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo?

Atividades do estudo piloto

- 1) Como dois barcos poderiam navegar de modo que mantenham sempre a mesma distância um do outro? Explique e represente as suas trajetórias da melhor maneira possível.
- 2) O que é uma linha reta?
- 3) Você poderia desenhar uma linha reta sobre a esfera? Explique.
- 4) Em uma folha de papel, represente dois pontos distintos e descreva o menor caminho entre eles. Na esfera de isopor, represente dois pontos distintos usando alfinetes e utilize barbante para descrever o menor caminho entre eles. A superfície da esfera de isopor representará um plano esférico.
Compare nos dois casos como você pode calcular a menor distância entre os dois pontos.
No plano:
Na esfera:
- 5) O primeiro postulado de Euclides diz: “Dois pontos determinam uma reta” ou de outra maneira “fique postulado traçar uma linha reta a partir de todo ponto até todo ponto”

O quê você poderia afirmar deste postulado, considerando o plano esférico. Escreva suas conjecturas.

6) Prolongando a linha que representa a menor distância entre dois pontos no plano e fazer o mesmo no plano esférico. Que conclusões você observou?

No plano:

Na esfera:

7) Como você definiria pontos polares na esfera?

Como você construiria a linha do equador e os dois pontos polares?

Como você mediria a distância entre o par de pontos polares em qualquer esfera?

Qual é a distância entre um ponto polar e a linha do equador em uma esfera qualquer?

Quantas geodésicas podem ser traçadas passando por um par de pontos polares? Explique.

8) Como pode ser construída uma régua para traçar retas no plano esférico?

Qual graduação seria mais adequada? Porquê?

Poderia definir ângulo de outra maneira? Como?

Como você construiria ângulos?

No plano:

Na esfera:

Qual poderia ser a forma de um transferidor para medir ângulos esféricos?

Como se usaria o transferidor esférico para medir ângulos?

9) O quinto postulado de Euclides, também chamado de postulados das paralelas. Modernamente, é apresentado com as seguintes palavras:

Por um ponto P exterior a uma reta s , consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta s .

Como fica este postulado considerando a geometria esférica?

Nas próximas atividades, use o *Cinderella* na geometria elíptica com vista esférica quando pedir construções na esfera.

10) Quais regiões você pode criar usando três geodésicas distintas? Compare as possibilidades:

No plano: _____ _____ _____ _____ _____	Na esfera: _____ _____ _____ _____ _____
---	--

11) Quantas regiões distintas e limitadas podem ser criadas usando três linhas distintas? Compare as regiões nos casos:

No plano: _____ _____ _____	Na esfera: _____ _____ _____
-----------------------------------	------------------------------------

12) Preencha as tabelas a seguir com o número máximo de distintas regiões limitadas são criadas com o número de linhas traçadas no plano e na esfera.

Plano

Número de retas	1	2	3	4	5	6	n
Número máximo de regiões							

Esfera

Número de grandes círculos	1	2	3	4	5	6	n
Número máximo de regiões							

Ano Base – 2004
 Campus de Rio Claro
 Unidade – Instituto de Geociências e Ciências Exatas
 Departamento de Matemática
 Grande Área – Ciências Exatas
 Linha programática 1 – Ensino de Geometria
 Linha programática 2 – Formação Inicial
 Área temática 1 – Geometria Esférica
 Área temática 2 – Geometria
 Caracterização – Curso
 Modalidade do curso – Presencial
 Tipo do curso – Extensão
 Título do curso – Geometria Esférica

Palavras-chave – Geometria, Geometria Esférica, Ensino e Formação Inicial.

Docente responsável – Prof. Dr. Claudemir Murari

Pesquisadora – Joana D’Arc da Silva Reis

Os docentes envolvidos terão algum tipo de remuneração – NÃO

Número total de vagas – 20

Número de vagas gratuitas – 20

Local da inscrição – Secretaria do Departamento de Matemática

Período de inscrição –

Local da realização – Laboratório de Informática do curso de Graduação em Matemática da UNESP, campus de Rio Claro

Período de realização –

Carga horária total – 32 horas

Objetivo(s) do curso - O curso tem por objetivo o ensino de Geometria Esférica, além de proporcionar reflexões sobre este conteúdo matemático ainda pouco estudado, contribuindo com a formação inicial de futuros matemáticos e professores de matemática.

Justificativa - O curso visa oferecer o aprendizado inicial de Geometria Esférica através de atividades investigativas, assim como a conexão deste conteúdo com outras áreas da matemática, da geografia e da física. Outra questão relevante, é que o estudo de uma geometria que difere da Euclidiana, pode contribuir para visão mais ampla sobre geometria.

Conteúdo programático – Concepções básicas de Geometria Elíptica

Triângulos esféricos

Polígonos

Trigonometria esférica

Propriedades do círculo

Área de círculos e triângulos esféricos

Geometria aplicada a Geografia Terrestre

Tesselações esféricas

Reflexões sobre a esfera

Beneficiários / clientela – Graduandos do curso de Matemática da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro

Condição para inscrição – Alunos a partir do segundo ano
Curso de Extensão

de graduação

Executores – Prof. Dr. Claudemir Murari – 32 horas – IGCE – UNESP – Departamento de
Matemática – Rio Claro/ SP

Recursos materiais – Computadores do Laboratório de Informática da Graduação em
Matemática, papel, cópias, esferas de isopor e caleidoscópios.

Informações complementares - Este Curso é mais uma iniciativa na área de Educação Matemática. Oferecido pelo professor Claudemir Murari do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, SP em colaboração com a pesquisadora Joana D’Arc da Silva Reis, aluna de mestrado em Educação Matemática do mesmo programa de pós-graduação.

Resultados previstos – O curso visa oferecer aos alunos participantes uma aprendizagem de conceitos e propriedades básicas da Geometria Esférica, assim como reflexões sobre esta geometria comparada a Geometria Euclidiana.

Questionário inicial do curso

8. Você cursou o Ensino Fundamental em escola pública ou privada?
9. Você cursou o Ensino Médio em escola pública ou privada?
10. Porquê você decidiu participar deste curso de Geometria Esférica? Quais são suas expectativas em relação a este curso?
11. Fez opção por Licenciatura ou Bacharelado?
12. Quais são os objetos de estudo da Geometria?
13. Como você define superfície esférica e esfera?
14. O quê você sabe sobre as geometrias Não-Euclidianas
15. Conhece algum *software* de geometria dinâmica? Qual foi seu contacto com ele?
16. O quê você afirmaria sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo?

Tabela referente à pergunta 1 e 2 do questionário:

Sujeitos	Ensino Fundamental	Ensino Médio
Cacá	Pública	Pública
Crica	Pública	Pública
Dedé	Pública	Pública
Dida	Pública	Pública
Emer	Pública	Pública
Ivo	Pública	Pública
Jota	Privada	Ambas
Juca	Pública	Privada
Ledo	Privada	Privada
Mina	Pública	Pública

Sujeitos	Motivos
Cacá	Curiosidade e conteúdo extracurricular
Crica	Interesse em aprender
Dedé	Curiosidade
Dida	Interesse em aprender
Emer	Curiosidade
Ivo	Curiosidade
Jota	Curiosidade e conteúdo extracurricular
Juca	Interesse e conteúdo extracurricular
Ledo	Interesse em aprender
Mina	Curiosidade

Tabela referente a pergunta 4 do questionário

Sujeitos	Licenciatura e/ou Bacharelado
Cacá	Licenciatura
Crica	Licenciatura
Dedé	Licenciatura
Dida	Ambos
Emer	Licenciatura
Ivo	Licenciatura
Jota	Licenciatura
Juca	Ambos
Ledo	Licenciatura
Mina	Licenciatura

Tabela referente a pergunta 5.

Sujeitos	Objetos de estudo da Geometria
Cacá	“O ponto, a reta, o plano e o espaço”
Crica	“Ponto, reta, plano, espaço”
Dedé	“Ponto, reta, plano, espaço...”
Dida	“Pontos, retas, planos e espaço”
Emer	“Lápis, régua, compasso, borracha, papel e a imaginação. Postulados e teoremas também fazem parte!”
Ivo	“Ponto, reta, plano e o espaço”
Jota	“Plano, ponto, reta, espaço, etc...”
Juca	“...propriedades e relações de entes geométricos (pontos, retas, plano, etc.)”
Ledo	“Lápis, régua, borracha, compasso, papel e a inteligência. Postulados e teoremas”
Mina	“Ponto, reta, plano”

Atividades do curso:

1) Como dois barcos poderiam navegar por um longo percurso, mantendo sempre a mesma distância um do outro? Explique e represente as suas trajetórias da melhor maneira possível.

2) O que é uma linha reta?

3) Você poderia desenhar uma linha reta sobre a esfera? Explique.

4) Em uma folha de papel, represente dois pontos distintos e descreva o menor caminho entre eles. Na esfera de isopor, represente dois pontos distintos usando alfinetes e utilize barbante para descrever o menor caminho entre eles. A superfície da esfera de isopor representará um plano esférico. Compare nos dois casos como você pode calcular a menor distância entre os dois pontos.

No plano:

Na esfera:

5) O primeiro postulando de Euclides diz: “Dois pontos determinam uma reta” ou de outra maneira “fique postulando traçar uma linha reta a partir de todo ponto até todo ponto”

O quê você poderia afirmar deste postulando, considerando o plano esférico. Escreva suas conjecturas.

6) Prolongando a linha que representa a menor distância entre dois pontos no plano e fazer o mesmo no plano esférico. Que conclusões você observou?

No plano:

Na esfera:

7) Como você definiria pontos polares na esfera?

Como você construiria a linha do equador e os dois pontos polares?

Como você mediria a distância entre o par de pontos polares em qualquer esfera?

Qual é a distância entre um ponto polar e a linha do equador em uma esfera qualquer?

Quantas geodésicas podem ser traçadas passando por um par de pontos polares? Explique.

8) Como pode ser construída uma régua para traçar retas no plano esférico?

Qual graduação seria mais adequada? Porquê?

Poderia definir ângulo de outra maneira? Como?

Como você construiria ângulos?

No plano:

Na esfera:

Qual poderia ser a forma de um transferidor para medir ângulos esféricos?

Como se usaria o transferidor esférico para medir ângulos?

9) Como você poderia construir retas paralelas?

O quinto postulado de Euclides, também chamado de postulados das paralelas. Modernamente, é apresentado com as seguintes palavras:

Por um ponto P exterior a uma reta s , consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta s .

Como fica este postulado considerando a geometria esférica?

Nas próximas atividades, use o *Cinderella* na geometria elíptica com vista esférica quando pedir construções na esfera.

10) Quais regiões você pode criar usando três geodésicas distintas? Compare as possibilidades:

No plano: _____ _____ _____ _____ _____	Na esfera: _____ _____ _____ _____ _____
---	--

11) Quantas regiões distintas e limitadas podem ser criadas usando três linhas distintas? Compare as regiões nos casos:

No plano: _____ _____ _____	Na esfera: _____ _____ _____
-----------------------------------	------------------------------------

12) Preencha as tabelas a seguir com o número máximo de distintas regiões limitadas são criadas com o número de linhas traçadas no plano e na esfera.

Plano

Número de retas	1	2	3	4	5	6	n
Número máximo de regiões							

Esfera

Número de grandes círculos	1	2	3	4	5	6	n
Número máximo de regiões							

13) “Sejam A , B e C três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes a um mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos geodésicos todos menores que 180° , que unem esses pontos dois a dois chama-se triângulo esférico”. Marque três pontos distintos sobre a esfera e ligue os pontos dois a dois usando o “modos” linha por dois pontos, construindo um triângulo esférico. No “modos” medir, encontre as medidas dos ângulos internos do triângulo. Qual a soma dos ângulos internos do seu triângulo? _____. Compare com os resultados de seus colegas.

Qual a diferença da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico em relação ao triângulo plano?

14) Como medir os ângulos internos de um triângulo esférico utilizando o transferidor esférico?

15) Existe triângulo com dois ângulos retos? E três ângulos retos? Explique.

16) Um triângulo inscrito num semicírculo, é quando um de seus lados é diâmetro do círculo e todos os vértices do triângulo estão sobre a sua semi-circunferência.

Que propriedades relativas aos ângulos de um triângulo inscrito em um semicírculo podem ser verificadas no plano? E no plano esférico?

17) Construa um triângulo trirretângulo, também chamado de octante e inscreva um triângulo esférico no octante do seguinte modo:

1- Insira um ponto no octante de forma que não pertença a nenhum de seus lados, isto é, um ponto interno ao octante.

2- construa três “retas” ligando o ponto interno aos três vértices deste octante.

3- Marque os três pontos de intersecção destas “retas” com os lados do octante.

4- construa o triângulo inscrito ao octante ligando dois a dois, os três pontos de intersecção feitos anteriormente.

Encontre as medidas de todos os ângulos formados nos vértices do triângulo inscrito.

Que propriedade você observou? Prove sua conjectura.

18) Na geometria esférica, é possível construir um quadrado? Explique.

19) Construa um quadrilátero esférico com todos os lados congruentes. Encontre as medidas dos seus ângulos. Escreva suas conclusões.

20) O que você afirmaria sobre a soma dos ângulos internos de um hexágono regular na geometria esférica?

21) Existe polígono com dois lados?

Construa duas retas distintas na geometria esférica. Escreva suas conclusões.

- 22) Que propriedades garantem a semelhança de triângulos planos?
- 23) Existem triângulos esféricos semelhantes? Escreva suas conclusões.
- 24) Que condições garantem a congruência de triângulos planos?
- 25) Que condições garantem a congruência de triângulos esféricos? Explique suas afirmações.
- 26) O que poderia dizer do raio de uma circunferência na geometria esférica?
- 27) Como pode ser chamado um círculo da geometria esférica visto sob a óptica da esfera na geometria euclidiana?
- 28) O comprimento C de uma circunferência na geometria esférica pode ser medido pela fórmula $C = 2\pi R$, onde R é o raio da circunferência? Explique.
- 29) A área A de um círculo na geometria esférica pode ser medido pela fórmula $A = \pi R^2$, onde R é o raio do círculo? Explique.
- 30) Construa várias circunferências concêntricas no plano euclidiano e faça o mesmo no plano esférico. Que diferenças na “família” das circunferências concêntricas na geometria esférica em relação à geometria plana vocês observaram?

PLANIFICAÇÕES E REPRESENTAÇÕES POR PAVIMENTAÇÃO
PARCIAIS PLANAS DOS 13 POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

