Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT–T.004/04

Métodos Covariantes em Teoria de Supercordas

Brenno Carlini Vallilo

Orientador

Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits

Julho de 2004

Agradecimentos

Antes de mais nada agradeço à minha família; minha mãe, meu pai e minha irmã por todo apoio durante minha vida.

Agradeço à Ana Paula pelos anos que em estamos juntos e por ter me aturado durante este tempo.

Não posso deixar de mencionar OsProfeta. Agradeço-os pela amizade e pelas inumeráveis horas que passamos discutindo Física e a natureza humana no All Black e no O'Malleys. Em especial, agradeço ao Luciano pelas discuções sobre Teoria de Cordas, nas quais mais aprendi do que ensinei.

Agradeço aos amigos do IFT; Cristina, Gadelha, Alexandre, Cabelo, Dáfni, Osvaldo, Daniel, Doff, Calçada, Tadeu, Liette, Jorge, Vladimir, Willian, Ricardo, João, Cristiane, Victo, Teófilo, Oscar, Carlos, LC, Lucio e todos que esqueci de mencionar. Em especial, agradeço ao Cabelo e ao Gadelha por compartilharem comigo seus conhecimentos em Física.

Agradeço aos amigos da USP, Fábio, Roberto e David.

Agradeço ao Prof. George Matsas pelas aulas e ótimas discussões sobre Física.

Agradeço à FAPESP pelo inestimável apoio financeiro.

Por último e mais importante, agradeço ao Nathan por todos os anos de orientação, pela paciência (nem sempre merecida); sem ele este trabalho não existiria.

Resumo

Nesta tese aplicações dos novos métodos de quantização covariante da supercorda serão discutidos. O formalismo híbrido é construido a partir do formalismo RNS mantendo algumas das supersimetrias manifestas. Aqui vamos apresentar o desenvolvimento para o caso de compactificações para duas dimensões. As aplicações são discutidas ao longo do texto. O segundo formalismo apresentado é uma generalização do formalismo GS, onde um conjunto apropriado de fantasmas é introduzido, possibilitando a quantização covariante com todas as supersimetrias manifestas. Como aplicação deste formalismo, vamos mostrar como ele pode ser usado para quantizar a supercorda no espaço $AdS_5 \times S^5$. Este resultado pode ser útil para estudar efeitos quânticos na conjectura AdS/CFT.

Palavras Chaves: Supersimetria; Supercordas; CFT; Quantização Covariante

Áreas do conhecimento: Física de Partículas e Campos; Física Matemática

Abstract

In this thesis we discuss applications of new covariant quantization methods for the Superstring. The hybrid formalism is constructed from the RNS keeping some of its supersymmetries manifest. We will present here the case of compactification to two dimensions. We discuss applications throughout the text. The second formalism is a generalization of the GS, introducing a suitable set of ghosts making covariant quantization with all the supersymmetries possible. As an application of this formalism we will quantize the superstring in an $AdS_5 \times S^5$ background. This result might be useful to study quantum effects in AdS/CFT conjecture.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Nil posse creari de nihilo

Lucrécio

O Modelo Padrão é um dos grandes sucessos da Física teórica no século passado. O fundamento de sua construção foi a Eletrodinâmica Quântica. A QED é a teoria mais bem testada de toda a Física, com uma impressionante correspondência entre teoria e experimento. O único ponto ainda a ser testado do Modelo Padrão é a existência do Higgs. Esta partícula ainda não foi detectada em experimentos, logo sua massa também não foi determinada. Tirando este ponto, o Modelo Padrão de interações fundamentais passou por todos os testes realizados e é considerado o modelo correto para a descrição da Física na escala de energia em que ele se aplica.

Apesar de todo o sucesso o modelo foi construído empiricamente. Nenhum princípio fundamental foi usado para determinar, por exemplo, o número de famílias ou a massa do elétron. Estes dados foram adicionados em base experimental, não possuímos uma *explicação* para estes fatos. Alem disso existe ainda o problema da hierarquia, onde um ajuste fino da massa não renormalizada do Higgs deve ser feito para obter a massa física correta, que gera as massas dos bósons W e Z. Este é um problema de campos escalares em geral e, até hoje, não foi resolvido dentro do MP. Todos estes pontos levam os físicos teóricos à extensões do MP para resolver estes problemas.

Uma parte importante do MP que merece ser mencionada separadamente é a Cromodinâmica Quântica. Ela descreve as interações entre quarks e gluons. Apesar desta descrição apresentar com sucesso diversos resultados, ainda não foi possível entender todos os seus aspectos teóricos. O confinamento de quarks e gluons, apesar de ser um fato experimental verificado, ainda não foi provado teoricamente. Em baixas energias a constante de acoplamento se torna forte e não é possível usar teoria de perturbação. Simulações da QCD na rede conseguem estudar este regime. No entanto, ainda é necessária uma melhor compreensão teórica do confinamento. Talvez uma nova linguagem seja mais apropriada para descrever este fenômeno.

Além destes pontos, um ingrediente falta ao MP: a gravitação. Também considerada uma interação fundamental, a gravitação até hoje não pode ser incorporada ao MP, ficando apenas com o papel de coadjuvante. Isto não torna o MP inconsistente, já que a gravitação é extremamente fraca comparada com todas as outras forças e seus efeitos podem ser desprezados. A dificuldade em incorporar a interação gravitacional à Teoria Quântica de Campos reside na natureza de sua descrição. Classicamente o *campo* gravitacional é a métrica do espaço-tempo e não apenas um campo definido sobre o mesmo, como no caso do eletromagnetismo por exemplo. O próprio espaço-tempo é o responsável pela força gravitacional entre duas partículas. Neste ponto está a clara distinção entre todas as outras forças e a gravitação. Em resumo, aqui está a origem dos problemas técnicos (não renormalizabilidade) e conceituais (espaço-tempo quantizado) que impediram até hoje a existência de uma teoria quântica da gravitação. Provavelmente a resolução de um destes problemas automaticamente resolveria o outro.

A Teoria de Cordas nasceu na décade de 60 com o nome de Modelo de Ressonância Dual como uma tentativa de descrever as diversas ressonâncias hadrônicas encontradas nos aceleradores da época. Ela tentava prever as trajetórias de Regge, que relacionam o spin com a massa. No entanto, a presença do táquion e de um campo de spin 2 sem massa e a descoberta da QCD levaram muitos físicos a abandonarem este modelo. Apesar disso, alguns poucos pesquisadores continuaram a estudá-la.

A teoria de cordas ganhou novo fôlego quando a possibilidade de interpretar o estado de spin 2 sem massa como sendo o gráviton foi descoberta. Neste ponto a teoria de cordas deixou de ser uma teoria para as interações fortes e passou a ser considerada como um possível modelo para descrever todas as interações. Ao longo de 30 anos diversos ingredientes, já presentes na teoria, foram estudados com mais profundidade. Por exemplo, já se sabia que a teoria só era consistente em 10 dimensões. Para descrever a física na nossa escala de energia precisamos encontrar uma maneira de explicar a ausência das seis dimensões extra. Isto ressuscitou a antiga idéia de Kaluza-Klein. As seis dimensões extra estariam compactificadas. Esta compactificação ainda poderia explicar o grupo de simetria das interações de gauge. Por último, foi descoberto que teorias de cordas contendo férmions quirais são livres de anomalias. No final da década de 80 existiam 5 teorias de cordas consistentes: Tipo I, Tipo IIA, IIB, Heterótica $SO(32)$ e $E_8 \times E_8$.

Isto perdurou até 1995, quando a descoberta das D-branas como estados carregados dos campos Ramond-Ramond possibilitou que uma série de dualidades entres as cinco teorias e suas compactificações fosse estabelecida. O último ingrediente foi a incorporação de uma nova teoria quântica em onze dimensões, a chamada Teoria M, que seria o limite de acoplamento forte da supercorda Tipo IIA. Estas dualidades não foram provadas, no entanto diversas verificações foram feitas. A maioria destas verificações só foi possível graças à supersimetria.

De uma maneira totalmente inesperada, no final de 1997 a teoria de cordas voltou a ser considerada como uma possível descrição das interações fortes. Em um importante trabalho, Juan Maldacena mostrou que em um certo limite a teoria de cordas tipo IIB em um espaço $AdS_5 \times S^5$ é descrita completamente por uma teoria de campos usual, a teoria de super Yang-Mills em quatro dimensões com dezesseis supercargas. Esta teoria de campos é quanticamente conforme, portanto não descreve confinamento. No entanto, outros modelos mais complexos foram descobertos, relacionando a teoria de cordas tipo IIB com teorias menos supersimétricas, possibilitando a descrição do fenômeno do confinamento de uma maneira totalmente nova. Infelizmente, todos estes modelos só foram estudados no limite de baixas energias, onde podemos substituir a teoria de cordas completa pela supergravidade. Isto se deve à dificuldade em se quantizar a teoria nos espaços AdS.

A supersimetria e os campos Ramond-Ramond são as peças centrais em todos estes desenvolvimentos. Por estes motivos, um método de quantização da supercorda que pudesse incluir manifestamente os efeitos destes dois ingredientes seria muito importante para estudar estes novos desenvolvimentos da teoria. Os dois formalismos mais usados na teoria de supercordas são o RNS e o GS. O primeiro pode ser quantizado mantendo a covariância de Lorentz, mas os efeitos de supersimetria (que inclui os efeitos dos campos Ramond-Ramond) são muito difíceis de serem estudados. Já o formalismo GS possui supersimetria manifesta no espaço tempo, mas não pode ser quantizado covariantemente (devido a complicada estrutura de vínculos na ação); isto reduz tremendamente sua utilidade.

Há cerca de dez anos, o Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits vem desenvolvendo novos formalismos da supercorda que podem ser quantizados covariantemente e com supersimetria manifesta. Em 1994 foi introduzido o formalismo híbrido que, em resumo, é uma redefinição das variáveis fundamentais do formalismo RNS. O formalismo híbrido é apropriado para o estudo de compactificações da supercorda. O mais recente, chamado de Formalismo de Espinores Puros, é uma modificação do formalismo GS em dez dimensões, onde um conjunto apropriado de fantasmas é introduzido, possibilitando a quantização via método BRST. Aplicações destes novos formalismos são os assuntos abordados nesta tese.

Durante este doutorado foram feitos vários trabalhos aplicando os novos métodos covariantes de quantização para problemas de interesse atual em Teoria de supercordas, como a quantização da supercorda tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$. Os seguintes trabalhos foram publicados [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Nesta tese serão discutidos apenas três destes trabalhos. No segundo capítulo farei uma introdução da notação e formalismos utilizados no restante do trabalho. Em seguida será discutida a utilização do formalismo híbrido no caso de compactificação da corda RNS para duas dimensões de espaço-tempo. No quarto capítulo vou introduzir o formalismo de espinores puros, como uma generalização do formalismo GS que pode ser quantizado covariantemente. No capítulo cinco falarei sobre a aplicação do formalismo de espinores puros para a quantização da supercorda no espaço $AdS_5 \times S^5$, que é de importancia para o estudo quântico da conjectura AdS/CFT. Ao fim, concluirei o trabalho citando diversas aplicações futuras e trabalhos que já estão em andamento.

Capítulo 2

CFT, Supersimetria e Formalismos da Supercorda

Satius est supervacua scire quam nihil

Sêneca

Neste capítulo uma introdução geral aos requisitos básicos para o entendimento do trabalho descrito nesta tese será dada. Primeiramente vou discutir a Teoria Conforme de Campos (CFT) em duas dimensões. CFT em $d = 2$ é um dos elementos básicos na construção da teoria de cordas. A ação que descreve a dinâmica de uma corda em movimento no espaço-tempo é proporcional a sua área, logo, uma teoria de campos em duas dimensões. Na formulação de Polyakov, onde uma métrica sobre a folha mundo é introduzida, a invariância conforme é necessária para eliminar os graus de liberdade a mais que são introduzidos pela métrica. A exposição não será detalhada nem didática, apresentando apenas conceitos e resultados que serão usados mais tarde. Na seção sobre supersimetria vou introduzir a notação adotada para cada dimensão do espaço-tempo relevante. Por último, farei uma curta introdução aos dois formalismos usuais da supercorda, discutindo suas principais vantagens e desvantagens.

Sendo apenas uma revisão, este capítulo não terá referências para cada resultado apresentado. Derivações e explicações mais detalhadas podem ser encontradas nas seguintes referências básicas [7, 8, 9, 10, 11]. A referência [12] é uma ótima introdução a teorias supersimétricas em d=4, com uma ênfase no papel da simetria de escala e as consequências de sua quebra. As referências fundamentais para Teoria de Cordas e entendimento desta tese são [13, 14, 15, 16].

2.1 CFT

2.1.1 O Grupo Conforme em d Dimensões

No espaço-tempo plano o grupo de simetrias é o grupo de Poincaré. Seus geradores são o momento P_a, onde $a = 0...d-1$ e o momento angular M_{ab} (antisimétrico em ab). Para cada teoria formulada no espaço de Minkowski, estes geradores podem ser contruidos a partir de integrais restritas a seção espacial de correntes conservadas. Em muitos casos, este é o grupo máximo de simetrias que uma teoria pode ter. Classicamente, se uma Lagrangiana não possui parâmetros dimensionais, como por exemplo massas e constantes de acoplamento dimensionais, existe uma simetria a mais, a simetria de escala. Esta transformação age no espaço tempo como $x^a \to \lambda x^a$, onde λ é constante. Mais especificamente, se temos um campo ϕ_A no espaço-tempo, onde A representa qualquer índice interno ou externo, ele se transforma da seguinte forma:

$$\phi_A(x) \to (\lambda)^h \phi_A(\lambda x), \tag{2.1}$$

onde h é chamado o *peso* do campo ϕ_A. Note que a transformação não afeta o índice A. Para qualquer ação podemos usar o método de Noether para calcular a corrente conservada associada a essa transformaçãoe a respectiva carga. Vamos chamar essa carga por D. Infinitesimalmente temos

$$[D, \phi_A] = h\phi_A. \tag{2.2}$$

A pergunta óbvia a se fazer é se esta nova carga comuta com as anteriores. A resposta é negativa. Calculando o comutador com o momento, vemos que ele não se anula

$$[D, P_a] = P_a. \tag{2.3}$$

Além disso, um novo gerador é introduzido, K_a. Sua respectiva transformação é chamada de transformação conforme especial. Sendo K_a um vetor no espaço tempo, seu comutador com M_{ab} é o usual. Basta apenas determinar o comutador de K_a com P_a e K_a com D. Isso pode ser feito usando a identidade de Jacobi, e o resultado é

$$[K_a, P_b] = M_{ab}, \quad [D, K_a] = -K_a, \tag{2.4}$$

O grupo gerado por todas as cargas juntas é chamado de Grupo Conforme. Devo mencionar que efeitos quânticos geralmente quebram estas simetrias adicionais. O exemplo mais famoso é o de teorias de *gauge*. Mesmo não possuindo massas e acoplamentos dimensionais, efeitos de *loops* fazem com que D não seja mais uma carga conservada; portanto, uma escala de massa é gerada.

Para completar esta discução vale lembrar uma útil interpretação da invariância conforme. Pode ser mostrado que as transformações conformes preservam a métrica de Minkowski a menos de um fator de escala, explicitamente

$$\eta_{ab} \to \Omega(x)\eta_{ab}, \tag{2.5}$$

onde Ω é positivo. Escrita desta maneira, vemos que uma transformação conforme preserva o cone de luz em cada ponto do espaço tempo. Se uma teoria possui apenas partículas sem massa, a invariância do cone de luz é toda simetria necessária para a teoria ser consistente.

Parametrizando uma tranformação local por $\epsilon_a(x)$, onde $\delta x^a = \epsilon^a(x)$, a métrica se transforma como

$$\delta\eta_{ab} = \partial_a\epsilon_b + \partial_b\epsilon_a, \tag{2.6}$$

Impondo invariância conforme infinitesimal em 2.6

$$\partial_a\epsilon_b + \partial_b\epsilon_a = \eta_{ab}\omega(x), \tag{2.7}$$

onde $\omega(x) = \frac{d}{2}\partial_a\epsilon^a$. Pode ser mostrado que para $d > 2$ as soluções desta equação correspondem exatamente as transformações geradas pelo grupo conforme descrito acima.

2.1.2 $d = 2$

Até o momento discutiu-se o caso geral de um espaço-tempo com d dimensões. O grupo conforme é muito mais rico se $d = 2$. Neste caso especial o grupo conforme possui infinitos geradores. Tendo um numero infinito de cargas conservadas, podemos prever que qualquer teoria conforme em duas dimensões terá sua dinâmica bastante restrita, mas ao mesmo tempo muito interessante.

No caso $d = 2$ a equação 2.7 fica, utilizando coordenadas do cone de luz $x^+ = x^0 + x^1$ e $x^- = x^0 - x^1$

$$\partial_+ \epsilon^- = 0, \quad \partial_- \epsilon^+ = 0, \quad \partial_+ \epsilon^+ + \partial_- \epsilon^- = \omega. \tag{2.8}$$

A solução geral para estas equações é $\epsilon^+ = \epsilon^+(x^+)$ e $\epsilon^- = \epsilon^-(x^-)$. Neste ponto o plano complexo é introduzido, e será usado largamente nesta tese. Fazendo uma rotação de Wick e ao mesmo tempo uma transformação de coordenadas, vamos utilizar

$$z = e^{x^0 + ix^1} \quad \overline{z} = e^{x^0 - ix^1}, \tag{2.9}$$

nestas coordenadas vemos que o infinito passado é a origem do plano complexo e o infinito futuro é o conjunto de pontos a distância infinita da origem. Vemos também que a coordenada espacial é periodica. Introduzindo fronteiras (a mais comum é a linha $z = \overline{z}$) e transformações conformes outros casos podem ser obtidos.

Agora fica muito claro que as transformações conformes em $d = 2$ são geradas pelo conjunto de funções analíticas

$$\delta z = f(z) \quad \delta\overline{z} = \overline{f}(\overline{z}) \tag{2.10}$$

Nas próximas seções as consequências desta simetria serão estudas.

2.1.3 Funções de Correlação

Os objetos fundamentais em CFT são as *funções de correlação* entre os diversos campos presentes na teoria em questão . Isto a princípio parece um pouco estranho, já que o ponto de partida da teoria de campos usual é a definição da ação . A razão para isto é que existem muitos casos de CFT que não possuem uma descrição lagrangiana simples. *

Considere uma CFT que possui um conjunto de campos $\{\Phi_i\}$. Os elementos deste conjunto são os campos primários da CFT; cada campo Φ_i se transforma da seguinte forma

$$\Phi_i(z,\overline{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{h_i} \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}\right)^{\overline{h}_i} \Phi_i(w(z), \overline{z}(\overline{w})), \tag{2.11}$$

onde $(h_i, \overline{h}_i)$ é chamado de peso conforme do campo Φ_i. Note que esta definição é a generalização da equação 2.1. Sem perda de generalidade, vou restringir a discussão a campos que dependem apenas de z, e considerando o comportamento dos mesmos em relação a h_i apenas.

Usualmente o termo left moving é usado para os campos que dependem apenas de z e right moving para os campos que dependem apenas de $\overline{z}$. Estes termos serão usados frequentemente no texto.

A forma infinitesimal de 2.11 é

$$\delta\Phi_i = (h_i\partial\epsilon(z) + \epsilon(z)\partial)\Phi_i, \tag{2.12}$$

onde $\delta z = \epsilon(z)$.

A função de correlação de n campos será denotada por

$$\langle \Phi_{i_1}(z_1) \dots \Phi_{i_n}(z_n) \rangle. \tag{2.13}$$

O objetivo agora é descrever o comportamento de 2.13 sob as transformações conformes.

Primeiro vou considerar a valor esperado de apenas um campo $\langle \Phi_i \rangle$. Este valor esperado deve ser invariante sob transformações conformes, aplicando 2.12 temos

$$h_i\partial\epsilon(z)\langle \Phi_i(z) \rangle + \epsilon(z)\partial\langle \Phi_i(z) \rangle = 0. \tag{2.14}$$

*Dar ênfase às funções de correlação é uma escolha pessoal. Todos estes assuntos também podem ser discutidos utilizando Representações da Álgebra de Virasoro, Caracters, expansão em modos, etc. Como estes assuntos não serão úteis nos próximos capítulos e não conheço nenhum resultado que não possa ser obtido através das funções de correlação da teoria, optei por este caminho.

Devido à invariância translacional, o segundo termo se anula, ficamos apenas com $h_i \partial\epsilon(z)\langle\Phi_i\rangle = 0$. Considerando uma transformação conforme do tipo $\epsilon = z$ (uma dilatação), vemos que $\langle\Phi_i\rangle$ pode ser diferente de zero apenas se $h_i = 0$. Em geral, existe apenas um campo que possui $h_i = 0$, o chamado campo identidade $\mathbf{1}$, mas existem CFT's possuindo outros campos com esta propriedade.

O segundo caso é a função de dois pontos $\langle\Phi_i(z_i)\Phi_j(z_j)\rangle$. Mais uma vez, por invariância translacional, esta função depende apenas da diferença $z_i - z_j$. Aplicando mais uma vez 2.12 temos

$$(h_i \partial\epsilon_i(z_i) + h_j \partial\epsilon_j(z_j) + \epsilon_i(z_i)\partial + \epsilon_j(z_j)\partial)\langle\Phi_i(z_i)\Phi_j(z_j)\rangle = 0, \tag{2.15}$$

se $\epsilon(z) = z$, a solução desta equação é proporcional a $\frac{1}{(z_i - z_j)^{h_i+h_j}}$, e se $\epsilon(z) = z^2$, temos que $h_i = h_j$. Logo, a solução geral é

$$\langle\Phi_i(z_i)\Phi_j(z_j)\rangle = \frac{C_{ij}}{(z_i - z_j)^{2h_i}}. \tag{2.16}$$

Note que este valor esperado *não* é o propagador. Se os dois campos forem fermiônicos, o coeficiente C_{ij} é antisimétrico, e nos outros casos é simétrico.

Por último e mais importante, vou determinar a função de correlação de três pontos $\langle\Phi_i(z_i)\Phi_j(z_j)\Phi_k(z_k)\rangle$. Usando a mesma estratégia, por invariância translacional, temos que o valor esperado só pode depender de $z_i - z_j$, $z_i - z_k$ e $z_j - z_k$. Com a transformação de escala, vamos ter uma solução do tipo

$$\sum_{a,b,c} \frac{C_{abc}}{(z_i - z_j)^a (z_i - z_k)^b (z_j - z_k)^c}, \tag{2.17}$$

onde a soma é sobre todos os valores a, b e c tal que $a + b + c = h_i + h_j + h_k$. Finalmente, com a transformação conforme especial, $a = h_i + h_j - h_k$, $b = h_i + h_k - h_j$ e $c = h_j + h_k - h_i$. A forma geral é

$$\langle\Phi_i(z_i)\Phi_j(z_j)\Phi_k(z_k)\rangle = \frac{C_{ijk}}{(z_i - z_j)^{h_i+h_j-h_k}(z_i - z_k)^{h_i+h_k-h_j}(z_j - z_k)^{h_j+h_k-h_i}}. \tag{2.18}$$

A mesma propriedade de simetria de C_{ij} vale para C_{ijk}. Conhecer todos os coeficientes C_{ij} e C_{ijk} significa *resolver completamente uma teoria conforme em* $d = 2$. Todas as outras funções de correlação podem ser determinadas a partir destas. Esta prova não será apresentada aqui, mas ela envolve o próximo assunto: Expansão de Produto de Operadores (OPE's).

É um resultado geral da teoria de campos que o produto (sem tomar o valor esperado $\langle\ \rangle$) de dois campos em pontos distintos pode ser escrito como uma soma de um coeficiente numérico dependendo da diferença dos dois pontos multiplicando um determinado conjunto de campos. Ou seja,

$$\Phi_i(z_1)\Phi_j(z_2) = \sum_k C_{ij}^k(z_1 - z_2)\Phi_k(z_2). \tag{2.19}$$

Esta identidade pode ser utilizada dentro de um valor esperado, portanto podemos reduzir o número de campos dentro de uma função de correlação. Impondo que os dois lados de 2.19 se transformem da mesma maneira sob transformações conformes, podemos determinar $C_{ij}^k(z_1 - z_2)$ e sobre qual conjunto k tomamos a soma,

$$C_{ij}^k(z_1 - z_2) = (z_1 - z_2)^{-h_i - h_j + h_k}\beta_{ij}^k$$

onde β_{ij}^k são apenas números. Note que em 2.19 aparecem coeficientes singulares e regulares quando $z_1 \to z_2$. Mais uma vez, conhecer *todos* os coeficientes β_{ij}^k significa resolver a teoria. Note que C_{ij} e C_{ijk} são casos especiais de $C_{ij}^k(z_1 - z_2)$.

2.1.4 T e $\overline{T}$

Na seção anterior vimos que a invariância conforme coloca sérias restrições à dinâmica da teoria. Em teoria de campos simetrias são geradas por cargas conservadas, que por sua vez podem ser escritas na forma integrais espaciais (em nosso caso, por integrais de contorno em z ou $\overline{z}$) de correntes. Na teoria conforme em d=2 estas expressões são as componentes do tensor energia momento T_{zz} e $T_{\overline{z}\overline{z}}$ †. A invariância conforme implica que a componente $T_{z\overline{z}}$ é nula e o fato de

†A partir de agora vou denotar T_{zz} apenas por T e $T_{\overline{z}\overline{z}}$ apenas por $\overline{T}$.

serem conservadas implica que

$$\overline{\partial}T(z,\overline{z})=0, \quad \partial\overline{T}(z,\overline{z})=0,$$

logo T ($\overline{T}$) é uma corrente holomórfica (anti-holomórfica).

Isto implica que para quaisquer n e m as integrais

$$\oint dz(z^n)T(z), \quad \oint d\overline{z}(\overline{z}^m)\overline{T}(\overline{z}),$$

são conservadas, ou seja, não dependem do contorno, mas sim dos pólos que o mesmo engloba. Note que dado $\epsilon(z)$ podemos escrever $\oint dzT\epsilon(z)$, que gera a transformação em 2.12. Isto pode ser visto, definindo o OPE entre T e $\phi_i(z)$ como sendo [‡]

$$T(z)\phi_i(w,\overline{w}) \to \frac{h_i}{(z-w)^2}\phi_i(w)+\frac{1}{z-w}\partial_w\phi_i(w), \tag{2.20}$$

multiplicando o lado direito por $\epsilon(z)$ e fazendo a integral de contorno, temos o resultado desejado. A existência de termos mais singulares em 2.20 implica que ϕ não é um campo primário.

Sendo $T(z)$ um tensor de posto 2, portanto, de peso conforme também 2, ele também deve possuir OPE singular com si mesmo, em geral temos

$$T(z)T(w) \to \frac{c}{2}\frac{1}{(z-w)^4}+\frac{2}{(z-w)^2}T(w)+\frac{1}{z-w}\partial_w T(w) \tag{2.21}$$

O coeficiente c é chamado de carga central e 2.21 de Álgebra de Virasoro. O primeiro termo deste OPE nos diz que o próprio $T(z)$ não é um campo primário. Isto não representa uma quebra na invariância conforme, mas sim que diferentes superfícies possuem diferente energias no vácuo. Por exemplo, $T(z)$ definido no cilindro difere de $T(z)$ definido no plano por uma constante $\frac{c}{12}$. Em teoria de cordas é necessário que $c=0$, pois nenhuma quantidade física pode depender da superfície que estamos usando para descrever a propagação da corda no espaço tempo. Uma destas quantidades é a massa dos estados da corda. Vale salientar que os coeficientes β_{ij}^k são determinados somente por (c,h_i).

[‡]Utilizaremos $\to$ para todo OPE onde os termos regulares forem desprezados.

2.1.5 Operadores de Vértice

Dada uma teoria conforme, podemos perturbá-la adicionando algum operador local à sua ação. Na teoria de cordas, se esta perturbação corresponde a algum estado físico [§], chamamos este operador de *Operador de Vértice*. Se, em geral, não temos uma ação, como em Modelos Minimais, esta perturbação é feita nas funções de correlação da seguinte forma

$$\langle e^{\lambda_i \int d^2 z V_i(z,\overline{z})} \ldots \rangle,$$

onde $V_i(z,\overline{z})$ é o operador de vértice e λ_i é a constante de acoplamento da perturbação. Para que pelo menos na ordem mais baixa em λ_i, esta perturbação não quebre a invariância conforme, o operador de Vértice $V_i(z,\overline{z})$ precisa ter peso conforme $(1,1)$. Se a folha-mundo possui fronteiras, como na corda aberta, também podemos adicionar um operador de vertice $U_i(z,\overline{z})$ localizado na fronteira

$$\langle e^{\lambda_i \int_\gamma dz U_i(z,\overline{z})} \ldots \rangle,$$

onde γ representa a curva que define a fronteira. Neste caso, U_i preserva invariância conforme se possuir peso conforme $(1,0)$.

Amplitudes de espalhamento de estados da corda são definidas por[¶]

$$(\prod_{i,j} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \frac{\partial}{\partial \mu_j}) \langle e^{\lambda_i \int d^2 V_i(z,\overline{z})} e^{\mu_i \int_\gamma dz U_i(z,\overline{z})} \rangle |_{\lambda_i=0,\mu_j=0}. \tag{2.22}$$

Apesar de não usual, esta definição é util para calcular uma amplitude de espalhamento na presença de um *background* gerado por um dos operadores de vértice, por exemplo, V_1. Isto significa calcular 2.22 em *todas* as ordens em λ_1, retirando $\frac{\partial}{\partial \lambda_1}$ e a condição $|_{\lambda_1} = 0$. Claro que o cálculo completo é possível apenas em poucos casos.

[§]Estados físicos serão definidos na seção 3.

[¶]Aqui estou sendo um pouco impreciso, ja que podemos utilizar o subgrupo $SL(2,C)$ que preserva o plano para fixar a posição de três operadores de vértice.

2.2 Supersimetria

A supersimetria foi descoberta dentro da teoria de cordas, na tentativa de introduzir campos fermiônicos no espaço-tempo. Mais tarde ela foi generalizada para teorias de campos em qualquer dimensão. Teorias de campos supersimétricas possuem menos divergências ultra-violeta. Existem os chamados Teoremas de não renormalização que provam que algumas interações não são renormalizadas em todas as ordens na teoria de perturbação. Ao aumentar o número de supersimetrias as restrições sobre possíveis divergências também aumentam. A teoria de campos (sem incluir gravitação) com o número máximo de supersimetrias em quatro dimensões, $N = 4$ Super Yang-Mills, é *finita*.

A supersimetria é uma extensão da simetria de Poincaré. Cada campo no espaço tempo é uma representação desta simetria. Na seção anterior vimos que isto pode ser estendido, onde cada campo primário da teoria conforme é uma representação da álgebra de Virassoro. Na teoria de campos usual, onde o grupo de simetria espacial é o grupo de Poincaré, podemos dividir os campos em dois grupos, bósons e férmions. Bósons são representações tensoriais e férmions são espinoriais. Não existe nenhum gerador em $SO(d-1,1)$ que transforma um tipo de representação em outra. É exatamente neste ponto que a supersimetria é introduzida. Seus geradores, denotados por Q, transformam bósons em férmions e vice versa. Esquematicamente, temos

$$[Q, B] = F.$$

Um espinor físico é um campo anticomutante, ou *grassmaniano*. Para o comutador acima fazer sentido Q também tem que ser grassmaniano e além disso deve ser um espinor.

Para cada dimensão do espaço-tempo a representação espinorial de $SO(d-1,1)$, ou melhor $Spin(d-1,1)$, tem dimensão e características muito diferentes. Por este motivo, dividi o assunto nos casos mais importantes para o presente trabalho. Construções explícitas e exemplos serão dados para cada caso em particular.

2.2.1 d=2

Esta é a representação mais simples da álgebra de supersimetria. Em $d = 2$ o grupo de Lorentz é abeliano e todas suas representações irredutíveis são unidimensionais. Se começarmos com espinores de Dirac, com $2^1 = 2$ componentes complexas, podemos reduzir este número para 2 componentes reais impondo a condição de Majorana. Como estamos em dimensão par, podemos utilizar a representação de Weyl, separando as 2 componentes em 1 quiral e 1 antiquiral. A última simplicação vem do fato de não existir uma matriz de conjugação de carga em d=2. Isto implica que uma teoria será invariante CPT mesmo que possua campos fermiônicos apenas de uma das quiralidades, a escolha sendo arbitrária.

Denotando o gerador de Lorentz por J, e os geradores de translação por $P_{\ddagger}$ e $P_{=}$, a álgebra de Poincaré é

$$[P_{\ddagger}, P_{=}] = 0, \quad [J, P_{\ddagger}] = P_{\ddagger}, \quad [J, P_{=}] = -P_{=}.$$

A extensão para o caso supersimétrico é feita introduzindo uma supercarga Q_+, esta supersimetria é chamada de N=(1,0). As relações de comutação com os demais geradores são

$$[P_{\ddagger}, Q_+] = [P_{=}, Q_+] = 0, \quad [J, Q_+] = \frac{1}{2}Q_+, \quad \{Q_+, Q_+\} = P_{\ddagger}.$$

Neste caso, Q_+ é um operador hermitiano. É apenas uma questão de notação introduzir Q_+ ou Q_-.

Existem duas extensões supersimétricas para duas supercargas. A primeira seria introduzir Q_+ e Q_-, chamada de supersimetria N=(1,1). As relações de comutação são semelhantes ao caso anterior e as duas cargas são hermitianas. A única diferença é que podemos ter uma *carga central* na álgebra, dada por $\{Q_-, Q_+\} = Z$, onde Z comuta com todos os geradores.

O segundo caso com duas supercargas é quiral, e chamamos de N=(2,0). Duas supercargas são introduzidas, Q_+ e $Q_{\dot{+}}$, onde $(Q_+)^\dagger = Q_{\dot{+}}$. Sendo complexas, as supercargas possuem uma simetria U(1), chamada de simetria R,

$$[J_{U(1)}, Q_+] = Q_+; \quad [J_{U(1)}, Q_{\dot{+}}] = -Q_{\dot{+}}.$$

O procedimento pode ser generalizado para o caso geral $N = (m, p)$, para quaisquer $m, p \leq 16$. Este requerimento é necessário para impedir representações sem massa com spin maior que 2.

A descrição mais útil de uma teoria supersimétrica é atraves do chamado *superespaço.* Em conjunto com as coordenadas usuais, $(x^{\ddagger}, x^{=})$, adicionamos coordenadas grassmanianas. No caso N=(1,0), introduzimos θ^{+}. Usando θ^{+}, Q_{+} pode ser escrito como um operador diferencial

$$Q_{+} = \frac{\partial}{\partial\theta^{+}} + \frac{1}{2}\theta^{+}\frac{\partial}{\partial x^{\ddagger}}.$$

Um campo em d=2 é estendido para um supercampo, dependendo de todas as coordenadas $\Phi(x^{\ddagger}, x^{=}, \theta^{+})$. Como θ^{+} é um número de Grassman, a expansão de Φ em potências de θ^{+} acaba na primeira ordem. Se Φ é um supercampo escalar, temos

$$\Phi(x^{\ddagger}, x^{=}, \theta^{+}) = \phi(x^{\ddagger}, x^{=}) + \theta^{+}\psi_{+}(x^{\ddagger}, x^{=}),$$

onde ϕ e ψ_{+} são chamados de componentes de Φ. Note que ψ_{+} é um espinor em d=2. A transformação de supersimetria das componentes é calculada utilizando a representação diferencial de Q_{+}.

Ações supersimétricas são escritas utilizando supercampos, as derivadas usuais $(\partial_{\ddagger}, \partial_{=})$ e uma derivada supersimétrica

$$D_{+} = \frac{\partial}{\partial\theta^{+}} - \frac{1}{2}\theta^{+}\frac{\partial}{\partial x^{\ddagger}},$$

que comuta com Q_{+}. O último elemento é a definição de integração sobre θ^{+}. Como $(\theta^{+})^2 = 0$, so existem duas integrais possiveis

$$\int d\theta^{+} 1 = 0; \quad \int d\theta^{+}\theta^{+} = 1.$$

Utilizando o superespaço podemos facilmente escrever uma ação supersimétrica para o supercampo Φ definido anteriormente

$$S = \int d^2 x d\theta^{+}[\partial_{=}\Phi D_{+}\Phi + W(\Phi)],$$

onde o primeiro termo é o termo cinético e o segundo é chamado de superpotencial.

2.2.2 d=10

Este caso é semelhante ao caso em d=2. Nesta dimensão a representação de Dirac possui $2^5 = 32$ componentes complexas. Podemos reduzir este número para 32 componentes reais impondo condição de Majorana. Como estamos em dimensão par, podemos utilizar representação de Weyl, separando as 32 componentes em 16 quirais e 16 antiquirais. Mais uma vez, não existe uma matriz de conjugação de carga em d=10. As matrizes gama nesta representação são simétricas e são divididas em dois conjuntos $\gamma^m_{\alpha\beta}$ e $\gamma^{m\alpha\beta}$, satisfazendo

$$\gamma^{m\alpha\beta}\gamma^n_{\beta\gamma} + \gamma^{n\alpha\beta}\gamma^m_{\beta\gamma} = 2\eta^{mn}\delta^\alpha_\gamma.$$

Existes apenas três tipos de supersimetrias em d=10. A Tipo I é quiral, e possui 16 supercargas Q_α, onde $\alpha = 1$ até 16. As outras duas possuem 32 supercargas, sendo que Tipo IIA é não quiral, com supercargas Q_α e $\widehat{Q}_{\widehat{\alpha}}$. Por último, a supersimetria Tipo IIB, quiral, com Q_α e $\widehat{Q}_\alpha$.

Do mesmo modo que em d=2, introduzimos $(\theta^\alpha, \widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}})$ como coordenas do superespaço, onde

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \frac{1}{2}(\gamma^m\theta)_\alpha\partial_m; \quad \widehat{Q}_{\widehat{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}}} + \frac{1}{2}(\gamma^m\theta)_{\widehat{\alpha}}\partial_m,$$

são as supercargas e

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \frac{1}{2}(\gamma^m\theta)_\alpha\partial_m; \quad \widehat{D}_{\widehat{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}}} - \frac{1}{2}(\gamma^m\theta)_{\widehat{\alpha}}\partial_m,$$

são as superderivadas covariantes.

Também é possível definir integração sobre os θ, no entanto, não se sabe como definir ações com supersimetria manifesta. Uma maneira simples de ver a dificuldade é notar que $d\theta$ possui dimensão de massa 1/2, então, uma medida de integração quiral $d^{16}\theta$ ou não quiral $d^{16}\theta d^{16}\widehat{\theta}$ exigiria supercampos com dimensão de massa negativa.

2.3 A supercorda RNS

Nesta seção e na próxima farei uma breve introdução aos formalismos mais utilizados na Teoria de Supercordas. Talvez a melhor maneira de começar uma introdução à teoria de cordas é discutir primeiro a corda bosônica. No entanto, a corda bosônica é um exemplo trivial de CFT, com d campos de peso conforme zero $x^m(z,\overline{z})$, que representam as coordenadas do espaço-tempo, e ação dada por

$$S = \int d^2z(\partial x^m \overline{\partial} x_m).$$

Para que esta ação defina uma teoria de cordas é necessário discutir *Quantização* e *Estados Físicos* que serão intruduzidos abaixo para o caso RNS.

O formalismo RNS é uma CFT com um ingrediente a mais, a supersimetria na folha-mundo. Dependendo do número de supersimetrias teremos vários tipos de supercordas, definidas em dimensões distintas. As mais estudadas são aquelas que existem quando a dimensão do espaço-tempo é dez, que corresponde a uma teoria superconforme $N = 1$. Nesta seção exemplificaremos a maioria dos conceitos apresentados anteriormente.

A ação que define a supercorda RNS é (por simplicidade vou considerar apenas o setor left moving)

$$S = \int d^2z \left(\partial x^m \overline{\partial} x_m - \psi^m \overline{\partial} \psi_m\right), \tag{2.23}$$

onde $m = 0$ até 9. Esta ação é um exemplo de uma teoria conforme com supersimetria N=1 na folha mundo. Note que do ponto de vista da folha mundo x^m são escalares e ψ^m são espinores. As transformações de supersimetria são

$$\delta x^m = \epsilon \psi^m \quad \delta \psi^m = \epsilon \partial x^m, \tag{2.24}$$

onde ϵ é o parâmetro da transformação.

A comutação desta transformação global com as tranformações geradas pela simetria conforme geram um segundo conjunto infinito de transformações, chamadas de transformações superconformes. Da mesma maneira que as transformações conformes são geradas pelo tensor energia-momento holomórfico T, as transformações superconformes são geradas por G. O conjunto completo de geradores é

$$T = \frac{1}{2}\partial X^m \partial X_m - \psi^m \partial \psi_m \tag{2.25}$$

$$G = \psi^m \partial X_m \tag{2.26}$$

A álgebra gerada por estes operadores é

$$T(z)T(w) \rightarrow \frac{15/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{2.27}$$

$$T(z)G(w) \rightarrow \frac{3/2}{(z-w)^2}G(w) + \frac{\partial G(w)}{z-w} \tag{2.28}$$

$$G(z)G(w) \rightarrow \frac{10}{(z-w)^3} + \frac{2T(w)G(w)}{z-w}, \tag{2.29}$$

onde podemos identificar a carga central $c = 15$; os bósons contribuem com 10 e os férmions contribuem com 5. Esta álgebra pode ser calculada utilizando os OPEs fundamentais

$$x^m(z)x^n(w) \rightarrow \eta^{mn} ln|z-w|^2; \quad \psi^m(z)\psi^n(w) \rightarrow \frac{\eta^{mn}}{(z-w)}. \tag{2.30}$$

2.3.1 Quantização

A quantização desta teoria pode ser feita de várias formas, a mais prática é via BRST. Em linhas gerais, para cada simetria local gerada por g_i satisfazendo uma álgebra $[g_i, g_j] = f_{ij}^k g_k$ é introduzido um par de fantasmas (c^i, b_i). Sendo que o par i de fantasmas tem a estatística oposta à simetria gerada por g_i. Estados físicos são operadores na cohomologia da carga BRST, definida por

$$Q = c^i g_i + \frac{1}{2} f_{ij}^k b_k c^i c^j, \tag{2.31}$$

que é nilpotente $Q^2 = 0$. Em outras palavras, um estado Φ é físico se $[Q, \Phi] = 0$ e Φ tem invariância de gauge dada por $\delta\Phi = [Q, \Lambda]$, para qualquer Λ.

Para a supercorda RNS são introduzidos dois pares. O primeiro $(c(z), b(z))$ com pesos conformes -1 e 2 respectivamente para o gerador T, e $(\gamma(z), \beta(z))$ com pesos conformes $-\frac{1}{2}$ e $3/2$, para o gerador G. Os pesos conformes são determinados da seguinte forma: os pesos de c e

γ são os pesos dos parâmetros de transformação de T e G, e os pesos de b e β são determinados pelos pesos dos próprios geradores.

Sendo campos na folha mundo, os fantasmas também possuem uma ação,

$$S_{ghost} = \int d^2z[b\overline{\partial}c + \beta\overline{\partial}\gamma]. \tag{2.32}$$

O tensor energia momento e o gerador superconforme são dados por

$$T_{ghost} = \partial bc - 2\partial(bc) + \partial\beta\gamma - \frac{3}{2}\partial(\beta\gamma), \tag{2.33}$$

$$G_{ghost} = -\frac{1}{2}\partial\beta c + \frac{3}{2}\partial(\beta c) - 2b\gamma.$$

A carga central da álgebra gerada por 2.33 é -15. O sistema completo, matéria mais fantasmas possui carga central nula. Como discutido anteriormente, esta é uma condição necessária para a consitência da teoria.

A carga BRST, utilizando 2.31 é

$$Q = \oint[c(T + \frac{1}{2}T_{ghost}) + \gamma(G + \frac{1}{2}G_{ghost})]. \tag{2.34}$$

Não é coincidência que esta carga é nilpotente apenas se a carga central for nula.

2.3.2 Estados Físicos

Como o sistema descrito acima possui carga central nula, podemos fazer a quantização no plano complexo. O primeiro passo é fazer a escolha das condições de contorno de todos os campos[‖] . Como os campos x^m são escalares na folha mundo e descrevem pontos no espaço tempo, a única condição de contorno possível é periódica $x^m(e^{2\pi i}z) = x^m(z)$. Para ψ^m temos mais liberdade, já que sendo férmions, eles podem ser definidos a menos de um sinal. Logo temos duas possibilidades, periódica e antiperiódica $\psi^m(e^{2\pi i}z) = \pm\psi^m(z)$. No plano complexo, os

[‖] Por simplicidade, vamos descrever apenas o setor left moving. Na corda fechada os dois setores são independentes e na corda aberta eles são identificados na fronteira $z = \overline{z}$.

estados com condições periódicas são denominados estados Neveu-Schwarz (NS) e os estados antiperiódicos são estados Ramond (R).

Os geradores fermiônicos em 2.25 e 2.33 devem possuir a mesma periodicidade que ψ^m, uma vez que eles relacionam férmions e bósons na folha mundo.

Estados são representados por operadores de vértice. No setor NS eles podem ser descritos por polinômios em (x^m, ψ^m) e suas derivadas e, como x^m possui peso conforme zero, exponenciais da forma $e^{ik_m x^m}$, onde k^m é o momento do estado. Antes de dar exemplos, o setor R precisa ser visto com mais cuidado.

Foi dito acima que no setor R os campos ψ^m são antiperiódicos. Se temos apenas um campo ψ^m na teoria que possui OPE dado por 2.30 como podemos definir antiperiodicidade se o OPE em 2.30 é local? Para responder esta pergunta vamos definir um operador no setor NS da seguinte forma: Φ está no setor NS se em uma função de correlação entre $\Phi(z)$ e $\psi^m(w)$ temos a seguinte propriedade

$$\langle ...\psi^m(z+(w-z)e^{2\pi i})\Phi(z)...\rangle = \langle ...\psi^m(w)\Phi(z)...\rangle,$$

onde $z+(w-z)e^{2\pi i}$ representa uma volta em torno de z a partir de w. Esta definição é compatível com o OPE local. Um operador de vértice Θ está no setor R se em uma função de correlação temos

$$\langle ...\psi^m(z+(w-z)e^{2\pi i})\Theta(z)...\rangle = -\langle ...\psi^m(w)\Theta(z)...\rangle,$$

para esta definição ser consistente com 2.30, Θ deve ser construído *bosonizando* ψ^m.

Isto é feito do seguinte modo: Primeiro é feita uma rotação de Wick em ψ^0, depois quebramos a invariância explícita SO(10) para U(5),

$$(\psi^{2j} \pm \psi^{2j+1}) = \psi^j_\pm = e^{\pm i\sigma^j}, \quad j = 0, \dots, 4. \tag{2.35}$$

onde σ^j são bósons quirais com OPE

$$\sigma^j(z)\sigma^i(w) \to \delta^{ji} ln(z-w).$$

Isto reproduz o OPE 2.30. Agora introduzimos o chamado campo de spin

$$\Sigma_\alpha = \prod_{j=0}^{4} e^{\pm\frac{1}{2}\sigma^j}, \tag{2.36}$$

onde $\alpha = 1$ até 32 denota todas as combinações possíveis de $\pm$ dentro das exponenciais. É fácil ver que Σ_α possui um OPE com cortes de raíz quadrada com ψ^m. Este é o primeiro passo para construir Θ. Contruindo os operadores de Lorentz para ψ^m, $N^{mn} = \psi^m\psi^n$, vemos que Σ_α se transforma como um espinor. Quando o número de sinais + em Σ_α é par (Σ_α^+) , dizemos que a componente tem quiralidade positiva, e quando for ímpar (Σ_α^-)tem quiralidade negativa. Agora é claro que os estados no setor R são espinores no espaço tempo.

Pela construção, vemos também que Σ_α possui peso conforme $\frac{5}{8}$. Como discutido anteriormente, para Θ ser um operador de vértice físico, ele precisa ter peso conforme 1. Portanto, um segundo operador deve ser adicionado. Impondo condições antiperiódicas em ψ, o gerador superconforme G também deve possuir a mesma condição. Isto implica que o setor de fantasmas (β, γ) também tem condicão de contorno antiperiódica no setor R. Como (β, γ) são bósons na folha mundo, sua bosonização é um pouco mais sutil,

$$\beta = e^{-\phi}\partial\xi, \quad \gamma = e^{\phi}\eta, \tag{2.37}$$

onde ϕ é um bóson quiral e (ξ, η) é um par de férmions conjugados de peso conforme $(0, 1)$. Ainda, para (β, γ) possuirem os pesos corretos, ϕ deve ter uma carga de fundo 1. ** Agora é fácil ver que o campo de spin para o sistema (β, γ) é

$$\Sigma_\phi = e^{\pm\frac{1}{2}\phi}.$$

Com todos estes ingredientes podemos finalmente escrever a forma final de Θ,

$$\Theta_\alpha = e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma_\alpha,$$

onde escrevemos explicitamente o índice espinorial de Θ. Seu peso conforme é igual a 1.

**Carga de fundo em um bóson quiral é introduzida no tensor energia momento através do termo $\frac{a}{2}\partial^2\phi$.

A última condição para que Θ_α seja um estado físico vem do fato que OPEs de dois Θ's com quiralidades opostas possuem um corte de raíz quadrada, portanto não resulta em uma amplitude de espalhamento local. Isto pode ser resolvido impondo que todos os estados físicos sem massa possuam a mesma quiralidade. Isto se chama projeção GSO. Um de seus resultados adicionais é que o espectro obtido possui supersimetria no espaço tempo, isto é, existe um mesmo número de polarizações físicas bosônicas e fermiônicas para cada massa. A supercarga é simplesmete

$$q_\alpha = \oint e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma_\alpha^+,$$

onde α toma valores em apenas um das quiralidades.

Para finalizar, a forma geral de um operador de vértice no setor NS é da forma

$$V_{NS} = \mathcal{P}(\partial x, \psi, \partial^2 x, \partial\psi, ...),$$

onde $\mathcal{P}$ é um polinômio em ∂x, ψ e derivadas mais altas destes campos na folha mundo. V_{NS} pode ser feito um escalar contraindo os índices de x e ψ com polarizações $\xi_{\mu_1 \dots \mu_n}$ dependendo apenas do modo zero de x.

O operador de vértice no setor R é

$$V_R = \mathcal{P}_+^\alpha(\partial x, \psi, \partial^2 x, \partial\psi, ...)e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma_\alpha^+ + \mathcal{P}_-^\alpha(\partial x, \psi, \partial^2 x, \partial\psi, ...)e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma_\alpha^-,$$

onde $\mathcal{P}_+^\alpha$ possui polarizações com índice espinorial e um número par de ψ's e $\mathcal{P}_-^\alpha$ possui número ímpar de ψ's.

A condição de que V_{NS} e V_R estejam na cohomologia do operador BRST Q implica as equações de movimento para as polarizações em $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_+^\alpha$ e $\mathcal{P}_-^\alpha$.

O espectro na corda aberta é exatamente descrito pelos operadores de vértice acima. Para a corda fechada temos duas escolhas possíveis. A corda tipo IIA é obtida escolhendo quiralidades opostas para os campos de spin dos setores left e right moving. Na corda tipo IIB escolhemos a mesma quiralidade para os dois setores. A corda heterótica, não discutida aqui, é uma corda fechada, mas apenas com o setor left moving dos campos ψ, portando seu espectro é quiral.

Um ponto sutil que não foi mencionado é *picture*. Este problema está relacionado ao modo zero de ξ, que nunca aparece na teoria. Além disso como o campo ϕ possui carga de fundo 2, amplitudes de espalhamento serão zero a menos que os operadores de vértice contribuam com uma carga total -2. Estes dois problemas são solucionados introduzindo os operadores de picture rising e picture lowering,

$$\begin{aligned} Z &= \{Q, \xi\} = e^{\phi} G + b\partial\eta e^{2\phi} + \partial(b\eta e^{\phi}) + c\partial\xi \\ Y &= c\partial\xi e^{-2\phi}, \end{aligned}$$

que comutam com Q. Assim, cada operador de vértice físico possui infinitas cópias. O operador que conta o picture é

$$P = \oint dz(\xi\eta - \partial\phi).$$

Apesar do formalismo RNS ser covariante, vemos que a introdução de supersimetria precisa ser estudada com cuidado: ela *não* é manifesta quando definimos o formalismo. Além disso, a introdução dos campos de Spin e o problema do picture são dificuldades que dificilmente podem ser superadas quando queremos estudar a supercorda em um espaço-tempo mais complexo que o caso plano.

2.4 A supercorda Green-Schwarz

Ao contrário da supercorda RNS, a formulação GS possiu supersimetria manifesta no espaço-tempo, e não possui supersimetria na folha mundo. Apesar desta grande vantagem, mesmo em um espaço plano a ação não é quadratica, e a existência de vínculos de primeira e segunda classe torna difícil sua quantização.

A descrição do superespaço é feita com $(x^m, \theta^\alpha, \widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}})$. O ponto de partida do formalismo GS é a generalização da ação da corda bosônica

$$S_{bos} = \int d^2 z \partial x^m \overline{\partial} x_m,$$

onde os termos ∂x^m e $\overline{\partial} x^m$ são substituidos por combinações supersimétricas

$$\Pi^m = \partial x^m + (\theta\gamma^m\partial\theta); \quad \overline{\Pi}^m = \overline{\partial} x^m + (\widehat{\theta}\gamma^m\overline{\partial}\widehat{\theta}),$$

resultando numa ação supersimétrica no espaço tempo

$$S_{GS} = \int d^2z \Pi^m \overline{\Pi}_m.$$

Apesar desta ação ser covariante, ela não descreve o espectro correto quando quantizada. A maneira mais fácil de ver isso é tentar obter o gauge do cone de luz. O único vínculo desta ação é o vínculo de Virasoro, que gera invariância conforme,

$$T = \frac{1}{2}\Pi^m\Pi_m,$$

que permite fixar (x^+, x^-), mas não as variáveis espinoriais. Portanto, é necessária a introdução de mais invariâncias, além da conforme, para fixar os graus de liberdade não físicos dos espinores. Um segundo problema desta ação, que persistirá mesmo após a solução do primeiro, é que sua forma não é quadrática, portanto os campos na folha mundo não são campos livres.

A invariância adicional é chamada de simetria Kappa. É uma invariância fermiônica (como o necessário para eliminar graus de liberdade fermiônicos) dada por

$$\delta\theta^\alpha = \Pi^m(\gamma_m\kappa)^\alpha; \quad \delta\widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}} = \overline{\Pi}^m(\gamma_m\widehat{\kappa})^{\widehat{\alpha}},$$

$$\delta\Pi^m = (\partial\theta\gamma^m\delta\theta); \quad \delta\overline{\Pi} = (\overline{\partial}\widehat{\theta}\gamma^m\delta\widehat{\theta}),$$

onde $(\kappa_\alpha, \widehat{\kappa}_{\widehat{\alpha}})$ são vetores na folha mundo. Como $\Pi^m\Pi_m = 0$, pelo vínculo de Virasoro, é fácil ver que esta simetria elimina metade dos graus de liberdade fermiônicos.

Para que a ação de GS tenha esta invariância é necessário adicionar os seguintes termos,

$$S_{WZ} = \frac{1}{2}\int d^2z(\partial x^m(\theta\gamma_m\overline{\partial}\theta) - \overline{\partial} x^m(\widehat{\theta}\gamma_m\partial\widehat{\theta}) + (\theta\gamma^m\partial\theta)(\widehat{\theta}\gamma_m\overline{\partial}\widehat{\theta}) - (\theta\gamma^m\overline{\partial}\theta)(\widehat{\theta}\gamma_m\partial\widehat{\theta}),$$

note que este termo é anti-simétrico na troca de z por $\overline{z}$, por isto é chamado de termo de WZ. O termo WZ é supersimétrico apenas se as matrizes gamma satisfizerem uma conhecida identidade

$$\gamma^m_{\alpha(\beta}\gamma_{m\gamma\delta)} = 0,$$

onde $(\beta\gamma\delta)$ indica simetrização nestes índices. Esta identidade apenas vale se a dimensão do espaço tempo for 4, 6 ou 10. Quanticamente, apenas a dimensão 10 é consistente, como na corda RNS.

O vínculo que gera esta simetria está relacionado à definição do momento conjugado dos $(\theta, \widehat{\theta})$,

$$\frac{\delta(S_{GS} + S_{WZ})}{\delta\dot{\theta}^{\alpha}} = p_\alpha; \quad \frac{\delta(S_{GS} + S_{WZ})}{\delta\dot{\widehat{\theta}}^{\widehat{\alpha}}} = \widehat{p}_{\widehat{\alpha}}.$$

Calculando explicitamente $(p_\alpha, \widehat{p}_{\widehat{\alpha}})$ acima, temos as identidades

$$d_\alpha = p_\alpha - \frac{1}{2}(\Pi_m - \frac{1}{2}(\theta\gamma_m\partial\theta)(\gamma^m\theta)_\alpha = 0; \quad \widehat{d}_{\widehat{\alpha}} = \widehat{p}_{\widehat{\alpha}} - \frac{1}{2}(\overline{\Pi}_m - \frac{1}{2}(\widehat{\theta}\gamma_m\overline{\partial}\widehat{\theta})(\gamma\widehat{\theta})_{\widehat{\alpha}} = 0.$$

Estes vínculos possuem componentes de primeira e segunda classe. As componentes de primeira classe geram a simetria Kappa, as componentes de segunda classe apenas fixam as variaveis $(\theta, \widehat{\theta})$ para serem seus próprios momentos conjugados no cone de luz, como no caso do elétron na ação de Dirac. Até hoje não se sabe como fazer uma separação covariante, que seria necessário para quantizar a teoria com todas suas simetrias manifestas.

Após a fixação do gauge do cone de luz, a ação total é apenas

$$S_{lc} = \int d^2(\partial x^i\overline{\partial}x^i + \theta^a\partial\theta^a + \widehat{\theta}^{\dot{a}}\overline{\partial}\widehat{\theta}^{\dot{a}}),$$

onde $i = 1$ até 8 e $a, \dot{a} = 1$ até 8 são, respectivamente, índices vetoriais, quirais e antiquirais do grupo estabilizador SO(8). Apesar de quadratica, esta ação não possui mais simetria conforme. Isto gera vários problemas no formalismo que reduzem sua utilidade. Por exemplo, amplitudes de espalhamento com mais de quatro pontos envolvendo férmions nunca foram calculadas.

Como será discutido nos capítulos posteriores, os formalismo híbrido e de espinores puros combinam as vantagens dos formalismos RNS e GS sem introduzir suas desvantagens.

Capítulo 3

O formalismo Híbrido em d=2

Dimidium facti qui coepit habet

Horácio

Tanto o formalismo RNS quanto o GS tem suas vantagens e desvantagens. O primeiro possui a invariância conforme na folha mundo, sendo uma ferramenta extremamente útil para obter vários resultados. No entanto, a supersimetria no espaço tempo não é explícita, e seu estudo se torna muito difícil por causa da introdução dos chamados campos de spin, que não são lineares nos campos fundamentais. Nos últimos dez anos a supersimetria no espaço-tempo foi um ponto fundamental em vários progressos na teoria. Apesar de ser manifesta na descrição GS, o formalismo até hoje foi quantizado apenas no *gauge* do cone de luz, reduzindo muito sua utilidade, uma vez que a invariância conforme clássica é quebrada.

Desta forma, um novo formalismo que incorporasse as duas características desejadas (invariância conforme e supersimetria) seria um importante passo para novos desenvolvimentos. Neste capítulo será descrito o formalismo híbrido em duas dimensões. Este formalismo foi desenvolvido na referência [2] em conjunto com Prof. Nathan Berkovits e o Dr. Sergei Gukov. O formalismo híbrido foi desenvolvido originalmente para o caso D=4 [17], e mais tarde desenvolvido para o caso D=6 [18, 19] e para D=10, mas neste último mantendo apenas invariância $U(5)$ [20].

Neste capítulo vamos apenas introduzir o formalismo e mostrar quais as suas vantagens. As aplicações estão no trabalho original.

3.1 Compactificação da corda RNS para d=2

Como foi discutido no primeiro capítulo desta tese, o formalismo RNS não possui supersimetria manifesta no espaço-tempo. No entanto se *compactificarmos* algumas das dimensões, podemos fazer uma transformação de variáveis de modo que algumas das supersimetrias sejam explícitas.

Compactificar significa separar as variáveis fundamentais (x^m, ψ^m) e os fantasmas $(b, c, \beta = e^{-\phi}\partial\xi, \gamma = e^{\phi}\eta)$ em dois conjuntos. O primeiro, composto pelas variaveis não compactificadas $(x^{\mp}, x^{=}, \psi^{\mp}, \psi^{=})$ (em coordenadas do cone de luz) mais os fantasmas superconformes e o segundo composto por (x^i, ψ^i), onde $i = 1$ até 8. Vimos anteriormente que todos os campos na folha mundo descrevem uma teoria superconforme com carga central igual a zero. Com esta divisão, agora temos duas teorias superconformes desacopladas, a primeira com carga central igual a -12 e a segunda com carga central igual a 12. Compactificar significa substituir o espaço plano descrito por x^i por algum espaço compacto, com tamanho comparável com a escala fundamental da teoria. Podemos dar um sentido mais geral para isso: vamos substituir a teoria superconforme com carga central 12 por *qualquer* teoria superconforme com a mesma carga, contanto que ela não possua um espectro contínuo de campos sem massa. Isto equivale à conhecida quantização de momento quando consideramos uma partícula livre em um círculo. Note que esta teoria superconforme não precisa ter uma descrição geométrica.

Para termos ao menos supersimetria $N = 2$ no espaço-tempo existe uma imposição adicional: a teoria superconforme da compactificação deve ter uma corrente conservada na folha mundo J_C, decompondo o gerador superconforme $G_C = \psi^i\partial x_i = G_C^+ + G_C^-$, onde $G_C^{\pm}$ possui carga $\pm$ com respeito a J_C. Isto significa que a teoria conforme compactificada foi estendida, agora possui supersimetria $N = 2$ na folha mundo. É apenas uma coincidência que na compactificação para d=2 o número de supersimetrias no espaço-tempo e na folha mundo sejam o mesmo. Isto não ocorre para d=4 e d=6. Mais tarde ficará clara a necessidade da existência desta corrente. Uma prova disto pode ser encontrada em [21].

Podemos dar um exemplo concreto desta extensão. Vamos escrever (x^i, ψ^i) como $x^a = x^i + ix^{i+1}$ e $x^{\overline{a}} = x^i - ix^{i+1}$ para $i = 1$ até 4, e analogamente para $(\psi^a, \psi^{\overline{a}})$. A corrente conservada é

$$J_C = \psi^a \psi^{\overline{a}}, \tag{3.1}$$

e o gerador superconforme se divide em

$$G_C = G_C^+ + G_C^- = \psi^a \partial x^{\overline{a}} + \psi^{\overline{a}} \partial x^a. \tag{3.2}$$

Neste trabalho não será dada muita importância para a teoria conforme da compactificação. O único fato necessário é a existência da álgebra superconforme $N = 2$ (T_C, G_C^+, G_C^-, J_C) com carga central $c = 12$.

Vamos voltar agora para o setor que nos interessa: não compactificado. A ação tem a forma (por simplicidade vamos discutir apenas o setor *left moving*)

$$S_{flat} = \int d^2z [\partial x^= \overline{\partial} x^{\ddagger} - \psi^{\ddagger} \overline{\partial} \psi^=] + S_C + S_{ghosts}, \tag{3.3}$$

onde S_{ghosts} é a ação para os fantasmas e S_C é a ação para a teoria conforme da compactificação. A forma explícita destas ações não será usada.

Como dicutido no Capítulo 2, a supersimetria de espaço-tempo no formalismo RNS é estudada definindo o modo zero do operador de vértice do campo fermiônico sem massa como a supercarga. Para $d = 10$ vimos que isto torna difícil o estudo da supersimetria, já que para definir este operador precisamos introduzir os campos de *spin*, que não são lineares nas variáveis fundamentais e não possuem OPEs locais com todos os campos da teoria.

Na compactificação para d=2 temos apenas duas direções não compactas, neste caso o campo de *spin* possui uma forma bem mais simples. Vamos chamar de σ o campo que bosoniza o sistema

$(\psi^{\ddagger}, \psi^{=})$, ou seja

$$\psi^{\ddagger} = e^{\sigma}; \quad \psi^{=} = e^{-\sigma} \tag{3.4}$$

Em termos de σ o campo de *spin* é apenas

$$\Sigma^{\pm} = e^{\pm\frac{1}{2}\sigma}. \tag{3.5}$$

Uma das condições da projeção GSO é a escolha de uma quiralidade para os campos de *spin*. Para a corda aberta esta escolha é arbitrária. Para a corda fechada ela define uma teoria tipo IIA se escolhemos quiralidades opostas para os setores left e right moving e tipo IIB se escolhemos quiralidades iguais. Como estamos tratando apenas do setor left moving, vamos escolher Σ^{-} e comentar depois o resultado para tipo IIA e IIB.

No *picture* $-\frac{1}{2}$ existem duas supercargas $q_{+} = \oint e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma^{-}e^{+\frac{1}{2}H_C}$ e $q_{\dot{+}} = \oint e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma^{-}e^{-\frac{1}{2}H_C}$, onde $J_C = \partial H_C$. O fato de o operador de supersimetria carregar *picture* nos diz que a supersimetria em RNS é bem definida apenas para estados na camada de massa. Isto também pode ser verificado calculando o comutador destas supercargas,

$$\{q_{+}, q_{\dot{+}}\} = \oint e^{\phi}\psi^{=}, \tag{3.6}$$

onde $\oint e^{-\phi}\psi^{=}$ é o operador momento $\oint \partial x^{=}$ no *picture* -1.

Como será descrito agora, para o caso d=2 é possível definir supersimetria fora da camada de massa. Para isto, vamos definir $q_{\dot{+}}$ no *picture* $-\frac{1}{2}$ como acima, mas vamos definir seu conjugado complexo q_{+} no *picture* $\frac{1}{2}$

$$q_{+} = \oint (b\eta e^{\frac{3}{2}\phi}\Sigma^{-}e^{\frac{1}{2}H_C} - e^{\frac{1}{2}\phi} : [\partial x^{=}\Sigma^{+} + (G_C^{+} + G_C^{-})\Sigma^{-}]e^{\frac{1}{2}H_{CY}} :), \tag{3.7}$$

Para esta escolha ser consistente temos que mudar a definição de conjugação complexa. Isto pode ser feito utilizando os resultados de [22], mas não é necessário aqui.

As duas supercargas definidas desta maneira satisfazem a álgebra correta, sem a necessidade de mudar o picture

$$\{q_{+}, q_{\dot{+}}\} = \oint \partial x^{=}. \tag{3.8}$$

3.2 As variáveis de superespaço

Agora que temos supercargas apropriadas, podemos procurar quais são as variáveis que se transformam linearmente com respeito a elas, ou seja, quando comutadas com as supercargas o resultado é o operador identidade. Construiremos o superespaço a partir dos campos RNS.

Vamos chamar as variáveis de superespaço por θ^+ e $\theta^{\dot{+}}$, em termos dos campos RNS originais elas são

$$\theta^+ = c\xi e^{-\frac{3}{2}\phi}\Sigma^+ e^{-\frac{1}{2}H_C}, \quad \theta^{\dot{+}} = e^{\frac{1}{2}\phi}\Sigma^+ e^{\frac{1}{2}H_C}. \tag{3.9}$$

Note que estes novos campos possuem peso conforme zero, são escalares na folha mundo, se transformam como espinores no espaço-tempo e, por último, são independentes. O próximo passo é definir campos na folha mundo que são os momentos conjugados de θ^+ e $\theta^{\dot{+}}$, dados por

$$p_+ = b\eta e^{\frac{3}{2}\phi}\Sigma^- e^{\frac{1}{2}H_C}, \quad p_{\dot{+}} = e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma^- e^{-\frac{1}{2}H_C}. \tag{3.10}$$

Estes campos também são espinores no espaço-tempo, mas são campos de peso conforme 1. A partir de agora, vamos tratar estes compos como sendo *fundamentais.*

Se contarmos o número inicial de graus de liberdades $(x^{\ddagger}, x^{=}, \psi^{\ddagger}, \psi^{=}, b, c, \beta, \gamma)$, vemos que devem existir ainda dois bósons quirais independentes que podem ser definidos, ω e ρ:

$$\omega = \frac{1}{2}(\phi - \kappa + \sigma - \chi), \quad \rho = 2\phi + \frac{1}{2}(H_C - \chi - 3\kappa), \tag{3.11}$$

onde $\partial\chi = cb$ e $\partial\kappa = \xi\eta$. O termo $\frac{1}{2}\sigma$ em ω implica que ω não é escalar, mas se transforma sob o grupo de Lorentz em d=2 $SO(1,1)$. Estes bósons quirais possuem os seguintes OPEs

$$\omega(z)\omega(w) \to \frac{1}{2}\log(z-w), \quad \rho(z)\rho(w) \to -\frac{1}{2}\log(z-w). \tag{3.12}$$

O conjunto de variáveis híbridas está completo. Pode ser facilmente verificado que todas são independentes. Devido à presença de J_C e dos geradores superconformes da compactificação, os campos híbridos possuem OPE não nulo com os campos da compactificação. Para eliminar este problema fazemos uma rotação quiral neste setor. Se um campo da compactificação Φ_C possui carga n com respeito a J_C, definimos

$$\Phi_{GS} = e^{n(\phi-\kappa)}\Phi_C.$$

Esta transformação muda os geradores da álgebra superconforme por uma transformação de similaridade

$$\mathcal{O}_{GS} = e^{\oint(\phi-\kappa)J_C}\mathcal{O}_C e^{-\oint(\phi-\kappa)J_C}.$$

Em particular temos,

$$G^{\pm}_{GS} = e^{\pm(\phi-\kappa)}G^{\pm}_C; \quad J_{GS} = J_C + 4(\partial\phi - \partial\kappa).$$

Após estas tranformações, o conjunto de variaveis híbridas é um setor totalmente independente da compactifição. É importante notar que em nenhum ponto foi necessário especificar o setor compactificado, e o único elemento fundamental foi a existência de J_C.

3.3 Os Geradores Superconformes N=2

Devido à construção anterior, o conjunto independente de campos supersimétricos não se tranforma linearmente sob a simetria original do formalismo RNS. No entanto existe um conjunto de geradores que expressa de maneira mais apropriada as simetrias dos campos híbridos. Como foi mostrado em [23] o conjunto

$$(T = T^{RNS}_{matter} + T^{RNS}_{ghost}, G^+ = j_{BRST}, G^- = b, J = cb + \xi\eta), \tag{3.13}$$

da supercorda RNS forma uma álgebra superconforme $N=2$ torcida com carga central $c=6$. Isto não é surpreendente, como foi mostrado na seção anterior, a existência desta simetria no setor compactificado foi usada.

Pela definição de p_+, ω e ρ, podemos reescrever J em 3.13 como

$$J = -2\partial\rho + J_{GS},$$

apenas substituindo ρ e $J_{GS} = J_C + 4(\partial\phi - \partial\kappa)$. Ainda,

$$G^- = b = p_+ e^{\omega-\rho}.$$

Determinar $G^+ = j_{BRST}$ é um pouco mais complicado, mas alguns termos em j_{BRST} podem ser facilmente escritos usando as variáveis híbridas. Podemos ver que o termo $-\gamma^2 b$ pode ser escrito como

$$p_{\dot{+}} e^{\omega+\rho},$$

Também pode ser facilmente visto que

$$c\partial x^{\ddagger}\partial x^{=} = \theta^+ e^{-\omega+\rho}\partial x^{\ddagger}\partial x^{=},$$

$$\gamma\psi^{=}\partial x^{\ddagger} = p^{\dot{-}} e^{-\omega+\rho}\partial x^{\ddagger},$$

$$\gamma\psi^{\ddagger}\partial x^{=} = \theta^+ e^{\omega+\rho}\partial x^{=}.$$

O tensor energia-momento é determinado unicamente pelos pesos conformes dos campos e exige que os geradores G^- e G^+ tenham pesos 2 e 1 respectivamente. Utilizando os resultados acima escrevemos 3.13 como

$$T = \Pi_{\ddagger}\Pi_{=} - d_+\partial\theta^+ - d_{\dot{+}}\partial\theta^{\dot{+}} + \partial\omega\partial\omega - \partial\rho\partial\rho - \partial^2\omega + T_{GS}, \tag{3.14}$$

$$G^- = d_+ e^{\omega-\rho},$$

$$G^+ = (\Pi_{=} d_{\dot{+}} + 2\partial\omega\partial\theta^+ - \frac{1}{2}\partial^2\theta^+)e^{-\omega+\rho} + d_{\dot{+}} e^{\omega+\rho} + G^+_{GS} + \theta^+ T_{GS} e^{-\omega+\rho} + G^-_{GS}\theta^+ p_{\dot{+}} e^{2\rho},$$

$$J = -2\partial\rho + J_{GS},$$

onde

$$\Pi_{=} = \partial x_{=} + \theta^{+}\partial\theta^{\dot{+}}, \quad \Pi_{\ddagger} = \partial x_{\ddagger}, \tag{3.15}$$

$$d_{+} = p_{+}, \quad d_{\dot{+}} = p_{\dot{+}} + \theta^{+}\partial x_{\ddagger},$$

são combinações supersimétricas dos campos fundamentais.

Na forma em que estes operadores estão escritos a simetria quiral não é explícita. Além disso, os operadores superconformes da compactificação não aparecem de uma maneira natural. Estes dois pontos são resolvidos fazendo uma segunda transformação de similaridade. Se $\mathcal{O}_{hybrid}$ é um operador do formalismo híbrido, definimos a seguinte transformação

$$\mathcal{O}_{hybrid} \to e^{\oint(\theta^{+}e^{\rho-\omega}G^{-}_{GS} - \frac{1}{2}\partial x_{\ddagger}\theta^{+}\theta^{\dot{+}})}\mathcal{O}_{hybrid}e^{-\oint(\theta^{+}e^{\rho-\omega}G^{-}_{GS} - \frac{1}{2}\partial x_{\ddagger}\theta^{+}\theta^{\dot{+}})}.$$

Note que esta transformação não altera o peso conforme e a carga dos operadores, coloca um termo com G^{-}_{GS} em G^{-} e remove os termos $\theta^{+}T_{GS}e^{-\omega+\rho} + G^{-}_{GS}\theta^{+}p_{\dot{+}}e^{2\rho}$ em G^{+}.

Por último, permite-nos escrever os operadores supersimétricos e as supercargas como

$$\Pi_{=} = \partial x_{=} + \frac{1}{2}(\theta^{+}\partial\theta^{\dot{+}} + \theta^{\dot{+}}\partial\theta^{+}), \quad \Pi_{\ddagger} = \partial x_{\ddagger}, \tag{3.16}$$

$$d_{+} = p_{+} + \frac{1}{2}\theta^{\dot{+}}\partial x_{\ddagger}, \quad d_{\dot{+}} = p_{\dot{+}} + \frac{1}{2}\theta^{+}\partial x_{\ddagger},$$

$$q_{+} = \oint(p_{+} - \frac{1}{2}\theta^{\dot{+}}\partial x_{\ddagger}), \quad q_{\dot{+}} = \oint(p_{\dot{+}} - \frac{1}{2}\theta^{+}\partial x_{\ddagger}). \tag{3.17}$$

A forma final fica

$$T = \Pi_{\ddagger}\Pi_{=} - d_{+}\partial\theta^{+} - d_{\dot{+}}\partial\theta^{\dot{+}} + \partial\omega\partial\omega - \partial^{2}\omega - \partial^{2}\rho + T_{GS}, \tag{3.18}$$

$$G^{-} = d_{+}e^{w-\rho} + G^{-}_{GS},$$

$$G^{+} = e^{\oint \Pi_{=}e^{-2w}}(d_{\dot{+}}e^{\omega+\rho})e^{-\oint \Pi_{=}e^{-2w}} + G^{+}_{GS},$$

$$J = -2\partial\rho + J_{GS}.$$

A ação nas variáveis híbridas é escrita como

$$S_{hybrid} = \int d^2z[\partial x^{=}\overline{\partial}x^{\ddagger} - p_{+}\overline{\partial}\theta^{+} - p_{\dot{+}}\overline{\partial}\theta^{\dot{+}}] + S_C + S_B, \tag{3.19}$$

onde S_C é a ação para o setor compactificado com carga central $c = 12$, S_B é a ação para os bósons quirais ρ e w. As variáveis híbridas em conjunto com os bósons quirais possuem carga central -6, logo a carga central total é 6.

Da mesma maneira que a ação inicial do formalismo RNS 3.3, 3.19 também é uma ação livre. A grande vantagem de 3.19 é que seus campos se transformam covariantemente pelas transformações supersimétricas geradas por 3.17.

Como foi mencionado no começo deste capítulo, restringimos nossa discussão apenas ao setor left moving, que é relevante para a descrição covariante da corda aberta. Para a corda fechada temos que incluir também o setor right moving. A diferença entre a corda tipo IIA e tipo IIB está apenas na quiralidade das variáveis espinoriais. É importante notar que o bóson quiral ω possui cargas $SO(1,1)$ opostas nos dois casos.

3.4 Definição dos Estados Físicos

Como aplicação simples do formalismo construído acima, vamos calcular o espectro dos estados sem massa obtido após a quantização deste sistema.

Dada a álgebra superconforme acima, podemos introduzir os fantasmas $N = 2$ e fazer uma quantização BRST padrão. O conjunto de fantasmas $N = 2$ possui carga central -6, logo temos um cancelamento da anomalia conforme, ou seja, 3.19 descreve uma teoria de corda crítica.

No entanto, na definição dos campos híbridos incluímos tanto os campos RNS como os fantasmas. A introdução de um conjunto a mais de fantasmas é desnecessária e trivial.

Para a supercorda, estados físicos são representados por operadores de vértice que possuem um determinado conjunto de propriedades. No caso da corda aberta, os operadores de vértice não integrados serão físicos se forem primários reais, primários quirais ou antiquirais da álgebra

N=2.

Uma maneira alternativa de definir estados físicos é utilizar a descrição topologica $N = 4$ da álgebra superconforme $N = 2$ crítica [18]. Esta descrição é necessária para a definição de amplitudes de espalhamento e para a construção da teoria de campos da supercorda. Como estes assuntos não serão abordados aqui, não descreveremos este formalismo.

Um campo primário real possui carga $U(1)$ zero, peso conforme zero e satisfaz

$$G_n^+ \Phi = G_n^- \Phi = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 0,$$

onde $\mathcal{O}_n \mathcal{A}$ significa o coeficiente do polo de ordem n no OPE de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{A}$.

Um campo primario quiral possui carga $+1$, peso conforme 0 e satisfaz

$$G_{n-1}^+ \Phi^c = G_n^- \Phi^c = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

Por último, o campo primário antiquiral possui carga -1, peso conforme 1 e satisfaz

$$G_n^+ \Phi^a = G_{n-1}^- \Phi^a = 0 \quad \text{para} n \geq 0.$$

Todos estas campos são definidos a menos de uma transformação de gauge,

$$\delta\Phi = G_{-n}^+ \Lambda + G_{-n}^- \overline{\Lambda} \quad \text{para} \quad n > 0,$$

que preserva as condições acima.

Além dos operadores de vértice não integrados podemos definir os operadores integrados, que são usados nos cálculos de amplitudes de espalhamento e na deformação da ação do espaço plano para backgrounds curvos.

Para campos reais primários, o operador de vértice integrado é definido como

$$V = \int dz G_{-\frac{1}{2}}^- G_{-\frac{1}{2}}^+ \Phi,$$

para um campo quiral como

$$V^c = \int dz G_{-\frac{1}{2}}^- \Phi^c,$$

e por último, para o campo antiquiral,

$$V^a = \int dz G^+_{-\frac{1}{2}} \Phi^a.$$

Podemos generalizar estas definições facilmente para a corda fechada, lembrando que estados na corda fechada são o produto dos estados left e right moving da corda aberta. Por exemplo, o operador de vértice real integrado da corda fechada é

$$\mathcal{V} = \int d^2 z \overline{G}^-_{-\frac{1}{2}} \overline{G}^+_{-\frac{1}{2}} G^-_{-\frac{1}{2}} G^+_{-\frac{1}{2}} \Phi. \tag{3.20}$$

3.4.1 Estados sem massa independentes da compactificação

Primeiro vamos discutir o espectro de campos sem massa independentes da compactificação. O operador de vértice real mais geral é

$$\Phi(x,\theta) = V + U_{=} e^{-2\omega},$$

onde Φ no caso sem massa depende apenas dos modos zero de x e θ. Note que o campo $U_{=}$ não é escalar, assim como ω, mas a combinação $U_{=} e^{-2\omega}$ é.

Usando as condições para campos primários reais acima $T_0 \Phi = G^{\pm}_{\frac{1}{2}} \Phi = 0$ e os OPEs fundamentais obtidos da ação híbrida

$$x^{\ddagger}(y) x^{=}(z) \to 2 \log |y-z|, \quad w(y)w(z) \to \frac{1}{2}\log(y-z), \quad \rho(y)\rho(z) \to -\frac{1}{2}\log(y-z),$$

$$\theta^{\dot{+}}(y) p_{\dot{+}}(z) \to (y-z)^{-1}, \quad \theta^{+}(y) p_{+}(z) \to (y-z)^{-1},$$

obtemos as seguintes equações de movimento

$$\Box V = \Box U_{=} = 0 \tag{3.21}$$

$$\nabla_{+} U_{=} = 0, \tag{3.22}$$

$$\nabla_{\dot{+}}(U_{=} - \nabla_{=}V) = 0, \tag{3.23}$$

onde

$$\nabla_{=} = \partial_{=}, \quad \nabla_{\ddagger} = \partial_{\ddagger},$$

$$\nabla_{+} = \partial_{+} + \frac{1}{2}\theta^{\dot{+}}\partial_{\ddagger}, \quad \nabla_{\dot{+}} = \partial_{\dot{+}} + \frac{1}{2}\theta^{+}\partial_{\ddagger}.$$

As invariâncias de gauge $\delta\Phi = G^{+}_{-\frac{1}{2}}\Lambda + G^{-}_{-\frac{1}{2}}\overline{\Lambda}$ são geradas por $\Lambda = e^{-\omega-\rho}\Lambda_{\dot{-}}$, $\overline{\Lambda} = e^{-\omega+3\rho-H_{CY}}\Lambda_{-}$, com as seguintes transformações

$$\delta V = \nabla_{+}\Lambda_{-} + \nabla_{\dot{+}}\Lambda_{\dot{-}},$$

$$\delta U_{=} = \nabla_{=}\nabla_{\dot{+}}\Lambda_{\dot{-}},$$

satisfazendo $\nabla_{=}\nabla_{+}\nabla_{\dot{+}}\Lambda_{\dot{-}} = \nabla_{=}\nabla_{\dot{+}}\nabla_{+}\Lambda_{-} = 0$.

A solução deste conjunto de equações é

$$\Phi = \theta^{\dot{+}}\phi^{\dot{-}}(x^{=}) + (\theta^{\dot{+}}\partial_{=}\phi^{\dot{-}}(x^{=}) + \theta^{+}\partial_{=}\phi^{-}(x^{=}))e^{-2\omega}. \tag{3.24}$$

Os campos que não são eliminados pelas equações podem ser eliminados por uma tranformação de gauge. Apenas o setor Ramond possui graus de liberdade físicos, são férmions left moving. Além disso, apenas as derivadas dos campos, $\partial_{=}\phi^{\dot{-}}(x^{=})$ e $\partial_{=}\phi^{-}(x^{=})$ são físicas. Este resultado pode ser obtido também fixando o gauge do cone de luz no formalismo usual RNS.

Para a corda fechada este resultado pode parecer um pouco estranho. Como estados da corda fechada são o produto de estados left e right moving da corda aberta, os graus de liberdade físicos estão apenas no setor R-R. Para a corda tipo IIB vamos ter quatro bósons quirais, dependendo apenas de $x^{=}$. Para a supercorda tipo IIA vamos ter apenas modos constantes, já que o produto de dois férmions de quiralidades opostas deve ser constante.

Operadores de Vértice R-R Tipo IIA

Um dos aspectos do trabalho [2] foi estudar compactificações da supercorda tipo IIA e backgrounds associados a essa compactificação. Backgrounds mais gerais podem ser obtidos da acão em espaço plano a partir dos operadores de vértice integragdos. Vimos acima que na supercorda tipo IIA apenas modos constantes dos campos R-R são físicos. Estas deformações são particularmente interessantes devido á sua simplicidade e consequências. No trabalho original foi mostrado que deformações desse tipo levam a novas soluções de buracos negros extremos com constante cosmológica não nula. Estes resultados não poderiam ter sido obtidos usando o formalismo RNS, uma vez que a deformação é induzida por campos R-R.

Por estes motivos, vamos olhar com mais cuidado a forma de tais operadores e mostrar quais os campos R-R que estão deformando a ação no espaço plano.

Quando $\partial_{=}\phi^{\dot{-}} = \phi^0_{\dot{-}}$ e $\partial_{=}\phi^{-} = \phi^0_{-}$ são constantes em 3.24, o operador de vértice integrado correspondente $V = \int dz G^{-}_{-\frac{1}{2}} G^{+}_{-\frac{1}{2}} \Phi$ é apenas

$$V = \int dz(\phi^0_{-} j_{+} + \phi^0_{\dot{-}} j_{\dot{+}}),$$

onde $q_{+} = \oint j_{+}$ e $q_{\dot{+}} = \oint j_{\dot{+}}$ são as supercargas em 3.17. É fácil ver que estas deformações são físicas, uma vez que $q_{+} = \oint j_{+}$ e $q_{\dot{+}} = \oint j_{\dot{+}}$ comutam com os geradores superconformes.

Os operadores de vértice da supercorda tipo IIA ficam

$$V_{cc} = \int d^2z j_{+} j_{-}, \quad V_{aa} = \int d^2z j_{\dot{+}} j_{\dot{-}}, \quad V_{ca} = \int d^2z j_{+} j_{\dot{-}}, \quad V_{ac} = \int d^2z j_{\dot{+}} j_{-}, \tag{3.25}$$

Em termos das 32 supercargas originais $q_\alpha = q_{\pm\pm\pm\pm\pm}$,

$$q_{+} = q_{+++++}, \quad q_{\dot{+}} = q_{+----}, \quad q_{-} = q_{-++++}, \quad q_{\dot{-}} = q_{-----}. \tag{3.26}$$

As deformações descritas por $\int d^2z j_\alpha j_\beta$ acoplam o dílaton ϕ_d com as curvaturas dos campos R-R * na seguinte combinação

$$V_{\alpha\beta} = e^{\phi_d} F_{\alpha\beta} = e^{\phi_d}(\delta_{\alpha\beta} F^{(0)} + \frac{1}{2}\gamma^{mn}_{\alpha\beta} F^{(2)}_{mn} + \frac{1}{24}\gamma^{mnpq}_{\alpha\beta} F^{(4)}_{mnpq}), \tag{3.27}$$

onde $m = 0$ até 9.

*O fato do dílaton aparecer desta forma nos operadores de vértice é um pouco sutil e não será discutida aqui.

Como as supercargas em 3.26 possuem cargas $U(1)$ $+4$ e -4 os operadores de vértice V_{cc} e V_{aa} acoplam com os campos R-R holomórficos e anti holomórficos da compactificação $\epsilon^{jklm}F^{(4)}_{jklm}$ e $\epsilon^{\overline{jklm}}F^{(4)}_{\overline{jklm}}$ onde $j,k,l,m = 1$ até 4 denotam as direções complexas da variedade Calabi-Yau. Como não estamos dando atenção específica à compactificação, podemos escrever estas deformações como

$$F_{+-} = W, \quad F_{\dot{+}\dot{-}} = \overline{W}. \tag{3.28}$$

Da mesma maneira, pode ser visto que os outros dois operadores de vértice, V_{ca} e V_{ac}, acoplam com uma combinação das outras componentes das curvaturas dos campos R-R com carga 0: $F^{(0)}$, $F^{(2)}_{01}$, $F^{(2)}_{j\overline{j}}$, $F^{(4)}_{01j\overline{j}}$ e $F^{(4)}_{jk\overline{jk}}$, que podemos escrever da seguinte forma

$$F_{+\dot{-}} = \widetilde{W}, \quad F_{\dot{+}-} = \overline{\widetilde{W}}. \tag{3.29}$$

Um dos resultados de [2] é que estes campos geram uma constante cosmológica dada por

$$c = -2(|W|^2 + |\widetilde{W}|^2). \tag{3.30}$$

3.4.2 Estados sem massa dependentes da compactificação

Vamos analisar agora o caso dos campos que dependem da compactificação. Para a corda aberta estes campos são representados por operadores primários quirais e antiquirais. Eles são escritos da seguinte forma

$$\Phi^c = (V_i + e^{-2w}U_{=i})\Psi^i_c,$$

$$\Phi^a = (\overline{V}_{\overline{i}} + e^{-2w}\overline{U}_{=\overline{i}})\Psi^{\overline{i}}_a,$$

onde Ψ^i_c e $\overline{\Psi}^{\overline{i}}_a$ são campos quirais e antiquirais da teoria conforme da compactificação. A forma destes campos não é necessária, mas toda teoria superconforme N=2 possui um número finito destes campos. As condições de quiralidade e antiquiralidade

$G^-_{\frac{1}{2}}\Phi^c = G^+_{-\frac{1}{2}}\Phi^c = 0$ e $G^+_{\frac{1}{2}}\Phi^a = G^-_{-\frac{1}{2}}\Phi^a = 0$, implicam as equações de movimento para os supercampos,

$$U_{=i} = -\nabla_{=}V_i, \quad \nabla_{+}V_i = 0, \quad \nabla_{=}\nabla_{\dot{+}}V_i = 0,$$

$$\overline{U}_{=\bar{i}} = 0, \quad \nabla_{=}\nabla_{+}\overline{V}_{\bar{i}} = 0, \quad \nabla_{\dot{+}}\overline{V}_{\bar{i}} = 0.$$

A solução para estas equações é

$$V_i = a(x^{=}, x^{\ddagger}) + \theta^{\dot{+}}b(x^{\ddagger}) - \frac{1}{2}\theta^{+}\theta^{\dot{+}}\partial_{\ddagger}a(x^{=}, x^{\ddagger})$$

$$\overline{V}_{\bar{i}} = \overline{a}(x^{=}, x^{\ddagger}) + \theta^{+}\overline{b}(x^{\ddagger}) + \frac{1}{2}\theta^{+}\theta^{\dot{+}}\partial_{\ddagger}\overline{a}(x^{=}, x^{\ddagger}),$$

que descreve um multipleto escalar em $d = 2$ e $N = (2, 0)$ supersimetrias contendo dois bósons reais e dois férmions left moving. Mais uma vez, para a supercorda fechada fazemos o produto left right moving. Para o caso IIB vamos ter um multipleto escalar $N = (4, 0)$ e para o tipo IIA vamos ter um multipleto escalar $N = (2, 2)$.

3.5 Comentários Sobre Aplicações do Formalismo

O formalismo descrito neste capítulo possui diversas aplicações. No trabalho original a aplicação foi estudar backgrounds curvos na supercorda tipo IIA gerados por deformações constantes dos campos R-R. Foi mostrado que tais deformações geram soluções de buracos negros extremos com constante cosmológica não nula. Mais recentemente, foi mostrado que tais soluções são duais a modelos de matrizes específicos [24] em conjunto com vários outros trabalhos. Ainda sobre modelos de matrizes, as teorias não supersimétricas tipo 0A e tipo 0B também desempenharam importantes papéis. Com uma pequena modificação, o formalismo apresentado aqui também pode ser utilizado para descrever estas teorias.

Apesar de não ter sido explorado aqui, todo o conjunto de ferramentas da teoria conforme pode ser utilizado. Amplitudes de espalhamento dos estados físicos podem ser calculadas com supersimetria manifesta. É importante salientar que amplitudes de ordem mais alta também podem ser calculadas. No trabalho [3] calculamos amplitudes de 1-loop no formalismo híbrido em d=4 para um número arbitrário de pontos com supersimetria manifesta. Isto nunca pode ser feito nos formalismos RNS e GS. O formalismo descrito aqui também pode ser usado para este tipo de cálculo.

Capítulo 4

O formalismo de Espinores Puros

Non est ad astra mollis e terris via

Sêneca

No ano 2000 o Prof. Nathan Berkovits introduziu um novo formalismo para a supercorda que possui supersimetria manifesta em d=10 e ainda pode ser quantizado covariantemente. Neste capítulo faremos uma rápida introdução ao formalismo.

4.1 Ação

O ponto inicial deste formalismo é utilizar o superespaço em d=10 na descrição da supercorda, como na descrição GS. No entanto, novos ingredientes são adicionados, permitindo uma quantização covariante.

As variáveis fundamentais são as coordenadas do superespaço $(x^m, \theta^\alpha, \widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}})$. Como visto no segundo capítulo, um dos problemas da formulação GS é a definição dos momentos conjugados das variáveis θ^α e $\widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}}$, que levam a vínculos relacionados à simetria kappa. No formalismo de espinores puros, os momentos conjugados $(p_\alpha, \widehat{p}_{\widehat{\alpha}})$ são introduzidos diretamente na ação

$$S = \int d^2z [\frac{1}{2}\partial x^m \overline{\partial} x_m + p_\alpha \overline{\partial}\theta^\alpha + \widehat{p}_{\widehat{\alpha}} \partial \widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}}], \tag{4.1}$$

Definindo x^m, θ^α e $\widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}}$ como sendo campos de peso conforme zero e $(p_\alpha, p_{\widehat{\alpha}})$ de peso conforme

1, esta ação é invariante conforme. Os OPEs fundamentais são

$$x^m(z)x^n(w) \to \eta^{mn} ln|z-w|^2 \tag{4.2}$$

$$p_\alpha(z)\theta^\beta(w) \to \frac{1}{(z-w)}, \quad \widehat{p}_{\widehat{\alpha}}(z)\widehat{\theta}^{\widehat{\beta}}(w) \to \frac{1}{(\overline{z}-\overline{w})}.$$

Os geradores de supersimetria no espaço tempo que deixam esta ação invariante são

$$q_\alpha = \oint [p_\alpha + (\theta\gamma^m)_\alpha \partial x_m + \frac{1}{12}(\theta\gamma^m)_\alpha(\theta\gamma_m\partial\theta)], \tag{4.3}$$

$$\widehat{q}_{\widehat{\alpha}} = \oint [\widehat{p}_{\widehat{\alpha}} + (\widehat{\theta}\gamma^m)_{\widehat{\alpha}} \overline{\partial} x_m + \frac{1}{12}(\widehat{\theta}\gamma^m)_{\widehat{\alpha}}(\widehat{\theta}\gamma_m\overline{\partial}\widehat{\theta})].$$

Existe um conjunto de combinações dos campos x^m, θ^α, $\widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}}$ e $(p_\alpha, \widehat{p}_{\widehat{\alpha}})$ que são invariantes supersimétricos

$$d_\alpha = p_\alpha - (\Pi^m - \frac{1}{2}\theta\gamma^m\partial\theta)(\gamma_m\theta)_\alpha, \quad \Pi^m = \partial x^m + \theta\gamma^m\partial\theta, \tag{4.4}$$

$$\widehat{d}_{\widehat{\alpha}} = \widehat{p}_{\widehat{\alpha}} - (\widehat{\Pi}^m - \frac{1}{2}\widehat{\theta}\gamma^m\overline{\partial}\widehat{\theta})(\gamma_m\widehat{\theta})_{\widehat{\alpha}}, \quad \widehat{\Pi}^m = \overline{\partial} x^m + \widehat{\theta}\gamma^m\overline{\partial}\widehat{\theta}.$$

Note que as combinações d_α e $\widehat{d}_{\widehat{\alpha}}$ são exatamente os vínculos relacionados à simetria kappa, mas aqui *não serão tratadas como uma identidade entre* p_α *e os demais campos em* 4.1. Utilizando 4.2, estas combinações satisfazem a seguinte álgebra

$$d_\alpha(y)d_\beta(z) \to -2\gamma^m_{\alpha\beta}(y-z)^{-1}\Pi_m, \quad \widehat{d}_{\widehat{\alpha}}(\overline{y})\widehat{d}_{\widehat{\beta}}(\overline{z}) \to -2\gamma^m_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}(\overline{y}-\overline{z})^{-1}\widehat{\Pi}_m. \tag{4.5}$$

Neste ponto já podemos notar uma vantagem em relação ao formalismo GS. A ação no espaço plano é uma ação livre e todos os campos possuem OPEs bem definidos.

O tensor energia momento, também supersimétrico, é

$$T = \frac{1}{2}\partial x^m \partial x_m + p_\alpha \partial\theta^\alpha, \tag{4.6}$$

e possui carga central -22, portanto não é uma teoria de corda crítica. Além deste problema, a teoria definida pela ação 4.1 não descreve os estados físicos corretamente. No formalismo GS a simetria kappa é responsável pela eliminação dos graus de liberdade fermiônicos não físicos.

O formalismo de espinores puros é definido a partir da ação 4.1 junto com um conjunto apropriado de fantasmas. Estes fantasmas serão bosônicos e espinores no espaço tempo. Vamos chamar o conjunto de fantasmas de $(\lambda^\alpha, \omega_\alpha)$ e $(\widehat{\lambda}^{\widehat{\alpha}}, \widehat{\omega}_{\widehat{\alpha}})$, onde λ e $\widehat{\lambda}$ são os fantasmas e ω e $\widehat{\omega}$ os momentos conjugados. λ e $\widehat{\lambda}$ são definidos para satisfazerem a seguinte condição

$$\lambda\gamma^m\lambda = 0 \;\; \text{e} \;\; \widehat{\lambda}\gamma^m\widehat{\lambda} = 0 \;\; \text{para} \;\; m = 0...9, \tag{4.7}$$

que foi chamada por Cartan de condição de espinor puro. Ela implica que apenas 11 componentes de λ e $\widehat{\lambda}$ são independentes. Para ver isto é preciso quebrar a invariância de Lorentz SO(9,1) para um subgrupo U(5) (após fazer uma rotação de Wick) ou SO(8). Além disso, 4.7 implica que os momentos conjugados ω e $\widehat{\omega}$ são invariantes sob a seguinte transformação,

$$\delta\omega_\alpha = \Lambda^m(\gamma_m\lambda)_\alpha, \quad \delta\widehat{\omega}_{\widehat{\alpha}} = \widehat{\Lambda}^m(\gamma_m\widehat{\lambda})_{\widehat{\alpha}}, \tag{4.8}$$

para quaisquer $(\Lambda^m, \widehat{\Lambda}^m)$. Isto elimina 5 componentes em cada um dos momentos. A condição 4.7 e a invariância 4.8 impedem a construção de uma ação covariante para os fantasmas. Este conjunto de fantasmas possui carga central 22, logo o conjunto total de campos no formalismo de espinores puros formam uma teoria crítica.

Sendo espinores no espaço tempo, o conjunto de fantasmas possui correntes de Lorentz, que podem ser escritas como

$$N^{mn} = \frac{1}{2}\omega\gamma^{mn}\lambda; \quad \widehat{N}^{mn} = \frac{1}{2}\widehat{\omega}\gamma^{mn}\widehat{\lambda}.$$

Utilizando uma parametrização adequada para as componentes independentes dos fantasmas, podem ser calculados os sequintes OPEs,

$$\begin{aligned} N^{mn}(y)\lambda^\alpha(z) &\to \frac{(\gamma^{mn})^\alpha{}_\beta\lambda^\beta(z)}{2(y-z)}, \\ N^{kl}(y)N^{mn}(z) &\to \frac{\eta^{m[l}N^{k]n}(z) - \eta^{n[l}N^{k]m}(z)}{y-z} - 3\frac{\eta^{kn}\eta^{lm} - \eta^{km}\eta^{ln}}{(y-z)^2}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

com um resultado similar para o setor right moving. Note que estes OPEs são todos covariantes. As correntes fantasma, $J = \omega_\alpha\lambda^\alpha$ e $\overline{J} = \widehat{\omega}_{\widehat{\alpha}}\widehat{\lambda}^{\widehat{\alpha}}$, também possuem OPEs covariantes. Note que λ possui número fantasma 1 e ω possui número fantasma -1.

4.2 Estados Físicos

No formalismo de espinores puros os estados físicos são definidos pelo método BRST. Lembrando que no formalismo GS os vínculos físicos estão relacionados aos operadores supersimétricos d_α e $\widehat{d}_{\widehat{\alpha}}$, as cargas BRST são dadas por

$$Q = \oint \lambda^\alpha d_\alpha \quad \text{e} \quad \overline{Q} = \oint \widehat{\lambda}^{\widehat{\alpha}} \widehat{d}_{\widehat{\alpha}}. \tag{4.10}$$

Utilizando os OPEs em 4.5, é fácil mostrar que

$$Q^2 = \overline{Q}^2 = 0, \quad \text{e} \ \{Q, \overline{Q}\} = 0,$$

assim, podemos estudar a cohomologia destes operadores.

Existe um trabalho em andamento no grupo de supercordas do IFT que mostra como obter estas cargas BRST e as condições de espinores puros através de uma quantização BRST usual.

Operadores de vértice físicos serão operadores de número fantasma 1 construídos com todos os campos da folha mundo. Como usual, o peso conforme do operador está relacionado com a massa do campo que ele descreve. O exemplo mais simples é tomado da corda aberta,

$$V = \lambda^\alpha A_\alpha(x, \theta),$$

onde $A_\alpha(x,\theta)$ depende apenas dos modos zero, ou seja, não depende das derivadas de x e θ. V será físico se

$$\gamma^{\alpha\beta}_{mnopq} D_\alpha A_\beta = 0, \quad \delta A_\alpha = D_\alpha \Lambda,$$

para qualquer Λ com número fantasma 0. Uma outra maneira de escrever a primeira equação é

$$D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha = \gamma^m_{\alpha\beta} A_m, \tag{4.11}$$

para algum campo vetorial A_m. Esta é a equação que descreve a teoria de super-Maxwell em $d = 10$ na camada de massa. Uma maneira direta de verificar isso é expandindo A_α em componentes e utilizando a invariância de gauge para fixar algumas delas.

Para a corda fechada o operador de vértice mais simples é $V = \lambda^\alpha \widehat{\lambda}^{\widehat{\beta}} A_{\alpha\widehat{\beta}}$. Pode ser mostrado que este operador descreve as flutuações da supergravidade tipo IIA ou IIB, dependendo da escolha das quiralidades. Esta é a primeira indicação que o formalismo de espinores puros descreve corretamente os estados da supercorda. No trabalho [25] foi provado que utilizando o gauge do cone de luz o formalismo descreve corretamente todos os estados, não apenas os estados sem massa. Posteriormente, em [26] foi mostrado covariantemente que o formalismo descreve um multipleto massivo de spin 2.

Os operadores descritos acima são os chamados operadores não integrados, para calcular amplitudes de espalhamento e descrever deformações da ação em espaço plano precisamos também dos operadores integrados. Para a corda aberta, eles podem ser definidos por

$$[Q, V_{int}] = \partial V, \tag{4.12}$$

onde V é o operador não integrado. Por esta equação vemos que V_{int} deve ter peso conforme 1 e número fantasma 0. Podemos expandir V_{int} em termos de todos os campos na folha mundo com estas propriedades,

$$V_{int} = \Pi^m A_m(x,\theta) + \partial\theta^\alpha A_\alpha(x,\theta) + d_\alpha W^\alpha(x,\theta) + N^{mn} F_{mn}(x,\theta),$$

substituindo em 4.12, podemos calcular todas as componentes em V_{int}. O resultado é que os dois primeiros supercampos acima são exatamente os mesmo que aparecem em 4.11. Para entender $W^\alpha(x,\theta)$ e $F_{mn}(x,\theta)$ é útil descrever a teoria de super YM por suas derivadas covariantes

$$\mathcal{D}_m = \partial_m + A_m; \quad \mathcal{D}_\alpha = D_\alpha + A_\alpha.$$

Nesta descrição a equação de movimento pode ser escrita como

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} = \gamma^m_{\alpha\beta} \mathcal{D}_m,$$

que é uma outra maneira de escrever 4.11. Os campos W^α e F_{mn} aparecem em outros comutadores de derivadas covariantes

$$[\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n] = F_{mn}; \quad [\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_\beta] = (\gamma_m)_{\beta\alpha} W^\alpha.$$

Todas estas relações são derivadas de 4.12.

Para a supercorda fechada, o operador de vértice integrado é

$$\int d^2z V_{int}(z,\bar{z}) = \int d^2z[h_{mn}\Pi^m\widehat{\Pi}^n + g_{\alpha\widehat{\beta}}\partial\theta^\alpha\overline{\partial}\widehat{\theta}^{\widehat{\beta}} + \widehat{g}_{m\widehat{\alpha}}\Pi^m\overline{\partial}\widehat{\theta}^{\widehat{\alpha}} + g_{m\alpha}\widehat{\Pi}^m\partial\theta^\alpha + \tag{4.13}$$

$$+(d_\alpha + N_\alpha^\beta D_\beta)\widehat{\Pi}^m E_m^\alpha + (\widehat{d}_{\widehat{\alpha}} + \widehat{N}_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}}\widehat{D}_{\widehat{\beta}})\Pi^m\widehat{E}_m^{\widehat{\alpha}} + (d_\alpha + N_\alpha^\beta D_\beta)\overline{\partial}\widehat{\theta}^{\widehat{\beta}}E_{\widehat{\beta}}^\alpha + (\widehat{d}_{\widehat{\alpha}} + \widehat{N}_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}}\widehat{D}_{\widehat{\beta}})\partial\theta^\beta\widehat{E}_\beta^{\widehat{\alpha}} +$$

$$(d_\alpha + N_\alpha^\beta D_\beta)(\widehat{d}_{\widehat{\delta}} + \widehat{N}_{\widehat{\delta}}^{\widehat{\gamma}}\widehat{D}_{\widehat{\gamma}})P^{\alpha\widehat{\delta}}],$$

onde os supercampos $(h_{mn}, g_{\alpha\widehat{\beta}}, \widehat{g}_{m\widehat{\alpha}}, g_{m\alpha}, E_m^\alpha, \widehat{E}_m^{\widehat{\alpha}}, E_{\widehat{\beta}}^\alpha, \widehat{E}_\beta^{\widehat{\alpha}}, P^{\alpha\widehat{\delta}})$ dependem apenas dos modos zero de $(x,\theta,\widehat{\theta})$, $N_\alpha^\beta = \frac{1}{8}(\gamma_{mn})_\alpha^\beta N^{mn}$ e $\widehat{N}_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}} = \frac{1}{8}(\gamma_{mn})_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}}\widehat{N}^{mn}$. Usando a equação de movimento para $\lambda^\alpha\widehat{\lambda}^{\widehat{\beta}}A_{\alpha\widehat{\beta}}$ e a relação $[Q,[\overline{Q},V_{int}]] = \lambda^\alpha\widehat{\lambda}^{\widehat{\beta}}A_{\alpha\widehat{\beta}}$, pode ser mostrado que estes supercampos descrevem as flutuações da supergravidade N=2 em d=10.

4.3 Ação em Espaços Curvos

Fazendo uma analogia com a corda bosônica, onde o operador de vértice integrado do gráviton e do tensor antisimétrico são usados para generalizar a ação em espaço plano para uma ação em um campo de fundo, a forma do operador em 4.13 sugere a seguinte generalização de 4.1 para um campo de fundo geral

$$S_{curv} = \int d^2z[\frac{1}{2}(G_{MN} + B_{MN})\partial y^M\overline{\partial}y^N + \tag{4.14}$$

$$+d_\alpha E_M^\alpha\overline{\partial}y^M + \frac{1}{2}N_{mn}\overline{\partial}y^M\Omega_M^{mn} + \widehat{d}_{\widehat{\alpha}}\widehat{E}_M^{\widehat{\alpha}}\partial y^M + \frac{1}{2}\widehat{N}_{mn}\partial y^M\widehat{\Omega}_M^{mn} + d_\alpha\widehat{d}_{\widehat{\gamma}}P^{\alpha\widehat{\gamma}} +$$

$$+\widehat{N}_{mn}d_\alpha C^{\alpha mn} + N_{mn}\widehat{d}_{\widehat{\alpha}}\widehat{C}^{\widehat{\alpha}mn} + \frac{1}{4}N_{mn}\widehat{N}_{op}R^{mnop} + \Phi(x,\theta,\widehat{\theta})r \quad] + S_\lambda + S_{\widehat{\lambda}},$$

onde $y^M = (x^m, \theta^\mu, \widehat{\theta^\mu})$ agora são coordenadas em um espaço curvo e os supercampos $(G_{MN}, B_{MN}, E^\alpha_M, \widehat{E}^{\widehat{\alpha}}_M, \Omega^{mn}_M, \widehat{\Omega}^{mn}_M, P^{\alpha\widehat{\gamma}}, C^{\alpha mn}, \widehat{C}^{\widehat{\alpha} mn}, R^{mnop}, \Phi)$ agora são os próprios supercampos da supergravidade, descrevendo não apenas flutuações, mas toda a geometria. O termo $\Phi(x, \theta, \widehat{\theta})r$ é chamado de Termo de Fradkin-Tseytlin, onde Φ é um campo compensador para a invariância de escala no espaço tempo, sua componente mais baixa é o dílaton e r é a curvatura da folha mundo. Vemos que nesta ação os momentos conjugados $(p_\alpha, \widehat{p}_{\widehat{\alpha}})$ não aparecem explicitamente, portanto tratamos $(d_\alpha, \widehat{d}_{\widehat{\alpha}})$ como campos fundamentais.

No trabalho [27] foi mostrado que a nilpotência e holomorficidade das cargas BRST, agora definidas em um espaço geral, colocam todos os supercampos em 4.14 na camada de massa. Mais tarde, em um trabalho escrito por mim e pelo Dr. Osvaldo Chandía [6] foi mostrado que a invariância conforme quântica da ação 4.14 no caso da corda heterótica implica nas equações de movimento que são obtidas dos vínculos encontrados em [27].

4.4 Amplitudes de Espalhamento

Para completar a quantização da corda utilizando espinores puros, precisamos de uma prescrição para calcular amplitudes de espalhamento. Mais uma vez, como na corda bosônica, amplitudes são definidas pela função de correlação de três operadores de vértice não integrados e um número arbitrário de operadores integrados

$$\mathcal{A} = \langle U_1(z_1)U_2(z_2)U_3(z_3) \int dz_4 V_4(z_4) ... \int dz_N V_N(z_N) \rangle. \tag{4.15}$$

O único ponto que falta ser definido no cálculo de 4.15 é a integração sobre os modos zero dos campos. Note que utilizando todos os OPEs definidos neste capítulo podemos eliminar todos campos da folha mundo com peso conforme 1. Depois desse procedimento, ficamos apenas com os campos de peso conforme zero (x, θ, λ). Para x, a prescrição para eliminar os modos zero é conservação de momento. O ponto fundamental é definir a integração sobre (θ, λ).

No segundo capítulo mencionamos que a integração sobre todas as coordenadas θ não é consistente, pois a medida tem a dimensão de massa errada, portanto devemos integrar sobre menos componentes, e não sobre as dezesseis. Uma segunda observação relevante é que a medida deve possuir número fantasma 3. Note que cada operador não integrado contribui com 1. Estes dois requerimentos em conjunto com invariância super-Poincaré e invariância BRST fixam completamente a medida de integração sobre os modos zero como

$$\langle(\lambda\gamma^m\theta)(\lambda\gamma^n\theta)(\lambda\gamma^p\theta)(\theta\gamma_{mnp}\theta)\rangle = 1. \tag{4.16}$$

Como um exemplo da aplicação desta definição vamos tomar a amplitude de espalhamento de três pontos. Neste cálculo precisamos apenas dos operadores não integrados. Utilizando a invariância de gauge e a equação de movimento para $\lambda^\alpha A_{\widehat{\alpha}}$, escrevemos os operadores da seguinte forma

$$U^i = \lambda^\alpha(a^i_m(x)(\gamma^m\theta)_\alpha + (\xi^i(x)\gamma_{mnp})_\alpha(\theta\gamma^{mnp}\theta) + \partial_{[m}a^i_{n]}(x)(\theta\gamma^{mno}\theta)(\gamma_o\theta)_\alpha + ...),$$

onde ... são termos de ordem mais alta em θ. Como a prescrição envolve no máximo cinco θ's, apenas os termos escritos acima contribuem para a função de três pontos. Cada U_i contribui com 1, 2 ou 3 θ's, logo as contribuições são divididas em dois tipos. Podemos ter (1,1,3) ou (2,2,1) mais permutações destas. É fácil ver que a contribuição (1,1,3) é a interação cúbica usual em teorias de YM $a^1_m a^2_n \partial^{[n} a^{3m]}$. Já a contribuição (2,2,1) é complemento supersimétrico da primeira, que é a interação entre dois gluínos e um gluon $(\xi^1\gamma^m\xi^2)a^3_m$.

No trabalho [1] foi provado junto com o Prof. Nathan Berkovits que as amplitude obtidas no formalismo de espinores puros equivale às obtidas pelo formalismo RNS para amplitudes envolvendo até quatro fermions. O problema para amplitudes com mais de quatro fermions não está no formalismo de espinores puros, mas sim no RNS, já que são necessários vários *pictures* diferentes para que a amplitude não se anule.

Em um trabalho recente [28] o Prof. Nathan Berkovits mostrou como amplitudes de *loop* podem ser calculadas utilizando o formalismo de espinores puros. A construção envolve operadores de *picture* para os fantasmas, que são utilizados para absorver os modos zero na integral funcional. Utilizando estes operadores de *picture* foi possivel mostrar como obter a medida 4.16

através de integração funcional e generalizar o resultado para *loops*.

Capítulo 5

Quantização da Supercorda em $AdS_5 \times S^5$

Natura longe superat artem

Signoriello

Neste capítulo vamos aplicar o formalismo de espinores puros na quantização da supercorda no espaço $AdS_5 \times S^5$. A importância deste background específico se deve à conjectura AdS/CFT, [29] que foi um dos principais desenvolvimentos da teoria de supercordas nos últimos anos.

Em linhas gerais, esta conjectura relaciona a supercorda tipo IIB definida neste espaço com uma teoria de super Yang-Mills definida na fronteira de AdS_5, que é apenas o espaço de Minkowski em d=4. Esta relação é do tipo *dualidade.* Isto quer dizer que o regime de acoplamento forte de um lado pode ser descrito pelo regime de acoplamento fraco do outro lado. Isto torna a conjectura ao mesmo tempo muito útil, pois podemos obter informações não perturbativas sobre a Teoria de super-YM, e extremamente difícil de ser provada, já que teriamos que resolver completamente as teorias dos dois lados da dualidade.

Mais especificamente, esta dualidade foi verificada no regime $\lambda = g_{YM}^2 N$ grande, onde g_{YM} é a constante de acoplamento de SYM e N é o posto do grupo $SU(N)$, escolhido como sendo o grupo de gauge. No lado da supercorda, $\lambda = (\frac{R}{\alpha'})^2$, onde α' é a constante fundamental da corda e R é o raio de curvatura dos espaços AdS_5 e S^5. λ grande significa que a curvatura do espaço é pequena em relação à constante de acoplamento da corda, por isso podemos usar a supergravidade para estudar a dualidade. Para tentar verificar a dualidade fora deste regime, devemos quantizar a supercorda. Infelizmente não foi possível fazer isso utilizando os formalismos RNS e GS, devido aos problemas comentados anteriormente. Como será mostrado neste Capítulo, o formalismo de espinores puros é adequado para esta tarefa.

No entanto a quantização obtida ainda é do tipo perturbativa. Por exemplo, ainda não foi possível calcular o espectro da teoria de cordas exatamente em $\frac{R}{\alpha'}$. Um recente desenvolvimento foi encontrar um número infinito de leis de conservação na folha mundo. Iste levanta a possibilidade de utilizar os métodos das teorias integraveis para resolver a teoria de campo da folha mundo. Este é um tópico de pesquisa atual na área.

5.1 A ação no Espaço $AdS_5 \times S^5$

O espaço $AdS_5 \times S^5$ é convenientemente descrito através de um coset, mais precisamente $PSU(2,2|4)/SO(4,1) \times SO(5)$ [30]. O grupo $PSU(2,2|4)$ pode ser visto como o grupo de transformações que preservam o produto escalar de um vetor de dimensão oito, sendo que quatro componentes são bosônicas e quatro são fermiônicas. Um dos pontos de partida da conjectura AdS/CFT é a identificação deste grupo com o grupo superconforme em $d = 4$ com dezesseis supercargas. A parte bosonica deste supercoset é

$$\frac{SO(4,2)}{SO(4,1)} \times \frac{SO(6)}{SO(5)},$$

podemos ver claramente que o primeiro fator descreve AdS_5 e o segundo descrve S^5. A parte fermiônica descreve 32 supersimetrias globais. Parece haver uma contradição com o paragrafo anterior, onde foi dito que $PSU(2,2|4)$ é o grupo superconforme com 16 supercargas, no entanto, não incluimos nesta contagem as 16 supersimetrias conformes especiais, que nada mais são do que o comutador das supercargas com os geradores conformes especiais.

Descrevemos a geometria do espaço $AdS_5 \times S^5$ por um elemento $g(x, \theta, \widehat{\theta})$ tomando valores no coset $PSU(2,2|4)/SO(4,1) \times SO(5)$, onde x^a parametriza as direções de AdS_5, $x^{a'}$ parametriza

S^5 e $(\theta^\alpha, \widehat{\theta^{\alpha}})$ parametrizam as direções do superespaço. Dado um elemento do coset g, as quantidades geometricas são escritas como

$$E_M^A dy^M = (g^{-1}dg)^A, \tag{5.1}$$

onde $A = (\underline{a}, \alpha, \widehat{\alpha}, [\underline{ab}])$ e $\underline{a}$ significa a ou a' e $[\underline{cd}]$ significa $[ab]$ ou $[a'b']$, $a = 0$ até 4 e $a' = 5$ até 9. Para $A = [\underline{ab}]$, 5.1 descreve as conexões de spin, e para todos os outros casos, descreve o supervierbein, em outras palavras, a métrica.

As constantes de estrutura não zero f_{AB}^C da superálgebra relacionada ao grupo $PSU(2,2|4)$ são

$$\begin{gathered}
f_{\alpha\beta}^{\underline{c}} = 2\gamma_{\alpha\beta}^{\underline{c}}, \quad f_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}^{\underline{c}} = 2\gamma_{\alpha\beta}^{\underline{c}}, \qquad (5.2)\\
f_{\alpha\widehat{\beta}}^{[ef]} = f_{\widehat{\beta}\alpha}^{[ef]} = (\gamma^{ef})_\alpha{}^\gamma \delta_{\gamma\widehat{\beta}}, \quad f_{\alpha\widehat{\beta}}^{[e'f']} = f_{\widehat{\beta}\alpha}^{[e'f']} = -(\gamma^{e'f'})_\alpha{}^\gamma \delta_{\gamma\widehat{\beta}},\\
f_{\alpha\underline{c}}^{\widehat{\beta}} = -f_{\underline{c}\alpha}^{\widehat{\beta}} = \frac{1}{2}(\gamma_{\underline{c}})_{\alpha\beta}\delta^{\beta\widehat{\beta}}, \quad f_{\widehat{\alpha}\underline{c}}^{\beta} = -f_{\underline{c}\widehat{\alpha}}^{\beta} = -\frac{1}{2}(\gamma_{\underline{c}})_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}\delta^{\beta\widehat{\beta}},\\
f_{cd}^{[ef]} = \frac{1}{2}\delta_c^{[e}\delta_d^{f]}, \quad f_{c'd'}^{[e'f']} = -\frac{1}{2}\delta_{c'}^{[e'}\delta_{d'}^{f']},\\
f_{[\underline{cd}][\underline{ef}]}^{[\underline{gh}]} = \frac{1}{2}(\eta_{\underline{ce}}\delta_{\underline{d}}^{[\underline{g}}\delta_{\underline{f}}^{\underline{h}]} - \eta_{\underline{cf}}\delta_{\underline{d}}^{[\underline{g}}\delta_{\underline{e}}^{\underline{h}]} + \eta_{\underline{df}}\delta_{\underline{c}}^{[\underline{g}}\delta_{\underline{e}}^{\underline{h}]} - \eta_{\underline{de}}\delta_{\underline{c}}^{[\underline{g}}\delta_{\underline{f}}^{\underline{h}]})\\
f_{[\underline{cd}]\underline{e}}^{\underline{f}} = -f_{\underline{e}[\underline{cd}]}^{\underline{f}} = \eta_{\underline{e}[\underline{c}}\delta_{\underline{d}]}^{\underline{f}}, \quad f_{[\underline{cd}]\alpha}^{\beta} = -f_{\alpha[\underline{cd}]}^{\beta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\underline{cd}})_\alpha{}^\beta, \quad f_{[\underline{cd}]\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}} = -f_{\widehat{\alpha}[\underline{cd}]}^{\widehat{\beta}} = \frac{1}{2}(\gamma_{\underline{cd}})_{\widehat{\alpha}}{}^{\widehat{\beta}}.
\end{gathered}$$

A álgebra $PSU(2,2|4)$ possui uma decomposição em relação ao grupo discreto Z_4, $\mathcal{H} = \sum \mathcal{H}_i$, $i = 0$ até 3

$$\mathbf{T}_{\underline{a}} \in \mathcal{H}_2, \quad \mathbf{T}_{[\underline{ab}]} \in \mathcal{H}_0, \quad \mathbf{T}_\alpha \in \mathcal{H}_1, \quad \mathbf{T}_{\widehat{\alpha}} \in \mathcal{H}_3. \tag{5.3}$$

Pode ser visto pelas constantes de estrutura que

$$[\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j] \subset \mathcal{H}_{i+j} \mod 4. \tag{5.4}$$

A forma bilinear também respeita essa decomposição

$$\langle \mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j \rangle = 0 \quad \text{somente se} \quad i + j = 0 \pmod 4). \tag{5.5}$$

Além da geometria descrita por 5.1, outros campos sem massa da supercorda também possuem valores esperados no vácuo,

$$B_{\alpha\widehat{\beta}} = B_{\widehat{\beta}\alpha} = -\frac{1}{2}(Ng_s)^{\frac{1}{4}}\delta_{\alpha\widehat{\beta}}, \quad P^{\alpha\widehat{\beta}} = \frac{1}{(Ng_s)^{\frac{1}{4}}}\delta^{\alpha\widehat{\beta}}, \tag{5.6}$$

onde N é fluxo R-R, $g_s = g_{YM}^2$ é a constante de acoplamento da corda, $\delta_{\alpha\widehat{\beta}} = (\gamma^{01234})_{\alpha\widehat{\beta}}$ onde 01234 são as direções de AdS_5.

Com todos estes ingredientes, podemos usar a ação 4.14, substituindo todos os acoplamentos descritos neste capítulo. A presença do termos $(Ng_s)^{-\frac{1}{4}}\delta^{\alpha\widehat{\beta}}d_\alpha d_{\widehat{\beta}}$ faz com que os campos d_α e $d_{\widehat{\beta}}$ se tornem apenas campos auxiliares, e podemos eliminá-los da ação usando suas equações de movimento,

$$d_\alpha = (Ng_s)^{\frac{1}{4}}\delta_{\alpha\widehat{\beta}}J^{\widehat{\beta}}, \tag{5.7}$$

$$d_{\widehat{\beta}} = -(Ng_s)^{\frac{1}{4}}\delta_{\alpha\widehat{\beta}}\overline{J}^{\alpha}.$$

O resultado final é

$$S = \int d^2z[\frac{1}{2}(\eta_{cd}J^c\overline{J}^d + \eta_{c'd'}J^{c'}\overline{J}^{d'}) + (Ng_s)^{\frac{1}{4}}\delta_{\alpha\widehat{\beta}}(3J^{\widehat{\beta}}\overline{J}^{\alpha} - J^{\alpha}\overline{J}^{\widehat{\beta}}) \tag{5.8}$$
$$+\frac{1}{2}(N_{\underline{cd}}\overline{J}^{[\underline{cd}]} + \widehat{N}_{\underline{cd}}J^{[\underline{cd}]}) + \frac{1}{2}(N_{cd}\widehat{N}^{cd} - N_{c'd'}\widehat{N}^{c'd'})] + S_\lambda + S_{\widehat{\lambda}},$$

onde $J^A = (g^{-1}\partial g)^A$ e $\overline{J}^A = (g^{-1}\overline{\partial} g)^A$ são as correntes de Maurer-Cartan contruidas com um elemento do coset, $[N^{cd}, N^{c'd'}]$ e $[\widehat{N}^{cd}, \widehat{N}^{c'd'}]$ são as componentes das correntes de Lorentz dos espinores puros restritas às direções $SO(4,1) \times SO(5)$. S_λ e $S_{\widehat{\lambda}}$ são as ações de espaço plano para os espinores puros.

Fazendo um reescalamento nas correntes de Maurer-Cartan e nos fantasmas vemos que a ação 5.8 é um modelo sigma não linear no coset $PSU(2,2|4)/SO(4,1)\times SO(5)$ com constante de acoplamento $\alpha = (Ng_s)^{-1/4}$ mais um termo de WZ,

$$S_{AdS} = \frac{1}{\alpha^2}\int d^2z \frac{1}{2}\eta_{AB}J^A\overline{J}^B|_{\mathcal{H}\backslash\mathcal{H}_0} + kS_{WZ} + \tag{5.9}$$

$$+\frac{1}{\alpha^2}\int d^2z[\frac{1}{2}N_{\underline{cd}}\overline{J}^{[\underline{cd}]} + \frac{1}{2}\widehat{N}_{\underline{cd}}J^{[\underline{cd}]} + \frac{1}{2}(N_{cd}\widehat{N}^{cd} - N_{c'd'}\widehat{N}^{c'd'})] + \frac{1}{\alpha^2}(S_\lambda + S_{\widehat{\lambda}}),$$

onde

$$S_{WZ} = \frac{1}{\alpha^2}\int d^2z \frac{1}{2}\eta_{\alpha\widehat{\beta}}[J^{\widehat{\beta}}\overline{J}^{\alpha} - \overline{J}^{\widehat{\beta}}J^{\alpha}], \tag{5.10}$$

$k = \frac{1}{2}$ e $\eta_{AB} = (\eta_{\underline{ab}}, -4\delta_{\alpha\widehat{\beta}}, 4\delta_{\alpha\widehat{\beta}}, \eta_{a[b}\eta_{c]d}, -\eta_{a'[b'}\eta_{c']d'})$.

Como o dílaton é constante neste espaço, o termo de Fradkin-Tseytlin pode ser integrado, sendo apenas a constante de acoplamento usual que conta o genus da folha mundo.

Por causa das equações de movimento 5.7, as corrents $\lambda^\alpha d_\alpha$ e $\widehat{\lambda}^{\widehat{\alpha}}d_{\widehat{\alpha}}$ são substituidas por $(Ng_s)^{\frac{1}{4}}\delta_{\alpha\widehat{\alpha}}\lambda^\alpha J^{\widehat{\alpha}}$ e $-(Ng_s)^{\frac{1}{4}}\delta_{\alpha\widehat{\alpha}}\widehat{\lambda}^{\widehat{\alpha}}\overline{J}^{\alpha}$. No trabalho [31] foi provado que estas correntes são respectivamente holomórficas e anti-holomórficas, mostrando que Q e $\overline{Q}$ são cargas conservadas. Além disso, também foi mostrado que Q e $\overline{Q}$ comutam quando atuam sobre os estados sem massa. Em conjunto, estes dois resultados implicam que as cargas BRST podem ser usadas para calcular as flutuações da supergravidade em torno do espaço AdS.

O problema mais importante, que é o cálculo da cohomologia para todos os estados massivos ainda está em aberto.

5.2 Função Beta em Um Loop

Nesta seção descreveremos o primeiro passo para a quantização da supercorda em $AdS_5\times S^5$. Mesmo sendo uma quantização perturbativa ela pode nos ajudar a entender melhor a teoria quântica da corda e nos dar uma idéia de como o espectro depende de λ. Como primeira aplicação desta quantização, vamos calcular a função beta em um loop.

Classicamente existe apenas uma constante de acoplamento em 5.9. Quando consideramos efeitos quânticos, isto pode mudar. Cada termo em 5.9 possui interações, e correções quânticas podem alterar seus coeficientes no fluxo do grupo de renormalização. A invariância conforme na folha mundo é uma das condições de consistência da teoria de cordas, então estes coeficiente do grupo de renormalização devem ser exatamente zero. Chamamos estes coeficientes de funções beta, que são calculadas renormalizando as interações divergentes na ação efetiva na região ultra violeta. Se não existir nenhuma divergência, as funções beta são automaticamente zero.

Nesta seção vamos quantizar a ação 5.9 utilizando a expansão em campo de fundo covariante. Primeiro fixamos um valor esperado clássico g_0, e as flutuações quânticas são descritas por X, com valores na álgebra $PSU(2,2|4)$. O campo quântico agora é $g = g_0 e^{\alpha X}$. As correntes quânticas são descritas em termos de g

$$J = g^{-1}\partial g = e^{-\alpha X} J_0 e^{\alpha X} + e^{-\alpha X}\partial e^{\alpha X}, \tag{5.11}$$

$$\overline{J} = g^{-1}\overline{\partial} g = e^{-\alpha X} \overline{J}_0 e^{\alpha X} + e^{-\alpha X}\overline{\partial} e^{\alpha X},$$

onde $J_0 = g_0^{-1}\partial g_0$ e $\overline{J}_0 = g_0^{-1}\overline{\partial} g_0$.

Supomos uma expansão similar para os fantasmas,

$$(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\omega}, \widetilde{\widehat{\lambda}}, \widetilde{\widehat{\omega}}) = (\lambda_0 + \alpha\lambda, \omega_0 + \alpha\omega, \widehat{\lambda}_0 + \alpha\widehat{\lambda}, \widehat{\omega}_0 + \alpha\widehat{\omega}). \tag{5.12}$$

Como estas variáveis satisfazem um vínculo e uma invariância de gauge, este é um ponto delicado. No entanto, como será mostrado mais tarde, o resultado desta seção depende apenas da álgebra de Lorentz dos fantasmas.

A ação 5.9 pode ser escrita como

$$S_{AdS} = \frac{1}{\alpha^2}\int d^2z[\frac{1}{2}\langle J_2, \overline{J}_2\rangle + \frac{3}{4}\langle J_3, \overline{J}_1\rangle + \frac{1}{4}\langle \overline{J}_3, J_1\rangle] + \tag{5.13}$$

$$+\frac{1}{\alpha^2}\int d^2z[\frac{1}{2}N_{\underline{cd}}\overline{J}^{[\underline{cd}]} + \frac{1}{2}\widehat{N}_{\underline{cd}}J^{[\underline{cd}]} + \frac{1}{2}(N_{cd}\widehat{N}^{cd} - N_{c'd'}\widehat{N}^{c'd'})] + \frac{1}{\alpha^2}(S_\lambda + S_{\widehat{\lambda}}),$$

onde $J_i = J|_{\mathcal{H}_i}$. Como esta ação possui a invariância de gauge $g \to ge^h$, onde $h \in \mathcal{H}_0$, podemos escolher um gauge tal que $X \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$.

Para calcular a ação efetiva substituimos as correntes em 5.11 em 5.13 e expandimos em potências de X. Os termos independentes X são apenas os termos da ação clássica. O termo quadratico em X

$$\int d^2z \, \langle \partial X \overline{\partial} X \rangle, \tag{5.14}$$

define os propagadores para as flutuações quânticas.

A ação efetiva é a soma de todos os diagramas 1PI com as correntes classicas como linhas externas. A parte dos fantasmas é tratada da mesma forma. No artigo [32] foi mostrado que a parte da ação efetiva independente dos fantasmas é livre de divergências. Aqui, vamos dar atenção às interações dependentes dos fantasmas, que foi um dos trabalhos desenvolvidos neste doutorado [4].

O ponto fundamental em [32] é o fato que o Número de Coxeter Dual é zero para a álgebra $PSU(2,2|4)$. Em particular, isto implica que

$$f_{a\alpha\beta} f_{\widehat{\beta}\widehat{\alpha}b} \eta^{\beta\widehat{\beta}} \eta^{\alpha\widehat{\alpha}} + f_{a\widehat{\alpha}\widehat{\beta}} f_{\beta\alpha b} \eta^{\widehat{\beta}\beta} \eta^{\widehat{\alpha}\alpha} + 2 f_{a[cd]e} f_{f[gh]b} \eta^{ef} \eta^{[cd][gh]} = 0. \tag{5.15}$$

Por exemplo, com a ajuda de 5.15 os autores de [32] mostraram que a soma de todos os diagramas divergentes com linhas externas $J_0^{\underline{a}}$ e $\overline{J}_0^{\underline{b}}$ é

$$2\pi(\frac{1}{2} - 2k^2)\ln(\frac{\Lambda}{\mu}) J_0^{\underline{a}} \overline{J}_0^{\underline{b}} (f_{\underline{a}[\underline{cd}]\underline{e}} f_{\underline{f}[\underline{gh}]\underline{b}} \eta^{\underline{ef}} \eta^{[\underline{cd}][\underline{gh}]}), \tag{5.16}$$

que é zero para $k = \pm\frac{1}{2}$. Todos os outros diagramas possuem uma estrutura similar.

Aqui, a seguinte identidade será usada

$$f_{[\underline{ab}]\alpha\widehat{\beta}} f_{\beta\widehat{\alpha}[\underline{cd}]} \eta^{\widehat{\beta}\beta} \eta^{\alpha\widehat{\alpha}} + f_{[\underline{ab}]\widehat{\alpha}\beta} f_{\widehat{\beta}\alpha[\underline{cd}]} \eta^{\beta\widehat{\beta}} \eta^{\widehat{\alpha}\alpha} + \tag{5.17}$$

$$+f_{[\underline{ab}]\underline{ef}}f_{\underline{gh}[\underline{cd}]}\eta^{\underline{fg}}\eta^{\underline{eh}}+f_{[\underline{ab}][\underline{ef}][\underline{gh}]}f_{[\underline{lm}][\underline{no}][\underline{cd}]}\eta^{[\underline{gh}][\underline{lm}]}\eta^{[\underline{ef}][\underline{no}]}=0.$$

Estamos interessados nos termos dependendo dos fantasmas, a segunda linha em 5.13. Estes termos podem ser divididos em duas partes, a primeira vem apenas do modelo sigma, envolvendo

$$\int d^2z[\frac{1}{2}N_{\underline{cd}}\overline{J}^{[\underline{cd}]}+\frac{1}{2}\widehat{N}_{\underline{cd}}J^{[\underline{cd}]}]. \tag{5.18}$$

A segunda parte vem da interação apenas entre os fantasmas

$$\int d^2z[\frac{1}{2}N_{cd}\widehat{N}^{cd}-\frac{1}{2}N_{c'd'}\widehat{N}^{c'd'}]. \tag{5.19}$$

Apesar de termos fixado um gauge onde $X\in\mathcal{H}\setminus\mathcal{H}_0$, $J|_{\mathcal{H}_0}$ vai ter flutuações dadas por 5.11 *

$$J|_{\mathcal{H}_0}=J_0+\alpha^2([\partial X_2,X_2]+[\partial X_1,X_3]+[\partial X_3,X_1])+... \tag{5.20}$$

$$\overline{J}|_{\mathcal{H}_0}=\overline{J}_0+\alpha^2([\overline{\partial}X_2,X_2]+[\overline{\partial}X_1,X_3]+[\overline{\partial}X_3,X_1])+...$$

onde ... significa termos de ordem mais alta em α e envolvendo outras correntes, que não vão desempenhar nenhum papel aqui. A interação é da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\int d^2z\mathrm{Str}(N_0[\overline{\partial}X_2,X_2]+N_0[\overline{\partial}X_1,X_3]+N_0[\overline{\partial}X_3,X_1]+ \tag{5.21}$$

$$\widehat{N}_0[\partial X_2,X_2]+\widehat{N}_0[\partial X_1,X_3]+\widehat{N}_0[\partial X_3,X_1]),$$

onde N_0 e $\widehat{N}_0$ são as correntes fantasma clássicas contraidas com os geradores $\mathbf{T}_{[\underline{ab}]}$.

O cálculo da função beta pode ser feito no espaço de corrdenadas. Vamos chamar o operador na primeira linha de 5.21 de $\mathcal{N}_1$ e o da segunda linha de $\mathcal{N}_2$. Note que estes operadores são *marginais*. Em outras palavras, preservam a invariância conforme classicamente. Para $\mathcal{N}_1$, N_0 possui peso conforme (1,0) e $[\overline{\partial}X_2,X_2]+[\overline{\partial}X_1,X_3]+[\overline{\partial}X_3,X_1]$ possui peso conforme (0,1) na

*A partir de agora, para evitar uma notação muito complicada, vou chamar $J_0\big|_{\mathcal{H}_0}$ apenas de J_0, já que as outras correntes não vão mais aparecer neste trabalho.

teoria livre (parte quadrátrica da ação). Para $\mathcal{N}_2$, $\widehat{N}_0$ possui peso conforme (0,1) e $[\partial X_2, X_2] + [\partial X_1, X_3] + [\partial X_3, X_1]$ possui peso conforme (1,0) na teoria livre.

Usando os OPEs para X definidos por 5.14 e a identidade 5.17 podemos mostrar que eles satisfazem a seguinte álgebra

$$\mathcal{N}_1(z,\overline{z})\mathcal{N}_1(w,\overline{w}) \to \dots\,, \quad \mathcal{N}_2(z,\overline{z})\mathcal{N}_2(w,\overline{w}) \to \dots\,, \tag{5.22}$$

$$\mathcal{N}_1(z,\overline{z})\mathcal{N}_2(w,\overline{w}) \to -(D-2)\left(\frac{1}{|z-w|^2} + \delta^2(z-w)\log|z-w|^2\right)\left[\frac{1}{2}N_0^{ab}\widehat{N}_{0ab} + \frac{1}{2}N_0^{a'b'}\widehat{N}_{0a'b'}\right] + \dots\,,$$

onde ... são operadores não marginais, que não contribuem para divergências em um loop. A razão para isto é que apenas dependências do tipo $|z-w|^{-2}$ e $\delta^2(z-w)\log|z-w|^2$ possuem divergências logaritimicas.

Portanto, a segunda linha em 5.22 contribui para divergências,

$$\frac{1}{2}\int d^2z \int d^2w \mathcal{N}_1(z,\overline{z})\mathcal{N}_2(w,\overline{w}) \to -2\pi\log\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)(D-2)\int d^2z\left[\frac{1}{2}N_0^{ab}\widehat{N}_{0ab} + \frac{1}{2}N_0^{a'b'}\widehat{N}_{0a'b'}\right].$$

Vamos mostrar agora que a interação entre os fantasmas cancela exatamente esta divergência. Apesar de não podermos escrever uma ação covariante para os fantasmas, os OPEs das correntes de Lorentz podem ser escritos de maneira covariante

$$N^{\underline{ab}}(z)N^{\underline{cd}}(w) \to \frac{\eta^{\underline{a}[\underline{c}}N^{\underline{d}]\underline{b}}(w) - \eta^{\underline{b}[\underline{c}}N^{\underline{d}]\underline{a}}(w)}{(z-w)} - 3\frac{\eta^{\underline{a}[\underline{c}}\eta^{\underline{d}]\underline{b}}}{(z-w)^2}, \tag{5.23}$$

$$\widehat{N}^{\underline{ab}}(\overline{z})\widehat{N}^{\underline{cd}}(\overline{w}) \to \frac{\eta^{\underline{a}[\underline{c}}\widehat{N}^{\underline{d}]\underline{b}}(\overline{w}) - \eta^{\underline{b}[\underline{c}}\widehat{N}^{\underline{d}]\underline{a}}(\overline{w})}{(\overline{z}-\overline{w})} - 3\frac{\eta^{\underline{a}[\underline{c}}\eta^{\underline{d}]\underline{b}}}{(\overline{z}-\overline{w})^2},$$

o polo duplo nestes OPEs só pode ser calculado levando em conta que (λ, ω) e $(\widehat{\lambda}, \widehat{\omega})$ são espinores puros. No entanto, os polos simples podem ser calculados utilizando os OPEs

$$\omega_\alpha(z)\lambda^\beta(w) \to \frac{\delta_\alpha^\beta}{(z-w)}, \quad \widehat{\omega}_{\widehat{\alpha}}(\overline{z})\widehat{\lambda}^{\widehat{\beta}}(\overline{w}) \to \frac{\delta_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}}}{(\overline{z}-\overline{w})}. \tag{5.24}$$

Na verdade, 5.24 está errado, pois não preserva o vínculo de espinor puro. O cálculo dos polos simples em 5.23 utilizando 5.24 envolve apenas combinações do tipo $\omega\gamma^{\underline{ab}}\lambda$ e não tomamos o traço sobre os índices espinoriais. Por isto o resultado correto é obtido.

No espaço $AdS_5 \times S^5$ a teoria livre dos fantasmas agora possui interação. A sua contribuição para a função beta vem dos operadores marginais

$$\mathcal{O}_1(z,\overline{z}) = \frac{1}{2}N^{ab}\widehat{N}_{ab}, \quad \mathcal{O}_2(z,\overline{z}) = \frac{1}{2}N^{a'b'}\widehat{N}_{a'b'}. \tag{5.25}$$

Usando os OPEs em 5.24 e as identidades das matrizes gama

$$[\gamma^{\underline{ab}}, \gamma^{\underline{cd}}]_{\alpha}^{\beta}[\gamma_{\underline{ab}}, \gamma_{\underline{cd}}]_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}} = 16(D-2)(\gamma^{\underline{ab}})_{\alpha}^{\beta}(\gamma_{\underline{ab}})_{\widehat{\alpha}}^{\widehat{\beta}}, \tag{5.26}$$

$$[\gamma^{ab}, \gamma^{a'b'}] = 0,$$

onde $D = 5$, podemos mostrar que eles satisfazem a seguinte álgebra

$$\mathcal{O}_1(z,\overline{z})\mathcal{O}_1(w,\overline{w}) \to \frac{2(D-2)}{|z-w|^2}\mathcal{O}_1(w,\overline{w}) + ..., \quad \mathcal{O}_2(z,\overline{z})\mathcal{O}_2(w,\overline{w}) \to \frac{2(D-2)}{|z-w|^2}\mathcal{O}_2(w,\overline{w}) + ..., \tag{5.27}$$

$$\mathcal{O}_1(z,\overline{z})\mathcal{O}_2(w,\overline{w}) \to 0,$$

onde ... é a parte não marginal, contendo operadores que precisam ser calculados levando em conta o caráter de espinores puros dos fantasmas.

A interação

$$\frac{1}{2}\int d^2z \int d^2w[\mathcal{O}_1(z,\overline{z})\mathcal{O}_1(w,\overline{w}) + \mathcal{O}_2(z,\overline{z})\mathcal{O}_2(w,\overline{w})]$$

gera uma divergência na ação efetiva dada por

$$S_{div} = 2\pi\log(\frac{\Lambda}{\mu})(D-2)\int d^2z[\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2], \tag{5.28}$$

que cancela exatamente a contribuição anterior. Isto prova que a ação 5.13 é invariante conforme em um loop.

Para provar invariância conforme exata, precisariomos mostrar que a álgebra do tensor energia momento

$$T = \frac{1}{2}\eta_{\underline{ab}} J^{\underline{a}} J^{\underline{b}} - 4\delta_{\alpha\widehat{\beta}} J^{\alpha} J^{\widehat{\beta}} + N_{\underline{cd}} J^{[\underline{cd}]} + T_{\lambda}, \tag{5.29}$$

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\eta_{\underline{ab}} \overline{J}^{\underline{a}} \overline{J}^{\underline{b}} - 4\delta_{\alpha\widehat{\beta}} \overline{J}^{\alpha} \overline{J}^{\widehat{\beta}} + \widehat{N}_{\underline{cd}} \overline{J}^{[\underline{cd}]} + \overline{T}_{\widehat{\lambda}}$$

é da forma 2.21 exatamente. Ainda não foi possível fazer este cálculo.

Um segundo passo a ser feito para continuar o projeto de quantização é calcular os OPEs das correntes de Maurer-Cartan quanticamente. Por simetria, esperamos a seguinte forma para a álgebra de OPEs

$$J_A(z,\overline{z}) J_B(w,\overline{w}) \to \frac{\eta_{AB}}{(z-w)^2} + \frac{1}{(z-w)} f_{AB}^{C} J_C(w,\overline{w}) + W_{AB}(z,\overline{z},w,\overline{w}) \tag{5.30}$$

onde J_A são as correntes (que não são holomorficas como no caso de teorias WZW), f_{AB}^{C} são as constantes de estrutura e W_{AB} é a parte do OPE que nao é fixada pela pela estrutura da álgebra, que pode conter polos holomórficos e/ou anti-holomórficos. É exatamente esta parte do OPE que devemos calcular. Estes resultados ajudarão a fazer cálculos na conjectura AdS/CFT, que até hoje não tem nenhum resultado utilizando a teoria de cordas completa.

5.3 Leis de Conservação e Correntes Planas

Nesta seção vou dicutir uma possível linha de pesquisa que pode ajudar a fazer cálculos exatos no espaço $AdS_5 \times S^5$. Em um recente artigo [33] foi mostrado que a supercorda GS em $AdS_5 \times S^5$ possui um número infinito de leis de conservação. Isto é um resultado da existência de uma corrente plana invariante de gauge dependendo de um parâmetro. Em outras palavras, uma corrente $a(\mu)$ que satisfaz a equação

$$da(\mu) + a(\mu) \wedge a(\mu) = 0. \tag{5.31}$$

É um resultado do Teorema de Stokes que para uma corrente satisfazendo 5.31, a integral ordena pelo caminho

$$U_\omega[a] = \mathcal{P}e^{\oint_\omega a(\mu)} = 1, \tag{5.32}$$

para qualquer caminho ω contrátil. Na corda fechada existe uma classe de caminhos que não podem ser contraidos a um ponto, que no plano complexo podem ser representados por círculos em volta da origem. É fácil mostrar que para dois circulos com diferentes raios γ e δ temos a seguinte identidade

$$Tr(U_\gamma[a]) = Tr(U_\delta[a]). \tag{5.33}$$

Lembrando que no plano complexo diferentes raios significam diferentes tempos, esta equação mostra que $Tr(U_\gamma[a])$ é uma carga conservada. Como a depende de um parâmetro, temos infinitas leis de conservação. Uma prova mais detalhada e aplicações da existência deste tipo de lei de conservação podem ser encontradas em [34].

Nesta seção vamos mostrar que o mesmo resultado vale para a supercorda no formalismo de espinores puros [5]. Por simplicidade não vamos colocar o setor dependendo dos fantasmas.

O primeiro passo é escrever 5.31 em uma notação conveniente. As combinações gJ_ig^{-1} e $g\overline{J}_ig^{-1}$ são invariantes por uma transformação de gauge $g \to gh$. Note que J_0 e $\overline{J}_0$ se transformam como conexões.

Como as correntes J_i e $\overline{J}_i$ são mais fáceis de manipular, vamos reescrever a equação 5.31 em termos de $A(\mu) = g^{-1}a(\mu)g$. O último termo em 5.31 é covariante em relação a esta mudança, mas o primeiro se transforma para

$$d(g^{-1}a(\mu)g) = -g^{-1}dg \wedge (g^{-1}a(\mu)g) + g^{-1}da(\mu)g - (g^{-1}a(\mu)g) \wedge g^{-1}dg.$$

Escrevendo em termos de A e $J = \sum J_i + J_0$,

$$g^{-1}da(\mu)g = dA(\mu) + J \wedge A(\mu) + A(\mu) \wedge J.$$

Agora, 5.31 é

$$dA(\mu) + J \wedge A(\mu) + A(\mu) \wedge J + A(\mu) \wedge A(\mu) = 0. \tag{5.34}$$

Ainda, usando coordenadas complexas,

$$\partial\overline{A} - \overline{\partial}A + [A, \overline{A}] + [J, \overline{A}] + [A, \overline{J}] = 0. \tag{5.35}$$

Podemos expandir A em termos das correntes de Maurer-Cartan

$$A = aJ_2 + bJ_1 + cJ_3,$$

$$\overline{A} = d\overline{J}_2 + e\overline{J}_1 + f\overline{J}_3,$$

onde os coeficientes (a, b, c, d, e, f) devem ser determinados para A satisfazer 5.35. Substituindo em 5.35, temos a seguinte equação

$$d\nabla\overline{J}_2 + e\nabla\overline{J}_1 + f\nabla\overline{J}_3 - a\overline{\nabla}J_2 - b\overline{\nabla}J_1 - c\overline{\nabla}J_3 + \tag{5.36}$$

$$+(ad + d + a)[J_2, \overline{J}_2] + (ae + e + a)[J_2, \overline{J}_1] + (af + f + a)[J_2, \overline{J}_3] + (bd + d + b)[J_1, \overline{J}_2] +$$

$$+(be + b + e)[J_1, \overline{J}_1] + (bf + b + f)[J_1, \overline{J}_3] + (cd + c + d)[J_3, \overline{J}_2] + (ce + c + e)[J_3, \overline{J}_1] +$$

$$+(cf + c + f)[J_3, \overline{J}_3] = 0,$$

onde $\nabla = \partial + [J_0, \;\;]$ e $\overline{\nabla} = \overline{\partial} + [\overline{J}_0, \;\;]$. Para simplicar 5.36 temos que usar as equações de movimento que são derivadas da ação 5.13. Variando g da forma $\delta g = gX$ temos que

$$\delta J = \partial X + [J, X], \quad \delta\overline{J} = \overline{\partial}X + [\overline{J}, X]. \tag{5.37}$$

Junto com as identidades de Maurer-Cartan $\partial\overline{J} - \overline{\partial}J + [J, \overline{J}] = 0$, 5.37 implica nas seguintes equações de movimento

$$\nabla\overline{J}_2 = -[J_3, \overline{J}_3], \tag{5.38}$$
$$\overline{\nabla}J_2 = [J_1, \overline{J}_1],$$
$$\overline{\nabla}J_1 = 0,$$
$$\nabla\overline{J}_1 = -[J_2, \overline{J}_3] - [J_3, \overline{J}_2],$$
$$\nabla\overline{J}_3 = 0,$$
$$\overline{\nabla}J_3 = [J_2, \overline{J}_1] + [J_1, \overline{J}_2].$$

Substituindo 5.38 em 5.36, o seguinte conjunto de equações para (a, b, c, d, e, f) deve ser resolvido

$$ad + d + a = 0, \quad ea + e + a - c = 0, \quad af + f + a - e = 0, \tag{5.39}$$
$$bd + d + b - c = 0, \quad be + b + e - a = 0, \quad bf + b + f = 0,$$
$$cd + d + c - e = 0, \quad ce + c + e = 0, \quad cf + c + f - d = 0.$$

A solução é

$$a = \mu - 1, \quad b = \pm(\mu)^{\frac{3}{2}} - 1, \quad c = \pm(\mu)^{\frac{1}{2}} - 1, \tag{5.40}$$
$$d = \mu^{-1} - 1, \quad e = \pm(\mu)^{-\frac{1}{2}} - 1, \quad f = \pm(\mu)^{-\frac{3}{2}} - 1,$$

que é analítica para $\mu > 0$. Esta solução não é alterada se incluimos a dependência nos fantasmas. No entanto, para mostrar que este resultado vale quanticamente os fantasmas desempenham um papel fudamental. Isto é um trabalho que sera publicado em breve, escrito em conjunto com o Prof. Nathan Berkovits.

Para concluir este capítulo vela mencionar mais uma vez que os resultados descritos aqui podem ajudar o desenvolvimento de uma das áreas mais ativas na teoria de cordas. Infelizmente ainda não é claro como usar estas infinitas leis de conservação para uma quantização exata. Uma possível direção seria tentar utilizá-las para obter equações diferenciais para as funções de correlação na folha-mundo. Isto poderia ajudar o cálculo exato de uma função de 4 pontos de estados da supercordas. Com isto, seria possível calcular o espectro exatamente.

Capítulo 6

Conclusão

Natura contumax est, non potest vinci, suum poscit

Sêneca

Foram descritos dois formalismo para a supercorda que possuem duas importantes vantagens em relação aos formalismos usuais. Em primeiro lugar a supersimetria é manifesta. Ainda, podem ser quantizados de maneira covariante e a ação no espaço plano é uma ação livre. Estas três características permitem, por exemplo, estudar backgrounds curvos, fluxos RR e cálculos de amplitudes supersimétricas. A ferramenta fundamental sendo a teoria conforme de campos em $d = 2$.

Dado o importante papel da supersimetria e de espaços mais complexos que o espaço plano em todos os desenvolvimentos recentes da teoria de cordas, um novo formalismo com as características acima é uma ferramenta muito útil.

Alguns novos trabalhos já estão em desenvolvimento. Junto com o Prof. Nathan Berkovits, estou dando continuidade ao estudo da quantização da supercorda em $AdS_5 \times S^5$. Conseguimos mostrar que a ação efetiva não recebe correções quânticas. Este resultado tem duas consequências importantes. Em primeiro lugar, isso mostra que não existem anomalias nas simetrias clássicas da ação. Segundo, as equações de movimento efetivas não recebem correções quânticas. Isto, por sua vez, implica que as correntes planas discutidas no último capítulo ainda existem depois de quantizar a teoria. Esta é mais uma indicação da possibilidade de usar os métodos de modelos integráveis na folha mundo. Talvez seja possível calcular o espectro de massa completo. Este seria um resultado de extrema importância na conjectura AdS/CFT.

Apesar de não discutidos aqui, existem outros formalismo covariantes. Por exemplo, o formalismo $U(4)$ esta sendo utilizado para estudar D-branas no espaço plano e em espaço tipo onda plana. Este trabalho esta sendo feito junto com o Dr. Luciano Barosi. Os espaços tipo onda plana despertaram interesse devido ao limite BMN [35] da correspondência AdS/CFT. O formalismo híbrido em quatro dimensões esta sendo usado para continuar o trabalho da quantização da supercorda no espaço $AdS_2 \times S^2$. Isto está sendo feito em colaboração com Willian Linch, da Maryland University. Estamos interessados nas correções quânticas na álgebra de correntes da teoria. Apesar de perturbativo, este resultado pode ajudar a encontrar o modelo de matrizes dual adequado para descrever a Física não perturbativa deste modelo. Além deste resultado direto, o estudo deste modelo simplificado pode ajudar a resolver o problema da supercorda em $AdS_5 \times S^5$.

A Teoria de Cordas ainda está muito longe de poder ser considerada a teoria que descreve a Natureza. No entanto sua estrutura é rica o suficiente para acomodar generalizações supersimétricas do Modelo Padrão. Ainda não sabemos se a supersimetria é ou não uma simetria da Natureza. Se ela não for descoberta na próxima geração de asceleradores, ainda não temos motivos para abandonar a Teoria de Cordas. A teoria (ainda) não consegue nos dizer em qual escala a supersimetria é quebrada. Apesar disso, os modelos supersimétricos são os mais utilizados para solucionar problemas no Modelo Padrão.

Em um ponto de vista pessimista, mesmo que a Teoria de Cordas não seja a Teoria de Tudo, seu estudo ainda pode nos ajudar a entender problemas da Física real. Por exemplo, a dimensão $d = 4$ parece ser um limite máximo na dimensão da Teoria Quântica de Campos com invariância de gauge renormalizáveis. A série perturbativa da Teoria de Supercordas é *finita* . Talvez um dia será possível mostrar, através de compactificações, o porque da dimensão quatro ser especial.

Um segundo exemplo vem da conjectura AdS/CFT. Ela nos deu uma visão totalmente nova sobre teorias de gravitação e teorias de gauge. Um exemplo desta nova linguagem é que o confinamento de uma teoria de gauge definida fronteira do espaço AdS esta relacionado com a existência de um limite mínimo para o fator de *redshift* no *bulk*. Exitem outros exemplos de interessantes relaçõesdeste tipo. Portanto, mesmo podendo ser descartada no futuro, a Teoria de Cordas ainda pode nos ensinar novas maneiras de ver fenômenos do mundo real.

Nunc est bibendum

Horácio

Bibliografia

[1] Nathan Berkovits and Brenno Carlini Vallilo. Consistency of super-poincare covariant superstring tree amplitudes. *JHEP*, 07:015, 2000. hep-th/0004171.

[2] Nathan Berkovits, Sergei Gukov, and Brenno Carlini Vallilo. Superstrings in 2d backgrounds with r-r flux and new extremal black holes. *Nucl. Phys.*, B614:195, 2001. hep-th/0107140.

[3] Nathan Berkovits and Brenno Carlini Vallilo. One loop n-point superstring amplitudes with manifest d = 4 supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B624:45, 2002. hep-th/0110168.

[4] Brenno Carlini Vallilo. One loop conformal invariance of the superstring in an ads(5) x s(5) background. *JHEP*, 12:042, 2002. hep-th/0210064.

[5] Brenno Carlini Vallilo. Flat currents in the classical ads(5) x s**5 pure spinor superstring. 2003. hep-th/0307018.

[6] Osvaldo Chandia and Brenno Carlini Vallilo. Conformal invariance of the pure spinor superstring in a curved background. 2003. hep-th/0401226.

[7] Paul Ginsparg. Applied conformal field theory. 1988. hep-th/9108028.

[8] Daniel Friedan. Introduction to polyakov's string theory. To appear in Proc. of Summer School of Theoretical Physics: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, Les Houches, France, Aug 2-Sep 10, 1982.

[9] Alexander M. Polyakov. Gauge fields and strings. CHUR, SWITZERLAND: HARWOOD (1987) 301 P. (CONTEMPORARY CONCEPTS IN PHYSICS, 3).

[10] Warren Siegel. Fields. 1999. hep-th/9912205.

[11] J. Wess and J. Bagger. Supersymmetry and supergravity. Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 259 p.

[12] Matthew J. Strassler. An unorthodox introduction to supersymmetric gauge theory. 2003. hep-th/0309149.

[13] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. Superstring theory. vol. 1: Introduction. Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[14] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. Superstring theory. vol. 2: Loop amplitudes, anomalies and phenomenology. Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[15] J. Polchinski. String theory. vol. 1: An introduction to the bosonic string. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p.

[16] J. Polchinski. String theory. vol. 2: Superstring theory and beyond. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 531 p.

[17] Nathan Berkovits. Covariant quantization of the green-schwarz superstring in a calabi-yau background. *Nucl. Phys.*, B431:258–272, 1994. hep-th/9404162.

[18] Nathan Berkovits and Cumrun Vafa. N=4 topological strings. *Nucl. Phys.*, B433:123–180, 1995. hep-th/9407190.

[19] Nathan Berkovits. Quantization of the type ii superstring in a curved six- dimensional background. *Nucl. Phys.*, B565:333–344, 2000. hep-th/9908041.

[20] Nathan Berkovits. Quantization of the superstring with manifest u(5) super- poincare invariance. *Phys. Lett.*, B457:94–100, 1999. hep-th/9902099.

[21] Lance J. Dixon. Some world sheet properties of superstring compactifications, on orbifolds and otherwise. Lectures given at the 1987 ICTP Summer Workshop in High Energy Phsyics and Cosmology, Trieste, Italy, Jun 29 - Aug 7, 1987.

[22] Nathan Berkovits. Off-shell supersymmetry versus hermiticity in the superstring. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2891–2892, 1996. hep-th/9604121.

[23] Nathan Berkovits and Cumrun Vafa. On the uniqueness of string theory. *Mod. Phys. Lett.*, A9:653–664, 1994. hep-th/9310170.

[24] M. R. Douglas et al. A new hat for the c = 1 matrix model. 2003. hep-th/0307195.

[25] Nathan Berkovits. Cohomology in the pure spinor formalism for the superstring. *JHEP*, 09:046, 2000. hep-th/0006003.

[26] Nathan Berkovits and Osvaldo Chandia. Massive superstring vertex operator in d = 10 superspace. *JHEP*, 08:040, 2002. hep-th/0204121.

[27] Nathan Berkovits and Paul S. Howe. Ten-dimensional supergravity constraints from the pure spinor formalism for the superstring. *Nucl. Phys.*, B635:75–105, 2002. hep-th/0112160.

[28] Nathan Berkovits. Multiloop amplitudes and vanishing theorems using the pure spinor formalism for the superstring. 2004.

[29] Juan M. Maldacena. Tasi 2003 lectures on ads/cft. 2003. hep-th/0309246.

[30] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin. Type iib superstring action in ads(5) x s(5) background. *Nucl. Phys.*, B533:109–126, 1998.

[31] Nathan Berkovits and Osvaldo Chandia. Superstring vertex operators in an ads(5) x s(5) background. *Nucl. Phys.*, B596:185–196, 2001. hep-th/0009168.

[32] N. Berkovits, M. Bershadsky, T. Hauer, S. Zhukov, and B. Zwiebach. Superstring theory on ads(2) x s(2) as a coset supermanifold. *Nucl. Phys.*, B567:61–86, 2000. hep-th/9907200.

[33] Iosif Bena, Joseph Polchinski, and Radu Roiban. Hidden symmetries of the ads(5) x s**5 superstring. *Phys. Rev.*, D69:046002, 2004. hep-th/0305116.

[34] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, and K. D. Rothe. Nonperturbative methods in two-dimensional quantum field theory. Singapore, Singapore: World Scientific (2001) 832 p.

[35] David Berenstein, Juan M. Maldacena, and Horatiu Nastase. Strings in flat space and pp waves from n = 4 super yang mills. *JHEP*, 04:013, 2002. hep-th/0202021.