

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

KELVIN DOS SANTOS ALVES

ESTABILIDADE TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS

Guaratinguetá

2024

KELVIN DOS SANTOS ALVES

ESTABILIDADE TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS

Dissertação apresentada ao Conselho do Programa de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física e Astronomia .

Orientador: Profº Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti

Guaratinguetá

2024

A474e	Alves, Kelvin dos Santos Estabilidade termodinâmica de buracos negros / Kelvin dos Santos Alves – Guaratinguetá, 2024. 106 : il. Bibliografia: f. 96-99 Dissertação (Mestrado em Física e Astronomia) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2024. Orientador: Prof. Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti 1. Buracos negros (Astronomia). 2. Entropia. 3. Mecânica estatística. 4. Termodinâmica. I. Título. CDU 52(043)
-------	--

Luciana Máximo
Bibliotecária CRB-8/3595



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

KELVIN DOS SANTOS ALVES

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

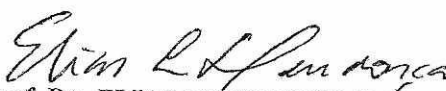
PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: MESTRADO

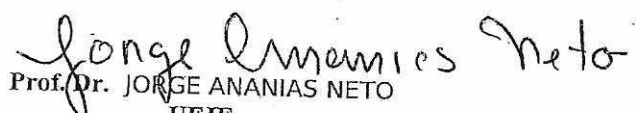
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ROGÉRIO TEIXEIRA CAVALCANT
Orientador - UNESP


Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP


Prof. Dr. JORGE ANANIAS NETO
UFJF

MARÇO de 2024

DADOS CURRICULARES

KELVIN DOS SANTOS ALVES

NASCIMENTO 14 de Abril de 2000 - Sorocaba / SP

FILIAÇÃO Gilberto Alves Pereira
Raimunda de Jesus dos Santos Alves

2018 / 2022 Bacharelado em Física
Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”
Faculdade de Engenharia e Ciências

2022 / 2024 Mestrado em Física e Astronomia
Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”
Faculdade de Engenharia e Ciências

Em memória do meu avô, Nelson Lucas.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos são sempre um risco, pois há sempre uma possibilidade de ser injusto com pessoas que fizeram parte do percurso e acabaram deixadas ao esquecimento. Àquelas pessoas que assim se sintam, peço desculpas antecipadas. No mais, gostaria de deixar minha gratidão para algumas pessoas que no momento me vêm a memória e foram importantes na minha trajetória até aqui.

Aos meus pais, pelo incentivo, suporte e apoio incondicional. Principalmente, por proporcionarem condições para que pudesse me desenvolver e estudar.

À minha irmã, pelo carinho, conversas e risadas. Um refúgio para os momentos difíceis.

Aos meus companheiros e companheiras da sala 25, conhecida como Wignestão, João Miguel, Lucas, Bárbara e Duda. Amizades inigualáveis com quem tive conversas que me tiraram muitas risadas, conselhos e reflexões.

À Rosi, uma amizade preciosa que fiz durante esse percurso e com quem compartilhei muito das frustrações, anseios e momentos bons. Sou grato pelos ensinamentos que ela compartilhou comigo e que com certeza fizeram e fazem grandes diferenças na minha trajetória pessoal e profissional.

Ao Nicolas pelos ótimos momentos, pelos ensinamentos sobre a vida e pela paciência comigo.

Ao Ronaldo pela amizade e pelos conselhos enriquecedores sobre o presente trabalho.

Ao professor Júlio pelas frutíferas contribuições tanto ao presente trabalho, quanto a outras que transcendem o escopo dessa dissertação.

Ao meu orientador, Rogério, pela paciência, por confiar no meu trabalho, pelos conselhos profissionais e por ser um profissional inspirador.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

*Não adentre a boa noite apenas com ternura,
A velhice queima e clama ao cair do dia,
Fúria, fúria contra a luz que já não fulgura.
Embora os sábios, no fim da vida, saibam que é a treva que perdura,
Pois suas palavras não mais captura a centelha tardia,
Não adentre a boa noite apenas com ternura.
(Dylan Thomas)*

Se admitirmos uma Primeira Causa, a mente ainda anseia por saber de onde ela veio e como surgiu.
(Dan Brown)

RESUMO

O objetivo central do presente trabalho é investigar a estabilidade termodinâmica de buracos negros por meio de ferramentas, além da abordagem clássica, que parte da entropia de Bekenstein-Hawking. Inicia-se com um estudo de ferramentas necessárias de mecânica estatística, como a entropia de Boltzmann-Gibbs e Tsallis, além de suas propriedades. As introduções dos funcionais entrópicos de Rényi, Delta e de Bekenstein-Hawking também são feitas. Com isso, propõe-se a investigar a estabilidade termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild e de buracos negros com cabelo diante de outras entropias além da entropia de Bekenstein-Hawking, como a de Rényi e a de Tsallis, valendo-se também do método de Poincaré. Por fim, propõe-se utilizar da geometria termodinâmica para investigar a estabilidade termodinâmica do buraco negro de Kerr.

PALAVRAS-CHAVE: Buracos Negros. Estabilidade Termodinâmica. Entropia.

ABSTRACT

The central objective of this work is investigate the thermodynamic stability of black holes using tools, in addition to the approach classical, which starts from Bekenstein-Hawking entropy. It begins with a study of necessary statistical mechanics tools, such as Boltzmann-Gibbs and Tsallis entropy, in addition to their properties. The introduction of Rényi, Delta and Bekenstein-Hawking entropic functionals are also carried out. With this, it is proposed to investigate the thermodynamic stability of the Schwarzschild black hole and black holes with hair in the face of entropies other than the Bekenstein-Hawking entropy, such as Rényi and Tsallis, also using the Poincaré method. Finally, it is proposed to use thermodynamic geometry to investigate the thermodynamic stability of the Kerr black hole.

KEYWORDS: Black Holes. Thermodynamic Stability. Entropy.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Diagrama denotando o experimento com as três possibilidade de resultados, cada um associado as probabilidades p_1, p_2 e p_3	24
Figura 2	Diagrama denotando o experimento. Inicialmente tem-se duas possibilidade de escolhas. A escolha com probabilidade $p'_1 = 1/2$ leva ao resultado 1. Já a escolha $p'_2 = 1/2$ se subdivide em duas outras escolhas possíveis com probabilidades $p_{21} = 1/3$ e $p_{22} = 2/3$, cada uma leva ao resultado 2 e 3, respectivamente. . . .	24
Figura 3	Diagrama denotando o experimento com as quatro possibilidade de resultados, cada um associado as probabilidades p_1, p_2, p_3 e p_4	33
Figura 4	Diagrama denotando o experimento. Inicialmente tem-se duas possibilidade de resultados. A escolha com probabilidade $p_L = 7/12$ se subdivide em outras duas escolhas com probabilidades $p_1/p_L = 4/7$ e $p_2/p_L = 3/7$ que leva aos resultados 1 e 2. Já a escolha $p_M = 5/12$ se subdivide em duas outras escolhas possíveis com probabilidades $p_3/p_M = 2/5$ e $p_4/p_M = 3/5$, cada uma leva aos resultados 3 e 4, respectivamente.	34
Figura 5	Esquerda: Uma escolha com 9 possibilidade equiprováveis. Portanto a probabilidade de que uma das possibilidades seja escolhida é de $1/9$. Nesse caso em particular, $s = 3$ e $m = 2$. Direita: Duas escolhas ($m=2$), com 3 ($s=3$) possibilidades equiprováveis cada. Portanto, na primeira escolha tem 3 possibilidades, tem-se, então, a probabilidade de $1/3$ de que uma das possibilidades seja escolhida. Na segunda escolha há 3 possibilidades de escolha, a probabilidade de que uma das possibilidades seja escolha é também de $1/3$. No fim, após a duas escolhas serem realizadas, a probabilidade final de que um dos resultados seja atingido é de $1/9$	35
Figura 6	Buraco negro representado pela esfera denotada por B e o ambiente que ele está inserido U representa o universo. O buraco negro pode ser compreendido como um subsistema B do sistema U	45
Figura 7	Curva da variável termodinamicamente conjugada β em função do parâmetro de controle μ^a . O ponto B indica o ponto de inflexão, ou seja, onde existe uma reta tangente vertical que denota a mudança de estabilidade. Os pontos A e C indicam, respectivamente, uma região de instabilidade e uma região mais estável.	48

- Figura 8 **Esquerda:** entropia de Bekenstein-Hawking em linha tracejada vermelha e a entropia de Rényi para o buraco negro de Schwarzschild em linha sólida verde para $\lambda = 0.2$. **Direita:** temperatura Hawking em linha vermelha tracejada e em linha verde sólida temperatura de Rényi do buraco negro de Schwarzschild. Note que a entropia de Rényi apresenta uma mudança da concavidade, essa característica é refletida por meio do mínimo da temperatura e implicará, como será verificado mais abaixo, na mudança de sinal da capacidade térmica indicando possível mudança de estabilidade. 51
- Figura 9 **Esquerda:** temperatura recíproca Hawking dada pela linha vermelha tracejada tem comportamento linear e temperatura recíproca de Rényi, que tem um máximo num determinado valor de massa e decresce de modo que tende à zero para valores de M muito grandes. **Direita:** curvas para $-M(\beta)$ considerando o buraco negro de Schwarzschild circundado em um banho térmico infinito de radiação térmica, ou seja, como um ensemble canônico. Em vermelho tracejado associada à entropia de Bekenstein-Hawking e em azul sólido associada à entropia de Rényi. 52
- Figura 10 Capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild analisada pela estatística de Bekenstein-Hawking, em linha tracejada vermelha e em linha sólida verde a analisada via estatística de Rényi. 53
- Figura 11 **Esquerda:** entropia de Tsallis para o buraco negro de Schwarzschild com $q < 1$ em linha verde sólida, $q > 1$ em linha azul pontilhada e em vermelho para $q = 1$, que coincide com a entropia de Bekenstein-Hawking. **Direita:** temperatura obtida via entropia de Tsallis para o buraco negro de Schwarzschild com $q < 1$ em linha verde sólida, $q > 1$ em linha azul pontilhada e em vermelho tracejada $q = 1$ que coincide com a temperatura Hawking. 54
- Figura 12 **Esquerda:** temperatura recíproca Hawking dada pela linha vermelha tracejada tem comportamento linear e é dada para $q = 1$. Temperatura recíproca de Tsallis tem um máximo num determinado valor de massa M_T e decresce de modo que tende à zero para valores de M muito grandes é dada pela linha pontilhada azul para $q > 1$ e para $q < 1$ tem um comportamento linear análogo ao da temperatura recíproca Hawking, denotado pela linha sólida verde. **Direita:** curvas para $-M(\beta)$ considerando o buraco negro de Schwarzschild circundado em um banho térmico infinito de radiação térmica, ou seja, como um ensemble canônico. Em vermelho tracejado para $q = 1$, em verde para $q > 1$ e em preto para $q < 1$ 55
- Figura 13 Capacidade térmica calculada via entropia de Tsallis para o buraco negro de Schwarzschild. Em vermelho está a capacidade térmica para $q = 1$ que coincide com a capacidade térmica obtida via entropia de Bekenstein-Hawking, em verde está a entropia obtida para $q < 1$, que possui um comportamento análogo a entropia de Bekenstein-Hawking e em azul a capacidade térmica para $q > 1$, onde exibe uma possível mudança de estabilidade. 55

- Figura 14 **Esquerda:** Linhas de contorno de $f(r)$ em função de (r, α) para o caso extremo ($\ell = 2Me^{-2}$). **Direita:** raio do horizonte do buraco negro com cabelo r_H em função de α para diferentes valores do parâmetro ℓ . A não linearidade da equação ((3.73)) tem uma pequena influência em r_H 61
- Figura 15 **Esquerda:** temperatura Hawking do buraco negro com cabelo em função do parâmetro de cabelo do horizonte ℓ para diferentes valores de raio do horizonte r_H . Note a baixa temperatura para $\ell \rightarrow 2Me^{-2}$. **Direita:** temperatura Hawking do buraco negro com cabelo em função do raio do horizonte r_H para diferentes valores do parâmetro de cabelo do horizonte ℓ . Quando $r_H \rightarrow 2M$ a temperatura $T_H \rightarrow T_{Shw}$ para qualquer ℓ . Em ambos os casos o parâmetro de desacoplamento α foi eliminado usando a equação (3.73) e o raio $r_H = 2M$ corresponde ao caso extremo. 63
- Figura 16 **Esquerda:** temperatura recíproca β em função da massa do buraco negro com cabelo para diversos valores do raio do horizonte r_H , para um buraco negro com cabelo isolado. **Direita:** $-M$ em função da temperatura recíproca para diversos valores do raio do horizonte r_H , para um buraco negro com cabelo em banho térmico infinito. Em ambos os casos não há retas tangentes verticais, o que indica pela análise do método de Poincaré que não há mudanças de estabilidade. . . . 64
- Figura 17 **Esquerda:** capacidade térmica do buraco negro com cabelo em função do raio do horizonte r_H para diferentes valores de parâmetro de cabelo ℓ . **Direita:** capacidade térmica em função do parâmetro de cabelo ℓ para diferentes valores de raio do horizonte r_H . Em ambos os casos o parâmetro de desacoplamento α foi eliminado usando a equação (3.73) e o raio $r_H = 2M$ corresponde ao caso extremo. Note a descontinuidade para $\ell < 0.36$ e $r_H < 5$ 65
- Figura 18 **Esquerda:** temperatura de Rényi para o buraco negro com cabelo para diversos valores do parâmetro ℓ/M para $\alpha = 0.6$. **Direita:** capacidade térmica calculada a partir da entropia de Rényi para o buraco negro com cabelo para diversos parâmetros de ℓ/M , tomando $\alpha = 0.6$ 67
- Figura 19 **Esquerda:** temperatura recíproca de Rényi para o buraco negro com cabelo para diversos valores de ℓ/M e tomando $\alpha = 0.6$. **Direita:** $-M(\beta_R)$ para o buraco negro com cabelo obtido via estatística de Rényi para diversos valores de ℓ/M e com $\alpha = 0.6$ 67
- Figura 20 Sistema A_{V_0} com volume V_0 que contém um subsistema A_V com volume V muito menor que o do sistema ambiente. 70

- Figura 21 **Esquerda:** Temperatura Hawking do buraco negro de Kerr em função da massa, tomada a momento angular constante J_0 . Observa-se que a temperatura tem um máximo e depois decresce conforme a massa do buraco negro aumenta. **Direita:** Velocidade angular do buraco negro em função do momento angular, considerando-se massa uma massa constante M_0 . A velocidade angular cresce até um valor máximo que é atingido no caso extremo em que $J/M_0^2 = 1$. Em ambas imagens, α é tomado como a unidade. 86
- Figura 22 Capacidade térmica do buraco negro de Kerr a momento angular constante e a velocidade angular constante. Note que a capacidade térmica a momento angular constante possui uma divergência em $h = h_c \approx 0.3933$. Para valores menores que h_c ela é negativa, enquanto para valores maiores que h_c ela é positiva. A capacidade térmica a velocidade angular constante é sempre negativa. 87
- Figura 23 **Esquerda:** Gráfico do componente g_{MM} da métrica. Como pode-se observar, ele não é positivo no domínio de J/M^2 e já por isso a condição dos primeiros menores principais não é satisfeita. **Direita:** Determinante da métrica termodinâmica, observa-se que também não é positivo no domínio estudado. Em ambos os gráficos, a constante α e k_B são assumidos como unidade. 88
- Figura 24 Curvatura termodinâmica do buraco negro de Kerr. Note que para $|a| = 1$ a curvatura tende à $R \rightarrow -\infty$ 89
- Figura 25 **Esquerda:** temperatura de Rényi para o buraco negro de Kerr para diversos valores de λJ_0 . Note que o momento angular J_0 é tomado como fixo. Pode-se observar que conforme o valor de λJ_0 aumenta, a temperatura passa a crescer com o incremento de massa ao buraco negro. Comportamento oposto ao que acontece com a temperatura Hawking dada por $\lambda J_0 = 0$. **Direita:** Em linha roxa pontilhada são os valores para os quais o denominador de $C_{\Omega R}$ se anula e a capacidade térmica a velocidade angular constante diverge. Em linha tracejada azul são os valores em que o denominador de C_{JR} se anula e a capacidade térmica a momento angular constante diverge. 90
- Figura 26 **Esquerda:** Curvas no espaço (k, h) para $J = J_0$, onde J_0 constante é uma constante. **Direita:** Curvas no espaço (k, h) para $M = M_0$, onde M_0 constante é uma constante. 91
- Figura 27 **Esquerda:** Componente g_{MM}^R da métrica. Note que ela assume valores positivos para $\lambda M_0 > 0.25$, o que está em concordância com o diagrama da Figura 26. **Direita:** Determinante da métrica $g_{\mu\nu}^R$ para diversos valores de λM_0^2 . Note que, também, o determinante passa a assumir valores positivos para $\lambda M_0 > 0.25$. . . 92
- Figura 28 Subsistemas A e B separados por uma parede. O subsistema A tem uma energia U_A , volume V_A e número de partículas N_A . O subsistema B tem uma energia U_B , volume V_B e número de partículas N_B 104

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTOS	19
2.1	MECÂNICA ESTATÍSTICA DE BOLTZMANN-GIBBS	19
2.1.1	ENTROPIA DE BOLTZMANN-GIBBS	19
2.1.2	PROPRIEDADES DA ENTROPIA DE BOLTZMANN-GIBBS	21
2.2	MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA	28
2.2.1	A ENTROPIA S_q	28
2.2.1.1	PROPRIEDADES DA ENTROPIA S_q	30
2.2.2	OUTRAS POSSIBILIDADES DE FUNCIONAIS ENTRÓPICOS	39
2.3	EXTENSIVIDADE	40
2.4	BURACOS NEGROS E A ENTROPIA DE BEKENSTEIN-HAWKING	42
3	ESTABILIDADE TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS	44
3.1	BURACOS NEGROS COMO SISTEMAS TERMODINÂMICOS	45
3.2	MÉTODO DE POINCARÉ	46
3.3	ESTABILIDADE TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO DE SCHWARZS- CHILD	49
3.4	TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS COM CABELO OBTIDO VIA DESACOPLAMENTO GRAVITACIONAL	56
3.4.1	INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE DESACOPLAMENTO GRAVITACIONAL	56
3.4.2	ESTABILIDADE TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS COM CA- BELO	61
3.4.3	ESTABILIDADE DE BURACOS NEGROS COM CABELO VIA ESTATÍS- TICA DE RÉNYI	66
3.5	SUMARIZANDO RESULTADOS	67
4	GEOMETRIA TERMODINÂMICA, ESTABILIDADE E BURACOS NEGROS	69
4.1	FLUTUAÇÕES COM UMA VARIÁVEL	70
4.1.1	PROBLEMA SOBRE A CONSISTÊNCIA E COVARIÂNCIA COM UMA VARIÁVEL	72
4.2	FLUTUAÇÕES EM MAIS DE UMA VARIÁVEL	73
4.3	GEOMETRIA DE WEINHOLD	78
4.4	CURVATURA TERMODINÂMICA	80
4.4.1	EXEMPLOS	81
4.4.1.1	GÁS IDEAL	81
4.4.1.2	FLUIDO DE VAN DER WAAALS	82
4.5	GEOMETRIA TERMODINÂMICA APLICADA A BURACOS NEGROS	84

4.5.1	BURACO NEGRO DE KERR	85
4.5.2	BURACO NEGRO DE KERR VIA ESTATÍSTICA DE RÉNYI	89
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
	REFERÊNCIAS	96
	APÊNDICE A – ELEMENTOS INTRODUTÓRIOS DE TERMODINÂMICA	
	CLÁSSICA	100
A.1	POSTULADOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA	100
A.2	CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	102

1 INTRODUÇÃO

Buracos negros são objetos intrigantes que há décadas desafiam os limites da física estabelecida. Eles estão associados a fenômenos altamente energéticos, como a fusão de buracos negros e consequente emissão de ondas gravitacionais, o colapso gravitacional e a emissão de jatos cósmicos relativísticos. Além disso, desempenham um papel central na pesquisa contemporânea de física de altas energias (CAVALCANTI; ALVES; SILVA, 2022).

As recentes observações realizadas pela colaboração *Event Horizon Telescope*, a detecção de ondas gravitacionais, bem como a série de observações realizadas pelos grupos liderados por Reinhard Genzel e Andrea M. Ghez, laureados com o prêmio Nobel de física em 2020, conduziram a física de buracos negros a uma nova era, concretizando resultados teóricos e elevando seu interesse como objeto astrofísico.

Do ponto de vista teórico, buracos negros desempenham um importante papel em aspectos fundamentais da Relatividade Geral, sendo catalisadores do desenvolvimento de um ferramental matemático extremamente rico. Esses resultados foram intensamente desenvolvidos nas décadas de 1960 e 1970, quando propriedades de soluções exatas e estacionárias foram investigadas e colocadas em bases sólidas por Penrose, Geroch, Hawking, Carter e outros.

Foi também durante a década de 1970, juntamente com os desenvolvimentos das leis associadas à mecânica de buracos negros, que se desenvolveu a denominada termodinâmica de buracos negros. O desenvolvimento dessa área deve-se, principalmente, às semelhanças das leis mecânicas associadas a esses objetos e as leis da termodinâmica clássica.

No ano de 1972 Bekenstein em um trabalho referência (BEKENSTEIN, 1972) introduz a possibilidade de associar uma entropia a um buraco negro e essa seria proporcional a área do seu horizonte de eventos. Esse resultado é hoje denominado entropia de Bekenstein-Hawking, devido ao fato desse último encontrar o valor da constante de proporcionalidade estimado heurísticamente por Bekenstein. Três anos depois, Hawking (HAWKING, 1975) mostrou que, na presença de campos quânticos, os buracos negros emitem radiação, por consequência possuem uma temperatura associada. Essa radiação foi posteriormente chamada de radiação Hawking.

Entretanto, de uma perspectiva termodinâmica, a entropia de Bekenstein-Hawking é um assunto que tem causado certo espanto. Tsallis (TSALLIS, 2019) em uma publicação que discute a entropia de buracos negros afirma que existem dois motivos para tal espanto: o primeiro é porque buracos negros são sistemas tridimensionais, o que levaria a propor uma entropia proporcional ao seu volume e o segundo motivo seria o fato dessa entropia ser interpretada como a entropia de Boltzmann-Gibbs, o que faz com que a mesma não seja extensiva.

Enquanto um conceito termodinâmico, a entropia foi introduzida inicialmente por Clausius no século XIX. No entanto, somente com os trabalhos de Boltzmann e Gibbs ela ocupa um papel central na física. A mecânica estatística centrada na entropia de Boltzmann-Gibbs, em conjunto com a Mecânica Clássica e Quântica, Eletromagnetismo e Relatividade, é um dos pilares centrais da física contemporânea e ainda assunto de intensa pesquisa.

A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs está calcada no fato de que a função entropia é aditiva para junção de dois sistemas probabilisticamente independentes. E uma vez que não pode ser obtida a partir de primeiros princípios, não é derivada de uma dinâmica microscópica (TSALLIS et al., 2003). No que tange a sua formalização, foi com os trabalhos de Shannon (SHANNON, 1964) em 1948 e de Khinchin (KHINCHIN, 1957) em 1953 que foi proposto um conjunto de axiomas sobre a forma funcional da entropia, sendo a entropia de Boltzmann-Gibbs a única que satisfaz tal conjunto.

Uma proposta de um novo funcional de entropia foi feita em 1988 por Tsallis (TSALLIS, 1988). A entropia de Tsallis é denotada normalmente por S_q na literatura da denominada mecânica estatística não-extensiva. Ela é uma generalização que possui a entropia de Boltzmann-Gibbs como um caso particular e parece descrever sistemas naturais e artificiais com bastante precisão. Esse novo funcional possibilita descrever uma classe de sistemas correlacionados não localmente, e o parâmetro q está relacionado com essa não localidade dos sistemas e teoricamente pode ser determinado pela dinâmica microscópica dos mesmos (TSALLIS et al., 2003).

A propriedade escolhida para ser generalizada é a aditividade, uma vez que a entropia de Tsallis é não aditiva, por vezes chamada de pseudo-aditiva. Esse é um pequeno preço a se pagar para que a extensividade dos sistemas seja restaurada. A questão é que, a generalização desse funcional permite que a termodinâmica seja satisfeita, restaurando a extensividade de sistemas que são não-extensivos quando estudados da perspectiva da entropia de Boltzmann-Gibbs. Outras generalizações do funcional entropia foram propostas, como a entropia de Rényi, denotada por S_q^R . No entanto, o fato de não ser experimentalmente robusta e não côncava para $q > 1$ faz com que a única proposta que pareça adequada para as abordagens termodinâmicas seja S_q . Todavia, uma vez que a entropia de Rényi é aditiva, ela pode ser utilizada para fazer análise Hessiana de estabilidade sistemas termodinâmicos. Estudos recentes a têm colocado como uma alternativa para estudos de estabilidade de buracos negros (CZINNER; IGUCHI, 2016). Essa entropia é obtida via abordagem do logaritmo formal da entropia de Tsallis. Segundo Czinner, é sugerido interpretar a entropia de Bekenstein-Hawking como de Tsallis, e substituí-la diretamente no funcional de Rényi (BIRÓ; CZINNER, 2013) (CZINNER; IGUCHI, 2017). Essa perspectiva foi denominada por Abreu e Neto de entropia de Rényi modificada (ABREU; NETO, 2021).

O estudo da estabilidade termodinâmica de buracos negros possibilita fornecer informações adicionais sobre soluções da relatividade geral, e tem sido um problema discutido por meio de diversas abordagens. Dentre as questões versadas no arcabouço do estudo de estabilidade termodinâmica, está a transição de fase gravitacional, que constitui um dos vários problemas ainda em aberto de física teórica moderna (CZINNER; IGUCHI, 2017).

Uma das técnicas utilizadas, para complementar o estudo de estabilidade de buracos negros é a análise de mudança de estabilidade de sistemas termodinâmicos via método de inflexão de Poincaré. Essa abordagem não diz se um sistema termodinâmico é estável ou instável, mas se esse passa de um estado de maior estabilidade para um estado menor estabilidade ou vice-versa. Esse método tem sido aplicado diretamente ao estudo de termodinâmica de buracos negros para análise desses em diferentes ensembles termodinâmico (KABURAKI; OKAMOTO; KATZ, 1993).

Outro formalismo que vem sendo utilizado para o estudo da estabilidade termodinâmica de buracos

negros, além dos já supracitados, é a geometria termodinâmica proposta por Ruppeiner (RUPPEINER, 1979). A teoria se fundamenta em flutuações estatísticas de parâmetros termodinâmicos, como a energia interna, em torno de estados de equilíbrio para obter uma métrica riemanniana por meio da entropia, em uma variedade constituída por estados de equilíbrio termodinâmico.

Diante disso, o presente trabalho tem como principal objetivo expor uma abordagem ampla sobre os diversos funcionais de entropias proposto na literatura, apresentando suas propriedades e fazendo uma discussão acerca do problema apresentados sobre a entropia proposta para buracos negros, denominada de entropia de Bekenstein-Hawking. Além disso, pretende-se analisar a estabilidade termodinâmica de uma solução de buracos negros com cabelo (OVALLE et al., 2021) e a possível existência de transição de fase, usando funcionais entrópicos além da entropia de Bekenstein-Hawking. Uma construção sobre a geometria termodinâmica também é realizada e a estabilidade do buraco negro de Kerr é discutida, via entropia de Bekenstein-Hawking e entropia de Rényi.

A organização do trabalho esta colocada da seguinte forma:

- No capítulo 2 é apresentado um delineado sobre mecânica estatística partindo da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs e apresentando suas propriedades fundamentais. No que segue, é apresentado um desenvolvimento da mecânica estatística não-extensiva e estudada, centralmente, a entropia de Tsallis e suas propriedades. Também é introduzida a entropia de Rényi e de Bekenstein-Hawking.
- No capítulo 3 é apresentado o método de Poincaré para realizar estudo de estabilidade por meio de gráficos de variáveis conjugadas em função de variáveis de controle. Com o ferramental introduzido é feito o estudo da estabilidade do buraco negro de Schwarzschild e de buracos negros com cabelos obtidos via desacoplamento gravitacional.
- No capítulo 4 é realizada uma construção da geometria termodinâmica proposta por Ruppeiner e por meio dessa é analisada a estabilidade termodinâmica do buraco negro de Kerr diante de dois funcionais entrópicos.
- Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as considerações finais do presente trabalho.

Muitas das construções realizadas no presente trabalho está em unidades de Planck, no caso, considera-se $c = k_B = G = \hbar = 1$, onde c é a velocidade da luz, k_B é a constante de Boltzmann, G a constante da gravitação universal e $\hbar$ a constante de Planck h dividida por 2π . O leitor será introduzido de modo claro quando as mesmas forem utilizadas.

2 FUNDAMENTOS

2.1 MECÂNICA ESTATÍSTICA DE BOLTZMANN-GIBBS

2.1.1 ENTROPIA DE BOLTZMANN-GIBBS

Com o surgimento e avanço da revolução industrial durante o século XIX, fez-se necessário a otimização dos processos industriais e o aumento da eficiência de máquinas térmica que estavam sendo desenvolvidas e funcionavam a vapor. Máquinas térmicas, como os trens, por exemplo, que são a vapor, nada mais são do que máquinas operando entre dois reservatórios térmicos, utilizando o calor de uma fonte quente para converter em trabalho e liberando uma parte desse calor no ambiente, denominado de fonte fria. Nesse contexto que nasce a Termodinâmica e se inserem os trabalhos do engenheiro Sadi Carnot, que propunha entender como aumentar o rendimento de uma máquina térmica, de modo que ela se tornasse o mais eficiente possível (NUSSENZVEIG, 2014). A gênese do conceito de entropia tem origem nesse período. O interesse acerca do desenvolvimento desses conceitos perpassava o desenvolvimento científico e tinha consigo também um viés político-econômico. Posteriormente aos trabalhos de Carnot, Clausius em 1850 e o William Thomson em 1851 elaboraram de modo distinto, mas equivalente, a segunda lei da termodinâmica baseando-se nas suas ideias.

Os estudos de Clausius que culminaram na segunda lei da termodinâmica, focaram-se em analisar a reversibilidade e irreversibilidade de máquinas térmicas atuando entre dois reservatórios térmicos, um denominado de fonte quente e o outro denominado de fonte fria. Foi notado por ele que a variação total de uma determinada grandeza, denominada entropia, é nula para processos reversíveis e maior que zero se o sistema for termicamente isolado. Assim posto, a entropia surge inicialmente como uma medida da irreversibilidade de um sistema, no referencial termodinâmico (NASCIMENTO; PRUDENTE, 2016).

Entre o final do século XIX e início do século XX, Boltzmann introduz uma interpretação estatística à termodinâmica utilizando como ponto de partida a ideia de que o calor é produzido pelo movimento das moléculas de um corpo e para isso utiliza-se como base a teoria cinética dos gases de Maxwell. Considere duas moedas idênticas, cada moeda possui duas possibilidades em um lançamento, cara ou coroa, juntas as moedas possuem quatro possibilidades em um lançamento, cada uma das possibilidades desse lançamento das moedas será denominado de um microestado, que pode ser entendido como as configurações possíveis que o sistema pode acessar. Toda construção de Boltzmann conduz ao seu importante teorema, que tem como resultado o fato de que quanto maior o número de microestados associados a um determinado estado, maior a probabilidade que esse estado ocorra (REIS; BASSI, 2012) e resulta na entropia de Boltzmann, dada por

$$S_B(W) = k_B \ln W, \quad (2.1)$$

onde W é o número de microestados acessíveis ao sistema e k_B é a constante de Boltzmann. A entropia introduzida por Boltzmann, assume o papel de medidas de possibilidades do sistema físico que passa a assumir um carácter probabilístico.

Mais adiante, Gibbs introduz o conceito de ensemble, como um conjunto de microestados acessíveis a um determinado sistema, para estudar termodinâmica estatística. Por meio desse formalismo, ele introduz a denominada entropia de Boltzmann-Gibbs

$$S_{BG}(\{p_i\}) = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (2.2)$$

sendo W o conjunto de estados microscópicos discretos e p_i a probabilidade do sistema acessar um determinado estado microscópico i . A probabilidade obedece a condição de normalização

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1, \quad (2.3)$$

e a constante k é arbitrária, uma vez que sua aplicabilidade não se restringe à termodinâmica. Na perspectiva termodinâmica, a constante k é retomada como a constante de Boltzmann k_B . Por vezes, um novo sistema de unidades pode ser adotado, de modo que a constante k é assumida como sendo unitária, sem perda de generalidade (TSALLIS et al., 2003). Pode-se notar que para um conjunto de estado equiprováveis, ou seja, um conjunto em que todos os i -ésimos estados microscópicos são igualmente acessíveis, a probabilidade é dada por $p_i = 1/W$ e o funcional dado na equação (2.2) torna-se a entropia de Boltzmann dada pela equação (2.1)

Em meados da metade do século XX, o engenheiro e matemático Claude Shannon em seu trabalho *The Mathematical Theory of Communication* (SHANNON, 1964) utiliza da teoria de probabilidades em teoria da informação e comunicação, contexto totalmente desconexo da termodinâmica e física estatística, e obtém uma expressão para a medida da incerteza da taxa informação produzida em um processo.

Em um diálogo com matemático John von Neumann, Shannon relata que estava indeciso como deveria chamar a expressão encontrada por ele e sugere denomina-lá de *informação*, mas justifica que a palavra já é bastante usada e então propõe chamá-la de *incerteza*. Em resposta, Neumann diz: “você deveria chama-lá de entropia por dois motivos. Em primeiro lugar é que sua função incerteza vem sendo usada em mecânica estatística por meio desse nome, logo ela já tem um nome. Em segundo lugar e mais importante, ninguém sabe o que a entropia realmente é, então no debate você sempre terá uma vantagem” (TRIBUS; MCIRVINE, 1971). O fato é que a entropia de Boltzmann-Gibbs, apesar de ser uma expressão fundamental, surge diferente contexto em física e em teoria da informação, portanto suscita ainda debates sobre o seu significado¹

Para tentar compreender melhor o conceito de entropia, suponha que você e um amigo estão lançando um dado não viciado. Você propõe o desafio que consiste em seu amigo ficar de costas e tentar acertar qual face do dado caiu para cima quando lançado por você. A probabilidade que seu amigo de costas tem de acertar a face correta é de $1/6$, considerando que todas as faces são igualmente prováveis. No entanto, para você que lançou o dado, a probabilidade de acertar a face correta é 1, dado que você consegue ver qual face resultou após o lançamento. Logo, utilizando um ponto de vista da

¹ Uma discussão sobre a interpretação do conceito de entropia em teoria da informação e em mecânica estatística pode ser encontrado em (PINEDA, 2006), bem como, o diálogo conflituoso entre essas diferentes interpretações.

mecânica estatística, a entropia associado ao sistema para o seu amigo é

$$S_{BG} = k_B \ln 6. \quad (2.4)$$

Já para você, a entropia associada ao sistema é nula, uma vez que a probabilidade é 1 para a face que caiu e 0 para as outras faces restantes. Essa concepção possibilita compreender uma característica primordial da entropia, ela depende do observador e da informação que ele contém sobre o sistema. Dessa forma, a entropia pode ser compreendida como a ignorância sobre a informação de um determinado sistema físico.

2.1.2 PROPRIEDADES DA ENTROPIA DE BOLTZMANN-GIBBS

Dada uma contextualização histórica sobre o surgimento do conceito da entropia de Boltzmann-Gibbs e discutida sua interpretação, na subseção prévia. A presente subseção propõe-se a introduzir e demonstrar algumas propriedades matemáticas que fundamentam a entropia de Boltzmann-Gibbs. Dentre os principais resultados que serão apresentados está a aditividade, que é violada para o funcional entropia de Tsallis, como será elucidado na subseção seguinte, os teoremas de unicidades, dentre outras.

ADITIVIDADE

Sejam A e B subsistemas probabilisticamente independentes e $\mathcal{O}$ uma grandeza física associada aos subsistemas, tal que $\mathcal{O}(A)$ está associada à A e $\mathcal{O}(B)$ está associada à B . Diz-se que a grandeza $\mathcal{O}$ é *aditiva* se, e apenas se

$$\mathcal{O}(A + B) = \mathcal{O}(A) + \mathcal{O}(B).$$

Se para os subsistemas A e B independentes, $p_i^{(A)}$ e $p_j^{(B)}$ representam a probabilidade de cada subsistema acessar um determinado microestado, respectivamente, então a probabilidade resultante da composição dos subsistemas é dada por $p_{ij}^{(A+B)} = p_i^{(A)} p_j^{(B)}$ ($\forall(i, j)$), de modo que a função entropia de Boltzmann-Gibbs é dada por

$$\begin{aligned}
S(A+B) &= S_{BG}(\{p_{ij}^{(A+B)}\}) = \sum_{i,j} p_{ij}^{(A+B)} \ln p_{ij}^{(A+B)} \\
&= \sum_{i,j} p_i^{(A)} p_j^{(B)} \ln (p_i^{(A)} p_j^{(B)}) \\
&= \sum_i \sum_j p_i^{(A)} p_j^{(B)} \ln (p_i^{(A)}) + \sum_i \sum_j p_i^{(A)} p_j^{(B)} \ln (p_j^{(B)}) \\
&= \sum_i p_i^{(A)} \ln (p_i^{(A)}) \underbrace{\left(\sum_j p_j^{(B)} \right)}_{=1} + \underbrace{\left(\sum_i p_i^{(A)} \right)}_{=1} \sum_j p_j^{(B)} \ln (p_j^{(B)}) \\
&= \sum_i p_i^{(A)} \ln (p_i^{(A)}) + \sum_j p_j^{(B)} \ln (p_j^{(B)}) \\
&= S_{BG}(\{p_i^{(A)}\}) + S_{BG}(\{p_j^{(B)}\}) = S(A) + S(B)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

e portanto é aditiva.

NÃO NEGATIVIDADE

Se um determinado estado j_0 do sistema é totalmente conhecido, então tem-se que $p_{j_0} = 1$ e $p_j = 0$ ($\forall j \neq j_0$), e portanto

$$S_{BG} = 0.$$

No entanto, para qualquer outro caso, tem-se que $0 < p_j < 1$, para pelo menos dois valores de j e consequentemente $1/p_j > 1$, resultando portanto em

$$S_{BG} = -k \sum_i^W p_i \ln p_i = k \sum_i^W p_i \ln \frac{1}{p_i} > 0, \tag{2.6}$$

o que mostra a não-negatividade a entropia de Boltzmann-Gibbs.

EXPANSIBILIDADE

Se estados possíveis forem adicionados à entropia S_{BG} , de modo que a probabilidade de que eles aconteçam seja nula, então a entropia permanecerá invariante. Portanto

$$S_{GB}(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = S_{GB}(p_1, p_2, \dots, p_W). \tag{2.7}$$

CONCAVIDADE

Considere dois conjuntos de probabilidades $\{p_i\}$ e $\{\tilde{p}_i\}$ que estão associadas ao mesmo sistema, com W microestados. Pode-se definir uma probabilidade intermediária da seguinte maneira

$$p'_i = \alpha p_i + (1 - \alpha)\tilde{p}_i \quad (\forall i; 0 < \alpha < 1). \quad (2.8)$$

A entropia S_{BG} é dita ser côncava se, e apenas se,

$$S_{BG}(\{p'_i\}) > \alpha S_{BG}(\{p_i\}) + (1 - \alpha)S_{BG}(\{\tilde{p}_i\}). \quad (2.9)$$

Como a função $-x \ln x$ possui derivada segunda negativa, ela satisfaz a equação (2.9), e portanto tem-se que

$$-p'_i \ln p'_i > \alpha(-p_i \ln p_i) + (1 - \alpha)(-\tilde{p}_i \ln \tilde{p}_i) \quad (\forall i; 0 < \alpha < 1). \quad (2.10)$$

Realizando a soma sobre todos os estados $\sum_{i=1}^W$ na equação acima, a expressão (2.9) é imediatamente recuperada, concluindo-se que a entropia de Boltzmann-Gibbs é côncava.

TEOREMAS DE UNICIDADE

Foi com os trabalhos de Shannon (SHANNON, 1964) em 1948 e de Khinchin (KHINCHIN, 1957) em 1953 que foi proposto de um conjunto de axiomas sobre a forma funcional da entropia. Sob condições razoáveis, a única entropia que satisfaz tal conjunto é a de Boltzmann-Gibbs. Esses resultados serão introduzidos e discutido a seguir.

TEOREMA DE SHANNON

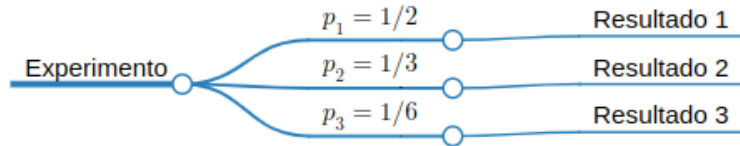
Shannon propõem seu teorema no contexto da teoria da informação, sem nenhuma conexão direta com a termodinâmica ou mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. Ele tinha em mente definir uma quantidade que determinasse a taxa de informação produzida por um sistema. Essa proposta dialoga com a noção de entropia discutida na seção 2.1.1 que a interpreta como uma medida da ignorância de um determinado observador sobre o sistema. Suponha que $p_1, p_2, \dots, p_W$ sejam as probabilidades associadas aos eventos possíveis de um experimento aleatório.

Se existir uma medida $S(p_1, p_2, \dots, p_W)$, que informe quanta escolha está envolvida na seleção dos eventos ou quantidade incerteza sobre o resultado final desse experimento é razoável requerer certas propriedades sobre essa quantidade (SHANNON, 1964):

1. $S(p_1, p_2, \dots, p_W)$ é uma função contínua de $\{p_i\}$;
2. Para o conjunto $\{p_i\}$ de probabilidades equiprováveis, com $p_i = \frac{1}{W}$, a função $S(p_i = 1/W, \forall i)$ deve crescer monotonamente e ser contínua com respeito a W ;
3. Se uma escolha for quebrada em duas escolhas sucessivas, a função $S(p_i)$ original deve ser a soma ponderada dos valores individuais de S ;

Para entender melhor a condição 3, suponha que em um experimento você tenha três possibilidades de resultados e cada possibilidade com uma probabilidade diferente de um determinado resultado ocorrer, sendo dadas respectivamente por $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ e $p_3 = \frac{1}{6}$ como denotado na Figura 1. Nesse caso a entropia associada ao sistema será $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$.

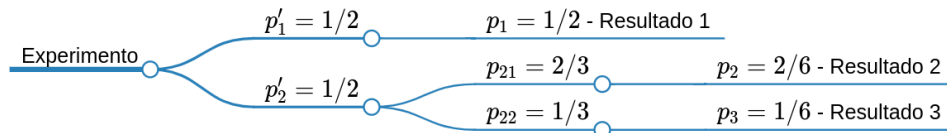
Figura 1 – Diagrama denotando o experimento com as três possibilidade de resultados, cada um associado as probabilidades p_1 , p_2 e p_3 .



Fonte: Produção do próprio autor.

Considere agora um segundo experimento que em uma primeira medida tenha duas possibilidades equiprováveis de obter um determinado resultado, cada uma com probabilidade $p'_1 = p'_2 = \frac{1}{2}$. No entanto, caso a segunda escolha seja feita $p'_2 = \frac{1}{2}$, observa-se que outros dois resultados são possíveis, cada um com probabilidade de $p_{21} = \frac{2}{3}$ e $p_{22} = \frac{1}{3}$ que leva respectivamente aos resultados 2 e 3. A primeira escolha com $p'_1 = \frac{1}{2}$ leva ao resultado 1, ou seja, leva aos mesmo resultados do experimento da Figura 1. Esse segundo experimento pode ser esquematizado como dado na Figura 2. A entropia

Figura 2 – Diagrama denotando o experimento. Inicialmente tem-se duas possibilidade de escolhas. A escolha com probabilidade $p'_1 = 1/2$ leva ao resultado 1. Já a escolha $p'_2 = 1/2$ se subdivide em duas outras escolhas possíveis com probabilidades $p_{21} = 1/3$ e $p_{22} = 2/3$, cada uma leva ao resultado 2 e 3, respectivamente.



Fonte: Produção do próprio autor.

associada ao sistema desse segundo experimento, sob a luz da condição 3 será dada por

$$S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}S\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad (2.11)$$

Teorema 2.1 (Shannon). *A única função $S(\{p_i\})$ que satisfaz as três condições acima é da forma*

$$S(\{p_i\}) = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i. \quad (2.12)$$

Demonstração. Considere que a função $S(p_1, p_2, \dots, p_W)$ possa ser escrita como

$$S(p_1, p_2, \dots, p_W) = \sum_{i=1}^W f(p_i), \quad (2.13)$$

onde $f(p_i)$ é uma função contínua a ser determinada. Como ela é válida para todos os casos, inclusive para os equiprováveis, é suficiente determiná-la nesse caso em que $p_i = 1/W$ e

$$S\left(\frac{1}{W}, \frac{1}{W}, \dots, \frac{1}{W}\right) = Wf\left(\frac{1}{W}\right). \quad (2.14)$$

Pela condição 2, tem-se que

$$\frac{d}{dW} \left[Wf\left(\frac{1}{W}\right) \right] \geq 0 \quad (2.15)$$

Utilizando a condição 3 e considerando um experimento com m possibilidades iguais com que cada escolha possa ser decomposta em n escolhas de possibilidades iguais com $W = nm$, tem-se

$$S\left(\frac{1}{W}, \frac{1}{W}, \dots, \frac{1}{W}\right) = S\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) + S\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = S\left(\frac{1}{nm}, \frac{1}{nm}, \dots, \frac{1}{nm}\right). \quad (2.16)$$

Escrevendo equação 2.16 por meio da equação 2.14, tem-se

$$mf\left(\frac{1}{m}\right) + nf\left(\frac{1}{n}\right) = mnf\left(\frac{1}{mn}\right). \quad (2.17)$$

Adotando $M = \frac{1}{m}$ e $N = \frac{1}{n}$, pode-se reescrever a equação 2.16 como

$$\frac{1}{M}f(M) + \frac{1}{N}f(N) = \frac{1}{MN}f(MN). \quad (2.18)$$

Definindo $h(N) = \frac{1}{N}f(N)$, $h(M) = \frac{1}{M}f(M)$ e $h(MN) = \frac{1}{MN}f(MN)$, obtém-se

$$h(N) + h(M) = h(MN). \quad (2.19)$$

Diferenciando a equação 2.19 em relação a M e também em relação a N , tem-se

$$h'(M) = Nh'(MN), \quad (2.20)$$

$$h'(N) = Mh'(MN). \quad (2.21)$$

Dessas relações obtém-se

$$Mh'(M) = Nh'(N). \quad (2.22)$$

Como as variáveis M e N são independentes, tem-se

$$Mh'(M) = A, \quad (2.23)$$

onde $A = \text{constante}$. E portanto

$$h(M) = A \ln M + C \quad (2.24)$$

com $C = \text{constante}$. Restaurando as variáveis originais

$$mf\left(\frac{1}{m}\right) = A \ln\left(\frac{1}{m}\right) + C \quad (2.25)$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{A}{m} \ln\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{C}{m} \quad (2.26)$$

Se a probabilidade de obter um determinado resultado em um experimento for 1, a incerteza sobre esse resultado deve ser nula, logo $f(1) = 0$, o que conduz à

$$f(1) = C = 0, \quad (2.27)$$

portanto

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = -\frac{A}{m} \ln(m) \quad (2.28)$$

Usando a condição 2 dada pela equação 2.15, tem-se

$$\frac{d}{dm} \left[mf\left(\frac{1}{m}\right) \right] = -\frac{A}{m} \geq 0, \quad (2.29)$$

logo A deve ser negativa. Fazendo a suposição de que $A = -k$, com $k > 0$, restaurando $p = 1/m$

$$f(p) = -kp \ln p, \quad (2.30)$$

e usando a equação 2.13, encontra-se

$$S(p_i) = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i. \quad (2.31)$$

□

TEOREMA DE KHINCHIN

Considere o caso em que dois sistemas A e B são probabilisticamente dependentes, ou seja, o que acontece com A depende com o que ocorre com B , ou vice-versa. Será denotado por $q_{k\ell}$ a probabilidade de um evento B_ℓ acontecer em B , dado que o evento A_k com probabilidade p_k já ocorreu em A . Para exemplificar, assuma um lançamento de dois dados. Qual a probabilidade, de após o lançamento, a soma das faces ser 8 e as faces serem dois número ímpares? Nesse exemplo, a

probabilidade da soma ser 8 está condicionada a face dos dados serem ímpares, logo, o evento A será denotado pelo fato da soma ser 8 e o evento B condicionado ao evento A é a probabilidade de serem faces ímpares. A probabilidade conjunta dos sistemas A e B é dada por

$$\pi_{k\ell} = p_k q_{k\ell}. \quad (2.32)$$

Dado esse sistema conjunto, A e B , pode-se calcular a entropia utilizando a probabilidade conjunta de A e B

$$S(A + B) = - \sum_k \sum_\ell p_k q_{k\ell} \ln(p_k q_{k\ell}), \quad (2.33)$$

$$= - \sum_k \sum_\ell p_k q_{k\ell} [\ln p_k + \ln q_{k\ell}]. \quad (2.34)$$

Utilizando a condição de normalização $\sum_\ell q_{k\ell} = 1$ e definindo $S_k \equiv - \sum_\ell q_{k\ell} \ln q_{k\ell}$, tem-se

$$S(A + B) = S(A) + \sum_k p_k S_k(B). \quad (2.35)$$

Definindo $S(B|A) \equiv \sum_k p_k S_k(B)$, como entropia condicional do sistema B condicionado ao sistema A , reescreve-se

$$S(A + B) = S(A) + S(B|A). \quad (2.36)$$

No caso em que A e B são sistemas probabilisticamente independentes, a equação acima se reduz à

$$S(A + B) = S(A) + S(B). \quad (2.37)$$

Para estabelecer o teorema de unicidade de Khinchin, considere a existência de um funcional entrópico $S(\{p_i\})$ que satisfaz as seguintes propriedades (KHINCHIN, 1957):

1. Para um dado W e para $\sum_{i=1}^W p_i$, a função $S(p_1, p_2, \dots, p_W)$ toma seu maior valor para $p_i = \frac{1}{W}$ ($i = 1, 2, \dots, W$);
2. $S(A + B) = S(A) + S(B|A)$;
3. $S(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = S(p_1, p_2, \dots, p_W)$;

Teorema 2.2 (Khinchin). *Seja $S(p_1, p_2, \dots, p_W)$ uma função definida para qualquer inteiro W e para todos os valores $p_1, p_2, \dots, p_W$ tal que $p_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, W$), $\sum_{i=1}^W p_i = 1$. Se para qualquer W essa função for contínua com respeito a todos os seus argumentos e se ela tem as propriedades 1, 2 e 3, então*

$$S(p_1, p_2, \dots, p_W) = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad (k > 0). \quad (2.38)$$

A demonstração do teorema enunciado acima pode ser encontrada em (KHINCHIN, 1957).

2.2 MECÂNICA ESTATÍSTICA NÃO-EXTENSIVA

A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, apesar de central na física, está calcada no fato de que a função entropia é aditiva para a junção de dois sistemas probabilisticamente independentes, além de não ser universal. Na verdade, o funcional entropia é um conceito “delicado e poderoso construído cuidadosamente para uma classe de sistemas” (TSALLIS, 2009a). Nesse sentido, existe uma classe de sistemas físicos em que a entropia de Boltzmann-Gibbs pode ser adequada para propostas termodinâmicas, como o gás de Van der Waals, mas outros em que ela não é, como o átomo de hidrogênio (LUCENA; SILVA; TSALLIS, 1995).

Abordagens alternativas de entropias têm sido investigadas na literatura. Dentre elas está a efetuada por Tsallis em seu trabalho profícuo de 1988 (TSALLIS, 1988). Em sua proposta, Tsallis sugere uma generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs, violando a aditividade e parametrizando-a por q . Esse parâmetro denota a não-extensividade do sistema e depende em última instância da sua dinâmica microscópica do sistema. Outras abordagens, utilizando diversas propostas de entropias também têm sido adotadas. Dentre elas está a entropia de Rényi (RÉNYI, 1970) e de Tsallis-Cirto (TSALLIS; CIRTO, 2013), que surge como uma proposta de tornar a entropia de Bekenstein-Hawking extensiva.

A presente seção tem como objetivo apresentar essas generalizações de entropia e discutir de modo mais detalhado as propriedades da entropia de Tsallis.

2.2.1 A ENTROPIA S_q

A entropia de Boltzmann-Gibbs dada pela equação (2.2) não é advinda de uma dinâmica microscópica do sistema e portanto assume uma condição de postulado da teoria. No entanto, uma vez conhecida a dinâmica microscópica do sistema, todas as grandezas estatísticas podem ser obtidas. Dado isso, qualquer tentativa de generalização também não deve ser derivada de uma dinâmica microscópica. Na tentativa de obtê-la, pode-se utilizar uma metáfora como feito em (TSALLIS et al., 2003)(TSALLIS, 2019).

A equação diferencial mais simples que pode-se pensar é

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (2.39)$$

sendo $y = \text{constante}$. Outra simples equação que pode ser pensada é

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad (2.40)$$

cujas soluções são dadas por $y = x + \text{constante}$, onde a condição inicial sempre pode ser ajustada para que a constante seja nula ($y(0) = 0$). Na tentativa de tornar menos restritas as equações acima, pode-se propor a seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (2.41)$$

onde a solução com a condição inicial $x(1) = 0$, é dada por

$$x = \ln y, \quad (2.42)$$

e a inversa é $y = e^x$. A solução dada pela equação (2.42) tem a mesma estrutura do funcional de Boltzmann-Gibbs dada na equação (2.1) e portanto satisfaz a aditividade.

$$\ln(x_A x_B) = \ln x_A + \ln x_B. \quad (2.43)$$

Uma generalização das equações diferenciais discutidas acima, de tal forma que inclua os resultados já expostos, pode ser apresentada como

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (q \in \mathbb{R}), \quad (2.44)$$

onde a solução é dada pelo q -logaritmo

$$x = \frac{y^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q y \quad (2.45)$$

e a inversa é dada pela q -exponencial, definida por

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^x. \quad (2.46)$$

Os resultados das equações diferenciais (2.39), (2.40) e (2.41) podem ser retomados para $q \rightarrow -\infty$, $q = 0$ e $q = 1$, respectivamente. A solução satisfaz a pseudo-aditividade

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + (1 - q) \ln_q x_A \ln_q x_B. \quad (2.47)$$

A abordagem supracitada fornece uma ferramenta natural para generalizar a entropia (2.2) para a denominada q -entropia, também conhecida como entropia de Tsallis, utilizando o q -logaritmo como

$$S_q(\{p_i\}) \equiv k \sum_{i=1}^W p_i \ln_q p_i = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad \left(\sum_i p_i = 1 \right). \quad (2.48)$$

Reescrevendo a definição da entropia de Tsallis dada pela equação (2.48) como

$$S_q(\{p_i\}) = k \frac{1 - \sum_i p_i p_i^{q-1}}{q - 1} \quad (2.49)$$

$$= k \frac{1 - \sum_i p_i \exp[(q - 1) \ln p_i]}{q - 1}, \quad (2.50)$$

sendo k uma constante arbitrária. Pode-se expandir a exponencial da equação 2.50 em série de Taylor

em torno de $q = 1$

$$S_q(\{p_i\}) = k \frac{1 - \sum_i p_i [1 + (q-1) \ln p_i]}{q-1} \quad (2.51)$$

$$= k \frac{1 - \sum_i p_i - (q-1) \sum_i p_i \ln p_i}{q-1} \quad (2.52)$$

$$= -k \sum_i p_i \ln p_i = S_{BG}(\{p_i\}) \quad (2.53)$$

Mostrando-se então, que a entropia de Boltzmann-Gibbs (2.2) é retomada em uma vizinhança em que $q \rightarrow 1$. Logo, a entropia de Tsallis é uma generalização, que contém a entropia de Boltzmann-Gibbs como um caso particular.

Para estados equiprováveis, onde $p_i = 1/W$, onde W é o número de configurações possíveis, a entropia de Tsallis (2.48) torna-se

$$S_q(W) = k \frac{W^{1-q} - 1}{1-q} = k \ln_q W, \quad (2.54)$$

analogamente como dada pela equação para estados equiprováveis para Boltzmann-Gibbs (2.1).

Posto que a entropia de Tsallis contém a entropia de Boltzmann-Gibbs em um determinado limite, sua interpretação, portanto, nada difere da discutida na subseção 2.1.1. Pode-se interpreta-la como uma medida da ignorância sobre um determinado sistema físico. A proposta de uma generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs tem como objetivo principal englobar situações físicas que ela não abrange².

2.2.1.1 PROPRIEDADES DA ENTROPIA S_q

PSEUDO-ADITIVIDADE

Dado que a entropia de Tsallis é uma generalização baseada no q -logaritmo, é natural que não seja aditiva, assim como expresso na equação (2.47). De fato, a entropia de Tsallis satisfaz a pseudo-aditividade.

Dados dois sistemas probabilisticamente independentes A e B , tal que a probabilidade conjunta desses dois sistemas seja dada por $p_{ij}^{(A+B)} = p_i^{(A)} p_j^{(B)}$, a soma da entropia desses sistemas conjuntos é fornecida por

$$\sum_{i,j} [p_{ij}^{(A+B)}]^q = \sum_i [p_i^{(A)}]^q \sum_j [p_j^{(B)}]^q, \quad (2.55)$$

tomando o logaritmo da equação (2.55), obtém-se

$$\ln \left\{ \sum_{i,j} [p_{ij}^{(A+B)}]^q \right\} = \ln \left\{ \sum_i [p_i^{(A)}]^q \right\} + \ln \left\{ \sum_j [p_j^{(B)}]^q \right\}. \quad (2.56)$$

² Em (TSALLIS, 2009a) pode-se encontrar algumas aplicações físicas da entropia de Tsallis.

Escrevendo cada termo da equação acima em termos da entropia de Tsallis (2.48), tem-se

$$\ln \left[1 + (1 - q) \frac{S_q(A + B)}{k} \right] = \ln \left[1 + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \right] + \ln \left[1 + (1 - q) \frac{S_q(B)}{k} \right], \quad (2.57)$$

onde $S_q(A) = S_q(\{p_i^{(A)}\})$, $S_q(B) = S_q(\{p_i^{(B)}\})$ e $S_q(A + B) = S_q(\{p_{ij}^{(A+B)}\})$. Reescrevendo a equação 2.57 como

$$1 + (1 - q) \frac{S_q(A + B)}{k} = \left[1 + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \right] \left[1 + (1 - q) \frac{S_q(B)}{k} \right], \quad (2.58)$$

ela se reduzirá à

$$\frac{S_q(A + B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B)}{k} + (1 - q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B)}{k}, \quad (2.59)$$

Tem-se os seguintes casos correspondentes para valores do parâmetro q :

$$\begin{cases} q < 1 \implies S_q \text{ é superextensiva,} \\ q = 1 \implies S_q \text{ é extensiva,} \\ q > 1 \implies S_q \text{ é subextensiva.} \end{cases} \quad (2.60)$$

NÃO NEGATIVIDADE

Se um determinado estado j_0 do sistema é totalmente conhecido, então tem-se que $p_{j_0} = 1$ e $p_j = 0$ ($\forall j \neq j_0$), e portanto

$$S_q = 0 \quad (\forall q).$$

Entretanto, para qualquer outro caso tem-se que $p_j < 1$, para pelo menos dois valores de j e consequentemente $1/p_j > 1$. Dado que $\ln_q \frac{1}{p_i} > 0, \forall i$, tem-se portanto que

$$S_q = -k \sum_i^W p_i \ln_q p_i = k \sum_i^W p_i \ln_q \frac{1}{p_i} > 0 \quad (\forall q), \quad (2.61)$$

o que mostra a não-negatividade a entropia de Tsallis.

EXPANSIBILIDADE

Se estados possíveis forem adicionados à entropia S_q , de modo que a probabilidade de que eles aconteçam seja nula, então a entropia permanecerá invariante. Portanto

$$S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W). \quad (2.62)$$

Se adicionados N estados possíveis à entropia S_q , tais que a probabilidade com que eles ocorram

seja nula, tem-se para $q > 0$ por meio da definição (2.48)

$$\begin{aligned} S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) &= k \frac{1 - \sum_{i=1}^{W+N} p_i^q}{q-1} = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q + \sum_{i=W+1}^N 0^q}{q-1} \\ &= k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Entretanto para $q < 0$, deve-se levar em conta o fato de que a soma na entropia S_q ocorre apenas em estados com probabilidades positivas (TSALLIS, 2009a). Logo, se há $W + N$ estados possíveis, porém somente W estados sejam possíveis ocorrer e os N estados restantes tenham probabilidade nula de ocorrência, então

$$S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W). \quad (2.64)$$

CONVEXIDADE E CONCAVIDADE

Considere dois conjuntos de probabilidades $\{p_i\}$ e $\{\tilde{p}_i\}$ que estão associadas ao mesmo sistema, com W microestados. E a probabilidade intermediária definida na equação (2.8). Como a função $x(1 - x^{q-1})/(q-1)$ possui derivada segunda contínua, positiva para $q < 0$ e negativa para $q > 0$, tem-se para $q < 0$, segunda a equação (2.9)

$$\frac{p'_i(1 - p_i^{q-1})}{q-1} < \alpha \frac{p_i(1 - p_i^{q-1})}{q-1} + (1 - \alpha) \frac{\tilde{p}_i(1 - \tilde{p}_i^{q-1})}{q-1}. \quad (2.65)$$

Perfazendo a soma $\sum_{i=1}^W$ em ambos os lados da desigualdade, obtém-se

$$S_q(\{p'_i\}) < \alpha S_q(\{p_i\}) + (1 - \alpha) S_q(\{\tilde{p}_i\}) \quad (q < 0), \quad (2.66)$$

o que demonstra imediatamente a convexidade da entropia S_q para $q < 0$. Para obter a concavidade de S_q para $q > 0$ basta tomar as desigualdades contrárias (TSALLIS, 2009a).

TEOREMAS DE UNICIDADE

Assim como existem os teoremas de Shannon e de Khinchin para a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, seus respectivos equivalentes para a mecânica estatística não-extensiva foram propostos por Santos (SANTOS, 1997) e Abe (ABE, 2000) como apresentados a seguir.

TEOREMA DE SANTOS

Em seu trabalho, Santos (SANTOS, 1997) propõe, se baseando no teorema de Shannon, um análogo para a entropia de Tsallis. Suponha que exista um funcional entrópico $S_q(\{p_i\})$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $S(p_1, \dots, p_W)$ é uma função contínua com respeito a todos os seus argumentos;

2. Para um dado conjunto de W estados equiprováveis, ou seja, $p_i = 1/W$, é uma função monotonicamente crescente de W ;
3. Para dois sistemas independentes A e B , a entropia do sistema composto $A + B$ satisfaz a relação pseudo-aditividade³

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B) \quad (2.67)$$

4. Com $W = W_L + W_M$, sendo W_L dado por L termos e W_M dado por M termos, tem-se

$$p_L \equiv \sum_{i=1}^{W_L} p_i, \quad (2.68)$$

$$p_M \equiv \sum_{i=1}^{W_M} p_i, \quad (2.69)$$

e

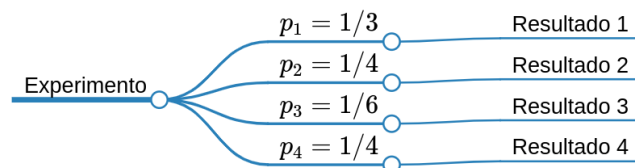
$$p_L + p_M = 1, \quad (2.70)$$

portanto, a entropia pode ser escrita como

$$S_q(\{p_i\}) = S_q(p_L, p_M) + p_L^q S_q\left(\left\{\frac{p_i}{p_L}\right\}\right) + p_M^q S_q\left(\left\{\frac{p_i}{p_M}\right\}\right). \quad (2.71)$$

O enunciado da condição 4 de Santos, apesar de diferente do enunciado da condição 3 de Shannon em estrutura, quer dizer a mesma coisa. Para compreender seu significado, considere um experimento que consiste em uma caixa contendo 12 bolas de diferentes cores, 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis, 2 bolas verdes e 3 bolas amarelas. Em um sorteio, a probabilidade de retirar uma bola vermelha é de $p_1 = 1/3$, de retirar uma bola azul é de $p_2 = 1/4$, de retirar uma bola verde é de $p_3 = 1/6$ e retirar uma bola amarela é de $p_4 = 1/4$, como dado na Figura 3, onde os rótulos 1,2,3 e 4 se referem respectivamente as cores vermelho, azul, verde e amarelo. A entropia associada a esse sistema será $S_q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$.

Figura 3 – Diagrama denotando o experimento com as quatro possibilidade de resultados, cada um associado as probabilidades p_1, p_2, p_3 e p_4 .



Fonte: Produção do próprio autor.

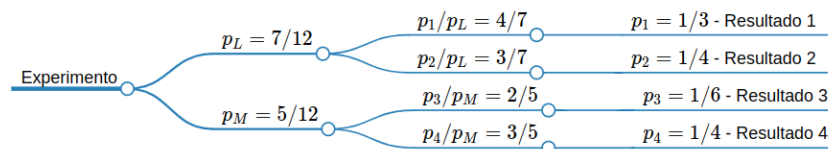
³ Por simplicidade está sendo tomado $k = 1$, a expressão com a constante pode ser encontrada na equação (2.59).

Considere agora um outro experimento com as mesmas 12 bolas do experimento anterior, subdividido em outros dois sub-experimentos consecutivos, como denotado na Figura 4. O primeiro sub-experimento consiste em separar as 12 bolas em dois conjuntos diferentes, um composto por 7 bolas, sendo que dessas 7 bolas 4 são vermelhas e 3 são azuis e o outro conjunto é formado por 5 bolas, sendo dessas 5, 2 bolas verdes e 3 bolas amarelas. A probabilidade de selecionar 7 bolas das cores desejadas entre as 12 bolas será $p_L = 7/12$ e a probabilidade de selecionar as 5 bolas das cores desejadas será de $p_M = 5/12$.

O segundo sub-experimento está condicionado à realização do primeiro sub-experimento. Os conjuntos de 7 e 5 bolas selecionadas são colocados separadamente em uma caixinha de sorteio. Do conjunto formado pelas 7 bolas, a probabilidade de retirar uma bola vermelha é de $p_1/p_L = 4/7$ e a probabilidade de retirar uma bola azul é de $p_2/p_L = 3/7$. Já em relação ao conjunto formado por 5 bolas, a probabilidade de retirar uma bola verde é de $p_3/p_M = 2/5$ e de retirar uma bola amarela é de $p_4/p_M = 3/5$. As probabilidades p_1/p_L , p_2/p_L , p_3/p_M e p_4/p_M são denominadas probabilidades condicionais, pois estão condicionadas ao fato de que no primeiro sub-experimento foram selecionados conjuntos de 7 e 5 bolinhas, cada um com as cores desejadas, como já dito anteriormente. Nesse experimento formado por dois sub-experimentos, a probabilidade de se obter uma bola vermelha, chamada de resultado 1, é de $p_1 = 1/3$, a probabilidade de obter uma bola azul, chamada de resultado 2, é de $p_2 = 1/4$, a probabilidade de se obter uma bola verde, chamada de resultado 3, é de $p_3 = 1/6$ e, por fim, a probabilidade de se obter uma bola amarela, chamada de resultado 4, é de $p_4 = 1/4$.

Figura 4 – Diagrama denotando o experimento. Inicialmente tem-se duas possibilidades de resultados.

A escolha com probabilidade $p_L = 7/12$ se subdivide em outras duas escolhas com probabilidades $p_1/p_L = 4/7$ e $p_2/p_L = 3/7$ que leva aos resultados 1 e 2. Já a escolha $p_M = 5/12$ se subdivide em duas outras escolhas possíveis com probabilidades $p_3/p_M = 2/5$ e $p_4/p_M = 3/5$, cada uma leva aos resultados 3 e 4, respectivamente.



Fonte: Produção do próprio autor.

Nesse caso, considerando-se as probabilidades dos sub-experimentos realizados, a entropia associada ao sistema pode ser escrita como

$$S_q \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4} \right) = S_q \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12} \right) + \left(\frac{7}{12} \right)^q S_q \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{5}{12} \right)^q S_q \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right). \quad (2.72)$$

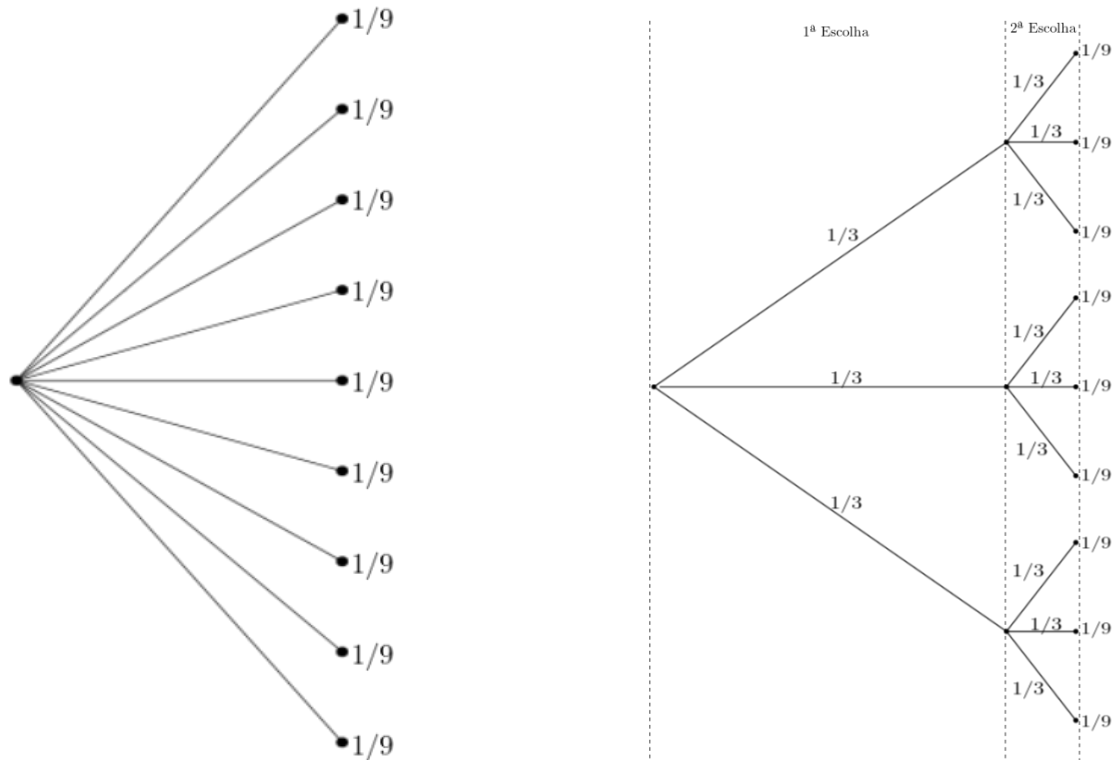
Teorema 2.3. *A única função que satisfaz simultaneamente todas as propriedades listadas acima é a entropia de Tsallis⁴*

$$S_q = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{1 - q}. \quad (2.73)$$

⁴ Por consistência da notação, está sendo tomado $k=1$.

Demonstração. Decompondo uma escolha de s^m possibilidades equiprováveis em uma série de m escolhas com s possibilidades igualmente prováveis (ver Figura 5). Tem-se utilizando a condição (3)

Figura 5 – **Esquerda:** Uma escolha com 9 possibilidade equiprováveis. Portanto a probabilidade de que uma das possibilidades seja escolhida é de $1/9$. Nesse caso em particular, $s = 3$ e $m = 2$. **Direita:** Duas escolhas ($m=2$), com 3 ($s=3$) possibilidades equiprováveis cada. Portanto, na primeira escolha tem 3 possibilidades, tem-se, então, a probabilidade de $1/3$ de que uma das possibilidades seja escolhida. Na segunda escolha há 3 possibilidades de escolha, a probabilidade de que uma das possibilidades seja escolha é também de $1/3$. No fim, após a duas escolhas serem realizadas, a probabilidade final de que um dos resultados seja atingido é de $1/9$.



Fonte: Produção do próprio autor.

- se $m = 2$

$$S_q(s^2) = 2S_q(s) + (1 - q)S_q^2(s) \quad (2.74)$$

$$= \frac{[2(1 - q)S_q(s) + (1 - q)S_q^2(s) + 1] - 1}{(1 - q)} \quad (2.75)$$

$$= \frac{[(1 - q)S_q(s) + 1]^2 - 1}{(1 - q)}, \quad (2.76)$$

- se $m = 3$

$$S_q(s^3) = S_q(s \cdot s^2) = S_q(s) + S_q(s^2) + (1 - q)S_q(s)S_q(s^2) \quad (2.77)$$

$$= 3S_q(s) + (1 - q)S_q^2(s) + 2(1 - q)S_q^2(s) + (1 - q)^2S_q^3(s) \quad (2.78)$$

$$= \frac{1 + 3(1 - q)S_q(s) + 3(1 - q)^2S_q^2(s) + (1 - q)^3S_q^3(s) - 1}{1 - q} \quad (2.79)$$

$$= \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^3 - 1}{1 - q}, \quad (2.80)$$

- supondo que $m = n, \forall n$ inteiro

$$S_q(s^n) = \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^n - 1}{1 - q}. \quad (2.81)$$

tem-se que para $m = n + 1$

$$\begin{aligned} S(s^{n+1}) &= S_q(s^n s) = S_q(s^n) + S_q(s) + (1 - q)S_q(s^n)S_q(s) \\ &= \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^n - 1}{1 - q} + S_q(s) + (1 - q)\frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^n - 1}{1 - q}S_q(s) \\ &= \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^n - 1}{1 - q} + S_q(s) + [1 + (1 - q)S_q(s)]^n S_q(s) - S_q(s) \\ &= \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^n - 1}{1 - q} + [1 + (1 - q)S_q(s)]^n S_q(s) \\ &= \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^n - 1}{1 - q} + \frac{(1 - q)}{1 - q} [1 + (1 - q)S_q(s)]^n S_q(s) \\ &= \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^n}{1 - q} [1 + (1 - q)S_q(s)] - \frac{1}{1 - q} \\ &= \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^{n+1}}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} \\ &= \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^{n+1} - 1}{1 - q} \end{aligned} \quad (2.82)$$

No limite $q \rightarrow 1$ a condição de Boltzmann-Gibbs é recuperada

$$S_1(s^m) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{[1 + (1 - q)S_q(s)]^m - 1}{1 - q} = mS_1(s). \quad (2.83)$$

Para um par (m, s) suficientemente grande é possível encontrar um par de números inteiros (t, n) , tal que

$$s^m \leq t^n \leq s^{m+1}. \quad (2.84)$$

Usando a condição (2), obtém-se para qualquer valor de q

$$S_q(s^m) \leq S_q(t^n) \leq S_q(s^{m+1}). \quad (2.85)$$

Utilizando a equação (2.85) para $q < 1$, tem-se

$$[1 + (1 - q)S_q(s)]^m \leq [1 + (1 - q)S_q(t)]^n \leq [1 + (1 - q)S_q(s)]^{m+1}, \quad (2.86)$$

tomando o logaritmo da desigualdade acima

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\ln[1 + (1 - q)S_q(t)]}{\ln[1 + (1 - q)S_q(s)]} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}, \quad (2.87)$$

ou equivalentemente

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{\ln[1 + (1 - q)S_q(t)]}{\ln[1 + (1 - q)S_q(s)]} \right| \leq \frac{1}{n} \equiv \varepsilon. \quad (2.88)$$

Da equação (2.84)

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\ln t}{\ln s} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}, \quad (2.89)$$

e, como antes

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{\ln t}{\ln s} \right| \leq \frac{1}{n} \equiv \varepsilon. \quad (2.90)$$

Usando as equações (2.88) e (2.90) combinadas

$$\left| \frac{\ln t}{\ln s} - \frac{\ln[1 + (1 - q)S_q(t)]}{\ln[1 + (1 - q)S_q(s)]} \right| \leq 2\varepsilon \quad (2.91)$$

Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se

$$\frac{\ln[1 + (1 - q)S_q(s)]}{\ln s} = \frac{\ln[1 + (1 - q)S_q(t)]}{\ln t} = p(q). \quad (2.92)$$

Logo, o funcional $S_q(t)$ toma a forma de

$$S_q(t) = \frac{t^{p(q)-1}}{1 - q}. \quad (2.93)$$

Considere uma escolha de W partições, cada uma com probabilidade

$$p_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^W n_i}, \quad (2.94)$$

onde n_i é o número de possibilidades na i -ésima partição, cada uma com probabilidade igual.

Usando a condição (4), tem-se

$$S_q \left(\left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^W n_i} \right\} \right) = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W) + \sum_{i=1}^W p_i^q S_q \left(\left\{ \frac{1}{n_i} \right\} \right) \quad (2.95)$$

por meio da equação (2.93), pode-se escrever

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^W n_i \right)^p - 1}{1 - q} = S(p_1, p_2, \dots, p_W) + \sum_{i=1}^W p_i^q \left(\frac{n_i^p - 1}{1 - q} \right). \quad (2.96)$$

Então

$$S_q(p_1, p_2, \dots, p_W) = \frac{1}{1 - q} \left\{ \left(\sum_{i=1}^W n_i \right)^p - 1 + \sum_{i=1}^W p_i^q - \sum_{i=1}^W p_i^q n_i^p \right\}, \quad (2.97)$$

mas como

$$n_i^p = p_i^p \left(\sum_{i=1}^W n_i \right)^p, \quad (2.98)$$

logo

$$S_q(p_1, p_2, \dots, p_W) = \frac{1}{1 - q} \left\{ \left(\sum_{i=1}^W n_i \right)^p - 1 + \sum_{i=1}^W p_i^q - \sum_{j=1}^W p_j^q p_j^p \left(\sum_{i=1}^W n_i \right)^p \right\}. \quad (2.99)$$

Para satisfazer a condição (1), deve-se observar que

$$p = 1 - q. \quad (2.100)$$

Portanto

$$S_q(\{p_i\}) = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{1 - q}, \quad (2.101)$$

e para t escolhas equiprováveis

$$S_q(t) = \frac{t^{1-q} - 1}{q - 1}. \quad (2.102)$$

□

TEOREMA DE ABE

Uma vez generalizado o teorema de Shannon por Santos, é esperado, naturalmente, uma generalização do teorema de Khinchin e tal generalização foi feita por Abe (ABE, 2000). Suponha a existência de um funcional entrópico $S_q(\{p_i\})$, então se (TSALLIS, 2019):

1. $S_q(\{p_i\})$ é uma função contínua de $\{p_i\}$;
2. $S_q(p_i = 1/W, \forall i)$ cresce monotonamente com o número total de possibilidades;
3. $S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W)$;
4. $\frac{S_q(A+B)}{k} = \frac{S_q(A)}{k} + \frac{S_q(B|A)}{k} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k} \frac{S_q(B|A)}{k}$, onde

$$S_q(A+B) \equiv S_q(\pi_{kl}),$$

$$S_q(A) \equiv S_q(\{p_k\}) \quad \left(p_k \equiv \sum_{\ell} \pi_{k\ell} = \sum_{\ell} p_k q_{k\ell} \right),$$

e a entropia condicional

$$S_q(B|A) \equiv \frac{\sum_k (p_k)^q S_q(q_{kl})}{\sum_k (p_k)^q} \quad (k > 0);$$

então, apenas então

$$S_q(\{p_i\}) = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}. \quad (2.103)$$

A demonstração do teorema de Abe pode ser encontrada em (ABE, 2000).

2.2.2 OUTRAS POSSIBILIDADES DE FUNCIONAIS ENTRÓPICOS

Propostas alternativas de funcionais entrópicos, além dos supracitados, foram feitas. Dentre elas está a entropia de Rényi (RÉNYI, 1970) definida como

$$S_q^R \equiv k \frac{\ln \sum_{i=1}^W p_i^q}{1-q} = k \frac{\ln \left[1 + (1-q) \frac{S_q}{k} \right]}{1-q}. \quad (2.104)$$

Na literatura, diz-se com frequência que a entropia de Rényi é obtida via *abordagem do logaritmo formal* da entropia de Tsallis S_q , como pode ser observado na equação (2.57) (CZINNER; IGUCHI, 2016).

A entropia de Rényi tem a vantagem de ser aditiva, esse fato permite com que a lei zero da termodinâmica seja satisfeita, o que não acontece com a entropia de Tsallis. No entanto é côncava apenas para $0 < q \leq 1$ (BOON; TSALLIS, 2005), e viola para $q \neq 1$ a robustez experimental, a produção de entropia por unidade de tempo e a própria côncavidade fora do intervalo já mencionado⁵. Entretanto, no limite em que $q \rightarrow 1$, tem-se, utilizando a relação

⁵ Para entender o que é *robustez experimental* e *produção de entropia por unidade de tempo*, veja (TSALLIS et al., 2003) e (TSALLIS, 2009a).

$$\ln(1+x) \approx x \quad (2.105)$$

na equação (2.104), obtém-se

$$S_{q=1}^R = \frac{(1-q)S_{q=1}}{1-q} = S_1 = S_{BG}. \quad (2.106)$$

Logo a entropia de Rényi, possui a entropia de Boltzmann-Gibbs (2.2) como caso particular.

Outra proposta de funcional entrópico foi feita por Tsallis (TSALLIS, 2009a) e discutida com mais afinco em seu trabalho com Cirto (TSALLIS; CIRTO, 2013). Essa entropia é dada por⁶

$$S_\delta = k \sum_{i=1}^W p_i \left(\ln \frac{1}{p_i} \right)^\delta. \quad (2.107)$$

Nos caso em que $\delta = 1$, a entropia de Boltzmann-Gibbs é recuperada. Sejam A e B dois sistemas probabilisticamente independentes, a probabilidade conjunta de ambos sistemas é dada por $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ e a entropia resultante não-aditiva é dada por

$$S_\delta(A+B) = \left\{ \left[\frac{S_\delta(A)}{k} \right]^{1/\delta} + \left[\frac{S_\delta(B)}{k} \right]^{1/\delta} \right\}^\delta, \quad \delta > 0. \quad (2.108)$$

Para um sistema equiprobabilístico, considerando que $p_i = 1/W$, onde W é o número de possibilidade do sistema, tem-se

$$S_\delta = k (\ln W)^\delta. \quad (2.109)$$

A entropia de Tsallis-Cirto é côncava para $0 < \delta < (1 + \ln W)$, não negativa e expansível. No entanto, suas propriedades e formalização para a termodinâmica carecem de uma abordagem mais robusta na literatura.

2.3 EXTENSIVIDADE

A regra de composição da entropia para sistemas probabilisticamente independentes é uma propriedade meramente matemática, não dependendo do sistema físico analisado. No caso da entropia de Boltzmann-Gibbs essa composição é aditiva e para a entropia de Tsallis é pseudo-aditiva. No entanto, a extensividade é uma propriedade que depende do sistema físico abordado.

Uma entropia é extensiva para um dado sistema físico se é proporcional a quantidade de elementos que o compõe ou ao número de graus de liberdade desse sistema. Essa propriedade pode ser expressa

⁶ No presente trabalho, frequentemente esse funcional entrópico será chamado como entropia de Tsallis-Cirto ou entropia delta.

da seguinte forma

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N} < \infty, \quad (2.110)$$

ou analogamente

$$S(N) \propto N, \quad (N \rightarrow \infty). \quad (2.111)$$

Considere que W descreva o número total de possibilidades com probabilidades diferentes de zero para um determinado sistema equiprobabilístico.

- Suponha que $W(N) \sim \mu^N$ para $\mu > 1$ descreva, por exemplo, as possibilidade de um sistema composto por N moedas em que $\mu = 2$, ou N dados, caso em que $\mu = 6$ (TSALLIS et al., 2003). A entropia de Boltzmann-Gibbs (2.1) será extensiva quando utilizada para descrever esse sistema, pois

$$S_{BG} = k_B \ln W(N) \propto N. \quad (2.112)$$

- Considere agora $W(N) \sim N^\rho$ ($\rho > 0$), que pode descrever, por exemplo, um sistema cujos elementos são correlacionados em todas as escalas (TSALLIS et al., 2003). Esse exemplo é dado por Tsallis em (TSALLIS, 2009b) para um sistema binário com N váriaveis aleatórias binárias iguais, mas somente $(\rho + 1)$ elementos tem probabilidades não nulas. A entropia de Tsallis (2.54) é extensiva quando utilizada para descrever esse sistema para um valor específico de q ,

$$S_q(N) = k_B \ln_q W(N) \propto [W(N)]^{1-q} \propto N^{\rho(1-q)}, \quad (2.113)$$

$$\text{se } q = q^* = 1 - \frac{1}{\rho}$$

$$S_{q^*}(N) \propto N. \quad (2.114)$$

- Por fim, assuma um sistema em que suas possibilidade sejam dadas por $W(N) \sim \nu^{N^\gamma}$ para $\nu > 1$ e $0 < \gamma < 1$. Sendo considerada a entropia de Tsallis-Cirto para esse sistema, ela será extensiva como mostrado abaixo

$$S_\delta(N) = k[\ln W(N)]^\delta \propto N^\delta, \quad (2.115)$$

$$S_{\delta=1/\gamma}(N) \propto N. \quad (2.116)$$

Portanto, como já supracitado, a extensividade da entropia é depende diretamente do sistema físico a ser estudado e, por vezes, violar a aditividade para recuperar a extensividade é necessário para que a termodinâmica seja satisfeita.

2.4 BURACOS NEGROS E A ENTROPIA DE BEKENSTEIN-HAWKING

Buracos negros são objetos astrofísicos que desafiam os limites da física estabelecida devido às suas características físicas não usuais. Sua origem conceitual remonta aos predecessores da Relatividade Geral no século XVIII, que já falavam em estrelas escuras e discutiam sobre a possibilidade de existência de um objeto que poderia aprisionar a luz por meio da gravidade (ARANHA, 2023). O termo buraco negro é atribuído ao físico John Wheeler, que em 1969 o popularizou (ROBERTSON, 2023).

Somente com o surgimento da Relatividade Geral em meados de 1915 a ideia de buracos negros começou a ganhar raízes. Do ponto de vista teórico, os trabalhos seminais publicados entre as décadas de 1960 e 1970, de cientistas como Penrose, Hawking, Geroch, Israel e Carter colocaram a física de buracos negros em bases matemáticas sólidas por meio de técnicas de geometria e topologia. Durante essas décadas de intensa pesquisa foram provados teoremas de unicidade resultantes da investigação de soluções exatas e estacionárias, as leis mecânicas de buracos negros e a possibilidade de associar termodinâmica a esses objetos. No entanto, a existência e relevância de buracos negros só se tornou unânime na comunidade científica em meados dos anos 2000 (CURIEL, 2019).

De modo simples, os buracos negros podem ser definidos como uma região do espaço-tempo de que nem partículas massivas e nem partículas sem massa podem escapar (GOURGOULHON, 2018). Entretanto, a definição de buracos negros não é unânime na física, dado que cada área que aborda esse tema de estudo se apropria de uma definição diferente para se referir ao mesmo objeto. Curiel afirma que é a grande riqueza e frutífera ideia de buraco negro que conduz a uma multiplicidade de definições diferentes, cada uma em seu domínio (CURIEL, 2019).

Os buracos negros são caracterizados pela existência de um horizonte de eventos que cobre seu interior. O horizonte de eventos é uma membrana unidirecional no sentido em que só pode ser atravessado em uma única direção, da região exterior à região interior do buraco negro, 2-dimensional⁷ e fechada.

As leis mecânicas associadas a buracos negros foram introduzidas na década de 1970 e suas semelhanças com as leis da termodinâmica clássica foram evidenciadas em uma publicação de 1973 devido a Bardeen, Carter e Hawking (BARDEEN; CARTER; HAWKING, 1973) que observaram que a área do horizonte de eventos e a superfície gravitacional “têm fortes analogias com entropia e temperatura, respectivamente. Seguindo essa analogia, somos levados a formular quatro leis da mecânica dos buracos negros que são semelhantes, mas distintas, das quatro leis da termodinâmica”. Apesar dessa observação já em 1973, a natureza entre a termodinâmica e a gravidade ainda é desconhecida (FERNANDES, 2023), e ainda não se sabe muito bem o que significa atribuir propriedades termodinâmicas a buracos negros (CURIEL, 2019).

A entropia associada a buracos negros foi introduzida por Bekenstein em 1972 (BEKENSTEIN, 1972) e posteriormente sua constante de proporcionalidade foi obtida por Hawking. Ela é dada por

$$S_{BH} = \frac{k_B A}{4\ell_P^2}, \quad (2.117)$$

⁷ No presente trabalho consideraremos apenas espaços-tempo quadridimensionais.

onde A é a área do horizonte de eventos, k_B a constante de Boltzmann e $\ell_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ o comprimento de Planck. Em um trabalho de 1976, Hawking afirma que o logaritmo do número de configurações internas inobserváveis de um buraco negro pode ser considerada a entropia do buraco negro (HAWKING, 1976), o que evidencia que a entropia de Bekenstein-Hawking é interpretada como de Boltzmann-Gibbs.

Entretanto, a entropia de Bekenstein-Hawking causa uma determinada estranheza, uma vez que como um buraco negro é um objeto tridimensional, espera-se que a entropia seja proporcional ao seu volume e não a sua área. Das e Shankaranarayanan (DAS; SHANKARANARAYANAN, 2006) afirmam em sua publicação que *a área (em oposição ao volume) proporcional a entropia do buraco negro tem sido uma questão intrigante há décadas*. O fato é que, a entropia de Bekenstein-Hawking não é extensiva, portanto, as gradezas termodinâmicas dela derivada não deveriam ser fisicamente consistentes. Isso foi observado por Hawking quando afirma em seu trabalho que *o ensemble canônico estatístico padrão não pode ser aplicado quando interações gravitacionais são importantes* (HAWKING, 1976).

Uma proposta para restaurar a extensividade da entropia dada pela equação (2.117) foi feita por Tsallis-Cirto (TSALLIS; CIRTO, 2013) utilizando a entropia delta, definida pela equação (2.109), em que a entropia de Bekenstein-Hawking é dada equiprobabilisticamente e interpretada como sendo de Boltzmann-Gibbs, ou seja, $S_{BH} = \ln W$. Logo

$$S_{\delta=3/2} = (S_{BH})^{3/2}, \quad (2.118)$$

sendo $\delta = 3/2$. Çimdiker et al.(ÇIMDIKER; DABROWSKI; GOHAR, 2023), provaram que a entropia de equilíbrio e a temperatura de equilíbrio para a entropia (2.118) são proporcionais respectivamente a entropia de Bekenstein-Hawking e a temperatura Hawking.

3 ESTABILIDADE TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS

No capítulo precedente foram apresentadas, de modo introdutório, algumas definições de funcionais de entropia, discutindo-se com mais ênfase as propriedades da entropia de Boltzmann-Gibbs e a entropia de Tsallis, essa última como uma proposta para a generalização da primeira. No contexto de buracos negros, foi discutida a entropia de Bekeinstein-Hawking, que foi proposta na década de 1970 por meio de uma analogia direta com as leis mecânicas de buracos negros. Todavia, a não-extensividade da entropia de buracos negros é um dos assuntos que tem sido discutido de modo intermitente na literatura. Tsallis e Cirto (TSALLIS; CIRTO, 2013), na tentativa de restaurar a extensividade da entropia de Bekenstein-Hawking, utilizam a entropia delta.

Recentemente na literatura, trabalhos têm sugerido estudar a estabilidade termodinâmica de buracos negros por meio de abordagens alternativas de entropia além da entropia de Bekenstein-Hawking, com objetivo de obter informações adicionais sobre as soluções da relatividade geral. Czinner e Iguchi (CZINNER; IGUCHI, 2016) sugeriram estudar a estabilidade termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild utilizando a entropia de Rényi e posteriormente estudaram a estabilidade termodinâmica do buraco negro de Kerr (CZINNER; IGUCHI, 2017) com o mesmo funcional entrópico. Mejrhit e Ennadifi (MEJRHIT; ENNADIFI, 2019) propuseram estudar a estabilidade termodinâmica de buracos negros em geometria quântica por meio da entropia de Tsallis. E também, Abreu e Neto (ABREU; NETO, 2021) estudaram o buraco negro de Schwarzschild empregando a entropia de Rényi e a estatística incompleta¹ e derivaram para este caso o teorema da equipartição.

O estudo da estabilidade termodinâmica de buracos negros fornece informações sobre a viabilidade e comportamento das soluções da Relatividade Geral, tal qual o estudo sobre a estabilidade dinâmica dessas soluções que verificam o comportamento de buracos negros diante de pequenas perturbações (escalares ou tensoriais). Fisicamente essas perturbações podem denotar matéria flutuando ou caindo no buraco negro (PRESS; TEUKOLSKY, 1973). Além disso, essa abordagem pode fornecer ferramentas para uma maior compreensão sobre a transição de fase gravitacional, que constitui um dos problemas em aberto da física teórica contemporânea, possibilitando elucidar o que acontece com um buraco negro quando passar de uma situação estável para uma situação instável. Um método que tem sido aplicado na literatura para auxiliar nessa análise é o método de Poincaré, que não dá uma informação direta sobre a estabilidade das soluções, mas informa se há mudança de estabilidade sem a necessidade de resolver uma equação de autovalor.

O presente capítulo propõe-se abordar uma interpretação de buracos negros como sistemas termodinâmicos, o método de Poincaré, apresentando como ele pode ser aplicado, além de expor os passos para demonstrar seu formalismo. Pretende-se também discutir sobre a estabilidade termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild, fazendo um apanhado das abordagens feitas na literatura utilizando diversos funcionais entrópicos e, por fim, será proposta a análise da estabilidade termodinâmica de uma solução de buracos negros com cabelos que possui o buraco negro de Schwarzschild como caso

¹ A estatística incompleta é baseada na estatística de Tsallis discutida no capítulo 2, porém utiliza a condição de normalização $\sum_i p_i^q = 1$.

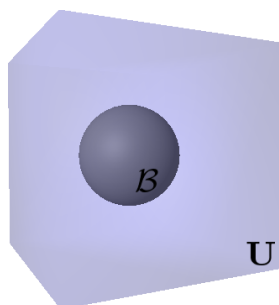
particular. Para essas abordagens, serão utilizados os funcionais entrópicos de Bekenstein-Hawking, Tsallis e Rényi introduzidos no capítulo anterior.

3.1 BURACOS NEGROS COMO SISTEMAS TERMODINÂMICOS

Na seção 2.4 do capítulo 2 foi exposto de modo introdutório a conceituação de buracos negros e como eles são caracterizados. Também foi introduzida a entropia de Bekenstein-Hawking, que é proporcional a área do horizonte de eventos. No entanto, apesar da exposição feita, há uma carência da interpretação de buracos negros como objetos termodinâmicos. Esse é o objetivo da presente seção.

Por simplicidade, pense em um buraco negro cujo horizonte de eventos seja uma esfera. Ele está situado em uma região do universo em que pode estar isolada ou conter matéria e radiação. Na Figura 6, a esfera B representa o buraco negro e U ilustra um recorte da região do universo em que o buraco negro está situado. O ambiente U pode ser grande o suficiente, de modo que pode-se assumir que qualquer coisa que esteja de fora não tenha influência sobre o buraco negro.

Figura 6 – Buraco negro representado pela esfera denotada por B e o ambiente que ele está inserido U representa o universo. O buraco negro pode ser compreendido como um subsistema B do sistema U .



Fonte: Produção do próprio autor.

Se pensado de um ponto de vista termodinâmico, o buraco negro B pode ser considerado como um subsistema de U . Diante dessa abordagem, pode-se interpretar buracos negros como ensembles termodinâmicos. O conceito de ensemble é devido a termodinâmica e a física estatística, e significa *conjunto*. Dois ensembles serão abordados no decorrer do presente trabalho: o ensemble microcanônico e o ensemble canônico. Um ensemble microcanônico, descreve um sistema isolado, cuja a energia interna do sistema permanece constante. O ensemble canônico, no entanto, descreve sistemas em contato com um reservatório térmico, cuja temperatura T é mantida fixa.

Considere uma situação em que o buraco negro B esteja isolado, o recorte do universo U que o encerra não tem radiação e nem matéria para que ele possa absorver. Portanto, a energia do sistema é a do buraco negro e toda radiação por ele emitida, que acaba sendo reabsorvida por algum mecanismo. Nessa situação, o buraco negro pode ser compreendido como um ensemble microcanônico, pois sua energia, que é dada por sua massa M , é mantida constante.

Imagine agora que o sistema U seja o reservatório térmico, à temperatura constante T , do subsistema B . É permitida a troca de energia do reservatório com o buraco negro B . Fisicamente, o reservatório pode ser interpretado como uma região do espaço com radiação e matéria que alimente o buraco negro.

Caso a temperatura do buraco negro seja menor que a do reservatório, ele absorverá matéria e radiação até entrar em equilíbrio térmico com o reservatório. Nesse caso, o buraco negro pode ser compreendido como um ensemble canônico, porque considera-se que ele esteja em banho térmico infinito.

3.2 MÉTODO DE POINCARÉ

O método de inflexão de Poincaré, ou somente, método de Poincaré foi proposto para separar séries de equilíbrio das configurações estáveis das séries de equilíbrio das configurações instáveis, sem a necessidade de resolver uma equação de autovalor. Por não depender da aditividade da entropia, essa abordagem tem sido utilizada amplamente na literatura para apoiar os resultados obtidos acerca da termodinâmica de buracos negros. Uma vez que a análise de estabilidade somente via o sinal da capacidade térmica não se apresenta totalmente confiável devido ao fato da entropia de Bekenstein-Hawking não ser aditiva (CZINNER; IGUCHI, 2016) e deve ser apoiada por outros meios.

Para compreender a derivação do método de Poincaré será utilizada a abordagem de Katz (KATZ, 1978) (KATZ, 1979). Seja Z uma função associada a um sistema físico de n variáveis x^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) e que contém m parâmetros reais μ^i ($i = 1, 2, \dots, m$). Então

$$Z = Z(x^\alpha, \mu^i). \quad (3.1)$$

A função Z é contínua em x^α e em seus parâmetros μ^i , além do fato de que suas derivadas primeiras e segundas também gozam dessa propriedade.

Se o equilíbrio estável do sistema é tal que a função Z é maximizada, então nesses pontos de máximo

$$\frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha Z = 0, \quad (3.2)$$

e

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \partial_{\alpha\beta} Z < 0. \quad (3.3)$$

As n variáveis x^μ estão associadas as configurações possíveis do sistema. No caso do equilíbrio estável, elas podem ser escritas como função dos parâmetros μ^i por meio da solução da equação 3.2 e dadas como

$$x^\mu = X_{eq}^\mu(\mu^i). \quad (3.4)$$

As configurações de equilíbrio estável, denotadas por X_{eq}^μ , são funções contínuas dos parâmetros μ^i .

Assuma que o espectro de autovalores da matriz hessiana de Z nos pontos X_{eq}^α que indicam a configuração de equilíbrio estável,

$$\left. \frac{\partial^2 Z}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right|_{x^\gamma = X_{eq}^\gamma(\mu^j)}, \quad (3.5)$$

seja não degenerado $k_1 < k_2 < \dots < k_h < \dots < k_n$. Uma mudança de estabilidade no sistema ocorre quando um determinado autovalor, k_h , torna-se nulo. Isso indica que a mudança de estabilidade corresponde a uma mudança de sinal de k_h (KATZ, 1978).

Se o conjunto de variáveis $\{x^\alpha\}$ forem escolhidas de tal forma, que a matriz hessiana 3.5 seja escrita em forma diagonal. Os autovalores dessa matriz serão dados por

$$\lambda_\sigma(\mu^i) = \partial_\sigma^2 Z(x^\alpha, \mu^i) \Big|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha(\mu^i)}. \quad (3.6)$$

Esses autovalores são denominados de “coeficientes de estabilidade de Poincaré” e uma configuração de instabilidade é indicada para autovalores $\lambda_\sigma > 0$. É possível mostrar que se pode obter informação acerca da mudança de estabilidade sem encontrar diretamente o espectro de autovalores da matriz (3.5).

Para isso, considere o fato de que as soluções 3.4 são linhas no espaço $(n + m + 1)$ –dimensional, com coordenadas (Z, μ^i, x^α) . A projeção das linhas $X_{eq}(\mu^i)$ no hiperplano $(m + 1)$ –dimensional com coordenadas (Z, μ^i) é dada pela equação

$$\tilde{Z}(\mu^i) \equiv Z(X_{eq}(\mu^i), \mu^i). \quad (3.7)$$

A derivada da função $\tilde{Z}$ com respeito ao parâmetro μ^i , considerando-se a continuidade de Z e de X_{eq} é dada por

$$\beta(\mu^i) \equiv \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \mu^i} = \underbrace{\frac{\partial Z}{\partial x^\mu} \Big|_{x^\mu = X_{eq}(\mu^i)}}_{=0} \frac{\partial X_{eq}}{\partial \mu^i} + \frac{\partial Z}{\partial \mu^i} = \frac{\partial Z}{\partial \mu^i}. \quad (3.8)$$

A função $\beta(\mu^i)$ é contínua e denominada de variável conjugada de μ^i , este último por fim, denominado de parâmetro de controle. A derivada da equação 3.8 com respeito ao parâmetro de controle μ^i , considerando o mesmo i fixo, é fornecida por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \mu^i} &= \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial Z}{\partial \mu^i} \right) \right]_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} \frac{\partial X_{eq}^\alpha}{\partial \mu^i} + \frac{\partial^2 Z}{\partial (\mu^i)^2} \Big|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} \\ &= \frac{\partial^2 Z}{\partial (\mu^i)^2} \Big|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \beta}{\partial x^\alpha} \right)_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} \frac{\partial X_{eq}^\alpha}{\partial \mu^i} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Considere a equação 3.2 avaliada em $x^\mu = X_{eq}^\mu$. Somado a isso, escolha um μ^i , com um i fixo. Tome a derivada do lado esquerdo da equação 3.2 com respeito ao parâmetro de controle. Admitindo o uso das coordenadas normais, isso resultará na seguinte relação

$$\frac{\partial}{\partial \mu^i} \left(\frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} = \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu^i \partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} + \frac{\partial^2 Z}{\partial (x^\alpha)^2} \Big|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} \frac{\partial X_{eq}^\alpha}{\partial \mu^i} = 0. \quad (3.10)$$

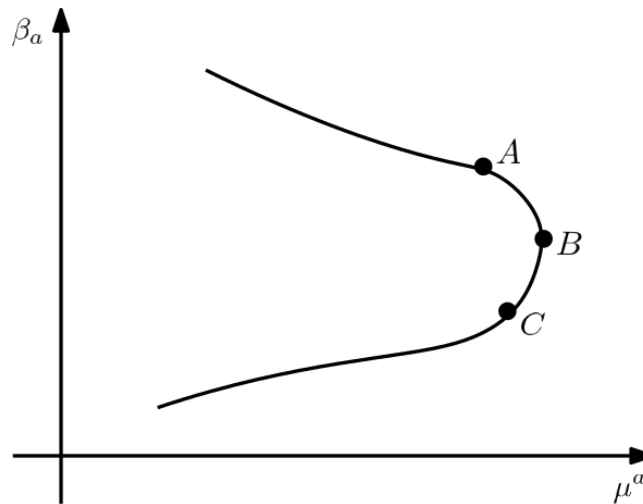
Usando a comutatividade da derivada e as equações 3.6 e 3.8, pode-se escrever a equação 3.10 como

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial x^\alpha} \right|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} + \lambda_\alpha \left. \frac{\partial X_{eq}^\alpha}{\partial \mu^i} \right|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} = 0. \quad (3.11)$$

Substituindo a equação 3.11 na equação 3.9, afim de eliminar a derivada de X_{eq}^α , obtém-se que

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu^i} = \left. \frac{\partial^2 Z}{\partial (\mu^i)^2} \right|_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{(\partial \beta / \partial x^\alpha)_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha}^2}{\lambda_\alpha} \quad (3.12)$$

Figura 7 – Curva da variável termodinamicamente conjugada β em função do parâmetro de controle μ^a . O ponto B indica o ponto de inflexão, ou seja, onde existe uma reta tangente vertical que denota a mudança de estabilidade. Os pontos A e C indicam, respectivamente, uma região de instabilidade e uma região mais estável.



Fonte: Produção do próprio autor.

Como a mudança de estabilidade ocorre quando o coeficiente de Poincaré torna-se nulo, significa que o gráfico da variável conjugada $\beta(\mu^a)$ em função do parâmetro de controle μ^a , como ilustrado pelo ponto B na Figura 7, terá uma reta tangente vertical nesse ponto, denominado de ponto de inflexão. Matematicamente, isso pode ser colocado da seguinte forma

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu^a} \approx - \sum_{\alpha} \frac{(\partial_{\alpha} \beta)_{x^\alpha = X_{eq}^\alpha}^2}{\lambda_{\alpha}} \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

O método de Poincaré, apesar de poderoso, não informa sobre a estabilidade de um sistema, apenas sobre a instabilidade que surge devido à mudança de sinal dos coeficientes de Poincaré. Em um ponto do gráfico $\beta_a(\mu^a)$, o ramo com inclinação negativa próxima do ponto de inflexão é sempre instável (ARCIONI; LOZANO-TELLECHEA, 2005) e ramos com inclinação positiva é sempre mais estável em relação ao ramos com inclinação negativa.

De um ponto vista termodinâmico e da mecânica estatística a função que é maximizada em estados de equilíbrio que descrevem as configurações possíveis do sistema é a entropia. Para o caso de buracos negros isolados, que podem ser tratados como um ensembles microcanônicos, a função Z utilizada no

formalismo acima, nada mais é que a entropia de Bekeinstein-Hawking $S(M, J, Q)$ (KABURAKI; OKAMOTO; KATZ, 1993) e as variáveis x^α que descrevem a configuração do sistema são (M, J, Q) . Onde M é a massa, J o momento angular e Q a carga elétrica do buraco negro.

No entanto, para o caso de buracos negros em banho térmico, que devem ser tratados como um ensemble canônico, a função Z de equilíbrio é dada pela transformação de Legendre da entropia (CZINNER; IGUCHI, 2016)

$$Z = S - \beta M \equiv -\beta F. \quad (3.14)$$

Onde F é a energia livre de Helmholtz. A variável conjugada com respeito a função Z dada pela equação (3.14) é dada por

$$\frac{d(S - \beta M)}{d\beta} = -M(\beta). \quad (3.15)$$

3.3 ESTABILIDADE TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

As funções termodinâmicas padrão do buraco negro de Schwarzschild são dadas por

$$S_{BH}(M) = 4\pi M^2, \quad (3.16)$$

$$\beta_H = \frac{1}{T_H} = \frac{\partial S_{BH}(M)}{\partial M} = 8\pi M \quad (3.17)$$

e

$$C_{BH} = -\frac{S'_{BH}(M)}{S''_{BH}(M)} = -8\pi M^2. \quad (3.18)$$

sendo M a massa do buraco negro, $S_{BH}(M)$ a entropia de Bekenstein-Hawking como apresentada na equação (2.117), T_H é a temperatura Hawking do buraco negro e C_{BH} é a sua capacidade térmica calculada em relação a entropia de Bekenstein-Hawking.

Sabe-se que o buraco negro de Schwarzschild é estável dinâmica e termodinamicamente. No entanto, como pode-se notar na equação (3.18), sua capacidade térmica é negativa, o que no tratamento canônico usual indicaria uma instabilidade termodinâmica. Logo, uma análise somente via funções termodinâmicas derivadas da entropia de Bekeinstein-Hawking não se mostra totalmente confiável para a análise da estabilidade do buraco negro de Schwarzschild.

Mas o que de fato isso quer dizer fisicamente? Considere um corpo com capacidade térmica positiva C . Se esse corpo absorve uma quantidade de calor Q de um reservatório térmico afim de atingir o equilíbrio térmico. Isso pode ser equacionado como

$$Q = C\Delta T > 0, \quad (3.19)$$

onde ΔT é a variação de temperatura resultante da absorção de calor desse corpo. Como essa variação

de temperatura deve ser positiva, isso significa que a absorção de calor pelo corpo resultou em uma temperatura final maior que a temperatura inicial.

Assuma agora que a capacidade térmica C seja negativa e que o corpo absorva uma quantidade de calor Q . Para que a equação 3.19 seja válida a variação de temperatura do corpo ΔT deve ser negativa. Isso indica que a temperatura final é menor que a temperatura inicial, ou seja, o corpo esfria. No entanto, afim de atingir o equilíbrio térmico, o corpo continua absorvendo calor e quanto mais absorve mais esfria. Isso caracteriza que o sistema é termodinamicamente instável.

Suponha que o corpo com capacidade térmica negativa descrito acima seja um buraco negro de Schwarzschild como ilustrado na Figura 6. Onde U é um reservatório térmico muito maior que o buraco negro. Ambos se encontram a mesma temperatura. Duas situações são possíveis:

1. Se por uma flutuação estatística o buraco negro começa absorver um pouco mais de calor do que ele emite, ele esfriará, pois sua capacidade térmica é negativa. Como ele tentará atingir novamente o equilíbrio absorverá mais calor e crescerá indefinidamente.
2. Se por uma flutuação estatística o buraco negro começa a emitir um pouco mais de calor que absorve, ele esquentará. E afim de atingir o equilíbrio térmico com o reservatório passará a emitir mais radiação até evaporar completamente.

Essas duas possibilidades indicam que o buraco negro de Schwarzschild é termodinamicamente instável e corrobora a afirmação sobre sua instabilidade para ensembles canônicos.

Diante disso, o buraco negro de Schwarzschild vem sendo amplamente abordado com a finalidade investigar sua estabilidade termodinâmica através de diferentes funcionais entrópicas. Czinner (CZINNER; IGUCHI, 2016) propôs analisar a termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild por meio da entropia de Rényi definida na equação (2.104) interpretando a entropia de Bekenstein-Hawking como a entropia de Tsallis. Esse caso foi chamado posteriormente como entropia de Rényi modificada por Abreu e Neto (ABREU; NETO, 2021). As funções termodinâmicas baseadas nessa abordagem são dadas por

$$S_R = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda S_{BH}), \quad (3.20)$$

$$T_R = \frac{1}{8\pi M} + \frac{\lambda}{2} M = T_H + \frac{\lambda}{2} M \quad (3.21)$$

e

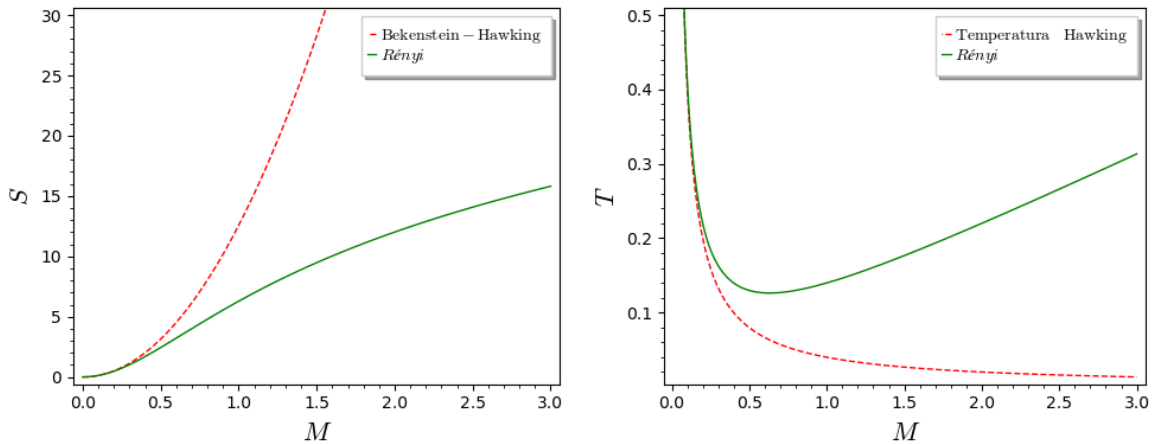
$$C_R = \frac{8\pi M^2}{4\pi\lambda M^2 - 1} = \frac{1}{(\lambda/2) + (1/C_{BH})}. \quad (3.22)$$

Sendo $\lambda = 1 - q$ e T_H a temperatura Hawking do buraco negro de Schwarzschild dada pela equação (3.17).

Na Figura 8 (esquerda) tem-se a entropia de Rényi S_R em função da massa do buraco negro M e em conjunto é plotada a entropia de Bekenstein-Hawking para efeito de comparação. Pode-se observar que a entropia muda sua concavidade para um determinado valor de M , essa mudança se

manifestará mais abaixo como uma possível transição de fase quando considerado um buraco negro de Schwarzschild em um ensemble canônico.

Figura 8 – **Esquerda:** entropia de Bekenstein-Hawking em linha tracejada vermelha e a entropia de Rényi para o buraco negro de Schwarzschild em linha sólida verde para $\lambda = 0.2$. **Direita:** temperatura Hawking em linha vermelha tracejada e em linha verde sólida temperatura de Rényi do buraco negro de Schwarzschild. Note que a entropia de Rényi apresenta uma mudança da concavidade, essa característica é refletida por meio do mínimo da temperatura e implicará, como será verificado mais abaixo, na mudança de sinal da capacidade térmica indicando possível mudança de estabilidade.



Fonte: Produção do próprio autor.

O buraco negro de Schwazschild, quando analisado via estatística de Rényi é mais quente, pois é incrementado à temperatura Hawking um fator linear da massa, o que faz com que a temperatura de Rényi tenha um comportamento linear crescente para valores grandes da massa Figura 8 (direita).

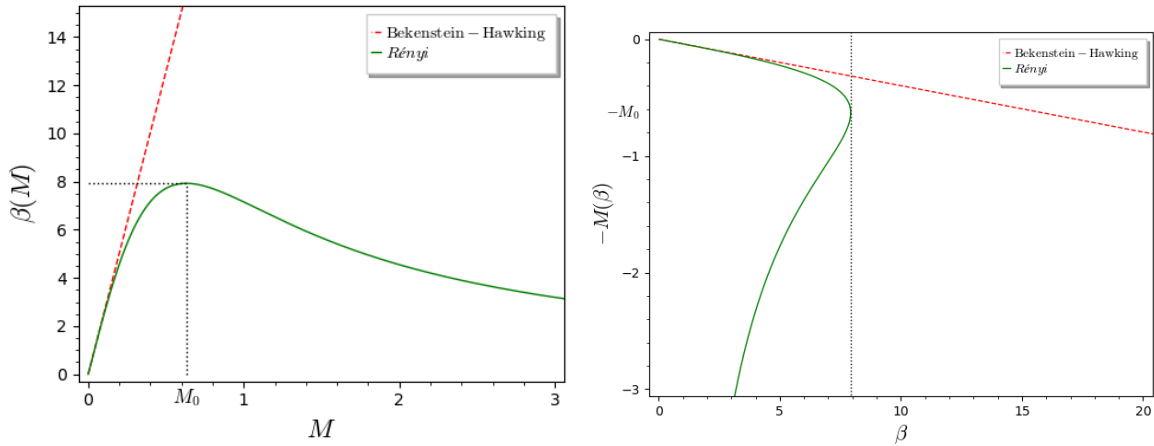
Pode-se utilizar o método de Poincaré discutido na seção 3.2 para analisar possíveis mudanças de estabilidade que ocorram no buraco negro de Schwarzschild. Para o caso de um buraco negro isolado, ou seja, sendo interpretado como um ensemble microcanônico, considera-se a temperatura recíproca Hawking e a temperatura recíproca de Rényi, como mostrado na Figura 9 (esquerda). Essas temperaturas recíprocas são dadas por

$$\beta_H = \frac{1}{T_H} = 8\pi M, \quad (3.23)$$

$$\beta_R = \frac{1}{T_R} = \frac{8\pi M}{1 + 4\pi\lambda M^2}. \quad (3.24)$$

Como discutido anteriormente, só haverá mudança de estabilidade se a curva da variável termodinamicamente conjugada β em função da variável de controle tiver uma reta tangente vertical, o que não ocorre como se pode observar no gráfico da Figura 9 (esquerda). Portanto, dado que essas curvas representam uma configuração de equilíbrio, pode-se concluir que o buraco negro de Schwarzschild isolado é termodinamicamente estável tanto para a estatística de Bekenstein-Hawking, quanto para a de Rényi.

Figura 9 – **Esquerda:** temperatura recíproca Hawking dada pela linha vermelha tracejada tem comportamento linear e temperatura recíproca de Rényi, que tem um máximo num determinado valor de massa e decresce de modo que tende à zero para valores de M muito grandes. **Direita:** curvas para $-M(\beta)$ considerando o buraco negro de Schwarzschild circundado em um banho térmico infinito de radiação térmica, ou seja, como um ensemble canônico. Em vermelho tracejado associada à entropia de Bekenstein-Hawking e em azul sólido associada à entropia de Rényi.



Fonte: Produção do próprio autor.

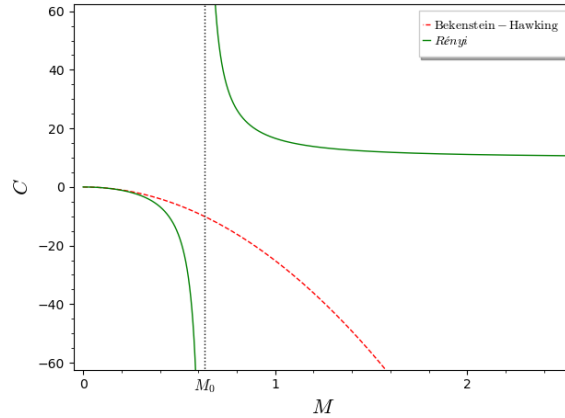
Pode-se também analisar o buraco negro circundado por um banho térmico infinito, nesse caso ele será interpretado com sendo analisado em um ensemble canônico, em que está contido em um reservatório infinito e com capacidade térmica infinitamente grande. Nesse referencial, a função de Massieu de equilíbrio é a dada pela equação (3.14) e a variável termodinamicamente conjugada é dada pela equação (3.15).

O buraco negro de Schwarzschild, quando analisado no referencial canônico, como apresentado na Figura 9 (direita), não apresenta mudança de estabilidade para a estatística de Bekenstein-Hawking. No entanto, quando analisado pela estatística de Rényi, apresenta uma reta tangente vertical, o que indica uma mudança de estabilidade. Buracos negros com massa pequena, $M < M_0$, apresentam-se mais instáveis, em relação a buracos negros maiores, com massa $M > M_0$, que se mostram mais estáveis.

Essa mudança de estabilidade evidenciada pelo método de Poincaré é também exibida pela análise feita via capacidade térmica, que apresenta uma mudança de estabilidade em $M = M_0$. Buracos negros com $M < M_0$ possuem uma capacidade térmica negativa, o que indica uma instabilidade via análise Hessiana e buracos negros com massa $M > M_0$ possuem capacidade térmica positiva, indicando que são mais estáveis.

Outras possibilidades de análises para estudar o comportamento termodinâmico de buracos negros têm sido feitas nas referências (MEJRHIT; ENNADIFI, 2019)(ABREU; NETO, 2021). Entre elas estão também utilizando a estatística de Tsallis, discutida na seção 2.2. Nessa abordagem, a entropia de Bekenstein-Hawking do buraco negro de Schwarzschild dada pela equação (3.16) é interpretada como entropia de Boltzmann-Gibbs para estados equiprováveis, dada pela equação (2.1) e portanto o número de microestados será dado por

Figura 10 – Capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild analisada pela estatística de Bekenstein-Hawking, em linha tracejada vermelha e em linha sólida verde a analisada via estatística de Rényi.



Fonte: Produção do próprio autor.

$$W = \exp(4\pi M^2). \quad (3.25)$$

Usando a equação para entropia de Tsallis para estados equiprobabilísticos (2.54) e a equação (3.25), tem-se

$$S_q = \frac{1}{1-q} [\exp(4\pi M^2(1-q)) - 1]. \quad (3.26)$$

Por meio da equação (3.26) pode-se calcular a temperatura e a capacidade térmica, respectivamente dadas por

$$T_q = \left(\frac{\partial S_q}{\partial M} \right)^{-1} = \frac{1}{8\pi M} e^{(4\pi M^2(q-1))} = T_H e^{(4\pi M^2(q-1))}, \quad (3.27)$$

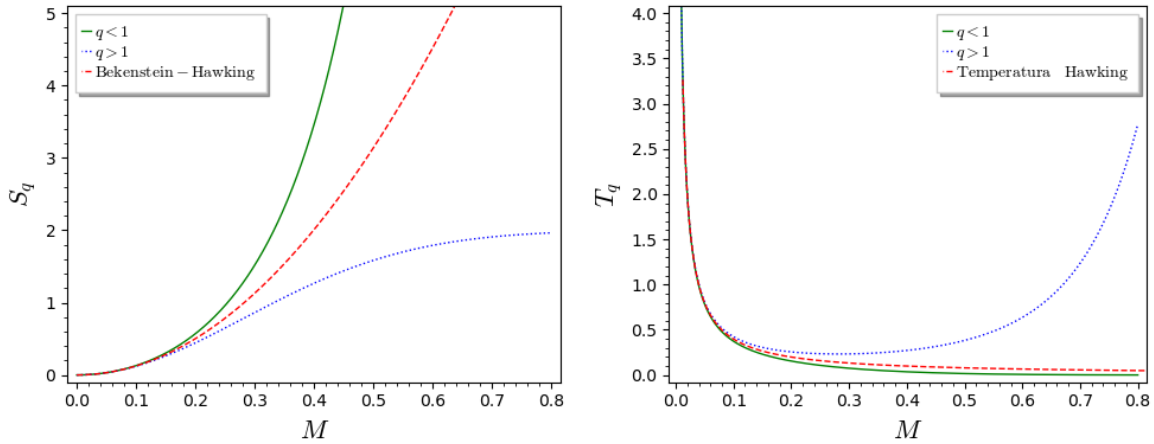
$$C_q = \frac{8\pi M^2 e^{(-4\pi M^2 q + 4\pi M^2)}}{8\pi M^2 q - 8\pi M^2 - 1} = C_{BH} \frac{e^{(-4\pi M^2 q + 4\pi M^2)}}{-8\pi M^2 q + 8\pi M^2 + 1} \quad (3.28)$$

onde T_H é a temperatura Hawking do buraco negro de Schwarzschild e C_{BH} sua capacidade térmica 3.18.

As curvas funções (3.26) e (3.27) são exibidas na Figura 11. À esquerda tem-se a entropia de Tsallis para estados equiprováveis do buraco negro de Schwarzschild para diferentes valores do parâmetro q . À direita tem-se a temperatura do buraco negro de Schwarzschild para a estatística de Tsallis, para $q < 1$, $q = 1$ que coincide com a temperatura Hawking e para $q > 1$, que possui um mínimo.

Uma análise da estabilidade do buraco negro utilizando a estatística de Tsallis pode-se ser feita via método de Poincaré, como feita anteriormente para a estatística de Rényi. A função termodinamica-

Figura 11 – **Esquerda:** entropia de Tsallis para o buraco negro de Schwarzschild com $q < 1$ em linha verde sólida, $q > 1$ em linha azul pontilhada e em vermelho para $q = 1$, que coincide com a entropia de Bekenstein-Hawking. **Direita:** temperatura obtida via entropia de Tsallis para o buraco negro de Schwarzschild com $q < 1$ em linha verde sólida, $q > 1$ em linha azul pontilhada e em vermelho tracejada $q = 1$ que coincide com a temperatura Hawking.



Fonte: Produção do próprio autor.

mente conjugada para o buraco negro isolado é dada por

$$\beta_q = \frac{1}{T_H} e^{(4\pi M^2(1-q))}. \quad (3.29)$$

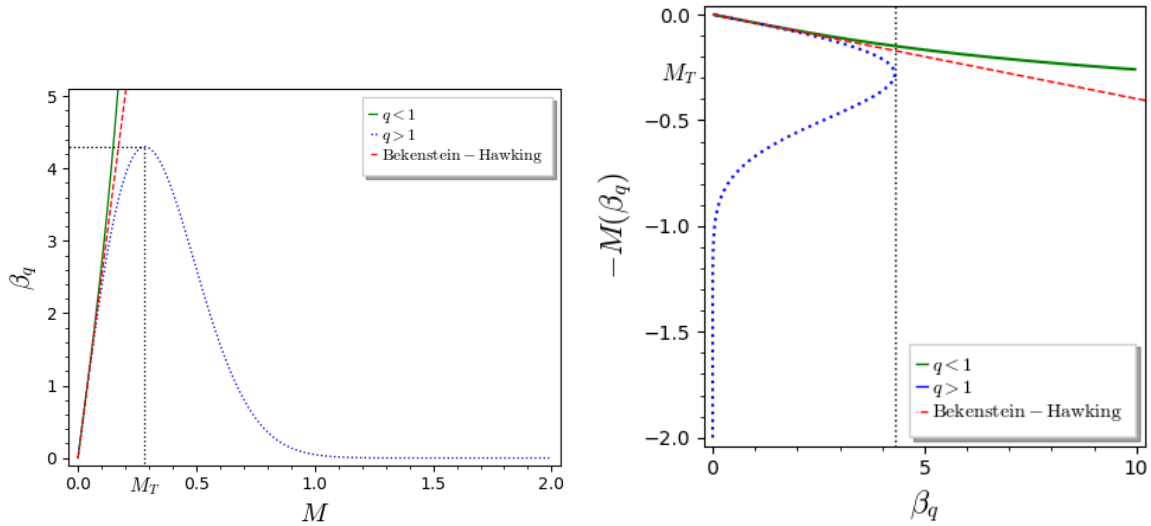
Essa função é plotada na Figura 12 (esquerda), para diversos valores de q , sendo $q = 1$ coincidindo com a estatística de Bekenstein-Hawking. Como não há nenhuma reta vertical tangente as curvas, não há nenhuma mudança de estabilidade e portanto, no contexto isolado, o buraco negro de Schwarzschild, o que está de acordo com os resultados discutidos acima.

Para um buraco negro em um banho térmico infinito, não é possível achar uma expressão explícita para a função termodinamicamente conjugada $-M(\beta_q)$. No entanto, a função é plotada implicitamente utilizando a equação (3.29) para diversos valores que q . Somente para $q > 1$ há uma tangente vertical, que indica uma mudança de estabilidade no buraco negro de Schwarzschild, coincidindo com o resultado obtido via estatística de Rényi. Esse ponto de mudança de estabilidade é o mínimo da temperatura do gráficos da Figura 11. Para valores de $q < 1$, os resultados se assemelham aos obtidos utilizando a estatística de Bekenstein-Hawking, que é dada quando $q = 1$.

Essa mudança de estabilidade para $q > 1$ também pode ser observada pela análise da capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild quando analisado via estatística de Tsallis. E novamente, assim como supracitado para as análises via método de Póincaré, as análises para $q < 1$ se assemelham as da estatística de Bekenstein-Hawking e para $q = 1$ coincide com ela.

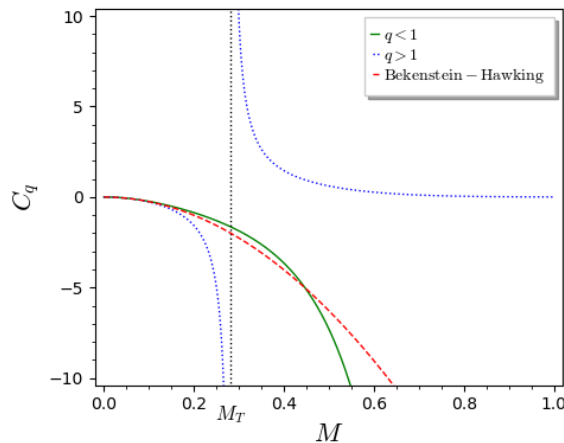
Os resultados obtidos para o buraco negro de Schwarzschild estão de acordo com a literatura quando analisados por meio da estatística de Rényi e coincidem quando analisado para $q > 1$ com a estatística de Tsallis. A principal diferença dessas abordagens em relação a de Bekenstein-Hawking é o fato que buracos negros em banho térmico num reservatório infinito apresentam mudanças de

Figura 12 – **Esquerda:** temperatura recíproca Hawking dada pela linha vermelha tracejada tem comportamento linear e é dada para $q = 1$. Temperatura recíproca de Tsallis tem um máximo num determinado valor de massa M_T e decresce de modo que tende à zero para valores de M muito grandes é dada pela linha pontilhada azul para $q > 1$ e para $q < 1$ tem um comportamento linear análogo ao da temperatura recíproca Hawking, denotado pela linha sólida verde. **Direita:** curvas para $-M(\beta)$ considerando o buraco negro de Schwarzschild circundado em um banho térmico infinito de radiação térmica, ou seja, como um ensemble canônico. Em vermelho tracejado para $q = 1$, em verde para $q > 1$ e em preto para $q < 1$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 13 – Capacidade térmica calculada via entropia de Tsallis para o buraco negro de Schwarzschild. Em vermelho está a capacidade térmica para $q = 1$ que coincide com a capacidade térmica obtida via entropia de Bekenstein-Hawking, em verde está a entropia obtida para $q < 1$, que possui um comportamento análogo a entropia de Bekenstein-Hawking e em azul a capacidade térmica para $q > 1$, onde exibe uma possível mudança de estabilidade.



Fonte: Produção do próprio autor.

estabilidade, indo de mais instável para um valor de massa $M < M_T$, onde

$$M_T = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi(q-1)}}, \quad (3.30)$$

para mais estável com valores de massa $M > M_T$. Isso significa que a instabilidade do buraco negro de Schwarzschild em banho térmico de radiação é estabilizada se a fração de energia da radiação é suficientemente pequena em relação a sua massa (KABURAKI; OKAMOTO; KATZ, 1993).

3.4 TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS COM CABELO OBTIDO VIA DESACOPLAMENTO GRAVITACIONAL

3.4.1 INTRODUÇÃO AO MÉTODO DE DESACOPLAMENTO GRAVITACIONAL

O método de desacoplamento gravitacional compreende uma abordagem alternativa para obter soluções das equações de Einstein. Ele consiste em deformar soluções já conhecidas e estendê-las para contextos além da relatividade geral (OVALLE, 2019). Uma solução das equações de Einstein foi obtida via o método de desacoplamento gravitacional para buracos negros estáticos e simetricamente esféricos em (OVALLE et al., 2021) e soluções para buracos negros com rotação utilizando desacoplamento gravitacional foi obtida em (CONTRERAS; OVALLE; CASADIO, 2021). A presente subseção não visa esgotar o assunto sobre desacoplamento gravitacional, mas dar uma prescrição do método para a construção da solução que será analisada na subseção seguinte, uma construção mais geral e detalhada do método pode ser encontrada em (OVALLE, 2019).

Considere as equações de campo de Einstein dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = k^2\tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

onde

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}, \quad (3.32)$$

denota o tensor energia-momento composto por duas contribuições. Usualmente, para o método, $T_{\mu\nu}$ estará relacionada a uma fonte já conhecida e $\Theta_{\mu\nu}$ associado a uma fonte adicional, também denominado de “tensor vácuo”. O tensor energia-momento $\tilde{T}_{\mu\nu}$ deve ser covariantemente conservado $\nabla_\mu \tilde{T}_{\mu\nu} = 0$ para que as equações de campo sejam satisfeitas.

Assumindo uma métrica $g_{\mu\nu}$ para sistemas estáticos e esfericamente simétricos dada por

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (3.33)$$

as equações de Einstein serão dadas por

$$k^2(T_0^0 + \Theta_0^0) = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right), \quad (3.34)$$

$$k^2(T_1^1 + \Theta_1^1) = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \right), \quad (3.35)$$

$$k^2 (T_2^2 + \Theta_2^2) = -\frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (3.36)$$

onde $\lambda' = \frac{\partial \lambda}{\partial r}$. Verificando as equações de campos é possível identificar uma densidades efetiva, pressão radial e pressão tangencial fornecidas por

$$\check{\rho} = T_0^0 + \Theta_0^0, \quad (3.37)$$

$$\check{p}_r = -T_1^1 - \Theta_1^1, \quad (3.38)$$

$$\check{p}_t = -T_2^2 - \Theta_2^2. \quad (3.39)$$

A anisotropia do sistema pode ser definida como

$$\Delta \equiv \check{p}_t - \check{p}_r, \quad (3.40)$$

uma vez que o tratamento pode ser aplicado a fluídos anisotrópicos, ou seja, em que as pressão são diferentes em determinadas direções.

Considere uma solução semente das equações de Einstein para $T_{\mu\nu}$ dada por

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{\zeta(r)} dt^2 - e^{\mu(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.41)$$

A métrica semente dada acima pode ser deformada utilizando o método da deformação geométrica extendida (OVALLE et al., 2021), afim de levar em consideração a fonte adicional. Essa deformação é dada por

$$\zeta(r) \rightarrow \nu(r) = \zeta(r) + \alpha g(r), \quad (3.42)$$

$$e^{-\mu(r)} \rightarrow e^{-\lambda(r)} = e^{-\mu(r)} + \alpha f(r), \quad (3.43)$$

onde α é um parâmetro introduzido com objetivo de manter o controle da deformação e $g(r)$ e $f(r)$ são funções que deformam a métrica. Vale notar que, deformar a métrica por meio dessas funções, pode ser associado a adicionar uma fonte extra no espaço-tempo que vai causar essa deformação e é nesse sentido que o método seguirá. Com as equações 3.42 e 3.43 e utilizando

$$\lambda' = \frac{\mu' e^{-\mu} - \alpha f'}{e^{-\mu} + f\alpha}. \quad (3.44)$$

Obtém utilizando as equações 3.34-3.36 as equações de Einstein para $T_{\mu\nu}$

$$k^2 T_0^0 = \frac{1}{r^2} - e^{-\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu'}{r} \right), \quad (3.45)$$

$$k^2 T_1^1 = \frac{1}{r^2} - e^{-\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\zeta'}{r} \right), \quad (3.46)$$

$$k^2 T_2^2 = \frac{e^{-\mu}}{4} \left(2\zeta'' + \zeta'^2 - \mu'\zeta' + 2\frac{\zeta' - \mu'}{r} \right), \quad (3.47)$$

cuja solução é conhecida e dada pela métrica semente 3.41. E obtém, também, as equações denominadas de *equações de quase-Einstein* para a fonte adicional $\Theta_{\mu\nu}$

$$k^2 \Theta_0^0 = -\frac{\alpha f}{r^2} - \frac{\alpha f'}{r}, \quad (3.48)$$

$$k^2 \Theta_1^1 + \alpha Z_1 = -\alpha f \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right), \quad (3.49)$$

$$k^2 + \Theta_2^2 + \alpha Z_2 = -\alpha \frac{f}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 + 2\frac{\nu'}{r} \right) - \alpha \frac{f'}{4} \left(\nu' + \frac{2}{r} \right), \quad (3.50)$$

onde

$$Z_1 = \frac{e^{-\mu} g'}{r}, \quad (3.51)$$

$$4Z_2 = e^{-\mu} \left(2g'' + g'^2 + 2\frac{g'}{r} + 2\zeta'g' - \mu'g' \right). \quad (3.52)$$

Note que se $\alpha \rightarrow 0$ a fonte $\Theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$, reafirmando o que já foi observado anteriormente de que a deformação geométrica está relacionada com a fonte adicional.

Adotando a métrica semente 3.41 como a métrica de Schwarzschild, tem-se

$$e^\zeta = e^{-\mu} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (3.53)$$

que resolve as equações 3.45-3.47 para o vácuo, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$.

Para resolver as equações de quase-Einstein para a fonte adicional, algumas condições serão requeridas e impostas durante a resolução

1. A estrutura do horizonte deve ser bem definida, isso demandará que

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)}, \quad (3.54)$$

o que garante que existe um $r = r_H$, tal que

$$e^{\nu(r_H)} = e^{-\lambda(r_H)} = 0. \quad (3.55)$$

2. E também será imposto que a fonte adicional $\Theta_{\mu\nu}$ satisfaz a condição de energia forte.

Usando a condição 1 nas equações 3.34 e 3.35 pode-se concluir que

$$\check{\rho} = -\check{p}_r. \quad (3.56)$$

Logo só é permitida a existência de pressão radial negativa para uma densidade de energia positiva. Usando a solução de Schwarzschild 3.53 e a equação 3.54 tem-se em conjunto com as equações 3.51 e 3.52

$$f = e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{\alpha g(r)}, \quad (3.57)$$

portanto

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{\alpha g(r)} dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^{-\alpha g(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.58)$$

Considerando que na região $r \gg 2M$, o tensor vácuo satisfaz

$$\Theta_0^0 = a\Theta_1^1 + b\Theta_2^2, \quad (3.59)$$

com a e b constantes. Usando as equações 3.48-3.50, obtém-se a equação diferencial

$$br(r - 2M)h'' + 2[(a + b - 1)r - (a - 1)M]h' + 2(a - 1)h = 2(a - 1) \quad (3.60)$$

onde $h(r) \equiv e^{\alpha g(r)}$.

A solução da equação diferencial acima é dada por

$$e^{\alpha g(r)} = 1 + \frac{1}{r - 2M} \left[\ell_0 + r \left(\frac{\ell}{r} \right)^m \right], \quad (3.61)$$

sendo $m = 2\frac{(a-1)}{b}$, ℓ_0 e ℓ são constantes proporcionais a α com dimensão de comprimento. Os termos da métrica dados na equação 3.57 tomam a forma

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2\overline{M}}{r} + \frac{\ell^m}{r^m} \quad (3.62)$$

onde $\overline{M} = M + \frac{\ell_0}{2}$ e $m > 1$ para garantir a planicidade assintótica da solução.

Aplicando a condição de energia forte dada por

$$\tilde{\rho} + 2\tilde{p}_t + \tilde{p}_r \geq 0 \quad (3.63)$$

$$\tilde{\rho} + \tilde{p} \geq 0 \quad (3.64)$$

$$\tilde{\rho} + \tilde{p}_t \geq 0 \quad (3.65)$$

Da equação 3.56, considerando que se está assumindo o fundo de vácuo $T_{\mu\nu} = 0$, usando as definições

3.37 e 3.39 tem-se (CAVALCANTI; PAIVA; ROCHA, 2022)

$$-\Theta_0^0 \leq \Theta_2^2 \leq 0 \quad (3.66)$$

Usando as equações 3.48 e 3.50 a desigualdade acima, dada pela equação 3.66, pode ser reformulada como

$$G_1 \equiv (r - 2M) h'' + 2h' \geq 0, \quad (3.67)$$

$$G_2(r) \equiv r(r - 2M) h'' + 4Mh' - 2h + 2 \geq 0, \quad (3.68)$$

com $h = e^{\alpha g(r)}$.

Soluções com horizonte próprio em $r = r_H \sim 2M$ e que também se comportam aproximadamente como a métrica de Schwarzschild para $r \gg 2M$, ou seja, para que se comporte de modo assintoticamente plana, $G_1 = 0$. Resolvendo então a equação diferencial, tem-se

$$h(r) = d - \alpha \frac{\ell - r e^{-r/M}}{r - 2M}. \quad (3.69)$$

Como para $\alpha = 0$ a solução de Schwarzschild deve ser recuperada, obtém-se que $d = 1$. Substituindo nos elementos da métrica 3.57, conclui-se que

$$f = 1 - \frac{2M + \alpha \ell}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M}}, \quad (3.70)$$

sendo a solução obtida via desacoplamento gravitacional dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.71)$$

Também, como resultado da condição de energia forte, o parâmetro ℓ é restrito à $\ell \geq 2M/e^2$, cujo caso extremo $\ell = 2M/e^2$ resulta em

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \alpha \left(e^{-\frac{r}{M}} - \frac{2M}{e^2 r} \right). \quad (3.72)$$

O parâmetro ℓ é denominado de cabelo do buraco negro, pois o caracteriza, além do parâmetro massa. No entanto, vale observar para o leitor que apesar do nome, o teorema *no-hair*² não foi violado, isso porque o teorema é válido para soluções de vácuo, que não é o caso da solução obtida via desacoplamento gravitacional.

² O teorema *no-hair* afirma que se um espaço-tempo é quadridimensional, assintoticamente plano, estacionário cuja sua métrica é uma solução de vácuo ou eletrovácuo das equações de Einstein, então ele será caracterizado apenas por sua massa M , momento angular J e carga elétrica Q . Para uma abordagem mais detalhada veja ()

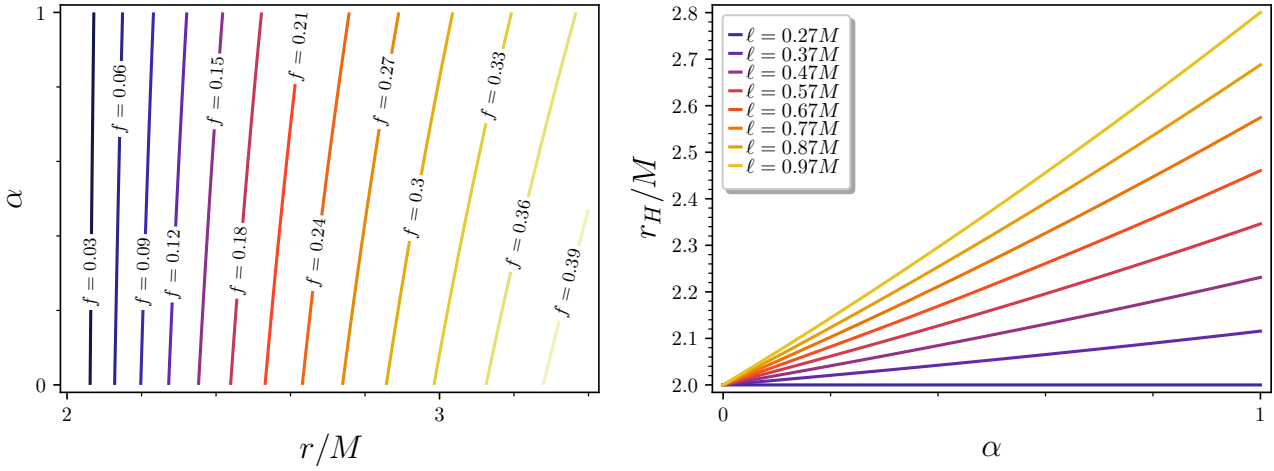
3.4.2 ESTABILIDADE TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS COM CABELO

O buraco negro com cabelo dado pela solução 3.71 obtida acima, possui apenas um horizonte localizando em $r = r_H$, tal que nesse região

$$r_H - 2M - \alpha\ell + r_H\alpha e^{-\frac{r_H}{M}} = 0. \quad (3.73)$$

Essa equação não possui solução analítica, exceto para valores específicos dos parâmetros (α, ℓ) . Em particular, para o caso extremo, o horizonte é localizado em $r_H = 2M$. A equação (3.73), contudo, pode ser analisada numericamente. A Figura 14 mostra o raio do horizonte para diferentes valores dos parâmetros (α, ℓ) no intervalo permitido pela condição de energia forte.

Figura 14 – **Esquerda:** Linhas de contorno de $f(r)$ em função de (r, α) para o caso extremo ($\ell = 2Me^{-2}$). **Direita:** raio do horizonte do buraco negro com cabelo r_H em função de α para diferentes valores do parâmetro ℓ . A não linearidade da equação ((3.73)) tem uma pequena influência em r_H .



Fonte: (CAVALCANTI; ALVES; SILVA, 2022).

Com objetivo de estudar a estrutura do horizonte do buraco negro com cabelo, será realizada uma transformação de coordenadas de modo análogo as coordenadas de Eddington-Finkelstein, tal que $(t, r, \theta, \phi) \mapsto (v, r, \theta, \phi)$, onde v é dado por

$$v = t - \int \left(1 - \frac{2M + \alpha\ell}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M}} \right)^{-1} dr. \quad (3.74)$$

Nesse novo sistema de coordenadas, a métrica (3.71) toma a seguinte forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\alpha\ell + 2M}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M}} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (3.75)$$

com a vantagem de ser regular no horizonte. De fato, a única singularidade física está em $r = 0$

(OVALLE et al., 2021), como pode ser observado por meio do escalar de Kretchmann,

$$K = \frac{48 M^2}{r^6} - 8 \alpha \left(\frac{2 M e^{-\frac{r}{M}}}{r^5} + \frac{2 e^{-\frac{r}{M}}}{r^4} + \frac{e^{-\frac{r}{M}}}{M r^3} - \frac{6 M \ell}{r^6} \right) - \alpha^2 \left(\frac{8 \ell e^{-\frac{r}{M}}}{r^5} + \frac{8 \ell e^{-\frac{r}{M}}}{M r^4} + \frac{4 \ell e^{-\frac{r}{M}}}{M^2 r^3} - \frac{e^{-\frac{2r}{M}}}{M^4} - \frac{4 e^{-\frac{2r}{M}}}{r^4} - \frac{4 e^{-\frac{2r}{M}}}{M^2 r^2} - \frac{12 \ell^2}{r^6} \right). \quad (3.76)$$

Também é preciso, para analisar a estrutura do horizonte, introduzir vetores normais nulos l_μ e k_μ , tal que $l_\mu l^\mu = k_\mu k^\mu = 0$, $l_\mu k^\mu = -1$ e são dados explicitamente por

$$l = \partial_v + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M + \alpha \ell}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M}} \right) \partial_r, \quad (3.77)$$

$$k = -\partial_r. \quad (3.78)$$

Esses vetores são linearmente independentes e associados a geodésicas radiais nulas apontado para o exterior e interior do buraco negro, respectivamente. Pode-se introduzir a métrica da seção transversal do horizonte como (GOURGOULHON, 2018)

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + l_\mu k_\nu + k_\mu l_\nu \longrightarrow q = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.79)$$

como também a expansão ao longo dos vetores normais nulos

$$\theta_{(l)} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_l \det(q) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M + \alpha \ell}{r} + \alpha e^{-\frac{r}{M}} \right), \quad (3.80)$$

$$\theta_{(k)} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_k \det(q) = -\frac{2}{r}, \quad (3.81)$$

onde $\mathcal{L}_l$ denota a derivada de Lie ao longo de l . Como esperado, no horizonte

$$\theta_{(l)}|_{r=r_H} = 0, \quad (3.82)$$

$$\theta_{(k)}|_{r=r_H} = -\frac{2}{r_H} < 0. \quad (3.83)$$

Esses resultados mostram que a seção transversal é uma superfície marginalmente aprisionada (GOURGOULHON; JARAMILLO, 2008) e que o horizonte com cabelo é um horizonte não-expansível (ASHTEKAR; KRISHNAN, 2004). Além do mais, uma vez que o normal nulo l coincide com um vetor de Killing $\xi = \partial_v$ no horizonte, ele é também um horizonte de Killing, cuja superfície gravitacional associada é dada por

$$\kappa = [\nabla_\mu l^\mu - \theta_{(l)}]_{r=r_H} = \frac{M}{r_H^2} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\ell}{r_H^2} - \frac{e^{-\frac{r_H}{M}}}{M} \right). \quad (3.84)$$

A superfície gravitacional fornece de modo direto a temperatura Hawking do buraco negro com cabelo,

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{M}{r_H^2} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\ell}{r_H^2} - \frac{e^{-\frac{r_H}{M}}}{M} \right) \right]. \quad (3.85)$$

Eliminando o parâmetro de desacoplamento α por meio da equação (3.73) encontra-se

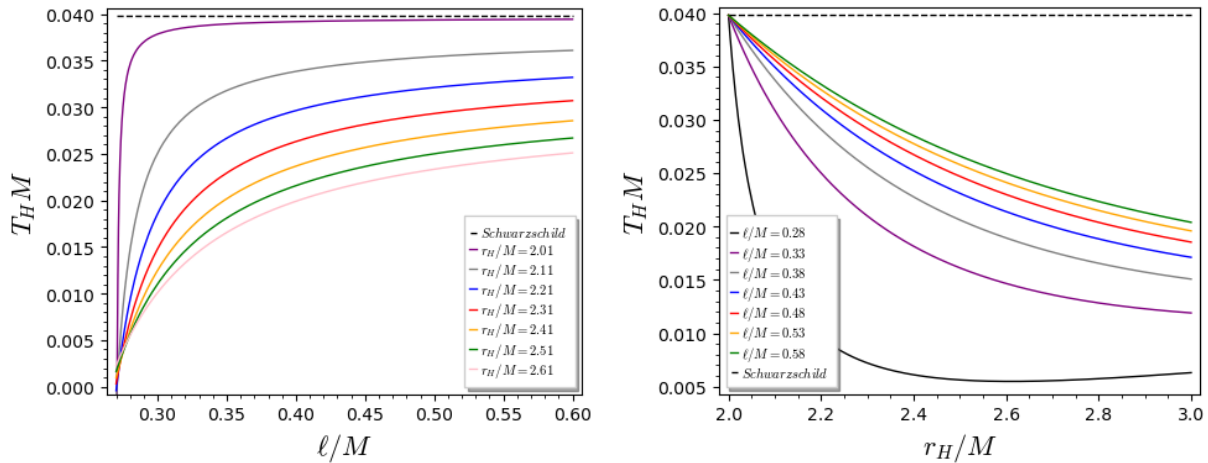
$$T_H = \frac{\left(\ell e^{\frac{r_H}{M}} - 2M + 2r_H \right) M - r_H^2}{4\pi \left(\ell e^{\frac{r_H}{M}} - r_H \right) M r_H}. \quad (3.86)$$

Para o caso extremo ela fica simplesmente dada por

$$T_H = \frac{1}{8\pi M} \left(1 - \frac{\alpha}{e^2} \right) = T_{Shw} \left(1 - \frac{\alpha}{e^2} \right), \quad (3.87)$$

onde T_{Shw} é a temperatura Hawking do buraco negro de Schwarzschild dada pela equação (3.17). Note que, quando comparado ao buraco negro de Schwarzschild, o buraco negro com cabelo é ligeiramente mais frio. Além disso, para $\ell = 2Me^{-2}$, que denota o caso extremo a temperatura Hawking é nula (ver Figura 15).

Figura 15 – **Esquerda:** temperatura Hawking do buraco negro com cabelo em função do parâmetro de cabelo do horizonte ℓ para diferentes valores de raio do horizonte r_H . Note a baixa temperatura para $\ell \rightarrow 2Me^{-2}$. **Direita:** temperatura Hawking do buraco negro com cabelo em função do raio do horizonte r_H para diferentes valores do parâmetro de cabelo do horizonte ℓ . Quando $r_H \rightarrow 2M$ a temperatura $T_H \rightarrow T_{Shw}$ para qualquer ℓ . Em ambos os casos o parâmetro de desacoplamento α foi eliminado usando a equação (3.73) e o raio $r_H = 2M$ corresponde ao caso extremo.



Fonte: Produção do próprio autor.

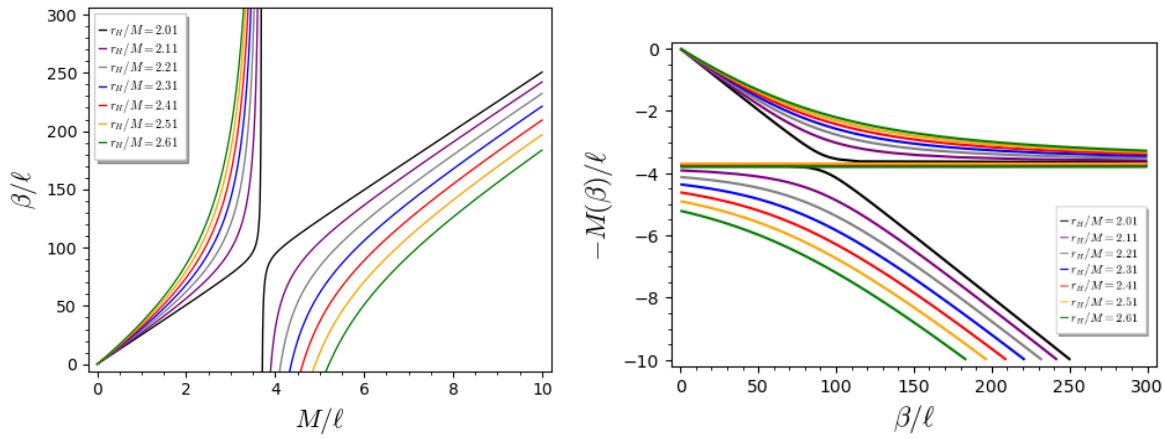
Uma análise via método de Poincaré pode ser feita para o buraco negro com cabelo usando a

temperatura recíproca dada por

$$\beta = \frac{4\pi \left(\ell e^{\frac{r_H}{M}} - r_H \right) M r_H}{\left(\ell e^{\frac{r_H}{M}} - 2M + 2r_H \right) M - r_H^2}. \quad (3.88)$$

Essa abordagem realizada para um contexto em que o buraco negro está isolado, de modo análogo como feito para o buraco negro de Schwarzschild, como na Figura 16 (Esquerda). Como não há

Figura 16 – **Esquerda:** temperatura recíproca β em função da massa do buraco negro com cabelo para diversos valores do raio do horizonte r_H , para um buraco negro com cabelo isolado. **Direita:** $-M$ em função da temperatura recíproca para diversos valores do raio do horizonte r_H , para um buraco negro com cabelo em banho térmico infinito. Em ambos os casos não há retas tangentes verticais, o que indica pela análise do método de Poincaré que não há mudanças de estabilidade.



Fonte: Produção do próprio autor.

retas tangentes verticais a curva da variável termodinamicamente conjugada em função da variável de controle, não há mudança de estabilidade para o buraco negro com cabelo considerado em um ensemble microcanônico. Por continuidade, espera-se que o buraco negro com cabelo seja estável, assim como o buraco negro de Schwarzschild.

De modo análogo, uma análise para o buraco negro com cabelo em um ensemble canônico pode ser feita e como a equação para obter a variável termodinamicamente conjugada $-M(\beta)$ é transcendental, foi feito um plote implícito, Figura 16, usando a equação (3.88). Com isso, é possível observar que não há mudança de estabilidade para um buraco negro com cabelo em banho térmico infinito.

Como as equações de Einstein vêm da ação de Einstein-Hibert padrão, a entropia do buraco negro com cabelo deve ser a entropia de Bekenstein-Hawking dada por,

$$S = \pi r_H^2. \quad (3.89)$$

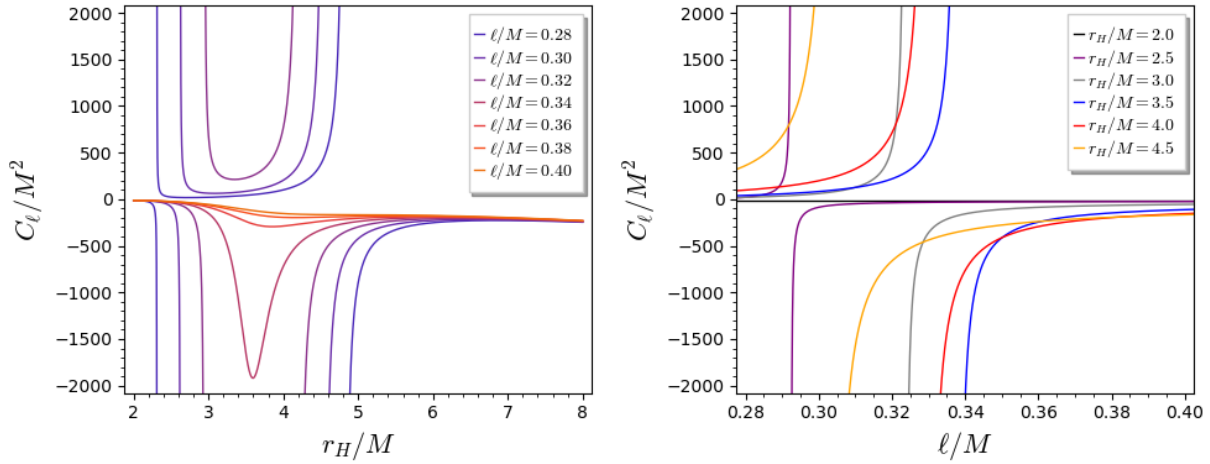
Diante disso, pode-se investigar a estabilidade térmica do buraco negro com cabelo por meio da capacidade térmica com ℓ constante obtida por meio da entropia de Bekenstein-Hawking. Ela é dada

por

$$C_\ell = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_\ell = T \left(\frac{\partial S}{\partial r_H} \right)_\ell \left(\frac{\partial T}{\partial r_H} \right)_\ell^{-1} \quad (3.90)$$

$$= - \frac{2\pi \left(M\ell e^{\frac{r_H}{M}} - 2M^2 + 2Mr_H - r_H^2 \right) Mr_H^2}{2M^2\ell e^{\frac{r_H}{M}} - 4M^3 + 2Mr_H^2 - r_H^3}. \quad (3.91)$$

Figura 17 – **Esquerda:** capacidade térmica do buraco negro com cabelo em função do raio do horizonte r_H para diferentes valores de parâmetro de cabelo ℓ . **Direita:** capacidade térmica em função do parâmetro de cabelo ℓ para diferentes valores de raio do horizonte r_H . Em ambos os casos o parâmetro de desacoplamento α foi eliminado usando a equação (3.73) e o raio $r_H = 2M$ corresponde ao caso extremo. Note a descontinuidade para $\ell < 0.36$ e $r_H < 5$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Hawking-Page (HAWKING; PAGE, 1983) mostraram que buracos negros em espaço AdS possuem um mínimo na temperatura, o que caracteriza uma transição de fase de buraco negro, conhecida como transição de Hawking-Page. Nessa temperatura específica o buraco negro passa a ter uma capacidade térmica positiva, que sugere que ele pode estar em equilíbrio estável com a radiação térmica em uma determinada temperatura fixa, o que implica que pode o buraco negro pode existir para um ensemble canônico.

A descontinuidade da capacidade térmica, como mostrada na Figura 17 reflete uma aparente transição de fase tipo Hawking-Page, separando regiões de configurações estáveis e instáveis. Tais descontinuidades surgem apenas para pequenos valores de ℓ e valores relativamente pequenos de r_H , como para $\ell \lesssim 0.35$ e $r_H \lesssim 5$, para valores além desses a capacidade térmica tende a saturar. A capacidade é bem comportada quando $r_H = 2M$, independentemente de ℓ .

3.4.3 ESTABILIDADE DE BURACOS NEGROS COM CABELO VIA ESTATÍSTICA DE RÉNYI

Uma análise análoga a feita previamente para o buraco negro de Schwarzschild pode ser realizada para o buraco negro com cabelo. Para tal, será utilizada uma aproximação do raio do horizonte do buraco negro com cabelo, obtida por meio da expansão da equação (3.73) em torno do raio de Schwarzschild $r_s = 2M$ (CAVALCANTI; SILVA, 2023). Essa aproximação é dada por

$$r_H \approx \frac{4(\alpha\ell e^2/M - 3\alpha + e^2)M}{\alpha\ell e^2/M - 4\alpha + 2e^2}. \quad (3.92)$$

Interpretando a entropia de Bekenstein-Hawking (3.89) como a entropia de Tsallis e substituindo na entropia de Rényi (2.104), tem-se que, usando a equação (3.92)

$$S_R = \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 + \lambda\pi \left(\frac{4(\alpha\ell e^2/M - 3\alpha + e^2)M}{\alpha\ell e^2/M - 4\alpha + 2e^2} \right)^2 \right], \quad (3.93)$$

onde $\lambda = 1 - q$. Por meio da entropia, pode-se calcular a temperatura e a capacidade térmica, dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} T_R &= \left(\frac{S_R(M)}{\partial M} \right)^{-1} \\ &= \frac{16\pi M^2 \ell^2 \alpha^2 \lambda e^4 - 96\pi M^3 \ell \alpha^2 \lambda e^2 + 144\pi M^4 \alpha^2 \lambda + 32\pi M^3 \ell \alpha \lambda e^4 - 96\pi M^4 \alpha \lambda e^2 + 16\pi M^4 \lambda e^4}{32\pi(\ell^2 \alpha^2 e^4 - 6M\ell \alpha^2 e^2 + 12M^2 \alpha^2 + 2M\ell \alpha e^4 - 10M^2 \alpha e^2 + 2M^2 e^4(\ell \alpha e^2 - 3M\alpha + Me^2))M} \\ &\quad + \frac{\ell^2 \alpha^2 e^4 - 8M\ell \alpha^2 e^2 + 16M^2 \alpha^2 + 4(\ell \alpha e^2 - 4M\alpha + 2Me^2)M\ell \alpha e^4 - 16M^2 \alpha e^2 + 4M^2 e^4}{32\pi(\ell^2 \alpha^2 e^4 - 6M\ell \alpha^2 e^2 + 12M^2 \alpha^2 + 2M\ell \alpha e^4 - 10M^2 \alpha e^2 + 2M^2 e^4(\ell \alpha e^2 - 3M\alpha + Me^2))M}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

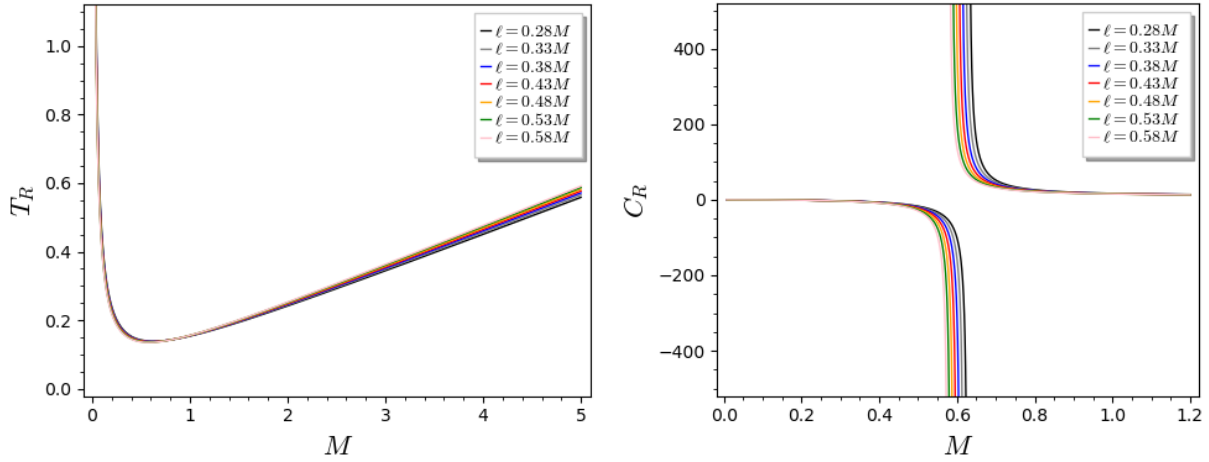
$$C_R = - \frac{S_R'^2(M)}{S_R''(M)}. \quad (3.95)$$

Como pode-se observar na Figura 18, os buracos negros tendem a ter temperaturas maiores para valores de ℓ/M maiores e seu comportamento térmico se assemelha muito ao de Schwarzschild discutido anteriormente. A capacidade térmica, assim como a de Schwarzschild, apresenta uma mudança de sinal o que pode indicar uma possível transição de fase e mudança de estabilidade.

Uma análise via método de Poincaré pode ser realizada utilizando a temperatura recíproca β_R obtida por meio da equação (3.94), essa sendo a variável termodinamicamente conjugada no contexto de buracos negros isolados. Como pode-se observar nas curvas da Figura 19 (esquerda), não há tangentes verticais e portanto não há mudança de estabilidade. Resultado este esperado, uma vez que por continuidade da solução de Schwarzschild, espera-se que o buraco negro com cabelo num contexto de ensemble microcanônico seja estável.

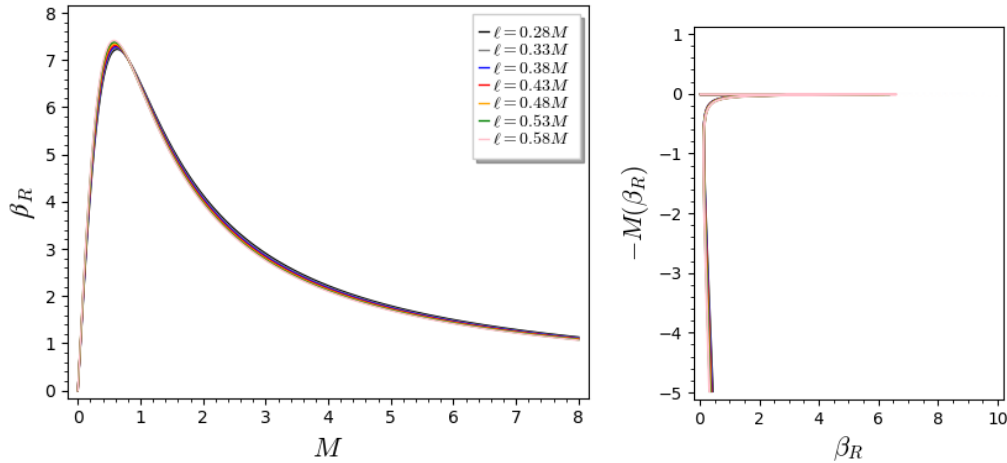
Já para a situação em que o buraco negro está em banho térmico infinito, há uma mudança de estabilidade em $M = M_C$, onde há uma reta tangente vertical no gráfico da Figura 19 (direita) de

Figura 18 – **Esquerda:** temperatura de Rényi para o buraco negro com cabelo para diversos valores do parâmetro ℓ/M para $\alpha = 0.6$. **Direita:** capacidade térmica calculada a partir da entropia de Rényi para o buraco negro com cabelo para diversos parâmetros de ℓ/M , tomando $\alpha = 0.6$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 19 – **Esquerda:** temperatura recíproca de Rényi para o buraco negro com cabelo para diversos valores de ℓ/M e tomando $\alpha = 0.6$. **Direita:** $-M(\beta_R)$ para o buraco negro com cabelo obtido via estatística de Rényi para diversos valores de ℓ/M e com $\alpha = 0.6$.



Fonte: Produção do próprio autor.

modo análogo ao que acontece para Schwarzschild. Essa análise de acordo com a análise feita por meio da capacidade térmica que apresenta uma descontinuidade.

3.5 SUMARIZANDO RESULTADOS

A presente seção tem a finalidade de condensar os resultados do presente capítulo por meio das tabelas 1, 2 e 3. As tabelas apresentam os resultados acerca da estabilidade termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild e dos buracos negros com cabelo para os três funcionais entrópicos utilizados.

A tabela 1 apresenta os resultados do buraco negro de Schwarzschild e de buracos negros com cabelo quando analisados por meio da entropia de Bekenstein-Hawking.

Tabela 1 – Resultados sobre a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild e buracos negros com cabelo quando analisados via estatística de Bekenstein-Hawking.

	Bekenstein-Hawking	
	Microcanônico	Canônico
Schwarzschild	Estável	Instável
Com cabelo	Estável	Instável

Fonte: Produção do próprio autor.

A tabela 2 apresenta os resultados quando os buracos negros de Schwarzschild e com cabelo são analisados via entropia de Rényi.

Tabela 2 – Resultados sobre a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild e buracos negros com cabelo quando analisados via estatística de Rényi. Note para ambos os tipos de buracos negros há uma possível existência em ensembles canônicos a partir de determinados valores de massas.

	Rényi	
	Microcanônico	Canônico
Schwarzschild	Estável	Instável para massas $M < M_0$
Com cabelo	Estável	Instável para massas $M < M_C$

Fonte: Produção do próprio autor.

Por fim, a tabela 3 exhibe os resultados de estabilidade quando o buraco negro de Schwarzschild é analisado via entropia de Tsallis.

Tabela 3 – Resultados sobre a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild quando analisado via estatística de Tsallis. Note que o buraco negro é instável para massas $M < M_T$ e torna-se estável para massas $M > M_T$. A análise via estatística de Tsallis não foi realizada para buracos negros com cabelo.

	Tsallis	
	Microcanônico	Canônico
Schwarzschild	Estável	Instável para massas $M < M_T$
Com cabelo	X	X

Fonte: Produção do próprio autor.

Como é possível observar, os resultados de estabilidade termodinâmico para o buraco negro de Schwarzschild não divergem qualitativamente dos resultados obtidos para buracos negros com cabelo, o que indica que apesar do cabelo causar pequenos desvios de resultados em relação ao buraco negro de Schwarzschild, como um buraco negro mais frio, não altera os resultados de estabilidade significativamente.

4 GEOMETRIA TERMODINÂMICA, ESTABILIDADE E BURACOS NEGROS

Um sistema em equilíbrio termodinâmico encontra-se em um estado termodinâmico, denominado estado de equilíbrio. O estado de equilíbrio é caracterizado por ser descrito por um conjunto de variáveis macroscópicas do sistema, como energia interna U_0 , volume V_0 e número de partículas N (ver Apêndice A). Suponha que você, leitor, coloque uma xícara de café com uma temperatura maior que a temperatura ambiente em cima de uma mesa, coloque adoçante nesse café e então mexa para que o adoçante seja diluído. Por ventura, você então acaba tendo que sair as pressas e deixa o café preparado em cima da mesa. Depois de um tempo muito grande a bebida atinge o equilíbrio termodinâmico com o ambiente em que está inserido. Uma pessoa que encontre esse café depois de atingir o equilíbrio, não saberá se ele foi mexido ou qual a temperatura que ele se encontrava antes. Esse exemplo simples, ilustra como um sistema termodinâmico em equilíbrio não depende do que ocorreu previamente, dado que na situação em que o café foi encontrado, após atingir o equilíbrio termodinâmico, só será descrito por variáveis macroscópicas como supracitado (CALLEN, 1985).

No entanto, apesar de sistemas termodinâmicos em equilíbrio serem descritos por variáveis macroscópicas, como U_0 , V_0 e N , que assumem um determinado valor quando estão em equilíbrio. Do ponto de vista microscópico esses valores principais podem sofrer pequenos desvios. Quando isso ocorre, essas quantidades são ditas *flutuar* e o problema central associado a flutuação dessas grandezas é encontrar a distribuição de probabilidade do desvio em relação aos valores ditos principais (LANDAU, 1969).

A entropia de Boltzmann-Gibbs para estados equiprováveis introduzida no capítulo 2 que descreve ensembles microcanônicos é dada por

$$S = k_B \ln W, \quad (4.1)$$

onde W indica o número de microestados acessíveis ao sistema e é função dos parâmetros extensivos $W = W(U, V, N)$. A inversão feita por Einstein da equação acima

$$W = \exp \left(\frac{S}{k_B} \right), \quad (4.2)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, marca o início da teoria de flutuação termodinâmica (RUPPEINER, 1995).

O presente capítulo visa, partindo da expressão introduzida por Einstein (4.2), expor de modo detalhado a teoria de flutuação termodinâmica utilizando uma abordagem de geometria Riemanniana. Essa abordagem permite associar espaços de fase relacionados a sistemas termodinâmicos a variedades Riemannianas, como introduzido por Ruppeiner (RUPPEINER, 1979). Em especial nessa abordagem, o escalar de curvatura dessas variedades estará associado com a interação entre as componentes do sistema.

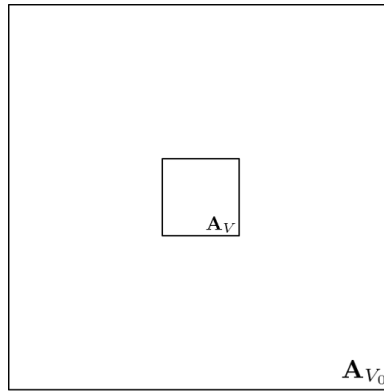
Depois de introduzidos os fundamentos da teoria, será discutida uma aplicação em termodinâmica de buracos negros, especificamente, buracos negros de Kerr. Vale ressaltar que todas as construções realizadas nas seções seguintes serão utilizando a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. Por

simplicidade será dispensado os rótulos BG da entropia. Quando novos funcionais entrópicos forem considerados o leitor será introduzido de modo claro.

4.1 FLUTUAÇÕES COM UMA VARIÁVEL

Seja A_{V_0} um sistema de volume V_0 em equilíbrio termodinâmico, com densidade de energia u_0 ¹. Considere também, um subsistema A_V de A_{V_0} , com volume V e densidade de energia u . Tanto A_{V_0} como A_V são sistemas homogêneos nos quais todos os parâmetros termodinâmicos são mantidos fixos. A única exceção é a energia, para qual é permitida a troca de A_V com o reservatório $A_{V_0} \setminus A_V$, que é o ambiente em que A_V está inserido. No presente exemplo, por simplicidade, pode-se considerar um fluido homogêneo composto por um único componente.

Figura 20 – Sistema A_{V_0} com volume V_0 que contém um subsistema A_V com volume V muito menor que o do sistema ambiente.



Fonte: Produção do próprio autor.

Uma vez que o sistema A_{V_0} encontra-se em equilíbrio termodinâmico, a sua entropia $S_0(u, u_0)$ deve assumir seu valor máximo, de acordo com o Postulado A.2 da máxima entropia (ver Apêndice A).

Como termodinamicamente a entropia deve assumir valores máximos em estados de equilíbrio, como supracitado. Uma conexão entre a entropia e a informação microscópica do sistema permite introduzir a possibilidade de pequenos desvios dos valores de equilíbrio. Nesse caso a entropia permite estabelecer flutuações em torno do valor que a maximiza (LANDAU, 1980). Suponha que o sistema A_{V_0} seja um ensemble microcânico, nesse caso, todos os estados são igualmente acessíveis. Portanto, a probabilidade de encontrar A_V entre u e $u + du$ deve ser proporcional ao número de microestados de A_{V_0} nesse intervalo, sendo dada por

$$P_V(u|u_0)du = CW_V(u, u_0)du, \quad (4.3)$$

onde C é uma constante de normalização e $W_V(u, u_0)$ a densidade de estados de A_{V_0} .

Utilizando a expressão da densidade de estados em termos da entropia dada pela equação (4.2),

¹ Densidade de energia é dada aqui como energia por volume.

pode-se escrever a equação (4.3) como

$$P_V(u|u_0)du = C \exp \left[\frac{S_0(u, u_0)}{k_B} \right] du. \quad (4.4)$$

A entropia total do sistema A_{V_0} pode ser compreendida como a composição da entropia do subsistema A_V adicionada à entropia do reservatório $A_{V_c} = A_{V_0} \setminus A_V$. Desse modo, a entropia total $S_0(u, u_0)$ pode ser escrita como

$$S_0(u, u_0) = Vs(u) + V_c s(u_c), \quad (4.5)$$

onde $V_c = V_0 - V$ é o volume do reservatório, $s(u_c)$ a entropia por volume do reservatório A_{V_c} e $s(u)$ a entropia do subsistema A_V .

A densidade de energia do reservatório A_{V_c} , denotada por u_c , pode ser escrita como

$$u_c = \frac{V_0 u_0 - V u}{V_c}. \quad (4.6)$$

Com esse elementos, pode-se expandir a entropia total $S_0(u, u_0)$ em torno de $u_c = u = u_0$ até segunda ordem

$$\begin{aligned} S_0(u, u_0) = & Vs(u_0) + V_c s_c(u_0) + V \left. \frac{\partial s}{\partial u} \right|_{u=u_0} (u - u_0) + V_c \left. \frac{\partial s}{\partial u} \right|_{u_c=u_0} (u_c - u_0) \\ & + \frac{V}{2} \left. \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right|_{u=u_0} (u - u_0)^2 + \frac{V_c}{2} \left. \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right|_{u_c=u_0} (u_c - u_0)^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo a equação 4.6 para a densidade de energia do reservatório A_{V_c} na equação 4.7 e tomando o limite $V_c \rightarrow \infty$, tem-se

$$S_0(u, u_0) = V_0 s(u_0) + \frac{V}{2} \left. \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right|_{u=u_0} \Delta u^2, \quad (4.8)$$

onde $\Delta u = u - u_0$. Observe que o cancelamento dos termos de primeira ordem indica que $u = u_0$ corresponde a um extremo da entropia total (RUPPEINER, 1995) como esperado, uma vez que o sistema está em equilíbrio termodinâmico e como não há vínculos em relação a energia do sistema a entropia deve assumir seu valor máximo em concordância com o postulado A.2. O limite $V_c \rightarrow \infty$ é tomado para assegurar o regime termodinâmico, dado que a flutuação no subsistema deve ocorrer pela troca de energia com reservatório muito maior que ele.

Usando a equação 4.8 na equação 4.4, obtém-se a denominada aproximação gaussiana da entropia, adequada para pequenos desvio u de u_0 (RUPPEINER, 1995)

$$P_V(u|u_0)du = C \exp \left[-\frac{V}{2} g(u_0) \Delta u^2 \right] du, \quad (4.9)$$

onde

$$g(u_0) \equiv - \frac{1}{k_B} \frac{d^2 s}{du^2} \Big|_0. \quad (4.10)$$

Para obter a constante de normalização C , considera-se a condição de normalização $\int P_V(u|u_0) du = 1$, o que resulta em

$$C = \sqrt{\frac{V g(u_0)}{2\pi}}. \quad (4.11)$$

4.1.1 PROBLEMA SOBRE A CONSISTÊNCIA E COVARIÂNCIA COM UMA VARIÁVEL

Toda a construção feita foi por meio da densidade de energia u como variável termodinâmica. Suponha que se queira fazer uma outra escolha de variável termodinâmica, $u \mapsto x = x(u)$, para escrever os resultados anteriores. Será que eles seriam invariantes diante dessas transformações de coordenadas?

O lado esquerdo da equação 4.4 pode ser reescrito diante uma transformação direta de coordenadas como

$$P_V(u|u_0) du = \left[\left(\frac{du}{dx} \right) P_V(u|u_0) \right] dx = P_V(x|x_0) dx. \quad (4.12)$$

Essa nova expressão informa a probabilidade de encontrar o subsistema A_V entre os estados x e $x + dx$. Como a entropia permanece invariante perante transformações de coordenadas, por ser uma função de estado, o lado direito da equação 4.4 pode ser reescrito, com a ajuda da equação 4.12 da seguinte forma

$$P_V(x|x_0) dx = C \left(\frac{du}{dx} \right) \exp \left[\frac{S_0(x, x_0)}{k_B} \right] dx. \quad (4.13)$$

Note que a equação 4.4 não foi recuperada, o termo de derivada que surge multiplicando a expressão não será necessariamente constante, não há nada que implique isso. No entanto, observe que se toda a construção for feita para a variável x , sem considerar transformação de coordenadas, a expressão permanece invariante. Esse exemplo implica que a expressão 4.4 não é covariante diante transformações arbitrárias de coordenadas.

A transformação de coordenada pode ser feita considerando a aproximação gaussiana dada pela equação 4.9. Como para volumes grandes, a flutuação das variáveis termodinâmicas intensivas² são pequenas. A derivada de u com respeito a x deve ser aproximadamente constante, logo

$$P_V(x|x_0) dx = \sqrt{\frac{V g(x_0)}{2\pi}} \exp \left[-\frac{V}{2} g(x_0) (x - x_0)^2 \right] dx, \quad (4.14)$$

² Variáveis intensivas são aquelas que não dependem da escala do sistema, como temperatura e pressão. A derivada de uma variável extensiva em relação a uma variável extensiva qualquer, sempre resulta em uma variável intensiva (CALLEN, 1985).

onde

$$g(x_0) = \left[\frac{du}{dx} \right]^2 g(u_0). \quad (4.15)$$

e portanto a aproximação gaussiana pode ser interpretada como covariante.

Outra questão que surge é sobre o valor médio da energia. Defina o valor médio de uma função $h(x)$ como

$$\langle h \rangle \equiv \int h(x) P_V(x|x_0) dx. \quad (4.16)$$

Uma vez que o reservatório $A_{V_0} \setminus A_V$ está em equilíbrio termodinâmico com energia u_0 , é esperado que o valor médio da energia do subsistema A_V seja

$$\langle u \rangle = u_0. \quad (4.17)$$

No entanto, nada garante que de fato esse seja o valor médio, pois para isso, seria necessário que a entropia $S_0(u, u_0)$ na equação (4.4) fosse da forma $(u - u_0)$, o que fisicamente não há nada que assegure esse formato para o funcional da entropia, exceto se for considerada a aproximação gaussiana.

Considerado os pontos acima, a aproximação gaussiana parece ter propriedades que servirão como blocos fundamentais para a construção de uma teoria de flutuação termodinâmica totalmente covariante (RUPPEINER, 1995) e que assegure valores médio conforme o esperado.

4.2 FLUTUAÇÕES EM MAIS DE UMA VARIÁVEL

Nas seções precedentes foram consideradas flutuações em uma única variável, nesse caso, foi assumido que o subsistema A_V só poderia trocar energia com o reservatório $A_{V_0} \setminus A_V$. No que segue, será assumido que o sistema poderá trocar não unicamente energia, mas outros elementos que o compõe, como partículas, além da energia interna.

Antes de introduzir ao formalismo, vale fazer a distinção entre dois espaços. O primeiro é o espaço físico, que é o ambiente onde ocorre os fenômenos físicos, de dimensão d . O segundo, é o espaço termodinâmico, onde cada ponto representa um estado termodinâmico em equilíbrio e cuja dimensão é n .

Considere um sistema A_{V_0} de volume V_0 e um subsistema A_V de volume V , tal que o volume V_0 é muito maior que o volume V como ilustrado na Figura 20. O sistema A_{V_0} e seu subsistema são compostos por fluidos quimicamente não interagentes de r componentes. As coordenadas $a_0 = (a_0^0, a_0^1, \dots, a_0^r)$, compostas pela energia interna por volume e pelos números de partículas por volume de r componentes, denotam o estado termodinâmico de A_{V_0} . Esse são ditos ser os parâmetros padrão na representação da entropia.

A construção da teoria de flutuações termodinâmica pode ser formulada baseada em três axiomas fundamentais (RUPPEINER, 1995):

1. O subsistema A_V e seu reservatório $A_{V_C} = A_0 \setminus A_V$, com volume $V_C = V_0 - V$, são sistemas homogêneos descritos pela termodinâmica no limite termodinâmico.
2. A probabilidade condicional de encontrar A_V em um estado com parâmetros entre a e $a + da$ dado que A_{V_0} está no estado a_0 é

$$P_V(a|a_0)da^0da^1\dots da^r = C \exp \left[\frac{S_0(a, a_0)}{k_B} \right] da^0da^1\dots da^r, \quad (4.18)$$

onde C é o fator de normalização e $S_0(a, a_0)$ a entropia do sistema A_0 quando seu subsistema A_V está no estado a .

3. A entropia é aditiva, mas não conservada. Os parâmetros extensivos padrão (energia interna e número de partículas) são ambos aditivos e conservados.

Fundamentados nos axiomas, pode-se construir a teoria de flutuações para mais de uma variável. A entropia total $S_0(a, a_0)$ do sistema A_{V_0} pode ser escrita como a soma da entropia do subsistema A_V e do seu reservatório A_{V_c} da seguinte maneira

$$S_0(a, a_0) = V s(a) + V_c s(a_c), \quad (4.19)$$

onde $s(a)$ é a entropia por volume.

As coordenadas a_c^α são dadas por

$$a_c^\alpha = \frac{V_0 a_0^\alpha - V a^\alpha}{V_c}. \quad (4.20)$$

Elas informam a densidade de energia e o número de partículas por volume do reservatório com volume V_c .

Expandindo a entropia total 4.19 em torno de $a_c^\alpha = a^\alpha = a_0^\alpha$, tem-se

$$\begin{aligned} S_0(a, a_0) = & V_0 s(a_0) + V \left. \frac{\partial s}{\partial a^\mu} \right|_{a=a_0} (a^\mu - a_0^\mu) + V_c \left. \frac{\partial s}{\partial a^\mu} \right|_{a_c=a_0} (a_c^\mu - a_0^\mu) \\ & + \frac{1}{2} V \left. \frac{\partial^2 s}{\partial a^\mu \partial a^\nu} \right|_{a=a_0} (a^\mu - a_0^\mu) (a^\nu - a_0^\nu) + \frac{1}{2} V_c \left. \frac{\partial^2 s}{\partial a^\mu \partial a^\nu} \right|_{a_c=a_0} (a_c^\mu - a_0^\mu) (a_c^\nu - a_0^\nu) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Substituindo a equação 4.20 na expansão da entropia 4.21 e tomando o limite termodinâmico $V_c \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\begin{aligned} S_0(a, a_0) = & V_0 s(a_0) + V \left. \frac{\partial s}{\partial a^\mu} \right|_{a=a_0} (a^\mu - a_0^\mu) + \cancel{V_c} \left. \frac{\partial s}{\partial a^\mu} \right|_{a=a_0} \frac{(V_0 a_0^\mu - V a^\mu - V_c a^\mu)}{\cancel{V_c}} \\ & + \frac{1}{2} V \left. \frac{\partial^2 s}{\partial a^\mu \partial a^\nu} \right|_{a=a_0} (a^\mu - a_0^\mu) (a^\nu - a_0^\nu) + \frac{1}{2} \cancel{V_c} \left. \frac{\partial^2 s}{\partial a^\mu \partial a^\nu} \right|_{a=a_0} \frac{(V_0 a_0^\mu - V a^\mu - V_c a_0^\mu)}{\cancel{V_c}} \underbrace{\frac{(V_0 a_0^\nu - V a^\nu - a_0^\nu)}{V_c}}_{\rightarrow 0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Observando que

$$V_0 a_0^\mu - V a^\mu - V_C a_0^\mu = (V_0 - V_C) a_0^\mu - V a = V (a_0^\mu - a^\mu) = -V (a^\mu - a_0^\mu) \quad (4.23)$$

Pode-se obter por meio da substituição da equação 4.23 na equação 4.22, no limite termodinâmico

$$S_0(a, a_0) = S_0(a_0) + \frac{1}{2} V \left. \frac{\partial^2 S}{\partial a^\mu \partial a^\nu} \right|_{a=a_0} (a^\mu - a_0^\mu) (a^\nu - a_0^\nu) \quad (4.24)$$

O cancelamento dos termos de primeira ordem indica que o estado $a = a_0$ é um extremo da entropia total, o que está de acordo com o postulado da máxima entropia, dado que a_0 é um estado de equilíbrio.

Suponha que se queira adotar um novo sistema de coordenadas $a \mapsto x = x(a)$ para expressar a expansão da entropia total 4.24

$$\frac{\partial S_0}{\partial a^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial a^\mu} \frac{\partial S_0}{\partial x^\alpha}, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial a^\mu \partial a^\nu} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial a^\mu \partial a^\nu} \frac{\partial S_0}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial a^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial a^\nu} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (4.26)$$

Como $\partial S_0 / \partial x^\alpha|_{x=x_0(a_0)} = 0$, o primeiro termo do lado direito da equação 4.26 é nulo, o que resulta em

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial a^\mu \partial a^\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial a^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial a^\nu} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (4.27)$$

Respaldados com a linguagem tensorial, imediatamente percebe-se que a equação 4.27 respeita a lei geral de transformação de tensores (CARROLL, 2019) e portanto infere-se que a derivada segunda da entropia se comporta como um tensor de segunda ordem.

Usando a expansão quadrática dada pela equação 4.18, pode-se escrever a aproximação gaussiana para teoria de flutuação termodinâmica para várias variáveis como

$$P_V(x|x_0) dx^0 dx^1 \dots dx^r = C \exp \left[-\frac{V}{2} g_{\mu\nu}(x_0) \Delta x^\mu \Delta x^\nu \right] dx^0 dx^1 \dots dx^r, \quad (4.28)$$

onde $\Delta x^\alpha = x^\alpha - x_0^\alpha$, C é a constante de normalização e

$$g_{\mu\nu}(x_0) \equiv -\frac{1}{V k_B} \left. \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right|_{x=x_0}. \quad (4.29)$$

A constante C pode ser obtida considerando-se a condição de normalização,

$$\int P_V(x|x_0) dx^0 dx^1 \dots dx^r = 1. \quad (4.30)$$

Para isso suponha que exista uma transformação linear A que leve de um sistema $\Delta x'$ para um sistema

Δx , tal que

$$\Delta x^\mu = A^\mu_k \Delta x'^k \quad (4.31)$$

de modo que

$$g_{\mu\nu}(x_0) \Delta x^\mu \Delta x^\nu = g_{\mu\nu}(x_0) A^\mu_k A^\nu_j \Delta x'^k \Delta x'^j. \quad (4.32)$$

Assumindo que essa transformação linear atue na métrica de modo que resulte em uma delta de Kronecker, como

$$\delta_{kj} = g_{\mu\nu}(x_0) A^\mu_k A^\nu_j, \quad (4.33)$$

então a equação 4.32 pode ser escrita da seguinte maneira

$$g_{\mu\nu}(x_0) \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \delta_{kj} \Delta x'^k \Delta x'^j. \quad (4.34)$$

Como o determinante das matrizes da relação 4.33 deve ser igual ao produto dos determinantes, obtém-se que

$$\det([g_{\mu\nu}(x_0)][A^\mu_k][A^\nu_j]) = g(x_0) A^2 = 1, \quad (4.35)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{g(x_0)}}, \quad (4.36)$$

onde $A \equiv \det([A^\mu_i])$ é o determinante da transformação linear e $g(x_0) \equiv \det([g_{\mu\nu}(x_0)])$ é o determinante da matriz 4.29. Logo, o jacobiano da transformação linear de x para x' , dado pelo determinante de A , é uma constante.

Expressando a condição de normalização 4.30 nas coordenadas x' , obtém-se

$$C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{V}{2} \Delta x'^2\right) dx'^0 dx'^1 \dots dx'^r = 1 \quad (4.37)$$

$$Ca \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{V}{2} \Delta x'^2\right) dx' \right]^n = 1 \quad (4.38)$$

$$C = \sqrt{g(x_0)} \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{n/2} \quad (4.39)$$

Portanto a probabilidade do subsistema A_V flutuar entre x e $x + dx$ é dada por

$$P(x|x_0)dx^0dx^1\dots dx^r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{V}{2}g_{\mu\nu}(x_0)\Delta x^\mu\Delta x^\nu\right] \sqrt{g(x_0)}dx^0dx^1\dots dx^r, \quad (4.40)$$

sendo n a dimensão do espaço termodinâmico.

A forma quadrática

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu, \quad (4.41)$$

é uma métrica Riemanniana, positivo-definida ($d\ell^2 > 0$), associada a medida de distâncias entre dois pontos de estados de equilíbrio no espaço de estados termodinâmicos (RUPPEINER, 1979). O significado físico associado a essa distância entre dois pontos de equilíbrio no espaço termodinâmico fica claro quando analisado à luz da probabilidade. Quanto maior a distância entre dois estados termodinâmicos, menor a probabilidade de flutuação entre eles. Note também que

$$\sqrt{g(x_0)}dx^0dx^1\dots dx^r, \quad (4.42)$$

constituí o elemento de volume invariante na variedade Riemanniana (RUPPEINER, 1995).

Deseja-se que o elemento de linha que mede distâncias no espaço termodinâmico dado pela equação 4.41 seja sempre positivo definido. Claramente os coeficientes da diagonal de $g_{\mu\nu}$ deve ser positivo, pois os coeficientes estão relacionados à capacidades térmicas e compressibilidade e para que a condição de estabilidade termodinâmica seja satisfeita, tais coeficientes devem se positivos.

No entanto, o fato de a diagonal ser positiva não é suficiente para garantir que o elemento de linha seja positivo definido. Para a garantia de que o elemento de linha seja postivo definido considere a seguinte definição (EVES, 1980):

Definição 4.1. *Seja $M = [m_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n , define-se os primeiros menores principais de M como*

$$p_0 = 1, \quad (4.43)$$

$$p_1 = m_{11}, \quad (4.44)$$

$$p_2 = \det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

$$p_3 = \det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

$$p_n = \det(M). \quad (4.47)$$

Com a definição acima pode-se estabelecer o seguinte resultado (EVES, 1980):

Teorema 4.1. *Uma condição necessária e suficiente para que uma matriz M seja positivo definida é que todos primeiros menores principais de M sejam positivos.*

Portanto, o teorema acima serve como critério categórico para determinar se a métrica $g_{\mu\nu}$ é positivo definida.

Com a expressão para a probabilidade obtida na equação 4.40, pode-se também calcular os valores médios dos momentos de flutuação Δx^α e do seu quadrado $\Delta x^\alpha \Delta x^\beta$, como segue

$$\langle \Delta x^\alpha \rangle = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x^\alpha \exp \left[-\frac{V}{2} g_{\mu\nu}(x_0) \Delta x^\mu \Delta x^\nu \right] \sqrt{g(x_0)} dx^0 dx^1 \dots dx^r = 0, \quad (4.48)$$

$$\langle \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \rangle = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \exp \left[-\frac{V}{2} g_{\mu\nu}(x_0) \Delta x^\mu \Delta x^\nu \right] \sqrt{g(x_0)} dx^0 dx^1 \dots dx^r = \frac{g^{\alpha\beta}(x_0)}{V}. \quad (4.49)$$

Eles informam, respectivamente, o valor médio associado ao desvio em relação ao valor de equilíbrio e a medida de correlação das flutuações de duas variáveis Δx^μ e Δx^ν em um sistema em contato com reservatório térmico (CALLEN, 1985). A medida de correlação mede a relação entre Δx^μ e Δx^ν informa se há uma relação entre essas variáveis, de modo que se uma flutuar a outra também irá.

4.3 GEOMETRIA DE WEINHOLD

Todas as construções feitas nas seções prévias foi utilizando a representação da entropia, que consiste em utilizar as variáveis como energia e número de componentes do sistemas, representados pelo conjunto $a = (a^0, \dots, a^r)$ como as n -coordenadas do espaço de estados termodinâmicos. Nesse sistema de coordenadas a métrica é dada pela derivada segunda da entropia do sistema.

Uma representação utilizando a entropia é vantajosa porque permite, com o auxílio da teoria de flutuação termodinâmica, atribuir de modo mais claro significado às distâncias entre dois estados de equilíbrio, como discutido anteriormente (RUPPEINER, 1979). No entanto, uma representação utilizando a energia pode ser mais útil de trabalhar a depender do sistema de termodinâmico analisado, como em casos em que a energia interna pode ser mais facilmente obtida do que a entropia.

A geometria que utiliza a representação da energia $U = U(S, N^1, \dots, N^r, V)$ foi introduzida por Weinhold (WEINHOLD, 2008) e nessa representação o subsistema é denotado por $(n + 1)$ variáveis extensivas. Essas variáveis são dadas por

$$Y = (S, N^1, \dots, N^r, V), \quad (4.50)$$

onde S é a entropia do sistema, V o volume e N^i a i -ésima componente do fluido que compõe o sistema. Como está-se considerando um subsistema com volume constante, pode-se fixar V e

introduzir as n —coordenadas do espaço de estados termodinâmicos por $b = (s, a^1, \dots, a^r)$, onde s denota a entropia por volume e $a^1, \dots, a^r$ denotam o número de partícula por volume. Essas são as densidades padrão na representação da energia. Os parâmetros intensivos são dados por

$$P^\alpha = \frac{\partial u(s, a^1, \dots, a^r)}{\partial b^\alpha}, \quad (4.51)$$

onde $P = (T, -\mu^1, \dots, \mu^r)$, sendo T a temperatura, μ^i a i —ésima componente do potencial químico e $u(s, a^1, \dots, a^r)$ a energia interna por volume.

É possível mostrar que a derivada segunda da entropia, está relacionada com a derivada segunda da energia por meio de (SALAMON; NULTON; IHRIG, 1984)

$$-\frac{1}{T} \sum_{\alpha, \beta=0}^n \frac{\partial^2 u}{\partial b^\alpha \partial b^\beta} db^\alpha db^\beta = \sum_{\alpha, \beta=0}^n \frac{\partial^2 s}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} da^\alpha da^\beta. \quad (4.52)$$

Para demonstrar a relação dada pela equação 4.52, considere o lado direito da equação

$$\begin{aligned} d^2 u &= \sum_{\alpha, \beta=0}^n \frac{\partial^2 u}{\partial b^\alpha \partial b^\beta} db^\alpha db^\beta \\ &= \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial}{\partial b^\alpha} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)}_T db^\alpha ds + \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial}{\partial b^\alpha} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial a^i} \right)}_{\mu^i} db^\alpha da^i \\ &= dT ds + \sum_{i=1}^r d\mu^i da^i, \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde considera-se que

$$df = \sum_i^n \frac{\partial f}{\partial b^\alpha} db^\alpha. \quad (4.54)$$

Valendo-se do mesmo raciocínio para o lado direito da equação 4.52, tem-se

$$\begin{aligned} d^2 s &= \sum_{\alpha, \beta=0}^n \frac{\partial^2 s}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} da^\alpha da^\beta = d \left(\frac{1}{T} \right) du - \sum_{i=1}^r d \left(\frac{\mu^i}{T} \right) da^i \\ &= -\frac{1}{T^2} dT du - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^r d\mu^i da^i + \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^r \mu^i dT da^i. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Utilizando a primeira lei da termodinâmica da forma

$$du = T ds + \sum_{i=1}^r \mu^i da^i, \quad (4.56)$$

e substituindo na equação 4.55 e considerando a equação 4.53, tem-se

$$\begin{aligned}
 d^2s &= -\frac{1}{T^2}dT \left(Tds + \sum_{i=1}^r \mu^i da^i \right) - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^r d\mu^i da^i + \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^r \mu^i dT da^i \\
 &= -\frac{1}{T}dTds - \cancel{\frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^r \mu^i dT da^i} - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^r d\mu^i da^i + \cancel{\frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^r \mu^i dT da^i} \\
 &= -\frac{1}{T} \left(dTds + \sum_{i=1}^r d\mu^i da^i \right) = -\frac{1}{T} d^2u.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Utilizando a definição 4.29 e o elemento de linha dado pela equação 4.41, é lícito escrever

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu} da^\mu da^\nu = \frac{1}{T} \frac{1}{k_B} \frac{\partial^2 u}{\partial b^\mu \partial b^\nu} db^\mu db^\nu. \tag{4.58}$$

Com isso, pode-se definir a métrica de Weinhold, dada por

$$g_{\mu\nu}^W \equiv \frac{1}{k_B} \frac{\partial^2 u}{\partial b^\mu \partial b^\nu}. \tag{4.59}$$

Considere a definição de uma transformação conforme como (CARROLL, 2019):

Definição 4.2. *Uma transformação conforme é uma mudança local de escala. Uma métrica $g_{\mu\nu}$ é conforme a uma métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, ou equivalentemente, diz-se que ela são conformalmente relacionadas, se uma é obtida da outra por meio de uma transformação conforme. Tal transformação é implementada multiplicando a métrica por uma função Ω , denominada de fator conforme*

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}. \tag{4.60}$$

ou

$$d\tilde{\ell}^2 = \Omega^2 d\ell^2 \tag{4.61}$$

Fundamentado na definição acima, pode-se concluir que a métrica de Ruppeiner $g_{\mu\nu}$, dada pela equação 4.29 é conformalmente relacionada com a métrica de Weinhold 4.59 por meio de

$$g_{\mu\nu} da^\mu da^\nu = \frac{1}{T} g_{\mu\nu}^W db^\mu db^\nu, \tag{4.62}$$

sendo $1/T$ o fator conforme.

4.4 CURVATURA TERMODINÂMICA

Foi discutido por meio da expansão gaussiana, o conceito de flutuação entre dois estados termodinâmicos e todas as consequências resultantes do conceito de flutuações. A expansão da entropia em segunda ordem em torno do estado de equilíbrio, permitiu estabelecer a noção de métrica como

definida na equação 4.29 e também de distância entre dois estados de equilíbrio dada pela forma quadrática 4.41.

Pelo postulado A.2, a função entropia é definida em uma variedade de estados de equilíbrio e pela construção feita, esse espaço é munido de uma estrutura métrica Riemanniana. Logo essa é uma variedade Riemanniana. Portanto, pode-se valer de ferramentas de geometria diferencial para obter informações sobre a variedade de estados termodinâmicos.

Os símbolos de Christoffel são obtidos por meio da métrica como

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_\gamma g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\mu g_{\beta\gamma}). \quad (4.63)$$

Com os símbolos de Christoffel pode-se obter o tensor de curvatura de Riemann, dado como segue

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\mu\delta} - \Gamma^\mu_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}. \quad (4.64)$$

A curvatura é induzida quando a definição de distância é empregada e a medida da curvatura em qualquer ponto fornece uma quantidade do quanto a variedade desvia da geometria plana. O tensor de curvatura de Riemann fornece a medida desse desvio (RUPPEINER, 1995).

O escalar de curvatura associado a variedade é obtido a partir de

$$R = g^{\mu\nu} R^\xi_{\mu\xi\nu}. \quad (4.65)$$

A curvatura termodinâmica, está associada a uma medida das interações efetivas entre os componentes do sistema. Sistemas que não possuem interação, tem uma curvatura termodinâmica nula. Sistemas que possuem interação são dotados de uma curvatura termodinâmica diferente de zero. Essa interpretação é suportada por uma série de exemplos abordados por Ruppeiner em seus trabalhos (RUPPEINER, 1979)(RUPPEINER, 1995). No que segue, serão apresentados dois exemplos, um sem interação entre os componentes do sistema e outro com interação, os resultados das curvaturas termodinâmicas obtidas estão em sintonia com as interpretações feitas acima.

4.4.1 EXEMPLOS

4.4.1.1 GÁS IDEAL

Gases compostos por átomos monoatômicos não interagentes, nos quais estão inclusos o He, Ar e Ne, que sob condições em que $T \leq 10^4$ e a pressão seja moderada, são denominados de gases ideais (CALLEN, 1985). Os gases ideais são caracterizados por duas equações de estado

$$pV = nRT, \quad (4.66)$$

e

$$U(T) = nC_V T. \quad (4.67)$$

Onde p é a pressão, V o volume, n o número de moles do gás, R a constante universal dos gases, T a temperatura e C_V a capacidade térmica a volume constante do gás. A função $U(T)$ é a energia interna do gás em função da sua temperatura.

Partindo das equações 4.66 e 4.67 com o auxílio da primeira lei da termodinâmica $TdS = dU + PdV$, pode-se escrever o diferencial da entropia como

$$dS = nC_V \frac{dU}{U} + nR \frac{dV}{V}. \quad (4.68)$$

Integrando a equação acima, obtém-se a entropia em função da energia interna e do volume do sistema

$$S(U, V) = S_0 + nC_V \ln(U) + nR \ln(V), \quad (4.69)$$

onde S_0 é a constante de integração.

Por meio da expressão para entropia, pode-se obter a energia interna do sistema em função da entropia e volume, como

$$U(S, V) = V^{-\frac{R}{C_V}} \exp\left(\frac{S - S_0}{nC_V}\right). \quad (4.70)$$

Observe que as equações fundamentais do sistema, que são a entropia e a energia interna, estão escritas em função das variáveis extensivas do sistema. Essas variáveis são dadas por (U, V) , na representação da entropia e (S, V) , na representação da energia. Desse modo, todas as equações de estado podem ser obtidas.

Com as informações acima, a métrica de Ruppeiner do sistema pode ser calculada como

$$g_{\mu\nu} = -\frac{1}{k_B} \frac{\partial^2 S}{\partial E^\mu \partial E^\nu}, \quad (4.71)$$

onde $E = (U, V)$. Perfazendo todos os cálculos, obtém-se que

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{C_V n}{U^2 k_B} dU^2 + \frac{Rn}{V^2 k_B} dV^2. \quad (4.72)$$

O cálculo do escalar de curvatura, fornece que

$$R = 0. \quad (4.73)$$

O que indica que a curvatura do espaço de estados termodinâmicos do gás ideal é plano.

4.4.1.2 FLUIDO DE VAN DER WAAALS

Um modelo mais realista para descrever gases foi desenvolvido por Van de Waals em 1873. Ele modelou os gases considerando que as moléculas que o compõe não são partículas pontuais, como no gás ideal, mas que ocupam um determinado volume. Esse modelo também leva em consideração as

interações entre as partículas do gás. A equação de estado de um gás de Van de Waals é dada por

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2}, \quad (4.74)$$

onde a e b são constante empíricas associadas ao gás que se está analisando e v o volume por mol, definido como $v \equiv V/n$. As constantes empíricas estão relacionadas, respectivamente, a interação entre as moléculas do modelo e ao volume ocupado por essas moléculas. A energia interna por mol do gás é dada por

$$u(T) = c_V T - \frac{a}{v}, \quad (4.75)$$

c_V denota a capacidade térmica molar a volume.

Com o auxílio da primeira lei da termodinâmica $Tds = du + pdv$, pode-se alcançar a seguinte expressão

$$dS = \frac{c_V}{u + \frac{a}{v}} du + \frac{R}{v - b} dv. \quad (4.76)$$

Integrando a equação acima, sucede-se que a expressão da entropia por mol, definida por $s \equiv S/n$, é encontrada

$$s(u, v) = s_0 + c_V \ln \left(u + \frac{a}{v} \right) + R \ln (v - b), \quad (4.77)$$

aqui s_0 é tomada como uma constante de integração. É possível inventar a expressão obtida para a entropia e escrever a energia interna como função da entropia e do volume, como

$$u(s, v) = (v - nb)^{-\frac{R}{c_V}} \exp \left(\frac{s - s_0}{c_V} \right) - \frac{a}{v}. \quad (4.78)$$

Assim como no exemplo anterior do gás ideal, as equações fundamentais do sistema, que são a entropia por mol e a energia por mol estão escritas em termos das variáveis extensivas do sistema. Portanto, com os conhecimentos acima, pode-se calcular a métrica de Ruppeiner, como dada na equação 4.71, onde $E = (u, v)$. A métrica é dada por

$$d\ell^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{uu} du^2 + 2g_{uv} dv du + g_{vv} dv^2 \quad (4.79)$$

onde

$$g_{uu} = \frac{C_V}{k_B \left(u + \frac{a}{v} \right)^2}, \quad (4.80)$$

$$g_{uv} = g_{vU} = -\frac{aC_V}{k_B \left(u + \frac{a}{v} \right)^2 v^2}, \quad (4.81)$$

$$g_{vv} = \frac{1}{k_B} \left(\frac{R}{(b - v)^2} - \frac{2aC_V}{\left(u + \frac{a}{v} \right) v^3} + \frac{a^2 C_V}{\left(u + \frac{a}{v} \right)^2 v^4} \right). \quad (4.82)$$

Realizando uma mudança de coordenadas na métrica $u \mapsto T(u) = \frac{1}{c_V} \left(u + \frac{a}{v}\right)$, obtém-se a métrica em sua forma diagonal, como

$$d\ell^2 = \frac{C_V}{T^2 k_B} dT^2 + \left(\frac{RTv^3 - 2ab^2 + 4abv - 2av^2}{Tb^2 k_B v^3 - 2Tb k_B v^4 + T k_B v^5} \right) dv^2 \quad (4.83)$$

Munidos da métrica, pode-se perfazer o cálculo do escalar de curvatura do espaço de estados termodinâmicos, que resulta em

$$R = \frac{2 [RTv^3 - a(b-v)^2] a(b-v)^2 k_B}{[RTv^3 - 2a(b-v)^2]^2 C_V}. \quad (4.84)$$

O que indica que a curvatura do espaço de estados termodinâmicos do fluido de Van der Waals é curvo.

Existe uma determinada temperatura e pressão, que serão denominadas de T_c e p_c , respectivamente, em que a fase gasosa do fluido de Van de Waals e a fase líquida coexistem. Acima dessa temperatura o fluido exibe uma única fase. A esses pontos, atribuí-se o nome de pontos críticos. Os pontos críticos do fluido de Van de Waals são dados por

$$T_c = \frac{8a}{27bR}, \quad (4.85)$$

$$p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad (4.86)$$

$$v_c = 3b, \quad (4.87)$$

sendo v_c volume por mol crítico, correspondente aos pontos críticos p_c e T_c .

Pode-se notar imediatamente, que se os pontos críticos forem substituídos na curvatura dada pela equação 4.84, a curvatura do espaço termodinâmico diverge. Vale observar que essa divergência ocorre exatamente em um ponto de mudança completa de fase do fluido. Outro ponto notável para a curvatura é em $v = b$, nesse ponto as moléculas que constituem o fluido ocupam todo o volume de modo que não há espaço extra. Nesse momento o fluido torna-se um corpo rígido e a distância entre as moléculas passa a ser constante e não há interação entre os componentes desse corpo (WEI; LIU; MANN, 2019). Nesse ponto específico, $R = 0$, o que está de acordo com o fato de que a curvatura está associada a uma medida efetiva de interação.

4.5 GEOMETRIA TERMODINÂMICA APLICADA A BURACOS NEGROS

O capítulo 3 foi dedicado a explorar estabilidade termodinâmica de buracos negros via método de Poincaré e também diante de outros funcionais entrópicos, como a entropia de Rényi e a entropia de Tsallis. A finalidade de investigar a termodinâmica de buracos negros para outros funcionais de entropia está no fato de, a entropia de Bekenstein-Hawking não ser uma função côncava e também não ser extensiva.

Devido a não concavidade da entropia de Bekenstein-Hawking, buracos negros apresentam uma capacidade térmica negativa. Isso indica que os buracos negros são instáveis e não podem existem

enquanto ensembles canônicos. Também indica que a métrica de Ruppeiner não deve ser positivo definida.

Dado toda conjuntura, a geometria termodinâmica não pode ser aplicada diretamente aos buracos negros. Isso porque eles não devem estar em equilíbrio e toda a premissa para construção da teoria parte de um sistema em equilíbrio termodinâmico. No entanto, trabalhos que usam a abordagem de geometria termodinâmica aplicada a buracos negros tem sugerido que alguma informação sobre a natureza microscópica associada aos buracos negros e a gravidade pode ser obtida (ÅMAN; BENGTTSSON; PIDOKRAJT, 2003)(RUPPEINER, 2007)(RUPPEINER, 2008). Informações associadas a estabilidade e transição de fase, assim como acontece no fluido de Van de Waals quando atinge sua temperatura crítica, também são investigadas.

A presente seção tem como finalidade estudar a geometria termodinâmica do buraco negro de Kerr com a entropia de Bekenstein-Hawking e também estudar a geometria termodinâmica do mesmo buraco negro por meio da entropia de Rényi, afim de investigar se o comportamento de estabilidade e transição de fase estão presentes.

4.5.1 BURACO NEGRO DE KERR

O buraco negro de Kerr é uma solução das equações de Einstein, estacionária e com rotação. Ele é caracterizado pelos parâmetros de massa M e momento angular J . O interesse no buraco negro de Kerr é principalmente pelo fato de que seja o mais provável existir em nosso universo (ÅMAN; BENGTTSSON; PIDOKRAJT, 2003). Com efeito, a recente detecção da sombra do buraco negro $M87^*$ corroborou com a afirmação de que buracos negro de Kerr são os mais prováveis em nosso universo (NEVES, 2020).

A solução de Kerr é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin \theta d\phi^2, \quad (4.88)$$

onde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr. \quad (4.89)$$

Aqui $a = J/M$ é denominado de parâmetro de rotação e definido no intervalo $|a| \leq M$, o caso em que $|a| = M$ é chamado de buraco negro de Kerr extremo. O raio do horizonte de eventos é localizado quando $\Delta = 0$ e é dado por $r_H = M + \sqrt{M^2 - a^2}$. A entropia de Bekenstein-Hawking do buraco negro Kerr é dada por

$$S_{BH} = 2\alpha \left(M^2 + M^2 \sqrt{1 - \frac{J^2}{M^4}} \right), \quad (4.90)$$

onde α é uma constante dada por

$$\alpha = \frac{k_B \pi}{\ell_P^2} = 1.66040250312580 \times 10^{47}. \quad (4.91)$$

Para restaurar as unidades físicas dos parâmetros M e J , deve-se escrever como (RUPPEINER, 2007)

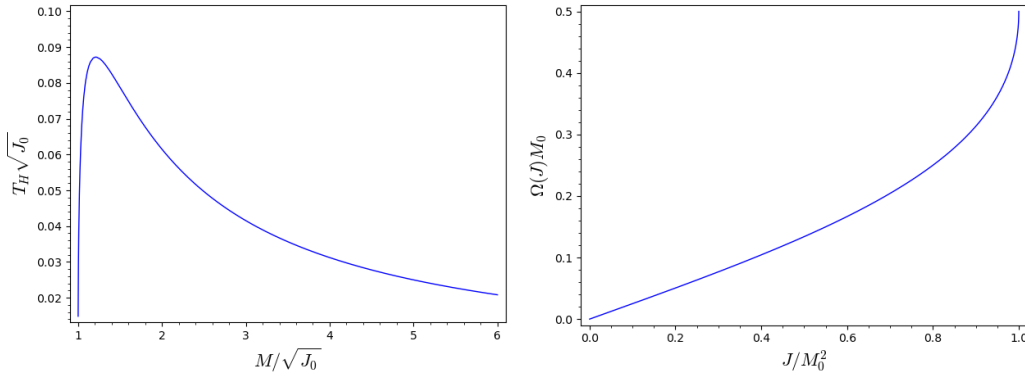
$$M \mapsto \left(\frac{c^2}{G}\right) M, \quad J \mapsto \left(\frac{c^3}{G}\right) J. \quad (4.92)$$

A temperatura Hawking e a velocidade angular do buraco negro de Kerr pode ser calculada por meio da entropia e dada em termos da massa M e momento angular J como

$$T_H = \left(\frac{\partial S_{BH}}{\partial M}\right)_J^{-1} = \frac{\sqrt{M^4 - J^2}}{4(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})M\alpha}, \quad (4.93)$$

$$-\alpha(J) = -\frac{\Omega}{T_H} = \left(\frac{\partial S}{\partial J}\right)_M = -\frac{2J\alpha}{\sqrt{M^4 - J^2}}. \quad (4.94)$$

Figura 21 – **Esquerda:** Temperatura Hawking do buraco negro de Kerr em função da massa, tomada a momento angular constante J_0 . Observa-se que a temperatura tem um máximo e depois decresce conforme a massa do buraco negro aumenta. **Direita:** Velocidade angular do buraco negro em função do momento angular, considerando-se massa uma massa constante M_0 . A velocidade angular cresce até um valor máximo que é atingido no caso extremo em que $J/M_0^2 = 1$. Em ambas imagens, α é tomado como a unidade.



Fonte: Produção do próprio autor.

A capacidade térmica do buraco negro de Kerr também pode ser obtida via entropia de Bekenstein-Hawking 4.90, a momento angular constante C_J ou a velocidade angular constante C_Ω e dada por

$$\frac{C_J}{r_H^2} = \frac{2\alpha(h^2 + 1)^2(1 - h^2)}{3h^4 + 6h^2 - 1}, \quad (4.95)$$

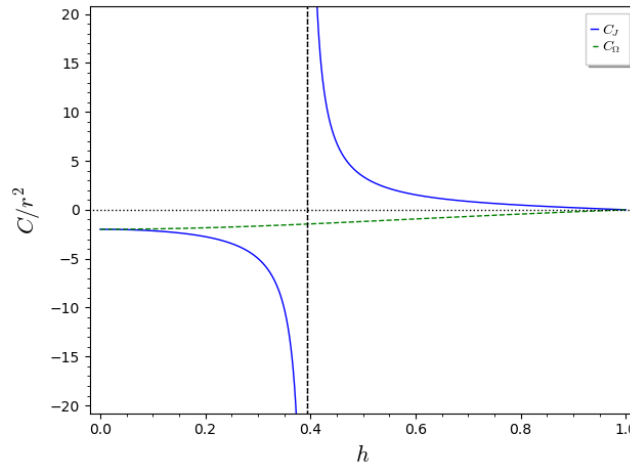
$$\frac{C_\Omega}{r_H^2} = \frac{2(h^2 - 1)\alpha}{h^2 + 1}, \quad (4.96)$$

onde o parâmetro h normaliza o parâmetro de rotação e é definido como (CZINNER; IGUCHI, 2017)

$$h \equiv \frac{|a|}{r_H}. \quad (4.97)$$

O parâmetro h é definido no intervalo $0 \leq h \leq 1$. Quando $h = 0$ os resultados do buraco negro de Schwarzschild são recuperados e quando $h = 1$ descreve-se o caso extremo do buraco negro de Kerr. Note também, que para $h_c = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{3} - 1 \approx 0.3933$ a capacidade térmica a momento angular constante diverge, para $h < h_c$ ela é negativa e para $h > h_c$ ela é positiva. A capacidade térmica a velocidade angular constante é sempre negativa.

Figura 22 – Capacidade térmica do buraco negro de Kerr a momento angular constante e a velocidade angular constante. Note que a capacidade térmica a momento angular constante possui uma divergência em $h = h_c \approx 0.3933$. Para valores menores que h_c ela é negativa, enquanto para valores maiores que h_c ela é positiva. A capacidade térmica a velocidade angular constante é sempre negativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

A descontinuidade na capacidade térmica a momento angular constante, pode ser associada a uma mudança de fase do buraco negro. No entanto, o buraco negro de Kerr é instável, pois sua capacidade térmica a velocidade angular constante é sempre negativa.

Dada uma breve contextualização acerca da termodinâmica do buraco negro de Kerr, pode-se voltar a geometria termodinâmica do espaço de estados termodinâmicos do buraco negro e verificar se há informações que ela possa nos fornecer. Vale ressaltar, que o buraco negro de Kerr não se encontra em equilíbrio termodinâmico, logo o formalismo de geometria termodinâmica deve ser interpretado com certas cautelas. A ideia central é verificar se a aplicação direta, pode fornecer informações sobre a estabilidade desse sistema.

A métrica termodinâmica do buraco negro de Kerr é dada por

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\frac{1}{k_B} \frac{\partial S_{BH}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.98)$$

onde $x^\alpha = (M, J)$. Um cálculo direto fornece que

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\frac{4 \left[(M^4 - J^2)^{\frac{3}{2}} \alpha + (M^6 - 3 J^2 M^2) \alpha \right]}{(M^4 - J^2)^{\frac{3}{2}} k_B} dM^2 - \frac{8 J M^3 \alpha}{(M^4 - J^2)^{\frac{3}{2}} k_B} dM dJ - \frac{2 M^4 \alpha}{(M^4 - J^2)^{\frac{3}{2}} k_B} dJ^2. \quad (4.99)$$

Uma mudança de coordenadas na métrica $J \mapsto \tilde{a}(J) = \frac{J}{M^2}$, como $-1 \leq \tilde{a} \leq 1$, permite com que ela seja escrita em forma diagonal e expressa como

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\frac{4((\tilde{a}^2 - 1)\alpha - \sqrt{1 - \tilde{a}^2}\alpha)}{(\tilde{a}^2 - 1)k_B}dM^2 + \left(-\frac{2M^2\alpha}{(\tilde{a}^2 - 1)\sqrt{1 - \tilde{a}^2}k_B}\right)d\tilde{a}^2 \quad (4.100)$$

Pode-se utilizar o princípio dos primeiros menores principais para verificar se a métrica é positivo definida. Para isso as condições

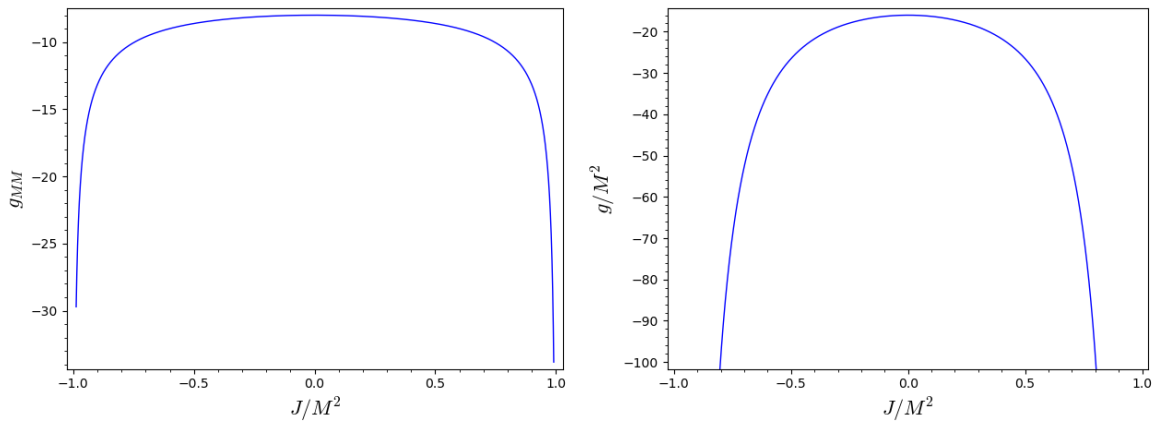
$$g_{MM} > 0, \quad (4.101)$$

e

$$g = \det \begin{pmatrix} g_{MM} & g_{M\tilde{a}} \\ g_{\tilde{a}M} & g_{\tilde{a}\tilde{a}} \end{pmatrix} > 0. \quad (4.102)$$

devem ser satisfeitas. Como verificado nos gráficos da Figura 23, a métrica não satisfaz as condições requeridas, logo não é positivo definida. E portanto, não é esperado que o sistema seja estável dado que a métrica é o hessiano da entropia.

Figura 23 – **Esquerda:** Gráfico do componente g_{MM} da métrica. Como pode-se observar, ele não é positivo no domínio de J/M^2 e já por isso a condição dos primeiros menores principais não é satisfeita. **Direita:** Determinante da métrica termodinâmica, observa-se que também não é positivo no domínio estudado. Em ambos os gráficos, a constante α e k_B são assumidos como unidade.



Fonte: Produção do próprio autor.

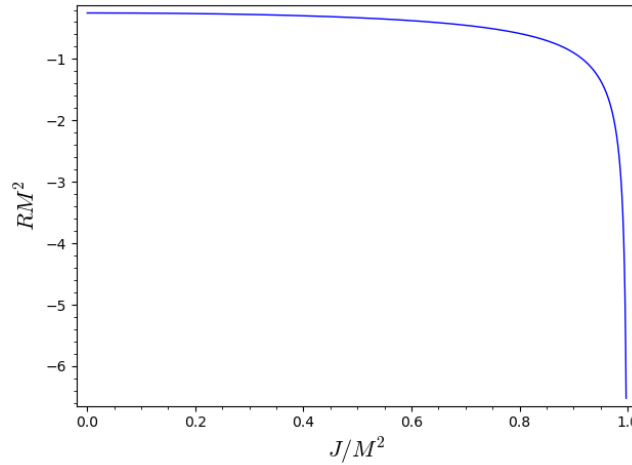
O cálculo do escalar de curvatura, indica que a geometria do espaço de estados termodinâmicos do buraco negro de Kerr é curva. A curvatura é dada por

$$R = \frac{(\tilde{a}^3 + \tilde{a}^2 + 2\tilde{a} + 2)\sqrt{-\tilde{a} + 1}k_B + 2\sqrt{\tilde{a} + 1}k_B}{4\alpha M^2 [2(\tilde{a}^2 - 1)\sqrt{\tilde{a} + 1} + (\tilde{a}^3 + \tilde{a}^2 - 2\tilde{a} - 2)\sqrt{-\tilde{a} + 1}]}. \quad (4.103)$$

Note que no limite extremo em que $|\tilde{a}| = 1$, a curvatura R diverge. Uma comparação direta com o modelo de Van der Waals, pode sugerir que a estrutura microscópica subjacente que gera os graus de liberdade da teoria possui interação. No entanto, tal conclusão não pode ser tão efetiva, dado que a

entropia de Bekenstein-Hawking não é côncava e portanto a teoria de flutuação termodinâmica não fornece resultados tão assertivos.

Figura 24 – Curvatura termodinâmica do buraco negro de Kerr. Note que para $|a| = 1$ a curvatura tende à $R \rightarrow -\infty$.



4.5.2 BURACO NEGRO DE KERR VIA ESTATÍSTICA DE RÉNYI

No capítulo 3, foi analisada a estabilidade de buracos negros diante de outros funcionais entrópicos além da entropia de Bekenstein-Hawking. Dentre os funcionais entrópicos utilizados estava a entropia de Rényi, introduzida no capítulo 2. A presente subseção tem como objetivo abordar a termodinâmica do buraco negro de Kerr assumindo que sua entropia seja dada pela entropia de Rényi. Essa escolha particular foi feita porque a esse funcional entrópico é aditivo e aditividade é uma das premissas para construção da teoria de flutuação termodinâmica.

A entropia de Rényi é obtida via método do logaritmo formal da entropia de Tsallis, como introduzido nos capítulos precedentes. Portanto, a entropia de Bekenstein-Hawking do buraco negro de Kerr será interpretada como um entropia de Tsallis e substituída diretamente na entropia de Rényi (CZINNER; IGUCHI, 2017). O resultado é dado como segue

$$S_R = \frac{k_B}{\lambda} \ln \left[2 \frac{\alpha}{k_B} \left(M^2 \sqrt{-\frac{J^2}{M^4} + 1} + M^2 \right) \lambda + 1 \right]. \quad (4.104)$$

Por meio da entropia obtida, pode-se calcular a temperatura de Rényi do buraco negro de Kerr

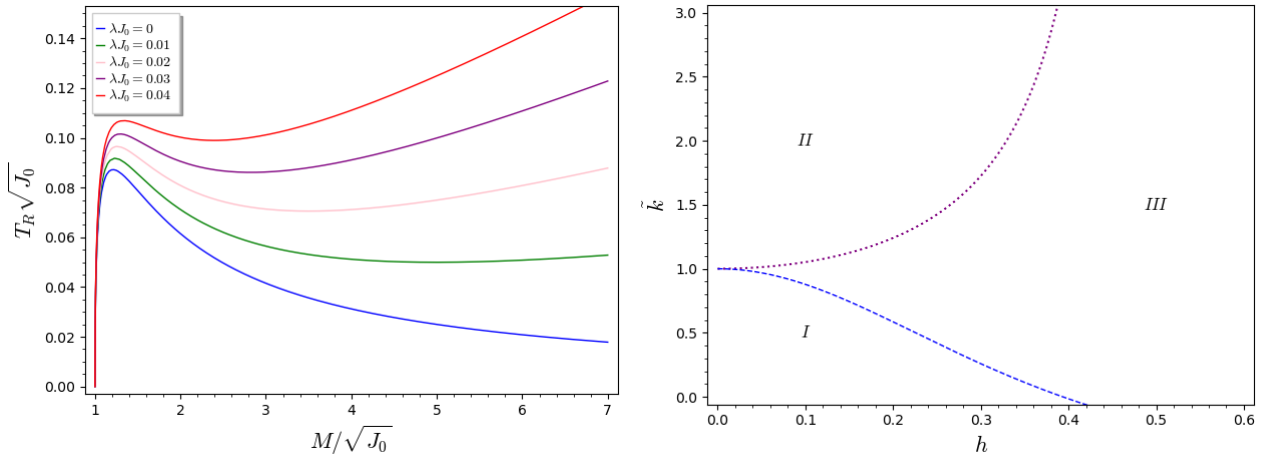
$$T_R = \left(\frac{\partial S_R}{\partial M} \right)_J^{-1} = \frac{2 (M^4 - J^2) \alpha \lambda + \sqrt{M^4 - J^2} (2 M^2 \alpha \lambda + k_B)}{4 (M^3 k_B \alpha + \sqrt{M^4 - J^2} M k_B \alpha)}, \quad (4.105)$$

como também sua velocidade de rotação, fornecida por

$$-\alpha_R(J) = -\frac{\Omega_R}{T_R} = -\frac{2 J k_B \alpha}{2 (M^4 - J^2) \alpha \lambda + \sqrt{M^4 - J^2} (2 M^2 \alpha \lambda + k_B)}. \quad (4.106)$$

O gráfico da temperatura de Rényi do buraco negro de Kerr é denotado na Figura 25. No gráfico é adotado um momento angular fixo $J = J_0$. Nota-se que para o valor de $\lambda J_0 = 0$, a temperatura Hawking é retomada, como no gráfico da Figura 21 e tem um comportamento tendendo a zero para massas muito grandes. Conforme o valor do parâmetro λJ_0 aumenta, o comportamento decrescente da temperatura para massas muito grandes passa a se inverter e a temperatura começa a crescer conforme a massa aumenta.

Figura 25 – **Esquerda:** temperatura de Rényi para o buraco negro de Kerr para diversos valores de λJ_0 . Note que o momento angular J_0 é tomado como fixo. Pode-se observar que conforme o valor de λJ_0 aumenta, a temperatura passa a crescer com o incremento de massa ao buraco negro. Comportamento oposto ao que acontece com a temperatura Hawking dada por $\lambda J_0 = 0$. **Direita:** Em linha roxa pontilhada são os valores para os quais o denominador de $C_{\Omega R}$ se anula e a capacidade térmica a velocidade angular constante diverge. Em linha tracejada azul são os valores em que o denominador de C_{JR} se anula e a capacidade térmica a momento angular constante diverge.



Fonte: Produção do próprio autor.

A capacidades térmicas a momento angular constante e a velocidade angular constante também podem ser calculadas. Elas são dadas, respectivamente por

$$\frac{C_{JR}}{r_H^2} = -\frac{2(h^2 + 1)^2(h^2 - 1)k_B\alpha}{\tilde{k}\alpha(h^6 + 7h^4 + 7h^2 + 1) + k_B(3h^4 + 6h^2 - 1)}, \quad (4.107)$$

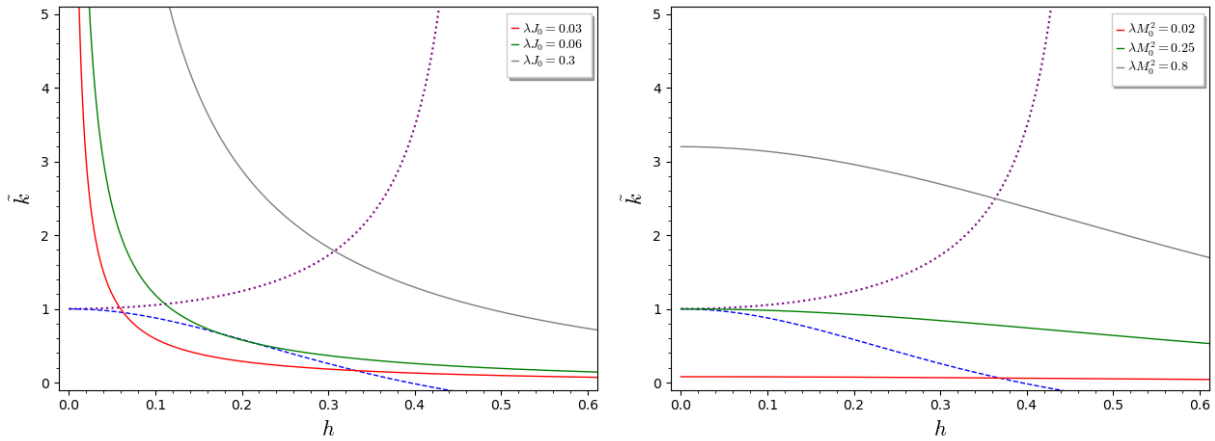
$$\frac{C_{\Omega R}}{r_H^2} = \frac{2(h^2 - 1)k_B\alpha}{\alpha\tilde{k}(h^4 + 4h^2 - 1) + k_B(h^2 + 1)}. \quad (4.108)$$

Aqui $\tilde{k}$ é um parâmetro assumido como sendo

$$\tilde{k} \equiv \lambda r_H^2. \quad (4.109)$$

Observe que no limite em que $\lambda \rightarrow 0$, os resultados da termodinâmica do buraco negro de Kerr, obtidos via entropia de Bekenstein-Hawking são retomados. Na Figura 25 é plotado valores em de $\tilde{k}$ e h fazem com que as capacidades térmicas divirjam. Os pontos dados pela linha roxa pontilhada,

Figura 26 – **Esquerda:** Curvas no espaço (k, h) para $J = J_0$, onde J_0 constante é uma constante. **Direita:** Curvas no espaço (k, h) para $M = M_0$, onde M_0 constante é uma constante.



Fonte: Produção do próprio autor.

indicam valores para os quais a capacidade térmica a velocidade angular constante diverge. Os pontos informados pela linha azul tracejada, indicam os valores para os quais a capacidade térmica a momento angular constante diverge.

Na região *I* do gráfico, $C_{JR} < 0$ e $C_{\Omega R} < 0$, indicando uma possível situação de instabilidade para o buraco negro, considerando-se que a sua entropia seja a de Rényi. Na região *II*, $C_{JR} > 0$ e $C_{\Omega R} > 0$, indicando uma região de estabilidade para o sistema. Por fim, na região *III*, $C_{JR} > 0$ e $C_{\Omega R} < 0$, apontando também uma situação de instabilidade do sistema. Portanto, a região *II*, possui os pontos que indicam as possíveis situações de estabilidade do sistema, analisando-o somente via sinal da capacidade térmica.

Pode-se escrever a massa M e o momento angular J do buraco negro de Kerr em termos do raio do horizonte r_H e do parâmetro de rotação a , como

$$M = \frac{r_H^2 + a^2}{2r_H}, \quad (4.110)$$

$$J = \frac{a}{2r_H} (r_H^2 + a^2). \quad (4.111)$$

Tomando $M = M_0 = \text{constante}$ e $J = J_0 = \text{constante}$, o parâmetro $\tilde{k}$ dado pela equação 4.109 pode ser escrito em termos dessas constante, respectivamente, como

$$\tilde{k} = 2 \frac{\lambda J_0}{h(1 + h^2)}, \quad (4.112)$$

$$\tilde{k} = 4 \frac{\lambda M_0^2}{(1 + h^2)^2}. \quad (4.113)$$

As curvas das equações 4.112 e 4.113 estão dados nos gráficos da Figura 26, respectivamente. Eles foram plotados no espaço (h, k) . Note que ao longo da curva $\lambda J_0 = 0.03$ a capacidade térmica C_{JR}

muda de sinal duas vezes, que vai do limite de Schwarzschild ($h = 0$) até o limite extremo em que ($h = 1$) (CZINNER; IGUCHI, 2017).

Dada uma introdução sobre a termodinâmica do buraco negro de Kerr, pode-se vislumbrar o que os resultados da geometria termodinâmica no buraco negro de Kerr pode fornecer, utilizando a entropia do buraco negro como a entropia de Rényi. Para isso, a métrica termodinâmica é calculada, por meio de

$$g_{\mu\nu}^R dx^\mu dx^\nu = -\frac{1}{k_B} \frac{\partial S_R}{\partial x^\mu \partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.114)$$

resultando em

$$g_{\mu\nu}^R dx^\mu dx^\nu = g_{MM}^R dM^2 + 2g_{MJ}^R dM dJ + g_{JJ}^R dJ^2. \quad (4.115)$$

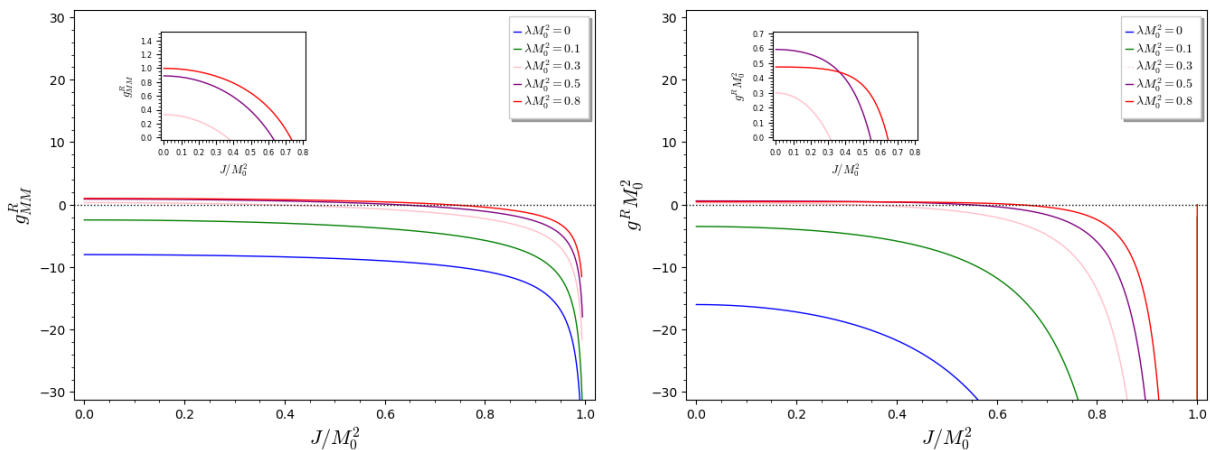
Aqui os coeficientes da métrica são dados por

$$g_{MM}^R = \frac{\frac{4(2(M^8 + J^2 M^4 - J^4)\alpha^2 \lambda - (M^6 - 3J^2 M^2)k_B \alpha)}{\sqrt{M^4 - J^2}(4(M^6 + J^2 M^2)\alpha^2 \lambda - (M^4 - J^2)k_B \alpha)}}{\frac{8(M^{10} - 2J^2 M^6 + J^4 M^2)\alpha^2 \lambda^2 + 4(M^8 - 2J^2 M^4 + J^4)k_B \alpha \lambda}{+ (4(2M^8 - 3J^2 M^4 + J^4)\alpha^2 \lambda^2 + 4(M^6 - J^2 M^2)k_B \alpha \lambda + (M^4 - J^2)k_B^2)\sqrt{M^4 - J^2}}}, \quad (4.116)$$

$$g_{MJ}^R = -\frac{4(4\sqrt{M^4 - J^2}JM^3\alpha^2\lambda + JM^3k_B\alpha + 2(2JM^5 - J^3M)\alpha^2\lambda)}{\frac{8(M^{10} - 2J^2 M^6 + J^4 M^2)\alpha^2 \lambda^2 + 4(M^8 - 2J^2 M^4 + J^4)k_B \alpha \lambda}{+ (4(2M^8 - 3J^2 M^4 + J^4)\alpha^2 \lambda^2 + 4(M^6 - J^2 M^2)k_B \alpha \lambda + (M^4 - J^2)k_B^2)\sqrt{M^4 - J^2}}}, \quad (4.117)$$

$$g_{JJ}^R = \frac{2(2M^6\alpha^2\lambda + M^4k_B\alpha + 2(M^4 + J^2)\sqrt{M^4 - J^2}\alpha^2\lambda)}{\frac{8(M^{10} - 2J^2 M^6 + J^4 M^2)\alpha^2 \lambda^2 + 4(M^8 - 2J^2 M^4 + J^4)k_B \alpha \lambda}{+ (4(2M^8 - 3J^2 M^4 + J^4)\alpha^2 \lambda^2 + 4(M^6 - J^2 M^2)k_B \alpha \lambda + (M^4 - J^2)k_B^2)\sqrt{M^4 - J^2}}}. \quad (4.118)$$

Figura 27 – **Esquerda:** Componente g_{MM}^R da métrica. Note que ela assume valores positivos para $\lambda M_0 > 0.25$, o que está em concordância com o diagrama da Figura 26. **Direita:** Determinante da métrica $g_{\mu\nu}^R$ para diversos valores de λM_0^2 . Note que, também, o determinante passa a assumir valores positivos para $\lambda M_0 > 0.25$.



Fonte: Produção do próprio autor.

Com a métrica termodinâmica para a entropia de Rényi do buraco negro de Kerr conhecida, pode-se valer dos primeiros menores principais para verificar se a métrica é positivo definida. Para isso as condições

$$g_{MM}^R > 0, \quad (4.119)$$

$$g^R = \det \begin{pmatrix} g_{MM}^R & g_{M\tilde{a}}^R \\ g_{\tilde{a}M}^R & g_{\tilde{a}\tilde{a}}^R \end{pmatrix} > 0, \quad (4.120)$$

devem ser satisfeitas.

Na Figura 27 há os gráficos da componente g_{MM}^R e do determinante da métrica, ambos em função do momento angular, considerando-se uma massa constante $M = M_0$. Note que a componente da métrica passa a se tornar positiva para valores $\lambda M_0 > 0.25$. Isso de acordo com o que nota-se com o sinal das capacidades térmica no diagrama da Figura 26. É possível verificar, também, que para garantir o princípio dos primeiros menores principais $J/M_0^2 \leq 0.31$ para $\lambda M_0 = 0.3$, por exemplo. Portanto, ele fornece um valor máximo que o momento angular do buraco negro pode assumir para que a métrica seja positivo definida e o sistema seja estável. Poque a métrica é o hessiano da entropia e as condições clássicas de estabilidade impõem a positividade do determinante do hessiano da entropia.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação teve como objetivo central estudar a estabilidade termodinâmica de buracos negros por abordagens que vão além das apresentadas nas referências canônicas, que se utilizam do sinal da capacidade térmica. As recentes observações diretas confirmam a existência de buracos negros e portanto, espera-se que tais objetos sejam estáveis dinamicamente e termodinamicamente. No entanto, a termodinâmica de buracos negros indica que tais objetos devem ser instáveis. Por meio de métodos, como o uso de funcionais entrópicos além do de Bekenstein-Hawking, método de Poincaré e geometria termodinâmica, visou-se analisar a estabilidade de duas soluções clássicas, Schwarzschild e Kerr, e também de uma recente solução obtida na literatura por meio do método de desacoplamento gravitacional.

No capítulo 2, foram introduzidos os blocos fundamentais do presente trabalho, realizando uma discussão substancial sobre mecânica estatística. Foi apresentada mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, que está baseada na entropia de Boltzmann-Gibbs, também demonstradas algumas das propriedades dessa entropia. Além dessa última, uma seção foi dedicada a denominada mecânica estatística não-extensiva, em que foi introduzida a entropia de Tsallis, que é uma generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs, além de provar algumas das propriedades desse funcional entrópico. Uma apresentação da entropia associada a um buraco negro, denominada de entropia de Bekenstein-Hawking, também foi feita em conjunto com a discussão algumas de suas problemáticas, como o fato de ser proporcional à área do horizonte de eventos e não ao seu volume.

Foi discutida, no capítulo 3, a estabilidade de buracos negros via o método de ponto de inflexão de Poincaré, que utiliza grandezas termodinamicamente conjugadas para analisar possíveis mudanças de estabilidade em um sistema termodinâmico. Esse método foi aplicado para estudar a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild — que já vem sendo discutido amplamente na literatura — e a estabilidade de solução de buracos negros com cabelo propostas recentemente (OVALLE et al., 2021). Além disso, foi analisada a estabilidade das soluções diante de outros funcionais entrópicos que não o de Bekenstein-Hawking, como de Rényi e Tsallis para Schwarzschild e Rényi para soluções com cabelo.

Nessas outras abordagens, pôde-se observar que o buraco negro de Schwarzschild como um ensemble canônico possui mudanças de estabilidade evidenciada pela análise via método de Poincaré. Observou-se, assim como esperado, que o buraco negro com cabelo possui um comportamento muito semelhante ao de Schwarzschild, dado que esse último é um caso particular da solução com cabelo para determinados valores dos parâmetros.

Por fim, no capítulo 4, foi introduzida a geometria termodinâmica, que está alicerçada em flutuações estatísticas de grandezas termodinâmicas em torno de um valor de equilíbrio. Com a possibilidade de flutuação é introduzida uma métrica na variedade formada pelo conjunto de pontos de estados de equilíbrio. Por meio dessa métrica pode-se estudar estabilidade utilizando o escalar de curvatura de os primeiros menores princípios. Esse formalismo foi aplicado diretamente ao buraco negro de Kerr, primeiro utilizando o funcional entrópico de Bekenstein-Hawking e depois utilizando o funcional

entrópico de Rényi.

A escolha do funcional entrópico de Rényi, ao invés da entropia de Tsallis, justifica-se pelo fato de que a geometria termodinâmica utiliza-se da aditividade da entropia para sua construção. O resultados obtidos por meio da entropia de Rényi aplicada ao buraco negro de Kerr, sugere regiões de estabilidade para o buraco negro de Kerr, o que não acontece, por exemplo, quando a geometria termodinâmica é aplicada diretamente a entropia de Bekenstein-Hawking.

O fato é que explorar características termodinâmicas de buracos negros por meios não usuais pode ser extremamente rico e desafiador. Além de potencialmente apresentar resultados que podem ser comparados com dados observacionais. No entanto, há um longo caminho há ser percorrido. O que inclui entender a origem dos graus de liberdade que estão associados à entropia de um buraco negro e o que de fato significa uma transição de fase gravitacional. Com isso em vista, as perspectivas de continuação desse trabalho inserem-se no âmbito da análise de estabilidade de buracos negros com cabelo via estatística de Tsallis, além de examinar a estabilidade de buracos negros com simetria axial mais gerais que a solução de Kerr.

REFERÊNCIAS

- ABE, S. Axioms and uniqueness theorem for tsallis entropy. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 271, n. 1-2, p. 74–79, 2000.
- ABREU, E. M. C.; NETO, J. A. On the nature of modified Rényi entropy and the incomplete statistics approach in black holes thermodynamics. **EPL**, v. 135, n. 1, p. 10001, 2021.
- ÅMAN, J. E.; BENGTSSON, I.; PIDOKRAJT, N. Geometry of black hole thermodynamics. **General Relativity and Gravitation**, Springer, v. 35, p. 1733–1743, 2003.
- ARANHA, R. Sobre a evolução conceitual acerca da formação de buracos negros. **Cadernos de Astronomia**, v. 4, n. 1, p. 35–48, 2023.
- ARCIONI, G.; LOZANO-TELLECHEA, E. Stability and critical phenomena of black holes and black rings. **Phys. Rev. D**, v. 72, p. 104021, 2005.
- ASHTEKAR, A.; KRISHNAN, B. Isolated and dynamical horizons and their applications. **Living Rev. Rel.**, v. 7, p. 10, 2004.
- BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W. The Four laws of black hole mechanics. **Commun. Math. Phys.**, v. 31, p. 161–170, 1973.
- BEKENSTEIN, J. D. Black holes and the second law. **Lett. Nuovo Cim.**, v. 4, p. 737–740, 1972.
- BIRÓ, T. S.; CZINNER, V. G. A q -parameter bound for particle spectra based on black hole thermodynamics with Rényi entropy. **Phys. Lett. B**, v. 726, p. 861–865, 2013.
- BOON, J. P.; TSALLIS, C. Special issue overview nonextensive statistical mechanics: new trends, new perspectives. **europhysics news**, EDP Sciences, v. 36, n. 6, p. 185–186, 2005.
- CALLEN, H. B. **Thermodynamics And An Introduction To Thermostatistics**. 2. ed. [S.l.]: Wiley, 1985. ISBN 9780471862567,0471862568.
- CARROLL, S. **Spacetime and Geometry**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. ISBN 9781108488396.
- CAVALCANTI, R. T.; ALVES, K. d. S.; SILVA, J. M. Hoff da. Near-horizon thermodynamics of hairy black holes from gravitational decoupling. **Universe**, v. 8, n. 7, 2022. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2218-1997/8/7/363>>.
- CAVALCANTI, R. T.; PAIVA, R. C. de; ROCHA, R. da. Echoes of the gravitational decoupling: scalar perturbations and quasinormal modes of hairy black holes. **The European Physical Journal Plus**, Springer Science and Business Media LLC, v. 137, n. 10, oct 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140%2Fepjp%2Fs13360-022-03407-x>>.
- CAVALCANTI, R. T.; SILVA, J. M. H. da. Quantum hairy black hole formation and horizon quantum mechanics. **Universe**, v. 9, n. 1, 2023. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2218-1997/9/1/23>>.
- ÇIMDIKER, I.; DABROWSKI, M. P.; GOHAR, H. Equilibrium temperature for black holes with nonextensive entropy. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 83, n. 2, p. 169, 2023.

- CONTRERAS, E.; OVALLE, J.; CASADIO, R. Gravitational decoupling for axially symmetric systems and rotating black holes. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 103, n. 4, feb 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.044020>>.
- CURIEL, E. The many definitions of a black hole. **Nature Astron.**, v. 3, n. 1, p. 27–34, 2019.
- CZINNER, V. G.; IGUCHI, H. Rényi Entropy and the Thermodynamic Stability of Black Holes. **Phys. Lett. B**, v. 752, p. 306–310, 2016.
- CZINNER, V. G.; IGUCHI, H. Thermodynamics, stability and Hawking–Page transition of Kerr black holes from Rényi statistics. **Eur. Phys. J. C**, v. 77, n. 12, p. 892, 2017.
- DAS, S.; SHANKARANARAYANAN, S. How robust is the entanglement entropy: Area relation? **Phys. Rev. D**, v. 73, p. 121701, 2006.
- EVES, H. **Elementary Matrix Theory**. [S.l.]: Dover Publications, 1980. ISBN 0486639460; 9780486639468.
- FERNANDES, T. V. A termodinâmica de buracos negros. **Cadernos de Astronomia**, v. 4, p. 78–90, 2023. ISSN 2675-4754. Disponível em: <<https://periodicos.ufes.br/astronomia/issue/view/1522>>.
- GOURGOULHON, É. Geometry and physics of black holes lecture notes. **Les Houches**, 2018.
- GOURGOULHON, E.; JARAMILLO, J. L. New theoretical approaches to black holes. **New Astron. Rev.**, v. 51, p. 791–798, 2008.
- HAWKING, S. W. Particle Creation by Black Holes. **Commun. Math. Phys.**, v. 43, p. 199–220, 1975. [Erratum: Commun.Math.Phys. 46, 206 (1976)].
- HAWKING, S. W. Black holes and thermodynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 13, p. 191–197, Jan 1976. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.13.191>>.
- HAWKING, S. W.; PAGE, D. N. Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space. **Commun. Math. Phys.**, v. 87, p. 577, 1983.
- KABURAKI, O.; OKAMOTO, I.; KATZ, J. Thermodynamic Stability of Kerr Black holes. **Phys. Rev. D**, v. 47, p. 2234–2241, 1993.
- KATZ, J. On the number of unstable modes of an equilibrium. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 183, n. 4, p. 765–770, 08 1978. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/183.4.765>>.
- KATZ, J. On the number of unstable modes of an equilibrium – II. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 189, n. 4, p. 817–822, 12 1979. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/189.4.817>>.
- KHINCHIN, A. Y. **Mathematical foundations of information theory**. [S.l.]: Dover Publications, 1957. ISBN 9780486604343, 0486604349.
- LANDAU, E. L. L. D. **Statistical Physics, Third Edition, Part 1: Volume 5**. 3. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1980. Volumen 5. Part 1. (Course of Theoretical Physics, Volume 5, Volumen 5. Part 1). ISBN 0750633727, 9780080230399, 9780750633727, 0080230393.
- LANDAU, L. **Statistical physics**. 3. ed. [S.l.]: Pergamon, 1969. Volume 5, Part 1. ISBN 0080230393, 9780080230399.

LUCENA, L. S.; SILVA, L. R. da; TSALLIS, C. Departure from boltzmann-gibbs statistics makes the hydrogen-atom specific heat a computable quantity. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 51, p. 6247–6249, Jun 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.51.6247>>.

MEJRHIT, K.; ENNADIFI, S.-E. Thermodynamics, stability and hawking–page transition of black holes from non-extensive statistical mechanics in quantum geometry. **Physics Letters B**, v. 794, p. 45–49, 2019. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269319302242>>.

NASCIMENTO, W. S.; PRUDENTE, F. V. Sobre em estudo da entropia de shannon no contexto da mecânica quântica: uma aplicação ao oscilador harmônico livre e confinado. **Química Nova**, Sociedade Brasileira de Química, v. 39, n. 6, p. 757–764, Jul 2016. ISSN 0100-4042. Disponível em: <<https://doi.org/10.5935/0100-4042.20160045>>.

NEVES, J. O buraco negro e sua sombra. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 42, 2020.

NUSSENZVEIG, H. M. **CURSO DE FÍSICA BÁSICA Vol 2: Fluidos, Oscilações e Ondas e Calor**. 5. ed. [S.l.]: Blucher, 2014. v. 2. ISBN 9788521207474.

OVALLE, J. Decoupling gravitational sources in general relativity: The extended case. **Phys. Lett. B**, v. 788, p. 213–218, 2019.

OVALLE, J. et al. Hairy black holes by gravitational decoupling. **Phys. Dark Univ.**, v. 31, p. 100744, 2021.

PINEDA, J. O. de C. **A entropia segundo Claude Shannon: o desenvolvimento do conceito fundamental da teoria da informação**. 126 p. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A. Perturbations of a Rotating Black Hole. II. Dynamical Stability of the Kerr Metric. **Astrophys. J.**, v. 185, p. 649–674, 1973.

REIS, M. C.; BASSI, A. B. M. S. A segunda lei da termodinâmica. **Química Nova**, Sociedade Brasileira de Química, v. 35, n. 5, p. 1057–1061, 2012. ISSN 0100-4042. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S0100-40422012000500035>>.

RÉNYI, A. **Probability Theory**. North-Holland Publishing Company, 1970. (Applied mathematics and mechanics). ISBN 9780720423600. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=EraDtAEACAAJ>>.

ROBERTSON, N. C. An introduction to black holes [around the globe]. **IEEE Microwave Magazine**, IEEE, v. 24, n. 4, p. 22–28, 2023.

RUPPEINER, G. Thermodynamics: A riemannian geometric model. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 20, p. 1608–1613, Oct 1979. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.20.1608>>.

RUPPEINER, G. Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 67, p. 605–659, Jul 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.67.605>>.

RUPPEINER, G. Stability and fluctuations in black hole thermodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 75, n. 2, p. 024037, 2007.

RUPPEINER, G. Thermodynamic curvature and phase transitions in kerr-newman black holes. **Physical Review D**, APS, v. 78, n. 2, p. 024016, 2008.

SALAMON, P.; NULTON, J.; IHRIG, E. On the relation between entropy and energy versions of thermodynamic length. **The Journal of chemical physics**, American Institute of Physics, v. 80, n. 1, p. 436–437, 1984.

SANTOS, R. J. dos. Generalization of shannon's theorem for tsallis entropy. **Journal of Mathematical Physics**, American Institute of Physics, v. 38, n. 8, p. 4104–4107, 1997.

SHANNON, W. W. C. E. **The Mathematical Theory of Communication**. 1. ed. [S.l.]: The University of Illinois Press, 1964. ISBN 9780252725487,0252725484.

TRIBUS, M.; MCIRVINE, E. C. Energy and information. **Scientific American**, JSTOR, v. 225, n. 3, p. 179–190, 1971.

TSALLIS, C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. **J. Statist. Phys.**, v. 52, p. 479–487, 1988.

TSALLIS, C. **Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world**. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2009. ISBN 0387853588,9780387853581.

TSALLIS, C. Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics-an overview after 20 years. **Brazilian Journal of Physics**, SciELO Brasil, v. 39, p. 337–356, 2009.

TSALLIS, C. Black Hole Entropy: A Closer Look. **Entropy**, v. 22, n. 1, p. 17, 2019.

TSALLIS, C. et al. **Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics**. 2003.

TSALLIS, C.; CIRTO, L. J. L. Black hole thermodynamical entropy. **Eur. Phys. J. C**, v. 73, p. 2487, 2013.

WEI, S.-W.; LIU, Y.-X.; MANN, R. B. Ruppeiner geometry, phase transitions, and the microstructure of charged ads black holes. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 100, p. 124033, Dec 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.124033>>.

WEINHOLD, F. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. **The Journal of Chemical Physics**, v. 63, n. 6, p. 2479–2483, 09 2008. ISSN 0021-9606. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.431689>>.

APÊNDICE A – ELEMENTOS INTRODUTÓRIOS DE TERMODINÂMICA CLÁSSICA

Esse apêndice é dedicado a estabelecer alguns resultados básicos que serão utilizados durante o trabalho. A abordagem aqui exposta é baseada primordialmente no (CALLEN, 1985).

A.1 POSTULADOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA

A termodinâmica dedica-se estudar, essencialmente, sistemas em estados de equilíbrio. É fato que sem a ação de agentes externos, os sistemas físicos tendem a evoluir para estados mais simples, que dependem somente apenas das propriedades intrínsecas do sistemas em questão e não de fatores externos.

Para exemplificar, considere uma xícara de chá muito quente. Você adiciona açúcar nesse chá e mexe para diluí-lo. Então deixa na mesa, se você deixar essa xícara tempo suficiente na mesa, o chá parará de girar e sua temperatura atingirá a temperatura ambiente. Alguém que visse o chá depois desse tempo suficientemente grande, não saberia dizer se ele foi mexido ou se já esteve muito quente.

Ao final, diz-se que o chá está em equilíbrio termodinâmico com o ambiente. O equilíbrio termodinâmico é caracterizado por três tipos de equilíbrio. O equilíbrio térmico, equilíbrio mecânico e equilíbrio químico, que serão discutidos posteriormente.

O fato desses estados dependerem apenas de fatores intrínsecos do sistema é advindo da experimentação e por isso pode ser colocado como um postulado da teoria, como segue

Postulado A.1. *Existem estados particulares, denominados de estados de equilíbrio, de um sistema simples que, macroscopicamente são caracterizados completamente por sua energia interna U , o volume e o número de moles $N_1, N_2, \dots, N_r$ dos componentes químicos do sistema.*

O problema central da termodinâmica é encontrar os estados de equilíbrio final de um sistema. Pensando de um ponto de vista de teorias físicas, pode-se imaginar que esses estados de equilíbrio devem ser tais, de modo que extremizem um determinado funcional. Isso pode ser postulado da seguinte maneira

Postulado A.2. *Existe uma função de parâmetros extensivos¹, denominada entropia S de qualquer sistema composto, definida para todos estados de equilíbrio e tendo a seguinte propriedade: os valores assumidos pelos parâmetros extensivos na ausência de vínculos internos são aqueles que maximizam a entropia sobre uma variedade de estados de equilíbrio.*

O leitor que já foi introduzido ao capítulo 2, poderá se perguntar qual entropia se está referindo nesse apêndice. Todo o desenvolvimento da termodinâmica clássica é baseado no conceito de entropia introduzida por Clausius, como discutido na subseção 2.1.1 e que culminará na entropia de Boltzmann-Gibbs. No entanto, como esse apêndice se trata apenas de termodinâmica, não levando em consideração

¹ Entenda aqui parâmetros extensivos como as quantidades que mudam com a escala do sistema como a energia interna, volume e número de partículas. Um exemplo disso, é que se você quiser dobrar o tamanho do sistema todas as quantidades extensivas terão que ser dobradas.

elementos de física estatística, não é assumida uma forma para o funcional da entropia. Ela dependerá especificamente do sistema termodinâmico estudado.

A entropia é chamada de *relação fundamental* do sistema. Isso porque, dada a relação fundamental de um sistema é conhecida, todas as informações termodinâmicas acerca desse sistema pode ser obtida por meio da relação fundamental.

No que segue, serão postuladas duas propriedades fundamentais da entropia:

Postulado A.3. *A entropia de um sistema composto é aditiva para os subsistemas que o compõe. A entropia é contínua e diferenciável e é uma função monotonamente crescente da energia interna.*

Postulado A.4. *A entropia de qualquer sistema é nula em estados em que*

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, \dots, N_r} = 0. \quad (\text{A.1})$$

A primeira propriedade que surge no postulado A.3 é a aditividade da entropia. Dados um sistema composto por n subsistemas, a entropia total S do sistema será dada pela soma das entropias individuais de cada subsistema

$$S = \sum_{\alpha=1}^n S_{\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

onde a entropia de cada subsistema é uma função dos parâmetros extensivos, ou seja

$$S_{\alpha} = S_{\alpha}(U, V, N_1, \dots, N_r). \quad (\text{A.3})$$

Para propriedade que garante que a entropia é uma função monotonamente crescente da energia implica que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V, N_1, \dots, N_r} > 0. \quad (\text{A.4})$$

Por fim, uma última propriedade que a entropia deve satisfazer é

Postulado A.5. *A entropia de um sistema simples é uma função homogênea de primeira ordem dos parâmetros extensivos.*

A propriedade acima, indica que se os parâmetros extensivos do sistema forem multiplicados por uma constante λ , a entropia se comportará da seguinte forma

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N_1, \dots, \lambda N_r) = \lambda S(U, V, N_1, \dots, N_r). \quad (\text{A.5})$$

Por fim, vale-se notar que as propriedades de continuidade, diferenciabilidade e monotonicidade da entropia com respeito à energia interna permite com que possa se escrever a energia como função da

entropia. E portanto a função

$$S = S(U, V, N_1, \dots, N_r), \quad (\text{A.6})$$

pode ser resolvida unicamente para U da forma

$$U = U(S, V, N_1, \dots, N_r). \quad (\text{A.7})$$

Uma vez compreendida a relação entre a entropia e a energia interna, pode-se entendê-la como um relação fundamental.

A.2 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Partindo da energia interna como relação fundamental $U = U(S, V, N_1, \dots, N_r)$, é lícito calcular sua diferencial

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, \dots, N_r} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, \dots, N_r} dV + \sum_k^r \left(\frac{\partial U}{\partial N_k} \right)_{S, V, \dots, N_r} dN_k \quad (\text{A.8})$$

pode-se definir as derivadas parciais, de um modo sugestivo, como

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, \dots, N_r} \equiv T, \quad \text{Temperatura} \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, \dots, N_r} \equiv -p, \quad \text{Pressão} \quad (\text{A.10})$$

e

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N_k} \right)_{S, V, \dots, N_r} \equiv \mu_k, \quad (\text{A.11})$$

onde μ_k é o potencial químico.

Uma notação mais compacta pode ser utilizada realizando a associação $(V, N_1, \dots, N_r) = (X_1, X_2, \dots, X_t)$. Desse modo, as derivadas A.9-A.11 podem ser escritas como

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{X_1, X_2, \dots, X_t} = T, \quad (\text{A.12})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X_k} \right)_{S, \dots, X_j} = P_k. \quad (\text{A.13})$$

Nessa notação, a diferencial de energia toma a seguinte forma

$$dU = TdS + \sum_k^t P_k dX_k. \quad (\text{A.14})$$

Os parâmetros T , p e μ_j , introduzidos acima, são chamados de equações de estado do sistema. Uma equação unicamente não consegue determinar o sistema, mas todas as equações juntas podem, pois pode-se recuperar a equação fundamental.

A equações de estados são função dos parâmetros extensivos do sistema e por ser a diferencial de uma variável extensiva em relação a outras, elas são ditas ser intensivas. Variáveis intensivas não são afetadas por um reescalonamento do sistema. Se o sistema for aumentado por um fator λ , todas as variáveis extensivas serão aumentadas por esse fator, porém uma variável intensiva terá o seguinte comportamento

$$T(S, X_1, \dots, X_t) = T(\lambda S, \lambda X_1, \dots, \lambda X_t). \quad (\text{A.15})$$

Ao invés de adotar a energia como equação fundamental do sistema, pode-se adotar a entropia $S = S(X_0, X_1, \dots, X_t)$, onde $U = X_0$ e as outras variáveis correspondem as adotadas anteriormente. A diferencial da entropia é dada como

$$dS = \sum_{k=0}^t F_k dX_k \quad (\text{A.16})$$

onde é denotado

$$F_k = \frac{\partial S}{\partial X_k}. \quad (\text{A.17})$$

Note que

$$F_0 = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}, \quad (\text{A.18})$$

e

$$F_i = \frac{\partial S}{\partial X_i} = -\frac{P_i}{T}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, t. \quad (\text{A.19})$$

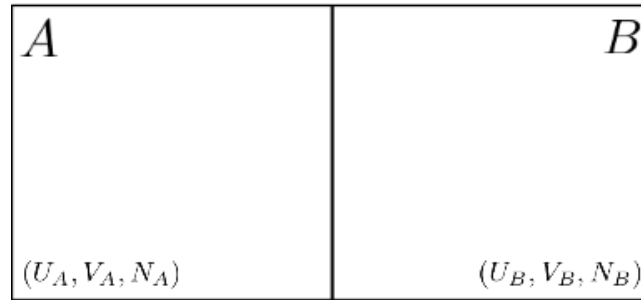
Considere um sistema constituído por dois subsistemas, denotados como A e B na Figura 28 e separados por uma parede. O subsistema A tem energia, volume e número de partículas indicados por (U_A, V_A, N_A) , respectivamente. De modo análogo, o subsistema B tem energia, volume e número de partículas indicados por (U_B, V_B, N_B) , respectivamente.

O sistema encontra-se em equilíbrio termodinâmico. Isso informa que os valores assumidos pelos parâmetros extensivos são tais que maximizam a entropia. Assuma que a entropia do subsistema A seja dada por $S_A(U_A, V_A, N_A)$ e a entropia do subsistema B seja $S_B(U_B, V_B, N_B)$. A entropia total do

sistema será a soma da entropia dos subsistemas

$$S = S_A(U_A, V_A, N_A) + S_B(U_B, V_B, N_B). \quad (\text{A.20})$$

Figura 28 – Subsistemas A e B separados por uma parede. O subsistema A tem uma energia U_A , volume V_A e número de partículas N_A . O subsistema B tem uma energia U_B , volume V_B e número de partículas N_B .



Fonte: Produção do próprio autor.

Admita as seguintes situações para o sistema:

1. Suponha que a parede separando os subsistemas A e B é diatérmica e o sistema está em equilíbrio termodinâmico. O número de moles e o volume são fixos. Assuma que uma transferência virtual de energia possa ocorrer entre os sistemas. A lei de conservação garante que

$$U_A + U_B = \text{constante} \quad (\text{A.21})$$

Como o sistema está em equilíbrio termodinâmico, os valores assumidos pelos parâmetros extensivos são tais, que a entropia é máxima. Logo

$$dS = \frac{\partial S_A}{\partial U_A} dU_A + \frac{\partial S_B}{\partial U_B} dU_B = 0. \quad (\text{A.22})$$

Da lei conservação dada pela equação A.21

$$dU_A = -dU_B, \quad (\text{A.23})$$

e da equação A.18, tem-se

$$dS = \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) dU_A = 0. \quad (\text{A.24})$$

onde T_A é a temperatura do subsistema A e T_B a temperatura do subsistema B .

Como considera-se uma variação arbitrária de energia, obtém-se que

$$\frac{1}{T_A} = \frac{1}{T_B}. \quad (\text{A.25})$$

Portanto, em um sistema que todas as trocas de energia já foram feitas diz-se que atingiu o equilíbrio térmico, o que significa que as temperaturas dos subsistemas são as mesmas $T_A = T_B$.

2. Considere agora que a parede que separa os subsistemas seja móvel e diatérmica. No entanto, o fluxo de matéria não é permitido de modo que o número de partículas permanece fixo. O sistema encontra-se em equilíbrio termodinâmico. A lei de conservação garante de que

$$U_A + U_B = \text{constante.} \quad (\text{A.26})$$

O volume do sistema também é constante, logo a condição

$$V_A + V_B = \text{constante,} \quad (\text{A.27})$$

é satisfeita.

Uma vez que o sistema encontra-se em equilíbrio termodinâmico, os valores assumidos pelos parâmetros extensivos são tais que maximizam a entropia. Portanto

$$dS = \frac{\partial S_A}{\partial U_A} dU_A + \frac{\partial S_B}{\partial U_B} dU_B + \frac{\partial S_A}{\partial V_A} dV_A + \frac{\partial S_B}{\partial V_B} dV_B = 0. \quad (\text{A.28})$$

Das condições A.26 e A.27

$$dU_A = -dU_B \quad (\text{A.29})$$

$$dV_A = -dV_B \quad (\text{A.30})$$

e portanto

$$dS = \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) dU_A + \left(\frac{p_A}{T_A} - \frac{p_B}{T_B} \right) dV_A = 0. \quad (\text{A.31})$$

Como as variações dU_A e dV_A são arbitrárias, tem-se que

$$\frac{1}{T_A} = \frac{1}{T_B}, \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B}. \quad (\text{A.33})$$

Logo, em um sistema com paredes móveis e que permite troca de energia, após que toda trocas já foram realizadas, as pressões e temperaturas são iguais. O equilíbrio com respeito a troca de energia é chamado de equilíbrio térmico, como já dito anteriormente. O equilíbrio com respeito a diferença de pressão é chamado de equilíbrio mecânico.

3. Por fim, assuma que o sistema encontra-se em equilíbrio termodinâmico e a parede os separa seja diatérmica e que permita troca de partículas. Os volumes dos subsistemas permanecem

fixos. A lei de conservação garante que

$$U_A + U_B = \text{constante.} \quad (\text{A.34})$$

O número de partículas no sistema também é constante, logo a condição

$$N_A + N_B = \text{constante,} \quad (\text{A.35})$$

também deve ser garantida.

Suponha uma troca virtual de energia e de partículas. Como o sistema encontra-se em equilíbrio termodinâmico, tem-se

$$dS = \frac{\partial S_A}{\partial U_A} dU_A + \frac{\partial S_B}{\partial U_B} dU_B + \frac{\partial S_A}{\partial N_A} dN_A + \frac{\partial S_A}{\partial N_B} dN_B = 0 \quad (\text{A.36})$$

Das condições A.34 e A.35 obtém-se

$$dU_A = -dU_B, \quad (\text{A.37})$$

$$dN_A = -dN_B. \quad (\text{A.38})$$

Logo, concluí-se que

$$dS = \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) dU_A - \left(\frac{\mu_A}{T_A} - \frac{\mu_B}{T_B} \right) dN_A = 0. \quad (\text{A.39})$$

Portanto,

$$\frac{1}{T_A} = \frac{1}{T_B}, \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{\mu_A}{T_A} = \frac{\mu_B}{T_B}, \quad (\text{A.41})$$

o que indica que o equilíbrio térmico foi atingido, quando o sistema está em equilíbrio termodinâmico e também o equilíbrio químico, que está relacionado ao fluxo de matéria.