



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**ELABORANDO ATIVIDADES MATEMÁTICAS
COM O SOFTWARE GEOGEBRA**

VINÍCIUS DOS SANTOS HONORATO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
RIO CLARO

Vinícius dos Santos Honorato

Elaborando atividades matemáticas com o software GeoGebra

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciência Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Claro, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Rio Claro - SP

2018

510.07 Honorato, Vinícius dos Santos
H774e Elaborando atividades matemáticas com o software
GeoGebra / Vinícius dos Santos Honorato. - Rio Claro, 2018
157 f. : il., figs., quadros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria espacial.
3. Investigação matemática. 4. GeoGebra. 5.
Experimentação-com-tecnologias. I. Título.

Vinícius dos Santos Honorato

Elaborando atividades matemáticas com o software GeoGebra

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciência Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Claro, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Comissão examinadora

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva (Orientador)
IBILCE/UNESP/São José do Rio Preto (SP)

Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral
DTPE/UFRRJ/Seropédica (RJ)

Prof. Dra. Rúbia Barcelos Amaral Schio
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Rio Claro, SP, 11 de junho de 2018.

Resultado: Aprovado

Esta dissertação é dedicada à memória de Geraldo Alves dos Santos, falecido em outubro de 2016. “Obrigado, Vovô, por cada incentivo aos estudos e a música, cada aula de História e Geografia do Brasil, cada elogio, e cada 1 real dado na infância. Serei sempre grato por seus ensinamentos”.

Também dedico este trabalho à memória a Irany Marques Honorato, falecido em outubro de 2017. “Obrigado, Pai, pelo exemplo de luta pela vida dado em seus últimos dias. Foi muito gratificante estar ao seu lado novamente. Ainda tenho muito a contar. De onde estiver, saiba que eu o amo muito”.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, por me fazer ser quem sou, pelas oportunidades proporcionadas e por estar comigo nos momentos mais solitários.

Ao meu orientador Ricardo, pela confiança em meu trabalho, por me oportunizar desenvolver esta pergunta e pelas fundamentais orientações durante esta jornada e também a sua esposa Alana, pelos momentos compartilhados e por me receber em sua casa quando necessário.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo financiamento desta pesquisa.

À minha mãe, Gilda, por cada incentivo, cada ajuda emocional e financeira, e pelas longas conversas ao telefone. Mas principalmente pelo exemplo de perseverança e alegria.

Ao meu irmão, Vitor, por cada momento compartilhado mesmo que à distância.

À minha querida e amada namorada, companheira e melhor amiga, Thaís Fernanda, por todo carinho, suporte e amor que recebi, cada auxílio acadêmico e cada visita.

Aos meus sogros, Penha e Adelson, por todo suporte e acolhimento nas voltas para casa.

Aos professores da banca, Rúbia e Marcelo, por aceitarem o convite e por colaboraram imensamente para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus amigos mais próximos, Felipe e Marília, por cada momento divertido durante estes dois anos de conversas.

Aos companheiros de GPIMEM, principalmente os mais próximos, Carla, Rita, Lara, Bruno, Lahis, Ana Karina, Sandro, Rejane, Jonson, Bárbara e Liliane.

Aos colegas de Pós Graduação, especialmente, Egídio, Lilian, Sabrina, Douglas, Diego, Maroni e Raissa.

Aos professores da Pós Graduação, em especial, Marcelo, Rosana, Rosa e Maria Deusa.

À toda minha família.

Aos tantos amigos feitos em Rio Claro, especialmente, Dete, Ricardo, Aisha, Inajara e Paulo.

Ao psicólogo Igor, pelas conversas e conselhos dados em cada consulta. Todas foram de suma importância.

RESUMO

O objetivo da pesquisa foi investigar como ocorre o processo de elaboração de atividades matemáticas com a utilização do software GeoGebra por parte de um grupo de pesquisadores em Educação Matemática. As perspectivas teóricas denominadas experimentação-com-tecnologias e investigação matemática foram utilizadas para elaborar e analisar as atividades criadas. Tais perspectivas também embasaram a análise das discussões ocorridas. Do ponto de vista metodológico, a pesquisa possui um caráter qualitativo pois visa compreensões específicas acerca do fenômeno investigado. Nesse sentido, foram registradas em vídeo reuniões nas quais um grupo de pesquisadores dialogou sobre a elaboração e aprimoramento de diferentes versões de cada tarefa, visando sua utilização em um curso de extensão universitária destinado a professores e alunos de licenciatura em Matemática. As tarefas eram baseadas na Geometria Espacial. Parte das discussões ocorreu também por meio de postagens e comentários em um grupo fechado do Facebook, no qual as versões das atividades eram inicialmente compartilhadas. As diferentes versões de cada atividade foram documentadas assim como os comentários de cada postagem. Este material foi analisado visando a compreensão do processo de aprimoramento do caráter investigativo e experimental de cada tarefa matemática elaborada. A análise foi dividida em três categorias, sendo elas: design e investigação, experimentação no processo de elaboração e visualização. Tal análise sugere que o processo de elaboração está sujeito a reflexões a respeito do público alvo e seu conhecimento a respeito do GeoGebra e também de Matemática. A participação do grupo de pesquisa GPIMEM no processo também se mostrou significativa para a concepção das tarefas. Repensar as atividades após e durante sua utilização didático-pedagógica também surge como parte fundamental deste processo, assim como mudanças recursivas de enunciado mediante as considerações levantadas colaborativamente. Esta pesquisa visou contribuir para os estudos que envolvem a Matemática ensinada em conjunto com recursos tecnológicos. Conhecer o processo de elaboração proporciona à comunidade da Educação Matemática perceber a gênese do desenvolvimento de materiais didáticos construídos colaborativamente, assim como a riqueza de ideias desenvolvidas em meio a este progresso.

Palavras-chave: Geometria Espacial, Investigação Matemática, Tecnologias Digitais, Experimentação-com-Tecnologias.

ABSTRACT

The aim of this research was investigate how the process of elaboration of mathematical tasks using the computational software GeoGebra by researchers in Mathematics Education takes place. The theoretical perspectives called experimentation-and-technologies and mathematical investigation theories were used to elaborate and analyze the tasks created. Such perspectives also have brought the analysis of the discussions that took place. From the methodological point of view, the research has a qualitative character because it aims specific understanding of the investigated phenomenon. In this scenario, video meetings were recorded in which a group of researchers dialogged on the elaboration and improvement of different versions of each task, aiming at its use in a university extension course for teachers and students of licenciature in mathematics. The tasks presented are based on spatial geometry. Part of the discussions also occurred through posts and comments in a closed group of Facebook, in which the versions of the activities were initially shared. The different versions and the comments of each activity were documented. This material was analyzed aimed at understanding the process of improving the investigative and experimental character of each elaborate mathematical task. Moreover, the participation of the GPIMEM research group was important for the process of creation of the tasks. Rethinking the activities after their didactic-pedagogy use is also a fundamental part of these processes, such as recursive changes of statements through the considerations raised collaboratively. The analysis was divided into three categories, are they design and research, experimentation in the process of preparation and visualization. Such an analysis suggests that the process of preparation is subject to reflections regarding the target public and his knowledge about Geogebra and also of mathematics. Also the participation of the GPIMEM research group in the process was significant for the design of the tasks. Rethinking activities after their didactic-pedagogical use also arises as a key part of this process, as well as recursive changes in the statement of collaboratively. This research aimed to contribute to the studies involving Mathematics taught in conjunction with technological resources. Knowing the process of elaboration provides the Community of Mathematical Education to realize the genesis of the development of didactic materials constructed collaboratively, as well as the wealth of ideas developed in the midst of this progress.

Key-Words: Spatial Geometry, Mathematical Investigation, Digital Technology, Experimentation-with-Technology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Interface do GeoGebra com Janela de Visualização 3D aberta.....	37
Figura 2 - Interface do site oficial do GeoGebra.....	38
Figura 3 - Cronologia da Pesquisa	46
Figura 4 - Organograma da seção de análise.....	64
Figura 5 - Postagem sobre caráter tutorial.....	67
Figura 6 - Comentário sobre caráter tutorial	67
Figura 7 - Vista 2D de pol1	71
Figura 8 - Interface do arquivo da atividade Prismas.....	74
Figura 9 - Explorando os botões dos pontos médios.....	74
Figura 10 - Explorando poliedros interiores.....	75
Figura 11 - Exemplo de uma tarefa de investigação	77
Figura 12 - Insight para a atividade Prismas	79
Figura 13 - Janelas de Visualização do GeoGebra	80
Figura 14 - Primeira postagem sobre a atividade Interseções	83
Figura 15 - Item 2 (Construção do plano)	84
Figura 16 - Tentativa de construção do plano	85
Figura 17 - Interação do Facebook - atividade Prismas	86
Figura 18 - Cubo construído por quatro esferas	90
Figura 19 - Cubo construído por uma esfera e um plano	91
Figura 20 - Diferentes vistas da figura de interseção	93
Figura 21 - Controles deslizantes, plano e altura da pirâmide	94
Figura 22 - Item b, parte 1 da atividade Prismas.....	96
Figura 23 - Sequências de exploração em prismas.....	97

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	4
RESUMO.....	6
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	8
SUMÁRIO	9
SEÇÃO 1 - INTRODUÇÃO	11
1.1 Introdução	11
1.2 Justificativa e cenário de pesquisa	12
SEÇÃO 2 - REVISÃO DE LITERATURA E EMBASAMENTO TEÓRICO	16
2.1 Revisão de literatura	16
2.2 Experimentação-com-tecnologias	22
2.3 Investigação Matemática	26
2.4 Visualização.....	30
2.5 O ensino de Geometria, a Geometria Dinâmica e o GeoGebra.....	34
SEÇÃO 3 - METODOLOGIA DA PESQUISA.....	40
3.1 Pesquisa Qualitativa e Pergunta Diretriz	40
3.2 Objetivos, cenário de investigação e os sujeitos da pesquisa	42
3.3 Instrumentos e estratégias para a produção e análise de dados	48
3.4 As atividades desenvolvidas	54
SEÇÃO 4 - ANÁLISE DE DADOS.....	64
4.1 Design e Investigação	66
4.1.1 Design – Atividade Construções	69
4.1.2 Design – Atividade Interseções	70
4.1.3 Design – Atividade de Prismas.....	72
4.1.4 Investigação no corpo das atividades	75
4.2 Experimentação no processo de elaboração	78
4.2.1 Experimentação – Atividade Construções.....	79
4.2.2 Experimentação – Atividade Interseções	82
4.2.3 Experimentação – Atividade Prismas.....	86
4.2.4 Experimentação e Matemática.....	88
4.3 Visualização.....	89
4.3.1 Visualização – Atividade Construções	89
4.3.2 Visualização – Atividade Interseções.....	91
4.3.3 Visualização – Atividade Prismas	95

4.3.4 Caráter Visual	98
4.4 Sobre o processo de elaboração.....	99
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	101
Traços de uma nova Geometria	101
Perspectivas futuras	103
Comentários finais.....	104
REFERÊNCIAS	107
Apêndice – A: Modelo do termo de consentimento dos membros do GPIMEM.....	112
ANEXO A – Versões da atividade Interseções entre Planos e Poliedros	114
ANEXO B – Versões da atividade Construções Geométrica no Espaço	126
ANEXO C – Versões da atividade Prismas.....	131
ANEXO D - Atividade apresentada por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014, p. 59 e 60):	155

SEÇÃO 1 - INTRODUÇÃO

Nesta introdução apresento o objetivo da presente pesquisa, bem como parte de minha trajetória acadêmica como forma de esclarecer a origem das inquietações enunciadas. Em seguida justifico a relevância do presente estudo e descrevo a estrutura da dissertação.

1.1 Introdução

A pesquisa que ilustro nesta dissertação tem como objetivo investigar como pesquisadores elaboraram atividades matemáticas sobre Geometria Espacial com base no uso do software GeoGebra. De fato, a iniciativa de elaboração emergiu do interesse de quatro pesquisadores responsáveis por ministrar um curso de extensão universitária sobre o uso do GeoGebra. No entanto, além desses quatro pesquisadores, integrantes do Grupo de Pesquisa em Informática e outras Mídias (GPIMEM) também contribuíram na elaboração das tarefas.

Para compreender como cheguei ao objetivo de pesquisa exposto acima, se torna interessante retomar minha trajetória acadêmica como forma de evidenciar meus primeiros contatos com a Educação Matemática.

Minha primeira aproximação com a Educação Matemática, enquanto área de pesquisa, e mais especificamente o uso de tecnologias em sala de aula, se deu no final do ano de 2011, quando iniciei meus trabalhos em um projeto de Iniciação Científica (IC). Ao mesmo tempo que adentrava nos estudos da IC, cursava meu segundo período da graduação em Matemática (Licenciatura). A disciplina Tópicos de Geometria Espacial fazia parte de minha grade naquele período e nela tive meu primeiro contato com o conteúdo de seções planas em cubos, o qual foi levado para a pesquisa de IC, tornando-se ponto central de minha monografia defendida em Dezembro de 2014. Meu trabalho focava na discussão de quais contribuições a utilização de Tecnologias Digitais (TD) poderia trazer ao processo de visualização de figuras espaciais por futuros professores de Matemática.

Tive como primeiro software utilizado o SketchUp¹. O contato com tal programa me permitiu, na prática, conhecer inicialmente como seria trabalhar o uso de TD no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, por meio de oficinas ministradas em eventos e atividades realizadas com professores e futuros professores.

¹ Link de acesso: <https://www.sketchup.com/pt-BR>

Apesar dos resultados que experiências feitas com o SketchUp trouxessem, inquietações surgiram a respeito daquela tecnologia. Devido a certas características do software, eu acreditava que o trabalho seguia de certa forma incompleto naquele momento. Foi quando em meados de 2013 decidi trabalhar com o então intitulado “GeoGebra 3D”, devido ao fato deste apresentar mais características matemáticas como coordenadas espaciais, vetores, figuras geométricas espaciais pré-fixadas em barras de ferramentas, entre outros recursos. Tratava-se, naquele momento, de uma versão ainda de testes do software GeoGebra no que diz respeito à janela de visualização tridimensional. Como ainda se encontrava em fase de testes, o software apresentava certas limitações como a impossibilidade de utilizá-lo sem conexão com a internet. Além disso, o “peso” do programa, ou seja, o espaço que ele ocupava na memória do computador, fazia com que as explorações se tornassem lentas, além de pequenos “bugs” como congelamento de tela e imagens distorcidas. Em 2014 o GeoGebra incorporou a janela de visualização 3D em sua versão oficial, o que me permitiu realizar a coleta de dados para minha pesquisa de monografia.

Realizar atividades com discentes do curso de Matemática como produção de dados foi determinante para meu aprendizado acadêmico. Porém, para um projeto de mestrado, me pareceu interessante investigar o que acontece antes deste momento, ou seja, como acontece o processo de elaboração de uma atividade por parte de um grupo de pesquisadores em Educação Matemática, e também qual caminho esta atividade percorre até ser concebida em sua versão final. Então, diante dessa inquietação, elaborei o projeto de mestrado em Educação Matemática que culminou na produção da presente dissertação.

1.2 Justificativa e cenário de pesquisa

Investigar o processo de elaboração de atividades matemáticas realizadas com tecnologias, assim como analisar a natureza de diálogos de grupos de pessoas acerca da elaboração destas tarefas podem ser consideradas problemáticas pertinentes e relevantes à Educação Matemática.

Nunes (2011) destaca:

[...] a importância de ter tido ao lado, durante o processo investigativo, pessoas para trocar experiências, compartilhar conhecimentos e discutir as atividades propostas no decorrer da pesquisa (conversar sobre), ou seja, receber o *feedback* referente à produção científica (NUNES, 2011, p. 106).

Em minha pesquisa, analiso o processo de elaboração de atividades que abordam os recursos tridimensionais do GeoGebra, um artifício que foi incorporado ao programa em

meados de 2014. Breda, Trocado e Santos (2013, p. 3), antes da atualização apontada anteriormente, afirmaram que “com o desenvolvimento da próxima versão 5.0 do GeoGebra, introduzindo a folha gráfica 3D, a construção de representações algébricas e geométricas de objetos tridimensionais tornou-se trivial e acessível a utilizadores com pouca experiência de trabalho com o GeoGebra”.

Pesquisas que abordam as funções tridimensionais do GeoGebra vêm surgindo no cenário atual da Educação Matemática, ainda que em número bem menor do que os estudos que abordam o software e suas funções convencionais (funções para a construções de objetos matemáticos bidimensionais). Porém, pesquisas que investiguem o processo de elaboração de atividades com estas novas funções ainda são em pequeno número.

Usualmente, estudos de pós-graduação em Educação Matemática que abordam atividades e tecnologias digitais, situam suas produções de dados em momentos de implementação. Tarefas matemáticas são desenvolvidas e implementadas com professores da disciplina, futuros professores da mesma, alunos de outros cursos de graduação, alunos de escola básica, etc. Logo, os pesquisadores responsáveis por estes cursos ou aulas são também responsáveis por construir esta conexão do que está sendo produzido na academia com seus sujeitos de pesquisa. Neste sentido, os pesquisadores constroem seu material em momentos que envolvem reflexão individual, conversas com orientadores e, para aqueles que possuem esta oportunidade, discussões com grupos de pesquisa (NUNES, 2011), para posteriormente aplicá-las em aula ou cursos.

Em parte das pesquisas em Educação Matemática, o processo de elaboração não é evidenciado, se tornando apenas um tópico de seção no qual o autor expõe brevemente a forma com que concebeu/adaptou suas atividades. Desta maneira, argumentações características do processo, aprendizagem dos pesquisadores, discussões matemáticas, entre outros aspectos, acabam por não receber atenção. Assim, possuir um olhar mais profundo para o processo de elaboração pode expor como os pesquisadores constroem seus materiais educacionais, seja um conjunto de atividades com TD, problemas contextualizados, ou tarefas com material manipulativo. Portanto esta pesquisa visa compreender como o processo de elaboração de atividades matemáticas com o GeoGebra ocorre de forma colaborativa por um grupo de pesquisadores em Educação Matemática. Especificamente, este grupo de pesquisadores foi composto fundamentalmente por um docente pesquisador, orientador deste trabalho, e três alunos de pós-graduação, totalizando quatro participantes dentre os quais eu estou inserido como um dos mestrandos. A partir deste momento, me referirei a este grupo como “*grupo dos autores*”. Os integrantes deste grupo serão tidos como sujeitos da pesquisa. De maneira mais

flexível, o grupo dos autores contou com a colaboração de integrantes do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) em um momento específico do processo elaborativo.

Fiorentini (2012) afirma que o trabalho colaborativo é aquele no qual os pesquisadores cooperam para o desenvolvimento de um afazer em que todos os envolvidos possuem objetivo comum. Portanto, o grupo formado possuía um objetivo comum, que consistia em desenvolver atividades investigativas a serem implementadas em um curso de extensão. O autor ainda afirma que um trabalho colaborativo tem como característica ser um ambiente no qual os participantes têm liberdade para expressar o que pensam, estão dispostos a ouvir críticas, compartilhar significados a respeito do que estão fazendo e negociar metas.

No contexto de minha pesquisa a palavra *atividade* é empregada como sinônimo de *tarefa*, assim como Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) se referem às atividades matemáticas como tarefas pedagógicas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) também utilizam estes termos para se referirem às investigações propostas aos alunos com objetivos educacionais definidos. Para estes autores, uma “boa” atividade deve exigir que a solução seja encontrada sem um método que permita uma solução imediata. Portanto, uma tarefa matemática deve permitir que os alunos busquem suas próprias estratégias de resolução, além de fornecer a eles direcionamento do que se deseja do ponto de vista didático-pedagógico, sendo planejada sob a preocupação de possuir um design articulado entre o que podemos considerar de caráter aberto e caráter direcionado.

No total foram elaboradas sete atividades voltadas para Geometria Plana e também Geometria Espacial, porém na presente dissertação, diante do objetivo proposto, analisei as discussões em torno apenas de três das atividades, as quais envolvem aspectos da Geometria Espacial. Tais tarefas foram implementadas no já referido curso de extensão oferecido a professores e futuros professores de Matemática. Este curso, com duração de 18 horas e realizado na UNESP, Campus de Rio Claro, foi cenário de produção de dados para a pesquisa de Idem (2017) cuja pergunta de pesquisa é “Que conhecimentos docentes emergem quando licenciandos em Matemática e professores exploram atividades de Geometria utilizando o GeoGebra?” (IDEM, 2017, p. 63). Outra pesquisa para qual o curso serviu como fonte da produção de dados foi a de Vital (2018) na qual a pergunta diretriz se estabelece sendo “Como estudantes de Matemática produzem PMD sobre Geometria considerando o uso do software GeoGebra? (VITAL, 2018, p. 19).

Os quatro integrantes do *grupo dos autores* faziam, então, parte do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). No decorrer da pesquisa,

acreditamos que seria pertinente submeter as tarefas ao grupo de pesquisa para avaliação, buscando também contribuição dos pesquisadores presentes neste ambiente. Dessa forma, as atividades estariam sujeitas a diferentes perspectivas a respeito de atividades investigativas e também diferentes experiências de cada pesquisador em se tratando de elaborar tarefas matemáticas com tecnologias digitais. O GPIMEM é referência nacional no estudo da inserção de tecnologias no ensino de Matemática. Um dos construtos teóricos desenvolvidos neste âmbito é o seres-humanos-com-mídia, que defende a ideia de coletivo pensante entre homens e tecnologias. Neste sentido, a seção seguinte visa apresentar as ideias teóricas que permearam as discussões durante o desenvolvimento das atividades, como a investigação matemática e a experimentação-com-tecnologias. Esta segunda estando diretamente ligada ao construto seres-humanos-com-mídia. Porém, antes é feita uma revisão de literatura com trabalhos que englobam as ideias citadas e também o uso de tecnologias para o ensino de Matemática em geral, alguns com foco na Geometria.

SEÇÃO 2 - REVISÃO DE LITERATURA E EMBASAMENTO TEÓRICO

Ao longo desta seção apresento uma revisão de literatura que busca elencar trabalhos nos quais a experimentação-com-tecnologias, a investigação matemática, o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Espacial estiveram presentes. Seguidamente exponho uma discussão teórica englobando os principais construtos que dão embasamento a seção de análise de dados, sendo elas a experimentação-com-tecnologias, a investigação matemática e a visualização. No final da seção remeto ao ensino de Geometria e a utilização de software de Geometria Dinâmica em aulas.

2.1 Revisão de literatura

A elaboração de atividades foi cerne da pesquisa de mestrado de Nunes (2011), na qual o próprio autor se coloca como sujeito do trabalho. Este estudo teve como objetivo investigar como ocorre o processo de design instrucional na Educação Matemática quando se utiliza calculadoras gráficas na elaboração de atividades sobre funções trigonométricas. Neste contexto, design instrucional diz respeito ao processo de elaboração das atividades que compõem a dissertação. O autor realizou sua produção de dados em estágios diferentes: momentos que desenvolveu as atividades sozinho; momentos em que as atividades foram avaliadas pelo orientador e um grupo de pesquisa; e também em momentos de implementação com alunos de graduação. O autor aponta em seus resultados que adentrar em momentos angustiantes faz parte do processo.

Esse tipo de situação encontra-se entre os caminhos que tanto o professor/pesquisador quanto muitos outros educadores poderão trilhar ou estão trilhando no momento em que trabalham com tecnologia. Além disso, o docente, nessa perspectiva, poderá perceber que trabalhar de forma a pensar-com-tecnologia pode passar de um desafio para um processo natural, no qual, o professor entende esse processo de elaborar atividades desse tipo, ou seja, que estejam embasadas nessa concepção, como parte de sua prática. Nesse sentido, é possível que o professor deixe de ser um mero reproduzidor de atividades de livros didáticos e passe a pensar-com-tecnologia (NUNES, 2011, p. 109).

O autor acredita que trabalhar com o uso de tecnologia para elaborar atividades pode se configurar um processo desafiante em algo natural, tornando a inserção de recursos tecnológicos parte de sua prática.

Gorgorió et al. (2000) investigaram o processo de elaboração de atividades voltadas para a Geometria Espacial. Os autores não abordam a utilização de tecnologias digitais, porém se

concentram em descrever momentos que envolvem planejar, executar e avaliar atividades dentro do processo de elaboração. Inicialmente, ocorreu no trabalho uma seleção das atividades e a avaliação e contribuição do grupo de pesquisa no qual participavam. De fato, o grupo não criou as atividades, mas sim as adaptou de outro autor. Seguidamente as atividades foram realizadas com alunos com a intenção de conhecer a postura que os professores deveriam tomar durante as implementações e também as dificuldades que os discentes apresentariam em relação às atividades, que envolviam as noções de visualização e posição espacial. Os autores chegaram à conclusão de que a revisão e a implementação mostraram a necessidade de mudanças em cada atividade, considerando as dificuldades dos alunos. Os dados implicaram também que os alunos utilizaram estratégias diferentes dos professores e que sem a intervenção do docente, uma atividade pode não proporcionar ao aluno a compreensão do conceito trabalhado, mesmo que a tarefa pareça interessante aos olhos dos professores.

Atividades voltadas para a Geometria Espacial com uso de tecnologia foi tema central da pesquisa de Santos (2006). Nesta investigação, os sujeitos de pesquisa foram professores que participavam de um curso de extensão à distância, no qual o pré-requisito para participar do mesmo era ter ensino superior completo, preferencialmente em Matemática. O objetivo era analisar quais as possibilidades de produção matemática à distância, ou seja, investigar como os participantes discutiram, no *chat*, as conjecturas formuladas durante as construções geométricas. A autora entende como *produção matemática* o processo de exploração dos conceitos matemáticos envolvidos, tais como propriedades, conjecturas, generalizações. A tecnologia empregada foi o software Wingeom em atividades de Geometria Espacial. A pesquisa apontou que

A discussão matemática, o próprio desenvolvimento das atividades de geometria, neste caso, a maneira como os objetos matemáticos são tratados, a visualização, a linguagem matemática, etc. Essas mudanças geram uma produção matemática condicionada à tecnologia (SANTOS, 2006, p. 126).

A autora aponta também uma dificuldade de se discutir Geometria Espacial. Quando feita por chat, o não compartilhamento de imagens, construções, figuras levam a busca de outras formas de visualizar por meio da descrição de uma atividade realizada por alguém que não se encontra fisicamente próximo.

A pesquisa de Scucuglia (2006) discutiu como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo. Os sujeitos de pesquisa foram duas duplas de alunos do primeiro ano de graduação em Matemática. As atividades abordadas foram desenvolvidas com Calculadora Gráfica TI-83. Foram, no total, realizadas cinco atividades, nas

quais o autor afirma que a forma com que estas foram propostas, eram embasadas no construto Seres-Humanos-com-Mídia, evidenciando recursos e potencialidades da tecnologia empregada. O autor afirma que em seu estudo, a experimentação-com-tecnologias fica evidente mediante o papel da dedução que surge como forma de confirmar a conjectura desenvolvida pelos sujeitos. Neste cenário, a heurística ganha ressaltos e o autor afirma que “desse modo fica enfatizada a importância da experimentação no processo de investigação, ou seja, fica evidente a valorização heurística no processo de investigação matemática” (SCUCUGLIA, 2006). O pesquisador conclui que sua pesquisa pode auxiliar a estabelecer conexões entre a Matemática aprendida no ensino médio e aquela vista na academia, já que surge uma possibilidade de estudar um importante teorema não de forma tradicional, com uma demonstração rígida e complexa, mas sim de forma experimental, dando valor às conjecturas desenvolvidas pelo coletivo de alunos com a calculadora gráfica.

Sobre investigação matemática o autor afirma o seguinte

Existem diversas formas de enfatizar a experimentação-com-tecnologias no contexto da investigação matemática. Uma delas é destacar as conjecturas elaboradas pelos coletivos pensantes nesse processo e enfatizar as abordagens intuitivas no contexto dedutivo (SCUCUGLIA, 2006, p. 106).

É visto então que ele concebe a proximidade entre experimentação-com-tecnologias e investigação matemática através das conjecturas.

No estudo de Faria (2016) foram investigadas as possibilidades de desenvolvimento e exploração do raciocínio profissional emergentes em atividades com o GeoGebra a partir do olhar profissional de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática. Os sujeitos de pesquisa foram professores de Matemática que lecionam a disciplina do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental. Estes participaram de um curso de formação continuada ministrado pela pesquisadora que realizava o estudo.

A respeito do software GeoGebra, utilizado na pesquisa, a autora coloca:

Afirmo que neste trabalho o GeoGebra oportunizou a exploração de múltiplas representações que exaltam particularidades das vertentes da Matemática, por meio de seus diversos recursos e janelas que apresentam os objetos matemáticos nas representações algébrica, aritmética e geométrica, de modo dinamicamente conectados. A possibilidade de exploração simultânea contribuiu, ainda, para que as desvantagens de cada representação fossem supridas pelas vantagens das outras, no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Matemática (FARIA, 2016, 181).

Como resultado do curso, a autora afirma que este pode contribuir para a formação dos professores, já que eram discutidas as atividades propostas e cada um buscava adaptar a sua

prática e realidade. Muitos não conheciam o software GeoGebra ou conheciam, mas o subutilizavam. Logo, foi possível contribuir para a formação diretamente no que tange a utilização de tecnologias digitais em sala de aula.

Heitmann (2013) investigou como um ambiente de aprendizagem a distância envolvendo bate-papo, Geometria Dinâmica, escrita colaborativa, compartilhamento de tela e pesquisa na internet pode proporcionar a realização de atividades investigativas. A produção de dados foi realizada mediante o acompanhamento de uma turma que cursava uma disciplina ligada ao ensino de Geometria em um curso de Licenciatura em Matemática ofertado na modalidade Educação a Distância por uma universidade federal, no âmbito do sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB). O autor destaca a importância das questões colocadas aos sujeitos, uma vez que eram abertas e podiam ser reinterpretadas. Estas foram então importantes para o desenvolvimento da investigação geométrica. O software de Geometria Dinâmica utilizado foi o GeoGebra para o compartilhamento de tela, onde os alunos podiam interagir com a construção uns dos outros. O autor conclui que é possível proporcionar atividades investigativas em ambientes online. Apesar de admitir não existir uma receita específica para o sucesso, Heitmann (2013) afirma que a utilização de um ambiente com diversas mídias, ou seja, rico em possibilidades neste processo, impulsiona esta produção de conhecimento.

O autor conclui em seu estudo que

sala de aula virtual deve ser pensada como um ambiente que acrescenta oportunidades de exploração e investigação matemática. Uma sala de aula que não se limita aos seus muros e que tem na Internet uma fonte praticamente infinita de informação para fomentar discussões e debates (HEITMANN, 2013, p. 135).

Desta forma, a possibilidade de navegação impulsionou a investigação dos alunos que buscavam na rede uma forma de solucionar os problemas propostos.

Romanello (2016) objetivou investigar o uso do aplicativo Matemática para celulares inteligentes no desenvolvimento de conceitos de função em sala de aula. Os sujeitos de pesquisa foram alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que realizaram atividades investigativas abordando gráficos de função afim e função quadrática. A autora aponta em suas considerações que

as discussões que podem ocorrer durante essas explorações permitem que os alunos falem matematicamente e expressem suas ideias durante as aulas, formalizando os conceitos todos juntos, professor e alunos. Nessas discussões o professor é essencial para a condução da aula, pois é necessário instigar os alunos com perguntas para que se sintam motivados a buscar e explorar, permitindo que os alunos cheguem às

suas próprias conclusões sem fornecer a resposta de imediato durante as investigações (ROMANELLO, 2016, p. 124).

O trecho acima ressalta a importância do papel do professor durante as investigações matemáticas em sala de aula. A pesquisadora aponta também uma lacuna na literatura quanto às pesquisas que ajudem o professor a inserir tecnologias como o celular na sala de aula.

A pesquisa de Richit et al. (2012) tinha como objetivo compreender como a produção de conhecimento dos alunos poderia ser reelaborada no contexto das tecnologias e qual o alcance e as potencialidades do software GeoGebra enquanto alternativa teórico-metodológica na introdução e visualização de conceitos matemáticos. Para tal estudo, os sujeitos de pesquisa foram alunos do primeiro ano do curso de Geologia da Unesp/Rio Claro, SP. Tais alunos passaram por uma experiência com o software GeoGebra no ensino de conceitos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Os estudantes foram conduzidos durante as implementações sujeitos a mediação da professora da disciplina e a realização de atividades caracterizadas como exploratório-investigativa, que segundo os autores são aquelas nas quais os alunos se envolvem em um processo de investigação de soluções, desenvolvendo as próprias estratégias, testando conjecturas e hipóteses.

Como resultados, os autores colocam que

o *software* se mostrou adequado para a realização das atividades de natureza exploratório-investigativa, uma vez que foi possível reduzir o número de repetições durante a verificação de um resultado. O que no papel e lápis seria preciso vários desenhos, o *software* mostrou, através da variação de parâmetros, o comportamento das funções. Isto é um dos fatores mais interessantes ao se justificar o uso de um *software* em sala de aula (RICHIT et al., 2012, p. 98)

Os autores concordam que um fator de suma relevância em utilizar tecnologias em salas de aula é proporcionar novas atividades nas quais o envolvimento de um computador possibilita explorações antes impossíveis de se fazer em papel e lápis.

Richit (2005) investigou como trabalhar com projetos de Geometria Analítica, utilizando software de Geometria Dinâmica pode favorecer a formação de futuros professores de Matemática. Os sujeitos de pesquisa foram alunos de licenciatura em Matemática. O software utilizado foi o Geometricks, no qual os discentes desenvolveram algumas atividades. A pesquisadora considerou a estratégia pedagógica utilizada favorável a formação dos professores, principalmente no que tange a construção de saberes específicos da área. A autora se atenta em sua conclusão que é necessária uma reformulação nos currículos das licenciaturas,

visando elencar saberes pertinentes à Matemática, saberes pedagógicos e saberes referentes a utilização de tecnologias digitais.

Mazzi (2014) utilizou a noção de experimentação-com-tecnologias para investigar potencialidades e limitações do GeoGebra quanto a conceitos de Análise Matemática. Para isso, utilizou experimentos de ensino com quatro alunas de graduação divididas em duas duplas. Os experimentos aconteceram em quatro momentos diferentes: (1) introdução ao software GeoGebra; (2) estudo do conceito de convergência; (3) estudo de sequências limitadas e monótonas; (4) investigação do teorema do valor médio. A produção de dados ocorreu mediante os *applets* do software GeoGebra, fichas de respostas, gravações das interações dos alunos com o GeoGebra e anotações no diário de campo, além das entrevistas. O autor constatou que “o uso da tecnologia permitiu que fossem elaboradas e refutadas algumas conjecturas, [...]. Mais do que isso, ela permitiu uma discussão e reflexão por parte das alunas quanto ao resultado investigado” (MAZZI, 2014, p. 111). Os resultados mostraram ainda que

A partir das atividades de experimentação-com-tecnologia, o estilo de comunicação entre as duplas foi alterado qualitativamente. Surgiram momentos em que as alunas questionaram sobre problemas em suas formações, identificando falhas tanto no ensino por parte dos professores, quanto na aprendizagem por parte delas. Um papel mais ativo surgiu dentre as estudantes. Essas reflexões levantadas fizeram com que eu refletisse na importância da tecnologia para que questões, a princípio sem relação com os conceitos matemáticos, fossem discutidas (MAZZI, 2014, p. 120).

O autor faz as colocações citadas anteriormente de forma que considera, também olhando para seus dados, que as disciplinas em matemática priorizam a mecanização de procedimentos. Desta forma a experimentação contribuiu para uma dinâmica de aula na qual crítica e refutação estavam presentes.

Zotto et al. (2013) realizou, com alunos do segundo ano do Ensino Médio, atividades que abordavam Geometria Espacial em um quadro interativo. As atividades foram elaboradas com o GeoGebra e envolviam o estudo da noção de poliedros e prismas. Foram explorados conceitos como diagonais, fórmula de Euler e área. Os pesquisadores aplicaram questionários aos alunos com intenção de conhecer qual foi o papel da utilização das ferramentas tradicionais do GeoGebra em suas investigações. Os resultados da pesquisa apontavam que os alunos reconheciam que o uso da Tecnologia Digital facilitava a visualização e a interpretação dos cálculos que eles precisavam realizar.

As pesquisas colocadas nesta subseção abordam temas (mais de um deles por pesquisa) relevantes a esta que desenvolvo em nível de mestrado. São eles: Geometria Espacial, Tecnologias Digitais no ensino de Matemática, GeoGebra, Geometria Espacial,

experimentação-com-tecnologias e investigação matemática. Com o olhar voltado para o processo de elaboração de atividades, dentre a literatura estudada Gorgorió et al. (2000) e Nunes (2011) possuem este processo como cerne de suas pesquisas. Todavia, os demais estudos estão centrados em coletar dados mediante a implementações. Algumas delas, como Scucuglia (2006) e Santos (2006) expressam, em subseções de seus trabalhos, como ocorreram suas elaborações de tarefas, seja via adaptação de outro autor ou de enfrentamentos com os recursos tecnológicos disponíveis.

Ainda que Nunes (2011) e Gorgorió et al. (2000) apresentem, com mais detalhes, seus processos de elaboração, ambas as pesquisas ainda se atentam a implementações, considerando e analisando também dados provenientes destes contextos. Este fato evidencia um desafio para esta revisão de literatura e um acontecimento nos estudos de Educação Matemática: As pesquisas nesta área são, em geral, voltadas para implementações, com sujeitos tidos como externos ao processo de elaboração. Diferentemente das pesquisas apresentadas, neste trabalho tive o apreço por conhecer o processo de elaboração em si. Apenas o que foi discutido e gerado dentre a interação dos pesquisadores é dado para esta pesquisa. Portando me distancio dos momentos de implementação para poder dar foco apenas ao desenvolvimento das tarefas.

Como desejo direcionar o olhar sobre cada atividade, apresentando abordagem a respeito de enunciados e preocupações com a interação entre o software utilizado, a atividade e o sujeito que venha a realizá-la. Porém, algo que desejei fazer em meu trabalho é dar um enfoque exclusivo ao momento de concepção e preparo de uma tarefa matemática com tecnologias.

Apresentadas algumas pesquisas que abordam temas semelhantes ao presente estudo, dedico as seções seguintes a discutir as perspectivas teóricas que dão encaminhamento para a análise de dados desta pesquisa.

2.2 Experimentação-com-tecnologias

A experimentação-com-tecnologias pode ser entendida como o uso de tecnologias digitais tendo em vista a exploração de conceitos e problemas matemáticos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). Ao desenvolver uma atividade baseada nesta perspectiva, há uma busca por um “*design experimental*”, ou seja, um cenário de investigação matemática, o qual se configura como um ambiente voltado a heurística, descobertas, conjecturas e possíveis e diferentes soluções.

Por heurística, Salles (2014) entende que “é o meio em que o(s) indivíduo(s) busca(m) para tentar solucionar o problema proposto e os procedimentos heurísticos envolvem descobertas e aprofundamento (refutação ou não) da ideia mediante interações variadas” (SALLES, 2014, p. 39-40). Assim, um ambiente pautado na heurística proporciona aos envolvidos situações de descoberta, intuição e invenção, valorizando cada passo dado pelo aluno em direção a uma possível resposta.

Segundo Borba e Villarreal (2005), um ambiente de experimentação está associado com a formulação de conjecturas, coordenação de múltiplas representações, prova e demonstrações, tentativa e erro. Baseados na ideia da obra supracitada, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) salientam que atividades matemáticas elaboradas com base na noção de experimentação-com-tecnologias buscam proporcionar:

- criação e simulação de modelos matemáticos;
- geração de conjecturas matemáticas;
- exploração de diversificadas formas de resolução;
- manipulação dinâmica de objetos construídos;
- realização de testes, conjecturas, utilizando um grande número de exemplos, modificando representações de objetos, simulando componentes de construções, etc;
- convencimento sobre a veracidade das conjecturas;
- elaboração de novos tipos de problemas e construções matemáticas;
- criação e conexão entre diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos;
- exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos;
- incentivo a combinação de raciocínios intuitivo, indutivo e abduutivo, que podem contribuir ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo;
- criação de atividades matemática “abertas controladas”, ou seja, com direcionalidade ao seu objetivo;
- ensinar e aprender Matemática de forma alternativa;
- compreensão de conceitos; conhecimento de novas dinâmicas, formas de conectividade e relações de poder em sala de aula;
- envolvimento com um novo tipo de linguagem (informática) na comunicação matemática, além da escrita;
- criação de diferentes tipos símbolos e notações matemáticas;
- aprofundamento em vários níveis de rigor matemático; identificação de incoerências conceituais e/ou aprimoramento de enunciado (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 51-52).

Uma tarefa matemática pautada na experimentação-com-tecnologias pode não envolver, necessariamente, todos esses aspectos. No entanto, tais características são parâmetros relevantes para a concepção de uma atividade matemática experimental baseada no uso de tecnologias digitais. Portanto, a experiência e a observação tornam-se aspectos fundamentais a um ambiente baseado na experimentação-com-tecnologias.

A descoberta de padrões ou singularidades entre representações de objetos matemáticos (ou componentes dessas representações) propulsiona a produção de sentidos matemáticos. Há, assim, uma dimensão “empírica” envolvendo o pensamento e a aprendizagem matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIS, 2014, p. 52).

Alguns aspectos da experimentação-com-tecnologias chamam atenção pela sua virtualidade em função de proporcionar a descoberta matemática. Destaco, primeiramente, as tentativas e erros. Borba e Villarreal (2005) defendem que uma abordagem experimental conduz a exploração de uma tecnologia a algo a mais do que simples apertar de teclas.

O apertar de teclas deve estar associado com a geração de conjecturas, com a coordenação de múltiplas representações, com “provas” e com um novo jeito de tentativa e erro. Características do que nós decidimos chamar de abordagem experimental-com-tecnologia (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 73)².

Os autores citados anteriormente acreditam que em tal abordagem pedagógica as tentativas e erros acontecem de maneira educada. De fato, conjecturas e descobertas não são geradas de forma aleatória, mas sim baseadas no retorno dado pela tecnologia, apertar de teclas e generalização de pensamento matemático. As tentativas e erros são, assim, condicionadas a todo momento, não acontecendo de maneira avulsa, mas sim guiando o aprendiz por uma experiência de caráter heurístico.

A respeito do retorno proporcionado pela tecnologia, Borba e Villareal (2005) apontam a velocidade com que os recursos tecnológicos podem apresentar resultados durante a exploração, como o amplo número de exemplos simultâneos possíveis de serem observados nesta interação.

Alinhado à relevância dos testes, erros e feedback veloz que a tecnologia proporciona, está o papel da demonstração matemática com o uso de tecnologias. De Villiers (2002) aponta que tradicionalmente o papel desta é o de verificação, convicção ou justificativa, com o intuito de eliminar dúvidas sobre um conceito matemático. Porém, ele ressalta que a demonstração possui outras funções importantes como explicação, descoberta, comunicação, desafio intelectual e sistematização de resultados. O pesquisador destaca que o papel intuitivo das verificações com softwares matemáticos, por si só, não se consolida como uma justificativa satisfatória, apesar de proporcionar um nível bastante alto de confiança mediante aos resultados. Mazzi (2014) afirma que apesar de, em suas investigações, os sujeitos não terem formulado

² key-pressing in an experimentation environment may be associated with the generation of conjectures, with the coordination of multiple representations, with 'proofs', and with a new kind of 'trial and error' - characteristics of what we decided to call the experimental-with-technology approach. (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 73)

uma demonstração formal, através da experimentação-com-tecnologias eles foram capazes de identificar aspectos relevantes aos conceitos de Análise Real estudados nas atividades. Neste sentido, De Villiers (2002) defende que “deve-se utilizar inicialmente a função mais fundamental de explicação e descoberta para introduzir a demonstração como uma actividade significativa para os alunos” (DE VILLIERS, 2002, p. 13).

Outro tópico relevante à discussão são as atividades de carácter “aberto porém controlado”. Percorrendo a obra de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), este termo diz respeito a atividades nas quais existem indicações no enunciado, conduzindo a interação. Porém, ainda assim, deixa meios para que os alunos realizem as próprias descobertas, desenvolvam as próprias conjecturas e busquem, por conta própria, validar o que foi desenvolvido.

A noção de experimentação-com-tecnologias está diretamente ligada à reorganização do pensamento explicitada por Borba e Villarreal (2005). Os autores defendem que a tecnologia não é neutra ao pensamento humano e vice e versa. A partir do momento em que a experimentação acontece, existe ali um movimento em que seres humanos e mídia atuam conjuntamente na construção do conhecimento. Neste sentido, forma-se um coletivo de seres-humanos-com-mídia.

O uso de hífen na expressão que conecta os atores humanos e não-humanos, busca enfatizar que as tecnologias não são neutras ao pensamento, que a produção do conhecimento matemático é condicionada pela mídia utilizada (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014).

Para o construto seres-humanos-com-mídia, o conhecimento é construído de forma que a tecnologia empregada é modificada pelo pensamento humano e este pensamento, por sua vez, é condicionado de acordo com a tecnologia. Assim, ao buscar desenvolver atividades baseadas na experimentação-com-tecnologias, visa-se proporcionar ao aprendiz este espaço coletivo, no qual esta moldagem recíproca se faz presente por meio da descoberta, da exploração e da investigação. Nesse sentido a inserção da tecnologia neste meio condiciona a forma com que a Matemática está sendo produzida (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Sobre essa ideia, os autores supracitados mencionam também que:

Os construtos seres-humanos-com-mídia e reorganização do pensamento estão relacionados com a ideia do “pensar-com” [...]. Nós pensamos com papel e lápis, pensamos com computadores, pensamos com calculadoras e também pensamos com o colega. De fato, nós sempre pensamos com a mídia, produzindo uma reorganização da forma com que pensamos, entendemos matemática, fazemos representações ou resolvemos de problemas (BORBA; VILLARREAL, 2005, P. 166)³.

³ The main constructs of this book, humans-with-media and the reorganization of thinking, are related to the idea of 'thinking-with' [...]. We think with paper and pencil, with computers, with graphing

As ideias elucidadas anteriormente embasam minha compreensão sobre a importância que a tecnologia pode possuir em um cenário de experimentação, considerando, principalmente, as ideias a respeito da moldagem recíproca. Ressalto, ainda, que os recursos de cada programa/software empregado no ensino de Matemática tornam-se de extrema relevância, já que tais recursos estarão a todo momento permeando a interação entre a tecnologia e o sujeito que a utiliza.

Considerando esta visão, a experimentação-com-tecnologia norteia a análise de dados no quesito: quando, em nossas discussões, buscamos proporcionar um caráter experimental, empregando ferramentas e recursos do GeoGebra que poderiam proporcionar à tarefa alguns dos aspectos pertinentes propostos por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014). Então configura-se uma forma de identificar os momentos nos quais buscamos levar ao aluno uma exploração voltada ao pensar-com-GeoGebra, no sentido de o software condicionar o pensamento do aprendiz e o aprendiz condicionar a ação do software.

2.3 Investigação Matemática

Ponte (2005) apresenta algumas considerações sobre a natureza de atividades que se tornam pertinentes à discussão em um âmbito de elaboração. As caracterizações do autor ficam expostas no quadro a seguir:

calculators; we also think with a Experimentation, visualization and media in action 167 colleague. The fact is that we always think with media, producing a reorganization of the way we think, understand mathematics, make representations or solve problems.

Quadro 1 - Natureza de atividades investigativas

Natureza	Discussão
Aberta	Importante para o desenvolvimento de capacidades como autonomia e lidar com situação complexas.
Fechada	Importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático, que se baseia nas relações estreitas e rigorosas entre dados e resultados.
Acessível	Importante para a autoconfiança, pela probabilidade de alcance de sucesso.
Desafiante	Importante para uma efetiva experiência matemática.

Fonte: Elaboração do autor

O autor deixa sua percepção de que cada natureza de atividade tem sua importância. Cabe ao elaborador escolher qual a característica será útil à sua prática.

Combinando duas a duas as naturezas, Ponte (2005) e Corradi (2011) caracterizam algumas possíveis abordagens de tarefas matemáticas. Primeiramente, os problemas estariam caracterizados por serem fechados e desafiantes. Normalmente os problemas possuem processos mais convergentes, com metas mais definidas (CORRADI, 2011). Estas são características fortes da resolução de problemas. Porém uma tarefa pode ser problema para um aluno, mas não ser para o outro, já que o estudante pode considerar a atividade como fácil. Nesta opção o problema deixa de ser um “problema” para se tornar um exercício, de natureza fechada e acessível. “Explorações são atividades abertas, porém com um grau de dificuldade menor do que investigações. Elas tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, demandando um tempo relativamente pequeno de trabalho” (CORRADI, 2011, p. 167). Então, as investigações são aquelas que emitem um grau de dificuldade alto junto a uma caracterização aberta. Portanto, para o presente trabalho, me atento ao que autores como Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), Ponte (2005) e Corradi (2011) consideram como investigação matemática.

Especificamente, no sentido do dicionário da língua portuguesa, o verbo investigar remete aos atos de seguir vestígios, pesquisar, indagar e examinar com atenção (FERREIRA, 2004). Nesta definição, a palavra investigar abriga aspectos voltados à exploração, à indagação e tentativa de encontrar algo. Tal termo, inserido no âmbito do ensino de Matemática, busca caracterizar contextos nos quais as características mencionadas estejam presentes.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) assumem que

Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos,

procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração (PONTE; BROCARD; OLIVERDO, 2013, p. 10).

Mais sistematicamente, os autores supracitados sublinham que uma investigação matemática ocorre em quatro estágios característicos descritos na tabela 1.

Quadro 2 - Fases da Investigação Matemática

1º	Formulação de questões	Identificação da tarefa, decisão do que será feito
2º	Formulação de conjecturas	Organização dos dados e o levantamento de afirmações sobre a conjectura pensada
3º	Testes e reformulações	Busca de refinar a conjectura
4º	Justificativa	Envolve justificar a conjectura e avaliar o raciocínio desenvolvido

Fonte: Elaboração do autor

As quatro etapas colocadas na tabela 1 dizem respeito aos momentos pelos quais perpassa uma investigação matemática. Portanto, em termos de elaboração, “ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de uma maneira mais ou menos consistente, utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013, p. 29). Corradi (2011) se atenta aos aspectos da preparação de uma aula investigativa ao sublinhar que

[...] a preparação das aulas de investigação propriamente dita constitui outra fase importante. Deve-se selecionar, adaptar ou mesmo construir a tarefa definindo claramente os objetivos a atingir o desenvolvimento matemático dos alunos. Isso não é simples (CORRADI, 2011, p. 170).

Em se tratando de uma aula investigativa, os autores citados anteriormente ainda afirmam que, do ponto de vista do professor, uma aula com tais características pode ser ministrada em três fases: introdução da tarefa; realização da investigação; discussão dos resultados. Neste sentido, o papel do professor se torna fundamental em uma aula pautada na investigação matemática. Como aplicador da atividade e organizador de um ambiente investigativo o professor deve estar atento desde o início, mediando as atividades de exploração.

Durante a atividade, o professor deve dar apoio e manter questões em potencial, indagando e direcionando os alunos a novos caminhos para a exploração. Por fim, deve discutir o que foi feito e procurar conhecer as estratégias utilizadas, buscando questioná-las e validá-las junto a seus estudantes. Neste momento, a valorização das descobertas e formas diferentes de solucionar o problema entram em cena, trazendo novamente a aproximação entre a experimentação-com-tecnologias e a investigação matemática por meio da heurística envolvida.

Para Pereira (2015),

o uso da palavra heurística busca explicitar que o foco central do trabalho não está ensino dos conceitos científicos, mas sim em como estes conceitos são construídos. Nesta perspectiva torna-se mais importante questionar ao estudante sobre como a humanidade descobriu o raio da Terra do que qual é o raio da Terra por exemplo (PEREIRA, 2015, p.23).

Esta ideia expressa que um ambiente pautado na heurística dá mais valor ao processo da construção de um conceito ou da exploração de uma tarefa, do que no resultado final em si. Este é um ponto significativo para os construtos teóricos que embasam esta dissertação.

Este momento é considerado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) como o mais exigente ao professor, justamente pela necessidade de compreender diferentes raciocínios e, portanto, enfatizam que o docente deve estar aberto a novas ideias de resolução, pois é impossível antever as ideias que surgem ao explorar uma atividade matemática aberta.

Ponte (2005) sublinha que

Os argumentos principais utilizados para justificar a importância das investigações são análogos aos usados para justificar a importância dos problemas, acrescentando-se ainda que as investigações, mais do que os problemas, promovem o envolvimento dos alunos, pois requerem a sua participação activa desde a primeira fase do processo – a formulação das questões a resolver (PONTE, 2005, p. 7).

Na presente pesquisa, proponho olhar para a investigação como estratégia de aula, ou seja, no processo de elaboração pretendo evidenciar em quais momentos estivemos atentos a características investigativas que poderíamos introduzir no enunciado da atividade implícita ou explicitamente. Ainda surge como proposta pertinente observar quais as potencialidades investigativas de cada tarefa gerada.

Até o presente momento, a investigação e a experimentação apresentam semelhanças em suas principais características. O ato de conjecturar está presente significativamente nos dois construtos. Outra questão é a avaliação final proposta pela investigação, visto que na experimentação visa-se possibilitar a avaliação e demonstração ou validação do trabalho realizado. O que Ponte (2005) considera como natureza aberta de uma atividade, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) colocam como caráter aberto.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (op. cit.) ainda propõem uma outra vertente de proximidade ou convergência entre as duas ideias. Para os autores, que escrevem baseados no uso do GeoGebra, a utilização do software “pode se revelar significativa para a aprendizagem quando o cenário didático-pedagógico formado a partir de atividades matemáticas envolve complexidade com relação ao pensamento matemático” (BORBA; SCUCUGLIA;

GADANIDIS, 2014, p. 54). Neste sentido, intensificar esta complexidade é fundamental na (re)elaboração de uma atividade matemática investigativa.

Nas pesquisas colocadas como revisão de literatura no início desta seção, a investigação matemática e a experimentação-com-tecnologias acabaram por dar espaço a mais um aspecto considerável à exploração de atividades matemáticas: a visualização. Assim, dedico a subseção seguinte a este assunto, considerando as diferentes conceituações de alguns autores que dissertam sobre o mesmo.

2.4 Visualização

Alinhada à experimentação-com-tecnologias e à investigação matemática, enfatizo a relevância da visualização no processo de ensino e aprendizagem com tecnologia. Lemos e Bairral (2010, p. 73) afirmam que “a visualização possui diversas definições e muitas das vezes está restrito à mente do ser humano”. A visualização tem foco na percepção e na construção de imagens mentais, ou seja, na manipulação de tais imagens (LEMO; BAIRRAL, 2010; VELOSO, 1999)

Borba e Villarreal (2005) abordam este aspecto dentro da Matemática Pura e também na Educação Matemática. Os autores destacam que em ambas as áreas existe uma negligência ao processo de visualização, pois para este é designado um papel secundário, ou seja, surge como uma confirmação dos conceitos matemáticos, como se a visualização acontecesse apenas após o quesito algébrico estar já consolidado. Existe certa relutância em aceitar o potencial da visualização dentro da resolução de um problema ou até mesmo na prova de um teorema matemático.

Nesta perspectiva, a visualização é aceita na tentativa de explicar um pensamento, não como uma demonstração formal, mas sim como algo periférico. Porém Borba e Villarreal (op. cit) assumem que existe um apelo emergente, dentro tanto da Matemática Pura quanto da Educação Matemática, que busca dar valor ao poder heurístico do processo de visualização, acreditando que este seja primordial para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Para essa linha de pensamento, negligenciar a visualização é negligenciar ao aluno a base do pensamento matemático, pois a maior parte dos conceitos foi criada advinda de intuição e visualização antes de se tornarem os textos matemáticos formais que conhecemos hoje.

Nesta pesquisa, abordo a visualização voltada ao ensino de Geometria. Neste sentido, Amaral (2013) afirma acreditar que esta área da Matemática está ligada com o “olhar”, ou seja, com uma necessidade de “ver” propriedades. A autora não se refere a estes verbos como

sentidos instintivos do ser humano, mas sim com a questão de entender as propriedades por meio do potencial visual da Geometria. Como afirma Bairral (2009), visualizar é mais do que ver um objeto, pois a visualização inclui raciocínio.

Amaral (2013) aponta que nas pesquisas relacionadas a Geometria desenvolvidas dentro do GPIMEM, grupo que compõe parte da produção de dados desta dissertação, os pesquisadores dão destaque à visualização utilizando termos como imagem, aspecto visual, imagem visual, habilidade espacial, entre outros. Gutierrez (1996) estende essa visão e expõe que adentrando ao campo da visualização mais alguns outros termos são empregados, tais como raciocínio visual, imaginação, pensamento visual, imagens mentais, imagens visuais, imagens espaciais e ainda outros. Acrescentando mais uma palavra, Cifuentes (2005) sublinha que a intuição está, também, ligada a visualização quando afirma que “O visual na matemática não deve ser entendido só em relação a percepção física, senão também a um certo tipo de percepção intelectual, ligada fortemente a intuição matemática” (CIFUENTES, 2005, p. 58).

Arcavi (2003) destaca que

hoje em dia, a centralidade da visualização na aprendizagem e no fazer matemática parece ser amplamente reconhecido. A visualização não é mais apenas para fins ilustrativos, mas também está sendo reconhecida como um componente chave do raciocínio (envolvendo profundamente o conceito e não o meramente perceptual), a resolução de problemas e até provando. No entanto, existem ainda muitas questões relativas à visualização em educação matemática que requer muita atenção (ARCAVI, 2003, p. 235)⁴.

Como desenvolvimento de seu pensamento, Arcavi (2003) decide por classificar as dificuldades inerentes à visualização em três categorias: cultural, cognitiva e sociológica.

Quadro 3 - Dificuldades referentes à visualização

Dificuldade	Motivos
Cultural	O que é ou significa fazer Matemática
Cognitiva	Métodos visuais possuem potencialidades ricas, porém podem ser imprecisos
Sociológica	O <i>background</i> de vivência do aluno influencia na sua visualização

Fonte: Elaboração do autor baseado em Arcavi (2003)

⁴ Nowadays, the centrality of visualization in learning and doing mathematics seems to become widely acknowledged. Visualization is no longer related to the illustrative purposes only, but is also being recognized as a key component of reasoning (deeply engaging with the conceptual and not the merely perceptual), problem solving, and even proving. Yet, there are still many issues concerning visualization in mathematics education which require careful attention (ARCAVI, 2003, p. 235).

A dificuldade cultural está ligada ao fato de valorizar a visualização. Enquanto alguns autores defendem este processo até mesmo como prova, a comunidade matemática considera esse fato como “isso não é matemática” e esta crença se reproduz em sala, deixando pouco valor para o real papel da visualização.

A dificuldade cognitiva está associada à pergunta “o visual é mais fácil ou mais difícil?”. Ao ponto que uma abordagem rica visualmente pode se conceber como significativa aos processos cognitivos dos indivíduos. Porém, para o autor o aspecto visual pode se apresentar como carente de um processo seguro de resolução e consequentemente proporcionar desconfiança sobre a forma de alcançar certo resultado.

Por fim, a dificuldade sociológica está ligada à experiência de vida que o indivíduo traz consigo. Algumas pessoas possuem a vida baseada em culturas nas quais o apelo visual é presente constantemente. Para Arcavi (2003) essa condição influencia no aprendizado matemático em termos visuais, já que estes que possuem tal vivência podem neutralizar suas dificuldades naturalmente.

Para Borba e Villarreal (2005), visualizar é um jeito alternativo para compreender um objeto ou conceito matemático em questão. Os autores defendem que a visualização faz parte da atividade matemática e se mostra como uma maneira de resolver problemas.

Lemos e Bairral (2010), ao analisarem diversas definições de visualização por autores voltados ao estudo de Geometria, acordam que este processo está ligado à percepção e construção de imagens visuais e que com estes quesitos pode-se iluminar a variedade dos fatos dos problemas geométricos. Para eles a visualização se torna a forma mais efetiva para a compreensão de conceitos matemáticos, apesar da oralidade e da escrita serem as mais utilizadas atualmente. Para os autores um aluno em contato com um problema de Geometria pode investigar diversas formas de representação, conjecturar e justificar raciocínios, além de trabalhar valores numéricos como áreas e volumes, manipular expressões e estudar proporções. Desta maneira, a visualização assume papel importante dentro destes momentos.

De acordo com os referidos autores, a visualização é primordial para o ensino de Geometria e a utilização de tecnologia pode impulsionar o desenvolvimento dessa habilidade. Zimmermann e Cunningham (1991) afirmam que a Matemática, junto de áreas como Engenharia e outras ciências, está disfrutando de um ressurgimento do interesse pela visualização e que este interesse está diretamente ligado à evolução da tecnologia. Apesar da fala destes últimos autores ser relativamente distante em termos de época, a discussão sobre o papel da visualização ainda é recorrente. Atualmente, as demonstrações algébricas, por exemplo, são mais utilizadas e aceitas do que uma demonstração visual.

É importante ressaltar que esta abordagem tecnológica não visa excluir a visualização em cenários não tecnológicos. Zimmermann e Cunningham (1991) afirmam que:

Construímos o campo da visualização matemática amplamente para incluir visualização não baseada em computador, bem como visualização baseada em computadores ou outras tecnologias. A capacidade de desenhar uma figura simples para representar um problema matemático, interpretar tais figuras com compreensão e usar essas figuras como uma ajuda na resolução de problemas são habilidades fundamentais de visualização. Sem essas habilidades fundamentais, é improvável que a visualização baseada em computador possa ser usada de maneira eficiente ou significativa. Visão não é visualização; ver não é necessariamente entender (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 5)⁵.

No contexto de minha pesquisa, considero a visualização como processo pois, assim como afirmam Lemos e Bairral (2010), esta pode ser desenvolvida, principalmente mediante recursos didáticos representativos apropriados. Ainda dentro desta perspectiva, ela se mostra como um processo individualizado no qual o indivíduo desenvolve a partir das imagens mentais que constrói.

A partir de Lemos e Bairral (2010) temos que a visualização está ligada à mente do ser humano e de Zimmermann e Cunningham (1991) temos que “a visualização matemática é o processo de formar imagens (mentalmente, com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologia) e usar tais imagens efetivamente para descoberta e compreensão matemática” (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 3)⁶. Por Cifuentes (2005) temos a visualização ligada à intuição. Assim, assumo a seguinte perspectiva sobre visualização na resolução de uma atividade matemática: criação e manipulação de imagens mentais junto a capacidade de transformá-las ou traduzi-las em desenhos (papel e lápis), em exploração de uma tecnologia ou até mesmo na manipulação de objetos concretos. Porém considero também que esta transformação ocorre em ambas as direções, ou seja, a exploração de material, tecnológica ou em desenho pode acontecer previamente para que o humano manipule mentalmente o observado. Em ambos os sentidos, a resolução de uma tarefa matemática, ou compreensão de um conceito é o objetivo final, em um cenário no qual a visualização é tida como um meio.

⁵ We construe the field of mathematical visualization broadly to include non computer-based visualization as well as visualization based on computers or other technologies. The ability to draw a simple figure to represent a mathematical problem, to interpret such figures with understanding, and to use such figures as an aid in problem solving are fundamental visualization skills. Without such fundamental skills, it is unlikely that computer-based visualization can be used efficiently, or even meaningfully. Vision is not visualization; to see is not necessarily to understand.

⁶ Mathematical visualization is the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding.

Os fundamentos colocados anteriormente (experimentação-com-tecnologias, investigação e visualização) dizem respeito à realização de atividades e à formalização de conceitos. Portanto, busquei olhar para as discussões ocorridas e as atividades elaboradas tentando identificar nelas aspectos que iam de encontro às ideias colocadas, considerando também aqueles que destoaram da literatura estudada. As perguntas que giraram em torno deste processo de análise foram:

1. Em que falas ou itens dos enunciados nós buscamos (re)elaborar uma atividade que proporcione a formulação de conjecturas, as múltiplas representações e resoluções, argumentação à demonstração?
2. Em que quesitos as atividades geradas proporcionam um ambiente de investigação matemática e/ou experimentação-com-tecnologias?
3. As questões podem, de alguma forma, contribuir para o desenvolvimento processo de visualização do sujeito que estiver realizando aquela tarefa?

Desta forma, é relevante lançar mão também de um aspecto teórico que proporcione um olhar sobre o processo de elaboração, ou seja, para o desenvolvimento das atividades geradas.

2.5 O ensino de Geometria, a Geometria Dinâmica e o GeoGebra

O movimento da Matemática Moderna deu à Geometria a função de ilustrar o caráter axiomático e dedutivo da Matemática, desvalorizando aspectos como observação, experimentação e construção (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013; BAIRRAL, 2009). Deste fato, gerou-se uma prioridade dada à Álgebra tanto na pesquisa quanto no ensino de Matemática, fato este que acaba por desenvolver um único tipo de pensamento: o algébrico (LEMO; BAIRRAL, 2010).

A Geometria acaba por ser compreendida como se não fizesse parte da Matemática, sendo ensinada em algumas escolas “separada” da aula de Matemática e muitas vezes aplicada por outro professor.

Para Lemos e Bairral (2010, p. 72) “a geometria nos permite interpretar, entender, e intervir no espaço em que vivemos”. Os autores entendem que ela envolve a visualização de objetos, representação, manipulação e criação de novos objetos. Com a mesma linha de pensamento, Santos (2006) enfatiza que a Geometria está fortemente ligada à visualização, e que as tecnologias digitais proporcionam um cenário propício à investigação matemática dinâmica.

Segundo Lemos e Bairral (op. cit.):

Na Geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada em execução de algoritmos e em modelos para resolver exercícios (LEMOS; BAIRRAL, 2010, p. 72).

Além disso a exploração geométrica pode contribuir para a compreensão de fatos e relações que vão muito além da memorização e utilização de técnicas de resolução de problemas.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013):

A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. É possível conceber tarefas adequadas a diferentes níveis de desenvolvimento que requerem um número reduzido de pré-requisitos (PONTE, BROCARD; OLIVEIRA, 2013, p. 71).

Os autores ainda interligam investigações e Geometria afirmando que investigações geométricas contribuem para a percepção de aspectos essenciais da atividade matemática. Dentre eles, a formulação e teste de conjecturas e a procura de demonstração e generalização.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) sublinham que uma das opções curriculares mais enfatizadas atualmente é a utilização de Software de Geometria Dinâmica (SGD), que permite desenho, construção e manipulação de objetos geométricos, facilitando a exploração de conjecturas e investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal. Neste sentido, a Geometria Dinâmica facilita a realização de experiências que, de outro modo, se tornariam morosas e difíceis de analisar.

A Geometria é hoje o campo da Matemática que recebe as maiores e mais profundas transformações no que diz respeito à exploração com a utilização de softwares. Alves e Soares (2003) creditam este fato ao desenvolvimento de inúmeros softwares específicos nesta área, com o avanço da capacidade tecnológica das máquinas.

Os SGD levam este nome para diferenciá-los dos softwares convencionais de Geometria. Em um SGD, o diferencial é o movimento. Suponha, por exemplo, que seja construído em um SGD um triângulo regular utilizando um segmento e duas circunferências. Ao arrastar um de seus pontos móveis este triângulo será alterado, porém sem perder suas características de regularidade como lados iguais e ângulos de 60° . Ou seja, um objeto de estudo construído segundo suas propriedades geométricas não perderá suas características matemáticas quando o usuário tentar movê-lo pela tela. Este acontecido é chamado prova do arrastar. Zulatto (2002) considera que esta é uma forma de caracterizar uma construção geométrica, ou seja, se

um objeto resistir à prova do arrastar, não se trata apenas de um desenho, mas sim de uma construção geométrica.

Bairral e Barreira (2017) afirmam que, por outro lado,

se, ao construir um quadrado, o usuário se orientar para dispor quatro segmentos congruentes em forma de quadrado, ao clicar e arrastar um deles, a figura se deformará. As figuras construídas sem um procedimento de construção adequado possuem falsas propriedades, ou seja, quando movimentadas podem ocasionar diversas alterações não só em sua posição e tamanho, mas também em ângulos, lados e área, por exemplo (BAIRRAL; PEREIRA, 2017, p. 51).

Sobre o mesmo tópico Alves e Soares (2003) discorrem:

O arrastar talvez seja o principal entre todos [os recursos de um SGD]. Através do mouse é possível clicar sobre um ponto do objeto geométrico construído e depois arrastá-lo pela tela, criando um movimento que provoca uma mudança na configuração. A questão sobre o que se pode arrastar e sobre por que arrastar permite a diferenciação entre construir uma figura ou simplesmente desenhá-la (ALVES; SOARES, 2003, p. 5).

Para Zulatto (2002), na exploração com SGD os alunos podem formular as próprias conjecturas e tentar validá-las, o que é possível devido aos recursos como o arrastar, que possibilita a simulação de diferentes posições e tamanhos da figura geométrica, assim como se estivesse verificando uma grande quantidade de exemplos, tendendo a uma generalização do pensamento. Já em outra oportunidade, Zulatto (2007) afirma que construir e arrastar as figuras permite identificar as propriedades geométricas descobertas. Além disso, quando conteúdos geométricos são trabalhados com softwares, os alunos têm mais facilidade de observar as figuras, suas propriedades e invariantes.

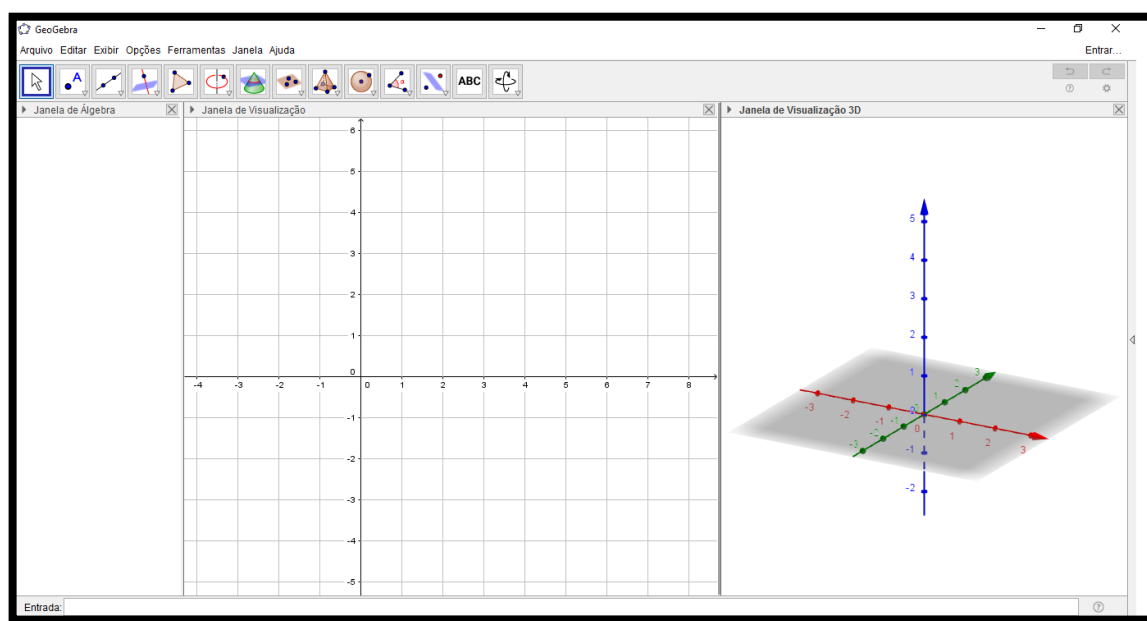
Alves e Soares (2003) destacam ainda outros recursos que impulsionam a exploração, como a habilitação de rastros e animações, que proporcionam também a mostra de diversos exemplos, com um *feedback* veloz dado pela tecnologia. A possibilidade de ocultar elementos que não interessam à construção final são lembrados pelos autores, como, por exemplo, esconder as circunferências pelos quais um triângulo regular foi gerado.

Os SGD possuem grande influência no desenvolvimento de resultados que éramos antes incapazes de obter com tecnologias tradicionais como lápis e papel, por exemplo. Podemos pensar em como representar, utilizando giz e um quadro negro, um objeto tridimensional. Estes desenhos são feitos em aulas de Matemática, porém a exploração em um software transcende a ideia de representar em uma tecnologia bidimensional (2D) um desenho com propriedades tridimensionais (3D). A representação na tela do computador permite uma manipulação

dinâmica, podendo submeter a construção ou desenho ao arrastar, diferente de um desenho estático feito a lápis e papel.

As colocações acima enfatizam a utilização dos SGD como ferramenta pedagógica com possibilidade para o desenvolvimento do pensar geométrico. Nesta pesquisa, o processo de elaboração abordou a exploração do SGD GeoGebra (Figura 1).

Figura 1 - Interface do GeoGebra com Janela de Visualização 3D aberta



Fonte: Elaboração do Autor

A escolha do GeoGebra como tecnologia para o desenvolvimento das atividades desta pesquisa deu-se por ser um programa de Geometria Dinâmica e multiplataforma, isto é,

(...) integra recursos gráficos, numéricos, simbólicos e estatísticos. Sua interface gráfica permite que os objetos sejam construídos e manipulados visivelmente ou através de comandos de programação (BORTOLOSSI, 2012, p. 2).

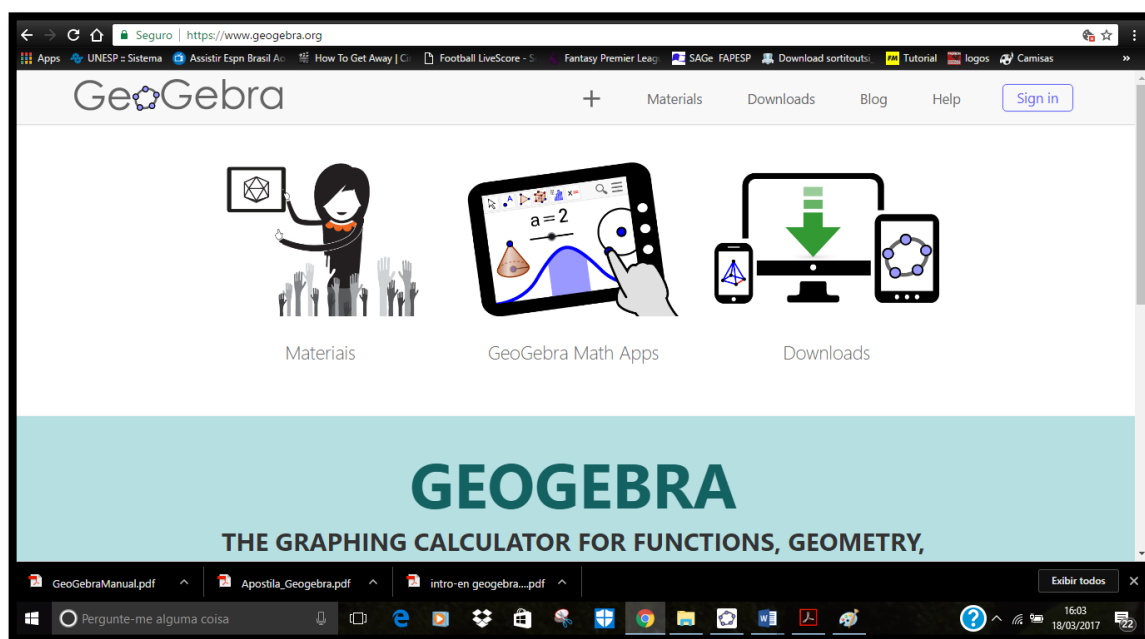
O GeoGebra também é um software de código livre, podendo ser obtido mediante download⁷ gratuito diretamente no site oficial (Figura 2) do programa. Segundo Bortolossi (2012), esta tecnologia pode ainda ser considerada como portátil, ou seja, está disponível na internet⁸ para ser utilizada na *web* executada nos principais navegadores⁹ sem a necessidade do download.

⁷ <https://www.geogebra.org/download>

⁸ <https://www.geogebra.org/m/h7Vq2G4g>

⁹ Firefox, Google Chrome, Opera, Internet Explorer, Microsoft Edge.

Figura 2 - Interface do site oficial do GeoGebra



Fonte: www.geogebra.org

O Site do GeoGebra conta também com a aba “Materials” na parte superior da tela. Esta aba direciona o visitante para um conjunto de materiais criado por usuários do GeoGebra em todo o mundo e compartilhados com a comunidade. O site funciona como um repositório onde qualquer indivíduo gratuitamente cadastrado pode postar seu material. Os materiais podem também ser editados, sob a ressalva de dar os devidos créditos ao criador original. Até certo tempo este conteúdo era disponibilizado no site conhecido como geogebraTube.com. Os materiais ficam dispostos em forma de *applets*, “pequenos programas que são executados dentro de páginas da web. São escritos em linguagem Java e de livre acesso aos interessados” (BAIRRAL, 2009, p. 49).

Tendo sido criado originalmente por Markus Hohenwarter em 2001, muitos professores e/ou pesquisadores têm utilizado o GeoGebra em suas práticas e pesquisas como ferramenta didático-pedagógica. Dessa maneira o software foi se consolidando enquanto tecnologia inovadora na Educação Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014).

Trabalhando com GeoGebra e Geometria, o trabalho de Silva (2014) apresenta diversas formas de provar o teorema de Pitágoras utilizando com auxílio do software. A autora baseia-se na capacidade do programa de gerar quadrados, triângulos e circunferências baseados nos lados (a , b e c) dos triângulos retângulos afim de mostrar que $a^2 + b^2 = c^2$, sendo c a hipotenusa do triângulo. Ferramentas como ocultar e medir área também são enfatizadas no trabalho. A autora conclui que

utilizando o GeoGebra como ferramenta é possível ressignificar o teorema de Pitágoras, proporcionando ao aluno um ensino criativo.

Mais potencialidades do software são abordadas na pesquisa de Iturbe et. al. (2013). Os autores desenvolveram uma pesquisa envolvendo alunos de graduação em Desenho, no qual o uso do GeoGebra envolve o ensino de Geometria, trabalhando em noções como: vinculação entre desenho em construção, ideia semelhante à prova do arrastar, e também a vinculação entre Álgebra e Geometria. Inicialmente os autores constataram que seus alunos não reconheciam a importância da Matemática para seu curso e por isso acreditavam que o uso do GeoGebra auxiliaria nesta relação. Respectivamente, trabalharam com construções geométricas que deveriam ser feitas à mão e no software, e também com uma atividade no estilo “passo a passo” para o estudo da razão áurea. Por fim, os autores apontam a importância de utilizar ferramentas tecnológicas em sala de aula, porém se atentam aos riscos de tornar a aula um lugar onde apenas se mostra o que é visto na tela ou ainda um local onde o conteúdo de ensino é vazio.

É possível notar que pesquisas como as de Silva (2014) e Iturbe et al. (2013) apontam o GeoGebra como uma ferramenta auxiliadora no aprendizado. A palavra ferramenta talvez não seja a mais correta para descrever a atuação do software em meio ao tratamento de alguma tarefa. Apoiado em Borba e Villarreal (2005), concordo com a existência de um coletivo pensante, no qual a tecnologia também atua na construção do conhecimento. Neste cenário, humanos e software atuam conjuntamente, um condicionando o outro. Portanto, não há destaque, seja para a mente humana ou para as potencialidades da tecnologia. Há, sim, uma coletividade na exploração de tarefas matemáticas que suporta o desenvolvimento de soluções e a exploração de conceitos.

Apresentados os construtos teóricos que envolvem esta pesquisa assim como outros estudos que utilizam construtos e ideias em comum com a que redijo, a seguir apresento os fundamentos teórico-metodológicos deste estudo, assim como os objetivos, os sujeitos e o cenário de pesquisa, os instrumentos de produção de dados e as estratégias para a análise de dados.

SEÇÃO 3 - METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesta seção apresento a metodologia utilizada a fim de atender a pergunta de pesquisa. Faço um aporte teórico sobre o que vem a ser uma pesquisa qualitativa segundo autores que dissertam a respeito do tema, bem como deixo minha percepção sobre esta modalidade de pesquisa. Apresento uma descrição da dinâmica da coleta de dados, dos sujeitos e dos instrumentos utilizados. Por fim, esclareço como analisei os dados coletados segundo algumas perspectivas teóricas.

3.1 Pesquisa Qualitativa e Pergunta Diretriz

Antes de falar da perspectiva da metodologia qualitativa de pesquisa, faz-se necessário indagar sobre o que vem a ser uma pesquisa de fato. Bicudo (1993, p.18) compreende que “pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada”. Porém esta afirmação engloba ainda um sentido geral do verbo pesquisar. Em se tratando de Educação Matemática, área de atuação da mesma autora, Bicudo (1993) enfatiza que a pesquisa nesta área não está situada dentro da Matemática e tão pouco dentro da Educação, mas está permeada pelas duas, trabalhando com a Matemática ao passo que utiliza de procedimentos advindos da Educação. A autora esclarece ainda que a pesquisa em Educação Matemática trabalha

interrogando o compreender matemático, o fazer matemático, os significados sociais, culturais e históricos da Matemática. São, portanto, pesquisas que solicitam domínio compreensivo de um vasto horizonte de conhecimentos, como os horizontes da Psicologia, da História, da Filosofia... e, certamente, da Matemática (BICUDO, 1993, p. 20).

Para Borba (2004)

o que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado (BORBA, 2004, p. 2)

O autor acima ainda afirma que o pesquisador não age de forma imparcial aos dados. Sua leitura dos mesmos está influenciada por seu conhecimento, seus valores e sua história, o que em parte, condiciona sua interpretação. Ou seja, a sensibilidade do pesquisador é um fator importante no desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa.

Para o desenvolvimento e o sucesso de uma pesquisa é necessário que se pense e repense a pergunta diretriz com cuidado. Segundo Borba e Araújo (2012), a pergunta diretriz é um instrumento que promove o desenrolar de todo o processo investigativo. Os autores afirmam que o estabelecimento de uma pergunta é um momento de suma importância, e por isso se torna um período de idas e vindas, de amadurecimento e até retrocesso, que por fim leva o pesquisador à pergunta correta.

Goldenberg (1998) aborda a pergunta de pesquisa da seguinte maneira: “a boa resposta depende da boa pergunta! O pesquisador deve estar consciente da importância da pergunta que faz e deve saber colocar as questões necessárias para o sucesso de sua pesquisa” (GOLDENBERG, 1998, p. 71-72).

Na presente pesquisa, a pergunta diretriz elaborada inicialmente era ***“Como ocorre o processo de elaboração de atividades matemáticas investigativas sobre Geometria Espacial utilizando-se o software GeoGebra?”***. Esta pergunta foi entendida por alguns, inclusive por mim mesmo, como ampla demais. Portanto, em outro momento pensei a pergunta: ***“Como ocorre o processo de elaboração de atividades investigativas sobre Geometria Espacial com a utilização do Software GeoGebra, por um grupo de pesquisadores?”***. Nesta segunda pergunta surgem os sujeitos do estudo, pois acredito que eles devam aparecer na questão de pesquisa. Porém, após mais algum tempo de reflexão decidi por adotar a seguinte pergunta: ***“Como ocorre o processo de elaboração de atividades sobre Geometria Espacial utilizando o software GeoGebra por parte de um grupo de pesquisadores em Educação Matemática?”***. Nesta última pergunta foi retirada a característica investigativa, visto que no decorrer da pesquisa as atividades foram desenvolvidas também à luz da experimentação-com-tecnologias e da visualização.

Portanto, após reformulações que dependeram inclusive do andamento da pesquisa, cheguei à pergunta norteadora acima. O ocorrido está em consonância com o que afirmam Lincoln e Guba (1985) no que tange as ideias de design emergente de uma pesquisa, característica que leva em consideração as recorrentes mudanças de rumos que a pesquisa pode tomar no decorrer do processo (ARAÚJO; BORBA, 2013). Ainda nesta linha de pensamento, Goldenberg (1998) entende que uma pesquisa não é algo totalmente controlável e passível de previsões. Para os autores citados não é impossível conceber um design previamente já estruturado, já que não se pode antever o que pode emergir do contato entre o pesquisador e o fenômeno pesquisado, além de que não se pode controlar os diversos fatores que envolvem a pesquisa e o que estes implicarão no resultado final.

A metodologia utilizada nesta pesquisa é de natureza qualitativa, pois busca compreender, em particular, como ocorre este processo que envolve professores pesquisadores durante o desenvolvimento de um material didático (atividades matemáticas) com a utilização de tecnologia. Segundo Bicudo (2006), nesta modalidade de pesquisa privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas e questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos, etc.

Borba (2004) ressalta o seguinte:

Quando falo de pesquisa qualitativa, estou falando de uma forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento (BORBA, 2004, p. 2-3).

Javaroni, Santos e Borba (2011) enfatizam que nesta abordagem, a pesquisa pode ser concebida como uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e exclusivamente com seus princípios, leis e generalizações, mas sim focando nos elementos que se constituem significativos para o pesquisador.

A metodologia qualitativa se aplica a esta pesquisa devido ao interesse em conhecer como ocorre um processo. Busco compreender a elaboração de atividades estando imerso no grupo dos autores. Portanto, trata-se de descrever as experiências, relatar as observações na busca por explicitar minha compreensão, nunca imparcial de sensibilidade enquanto pesquisador. É um ato intencional no qual busco indícios para mostrar ao leitor como um trabalho colaborativo resulta em uma tarefa matemática com tecnologias digitais dentro das perspectivas mostradas na seção de embasamento teórico desta pesquisa.

3.2 Objetivos, cenário de investigação e os sujeitos da pesquisa

A escolha de cenário e sujeitos de pesquisa está intrinsicamente ligada aos objetivos estabelecidos previamente, são eles:

Objetivo Geral:

- Investigar como ocorre o processo de elaboração de atividades pautadas em Geometria Espacial com base no uso do software *GeoGebra*.

Arelados a este objetivo geral estão os objetivos e desdobramentos específicos, que podem ser enunciados da seguinte maneira:

Objetivos Específicos:

- Identificar qual a natureza investigativa e experimental das atividades elaboradas.
- Compreender de que forma os integrantes dos grupos aprimoram o caráter investigativo e experimental das atividades.
- Compreender como enfatizar aspectos como a visualização no design das atividades.

O cenário de pesquisa foi criado a partir da necessidade da formulação de um conjunto de atividades a serem implementadas em um curso de extensão voltado a professores e futuros professores de Matemática. A elaboração das atividades contou com a participação de um grupo de autores e também com a colaboração do grupo de pesquisa GPIMEM, que em sua participação, realizou as atividades e contribuiu para o desenvolvimento das mesmas. Os participantes do GPIMEM que tiveram suas falas utilizadas nesta pesquisa assinaram termo de consentimento cujo modelo está disponibilizado como apêndice.

A escolha dos sujeitos se deu pelo interesse de conhecer e expor como estão sendo pensadas e desenvolvidas atividades matemáticas dentro do âmbito acadêmico. O intuito é identificar como um grupo de pesquisadores, envolvidos em um programa de pós-graduação e inseridos no contexto de um grupo de pesquisa voltado para as tecnologias digitais e educação matemática, discute e negocia a construção de atividades matemáticas com o *GeoGebra*. Portanto esta pesquisa visa conhecer como uma atividade é elaborada, adaptada ou reestruturada (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS; 2014) dentro de um processo de discussões envolvendo elaboração e revisão. Assim, os sujeitos de pesquisa que chamo de grupo dos autores atuou de maneira ativa no período de elaboração das atividades, enquanto o GPIMEM participou contribuindo para a revisão das atividades. Além das reuniões que envolviam estes dois grupos, o grupo dos autores possuía também um grupo fechado no Facebook onde as atividades eram postadas para avaliação prévia às reuniões. Consequentemente, as postagens geravam comentários, sendo alguns deles pertinentes ao desenvolvimento das atividades. Tais comentários serão analisados na seção seguinte.

O chamado grupo dos autores contou com a participação de quatro pesquisadores em Educação Matemática:

Quadro 4 - Grupo dos Autores (Sujeitos)

Sujeito	Graduação	Pós-graduação (no memento da pesquisa)	Experiência
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva	Matemática (Licenciatura) Pela Universidade Estadual Paulista (2002)	Mestre em Educação Matemática (2006) pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), doutor em Educations Studies pela Universidade de Ontário	Professor Assistente Doutor do Departamento, de Educação da UNESP campus São José do Rio Preto
Carla Vital	Matemática (Licenciatura) pela Universidade Estadual do Ceará (	Mestranda em Educação Matemática	Intercambio, cursando Matemática pela State Universit of New York College at Buffalo, SUNY, Estados Unidos. (Carga horária: 405 horas).
Rita de Cássia Idem	Licenciatura em Ciências Exatas, com habilitação em Matemática pela Universidade de São Paulo (2015)	Mestranda em Educação Matemática	Iniciação Científica com ênfase em laboratório virtual de Matemática.
Vinícius dos Santos Honorato	Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (2014)	Mestrando em Educação Matemática	Iniciação Científica com ênfase na utilização de tecnologias digitais no ensino de Matemática.

Fonte: Elaboração do Autor

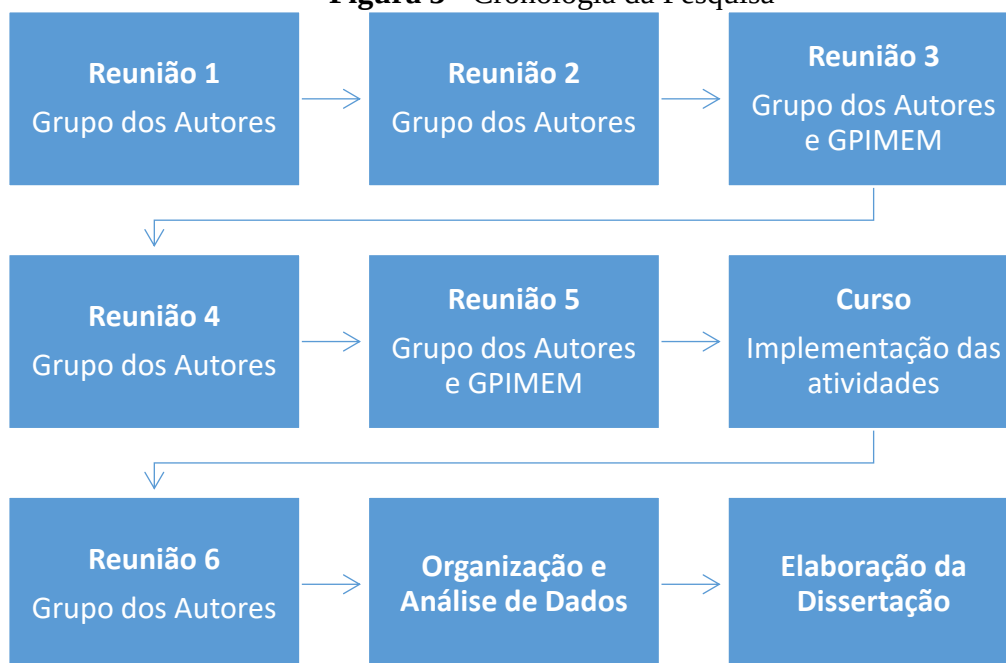
Ressalto que todos os sujeitos do grupo, ilustrado no quadro anterior, estavam vinculados ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista – campus de Rio Claro, tendo Rita, Carla e eu como alunos e Ricardo na condição de professor do programa. Todos os quatro membros realizavam suas pesquisas na área de Novas Tecnologias e Educação Matemática. Ainda enfatizo que o professor Ricardo era orientador dos outros três pesquisadores envolvidos.

Para Goldenberg (1998) existe o perigo do autor da pesquisa qualitativa influenciar os sujeitos. Para isso, deve-se ter consciência de como esta presença afeta o grupo, deve-se pensar como minimizá-la ou, se for do interesse, analisar esta interferência como dado de pesquisa. Em meu estudo, faço parte dos sujeitos em igual nível com os outros participantes, sou um pesquisador em Educação Matemática participando do processo de elaboração de atividades.

O grupo dos autores¹⁰ possuía, desde o início, a função de arquitetar as atividades. Portanto, os integrantes desde grupo, são considerados como os principais sujeitos da pesquisa por estarem presentes em todo processo de elaboração das atividades, refletindo sobre as alterações e inclusive considerando as contribuições do GPIMEM. Para tanto, cada integrante do grupo ficou responsável por trazer duas atividades para serem discutidas nas primeiras reuniões do grupo. Na primeira reunião, tínhamos sete atividades, duas trazidas por Rita, duas por Carla e três por mim. Foram, portanto, discutidas sete atividades, porém apenas três delas são analisadas nesta dissertação, pois das quatro outras atividades elaboradas, três não abordavam Geometria Espacial e uma quarta atividade que abordava o tema, foi retirada da análise porque julguei que não tivéssemos a discutido adequadamente para a produção de dados. As dinâmicas presenciais do *grupo* duraram em torno de uma hora cada.

A noção de investigação matemática era explícita desde o início, ou seja, estava colocado para todo o grupo que estávamos elaborando atividades intencionalmente investigativas baseadas na noção trazida por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). Já a noção de experimentação-com-tecnologia foi levantada na primeira reunião com o GPIMEM, sendo então integrada à elaboração das tarefas. Porém reitero que em momento algum utilizamos as reuniões para discutir ou fazer leitura coletiva destes temas. As noções envolvidas ficaram a cargo individual de cada participante. A seguir, apresento um esquema que explicita como o processo ocorreu cronologicamente. Ressalto ainda que o Facebook foi utilizado durante todo este processo.

¹⁰ Em alguns momentos o grupo dos autores será identificado apenas como *grupo*, para que não haja confusão ao leitor, o Grupo de Pesquisa em Informática e Outras Mídias será sempre identificado como GPIMEM.

Figura 3 - Cronologia da Pesquisa

Fonte: Elaboração do autor

A parte inicial da primeira reunião teve como pauta discutir as questões de organização do curso. Portanto, nos atentamos a quesitos como: público participante; local da realização; ao número de vagas. Foi o primeiro momento em que percebemos que não tínhamos como conhecer o nível de familiaridade com o *GeoGebra* que cada cursista teria. Nesta ocasião discutimos também um formato para as atividades: decidimos utilizar estilos de enunciados com 1), 2), 3)... e letras a), b), c) como sub itens. Levantamos a possibilidade de submeter as tarefas ao GPIMEM para conhecer novos pareceres devido ao fato do grupo possuir em sua literatura básica textos como Borba e Villarreal (2005) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) que abordam noções de investigação, experimentação-com-tecnologias e visualização. Acreditamos também que cada participante do GPIMEM poderia trazer contribuições devido as suas vivências como professores e pesquisadores. Por fim, acordamos que cada um realizaria as mudanças nas atividades que havia trazido de acordo com o que a reunião suscitasse. A segunda parte desta reunião ficou centrada em discutirmos três atividades, porém nenhuma delas será analisada nesta dissertação.

A segunda reunião se iniciou com discussões a respeito de como organizaríamos os participantes do curso. Pensamos em duplas ou trios, mas essa discussão ficou para acontecer em outro momento. O motivo levantado por Ricardo foi que não podíamos ter certeza do número de inscritos, o que acarretaria em uma distribuição por máquinas no laboratório do GPIMEM, local onde o curso foi realizado. Ricardo argumentou que obter dados (para as outras

pesquisas envolvidas) provindos de quatro computadores seria mais interessante do que dados de seis máquinas, devido ao tamanho (em Gigabytes) dos arquivos oriundos da gravação de cada tela. Naquele momento esperávamos um total de 12 inscritos. Discutimos aspectos como o papel do professor e também demonstração com tecnologia, antes de adentrarmos às discussões a respeito das atividades intituladas de “Prismas” e “Interseções entre planos e poliedros”, que serão apresentadas na seção de análise.

A terceira reunião aconteceu com o GPIMEM, porém nela não foram discutidas nenhuma das atividades selecionadas para minha dissertação. No entanto, aspectos importantes para as atividades em geral foram levantados, os quais considero pertinentes trazê-los para este momento. O GPIMEM considerou que as questões precisavam possuir enunciados mais explicativos e minuciosos quanto aos comandos do software que o aluno deveria utilizar. Levantou-se novamente a questão do discente (no curso) conhecer ou não o GeoGebra. Um comentário de um dos participantes dizia que seria muito melhor abordar um caráter de experimentação, no sentido de induzir questões da seguinte natureza: “trabalhe com o colega, experimente, tente chegar a alguma conclusão, compare com o que você já sabe de Geometria”. Indagações desta forma incentivariam o estudante a fazer esta experimentação. Apesar de estar falando de funções, o mesmo participante trouxe a ideia de deixar o software na espécie de *applet*, com objetos prontos e pedir ao aluno “faça isso tal procedimento. Teste!”. Isto faria com que o aluno já começasse testando. Os demais acontecimentos da reunião giraram em torno de uma das atividades não selecionadas para meu trabalho.

A quarta reunião, novamente com o grupo dos autores, não contou com a participação de Carla. Ricardo, Rita e eu discutimos e produzimos alguns gifs, parte das atividades que ficaram voltadas para a produção de Performances Matemáticas Digitais (PMD) no curso. Ressalto que nenhuma das atividades analisadas em minha dissertação envolveu a produção de gifs, então considereei que nesta reunião não foram produzidos dados pertinentes ao meu estudo.

A quinta reunião foi novamente realizada com o GPIMEM. Tal momento contou com a participação de vinte e três integrantes. Dezenove participantes se dividiram em duplas ou trios para realizar e opinar a respeito de cada atividade. Carla, Rita e eu permanecemos de prontidão a auxiliar os membros do grupo nas tarefas e Ricardo participou da dinâmica por conferência em vídeo. Nesta oportunidade foi possível realizar todas (sete) as atividades e conhecer os pareceres daqueles que as realizaram. A dinâmica contou com dois momentos: Realização das atividades e Discussão geral das opiniões. Somente o momento de discussão foi filmado.

Semanas após a quinta reunião, as atividades foram implementadas no curso de extensão oferecido pela Universidade Júlio de Mesquita Filho (UNESP) no campus de Rio Claro. O curso

contou com a participação de oito graduandos e graduados em Matemática, sendo ministrado por dois docentes da instituição e contando com a colaboração de três mestrandos em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do mesmo campus da UNESP (Carla, Rita e eu). O curso intitulado de “*GeoGebra e Performance Matemática Digital (PMD)*” aconteceu em seis encontros de três horas cada um, onde os participantes desenvolveram atividades voltadas para Geometria Plana e Espacial, discutiram textos a respeito de PMD e também o uso de TD no ensino de Matemática. Ao fim do curso, uma PMD¹¹ foi produzida em forma de composição musical e vídeo clipe. Do ponto de vista de minha pesquisa, o curso não foi abordado como fonte de dados. O que foi produzido pelos participantes em termos de conceitos geométricos e formação de professores se tornou dado para a pesquisa de Idem (2018).

A sexta e última reunião aconteceu entre os membros do grupo dos autores. Esta foi uma reunião pós curso. Constituiu-se então de uma reflexão depois de termos implementado aquelas atividades. Um momento de avaliação e reformulação das atividades. Foram discutidas apenas quatro, das sete atividades formuladas. Três destas compõem o conjunto das atividades analisadas nesta minha dissertação. Depois desta reunião, fiquei responsável por realizar as mudanças em todas as atividades discutidas. Este momento se constituiu importante, pois pesquisadores elaboram e aplicam atividades, porém ao fim destas aplicações as atividades podem seguir dois caminhos: serem descartadas ou futuramente reutilizadas na prática de ensino. Refletir sobre o que foi feito e como o público alvo concebeu tais atividades faz também parte do processo de elaboração e é um momento crucial para que melhorias sejam aplicadas ao material desenvolvido.

Após o ciclo citado acima, as atividades ainda foram implementadas com alunos de uma disciplina de graduação em Licenciatura em Matemática. Porém, por uma questão metodológica, esta implementação também não fará parte dos dados analisados de minha pesquisa, que visa abordar apenas os momentos de elaboração e a interação dos sujeitos envolvidos neste processo.

3.3 Instrumentos e estratégias para a produção e análise de dados

Goldenberg (1998) afirma que:

¹¹ Não serão abordados aspectos como a produção de PMD na seção de análise desta pesquisa. Estes dados foram produzidos para serem abordados na pesquisa de Vital (2018) que utilizou o curso como cenário de produção de dados.

Os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Estes dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los. Não existindo regras precisas e passos a serem seguidos, o bom resultado da pesquisa depende da sensibilidade, intuição e experiência do pesquisador (GOLDENBERG, 1998, 53).

Tendo em mente as afirmações de Goldenberg (1998), os métodos de produção de dados foram organizados seguindo a demanda da pesquisa. Como os momentos de elaboração colaborativa se davam durante reuniões, decidi utilizar a filmagem como registro das discussões. Portanto, as discussões do grupo dos autores, e as discussões com o GPIMEM foram registradas com filmadora. Powell, Maher e Francisco (2004) afirmam que gravações em vídeo podem ser benéficas a uma coleta de dados qualitativos devido a possibilidade de rever, quantas vezes forem necessárias, os dados coletados e que este seria o principal benefício em relação a observação ao vivo. Porém, por problemas técnicos a sexta reunião não pôde ser filmada com câmera, então foi realizado um registro em áudio das discussões ocorridas. Considero que não houve perda significativa na produção devido a este imprevisto.

Powell, Maher e Francisco (2004) consideram importante compreender que apenas as gravações em vídeo não garantem a qualidade da coleta dos dados e tão pouco de sua futura análise. Desta forma, durante as implementações e também durante as reuniões filmadas foram tomadas notas de campo, pois “os investigadores qualitativos protegem-se dos seus enviesamentos registrando notas de campo detalhadas que incluem reflexões sobre a sua própria subjectividade” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 68). Desta forma, utilizei as notas como maneira de registrar pensamentos e observações momentâneas, como conexões de aspectos do processo de elaboração com as ideais teóricas as quais havia estudado. Também utilizei as notas para registrar percepções individuais a respeito do que era observado.

Além das formas de registrar os dados citadas acima, também decidi por registrar as diversas versões de cada atividade. Portanto, o grupo do Facebook citado na seção anterior, era o local no qual postávamos as atividades após as modificações, mediante as discussões. As postagens geravam comentários e reflexões e isso explica o fato de, apesar de termos realizado apenas quatro reuniões (que abordavam as atividades aqui trabalhadas), algumas atividades possuíram mais do que quatro versões. Sendo assim, os comentários gerados no Facebook também são dados para a pesquisa.

Com respeito aos momentos de interação presencial do processo de elaboração, considerei viável gravar em vídeo as discussões geradas já que o interesse a todo momento foi

registar os diálogos assim como as ideias que emergissem deles. Para Garcez, Duarte e Eisemberg (2011, p. 254) “é importante assinalar que o vídeo não é mera transcrição da realidade em imagens; há que se considerar o olhar de quem filma, seu posicionamento diante do que está sendo registrado, seus recortes, enquadramentos, escolhas.” Ou seja, a produção de dados em vídeo não é imune a sensibilidade do pesquisador.

Powell, Francisco e Maher (2004) apresentam um modelo analítico de vídeos divididos em sete fases interativas e não lineares, são elas:

1. Observar atentamente os dados do vídeo: momento em que o pesquisador estabelece uma familiarização com os dados recolhidos, assistindo várias vezes o vídeo obtido, ainda sem uma preocupação analítica mais profunda.
2. Descrever os dados do vídeo: Este item complementa o anterior, devido ao fato de um vídeo fornecer informação demasiada, o pesquisador pode usar-se de uma descrição detalhada do que observa, porém, ainda sendo esta uma descrição imparcial, não munida de opiniões ou interpretações.
3. Identificar eventos críticos: Esta fase diz respeito a identificação de momentos significativos ao tema da pesquisa. O pesquisador estará (nesta parte da análise) mais sensível a percepção de momentos que necessite de explicação. “um evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa.” (POWELL; MAHER; FRANCISCO, 2004, p. 23)
4. Transcrever: Este momento é útil para que os pesquisadores analisem com atenção elementos como o fluxo de ideias e a linguagem. É uma forma de encontrar artefatos que forneçam evidências para assuntos analíticos e teóricos referente as questões de pesquisa. Lima (2015, p. 2) define que “transcrever vídeos é a ação de transformar o que se ouve (palavras, músicas, sons, etc.) em textos escritos.” A transcrição proposta na estratégia de Powell, Maher e Francisco (2004) é referente aos momentos críticos.
5. Codificar: é tão importante quanto identificar momentos críticos, porém neste item dá-se atenção ao conteúdo destes eventos, separando-os em códigos que identifiquem e relacionem fatos ocorridos.

6. Construir um enredo: Consiste em organizar de forma criteriosa e coerente os momentos críticos e códigos gerados.
7. Compor a narrativa: Mesmo surgindo como tópico final, este item está presente em toda a pesquisa. Consiste no ato do pesquisador de reorganizar seu caminho, agrupar e dar sentido aquilo que está fazendo.

O modelo analítico de Powell, Maher e Francisco (2004) é desenvolvido baseado na análise de vídeos, porém pode ser adequado à análise de gravações de áudio do ponto de vista da organização do desenvolver analítico da pesquisa. Como estive interessado nas discussões entre os autores, os eventos críticos estão presentes nas falas dos sujeitos, o que pode ser verificado também na ausência de imagens.

Realizei primeiramente a observação detalhada do material gerado. Nestas fases observei o conteúdo de cada interação, descrevendo cada reunião em termos de pauta, com os assuntos discutidos, disponibilidade física do local de reunião e também os participantes presentes, ou seja, este primeiro olhar não ocorre de forma profunda como uma transcrição. No total foram observados e descritos 4h e 46min (quatro horas e quarenta e seis minutos) de gravações.

Essas duas primeiras etapas foram os momentos nos quais pude me familiarizar com os documentos e tentar identificar os eventos críticos. Para Powell, Maher e Francisco (2004):

Por meio da observação e da descrição dos dados do vídeotape, os pesquisadores adquirem um conhecimento profundo suficiente de seu conteúdo. Mais tarde eles prosseguirão para a próxima fase da análise de dados, que consiste em rever cuidadosamente as fitas e identificar momentos significativos (POWELL; MAHER; FRANCISCO, 2004, p. 23).

Os eventos significativos, ou eventos críticos, como apontam Powell, Maher e Francisco (op. cit.), merecem destaque em sua obtenção. Para Lima (2015) estes são momentos que direta ou indiretamente são significativos à pesquisa. Inicialmente para esta pesquisa foram elaboradas sete atividades envolvendo Geometria Plana e Espacial. Junto ao orientador, tomei a decisão de escolher apenas três dessas atividades e aprofundar a análise nesta dissertação. O critério utilizado foi trabalhar com atividades que envolvessem somente Geometria Tridimensional e que tivessem uma carga de discussão que fosse interessante aos objetivos da pesquisa. Portanto, o primeiro movimento de “triagem” de dados, após ter observado e descrito cada vídeo, foi direcionar um olhar mais atento para as discussões que envolviam as tais

atividades selecionadas. Portanto, alguns assuntos que surgiram nas discussões se tornaram o foco de minha observação e busca por eventos significativos:

- Ênfase em recursos diferenciados do *GeoGebra*;
- Tentativas de abordar conceitos de Geometria Espacial com o *GeoGebra*;
- Interferência no trabalho do outro (modificando enunciado de acordo com a percepção de algum membro do grupo)

De fato, dentre os assuntos colocados, esperava identificar discussões como sublinham Powell, Maher e Francisco (2014):

Identificamos *eventos* como sequências conectadas de expressões e ações que, dentro do contexto de nossas – *a priori* ou *a posteriori* – questões de pesquisa, requerem explicação por nós, pelos estudantes ou por todos (POWELL; MAHER; FRANCISCO, 2004, p. 22).

Desta forma, nos dados produzidos, identifiquei momentos em que cada pesquisador explicava suas ideias com a intenção de alterar uma atividade. Também pude observar o quanto eram empregadas as ferramentas tecnológicas disponíveis pelo software utilizado e como os pesquisadores as consideravam na escrita de uma tarefa.

Porém, não somente os aspectos prévios que norteavam minha observação dos dados foram evidentes. Muitos outros tópicos começaram a emergir e chamar atenção devido à importância e recorrência com que eram levantados nas reuniões. Alguns exemplos: o caráter aberto e tutorial de uma tarefa matemática, o caráter visual que emerge em questões de Geometria Espacial, as preocupações com o público alvo (participantes do curso de extensão no caso), e o aprendizado por parte dos elaboradores ao descobrirem recursos novos e ao partilharem ideias em um espaço colaborativo.

Os eventos críticos foram transcritos exatamente como expressados pelos sujeitos. E foram selecionados de acordo com minha sensibilidade como pesquisador, ao perceber que dada discussão apresentava temas pertinentes à análise.

Após a transcrição de dados, decidi desenvolver as categorias de codificação como apresentam Bogdan e Biklen (1984). Para estes autores

À medida que vai lendo os dados, repetem-se ou destacam-se certas palavras, frases, padrões de comportamento, formas dos sujeitos pensarem e acontecimentos. O desenvolvimento de um sistema de codificação envolve vários passos: percorre os seus dados na procura de regularidades e padrões bem como de tópicos presentes nos dados e, em seguida, escreve palavras e frases que representam estes mesmos tópicos e padrões. Estas palavras ou frases são *categorias de codificação* (BOGDAN; BIKLEN, 1984, p. 221).

Portanto, ao observar os eventos críticos que identifiquei, decidi enquadrá-los em três categorias que dão origem à seção de análise. São elas: “Design e investigação”, “Experimentação no processo de elaboração” e “Visualização”.

Além das transcrições dos dados provenientes dos vídeos, ainda são abordadas na análise diferentes versões de cada atividade (salvas em documento de Word Microsoft Office). Além disso, os comentários no grupo do Facebook foram documentados em um total de treze *prints* de tela contendo argumentações que julguei pertinentes ao desenvolvimento das tarefas. Portanto, nesta pesquisa, os eventos críticos aconteceram também externamente aos vídeos, em postagens e comentários na referida rede social. Desta forma, se constituem diferentes formas de obter dados para a pesquisa. Logo, a noção de triangulação se mostra relevante. Segundo Borba e Araújo (2012):

Particularmente, triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para a obtenção de dados. Os principais tipos de triangulação são a de fontes e a de métodos. Quando checamos, por exemplo, as informações obtidas em uma revista com as atas de uma reunião sobre o mesmo assunto, estamos fazendo uma triangulação de fontes. Por outro lado, se observarmos o trabalho de um grupo de alunos e depois entrevistarmos seus componentes sobre o trabalho de um desenvolvido, realizaremos uma triangulação de métodos (BORBA; ARAÚJO, 2012, p. 37).

Em minha pesquisa, realizo a triangulação das transcrições das reuniões, com as diferentes versões das atividades e as interações no Facebook. Portanto trabalho com uma triangulação de fontes. Desta forma busco encontrar quais aspectos levantados nas discussões e nos comentários postados levaram a atividade a possuir dado *enunciado* e como cada enunciado suscitou novas reflexões que fariam recomeçar este ciclo.

Visando atender as categorias emergentes observadas em meio aos dados produzidos, a seção de análise visa apresentar os dados não de maneira cronológica, mas de forma transversal evidenciando os momentos em que cada tema abordado na categoria surge nas discussões ou no corpo da atividade.

Por fim, resgatando esta seção de metodologia da pesquisa. A escolha dos sujeitos aconteceu mediante a crença de que este processo de elaboração é contínuo e também levando em consideração que o *feedback* de um grupo de pesquisa pode ser relevante para o aprimoramento do caráter exploratório e investigativo das atividades. O método de análise foi escolhido de forma a evidenciar indícios da maneira como se constitui este processo e quais as potencialidades emergentes no material elaborado. O foco é como ocorrem as negociações de ideias que permeiam o enunciado de uma atividade matemática experimental e investigativa com tecnologias digitais.

3.4 As atividades desenvolvidas

Nesta subseção apresento as três atividades investigadas nesta pesquisa em suas versões finais. Tais atividades foram selecionadas por mim para compor parte da análise com base na perspectiva denominada por Marshall (1996) como amostra de julgamento, a qual é condicionada pelo objetivo proposto na pesquisa.

Marshall (1996) aponta três formas de designação de amostragem para pesquisas qualitativas. A amostra de conveniência é aquela que emprega menos trabalho ao autor, em termos de esforço, dinheiro e tempo, porém não garante dados com alta qualidade. A chamada amostra de julgamento, ou amostra intencional, é aquela em que o pesquisador escolhe amostra mais significativa para que possa obter resposta para sua pergunta de pesquisa. Por fim, a amostra teórica exige uma construção de teorias a partir dos dados produzidos baseada na interpretação. Portanto, neste estudo utilizo a noção de amostragem de julgamento para escolher três das atividades que foram elaboradas. De fato, as discussões relativas a estas atividades são significativas a todas as outras tarefas. Assim, a escolha se baseou na pergunta de pesquisa, que envolvia Geometria Espacial, nas perspectivas teóricas consideradas e também na análise de todas as atividades em geral, sendo estas três aquelas que mais satisfaziam as intenções da pesquisa. De acordo com Marshall (1996), este método de amostragem de julgamento é “baseado no conhecimento prático do pesquisador da área de pesquisa, na literatura disponível e nas evidências do próprio estudo” (MARSHALL, 1996, p. 523)¹².

As atividades apresentadas são (1) *Construções Geométricas no Espaço*, (2) *Interseções entre planos e poliedros* e (3) *Prismas*. No escopo desta dissertação, as atividades serão referidas, respectivamente, da seguinte maneira: (1) Construções; (2) Intersecções e (3) Prismas.

¹² based on the researcher's practical knowledge of the research area, the available literature and evidence from the study itself (MARSHALL, 1996, p. 523).

Atividade: Construções Geométricas no Espaço (Versão final - Versão 4)

Um Poliedro é uma figura geométrica que possui faces poligonais, arestas e vértices. A palavra poliedro deriva do grego e significa “muitas faces”.

Desde os gregos antigos, os polígonos regulares são construídos a mão utilizando régua e compasso. Desta forma, através de um segmento e duas circunferências é possível construir um triângulo retângulo. Com alguns segmentos e circunferências também é possível construir um quadrado e de outras formas é possível construir inúmeros polígonos regulares preservando suas propriedades geométricas.

Mas e os poliedros regulares? É razoável pensar que estes também possam ser construídos através de outras figuras espaciais como esfera, planos e segmentos.

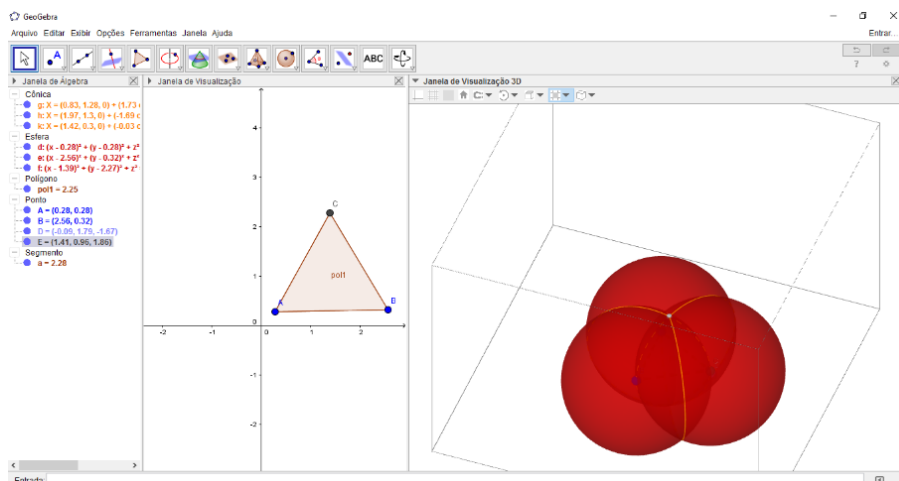
O Software GeoGebra, em sua janela de visualização 3D, possui ferramentas chamadas “Cubo” e “Tetraedro”. Estas constroem diretamente o poliedro sugerido. Mas e se o software não nos desse esta opção? Como desenvolveríamos estas figuras espaciais?

Esta atividade possui como objetivo a construção de Poliedros através de figuras espaciais prévias como planos, esferas e retas.

Atividade:

1. Construindo um poliedro de acordo com suas propriedades geométricas.
- a)** Construa um triângulo regular (na janela de visualização 2D) utilizando a ferramenta polígono regular  .
- b)** Na janela de visualização 3D (menu exibir), construa 3 esferas com centro nos três vértices do triângulo e raio igual ao tamanho do lado do triângulo (use um vértice como centro e outro como ponto qualquer das esferas). Utilize a ferramenta “Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos”  .

- c) Marque as interseções das esferas duas a duas utilizando o comando “interseção de duas superfícies”  e em seguida marque um e apenas um ponto comum destas três interseções utilizando a ferramenta “ponto”  ou “interseção de dois objetos” . Sua construção deve se aproximar do que é mostrado na figura¹³ a seguir:



Obs: utilize a janela de álgebra para ocultar as esferas e também as circunferências de interseção para ter uma melhor vista.

- d) Ligue os vértices do Triângulo até o ponto gerado na interseção utilizando segmentos de reta.
- e) Qual o poliedro gerado? Justifique sua resposta.
- f) Os softwares de Geometria Dinâmica “permitem que construções geométricas possam ser arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos durante a realização da construção” (ZULATTO, 2003). Nesse sentido, um quadrado, construído por suas propriedades geométricas num software com esta característica, não deixará de ser um quadrado quando for arrastado por um de seus vértices. Com base

¹³ Esta figura não possui título ou legenda pois é parte da atividade que foi desenvolvida. Sendo assim não a considero parte do texto escrito da dissertação, mas sim dado de pesquisa que não pode ser alterado.

nessa ideia, pode-se dizer que os procedimentos realizados nesta atividade caracterizam uma construção geométrica? Justifique?

- g)** Que elementos da construção garantem que as características do poliedro sejam mantidas?
2. Se utilizarmos um quadrado como figura inicial, marcando a interseção superior e inferior das esferas (que agora serão quatro) qual poliedro geramos? Este poliedro é regular? Justifique.
3. Utilize polígonos regulares, esferas, retas perpendiculares e paralelas, planos e o que achar necessário para construir um Cubo.

Referências Bibliográficas

ZULATTO, R. B. A. **O perfil dos professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica em suas aulas.** In: VALENTE, V. R. (Org.) **Anais do II SIPEM.** São Paulo. SBEM, 2003.

**Atividade: Interseção entre planos e poliedros (Versão final -
Versão 10)**

Nesta atividade, exploraremos as figuras geométricas que podem ser geradas a partir das interseções entre planos e poliedros. O Objetivo é identificar que tipo de polígonos surgem, ao observar a forma com que os planos cortam os poliedros.

Parte 1:

- a) Abra o arquivo “Atividade Interseções 1”. Nele encontra-se um cubo sendo cortado por um plano. Qual figura você consegue identificar como sendo a interseção destes dois objetos da forma com que estão dispostos?
- b) Altere os controles deslizantes presentes na janela de visualização. O que você observa? Quais novas interseções você observa?
- c) Na Janela de álgebra (à esquerda) habilite o objeto chamado “pol1”. O que você observa? Este recurso auxilia a compreender melhor o polígono formado? Por quê?
- d) Posicione o plano de maneira a ter como interseção um triângulo, um quadrado, um retângulo e um pentágono. Clique com o botão direito sobre o “pol1” e acesse o recurso “vista 2D de...”. Qual o polígono com maior número de lados você encontrou na exploração até agora?
- e) Você acredita ser possível obter um polígono com 6 lados? E com 7, 8...? Justifique sua resposta.

Parte 2:

- a) Abra o arquivo “Atividade Interseções 2”. Nele encontra-se um tetraedro regular sendo cortado por um plano. Identifique as possíveis seções geradas.

- b) Posicione os controles de forma a gerar interseções que sejam triângulos e quadriláteros. Você consegue formar uma interseção que seja um pentágono? Justifique sua resposta.
- c) Qual o polígono com maior número de faces possíveis para este caso?
- d) Com os exemplos feitos você consegue estabelecer uma relação de ordem entre o número de faces do poliedro e o número de lados da figura gerada na interseção?

Atividade: Prismas (Versão final - Versão 6)

Nesta atividade estudaremos prismas de diferentes bases abordando o ponto médio de cada uma de suas arestas. A tarefa tem como objetivo identificar o número de arestas, vértices e faces de um prisma e também o poliedro convexo gerado ao ligar cada um dos pontos médios das arestas do prisma.

Um prisma pode ser caracterizado como um poliedro convexo com duas bases (polígonos) congruentes e paralelas, além de possuir faces laterais planas.

Abra o Arquivo do GeoGebra “Atividades Primas T2”. Nele encontram-se três prismas: um de base triangular (P3), um de base quadrada (P4) e um de base pentagonal (P5).

Parte 1

- a) Quantas faces, arestas e vértices o prisma de base triangular (P3) possui? (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma Triangular		
Faces	Arestas	Vértices

- b) Agora faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma triangular?
- c) Utilizando o arquivo disponível clique em explore os botões “Pontos médios de P3”, “Poliedro interior a P3” e “Ocultar P3”. Veja e explore poliedro gerado. Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais e quantos polígonos são encontrados em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?

Parte 2

- a) Quantas faces, arestas e vértices o prisma quadrangular (P4) possui?
(Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma Quadrangular		
Faces	Arestas	Vértices

- b) Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma quadrangular?
- c) Utilizando o arquivo disponível explorando os botões referentes e visualize o poliedro gerado. Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais e quantos polígonos são encontrados em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?

Parte 3

- a) Quantas faces, arestas e vértices o prisma pentagonal (P5) possui?
(Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma pentagonal		
Faces	Arestas	Vértices

- b) Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma pentagonal?
- c) Utilizando o arquivo disponível explorando os botões referentes e visualize o poliedro gerado. Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais e quantos polígonos são encontrados em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?

Parte 4

A tabela a seguir diz respeito aos valores que você encontrou nos itens anteriores. Complete até deduzir a fórmula para um poliedro com base de n lados.

Lados da base do prisma	Faces	Arestas	Vértices	Nº de faces do poliedro gerado pelos pontos médios
3				
4				
5				
6				
7				
8				
n				

Estas são, portanto, as versões finais das atividades que constam na seção de análise desta pesquisa. Inicialmente pode ser observada a Geometria Espacial, mais especificamente poliedros, como conceitos matemáticos das três atividades. Mais aspectos serão discutidos na seção que se segue. As outras versões de cada tarefa estão contidas como anexos no fim desta dissertação.

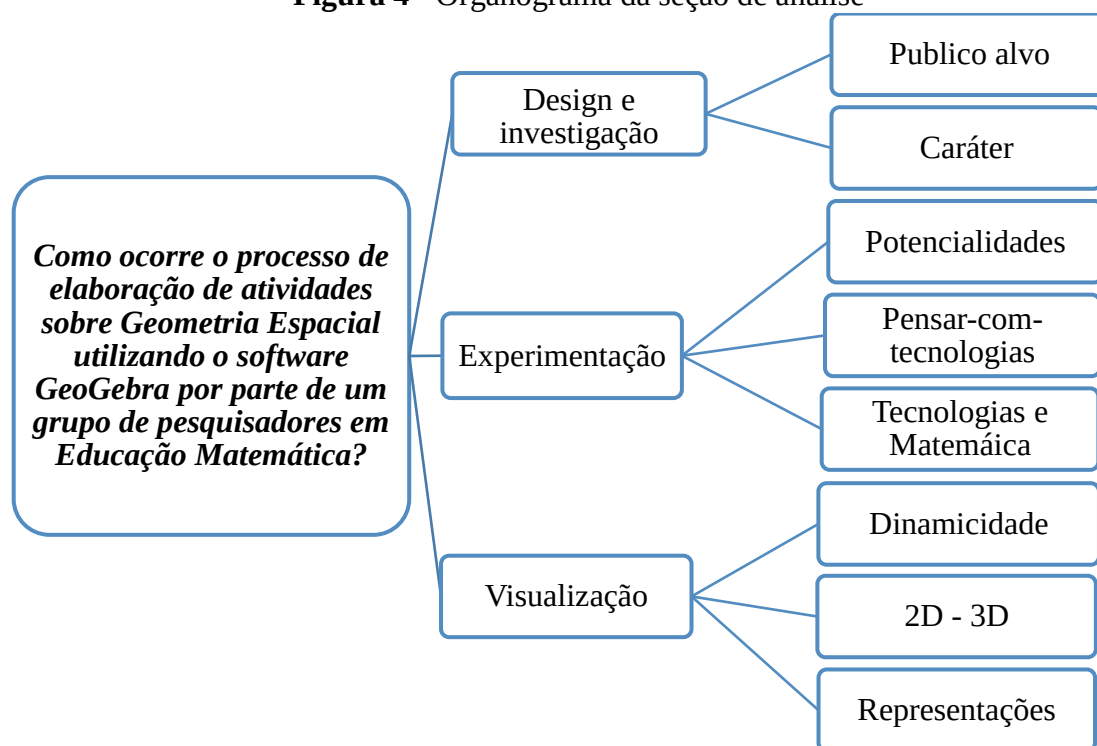
De maneira geral, nesta seção apresentei aspectos sobre pesquisa qualitativa, os cenários e os procedimentos de produção de dados e as concepções analíticas fundamentais do estudo. Na análise apresentada na próxima seção, discutirei aspectos significativos acerca do processo de elaboração e aprimoramento, ou seja, as discussões que levaram as atividades às suas versões finais. São analisados também aspectos das próprias versões finais. Entendo que, neste caso, importante abordar não só o processo de elaboração, mas também seu produto final.

SEÇÃO 4 - ANÁLISE DE DADOS

Nesta seção apresento a análise dos dados produzidos como resultado das interações dos pesquisadores sujeitos. Resgatando a metodologia da pesquisa, estiveram envolvidos um grupo composto por quatro pesquisadores em Educação Matemática e também membros de um grupo de pesquisa (GPIMEM) na elaboração das tarefas. As dinâmicas aconteceram em reuniões presenciais ou em comentários via Facebook que foram devidamente documentados para fins de pesquisa.

Tal análise oferece meios para se discutir o objetivo proposto nesta pesquisa: investigar como ocorre o processo de elaboração de atividades matemáticas com a utilização do software GeoGebra por parte de um grupo de pesquisadores em Educação Matemática. Inicialmente, a figura a seguir visa explicitar como está dividido esta seção.

Figura 4 - Organograma da seção de análise



Fonte: Elaboração do Autor

A análise de dados realizada neste estudo culminou na estruturação de três principais temáticas ou categorias analíticas. São elas: (1) Design e Investigação; (2) Experimentação no processo de elaboração; e (3) visualização. Portanto, os temas abordados a seguir, “tocaram” minha percepção, se fazendo presentes implícita ou explicitamente, de maneira a considerá-los pertinentes e propícios à discussão em uma seção de análise (BOGDAN; BIKLEN, 1994). É

preciso ressaltar que as três categorias expostas no quadro anterior estão fortemente interligadas. Portanto, alguns aspectos que aparentemente poderiam estar encaixados em certa categoria acabaram sendo alocados em outra, pois percebi que a discussão destes em outro momento seria mais pertinente.

Realizamos um total de cinco reuniões para discutir as atividades. Nesse sentido, são apresentadas no Quadro 5 as três atividades que compõem esta seção de análise, seus respectivos objetivos, temas e ferramentas do GeoGebra que foram utilizadas na elaboração e/ou que, potencialmente, podem ser utilizadas por aqueles que explorem as atividades. Além disso, em anexo, estão contidas todas as versões das atividades abordadas, uma vez que o conjunto dessas versões explicitam alterações ou mudanças fundamentais nos enunciados. Na sequência, apresento a análise em categorias que julgo pertinente dentro das teorias colocadas em discussão.

Quadro 5 - Atividades analisadas

Atividade	Objetivo	Tema	Ferramentas do GeoGebra
Construções geométricas no espaço	Realizar a construção de figuras geométricas espaciais segundo suas propriedades	Poliedros regulares	Polígono, esfera, segmento de reta, interseção entre superfícies, plano.
Interseções entre planos e poliedros	Identificar as diversas formas de seções planas possíveis em dois poliedros (Tetraedro e cubo)	Planos e poliedros	Controle deslizante, interseção entre superfícies, vista 2D de polígono.
Prismas	Generalização do número de vértices, arestas e faces de um prisma, bem como de faces do poliedro gerado pelo encontro dos pontos médios das faces.	Prismas e poliedros convexos	Botões pré-programados, mover Janela de visualização.

Fonte: Elaboração do Autor

O embasamento teórico empregado para a análise do processo de elaboração engloba a experimentação-com-tecnologias, a investigação matemática e a visualização. Emerge uma descrição das negociações entre os pesquisadores-autores (das atividades). Os pareceres proporcionados pelo grupo de pesquisa GPIMEM se fizeram indispensáveis e de suma importância ao processo, configurando necessárias retomadas de discussões pelos autores em vista de aprimorar o caráter investigativo e experimental de cada tarefa matemática

desenvolvida. Volto a ressaltar que as palavras “tarefa” e “atividade” são empregadas como sinônimos nesta pesquisa.

4.1 Design e Investigação

A gênese deste processo de elaboração estava pautada na investigação matemática. Neste sentido, iniciamos as discussões com o intuito de desenvolver atividades baseadas nas ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013). Para tais autores uma investigação matemática se divide em quatro partes. São elas: reconhecimento da situação; formulação de conjecturas; realização de testes e refinamento de conjecturas; demonstração e avaliação do trabalho realizado (provas, níveis de rigor). Outro aspecto que era considerado desde o início era a caracterização do que vem a ser uma tarefa aberta (PONTE, 2005).

Nesta análise, o termo “design” diz respeito a maneira como a atividade é apresentada ao aluno, seja uma impressão no papel ou até a disponibilização de arquivo eletrônico pré-programado para ser explorado. As palavras layout e enunciado são empregadas como sinônimos de design neste trabalho.

Logo nas primeiras discussões, nos atentamos a um fato que influenciaria diretamente o design das atividades elaboradas: o público alvo.

Até a primeira sessão do curso de extensão no qual as atividades seriam implementadas, não sabíamos se os participantes tinham ou não experiência com o GeoGebra. Pensando neste fato, Ricardo, desde as primeiras reuniões, expressava a necessidade da inserção de alguns passos necessários para o desenvolver da tarefa, considerando a possibilidade dos diferentes perfis de participantes do curso.

Ricardo (R1)¹⁴: A gente não tem o perfil dos participantes. A gente não sabe se é um curso de introdução ou se é um curso de... as atividades não são atividades necessariamente de introdução (...) será que o participante já usou o GeoGebra alguma vez?

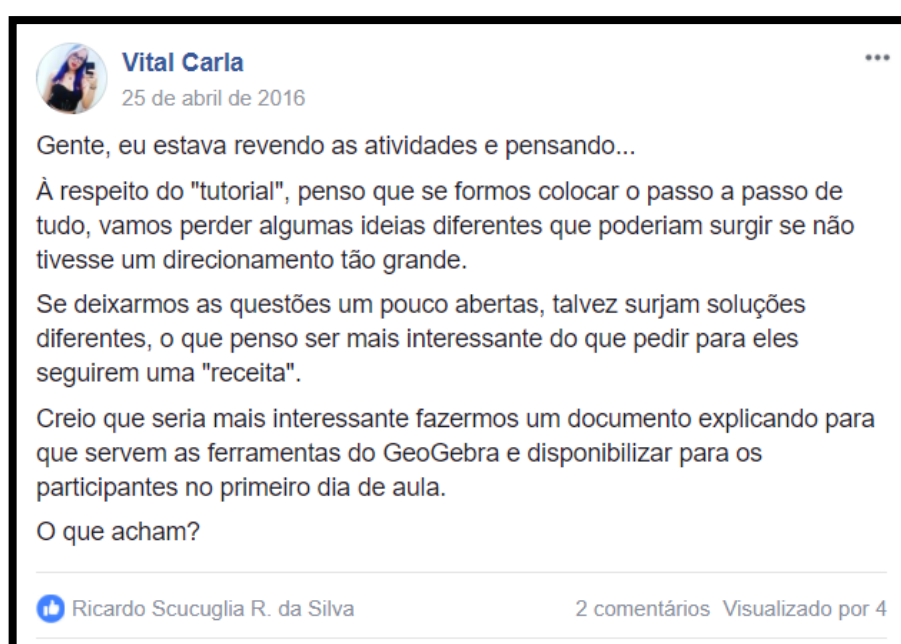
Devido, principalmente, à preocupação de Ricardo a respeito dos participantes do curso conhecerem ou não o GeoGebra, os layouts das atividades foram sendo desenvolvidos contendo itens para explicar os caminhos a percorrer durante as construções. Este tipo de inquietação é importante por parte de um professor elaborador de atividades pois em algumas ocasiões não é possível conhecer, previamente, o público alvo de um conjunto de atividades que estão sendo

¹⁴ As transcrições estão codificadas da seguinte forma:
Exemplo: Ricardo (pesquisador que fala) – R1 (Reunião 1)

desenvolvidas. Em nosso caso, não foi possível conhecer previamente o nível de domínio do GeoGebra de nenhum dos participantes do curso de extensão para o qual nossas atividades estavam sendo formuladas. Deste momento em diante o grupo passou a pensar nas atividades com o seguinte desafio: como elaborar atividades com itens de construção, direcionadas ao objetivo, porém ainda assim manter o caráter investigativo das mesmas?

As discussões a respeito da caracterização das atividades foi algo recorrente no grupo. Via Facebook, Carla expôs sua opinião a respeito do caráter diretivo que as atividades foram ganhando:

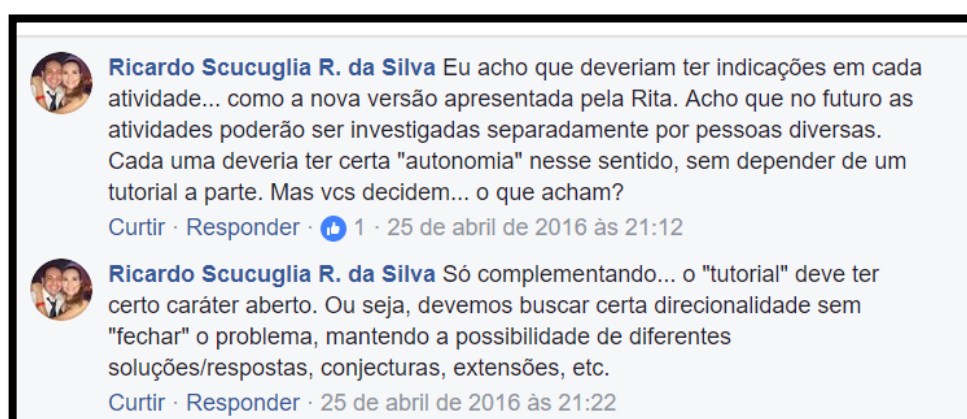
Figura 5 - Postagem sobre caráter tutorial



Fonte: Dados de pesquisa

Os comentários de Ricardo, referentes a postagem de Carla foram os seguintes:

Figura 6 - Comentário sobre caráter tutorial



Fonte: Dados de pesquisa

Carla apresentou seu primeiro “incômodo” com o caráter aparentemente tutorial. Ricardo sugeriu uma “direcionalidade sem fechar o problema”. Este fato está em consonância com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) no que tange a noção de problema aberto, porém controlado. Parte do grupo de sujeitos possuía o receio de que este modelo pudesse distanciar o professor do aluno, deixar o estudante imerso em um mundo de “faça isso, faça aquilo...”. Em reunião com o GPIMEM um dos participantes levantou o fato de que, nestes casos, terminar de cumprir uma atividade pode significar que o aluno seja apenas um bom seguidor de passos.

As palavras de Ricardo refletem uma questão sensível envolvendo o desenvolvimento dos enunciados: Onde está a investigação? Que procedimentos e questionamentos são significativos e permitem ainda que a atividade seja considerada investigativa? Estas questões também são colocadas por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) ao apresentarem uma atividade desenvolvida e aprimorada ao longo de anos de estudos. Na versão ilustrada pelos autores supracitados (Apêndices), o design contava com um protocolo de construção na primeira parte e perguntas na segunda. O conteúdo matemático explorado foi a noção de derivada por meio da construção de uma reta secante. As perguntas seguintes possuíam um formato do tipo “que similaridades ou padrões podem ser percebidos...; o que acontece quando variamos o controle deslizante...” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 60). Na sequência, os autores indagam ao leitor se esta seria uma atividade investigativa, se os procedimentos e perguntas oferecem um caráter investigativo à atividade.

Apesar do estilo direcionado das atividades, ressalto que o caráter investigativo e exploratório das mesmas se mantêm em meio às perguntas que compõem parte do enunciado. Perguntas como “o que você observa?”, “que elementos da construção garantem que as características do poliedro sejam mantidas?”, “qual o polígono com o maior número de lados possíveis neste caso?” e indagações como “faça uma previsão...”, “generalize a tabela...”, “utilize as ferramentas que desejar para a construção...” estão presentes no corpo do enunciado de nossas tarefas.

Estar atento ao público alvo, da maneira como Ricardo esteve durante o processo, foi uma experiência também vivida por Santos (2006). A autora sublinha que enfrentou situação semelhante na elaboração de suas atividades.

busquei elaborar atividades que caracterizo não como abertas, mas semi-abertas, devido ao fato de apresentarem os passos para a construção, mas que possibilitassem a investigação e elaboração de conjecturas (SANTOS, 2006, p. 62).

Portanto, nossas discussões guiaram as atividades ao que Santos (2006) considera sendo atividade semiaberta. São na verdade atividades abertas que possuem um grau de preocupação

com a interação aluno-software e, portanto, ganham aspectos tutoriais de construção, mas ainda assim permitem a exploração induzida dos conceitos por parte dos alunos.

Desta maneira, o design de nossas atividades proporciona momentos em que o aluno é convidado a desenvolver as próprias estratégias, conjecturar e buscar justificar seus resultados (PONTE, 2005). Essas são características relevantes às investigações e também às experimentações.

As atividades elaboradas foram implementadas no curso de extensão universitária após a reunião 5, a segunda ocorrida com o GPIMEM. Porém, o grupo dos autores considerou válida uma nova reunião após o curso com o intuito de promover uma reflexão sobre o material criado.

Alguns autores ressaltam que reflexões pós-implementação podem se configurar significativas, como, por exemplo, destacam Bairral, Settimy e Honorato (2013):

Nossas implementações despertaram o interesse nos participantes. Contudo, ainda se faz necessária uma revisão das atividades tanto para esclarecer alguns enunciados, quanto para uma melhor adequação do tempo de realização (BAIRRAL; SETTIMY; HONORATO, 2013, p. 194).

Portanto, as versões finais que exponho neste trabalho são as versões definidas após esta reunião de avaliação da implementação.

4.1.1 Design – Atividade Construções¹⁵

A atividade Construções perpassou por quatro versões diferentes e foi a tarefa que contou com menos versões diferentes. De fato, a versão inicial (Anexo) é muito semelhante a versão final (subseção 3.4). Após a primeira versão, Ricardo propôs uma alteração em termos de forma da linguagem. O pesquisador sugeriu a mudança para adequar a atividade a uma linguagem mais direcionada ao público do curso de extensão universitária, ou seja, professores e futuros professores de Matemática.

Na versão final da atividade Construções a construção do cubo proporciona ao aluno o momento de desenvolver as próprias conjecturas, apesar da influência dos itens anteriores. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), estas “[...] podem surgir ao aluno de diversas formas, por exemplo, por observação direta dos dados, por manipulação de dados ou por analogia com outras conjecturas” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 33). A

¹⁵ Nesta seção de análise a atividade Construções Geométricas no Espaço será identificada apenas como atividade Construções, assim como a atividade Interseções entre Planos e Poliedros será citada como atividade Interseções para fins de leitura.

referida atividade possibilita o desenvolvimento de conjecturas por analogia aos casos anteriores ou ainda por manipulação das ferramentas por meio dos testes no momento da construção.

Durante a reunião ocorrida com integrantes do GPIMEM Jonson destaca:

Jonson (R5): Outra coisa que eu chamo em destaque foi a orientação que o Vinícius deu. Porque toda vez que a gente chamava, ele nunca respondia, ele conseguia mediar sem dar a resposta (...) invés dele vir aqui e dizer você vai fazer tal comando ele dizia: mas você pensou dessa maneira? Pensou dessa outra? Então ele deixava a questão pra gente pensar. Achei bem interessante a questão da mediação que ele propôs pra gente.

A fala do pesquisador evidenciou o papel do professor para que a investigação se efetue. Neste sentido, não adianta a atividade ser investigativa se o professor der a resposta prontamente ao aluno. Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) sublinham:

Quando os alunos se confrontam com dúvidas ou com um empasse no seu trabalho, não sabendo como prosseguir, o professor deve começar a colocar questões abertas. Muitas vezes, quando os alunos lhe colocam uma questão, a melhor estratégia é devolvê-la, levando-os a pensar melhor sobre o seu problema. Por vezes, há necessidade das questões se transformarem em sugestões orientadoras da atividade dos alunos (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2013, p. 52).

Ressalto que nesta oportunidade, os participantes do grupo tomaram conhecimento da atividade realizando-a e em seguida eles comentavam oralmente suas opiniões a respeito das tarefas. Portanto, a dinâmica com o GPIMEM nos permitiu refletir sobre este aspecto investigativo da tarefa Construções. A interação entre o professor, o aluno e a tarefa proporcionou a mediação em busca de estimular a formulação de conjecturas.

4.1.2 Design – Atividade Interseções

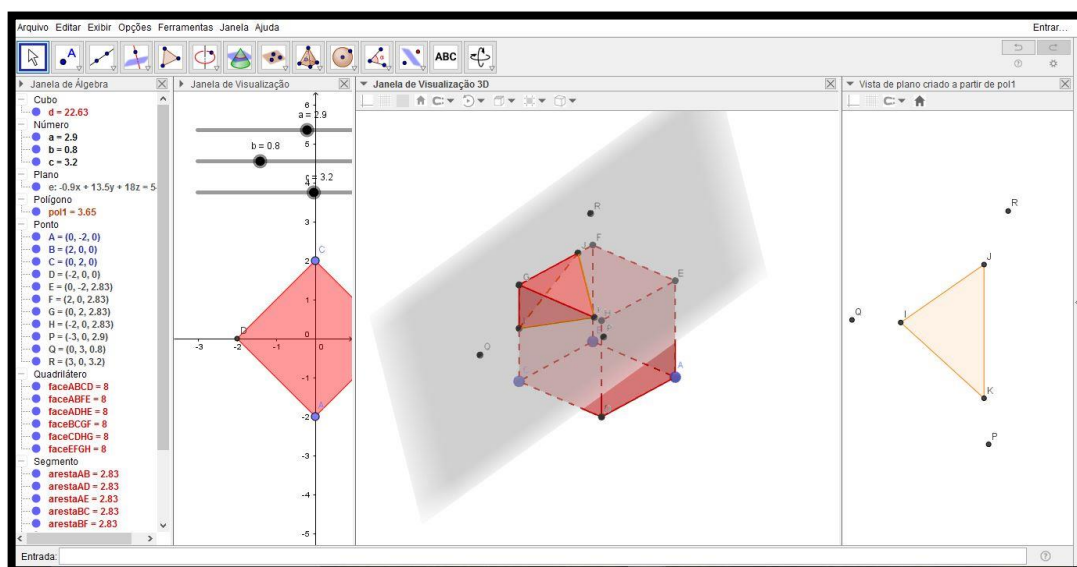
A atividade Interseções foi a que mais conteve diferentes versões. Na sexta reunião, Rita expôs uma observação crucial a respeito de dar a construção pronta ao aluno. A pesquisadora argumentou que as construções não interferem no objetivo da atividade e mostra preocupação com erros que os alunos cometeram na implementação da atividade de Interseções:

Rita (R6): Então, como a construção não é tão importante do ponto de vista do aluno. Acho que já deixar pronto, isso já vai diminuir alguns erros que eu percebi, por exemplo. Porque era uma construção um pouco aleatória do poliedro. Então às vezes não fazia a interseção do jeito que você queria. Então as vezes eles não perceberam que podia ser numa (...)

A partir do que foi destacado por Rita, a atividade Interseções sofreu mudanças em seu layout. Antes possuía itens que guiavam o aluno a construir os objetos tridimensionais a serem explorados e passou se tornar uma tarefa de exploração de objetos já fornecidos.

Esta atividade foi então idealizada para ser executada junto a dois arquivos do GeoGebra. Os controles deslizantes disponibilizados na janela de visualização são responsáveis por controlar a coordenada z dos três pontos que determinam o plano, ou seja, eles movem os pontos alterando a posição do plano. O polígono *pol1*, explorado no item c) da parte 1, quando habilitado marca o polígono de interseção entre os objetos. O recurso *Vista 2D de...* irá fazer surgir uma quarta janela de exploração à direita onde apenas a figura de interseção surgirá para ser analisada (Figura 7).

Figura 7 - Vista 2D de pol1



Fonte: Dados de pesquisa

A Geometria Espacial envolvida na manipulação dos controles deslizantes, abrange a descoberta de que não é possível obter um polígono com mais de seis lados na interseção entre um plano e um cubo, ou obter um polígono de cinco lados proveniente da interseção entre um tetraedro e um plano. A atividade então visa proporcionar ao aluno a experiência de compreender esta relação e generalizar que não se pode obter uma figura de interseção com mais lados do que o número de faces do poliedro envolvido na exploração. Esta atividade, portanto, apresenta características voltadas para a exploração visual e a manipulação de objetos geométricos em busca da interseção desejada.

4.1.3 Design – Atividade de Prismas

A discussão a seguir configurou-se importante para a versão final da atividade envolvendo prismas. O ocorrido foi na reunião de número 6 e, portanto, após o curso de extensão ter acontecido:

Rita (R6): Eu achei que eles tiveram muita dificuldade de entender essa coisa de que ele tinha de construir o poliedro lá dentro então eu acho que, como sugestão minha, eu acho que como a construção não interfere tanto na investigação acho que essa seria uma atividade interessante já dar construída para eles só explorarem. Já dar construído e eles explorarem depois, porque a construção não... assim... tem dois pontos, o primeiro de ser pro professor que aí eu acho interessante ele aprender a construir, mas pensando só no aluno, dar pronto acho que já dificultaria essa coisa da linguagem na hora de explicar e ele exploraria do mesmo jeito. Isso que eu percebi dessa atividade.

Vinícius (R6): Aqui seria interessante de usar daqueles botões do GeoGebra de apagar... botão que apaga... aí você tem um e tem o poliedro por dentro, aí você utiliza um botão e oculta. Nem precisa ser no cantinho. Tem uns botõezinhos legaizinhos que você faz né, e aí você clica ele some e tal, aparece e aí você troca as cores e tudo mais. Talvez fosse interessante.

Ricardo (R6): Pelo que eu me lembro, um dos objetivos principais é a última parte né (Carla e eu concordamos). Justamente essa que vai completando aqui as questões de cada prisma aqui, certo? Arestas vértices e faces né. E aí completando essa tabela no processo de generalização... Então assim, eu acho que tem um aspecto que é de relevância a construção, eu acho que podem surgir questões interessantes, mas pelo menos no que foi realizado, diante da dificuldade né... a dificuldade foi tão grande em fazer este processo 1, 2 e 3 de construção, que acabou de certa forma, em traços, prejudicando. No que eu entendi foi isso né.

Rita (R6): porque assim, no final foi interessante o como eles raciocinaram para fazer o n assim. Eles foram contando assim, construindo, a generalização foi bem interessante. E na construção em si eles só faziam aqui no meio o polígono, eles tinham dificuldade de entender. Tinha que ir lá e mostrar, mas se bem que é essa coisa da interação né, faz parte.

Vinícius (R6): Mas eu achei a ideia interessante de já dar construído pelo foco da atividade.

Na fala acima, Rita demonstrou preocupação com o fato da construção trazer dificuldades desnecessárias, impedindo que os alunos cumprissem o objetivo da atividade. A pesquisadora ressaltou que entregar as construções feitas aos alunos não interferiria no objetivo da atividade, mas sim daria ênfase à exploração que era o real propósito da tarefa. Portanto, a intervenção da pesquisadora Rita novamente fez com que optássemos pelo layout apenas exploratório, fato este que demandou a construção prévia dos objetos a serem explorados.

Apesar de enfatizar sua opinião de como a atividade poderia se apresentar aos alunos, Rita demonstrou compreender a importância da construção para o professor. Em contrapartida, Ricardo ressaltou na fala seguinte que essa construção pode ser relevante ao aluno de algum ponto.

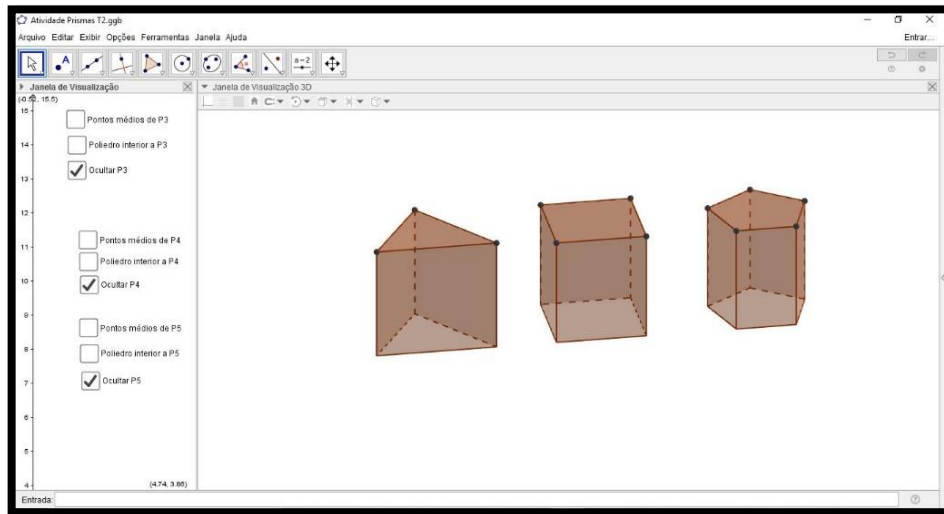
A atividade Prismas, em sua versão final, baseia-se na contagem de arestas, vértices e faces dos prismas e na intuição, seguida de verificação de um poliedro convexo interno formado pelo encontro dos pontos médios dos prismas. O objetivo da atividade é generalizar o número de vértices, arestas e faces do prisma, assim como o número de faces do poliedro interior, encontrando fórmulas que resultem tais valores. Rita explicou:

Rita (R6): Você tem um prisma de base triangular, quadrangular, e eles tinham que explorar quantas faces tinha o poliedro cujos vértices seriam os pontos médios [das arestas] destes prismas, então ele começaria fazendo a investigação no prisma triangular, no quadrangular e no pentagonal e depois fazer esta generalização para um de base n .

A atividade visa estimular os alunos à intuição nos itens que pediam uma previsão do poliedro interior. Já a generalização da fórmula dava margem aos alunos para formularem suas próprias formas de generalizar um raciocínio, seja observando os padrões numéricos das tabelas, seja realizando contas mentais, ou visualizando as figuras dispostas no *software*.

Conforme as discussões do grupo apontaram, esta atividade passou a acompanhar um arquivo a ser disponibilizado para exploração. Ao abrir o arquivo, o aluno encontra a seguinte interface (Figura 8):

Figura 8 - Interface do arquivo da atividade Prismas

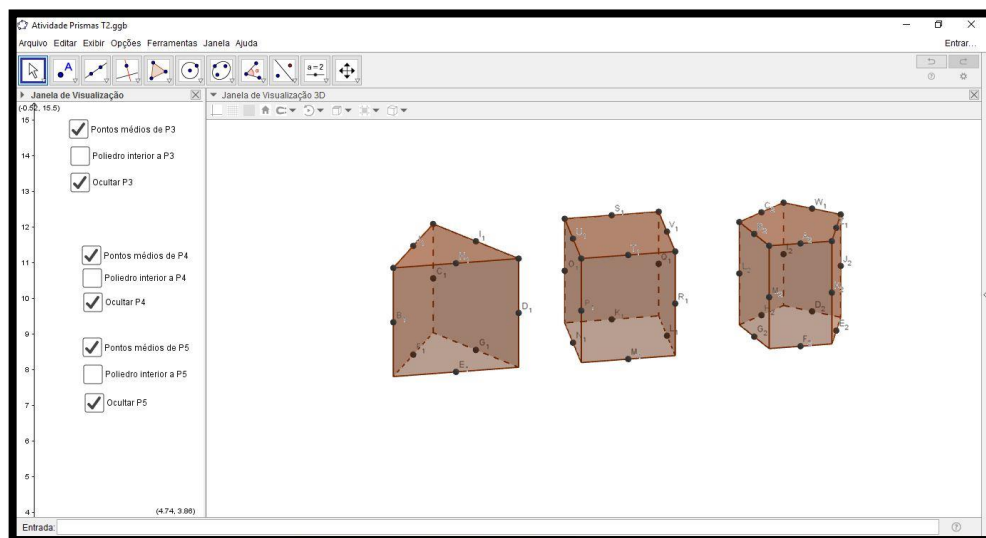


Fonte: Dados de Pesquisa

A janela da esquerda possui botões que têm a função de ocultar ou fazer aparecer os prismas, os pontos médios e os polígonos interiores. Esses botões dão aos alunos a possibilidade de explorarem o que era pedido nos itens. A oportunidade de girar a vista no GeoGebra possibilitava a contagem de vértices, arestas e faces de cada prisma. Como as figuras podem ser acionadas ou ocultadas simultaneamente, o aluno poderia explorar a imagem da forma que preferisse, deixando à vista os pontos médios, ou então deixando juntos o prisma e seu poliedro interior. São diferentes maneiras de exploração coordenadas pela preferência do aluno.

O acionamento dos botões que mostram os pontos médios dá ao discente a seguinte imagem (Figura 9):

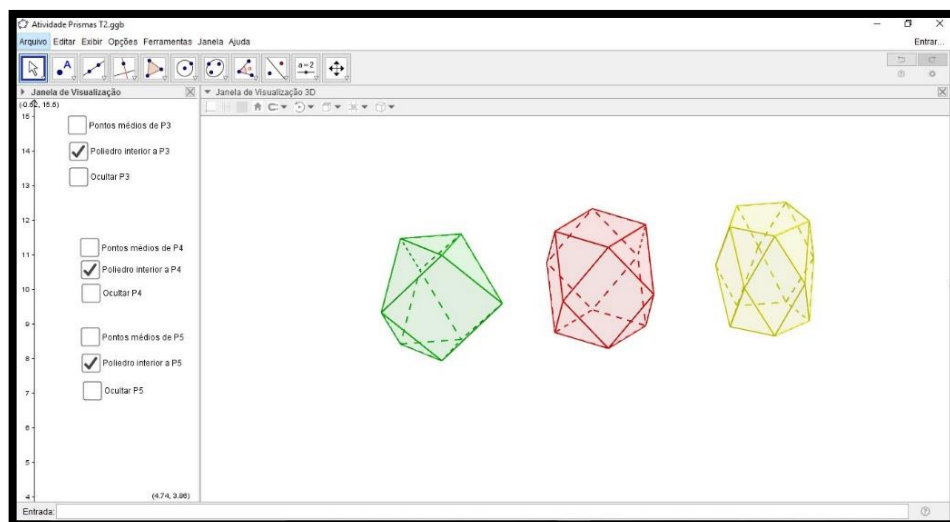
Figura 9 - Explorando os botões dos pontos médios



Fonte: Dados de pesquisa

E o acionamento dos poliedros interiores mostra as figuras como na imagem seguinte:

Figura 10 - Explorando poliedros interiores



Fonte: Dados de pesquisa

A atividade Prismas estabelece forte relação com a intuição de quem esteja a explorá-la. Seu quesito de investigação perpassa pelos momentos nos quais o aluno buscará suas estratégias de generalização. Embora não exposta no enunciado, o estudante pode socializar com os colegas os caminhos utilizados para encontrar as fórmulas que descrevem o número de faces do poliedro interior, por exemplo.

4.1.4 Investigação no corpo das atividades

Em consonância com Santos (2006), considero que as atividades que desenvolvemos são de natureza semiaberta, ou seja, a exploração e investigação são mantidas, mediante questionamentos e propostas de raciocínio e reflexão. Porém, ainda assim, alguns passos de construção e/ou indicação de exploração se fazem presentes e significativos nos anunciados.

O grupo chegou a concordar com as indagações de Ricardo sobre as construções terem sua importância, pois quando realizada pelos alunos, a construção poderia fazer com que emergissem aspectos de conhecimento da tecnologia, ou seja, aspectos operacionais poderiam ser concebidos nesta etapa. Questões ligadas à Geometria Euclidiana também podiam ser exploradas nas construções de nossas atividades, como pontos e semirretas no caso da atividade Prismas, ou então o postulado de que três pontos determinam um único plano na atividade de interseções. Em sua fala Ricardo demonstrou estar ciente deste potencial. Porém, neste

momento pensamos em não abordar este movimento da construção e potencializar a exploração dos objetivos das atividades.

Por fim, as discussões que levaram as três atividades às suas versões finais se consolidam como criações colaborativas, já que chegamos ao acordo de focar no objetivo das atividades (Prismas e Interseções), deixando as construções já prontas. Estes enunciados com inúmeros passos de construção se tornaram *applets*, que como deixam a entender os sujeitos, seriam mais interessantes do que explorar construções longas e não tão importantes naquele momento.

Já a atividade Construções não recebeu mudanças significativas do ponto de vista conceitual, este fato será explorado de forma mais detalhada na subseção 4.2. Porém, para este caso, a noção de atividade semiaberta se encaixa de forma ainda mais clara, visto os passos de construção são dados ao iniciar a tarefa. Ressalto que um *applet* nesta circunstância poderia não ser tão interessante, visto que o foco da atividade era explorar justamente o processo de construção dos poliedros.

Apoiado em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) destaco e exemplifico as seguintes características emergentes nas versões finais das tarefas:

- (a) Permitem vários caminhos na busca de soluções: a atividade Construções possibilita diferentes caminhos para a construção do cubo, enquanto a atividade Interseções proporciona a exploração aleatória dos controles deslizantes;
- (b) São qualitativamente diferentes de atividades baseadas no uso de papel e lápis: as três tarefas discutidas possuem caráter manipulativo, fato este que as tornam significativamente distintas de atividades estáticas em papel e lápis;
- (c) São exploratórias do ponto de vista educacional: Os designs desenvolvidos visam inserir o aluno em situações de exploração de *applets* ou de construção e manipulação.

Observando a figura a seguir, temos uma atividade apresentada por Ponte (2005) e caracterizada como uma tarefa de investigação.

Figura 11 - Exemplo de uma tarefa de investigação

Tarefa de investigação
1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontras alguma regularidade. 2. Vê se encontras regularidades nas tabuadas de outros números.

Fonte: Ponte (2005)

A atividade envolve a construção (não geométrica) da tábua dos 9 e uma observação. A investigação se caracteriza pela tentativa de encontrar regularidades. Em seguida, a tarefa se estende a encontrar regularidades em outras tábuas. Este exemplo não envolve tecnologia digital, porém engloba um momento de construção e outro de perguntas. Considero que nossas atividades seguiram caminho semelhante, proporcionando construção e questionamentos, porém com inúmeras particularidades que influenciaram o perfil de cada uma, como especificidades do conceito trabalhado, recursos do GeoGebra considerados e público alvo.

Para Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014)

Essas possibilidades emergentes com a realização da atividade oferecem caminhos propícios para processos como formação de conjecturas, realização de testes, refinamento de conjecturas, familiarização com notações, dentre outros. Assim, consideramos esse um exemplo no qual a busca por um design experimental na criação da atividade atribuiu a ela um caráter investigativo (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 55).

A investigação matemática e as caracterizações de tarefas abertas foram os tópicos que nortearam o olhar para a primeira subseção de análise. Porém, como afirmam Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), a investigação matemática e a experimentação-com-tecnologias possuem características em comum. Portanto, a subseção seguinte visa explorar o processo de elaboração, perpassando pelos momentos que foram significativos e ocasionaram em diferentes versões de cada atividade. Neste meio surgem aspectos voltados à experimentação, interligando recursos do GeoGebra e conceitos matemáticos em exploração.

4.2 Experimentação no processo de elaboração

Tendo sido expostos anteriormente alguns aspectos envolvendo enunciado de atividades e a investigação matemática, esta subseção tem como objetivo apresentar as discussões ocorridas a respeito das tarefas elaboradas, que evidenciaram a experimentação-com-tecnologias. São expostos momentos significativos referentes à forma com que as tarefas foram desenvolvidas em termos matemáticos e também tecnológicos, ou seja, como o software utilizado (GeoGebra) pode contribuir para a exploração dos conceitos matemáticos e como nós, pesquisadores sujeitos desta pesquisa, discutimos tais recursos em busca de proporcionar uma atividade rica em termos de exploração.

Cada atividade teve sua inspiração inicial, ou seja, cada pesquisador teve sua motivação em trazer uma tarefa para o grupo discutir. Seria este então o início do desenvolvimento da atividade. Ressalto que esta inspiração é um momento de reflexão individual, é o ponto de partida que cada pesquisador envolvido tomou para desenvolver e aprimorar uma atividade.

A atividade Interseções, apresentada ao grupo por mim, originou do meu trabalho de monografia de graduação (HONORATO, 2014), no qual implementei uma atividade que explorava as seções planas no cubo. Como desdobramento, sugeri ao grupo uma tarefa semelhante que envolvia o raciocínio a respeito dos polígonos de interseção gerados e suas relações com os poliedros explorados.

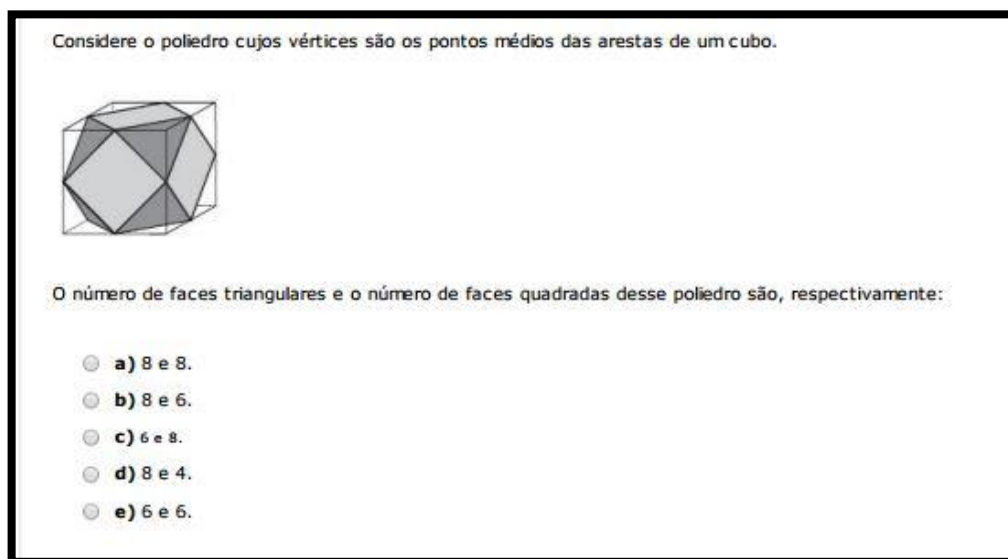
A atividade Construções Geométricas, também sugerida por mim, se origina da tentativa de construir poliedros por um processo semelhante àqueles utilizados para construir polígonos equiláteros, ou seja, como utilizar outras figuras espaciais como esferas, planos, retas e pontos na construção de poliedros. Esta tentativa se traduz na seguinte pergunta: como eu construo um cubo no GeoGebra, sem utilizar a ferramenta Cubo? Portanto, desenvolvi a primeira versão desta atividade para levá-la ao grupo.

Por fim, a atividade Prismas foi inicialmente desenvolvida por Rita. A própria pesquisadora descreveu seu *insight* para criá-la na fala seguinte:

Rita (R6): A minha foi um exercício de vestibular que pedia pra você calcular quantas faces teria o poliedro cujo os vértices eram pontos médios das arestas de um cubo.

Rita se referia ao vestibular da UNIFESP (Universidade Federal de São Paulo) realizado no ano 2005. A atividade que compunha o caderno de questões da prova de conhecimentos gerais pode ser vista na figura a seguir:

Figura 12 - Insight para a atividade Prismas



Fonte: Vestibular UNIFESP (2005)

A atividade anterior tinha como objetivo identificar o número de faces triangulares e quadradas do poliedro interior. Como mostra o quadro 1, o objetivo da atividade que desenvolvemos é semelhante, porém guarda suas particularidades.

Após este início individual de elaboração, as atividades seguiram para a discussão do grupo dos autores. A partir deste momento, as tarefas se tornaram de domínio coletivo, sendo submetida às observações de todos e, desta forma, se tornando algo de autoria de todo o grupo.

Esta seção de análise está caracterizada também pelo aprendizado por parte dos elaboradores, ou seja, o processo formativo dos pesquisadores envolvidos na elaboração das atividades. Concorro com Nunes (2011, p. 106), pois “[...] entendo que, nesta perspectiva (de elaboração de atividades pensadas com tecnologia), poderão surgir, [...], momentos desafiantes, os quais o professor de Matemática precisa superar”.

4.2.1 Experimentação – Atividade Construções

Em sua concepção inicial, ou primeira versão em anexo, a atividade Construções propõe o usufruto de diversas potencialidades do GeoGebra. Tal aspecto é explícito no item (1), o qual indica com pequenas imagens-ícones os recursos a serem utilizados. Há uma sinergia entre os recursos ou potencialidades do GeoGebra e os conceitos matemáticos-geométricos explorados na tarefa, ou seja, estes dois quesitos da atividade estão associados, um proporcionando a exploração do outro.

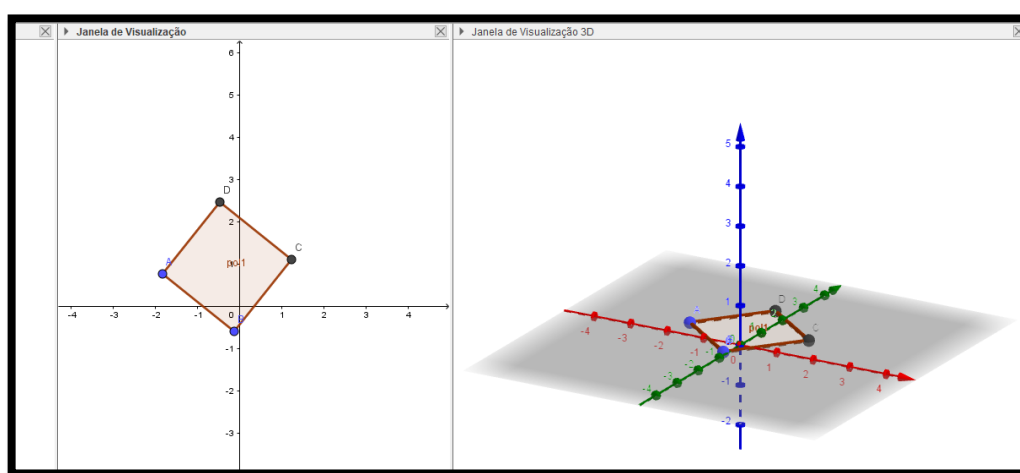
Em sua terceira versão, esta atividade foi apresentada ao GPIMEM e, ao passar pela avaliação de membros do grupo de pesquisa, o doutorando Jonson ressaltou que as informações estavam suficientes e claras para realizar as atividades, porém alguns comandos não funcionavam no software. Foi inferido pelo integrante que ao se ocultar parte da construção, os comandos funcionavam. Posteriormente descobri que dependendo do posicionamento da vista, o GeoGebra não aceita o comando “interseção de duas superfícies” e é necessário mudar a posição para conseguir realizar dada passagem da tarefa. A sugestão era que esta informação a respeito de ocultar alguns objetos fosse acrescentada ao enunciado da atividade.

Vanessa, estudante de doutorado e companheira de Jonson ao realizar a atividade, se atentou a uma questão de construção no GeoGebra em sua fala:

Vanessa (R5): a única coisa é que a gente primeiro tinha que fazer um polígono 2D e aí esse polígono que seria construído, ele seria a base do poliedro 3D. Só que a gente só percebeu isso porque o Vinícius falou. Porque a gente fez os dois primeiros e daí pra fazer o terceiro a gente “como é que vai fazer o cubo?”, daí o Vinícius “não, vocês não viram isso? Que tinha que fazer um quadrado que aí vai ser um...” Aaaah tá! Então talvez fazer (...) mais uma pra eu poder realmente verificar que só com duas a gente não conseguiu entender que o triângulo montava o tetraedro e o outro.

A fala da pesquisadora expressou primeiramente uma particularidade do GeoGebra. No software, quando abertas as janelas de visualização 2D e 3D simultaneamente todo desenho ou construção feita na janela de visualização 2D¹⁶ aparecerá também no plano da base da janela de visualização 3D, como mostra a figura a seguir:

Figura 13 - Janelas de Visualização do GeoGebra



Fonte: Elaboração do autor

¹⁶ No GeoGebra, a Janela de Visualização 2D aparece com o nome apenas de Janela de Visualização.

Portanto, para começar a atividade, é preciso que o polígono que dá início às construções seja construído na janela de visualização 2. Essa é uma particularidade do GeoGebra que mostra interligação entre suas janelas. Depois do relato de Vanessa, indiquei que procuraria saber como funcionava corretamente esta correlação entre as janelas do programa. Em outro momento descobri que o software possui três opções de janelas de visualização em seu menu exibir, são elas: janela de visualização, janela de visualização 2 e janela de visualização 3D. As janelas de visualização e de visualização 3D possuem a conexão observada por Vanessa, porém se for selecionada a opção para a janela de visualização 2, esta relação é quebrada.

A respeito da matemática envolvida, primeiramente, ao perguntar qual o poliedro gerado e pedir uma justificativa de resposta, o aluno poderia explorar suas características e poderia, por exemplo, reconhecer as esferas como lugar geométrico de equidistância que garantem que os lados do poliedro tenham o mesmo tamanho. Mas além de se certificar de que foi de fato gerado uma figura espacial regular, o aluno deveria também checar se todo o procedimento lhe proporciona uma construção geométrica.

Para iniciar esta discussão, a fala de Ricardo na reunião 2 demonstrou que o grupo seguiu atento a este fator: *mas tem a questão da prova do arrastar que às vezes tem que... ah... se não tiver familiaridade isso não é tão intuitivo, tem que explicar figura, construção... tá?* A atividade aborda então a prova do arrastar dentre ao sub-item (f) do item (1) mostrado a seguir:

f) Os softwares de Geometria dinâmica “permitem que construções geométricas possam ser arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos durante a realização da construção” (ZULATTO, 2003). Nesse sentido, um quadrado, construído por suas propriedades geométricas num software com esta característica, não deixará de ser um quadrado quando for arrastado por um de seus vértices. Com base nessa ideia, pode-se dizer que os procedimentos realizados nesta atividade caracterizam uma construção geométrica? Justifique?

Tal abordagem visa apresentar ao aluno a prova do arrastar segundo as palavras de Zullato (2003) e proporcionar a exploração deste conceito de forma prática. O discente poderia utilizar o arrastar para certificar que seu feito é, de fato, uma construção. Esta potencialidade da atividade está em consonância com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014, p. 52) quando afirmam que atividades experimentais promovem o “convencimento sobre a veracidade das conjecturas”. Portanto, a atividade, em seu enunciado, apresentava a prova do arrastar ao aluno, no caso cursista, atendendo ao requisito de Ricardo, que considerava importante esta

explicação, partindo do pressuposto de que se um aluno não possui familiaridade com a Geometria Dinâmica ele pode não conhecer suas particularidades, como a prova do arrastar.

A análise do processo de elaboração desta atividade em si evidenciou alguns aspectos importantes do GeoGebra com relação a Geometria Espacial. O primeiro deles é a conexão entre as janelas de visualização 2D e 3D observada por Vanessa. Outro aspecto surge quando o grupo considera a inserção da prova do arrastar e assim a tarefa se configura como uma abordagem tridimensional ao tema, diferente da literatura estudada, na qual a prova do arrastar é exemplificada em figuras 2D (ALVES; SOARES (2003); BAIRRAL; BARREIRA, 2017; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014; ZULATTO, 2002, 2007).

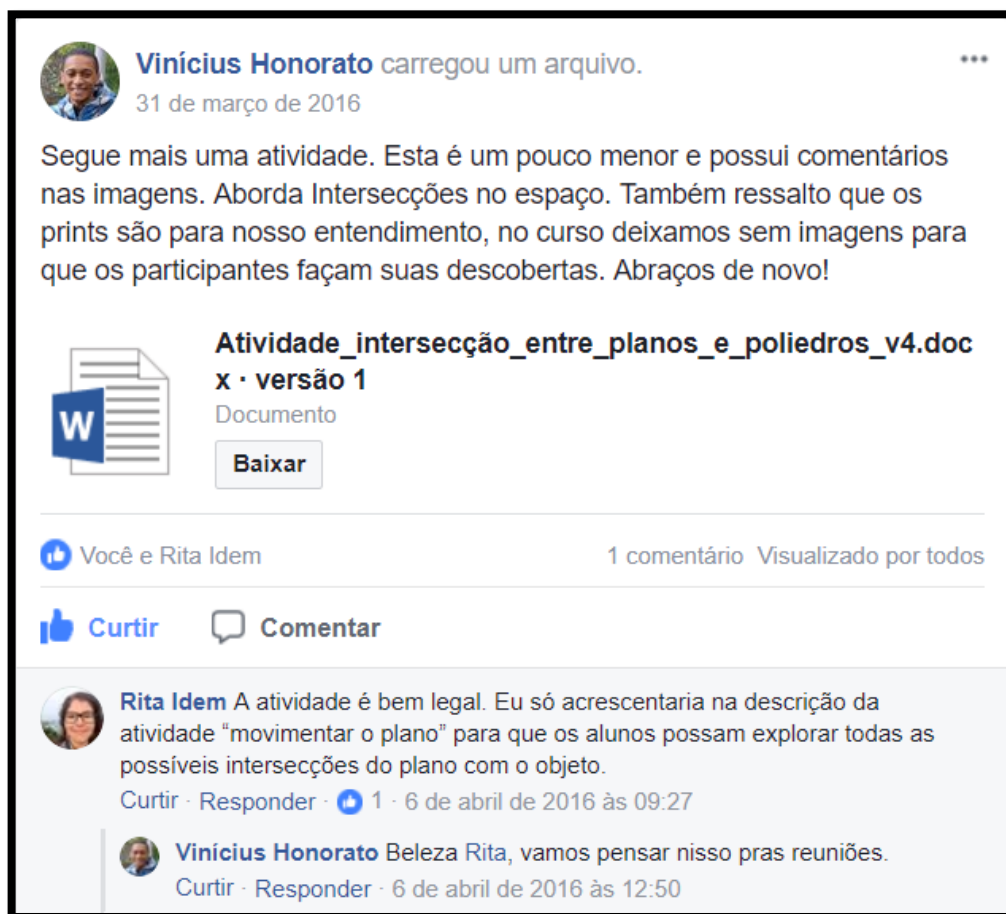
A experimentação-com-tecnologias fica evidente na criação de uma atividade aberta, porém controlada. A preocupação em encaminhar a construção e as falas de Ricardo em inserir passos deram a forma controlada do enunciado, porém os questionamentos finais e a possibilidade do aluno desenvolver a construção do cubo de maneira livre expõem o caráter aberto da tarefa, bem como a formulação das conjecturas possíveis pelo discente.

Esta atividade foi pouco modificada colaborativamente, porém sofreu alterações importantes, como a linguagem proposta por Ricardo. Descobrimos no GPIMEM um grau de aceitação importante, já que os membros do grupo que a realizaram discutiram aspectos importantes como construções no espaço, conexões entre janelas, possíveis falhas do software, porém não sinalizaram mudanças possíveis ou necessárias no enunciado. Esta aceitação surge como principal motivo para as baixas mudanças.

4.2.2 Experimentação – Atividade Interseções

Um dos momentos de desafio, citado por Nunes (2011), pode ser expressado no desenvolvimento da atividade Interseções. Sobre a primeira versão desta atividade, Rita apresentou seu comentário via Facebook, onde se preocupava com a indução à movimentação do plano:

Figura 14 - Primeira postagem sobre a atividade Interseções



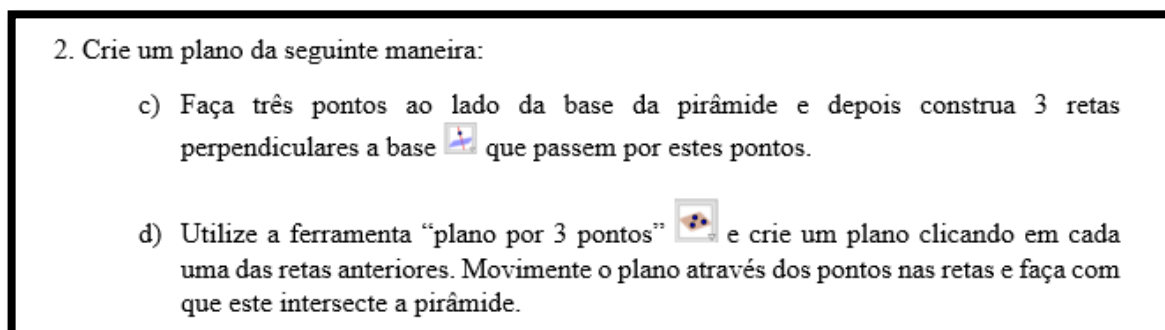
Fonte: Dados de pesquisa

Em seu comentário, Rita buscou sinalizar a importância de induzir a movimentação do plano. Esta discussão foi levada para a segunda reunião na qual Ricardo se colocou:

Ricardo (R2): Eu acho que tá legal. Eu acho que só colocar um pouco mais dos passos assim, né. Qual ferramenta utilizar, tudo. E especificar bem a pergunta né. O que que você observa? Eu acho que pode deixar assim por enquanto e esperar um pouco o pessoal do GPIMEM que eu acho que eles vão contribuir bastante.

Ricardo ressaltou na fala anterior a importância de conhecer as opiniões de nosso grupo de pesquisa e reforçou novamente a questão de indicar alguns passos no desenvolvimento da tarefa. Nas quatro primeiras versões, a atividade Interseções não continha indicações de como construir o plano. Portanto, no design da quinta versão surgiu a primeira forma com que indicávamos a construção do plano. Veja a seguir:

Figura 15 - Item 2 (Construção do plano)



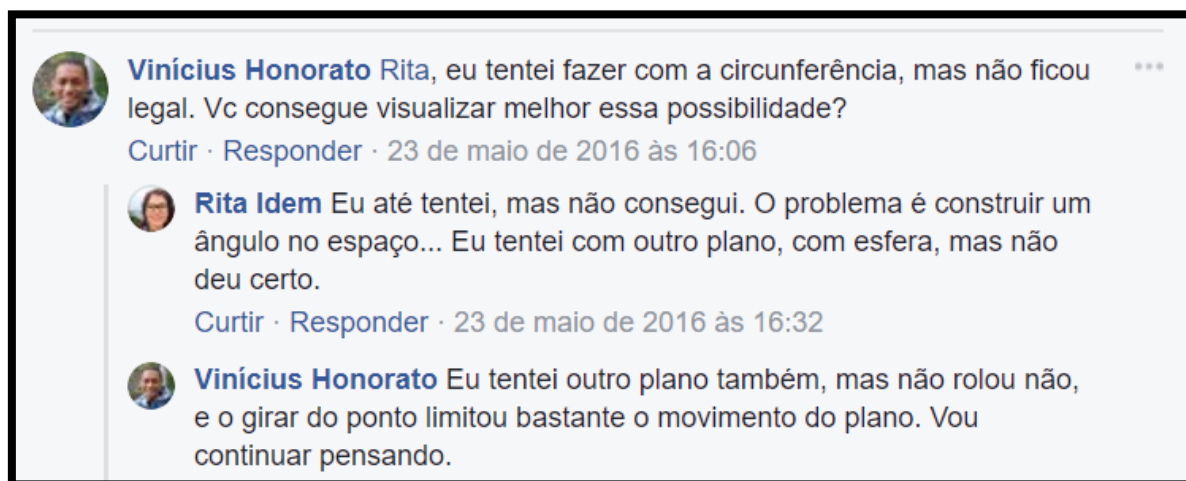
Fonte: Dados de pesquisa

Esta discussão acabou por retornar ao Facebook em uma postagem que será exposta posteriormente. Este, no entanto, é mais um momento de construção colaborativa de enunciado, no qual um membro interfere na produção do outro e ambos buscam, no decorrer das discussões, encontrar uma forma de enriquecer a atividade. Essa busca caracteriza-se por um constante processo de aprimoramento conceitual.

A construção gerada a partir do enunciado da Figura 15, desenvolvida através de três retas perpendiculares à base do poliedro, permite que o plano seja movimentado por intermédio dos pontos de cada reta. Porém, para a sexta versão, as retas dão lugar aos controles deslizantes, construídos através de três coordenadas cartesianas. Este fator permite que o recurso *animar* seja ativado em cada ponto, fazendo que o plano se movimente automaticamente, criando uma nova possibilidade de interação. “O uso do controle deslizante traz intensidade dinâmica à construção e ao design, envolvendo uma visualização mais nítida e pertinente” (BORBA. SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 62) no sentido de que a variação do controle deslizante projeta representações variadas da figura de interseção. Este recurso dá ênfase à exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos.

A transição entre usar as retas e os controles deslizantes não aconteceu diretamente. Rita sugeriu que tentássemos fazer o plano se mover em função de uma circunferência. Depois de alguns testes, discutimos via Facebook:

Figura 16 - Tentativa de construção do plano



Fonte: Dados de pesquisa

Naquele momento, Rita e eu não concluímos a ideia, portanto pensei em utilizar controles deslizantes e abordar as funções de animação do software.

Além das três formas de construção, uma outra maneira pode ser mantida em potencial pelo professor. Aquela na qual os três pontos que dão origem ao plano são marcados em três diferentes arestas do poliedro, como explorado por Bairral, Settimy e Honorato (2013).

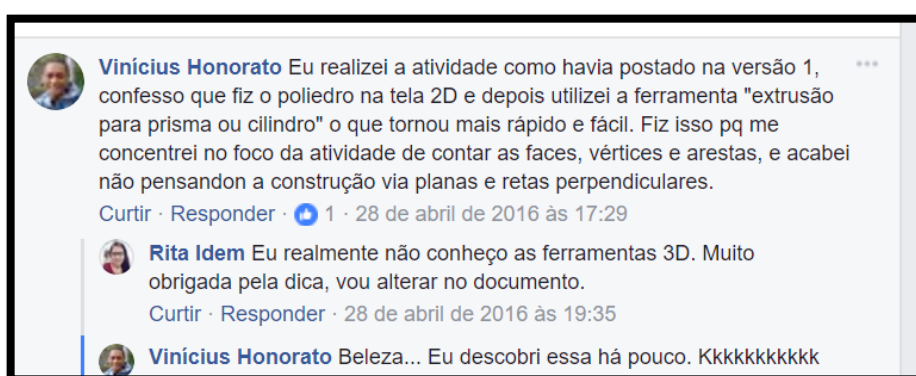
As formas de construção do plano levantadas, exceto aquela que envolve a circunferência, envolvem um postulado de Geometria Espacial possível de ser explorado nesta questão: três pontos não colineares determinam um único plano. Apesar de implícita, o professor pode estabelecer com os alunos uma discussão acerca do postulado, fazendo-os perceber a necessidade de se obter três pontos, não contidos em uma mesma reta, para que o GeoGebra gere o plano desejado.

Bairral, Settimy e Honorato (2013) apresentam em seus resultados que os estudantes, apesar de conhecerem tal postulado, não conseguiram aplicá-lo na prática. A atividade Interseções propõe a exploração desse tópico da Geometria Espacial pelo fato de que o plano altera sua posição de acordo com o movimento dos pontos, assim ele depende apenas destes três objetos espaciais para se materializar em uma das posições. Este tópico pode ser colocado para discussão pelo professor. Ponte (2005) afirma que “Os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento” (PONTE, 2005, p. 16).

4.2.3 Experimentação – Atividade Prismas

A primeira versão da atividade Prismas proposta por Rita consistia em construir os prismas, na sequência o aluno deveria construir o poliedro interior por meio dos pontos médios de cada aresta, e por fim explorá-lo. Porém, para obter o prisma, a tarefa induzia o aluno a realizar uma construção semelhante ao que é proposto na atividade Construções. Nesta oportunidade, percebi que havia um caminho mais prático de construção e comentei, via Facebook, sobre uma ferramenta do GeoGebra que havia acabado de descobrir:

Figura 17 - Interação do Facebook - atividade Prismas



Fonte: Dados de pesquisa

A ferramenta citada no comentário acima funciona dando volume a figuras bidimensionais. Com ela é possível clicar sobre um polígono (que será a base) e “puxá-lo” para cima, criando um prisma durante o movimento. Caso aconteça apenas o clique, sem o ato de mover o cursor, o GeoGebra imediatamente mostra uma janela onde pode ser inserida a altura desejada para o prisma. A ferramenta de extrusão não cria prismas oblíquos, apenas dá volume em uma orientação perpendicular ao plano da base.

Na transição entre a segunda e a terceira versão, discutimos o seguinte:

Rita (R2): Eu só vou mudar a construção, porque eu não sabia de uma ferramenta que constrói o prisma direto e eu fiz a construção... construção com as retas, e dá bastante trabalho. Aí eu vou mudar isto que o Vinícius falou ontem e aí vai ficar bem mais simples de construir tudo. Mas no geral as perguntas vão ser as mesmas.

Ricardo (R2): Essa mudança é interessante né (Rita: fica bem mais rápido de construir). Até poderia mencionar “ôh gente, tem um outro jeito é um jeito mais complexo, mas que você constrói o prisma. Mas tem essa ferramenta que é um atalho aqui”.

A retirada da primeira forma de construção proposta por Rita foi a principal mudança entre a primeira e a segunda versão da atividade. Rita acabou por retirar aquele tipo de construção, mas ainda não sinalizou a utilização da ferramenta de extrusão na segunda versão

da atividade. As versões 2 e 3 da atividade estão repletas de imagens, porém não era ainda o layout que desejávamos apresentar aos alunos do curso. As imagens permeavam algumas versões das atividades apenas para que nós, elaboradores, possuíssemos ideia das sequências de construção.

Atrelados aos recursos utilizados, o desenvolver de conjecturas é um fator importante quando abordamos o quesito experimentação. Neste sentido a atividade Prismas possuía como principais características a possibilidade de visualizar as figuras espaciais de diferentes vistas, além da generalização da tabela como ressaltou Ricardo:

Ricardo (R6): Pelo que eu me lembro, um dos objetivos principais é a última parte né (Carla e Vinícius concordam). Justamente essa que vai completando aqui as questões de cada prisma aqui, certo? Arestas vértices e faces né. E aí completando essa tabela no processo de generalização.

O processo de generalização engloba, em si, uma conexão com a formação de conjecturas na questão. Por meio da manipulação e contagem dos dados de cada prisma, a generalização é proposta mediante a observação da tabela completada. Para Alves e Soares (2003)

As potencialidades dos softwares de geometria dinâmica, (...), são algumas de suas mais importantes características que ajudam a enriquecer o processo de ensino-aprendizagem da geometria, além de valorizar o conhecimento matemático e a sua construção, através das ações de experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar (ALVES; SOARES, 2003, p. 7).

Esta atividade, executada no software, pode ser considerada qualitativamente diferente de uma abordagem do livro didático, por exemplo. O livro, possivelmente, faria uma abordagem estática, com figuras que representariam algumas vistas possíveis dos prismas. Imagens que representassem os pontos médios de cada aresta também poderiam surgir. Ainda assim, o livro não permitiria a movimentação. Este tipo de exploração também pode englobar uma rica experiência ao aluno em termos de intuição e imaginação. Porém, o software proporciona o feedback imediato ao estudante, que pode explorar a contagem movimentando o poliedro. Desta forma, a experimentação-com-tecnologia se caracteriza pelo caráter dinâmico e manipulativo (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). O aluno tem a possibilidade de explorar as vistas em movimento, e não em figuras separadas, o que torna a exploração diferente nas duas situações.

4.2.4 Experimentação e Matemática

Esta seção 4.2 expôs alguns momentos pelos quais o processo de elaboração perpassou, evidenciando o aprimoramento qualitativo dos enunciados. O objetivo foi mostrar como cada atividade evoluiu conceitualmente de acordo com as discussões e identificar propostas ligadas à experimentação-com-tecnologias, focando na interação Geometria Espacial-GeoGebra, já que os conceitos desenvolvidos nas atividades eram explorados e construídos com a intervenção tecnológica (BORBA; VILLARREAL, 2005). Neste aspecto, a consideração de certos recursos se tornou determinante para estabelecer relações matemáticas emergentes em cada tarefa.

Puderam ser evidenciados aspectos como a maneira com que o GeoGebra nos permitiu induzir a construção do plano, a forma com que poderia ser abordada a prova do arrastar e como o software interligava suas janelas na construção de poliedros, além da possibilidade de criar botões e utilizar a ferramenta de extrusão. Nestes exemplos, a tecnologia pensada no processo de elaboração é responsável direta pela exploração, atuando no coletivo que explora a atividade. Logo, as potencialidades de GeoGebra foram diretrizes para que as atividades tomassem um certo enunciado, que na concepção colaborativa do grupo era o adequado para a tarefa. Foram colocados alguns diálogos dos sujeitos envolvidos, tanto do grupo de autores quando do grupo de pesquisa GPIMEM. Fica evidente o caráter colaborativo do processo. A construção do material se configurou em um espaço no qual as ideias iniciais eram colocadas e os demais participantes expunham suas percepções na tentativa de tornar um enunciado mais claro e uma exploração mais rica. Desta forma, todo trabalho de elaboração culminou no que chamo de versão final de cada atividade.

Portanto, o GeoGebra e seus recursos ou potencialidades permitiram um aprimoramento qualitativo no quesito exploração da atividade ao longo de sua elaboração, pois a atividade passa a oferecer uma forma de interação mais rica em termos de experimentação, proporcionada principalmente pelo recurso “animar”.

Portanto esta subseção fica caracterizada principalmente pela interlocução entre GeoGebra e Matemática. Foram vistos alguns exemplos de como o grupo considerou algumas ferramentas e recursos do software a fim de conceber atividades experimentais que fossem relevantes ao aprendizado dos conceitos trabalhados.

4.3 Visualização

Inicialmente, não tínhamos a intenção de desenvolver atividades voltadas diretamente à visualização. Porém, esta característica surge dentro do estudo da Geometria Espacial, por este motivo, a visualização se tornou uma categoria de análise. Arcavi (2003) utiliza a frase “nós não sabemos o que vemos, nós vemos o que sabemos”, atribuída ao autor e estadista alemão Johann Wolfgang von Goethe, para expressar que os estudantes nem sempre verão objetos matemáticos da mesma forma que seus professores. O autor afirma “*Nós vemos o que sabemos* aplica-se às muitas situações nas quais os estudantes não necessariamente veem o que nós como professores ou pesquisadores vemos” (ARCAVI, 2003, p. 230)¹⁷.

Ao desenvolvermos as atividades referidas, alguns aspectos surgidos em meio às conversas e também características das atividades acabaram por estabelecer uma conexão com aspectos interessantes à visualização. Assuntos como intuição, diferentes janelas do GeoGebra sendo utilizada ao mesmo tempo, variação do controle deslizante em função do plano e ainda as demonstrações foram tópicos que influenciaram a construção desta categoria.

4.3.1 Visualização – Atividade Construções

A atividade Construções aborda a visualização ao estabelecer relações matemáticas entre os objetos geométricos utilizados. Como são construídos poliedros regulares, as arestas que surgem estão relacionadas aos raios das esferas utilizadas. Esta é uma possibilidade de argumentação para o questionamento que envolve como garantir a igualdade entre o tamanho das arestas.

Ao realizar os passos do item 1 da atividade, o aluno constrói um tetraedro regular e é questionado sobre os elementos que garantem que seu feito é de fato uma construção. Nesta passagem, a atividade busca fazer com que o estudante perceba que certos procedimentos ao desenvolver um objeto matemático em um software vão defini-lo como desenho ou como construção geométrica. O que está em jogo é o fato de que a construção, matematicamente correta, é delineada por passos que garantem a veracidade do feito. Este quesito aborda um aspecto cognitivo no qual o discente estabelece uma relação das imagens visuais feitas para formalizar o conceito de construção geométrica espacial. Arcavi (2003) argumenta que existe

¹⁷ “We see what we know” applies to many situations in which students do not necessarily see what we as teachers or researchers do (ARCAVI, 2003, p. 230).

uma dificuldade cognitiva neste momento, no qual o aluno precisa estabelecer uma relação flexível e competente entre a representação visual e representação analítica.

Esta atividade engloba, então, dois procedimentos centrais a serem realizados no software. São eles: construir e arrastar. De acordo com Zulatto (2007)

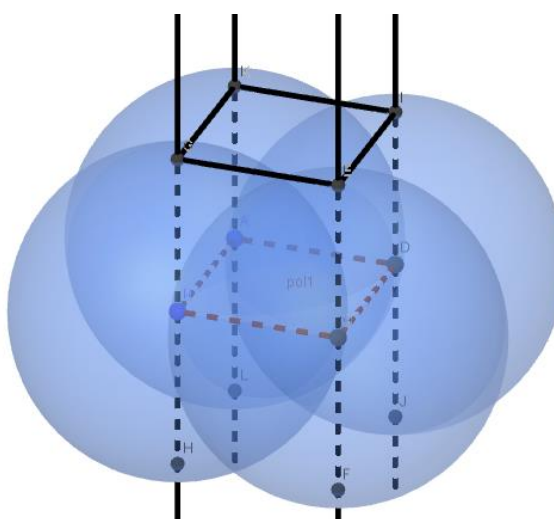
[...] construir e arrastar as figuras permite identificar as propriedades geométricas descobertas. Além disso, quando conteúdos matemáticos são trabalhados com softwares, os alunos têm mais facilidade de observar as figuras, suas propriedades e invariantes (ZULATTO, 2007, p. 79).

Zulatto (2007, op. cit.) aponta que “[...] o computador é usado para testar conjecturas, para calcular e para decidir questões que têm informações visuais como ponto de partida”. As três atividades aqui expostas possuem as características proposta pela autora. A atividade Prismas parte de imagens mentais elaboradas a partir da intuição do aluno. A tarefa Interseções se inicia com a observação das seções planas. Porém, a atividade Construções não só se inicia com aspectos visuais, mas é composta inteiramente por uma interação visual desde os primeiros passos até o último. Diferente das outras duas, esta tarefa não culmina em uma generalização algébrica ou no estabelecer de uma relação. É uma tarefa de construção visual que culmina na prova do arrastar, na qual o discente faz a descoberta se seus passos realmente resultam no proposto.

De forma a ilustrar o caráter visual desta atividade, exponho a seguir algumas formas de construção do cubo, solicitado no item 3:

Construir quatro esferas de raio igual a aresta do quadrado da base, com segmentos de reta perpendiculares ao plano da base e que passem pelos vértices deste mesmo quadrado (Figura 18).

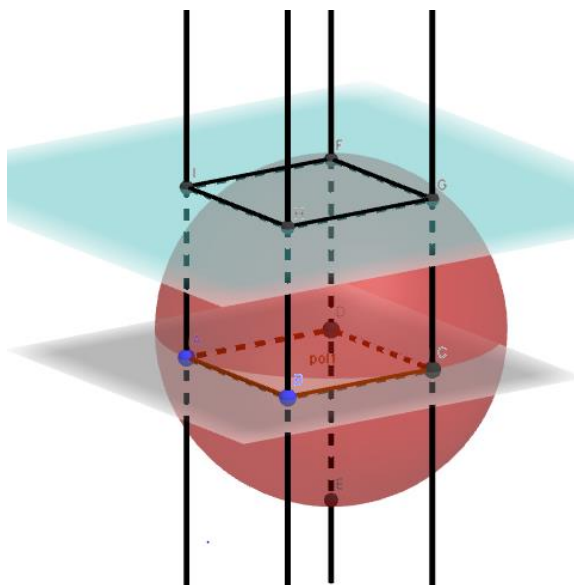
Figura 18 - Cubo construído por quatro esferas



Fonte: Elaboração do autor

Outra vertente de construção é utilizar apenas uma esfera, quatro retas perpendiculares e um plano paralelo a base, como demonstrado na Figura 19:

Figura 19 - Cubo construído por uma esfera e um plano



Fonte: Elaboração do autor

As imagens anteriores são um exemplo do potencial visual desta atividade. Objetos matemáticos estão em constante interação e podem ser visualizados ao mesmo tempo. Retas, esferas, planos, pontos e consequentemente o cubo são explorados em uma mesma atividade e estão dispostos à observação e movimentação do estudante. Portanto, a atividade entrelaça dois pontos importantes, o visual e o dinâmico, que são proporcionados mediante a capacidade tecnológica. Neste sentido a tecnologia apresenta meios visuais para melhor ver ideias e conceitos matemáticos (ARCAVI, 2003).

4.3.2 Visualização – Atividade Interseções

A atividade Interseções apresenta momentos propícios a desenvolver a visualização no que tange a manipulação de imagens de interseção via controles deslizantes. As imagens mentais (BORBA; VILLARREAL, 2005, CIFUENTES, 2005) podem ser impulsionadas de forma que o aluno busque interseções com um número maior de lados. A exploração dos controles pode ser condicionada previamente por um pensamento com a seguinte natureza: “naquela posição eu devo encontrar a interseção que preciso”. Este tipo de raciocínio evidencia que o aluno está a formar imagens em sua mente, manipulando objetos geométricos na busca de responder aos questionamentos.

Neste momento, é importante destacar o caráter subjetivo do processo de elaboração de atividades. A todo momento, nossas reflexões enquanto elaboradores eram caracterizadas por suposições a respeito do potencial que um certo design tem de estimular o aluno à descoberta matemática e o desenvolvimento de processos como o de visualizar.

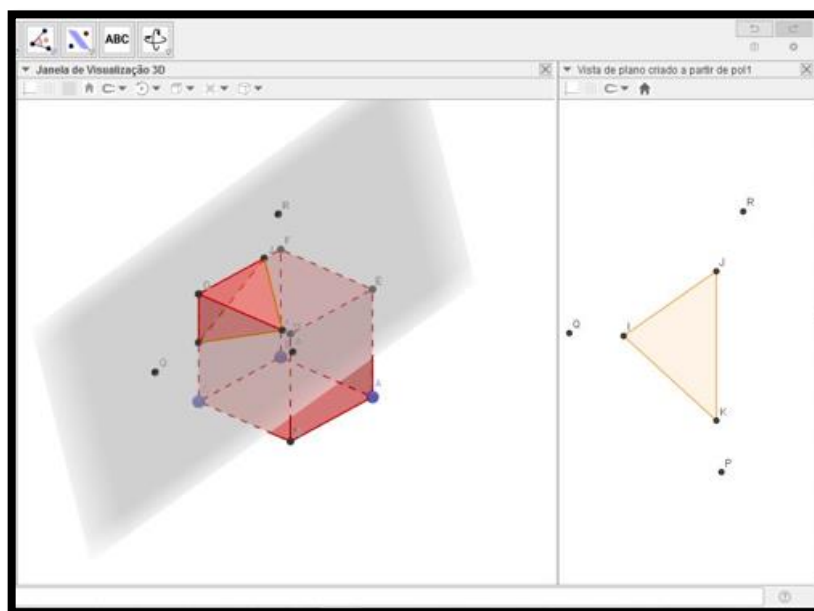
Lemos e Bairral (2010) sublinham que “[...] essa capacidade [de visualizar] envolve muitos aspectos, tais como, interpretar e fazer desenhos, formar imagens mentais e visualizar movimentos e mudanças de formas” (LEMOS; BAIRRAL, 2010, p. 75). Visto isso, a atividade referida anteriormente visa impulsionar o processo de visualização no que diz respeito a visualizar movimentos, com o deslocamento do plano. Também pode ser abordada a mudança de diferentes formas através da figura de interseção, que muda suas características conforme a variação da posição do plano.

Ainda sobre a atividade Interseções, a representação em diferentes janelas da seção obtida através da posição do plano proporciona ao aluno diferentes alternativas de observar o explorado. Borba e Villarreal (2005) defendem, que o papel da mídia [tecnologia digital] no processo de visualização vai além do simples ato de mostrar uma imagem. Neste sentido, a função “vista 2D de...” faz surgir mais uma tela de observação, sobre a qual o aluno é convidado a debruçar seus pensamentos e buscar associar a nova imagem com a da tela anterior. O estudante pode buscar compreender como a posição do plano na janela de visualização 3D influencia na figura que surge na janela “Vista de plano criada a partir de pol1” da figura de interseção. Sobre esta atividade Ricardo comentou:

Ricardo (R6): Tem algo aqui que é: me parece uma atividade complexa né. E tem um modo de coordenar representação que é como se fosse... porque geralmente a gente trabalha aqui com uma janela só, tudo bem? Faz aqui, aí compara “óh, tô arrastando, tá mudando algebricamente e tá mudando a figura no visual aqui” e a gente vai coordenando isso. Aqui tem uma complexidade maior de visualização que são duas janelas, então você está coordenando visualizações.

Ricardo argumentou que existe uma complexidade ao trabalhar com duas janelas de visualização (Figura 20), já que em sua fala o pesquisador considerou que trabalhar em uma janela de visualização geométrica e outra de visualização algébrica seria o “normal”, a exemplo do ensino de funções com tecnologias (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, BORBA, VILLARREAL, 2005). Apesar da complexidade levantada, esta exploração possibilita ao aprendiz uma nova perspectiva da figura explorada e desta maneira permitir uma nova forma de observar a interseção. Portanto, trata-se de um recurso que visa auxiliar a interação do discente.

Figura 20 - Diferentes vistas da figura de interseção



Fonte: Dados de pesquisa

Os aspectos colocados anteriormente condicionam o caráter visual da atividade. Portanto, as imagens mentais geradas, as tentativas e erros coordenados por testes e manipulações visuais, assim como a especificidade do GeoGebra em proporcionar diferentes janelas caracterizam uma atividade de forte apelo à visualização e interpretação de imagens.

Durante as discussões colaborativas do grupo dos autores junto ao GPIMEM, a pesquisadora Ana Paula se atentou à altura utilizada na construção dos objetos espaciais e também nos controles deslizantes que coordenavam o plano:

Ana Paula (R5): Aí tem mais uma questão, vocês pediram para colocar no controle deslizante até quatro. Aí a Luana viu e falou “então na hora de fazer a altura, a altura não pode passar de 4”. Até 4 o polígono vai ser a interseção paralelo com a base, mas se passar de 4 você pode ter outros, então a intersecção no primeiro momento tem quatro lados, mas de repente se for essa (sinal com as mãos interpretando um plano inclinado aproximadamente a 45°) vai ter três! Se essa for a interseção de vocês, essa medida de 0 a 4 tem que ser outra. A altura precisa ser outra para um prisma, diferente de 4 talvez.

A fala de Ana Paula fica materializada na figura seguinte:

pirâmide se tornou a segunda opção de objeto a ser explorado e, nesta configuração, a atividade seguiu para ser implementada no curso.

Esta modificação de enunciado decorreu de mais algumas observações colocadas por Ana Paula. A pesquisadora apontou uma ruptura no encaminhamento de ideias no design da sexta versão desta atividade.

Ana Paula (R5): Do 4 para o 5, no primeiro momento, a gente acha que é um salto. De repente o 5 seria uma outra atividade. Mas também eu ainda tenho dúvida em relação a isso, porque talvez, dependendo da maneira que vocês encaminham o exercício quatro, o cinco fica mais coerente.

Ana Paula se refere a versão 6¹⁸ da atividade em questão. Nos itens em questão, encontravam-se da seguinte forma:

-
- 5) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado pela interseção entre o poliedro e plano em cada situação? Procure generalizar seu pensamento. Se achar necessário faça mais interseções com poliedros de sua escolha.
 - 6) É possível obter triângulos regulares, quadrados, retângulos e pentágonos regulares a partir da interseção de planos com cubos? Como? Justifique.
-

O item 5 estabelece a relação matemática entre as faces do poliedro e o número de lados das figuras de interseção. Ana Paula chega a mencionar “*é ali que tá a matemática*”. Portanto, este é o momento de o aluno buscar compreender que o número de lados do polígono de interseção nunca será maior do que o número de faces do poliedro explorado. Porém, ela destaca que o item 6 parece desconexo em relação ao anterior, ou que parece até mesmo uma outra atividade.

4.3.3 Visualização – Atividade Prismas

A atividade de prismas aborda a intuição dos alunos a cada item explorado. “[...] Na Matemática, do ponto de vista racional, dá-se pouca ênfase à intuição matemática e aos processos de pensamentos ligados a ela como a visualização” (CIFUENTES, 2005, p. 56). O processo de visualização é posto pelo autor como algo presente no início do processo de

¹⁸ A atividade foi realizada na ocasião com um erro de digitação. Portanto Ana Paula está se referindo aos itens 5 e 6 da versão contida nos anexos deste trabalho.

abstração. Assim, o pensamento visual se inicia em uma intuição que direciona o raciocínio visando resolver um problema matemático e aprender/desenvolver/aplicar um conceito estudado. Na atividade Prismas, o item (b) exposto na figura 22 induz o aluno a prever, inicialmente, sobre o poliedro gerado no interior dos prismas. A indagação é proposital e tem o intuito de proporcionar o desenvolvimento do processo de visualização de vértices, arestas e faces.

Figura 22 - Item b, parte 1 da atividade Prismas

b) Agora faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma triangular?

Fonte: Dados de pesquisa

Sobre a referida atividade, destaco a fala de Ricardo:

Ricardo (R2): Essa aqui acho que tá bem legal também, né. E essa envolve um processo bem legal, (...) que é a atividade 5 da tabela. Que tem que achar o padrão daí, né. Então eu acho que este é um dos grandes aspectos de trazer conjecturas, tentar generalizar e assim por diante. Eu acho que essa está bem legal.

No que tange a formulação, testes de conjecturas e justificativa de raciocínio em conexão com o processo de visualização, a fala de Ricardo corrobora com Lemos e Bairral (2010, p. 75) que argumentam

[...] uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos só se verifica quando o aluno estabelece diferentes conexões e desenvolve pontos de vista e processos (comunicativos e representativos) variados sobre o objeto de estudo. Se os estudantes estão explorando, por exemplo, um problema de Geometria, poderão desenvolver formas diversas de representação, de fazer conjecturas e justificar processos de raciocínio. Também poderão trabalhar simultaneamente com números, calcular e relacionar áreas e volumes, estudar proporções ou manipular expressões algébricas. Em todos esses momentos, a visualização assume papel importante (LEMOS; BAIRRAL, 2010, p. 75).

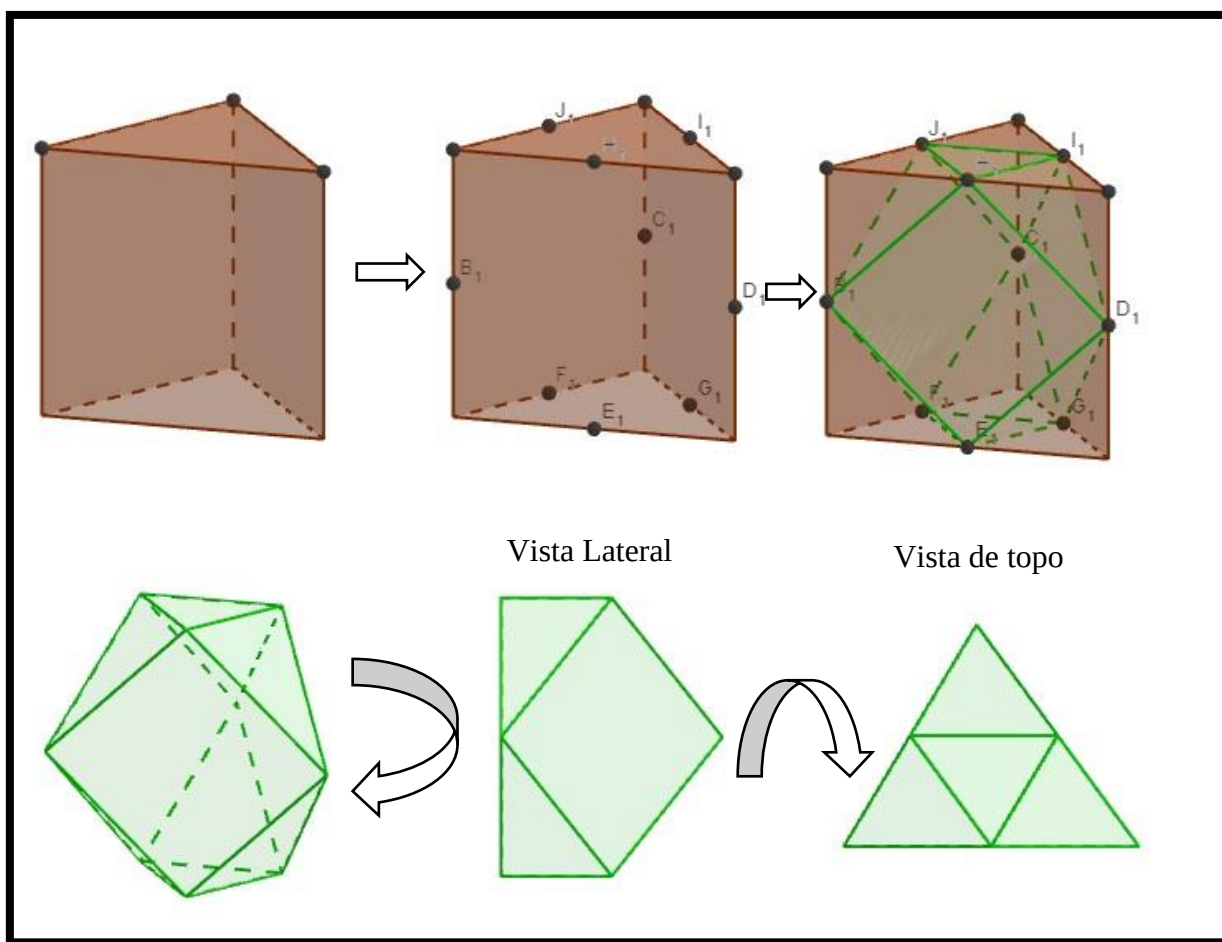
A atividade Primas possui potencial em proporcionar o trabalho simultâneo envolvendo visualização geométrica e o raciocínio algébrico no que tange a contagem e generalização trabalhada. Ressalto que a contagem e generalização podem ser condicionadas de acordo com as associações criadas mentalmente pelo aluno ou ainda pelas imagens dinâmicas (PRESMEG, 1986 *apud* BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014), que seriam as imagens em movimento provindas da exploração com a tecnologia digital.

O caráter visual desta atividade é primeiramente ligado à intuição, quando o aluno se apodera de imagens mentais, um momento individualizado, no qual cada um recorre a seus

requisitos desenvolvidos durante sua vivência. Arcavi (2003) defende que existe uma dificuldade sociológica em visualizar objetos, em decorrência do *background* cultural do aluno. Cada sala de aula está repleta de alunos de diferentes vivências e, conseqüentemente, alguns possuem mais experiências visuais do que outros. Desta maneira, uma questão como a proposta na atividade Prismas pode ser caracterizada como fácil, mediana ou difícil, dependendo do *background* que o aluno possui.

Na sequência, quando a exploração acontece no GeoGebra, os recursos do software permitiram a construção dos poliedros internos em cores diferentes e dos botões que coordenam o aparecer/desaparecer dos objetos. Este é então um momento de exploração visual na busca da generalização proposta no fim da tarefa. A exploração se torna manipulável e o aluno explora o material previamente construído, movimentando a vista na busca de encontrar os valores numéricos necessários. Na figura a seguir estão as três opções permitidas pelos botões criados e também três opções de movimentar o plano e encontrar novas vistas.

Figura 23 - Sequências de exploração em prismas



Fonte: Elaboração do autor

4.3.4 Caráter Visual

Esta seção 4.3 se atentou em demonstrar o caráter e potencial visual que surgiu em meio às discussões e também de cada enunciado de atividade criada. Ressalto que a análise feita é de caráter subjetivo, já que esta pesquisa não se atenta à implementação das tarefas, mas sim a seu processo de elaboração. Logo, o que emerge como possibilidade de contribuição ao processo de visualização surge das discussões nas quais os sujeitos tinham o intuito de desenvolver atividades que, por natureza, demonstraram caráter visual.

A busca, mesmo que não intencional, por proporcionar imagens mentais dinâmicas (GUTIÉRREZ, 1996) caracteriza um aprimoramento conceitual, tornando a atividade rica no que tange o desenvolvimento da habilidade de visualizar, ou seja, interpretar e manipular objetos matemáticos tridimensionais. As atividades desenvolvidas visam promover ao aluno, uma exploração na qual sua intuição, *background* visual, manipulação e descobertas caminhem de mãos dadas, já que estes são aspectos fundamentais para o processo de visualização do sujeito. Neste sentido, potencialidades do software favorecem um viés fundamental para que elaborássemos atividades com a proposta visual.

Considerando o apelo visual apresentado pelas atividades, uma maneira de convencimento acaba surgindo em cada exploração. Esta possibilidade abre espaço para pensar sobre demonstrações matemáticas utilizando tecnologias. Ricardo demonstrou sua visão do tema na fala seguinte:

Ricardo (R2): Aí vem naquilo assim ainda que tá um pouco aberto que é como engendrar, acho que esse vai ser o principal aspecto, isso eu vou trazer em outras, de uma possível prova algébrica com o uso do GeoGebra. Eu acho que isso a gente não pode descartar a prova algébrica, acho que isso é importante, acho que são complementares. No entanto, o que que é importante, e é difícil enfatizar. É que os elementos utilizados na construção do objeto com o GeoGebra eles de certa forma têm uma relação com a prova algébrica. Seja simbólica, seja em termos de procedimento com a demonstração.

Estão acho importante ter a demonstração, mas não pode ser assim, ah fez a experimentação e agora vou fazer a demonstração. Mas a demonstração não tem nada a ver com... (Ricardo gesticula os braços para um lado e depois para o outro, demonstrando que a experimentação estaria num momento e a demonstração em outro, separando as duas coisas). Então é como buscar, e isso uma das questões que a gente vai de análise do desenvolvimento de atividade. Que elementos podem surgir do ponto de vista simbólico e do ponto de vista de procedimento dinâmico assim, que vão influenciar diretamente na prova algébrica.

Pensar isso óh... será que a hora que estiver utilizando o GeoGebra em tal aspecto a gente não pode introduzir uma notação que tenha a ver com aquilo e essa notação depois vai ser utilizada na... na demonstração algébrica?

A fala de Ricardo corrobora com o que argumenta De Villiers (2002) que após investigar uma dada construção utilizando o software, afirma que ter percebido que este ato o auxiliou a construir uma demonstração. “Isto revela como a investigação com recurso a software dinâmico pode também auxiliar, por vezes, a construção de uma eventual demonstração” (DE VILLIERS, 2002, p. 9).

Para Cifuentes (2005) o “[...] desafio do século XXI é tornar a visualização em argumento de demonstração.” (CIFUENTES, 2005, p. 71). Neste sentido, a presença da prova do arrastar sugere uma forma do aluno se convencer da veracidade de sua construção. Porém, como diz o autor, existe um desafio em se utilizar o visual em provas matemáticas. Portanto, para pesquisas futuras, a indagação é saber qual tipo de linguagem se utilizar para que, junto a mecanismos tecnológicos, a visualização ganhe destaque em justificativas formais matemáticas.

Outra questão levantada dentre as discussões foi a complexidade de cada atividade. Entendo que a tarefa ser considerada complexa é algo pessoal para cada indivíduo. A subjetividade do processo nos condicionou a pensar recursos que enriqueçam a exploração do problema. Porém, a forma com que cada um se familiariza e internaliza a potencialidade do recurso, depende das conexões estabelecidas e requisitos prévios trazidos por cada aluno. Como já mencionado, cabe ao professor mediar a interação, buscando orientar a exploração do discente.

4.4 Sobre o processo de elaboração

Ao fim desta seção de análise entendo que o processo de elaboração de atividades por parte dos pesquisadores ocorreu de forma colaborativa, caracterizado pelo objetivo mútuo de elaborar atividades matemáticas investigativas e experimentais. Algumas características ficam evidenciadas como a importância de se considerar o público alvo e manter em mente possibilidades de interações que venham a ocorrer. Este fato revela a subjetividade do processo, ou seja, o pesquisador/elaborador deposita nos momentos de elaboração, suas crenças e convicções a respeito das potencialidades da atividade desenvolvida, sempre considerando eventuais ocorrências para uma futura implementação.

Ressalto também que elaborar atividades em consonância com alguns construtos teóricos de Educação Matemática (experimentação-com-tecnologias e investigação matemática

neste trabalho) não evidencia que necessariamente as tarefas geradas atendam, integralmente os quesitos pressupostos. O processo analisado mostra que houve uma tentativa de elencar o máximo de características possíveis referentes aos construtos utilizados. Tais aspectos tinham como “[...] pano de fundo uma perspectiva no qual a produção de conhecimentos matemáticos assume uma dimensão heurística, de descoberta, sendo esta apropriada aos cenários de ensino e aprendizagem de matemática.”. (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). O quesito demonstração, por exemplo, que é um importante momento das investigações, não figuraram muitas de nossas discussões, nem nos enunciados de nossas atividades. O que pode ser indício de uma dificuldade do grupo em estabelecer relações de prova matemática com a utilização de software. É notável, também, que aspectos teóricos previamente definidos fogem ao controle devido às circunstâncias do processo. Os dados mostram como exemplo as construções que eram instruídas aos alunos ao mesmo tempo que queríamos trabalhar com atividades abertas.

Potencialidades dos recursos tecnológicos condicionam fortemente as tarefas que estiveram em construção. Os exemplos surgem mediante as discussões de como construir um plano no GeoGebra, como proporcionar um *applet* com botões de ocultar/mostrar objetos, por exemplo. Potencialidades como a observação de diversas janelas de visualização simultaneamente, possibilidades de animação de pontos, também se tornaram importantes no desenvolvimento das tarefas, na busca de proporcionar uma atividade rica em termos de experimentação-com-tecnologias.

Portanto, na análise das tarefas e do processo em si, notamos dois aspectos fundamentais neste movimento de criação de atividades matemáticas: (1) o caráter colaborativo, o qual perpassa pelos principais momentos de elaboração das atividades nesta pesquisa e (2) há grande homogeneidade entre potencialidades do GeoGebra e conceitos matemáticos. O aprimoramento acerca dessa homogeneidade diz respeito ao aperfeiçoamento qualitativo-conceitual da atividade em seu processo criativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho visou discutir aspectos relacionados ao processo de elaboração de atividades em Geometria Espacial com a utilização do software GeoGebra. Quatro pesquisadores em Educação Matemática foram tomados como sujeitos de pesquisa. Estes desenvolveram um conjunto de atividades para um curso de extensão universitária. Este processo de elaboração contou também com a participação do grupo de pesquisa GPIMEM, no sentido obter novos olhares e opiniões sobre as atividades desenvolvidas. Dados de uma reunião ocorrida após o curso também foram levados em conta para a análise. O trabalho contribui no âmbito teórico da experimentação-com-tecnologias, investigação matemática e visualização à medida que apresenta discussões referentes a como os pesquisadores argumentavam sobre como propor uma atividade que preconizasse o desenvolvimento de conjecturas, os testes e refinamentos, o desenvolvimento de raciocínio em conjunto com as potencialidades da tecnologia como recursos inovadores.

Nesta seção final, discuto os resultados que encontrei na pesquisa divididos em três tópicos. No primeiro, “traços de uma nova Geometria”, me posiciono sobre a percepção que adquiri diante dos resultados de pesquisa, principalmente olhando para as atividades elaboradas. Neste tópico emprego o que passei a compreender como uma nova Geometria, enfatizando que o fazer Geometria utilizando tecnologia é diferente do fazer Geometria em papel e lápis. No segundo tópico, “perspectivas futuras”, falo sobre os questionamentos que emergem ao fim do estudo, e de proposta para estudos semelhantes. Por fim, em “comentários finais”, fecho esta dissertação evidenciando seus principais resultados e possíveis contribuições para a Educação Matemática.

Traços de uma nova Geometria

Na atividade Construções Geométricas no Espaço, inicialmente, existe uma especificidade em relação à Geometria Espacial. Imagine a construção de um triângulo regular com régua e compasso. A proposição I do livro I da obra “Os Elementos” de Euclides (2009) trata exatamente deste problema. “Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada” (EUCLIDES, 2009, p. 99) consiste em construir duas circunferências, cada uma centrada em uma ponta da reta limitada, sendo que o raio de cada uma é exatamente o tamanho desta reta. As circunferências então se cortam em um ponto (dois, porém apenas um é utilizado nesta

construção) e ligando este ponto às extremidades da reta teremos um triângulo equilátero, sendo a equivalência de seus lados assegurada pelo raio das circunferências.

Surge o questionamento: como encaminhar um tipo de processo semelhante para construir figuras espaciais? Como utilizar régua e compasso para desenhos tridimensionais? Neste momento, a exploração no software pode ser uma alternativa interessante para atingir tais feitos. As ferramentas do software proporcionam o que considero como “régua e compasso espaciais”, permitindo a construção geométrica da figura espacial desejada.

Se torna um desafio pensar qual tipo de recurso manipulável seria capaz de realizar construção semelhante. Gutierrez (1996) afirma que em tempos antes das décadas de 80 e 90, objetos de madeira ou papelão eram algumas das poucas maneiras de conceber uma figura geométrica espacial.

Aqui pode ser observado uma ruptura entre os conceitos de Geometria Espacial no passado e no presente.

Bairral e Barreira (2017) enfatizam que

Em ambientes de geometria dinâmica, pontos, retas e planos deixam de ser apenas entes primitivos. Eles não existem por si sós, mas coexistem com uma variedade de objetos e construções geométricas, todas feitas e manipuladas na tela. Portanto, cabe enfatizar que a geometria produzida em um AGD como o GeoGebra é outra, pois temos novas formas de manifestação da linguagem (ícones variados, formas de medição, observação simultânea de propriedades e formas etc.) (BAIRRAL; BARREIRA, 2017, p. 62).

Atualmente podemos explorar a Geometria via métodos computacionais, ressignificando o modo e fazê-la, utilizando caminhos e considerando novas características a exemplo do arrastar.

Ainda que figuras espaciais possam ser representadas em desenho, é preciso enfatizar que este não dá acesso “visual” ao tamanho correto da aresta de um poliedro regular, por exemplo, mas sim a uma representação dela. É uma situação em que se desenha no plano uma figura espacial, como acontece em aulas tradicionais de Matemática, nas quais os professores desenham no quadro negro, bidimensional, figuras tridimensionais.

Esses são traços de uma nova Geometria, um novo caminho para se atingir as figuras da Geometria Euclidiana de forma diferente do que se fazia no passado. A evolução dos softwares educacionais de Matemática nos permite transcender a ideia de construção espacial, permitindo realizar atividade aparentemente complexa de se executar com recursos não tecnológicos.

Ressalto que a tela do computador pode ser considerada fisicamente bidimensional. Porém, o “espaço” criado e manipulado dentro dela representa um ambiente fiel e propício à

manipulação de objetos que possuem propriedades tridimensionais. Mas, nesse sentido, Gutierrez (1996) sublinha que a tela dos computadores (também) nos proporciona representações dos objetos e que, desta maneira, as dificuldades dos estudantes podem surgir ou permanecer também na exploração destes ambientes. Portanto neste cenário a presença do professor questionador e mediador que discute os resultados com seus alunos (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013) faz a diferença na produção de conhecimento matemático em discussão.

A atividade Interseções proporciona o arrastar do plano ao intersectar os poliedros explorados. Essa possibilidade torna dinâmica a observação das figuras de interseção que surgem na atividade. Portanto, o software possibilita checar tal figura em separado, observando sua propriedade enquanto ela se movimenta em mais de uma tela. Esta exploração é qualitativamente diferente daquela feita no papel, onde o desenho é estático e para observar a figura de interseção seria necessário realizar um novo desenho.

Já na atividade envolvendo os prismas, o destaque tecnológico pode ser observado na função de ocultar objetos. O simples desaparecer de alguns componentes pode facilitar a observação do aluno, o que poderia acontecer em um desenho a mão através do ato de apagar com a borracha o prisma inicial. Porém, ainda assim, movimentar o poliedro convexo interior formado e observá-lo de diferentes posições seria inviável.

Minha intenção aqui não é desvalorizar a Geometria construída à mão. Este fato também é assegurado por Bairral e Barreira (2017). Os apontamentos anteriores visam destacar apenas que a Geometria feita em softwares de Geometria Dinâmica é diferente e oferece aspectos inovadores, muitas das vezes caracterizados principalmente nos atos que simulam movimentos. As figuras deixam de ser estáticas, para se tornarem um conjunto de entes geométricos que podem ser vistos agrupados e passíveis de movimento, permitem a observação de suas propriedades de maneira diferente daquela feita no papel.

Perspectivas futuras

“Pesquisa deve fomentar pesquisa”. Esta é uma frase comum em eventos de meio acadêmico. Portanto acredito que o estudo que realizei deve proporcionar novos estudos semelhantes, até mesmo pelo motivo que expressei no início desta dissertação: pesquisas em Educação Matemática realizam, em geral, suas coletas de dados mediante a implementações de atividades, porém poucas evidenciam como estas atividades foram concebidas. Creio que esta dissertação surge como uma contribuição a este tipo de estudo.

A pesquisa considerou ainda a participação do GPIMEM durante parte do processo. Mas é possível se fazer uma pergunta: E se os grupos de pesquisa evidenciassem, com um devido grau de profundidade, a forma com que pensam e elaboram suas atividades? Estas tarefas podem ser exemplos práticos de como os grupos de pesquisa empregam as teorias que assumem, como é o caso do GPIMEM ao abordar o construto seres-humanos-com-mídia. Esta seria, possivelmente, uma possibilidade de muitos pesquisadores e professores conhecerem, e até se identificarem, com os momentos de elaboração. Seria como uma partilha de conhecimento, problemas, situações, conflitos de ideia característicos de um processo de elaboração. O estudo de Nunes (2011) considera o processo de elaboração mais em um espectro individual, sem enfatizar a participação de sujeitos colaboradores do processo. Também surge como uma possibilidade de identificação e aprendizagem para o leitor. Muitos professores e pesquisadores não possuem a oportunidade de agir de forma colaborativa como aconteceu na produção de dados desta pesquisa. Portanto, atuar de forma individual é a realidade de muitos daqueles que elaboram aulas, cursos e provas matemáticas.

Portanto, como perspectiva futura, creio que estudar o processo de elaboração de aulas (nas universidades ou na educação básica) considerando a matemática e o uso de tecnologias digitais sejam fontes ricas de dados, visto que estes processos envolvem elementos diferentes da produção de atividades para um curso de extensão.

Comentários finais

As discussões evidenciaram que o processo de elaboração de atividades matemáticas com TD é repleto de preocupações, especialmente com o público alvo. Em nossas circunstâncias, não foi possível conhecer os participantes do curso, o que acarretou cuidado com o grau de direcionamento de cada atividade. Mesmo assim, concluo que as atividades não perderam suas características desejadas, como a noção de tarefa aberta, por exemplo. A literatura a respeito de experimentação-com-tecnologias assegura este perfil para as questões e então, entendo que o grupo conseguiu preservar as possibilidades de descoberta que cada atividade possuía.

A sexta reunião mostrou a necessidade de reflexões após as implementações, visto a quantidade de eventos críticos selecionados nessa oportunidade. Pesquisadores devem manter suas atividades atualizadas mediante as percepções que adquirem perante às implementações e às reflexões posteriores. Este ciclo pode significar que uma atividade matemática com tecnologias não precisa necessariamente atingir um nível considerado como ideal. As atividades

necessitam de adaptações/reestruturações (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014) para se adequarem a vários fatores que envolvem sua implementação como limitações técnicas, público alvo e suas especificidades, enquadramento em uma nova tecnologia digital, demandas de reelaboração, tempo disponível para a implementação, entre outros.

A forma com que os participantes do grupo aprimoraram as atividades em termos de investigação e experimentação se deu através do que denomino de intervenções colaborativas, ou seja, quando um pesquisador interferia na produção de outro, com comentários, sugestões, elogios e/ou críticas. Essas negociações foram fundamentais para transformar as atividades, gerando suas inúmeras diferentes versões.

A inserção de novos comandos ou recursos também caracterizou este movimento de aprimoramento das tarefas. À medida que conhecíamos ou considerávamos uma nova forma de exploração do software, aquela potencialidade passava a fazer parte da atividade, enriquecendo-a em termos tecnológicos e matemáticos.

Quanto à natureza investigativa e experimental das atividades, entendo que é algo único de cada uma e que pode ser observado nas versões finais. Obtivemos casos de generalização, de testes relativos à posição de figuras espaciais, de construção por analogia, intuição, exploração de diversas telas. Esses são aspectos que evidenciam o potencial do material gerado.

Em nossas discussões, a visualização não surge abertamente, mas sim de maneira intrínseca. O caráter visual, a exploração constante de imagens e os raciocínios envolvidos nas atividades expressam que a visualização não é um fim, mas sim um meio para a resolução de tarefas, visto que esta possibilita descobertas criativas (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991). Assim, entendo que a visualização foi um meio para o desenvolvimento das atividades e não um fim previamente estabelecido.

O estudo mostrou também que revisitar as atividades com novos olhares e contar com a colaboração de um grupo de pesquisa fizeram necessárias inúmeras versões de cada atividade. Isso enfatiza que a cada vez que as tarefas eram revistas pelos autores, ganhavam novas versões, muitas vezes semelhantes, mas qualitativamente diferentes das anteriores, influenciadas também com aspectos de aprendizagem dos próprios autores durante o processo. Esta aprendizagem envolve a inserção de tecnologias na sala de aula, conhecimento matemático e pedagógico.

É fato que em nosso estudo, nem todas as atividades expressas se enquadraram perfeitamente nos quadros teóricos que propomos no processo. Mesmo considerando algumas ideias prévias, o processo ganhou característica singular devido às circunstâncias em que estávamos inseridos, concepções dos integrantes, condições para obtenção de dados entre

outros fatores. O que demonstra o quão complexo pode ser elaborar atividades matemáticas com tecnologias digitais.

É compreensível que os aspectos da investigação matemática impostos na seção de teoria não tenham sido claramente identificados nas transcrições ou no corpo de cada atividade. De fato, as investigações estão presentes a cada proposta de teste e conjectura, possibilidade de descoberta impulsionadas por perguntas dentre o enunciado. A discussão de resultados ao fim da exploração surge como potencial de cada atividade, ou seja, são aspectos que ficam a cargo do professor que estiver executando-a com seus alunos.

Os aspectos colocados anteriormente são cabíveis também a processos de elaboração de atividades de Geometria em geral, ou até mesmo de outras áreas da Matemática. As particularidades deste trabalho surgem a partir de recursos do GeoGebra que permitia que as discussões estivessem em um campo específico, o da Geometria Espacial. Ferramentas como a de extrusão (que dá volume às figuras), a interseção de superfícies (que gera as figuras de interseção), foram evidenciadas e impulsionaram um caráter espacial às atividades. Discussões como aquela que envolvia a forma de construir o plano, ou ainda, aquela em que os pesquisadores escolhiam as medidas do controle deslizante, evidenciam particularidades dos dados com relação à Matemática empregada. Com respeito à literatura estudada, vemos que o teste do arrastar é abordado usualmente em quadrados e triângulos. Dentre as atividades que desenvolvemos, surge uma abordagem deste mesmo teste envolvendo figuras geométricas espaciais como forma de validar as construções de poliedros.

Ao fim desta dissertação, concluo que esta pesquisa visou contribuir para os estudos que envolvem a o ensino de Matemática em conjunto com recursos tecnológicos, no sentido de apresentar um processo no qual pesquisadores se esforçam em desenvolver um conjunto de atividades matemáticas com o GeoGebra. Conhecer este processo proporciona à comunidade da Educação Matemática perceber a gênese do desenvolvimento de materiais didáticos construídos colaborativamente, assim como a riqueza de ideias desenvolvidas em meio a este progresso. Acredito que as discussões aqui expressas possam contribuir para reflexões de pesquisadores e professores que se encontrem em situação semelhante, ou seja, durante a elaboração e seus materiais para aulas e cursos. Também creio que a pesquisa possa seguir como fomentadora de novas pesquisas, especialmente aquelas que também tenham a intenção de conhecer o processo de planejamento de atividades matemáticas.

REFERÊNCIAS

- ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. **Anais do XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação**, Campinas, 2003. Disponível em <http://www.GeoGebra.im-uff.mat.br/biblioteca/WIE_George_Adriana.pdf>. Acesso em: 26 de mar 2017.
- AMARAL, R. B. Estado da arte da pesquisa em Geometria no GPIMEM. In BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Org.). **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.
- ARCAVI, A. **The hole of the visual representations in the learning of mathematics**. Educational Studies in Mathematics, Vol. 52, No. 3 pp. 215-241, 2003.
- BAIRRAL, M. A. **Tecnologias da informação e comunicação na formação e Educação Matemática**. Seropédica: Ed. da UFRRJ, 2009. vol. 1
- BAIRRAL, M. A.; BARREIRA J. C. F. **Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica**. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, São Paulo, v.6, n.2, p 46-64, 2017.
- BAIRRAL, M. A.; SETTIMY, T. F. O.; HONORATO, V. S. **Secionando um cubo: O que fazer se três pontos não determinarem um plano?** Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM), Curitiba v. 2, n. 2, p. 180-202, jan-jun. 2013.
- BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. Pro Proposições, Campinas, v.4, n.1 [10] p.16-23. 1993
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. S. R; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: Internet e sala de aula em movimento. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. New York: Springer, 2005. v. 39.
- BORTOLOSSI, H. J. **Criando conteúdos educacionais digitais interativos em matemática e estatística com o uso integrado de tecnologias: GeoGebra, JavaView, HTML, CSS,**

MathML e JavaScript. In 1ª. CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 2012, São Paulo.

BREDA, A.; TROCADO, A.; SANTOS, J. **O GeoGebra para além da segunda dimensão.** Revista Indagatio Didactica, Aveiro v. 5, n.1, p. 60-84, jul 2013.

CIFUENTES, J. C. **Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático.** Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, jan/jun 2005.

CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemáticas;** Revista da Educação Matemática da UFOP, v.I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011, p.162. ISSN 2237-809.

DE VILLIERS, M.. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em Geometria Dinâmica.** Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, 2002, Visue, Portugal. Actas... (CDROM) Visue: Associação de Professores de Matemática, 2002. Disponível em: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat2.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2017.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

FARIA, R. W. S. C.; **Raciocínio proporcional: integrando aritmética, geometria e álgebra com o GeoGebra.** 2016. 280 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2016.

FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa / Aurélio Buarque de Holanda Ferreira.** 3. Ed. Curitiba: Positivo, 2004.

FIORENTINI, D.: Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

GARCEZ, A.; DUARTE, R.; EISEMBERG, Z. **Produção e análise de videograções em pesquisas qualitativas.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 37, n.2, p. 249-262, mai./ago. 2011.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GORGORIÓ, N.; ARTIGUES, F.; BANYULS, F.; MOYANO, D.; PLANAS, N.; ROCA, M; XIFRÉ, À. **Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones.** Suma. Badalona, 33, 57-71. Fev 2000. Disponível em <<http://www.abed.org.br/congresso2004/por/pdf/049-TC-B2.pdf>>. Acesso em 26 de mar 2017.>. Acesso em 26 de mar 2017.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3 – dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig e Gutierrez (Eds.), **Proceedings of 20th PME conference (Vol. 3, pp 19-26)**, Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemàtica, 1996.

HEITMANN, P. F. **Atividades Investigativas em Geometria por grupos online: possibilidade para a educação matemática a distância,** 2013. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013

HONORATO, V. S. **O uso do software GeoGebra 3D no ensino de Geometria Espacial.** 2014. 52 f. Monografia (Licenciatura em Matemática)-Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014)

IDEM, R. C.; **Construcionismo, conhecimentos docentes e GeoGebra: uma experiência envolvendo licenciandos em Matemática e professores.** 2017.. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2017.

IDEM, R. C. Explorando o GeoGebra na formação de professores de Matemática: uma articulação entre o Construcionismo e os Conhecimentos Docentes. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016, Curitiba. **Anais XX EBRAPEM.** Curitiba: Editora UNESP, 2016. Disponível em http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_rita_idem.pdf Acesso em 20/06/2017.

ITURBE A. M. et al.; **Uso del Geogebra en la enseñanza de la geometría en carreras de Diseño.** Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, São Paulo, v.2 n.2, pp.93- 101, 2013

JAVARONI, L. J.; SANTOS, S. C. DOS; BORBA, M. C. Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, n. 1, p. 197–218, 2011.

LEMONS, W. G.; BAIRRAL, M. A. **Poliedros estrelados no currículo do ensino médio.** 1 ed. Rio de Janeiro: Ed. da UFRRJ, 2010.

LINCOLN, Y.S.; GUBA, E.G. **Naturalistic Inquiry.** Sage Publications. 1985.

LIMA, F. H. **Um método de transcrições e análise de vídeos: a evolução de uma estratégia.** In: VII Encontro Mineiro de Educação Matemática (VII EMEM), 2015, São João Del Rei. Anais... São João Del Rei: Universidade Federal de São João Del Rei, 2015. v. 7. p. 1-11.

MAZZI, L. C.; **Experimentação-com-GeoGebra: Revisando alguns conceitos da Análise Real.** 2014.. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2014.

MARSHALL, M. N. Sampling for qualitative research. **Family Practice**, V.13, n. 6, p. 522-526,1996.

NUNES, J. A. **Design Instrucional na Educação Matemática:** Trajetória de um professor de Matemática que elabora atividades sobre funções trigonométricas com a calculador HP 50G. 2011.. 171 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2011.

PEREIRA, R. A. **Pensamento heurístico em diferentes contextos socioculturais: o ensino da natureza da ciência**. 2014.. 273 f. Tese (Doutorado em Ensino de Física) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PONTE, J. P.M.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3 ed.. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, J. P; **Gestão curricular em Matemática**. In GTI (Ed.) O professor e o desenvolvimento curricular, Lisboa: APM, 2005.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. Tradução de Antônio Olímpio Jr. In: **Bolema** 21, 17, p. 81-140, UNESP, Rio Claro. 2004.

RICHIT, A. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em Matemática**. 2005.. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2005.

RICHIT, A. **Formação de professores de matemática da educação superior: aspectos do conhecimento revelados no contexto de uma comunidade de prática online**. 2017. 286 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

RICHIT, A. et al. **Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia**. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, v. 1, p. 90–99, 2012.

ROMANELLO, L. A. **Potencialidades do uso do celular na sala de aula: atividades investigativas para o ensino de função**. 2016.. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2016.

SALLES, A. T. **Aprendizagem no VMT-CHAT: um estudo de caso focado no raciocínio combinatório de licenciandos de pedagogia**. 2014.. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade Estadual Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

SANTOS, S. C.; **A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: O caso da Geometria Euclidiana Espacial**. 2006.. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

SCUCUGLIA, R. R. S.; **A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas**. 2006.. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –

Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

SILVA M. D. F.; **Ressignificando o Teorema de Pitágoras com o uso do GeoGebra: uma articulação entre a história da matemática e o uso dos recursos computacionais.** Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, São Paulo, v.3, n.1, p.35- 46, 2014.

VELOSO, E. **Geometria temas actuais.** Lisboa: IIE, 1998.

VITAL, C.; **Performance matemática digital e GeoGebra: possibilidade-artístico tecnológica em educação matemática.** 2018. 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2018.

VITAL, C. GeoGebra e Performance Matemática Digital. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016, Curitiba. **Anais XX EBRAPEM.** Curitiba: Editora UNESP, 2016. Disponível em < http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_carla_vital.pdf > Acesso em 20/06/2017.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor's Introduction: What is mathematical visualization? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Orgs). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics** (p. 1-7). Washington: MAA, 1991.

ZOTTO, N. D.; MACHADO, G. M. Z.; MELLO, K. B.; SILVA, R. S. GeoGebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de Geometria Espacial no ensino médio. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais do CIEM.** 2013. Disponível em < GeoGebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de Geometria Espacial no ensino médio.> Acesso em 17/06/2017.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica:** suas características e perspectivas. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

ZULATTO, R. B. A. **A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

**APÊNDICE – A: MODELO DO TERMO DE CONSENTIMENTO DOS MEMBROS
DO GPIMEM
CARTA DE INFORMAÇÃO - PARTICIPAÇÃO EM
PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Introdução

Meu nome é Vinícius dos Santos Honorato, sou aluno de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), IGCE, Campus de Rio Claro.

Objetivo do estudo

A pesquisa tem como objetivo investigar de que forma ocorre o processo de elaboração, de atividades matemáticas sobre Geometria Espacial com base no uso do software GeoGebra, por parte de um grupo de pesquisadores. Esta elaboração das atividades ocorreu de forma colaborativa. De fato, a iniciativa emergiu do interesse de quatro pesquisadores responsáveis por implementar um curso de extensão universitária sobre o uso do GeoGebra. No entanto, além desses quatro, integrantes do Grupo de Pesquisa em Informática e outras Mídias (GPIMEM) também participaram da formulação das atividades.

Se você concordar em ter suas falas expostas

Se você concordar em ter suas falas expostas neste estudo, você será mencionado como sujeito de pesquisa. A exposição de nomes reais é opcional e fica dependente deste consentimento (estou optando por utilizar nomes reais na pesquisa).

Confidencialidade

A informação registrada será utilizada para fins de produção de material didático-pedagógico e também, eventualmente, para fins de pesquisa em Educação Matemática. Transcrições de falas, falas em áudio, imagens e registros de ações dos participantes foram/serão utilizados em relatórios de pesquisa, artigos, livros e, principalmente, na publicação desta dissertação. Questões concernentes a estes procedimentos, ou outros que o participante/responsável considerar pertinentes, devem ser informados nesta carta de informação - consentimento/autorização.

Riscos e Participação voluntária

Não há riscos conhecidos para participar deste estudo. A participação neste estudo é voluntária. Esta carta de informação e consentimento tem como objetivo fundamental a ciência e

autorização do uso de falas do participante na realização e na publicação da pesquisa. As falas utilizadas podem ser vistas na próxima página deste documento.

Perguntas

Se você tiver qualquer dúvida sobre a conduta deste estudo ou os seus direitos como participante da pesquisa, entre em contato.

Fone: (21) 99331-9283

E-mail: honoratovinicius@hotmail.com

CARTA DE CONSENTIMENTO E AUTORIZAÇÃO**DE PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Declaro que li a carta de informação, entendi a natureza do estudo e concordo em participar.

Declaro ciência e concordância com relação as questões éticas sobre uso público de minhas falas no desenvolvimento e divulgação da pesquisa.

Nome _____ do
participante: _____

RG: _____

Local: _____

Data: _____

Assinatura: _____

Comentários do participante:

ANEXO A – VERSÕES DA ATIVIDADE INTERSEÇÕES ENTRE PLANOS E POLIEDROS

Atividade: Interseção entre planos e poliedros (Versão 1)

Atividade: Interseção entre plano e poliedros

- a) Construa uma pirâmide e também um plano de maneira que suas duas construções se interceptem. Indique a figura gerada na interseção. Explore a ferramenta “interseção de duas superfícies” .
 - b) Repita os procedimentos do item anterior, agora construindo um prisma. Explore agora o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado pela interseção.
 - c) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado.
 - d) É possível obter triângulos, quadriláteros e pentágonos regulares a partir da interseção de planos com cubos? Justifique-se.
-

Atividade: Interseção entre planos e poliedros (Versão 2)

- a) Construa uma pirâmide e um plano de maneira que ambos objetos se interceptem. Indique a figura gerada na interseção explorando a ferramenta “interseção de duas superfícies” . *Apresente alguns questionamentos iniciais... ex: o que você observa?*
- b) Repita os procedimentos do item anterior, considerando a construção de um prisma e um plano. Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado pela interseção. *Apresente alguns questionamentos...*
- c) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado pela interseção entre o poliedro e plano em cada situação?
- d) É possível obter triângulos, quadriláteros e pentágonos regulares a partir da interseção de planos com cubos? Como? Justifique.

Atividade: Intersecção entre planos e poliedros (Versão 3)

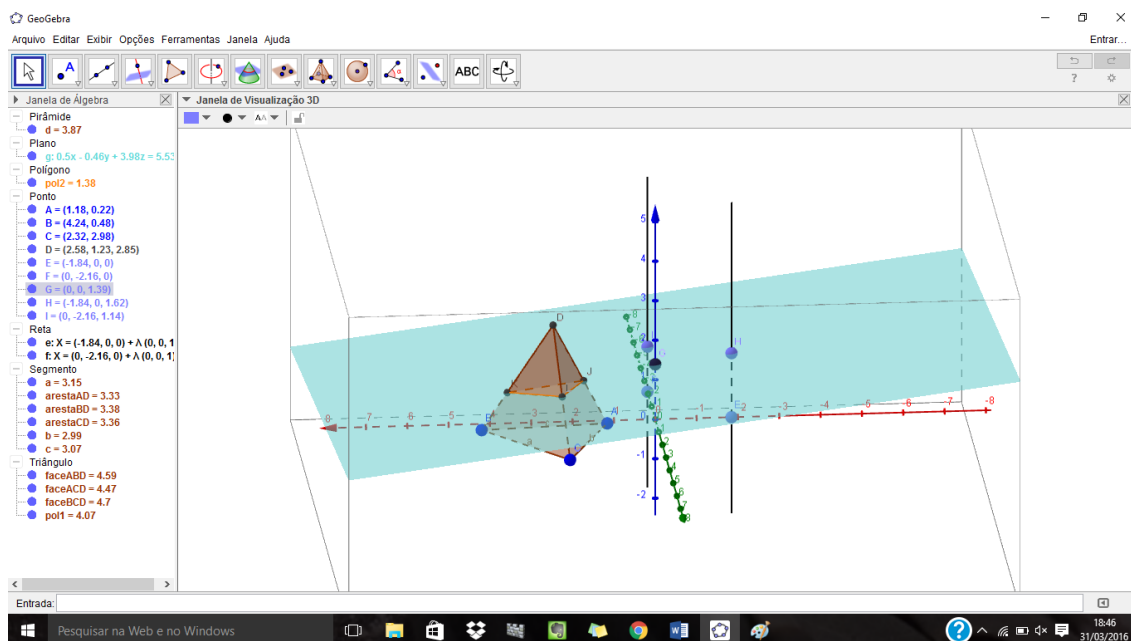
Atividade 1: Intersecção entre plano e poliedros

- | |
|--|
| <p>a) Construa uma pirâmide e um plano de maneira que ambos objetos se interceptem. Explore a ferramenta “intersecção de duas superfícies” . O que você observa? Indique a figura gerada pela intersecção.</p> |
| <p>b) Repita os procedimentos do item anterior, considerando a construção de um prisma e um plano. Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado pela intersecção. O que você observa? Existe relação entre estas figuras e as figuras geradas no item a?</p> |
| <p>c) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado pela intersecção entre o poliedro e plano em cada situação? Procure generalizar seu pensamento para qualquer poliedro.</p> |
| <p>d) É possível obter triângulos, quadriláteros e pentágonos regulares a partir da intersecção de planos com cubos? Como? Justifique.</p> |
-

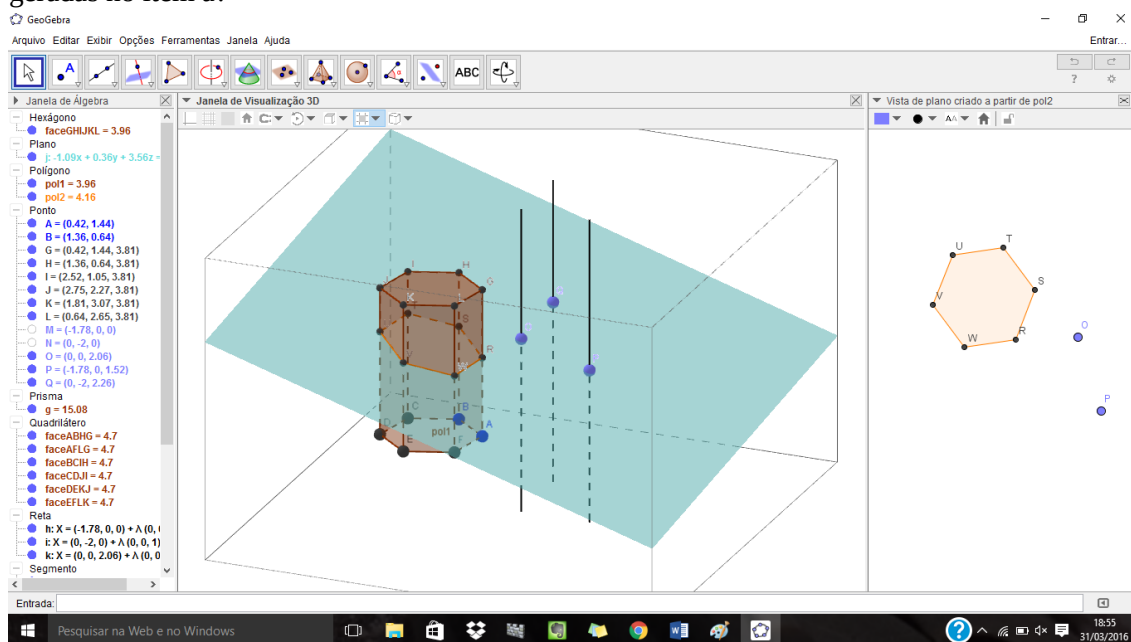
Atividade: Intersecção entre planos e poliedros (Versão 4)

Atividade1:

- a) Construa uma pirâmide e um plano de maneira que ambos objetos se interceptem. Explore a ferramenta “intersecção de duas superfícies” . O que você observa? Indique a figura gerada pela intersecção.



- b) Repita os procedimentos do item anterior, considerando a construção de um prisma e um plano. Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado pela intersecção. O que você observa? Existe relação entre estas figuras e as figuras geradas no item a)?



- c) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado pela intersecção entre o poliedro e plano em cada situação? Procure generalizar seu pensamento poliedro fazendo mais intersecções com poliedros de sua escolha.
- d) É possível obter triângulos, quadriláteros e pentágonos regulares a partir da intersecção de planos com cubos? Como? Justifique.

Atividade: Interseção entre planos e poliedros (Versão 5)

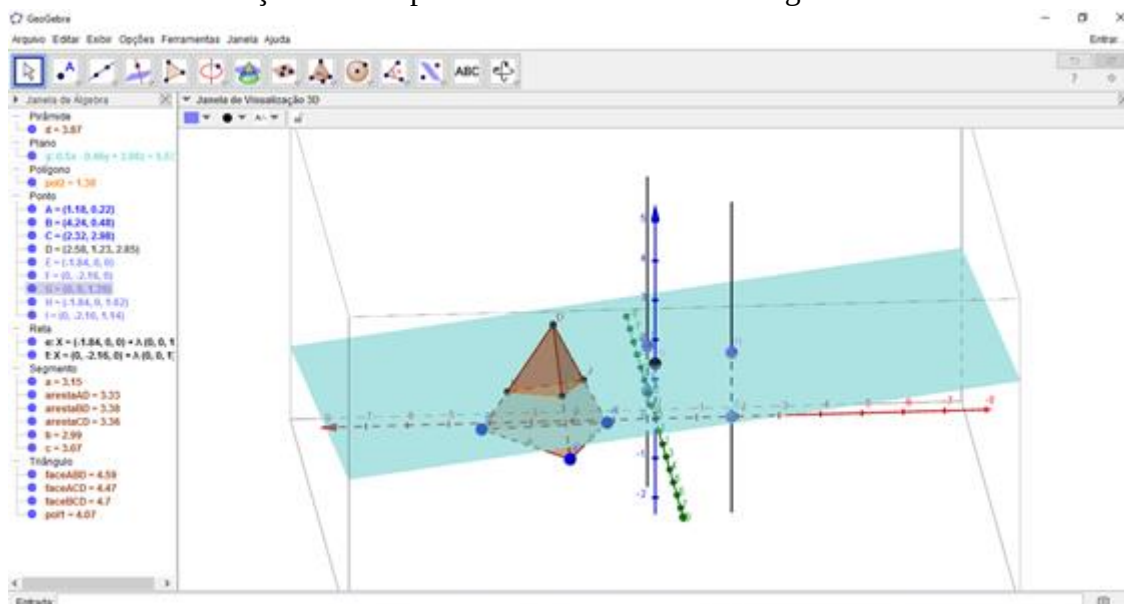
1. Clique no menu “Exibir” e então em “Janela de visualização 3D”. Construa uma pirâmide da seguinte maneira:

- Na janela 2D crie um polígono para ser a base da sua pirâmide.
- Na janela 3D clique em “Pirâmide”  e depois em “Fazer Extrusão para Pirâmide ou Cone” .

2. Crie um plano da seguinte maneira:

- Faça três pontos ao lado da base da pirâmide e depois construa 3 retas perpendiculares a base  que passem por estes pontos.
- Utilize a ferramenta “plano por 3 pontos”  e crie um plano clicando em cada uma das retas anteriores. Movimente o plano através dos pontos nas retas e faça com que este intersecte a pirâmide.

Sua construção deve se parecer com o mostrado na figura abaixo:



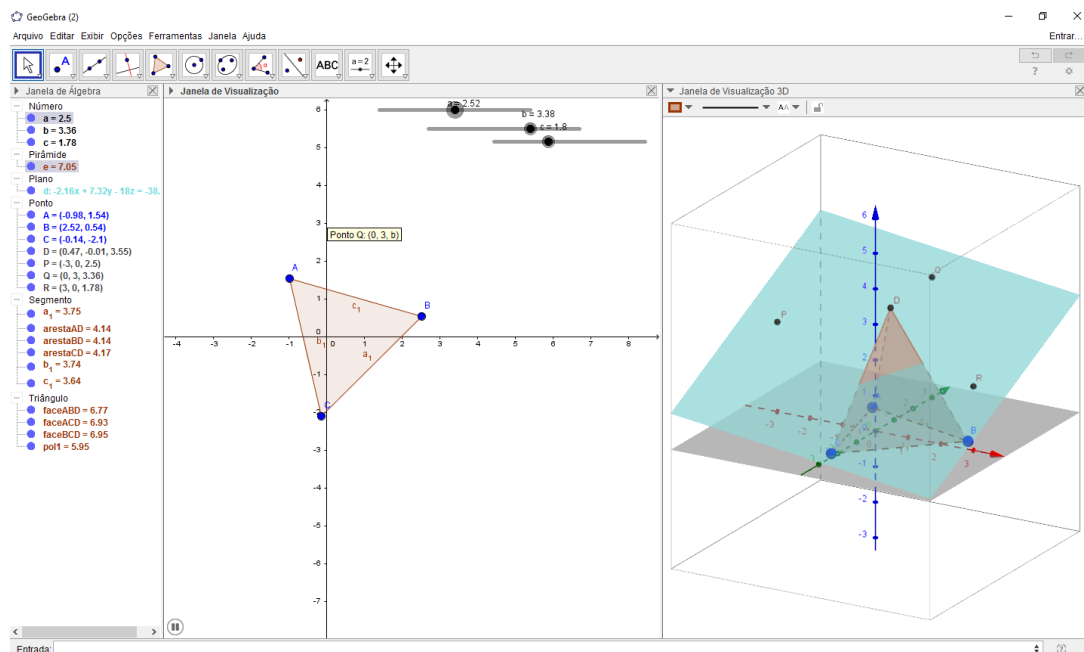
3. Selecione a ferramenta “intersecção de duas superfícies”  e clique próximo a intersecção do plano com a pirâmide, esta deverá surgir marcada em amarelo antes de seu clique. O que você observa? Indique a figura gerada pela intersecção. Altere a posição do plano e encontre mais possíveis figuras geradas.

4. Repita os procedimentos do item anterior, considerando a construção de um prisma e um plano. Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado (dentro da tela de 3D ou na janela de álgebra) pela intersecção. Neste momento uma nova janela a esquerda deve surgir. O que você observa? Existe relação entre estas figuras e as figuras geradas no item a?
5. Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado pela intersecção entre o poliedro e plano em cada situação? Procure generalizar seu pensamento. Se achar necessário faça mais intersecções com poliedros de sua escolha.
6. É possível obter triângulos, quadriláteros e pentágonos regulares a partir da intersecção de planos com cubos? Como? Justifique.

Atividade: Interseção entre planos e poliedros (Versão 6)

- 1) Clique no menu “Exibir” e então em “Janela de visualização 3D”. Construa uma pirâmide da seguinte maneira:
 - c) Na janela 2D crie um polígono para ser a base da sua pirâmide.
 - d) Na janela 3D clique em “Pirâmide”  e depois em “Fazer Extrusão para Pirâmide ou Cone” . Clique sobre a base e defina altura sendo 4.
- 2) Crie um plano da seguinte maneira:
 - c) Construa 3 controles deslizante  com o nome de a,b,c, intervalo entre 0 e 4 e no item animação altere a velocidade para 4.
 - d) Na caixa de entrada insira os seguintes pontos $P = (-3,0,a)$, $Q = (0,3,b)$ e $R = (3,0,c)$.
 - e) Utilize a ferramenta “plano por 3 pontos”  e crie um plano clicando em P,Q e R que devem estar posicionados sobre as retas. Clique com o botão direito sobre cada controle e ative a função “Animar”.

Sua construção deve se parecer com o mostrado na figura abaixo:



- 3) Selecione a ferramenta “interseção de duas superfícies”  e na janela de álgebra clique na pirâmide e no plano. O que você observa? Observe quantos lados possuem as figuras geradas na interseção. Qual a figura com mais lados possível de ser encontrada?
- 4) Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado (dentro da tela de 3D ou na janela de álgebra) pela interseção. Neste momento uma nova janela a esquerda deve surgir. O que você observa? Quantas faces possui a pirâmide e quantas arestas possui a interseção de mais lados possíveis?
- 5) Repita os procedimentos do item anterior, considerando a construção de um prisma. Não é necessário que desfça tudo que fez, apenas apague a pirâmide na janela de álgebra e sobre a base, utilize a ferramenta selecione “Fazer Extrusão para Prisma ou Cilindro” , e determine a altura como 4. Considere novamente os questionamentos finais do item anterior a respeito do prisma.
- 6) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado pela interseção entre o poliedro e plano em cada situação? Por que esta relação acontece? Procure generalizar seu pensamento. Se achar necessário faça mais interseções com poliedros de sua escolha.
- 7) Construa um cubo no lugar do prisma anterior, usando um quadrado como base na janela 2D. É possível obter triângulos regulares, quadrados, retângulos e pentágonos regulares a partir da interseção de planos com cubos? Se preferir desative a animação e controle o plano manualmente pelos controles deslizantes.

1) Clique no menu “Exibir” e então em “Janela de visualização 3D”. Construa uma pirâmide da seguinte maneira:

a) Na janela 2D crie os pontos $A=(-1,0)$ e $B=(1,0)$.

b) Na janela 3D clique em “Pirâmide”  e depois em “Cubo” . Construa o cubo clicando em B e depois em A.

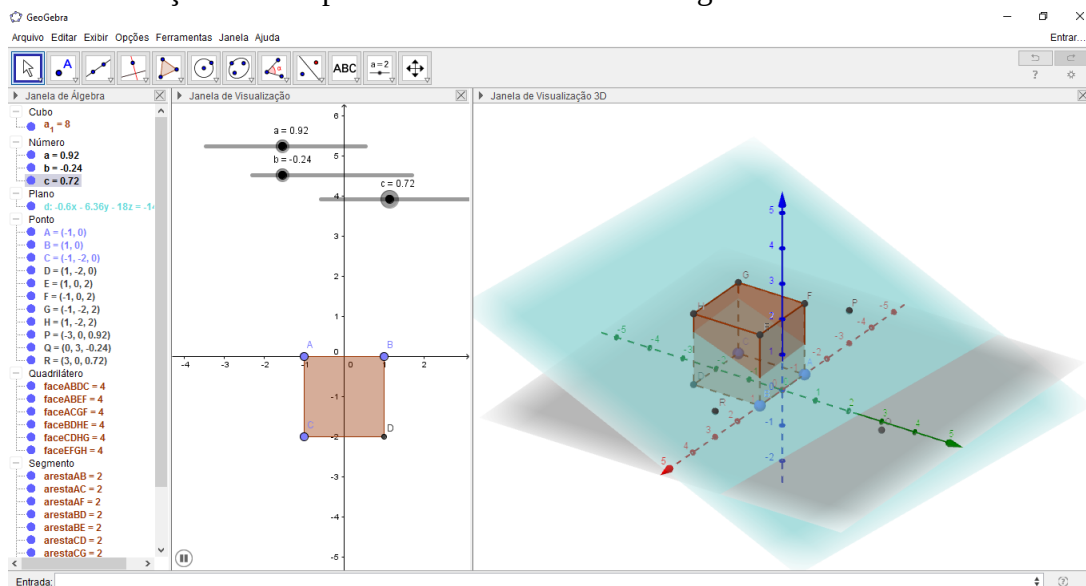
2) Crie um plano da seguinte maneira:

a) Construa três controles deslizantes  com os nomes a,b e c, intervalo entre 0 e 3 e na janela animação altere a velocidade para 3.

b) Na caixa de entrada insira os seguintes pontos $P = (-3,0,a)$, $Q = (0,3,b)$ e $R = (3,0,c)$.

c) Utilize a ferramenta “plano por 3 pontos”  e crie um plano clicando em P,Q e R que devem estar posicionados sobre as retas. Clique com o botão direito sobre cada controle e ative a função “Animar”.

Sua construção deve se parecer com o mostrado na figura abaixo:



3) Selecione a ferramenta “interseção de duas superfícies”  e na janela de álgebra clique na pirâmide e no plano. O que você observa? Indique as figuras geradas pela interseção. Quantos lados tem o cubo? Quantos lados tem essas figuras?

4) Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado (dentro da tela de 3D ou na janela de álgebra) pela interseção. Neste momento

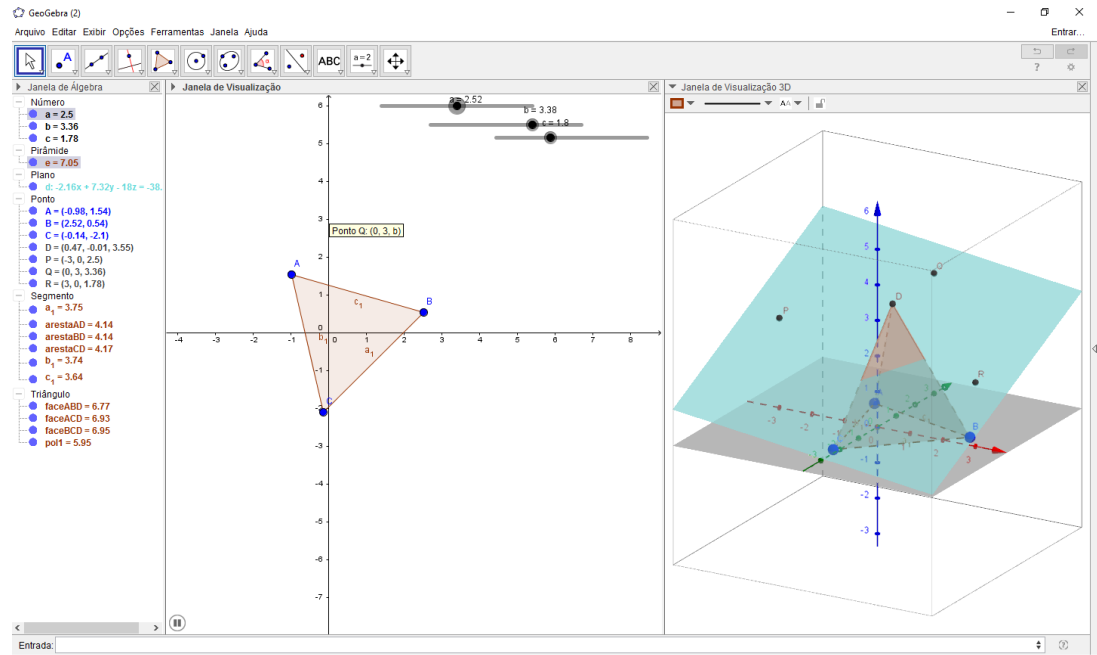
uma nova janela a esquerda deve surgir. O que você observa? Esta janela confirma ou incrementa suas respostas o item 3?

- 5) Oculte o plano e os pontos, apague o cubo e em seu lugar construa uma pirâmide, acenda novamente o cubo e os pontos e ative a animação. Quantas faces possui a pirâmide? Quantas arestas possuem os polígonos gerados na interseção?
- 6) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados dos polígonos gerados pela interseção entre o poliedro e plano em cada situação? Procure generalizar seu pensamento. Se achar necessário faça mais interseções com poliedros de sua escolha.
- 7) É possível obter triângulos regulares, quadrados, retângulos e pentágonos regulares a partir da interseção de planos com cubos? Como? Justifique.

Atividade: Interseção entre planos e poliedros (Versão 8)

- 1) Clique no menu “Exibir” e então em “Janela de visualização 3D”. Construa uma pirâmide da seguinte maneira:
 - a) Na janela 2D crie um polígono para ser a base da sua pirâmide.
 - b) Na janela 3D clique em “Pirâmide”  e depois em “Fazer Extrusão para Pirâmide ou Cone” . Clique sobre a base e defina altura sendo 4.
- 2) Crie um plano da seguinte maneira:
 - a) Construa 3 controles deslizante  com o nome de a,b,c, intervalo entre 0 e 4 e no item animação altere a velocidade para 4.
 - b) Na caixa de entrada insira os seguintes pontos $P = (-3,0,a)$, $Q = (0,3,b)$ e $R = (3,0,c)$.
 - c) Utilize a ferramenta “plano por 3 pontos”  e crie um plano clicando em P,Q e R que devem estar posicionados sobre as retas. Clique com o botão direito sobre cada controle e ative a função “Animar”.

Sua construção deve se parecer com o mostrado na figura abaixo:



- 3) Selecione a ferramenta “interseção de duas superfícies”  e na janela de álgebra clique na pirâmide e no plano. O que você observa? Observe quantos lados possuem as figuras geradas na interseção. Qual a figura com mais lados possível de ser encontrada?
- 4) Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado (dentro da tela de 3D ou na janela de álgebra) pela interseção. Neste momento uma nova janela a esquerda deve surgir. O que você observa? Quantas faces possui a pirâmide e quantas arestas possui a interseção de mais lados possíveis?
- 5) Repita os procedimentos do item anterior, considerando a construção de um prisma. Não é necessário que desfaça tudo que fez, apenas apague a pirâmide na janela de álgebra e sobre a base, utilize a ferramenta selecione “Fazer Extrusão para Prisma ou Cilindro” , e determine a altura como 4. Considere novamente os questionamentos finais do item anterior a respeito do prisma.
- 6) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado pela interseção entre o poliedro e plano em cada situação? Por que esta relação acontece? Procure generalizar seu pensamento. Se achar necessário faça mais interseções com poliedros de sua escolha.

Construa um cubo no lugar do prisma anterior, usando um quadrado como base na janela 2D. É possível obter triângulos regulares, quadrados, retângulos e pentágonos regulares a partir da interseção de planos com cubos? Se preferir desative a animação e controle o plano manualmente pelos controles deslizantes.

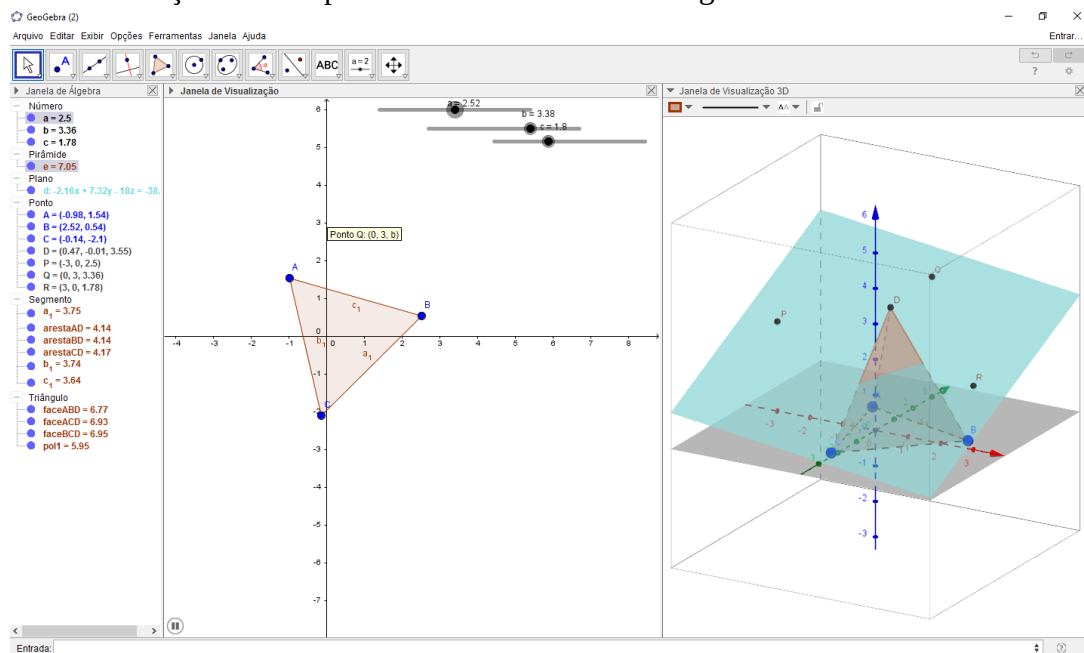
Atividade: Interseção entre planos e poliedros (Versão 9)

- 1) Clique no menu “Exibir” e então em “Janela de visualização 3D”. Construa uma pirâmide da seguinte maneira:
 - a) Na janela 2D crie um polígono para ser a base da sua pirâmide.
 - b) Na janela 3D clique em “Pirâmide”  e depois em “Fazer Extrusão para Pirâmide ou Cone” . Clique sobre a base e defina altura sendo 4.
- 2) Crie um plano da seguinte maneira:
 - a) Construa 3 controles deslizante  com o nome de a,b,c, intervalo entre 0 e 4 e no item animação altere a velocidade para 4.

b) Na caixa de entrada insira os seguintes pontos $P = (-3,0,a)$, $Q = (0,3,b)$ e $R = (3,0,c)$.

c) Utilize a ferramenta “plano por 3 pontos”  e crie um plano clicando em P,Q e R que devem estar posicionados sobre as retas. Clique com o botão direito sobre cada controle e ative a função “Animar”.

Sua construção deve se parecer com o mostrado na figura abaixo:



- 3) Selecione a ferramenta “interseção de duas superfícies”  e na janela de álgebra clique na pirâmide e no plano. O que você observa? Observe quantos lados possuem as figuras geradas na interseção. Qual a figura com mais lados possível de ser encontrada?
- 4) Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado (dentro da tela de 3D ou na janela de álgebra) pela interseção. Neste momento uma nova janela a esquerda deve surgir. O que você observa? Quantas faces possui a pirâmide e quantas arestas possui a interseção de mais lados possíveis?
- 5) Repita os procedimentos do item anterior, considerando a construção de um prisma. Não é necessário que desfaça tudo que fez, apenas apague a pirâmide na janela de álgebra e sobre a base, utilize a ferramenta selecione “Fazer Extrusão para Prisma ou Cilindro” , e determine a altura como 4. Considere novamente os questionamentos finais do item anterior a respeito do prisma.
- 6) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados do polígono gerado pela interseção entre o poliedro e plano em cada situação? Por que esta relação acontece? Procure generalizar seu pensamento. Se achar necessário faça mais interseções com poliedros de sua escolha.

Construa um cubo no lugar do prisma anterior, usando um quadrado como base na janela 2D. É possível obter triângulos regulares, quadrados, retângulos e pentágonos regulares a partir da interseção de planos com cubos? Se preferir desative a animação e controle o plano manualmente pelos controles deslizantes.

A décima e última versão desta atividade encontra-se no capítulo de metodologia, na seção 3.5.

ANEXO B – VERSÕES DA ATIVIDADE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICA NO ESPAÇO

Atividade: Construções Geométricas no Espaço (versão 1)

Os softwares de Geometria dinâmica “permitem que construções geométricas possam ser arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos durante a realização da construção” (Zulatto, 2003)¹⁹. Traduzindo: Um quadrado, construído por suas propriedades geométricas num software com esta característica, não deixará de ser um quadrado quando for arrastado por um de seus pontos móveis.

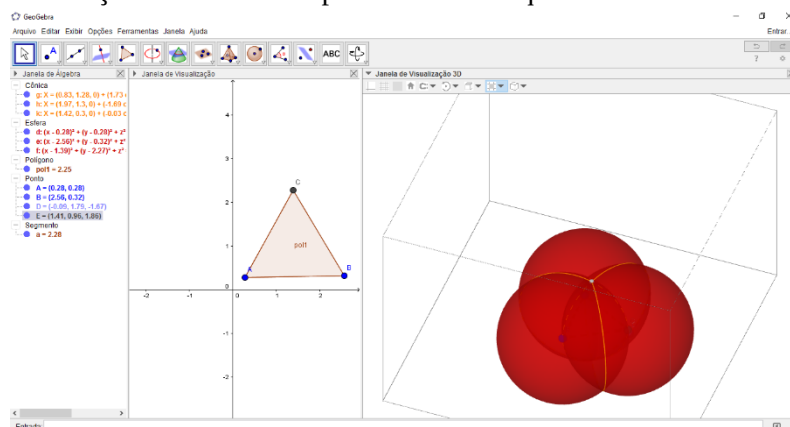
Agora realize as atividades

1) Vamos construir juntos um poliedro regular segundo suas propriedades geométricas:

- a) Construir um triângulo regular (na janela de visualização 2D) utilizando a ferramenta polígono regular  .
- b) Na janela de visualização 3D, construir 3 esferas com centro nos três vértices do triângulo e raio igual ao tamanho do lado do triângulo (utilize um vértice como centro e outro como raio das esferas). Utilize a ferramenta “Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos”  .
- c) Marcar um ponto de intersecção (o superior ou o inferior das três esferas) utilizando a ferramenta “intersecção de duas superfícies”  e a ferramenta ponto  . Sua

¹⁹ ZULATTO, R. B. A. O perfil dos professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica em suas aulas. In: VALENTE, V. R. (Org.) *Anais do II SIPEM*. São Paulo. SBEM, 2003.

construção deve se aproximar do que é mostrado na figura abaixo:



- d) Ligue os vértices do Triângulo até o ponto gerado na intersecção utilizando segmentos de reta. Na janela de álgebra, oculte as esferas e também as circunferências de intersecções para facilitar a visualização da figura.
- e) Você consegue identificar o poliedro gerado? Justifique sua resposta.
- f) Utilize a citação de Zulatto (2003) para verificar se o que foi feito realmente é, de fato, uma construção geométrica.

2) Se utilizarmos um quadrado como base, marcando a intersecção superior e inferior das esferas (que serão quatro, agora) qual poliedro geramos? Este poliedro é regular? Como posso garantir utilizando o software?

A geometria dinâmica assegura que este poliedro também é proveniente de uma construção geométrica?

3) Agora é com você! Utilize polígonos regulares, esferas, retas perpendiculares e paralelas, planos e o que mais quiser para construir um Cubo e um Prisma Reto de base qualquer segundo suas propriedades. Não se esqueça de deixar anotado seus passos e se certificar de que está construindo geometricamente. Boas construções!

Atividade: Construções Geométricas no Espaço (versão 2)

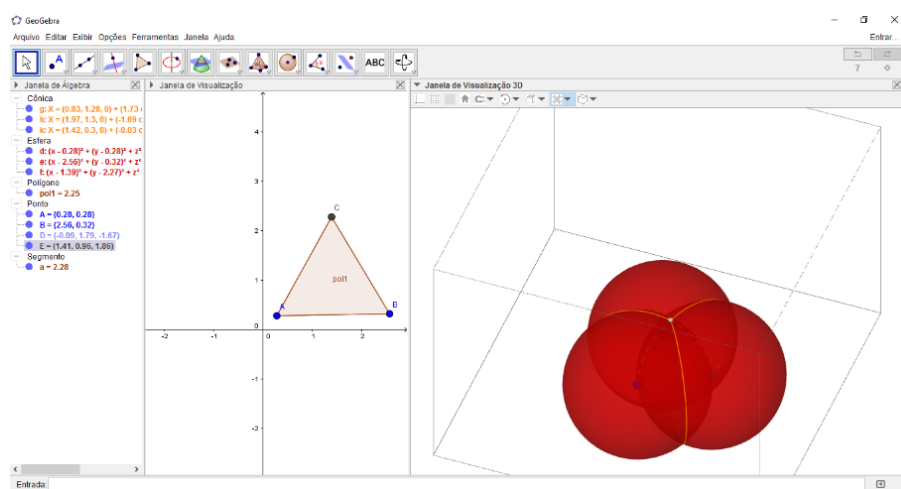
1. Construa um poliedro regular de acordo com suas propriedades geométricas.

- a) Construir um triângulo regular (na janela de visualização 2D) utilizando a ferramenta polígono regular  .

- b) Na janela de visualização 3D, construa 3 esferas com centro nos três vértices do triângulo e raio igual ao tamanho do lado do triângulo (utilize um vértice como centro e outro como raio das esferas). Utilize a ferramenta “Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos” .

Pontos”

- c) Marque as interseções das esferas duas a duas utilizando o comando “interseção de duas superfícies”  e em seguida marque o ponto comum destas três interseções utilizando a ferramenta ponto . Sua construção deve se aproximar do que é mostrado na figura abaixo:



Obs: utilize a janela de álgebra para ocultar as esferas e também as circunferências de intersecção para ter uma melhor vista.

- d) Ligue os vértices do Triângulo até o ponto gerado na intersecção utilizando segmentos de reta.
- e) Qual o poliedro gerado? Justifique sua resposta.
- f) Os softwares de Geometria dinâmica “permitem que construções geométricas possam ser arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos durante a realização da construção” (ZULATTO, 2003). Nesse sentido, um quadrado, construído por suas propriedades geométricas num software com esta característica, não deixará de ser um quadrado quando for arrastado por um de seus pontos móveis. Com base nessa ideia, pode-se dizer que os procedimentos realizados nesta atividade caracterizam uma construção geométrica?

- Se utilizarmos um quadrado como base, marcando a intersecção superior e inferior das esferas (que serão quatro, agora) qual poliedro geramos? Este poliedro é regular?
- Utilize polígonos regulares, esferas, retas perpendiculares e paralelas, planos e o que mais quiser para construir um Cubo e um Prisma Reto de base qualquer segundo suas propriedades.

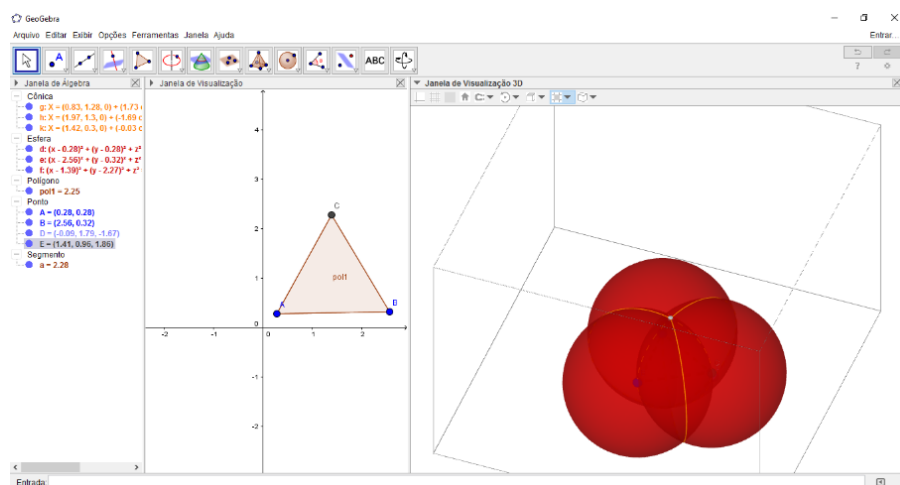
Referências Bibliográficas

ZULATTO, R. B. A. **O perfil dos professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica em suas aulas.** In: VALENTE, V. R. (Org.) **Anais do II SIPEM.** São Paulo. SBEM, 2003.

Atividade: Construções Geométricas no Espaço (versão 3)

1. Construa um poliedro de acordo com suas propriedades geométricas.

- g) Construir um triângulo regular (na janela de visualização 2D) utilizando a ferramenta polígono regular .
- h) Na janela de visualização 3D (menu exibir), construa 3 esferas com centro nos três vértices do triângulo e raio igual ao tamanho do lado do triângulo (use um vértice como centro e outro como ponto qualquer das esferas). Utilize a ferramenta “Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos” .
- i) Marque as interseções das esferas duas a duas utilizando o comando “interseção de duas superfícies”  e em seguida marque um e apenas um ponto comum destas três interseções utilizando a ferramenta “ponto”  ou “interseção de dois objetos” . Sua construção deve se aproximar do que é mostrado na figura abaixo:



Obs: utilize a janela de álgebra para ocultar as esferas e também as circunferências de interseção para ter uma melhor vista.

- j) Ligue os vértices do Triângulo até o ponto gerado na interseção utilizando segmentos de reta.
 - k) Qual o poliedro gerado? Justifique sua resposta.
 - l) Os softwares de Geometria dinâmica “permitem que construções geométricas possam ser arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos durante a realização da construção” (ZULATTO, 2003). Nesse sentido, um quadrado, construído por suas propriedades geométricas num software com esta característica, não deixará de ser um quadrado quando for arrastado por um de seus pontos móveis. Com base nessa ideia, pode-se dizer que os procedimentos realizados nesta atividade caracterizam uma construção geométrica?
2. Se utilizarmos um quadrado como figura inicial, marcando a interseção superior e inferior das esferas (que serão quatro, agora) qual poliedro geramos? Este poliedro é regular? Justifique.
3. Utilize polígonos regulares, esferas, retas perpendiculares e paralelas, planos e o que mais quiser para construir um Cubo e um Prisma Reto de base qualquer segundo suas propriedades.

Referências Bibliográficas

ZULATTO, R. B. A. **O perfil dos professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica em suas aulas.** In: VALENTE, V. R. (Org.) **Anais do II SIPEM.** São Paulo. SBEM, 2003.

A quarta e última versão desta atividade encontra-se no capítulo de metodologia, na seção 3.5.

ANEXO C – VERSÕES DA ATIVIDADE PRISMAS

Atividade: Prismas (versão 1)

Atividade 1

- 1) **Quantas faces têm um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma triangular reto?**
- 2) Construa um prisma triangular reto.
 - a. Construa um triângulo **ABC** utilizando a ferramenta “Polígono” .
 - b. Na guia “Exibir”, clique em “Janela de Visualização 3D” .
 - c. Com a ferramenta “Reta Perpendicular” , construa três retas **f**, **g** e **h** perpendiculares ao plano, clicando no plano e num dos vértices do triângulo de cada vez.
 - d. Com a ferramenta “Ponto” , construa um ponto **D**, em uma das retas perpendiculares.
 - e. Com a ferramenta “Plano Paralelo” , construa um plano **d**, paralelo ao plano inicial, clicando neste plano e, em seguida, no ponto **D**.
 - f. Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” , construa os pontos **E** e **F**, de intersecção das duas outras retas perpendiculares, com o plano **d**; para isso clique no plano **d** e em uma das retas de cada vez.
 - g. Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces do prisma, ligando os vértices em cada face.
 - h. Para facilitar a visualização, faça desaparecer o plano **d**, e as retas **f**, **g** e **h**. Para isso, clique sobre o ícone azul: , referente a cada objeto na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela. O ícone ficará branco: ; sempre que for necessário fazer um objeto aparecer ou desaparecer é desta forma que se deve proceder.
- 3) **Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?**
- 4) Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.

- a. Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” , construa os pontos médios **G, H, I, J, K, L, M, N e O** das arestas do prisma.
- b. Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces do poliedro, ligando os vértices em cada face.

5) Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras geométricas são encontradas em suas faces? Sua previsão estava correta?

Atividade 2

1) Quantas faces têm um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma quadrangular reto?

2) Construa um prisma quadrangular reto.

- a. Construa um quadrilátero **ABCD** utilizando a ferramenta “Polígono” .
- b. Na guia “Exibir”, clique em “Janela de Visualização 3D” .
- c. Com a ferramenta “Reta Perpendicular” , construa quatro retas **f, g, h e i** perpendiculares ao plano, clicando no plano e num dos vértices do quadrilátero de cada vez.
- d. Com a ferramenta “Ponto” , construa um ponto **E**, em uma das retas perpendiculares.
- e. Com a ferramenta “Plano Paralelo” , construa um plano **e**, paralelo ao plano inicial, clicando neste plano e, em seguida, no ponto **E**.
- f. Com a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , construa os pontos **F, G e H**, de intersecção das duas outras retas perpendiculares, com o plano **e**; para isso clique no plano **e** e em uma das retas de cada vez.
- g. Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces do prisma, ligando os vértices em cada face.
- h. Para facilitar a visualização, faça desaparecer o plano **e**, e as retas **f, g, h e i**.

3) Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

4) Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.

- a. Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” , construa os pontos médios **J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T** e **U** das arestas do prisma.
- b. Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces do poliedro, ligando os vértices em cada face.

5) Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras geométricas são encontradas em suas faces? Sua previsão estava correta?

Atividade 3

1) Quantas faces têm um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma pentagonal reto?

2) Construa um prisma pentagonal reto.

- a. Construa um pentágono **ABCDE** utilizando a ferramenta “Polígono” .
- b. Na guia “Exibir”, clique em “Janela de Visualização 3D” .
- c. Com a ferramenta “Reta Perpendicular” , construa cinco retas **f, g, h, i** e **j** perpendiculares ao plano, clicando no plano e num dos vértices do quadrilátero de cada vez.
- d. Com a ferramenta “Ponto” , construa um ponto **F**, em uma das retas perpendiculares.
- e. Com a ferramenta “Plano Paralelo” , construa um plano **k**, paralelo ao plano inicial, clicando neste plano e, em seguida, no ponto **F**.
- f. Com a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , construa os pontos **G, H, I**, e **J**, de intersecção das duas outras retas perpendiculares, com o plano **k**; para isso clique no plano **k** e em uma das retas de cada vez.
- g. Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces do prisma, ligando os vértices em cada face.
- h. Para facilitar a visualização, faça desaparecer o plano **k**, e as retas **f, g, h, i** e **j**.

3) Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

4) Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.

- a. Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” , construa os pontos médios **K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, Z** e **A₁** das arestas do prisma.
- b. Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces do poliedro, ligando os vértices em cada face.

5) Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras geométricas são encontradas em suas faces? Sua previsão estava correta?

Atividade 4

1) Quantas faces têm um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma hexagonal reto?

2) Construa um prisma hexagonal reto.

- a. Construa um pentágono **ABCDEF** utilizando a ferramenta “Polígono” .
- b. Na guia “Exibir”, clique em “Janela de Visualização 3D” .
- c. Com a ferramenta “Reta Perpendicular” , construa seis retas **g, h, i, j, k** e **l** perpendiculares ao plano, clicando no plano e num dos vértices do quadrilátero de cada vez.
- d. Com a ferramenta “Ponto” , construa um ponto **G**, em uma das retas perpendiculares.
- e. Com a ferramenta “Plano Paralelo” , construa um plano **m**, paralelo ao plano inicial, clicando neste plano e, em seguida, no ponto **G**.
- f. Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” , construa os pontos **H, I, J, K** e **L**, de intersecção das duas outras retas perpendiculares, com o plano **m**; para isso clique no plano **m** e em uma das retas de cada vez.
- g. Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces do prisma, ligando os vértices em cada face.
- h. Para facilitar a visualização, faça desaparecer o plano **m**, e as retas **g, h, i, j, k** e **l**.

3) Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

- 4) Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.

a. Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” , construa os pontos médios **M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, Z, A₁, B₁, C₁, D₁, E₁, e F₁** das arestas do prisma.

b. Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces do poliedro, ligando os vértices em cada face.

- 5) **Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras geométricas são encontradas em suas faces? Sua previsão estava correta?**

Atividade 5

- 1) Com as informações coletadas, complete a tabela a seguir.

Lados da base do prisma reto	Arestas	Vértices	Faces	Faces do poliedro cujos vértices são pontos médios das arestas do prisma
3				
4				
5				
6				

- 2) Quantas arestas, vértices e faces terá um prisma reto de base heptagonal? Quantas faces possuirá um poliedro em que seus vértices são os pontos médios das arestas deste prisma?
- 3) Quantas arestas, vértices e faces terá um prisma reto de base octogonal? Quantas faces possuirá um poliedro em que seus vértices são os pontos médios das arestas deste prisma?
- 4) Generalize o número de arestas, vértices e faces de um prisma reto de base de lado n ; e o número de faces de um poliedro em que seus vértices são os pontos médios das arestas deste prisma.

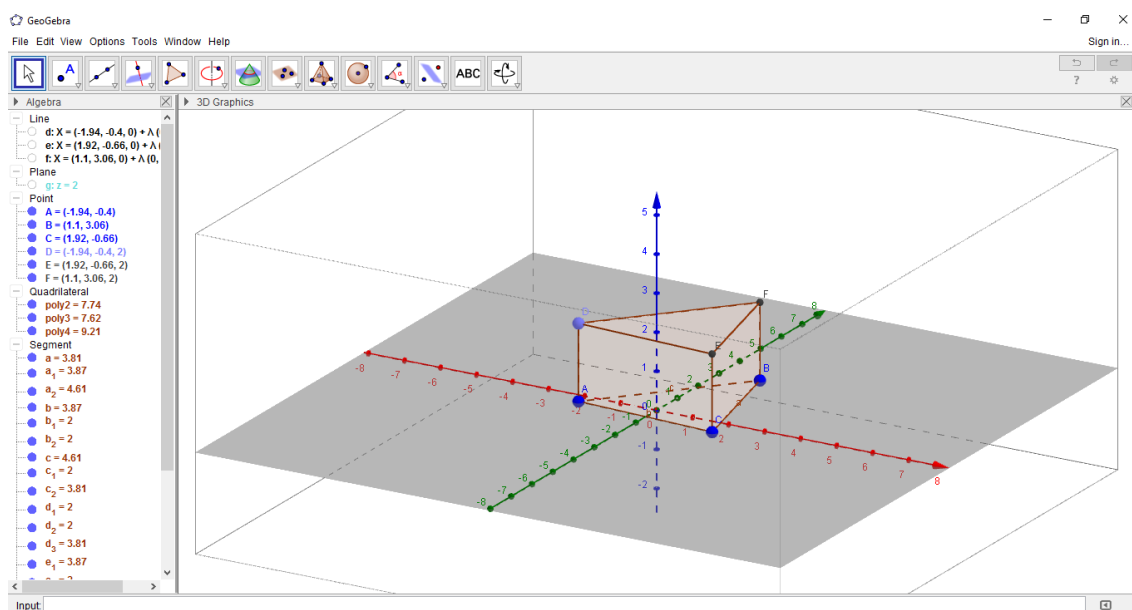
Bibliografia

DANTE, L. R. **Matemática**: Contextos e Aplicações. São Paulo: Ática, 2009.

Atividade: Prismas (versão 2)

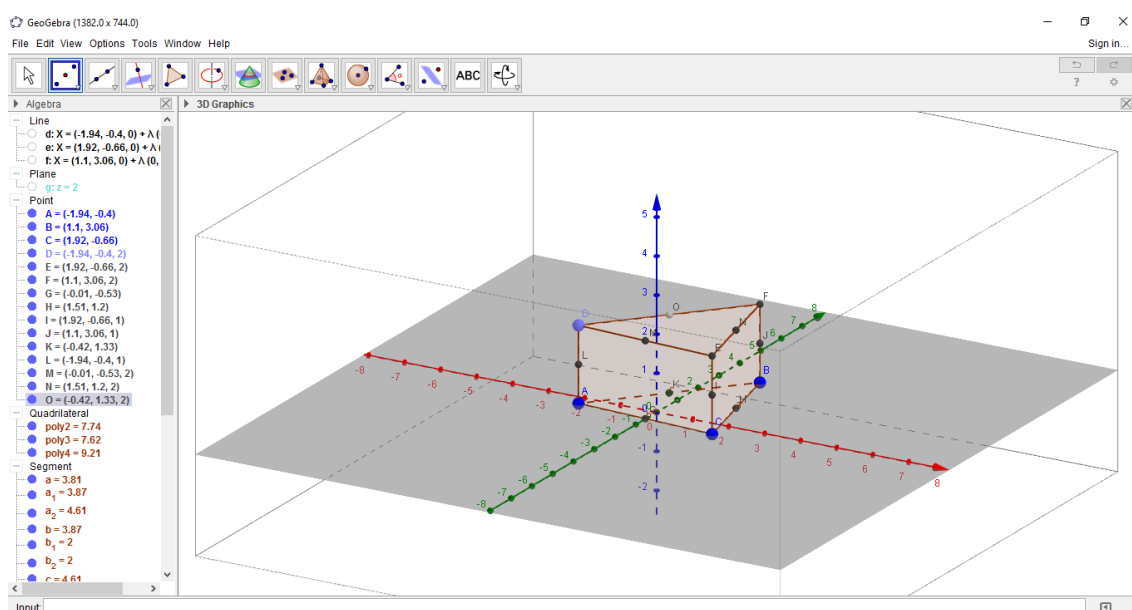
Atividade 1

Construa um prisma triangular reto.

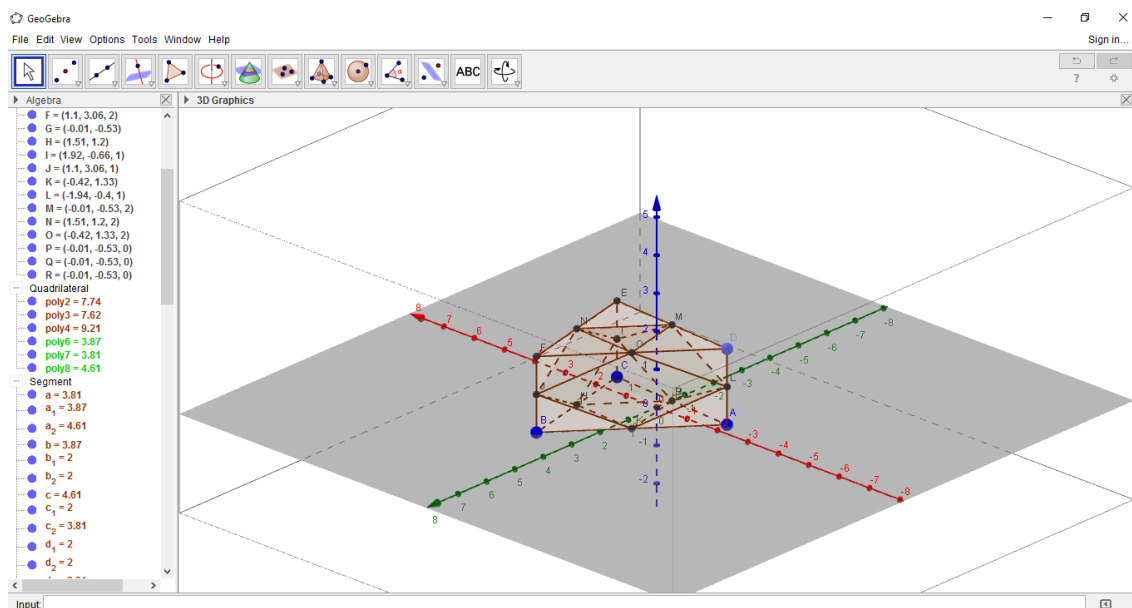


Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

Encontre os pontos médios das arestas do prisma.



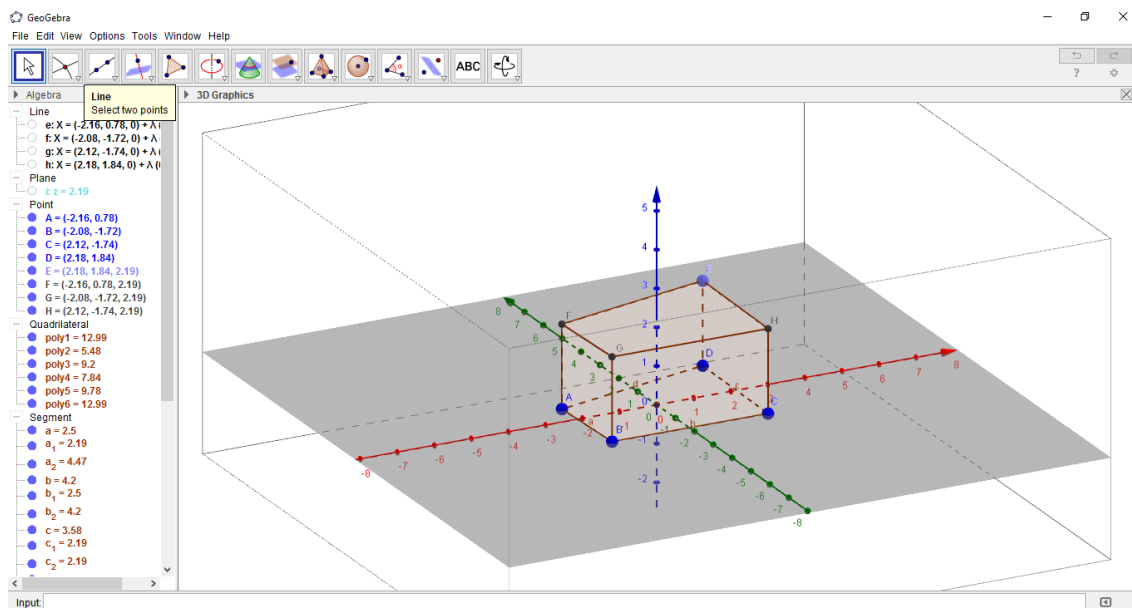
Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.



Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras Geométricas são encontradas em suas faces?

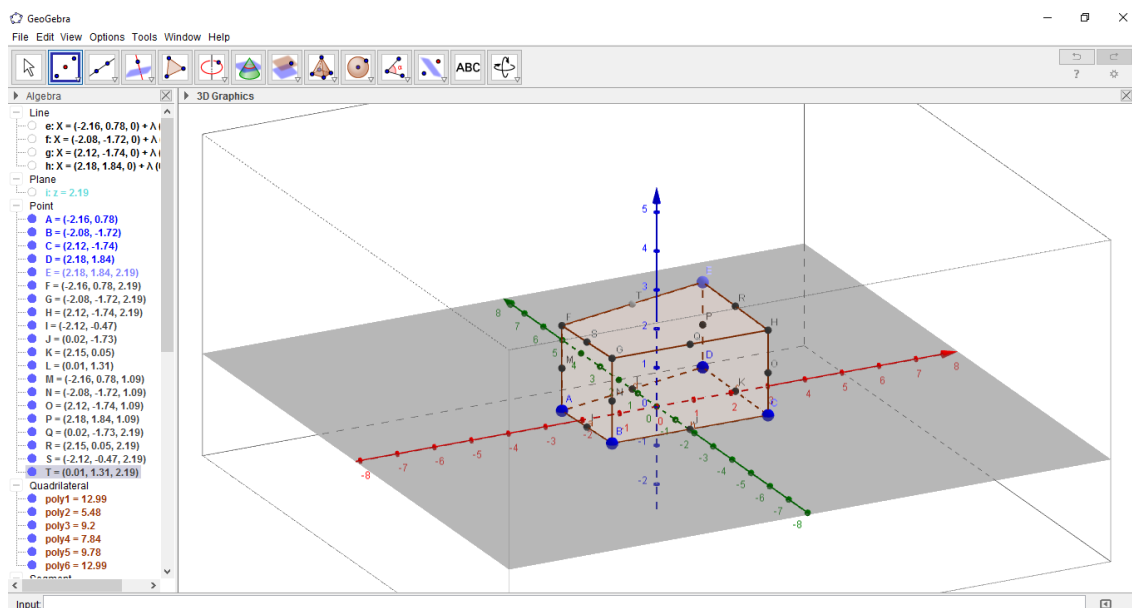
Atividade 2

Construa um prisma quadrangular reto.

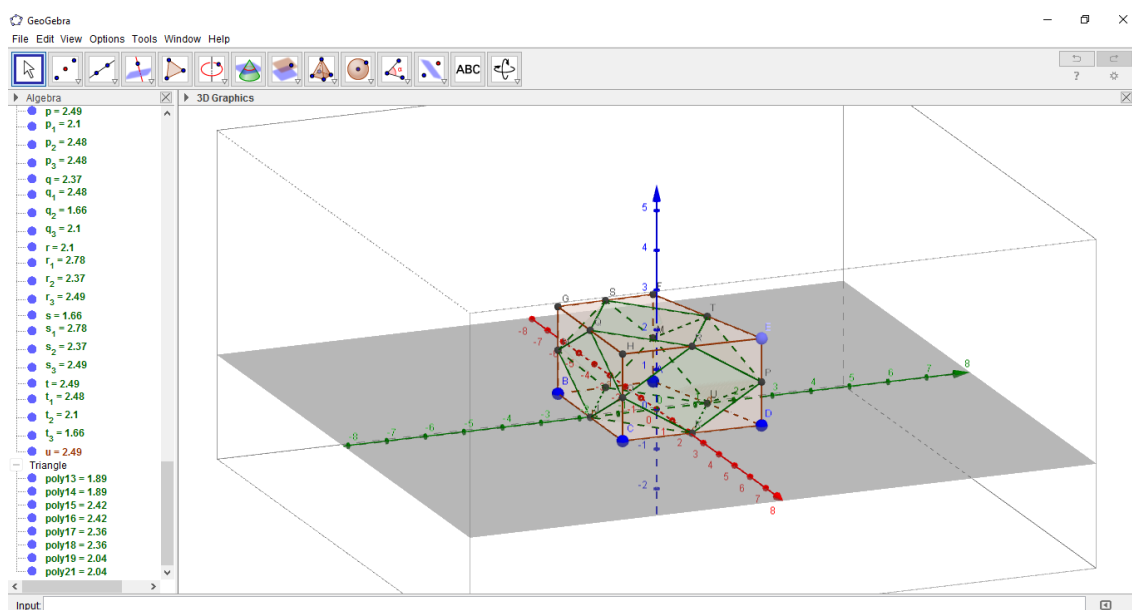


Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

Encontre os pontos médios das arestas.



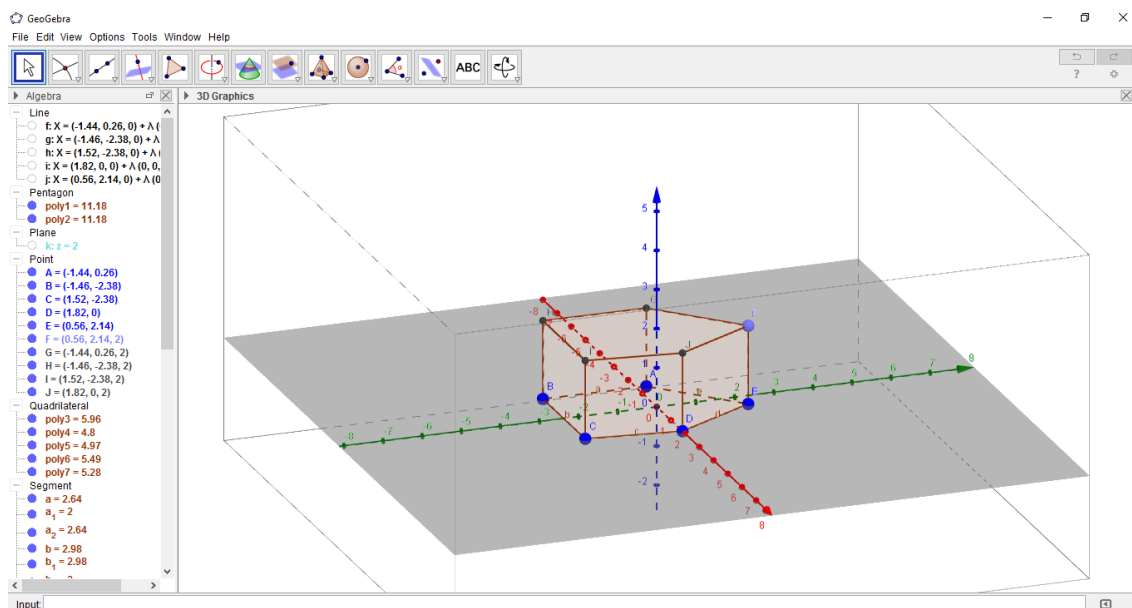
Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do paralelepípedo.



Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras Geométricas são encontradas em suas faces?

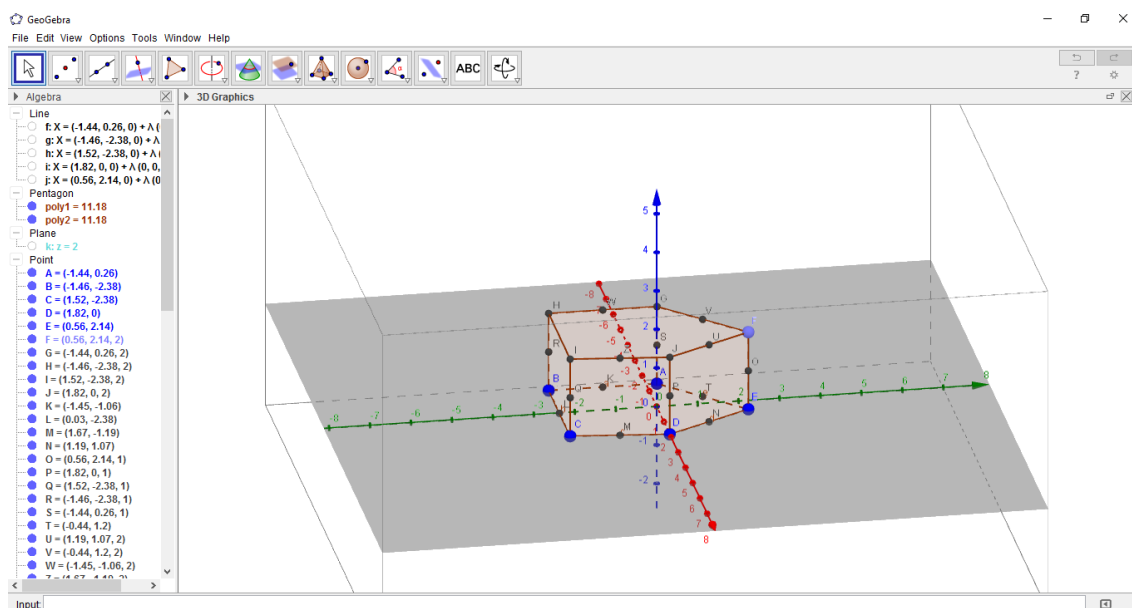
Atividade 3

Construa um prisma pentagonal reto.

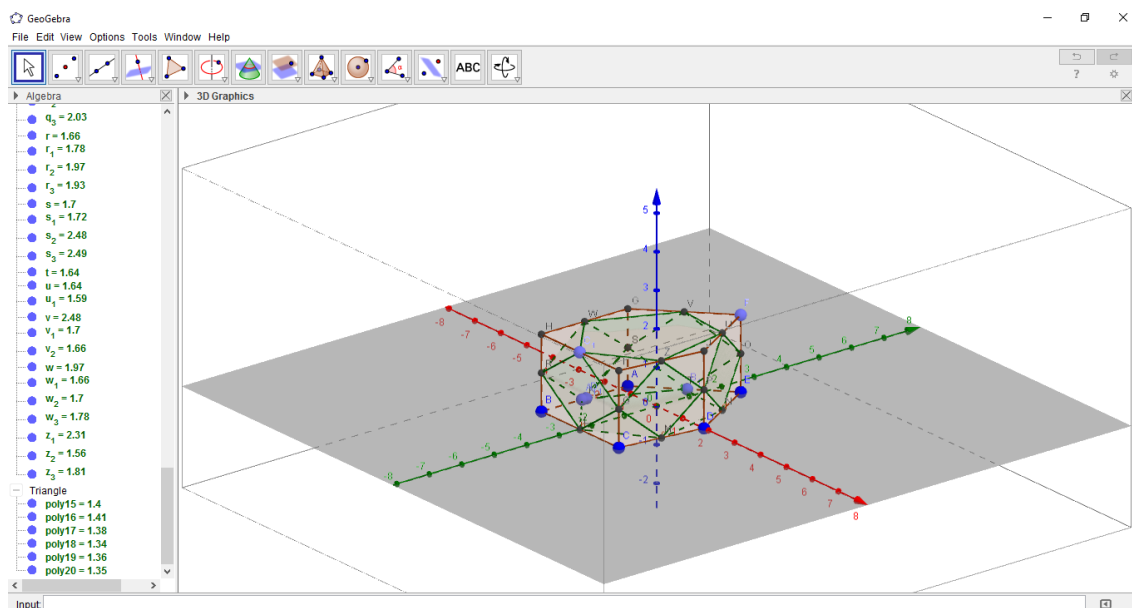


Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

Encontre os pontos médios das arestas do prisma.



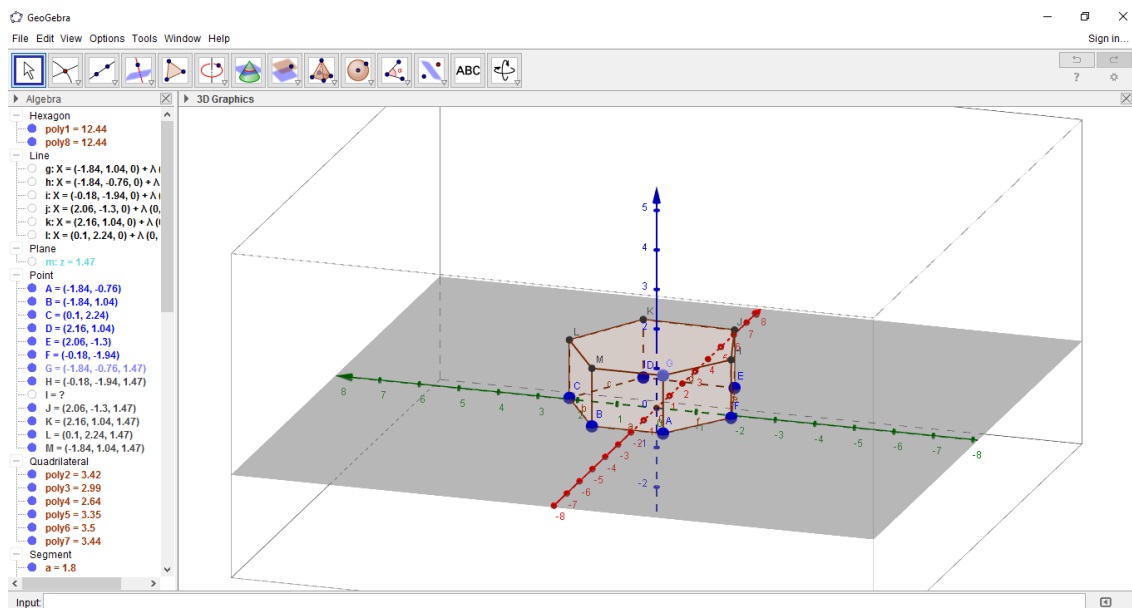
Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.



Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras Geométricas são encontradas em suas faces?

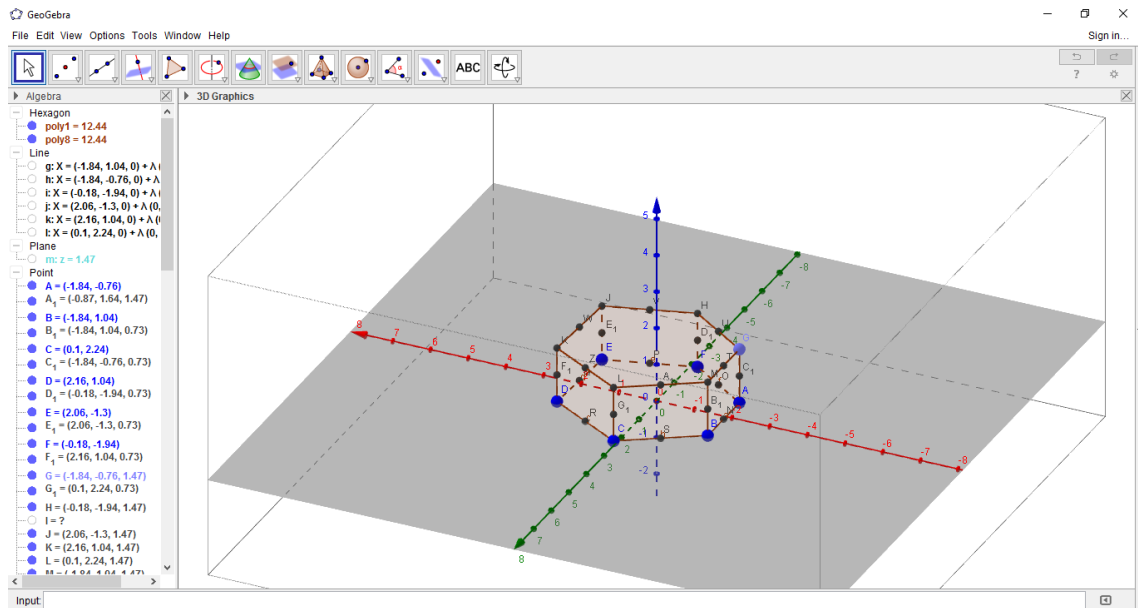
Atividade 4

Construa um prisma hexagonal reto.

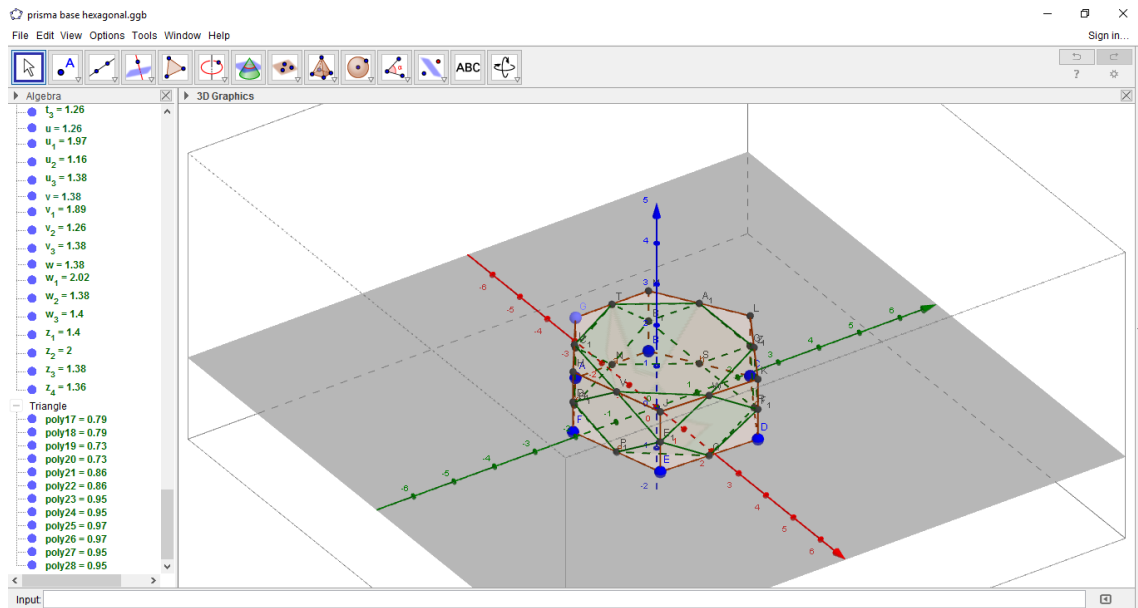


Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

Encontre os pontos médios das arestas do prisma.



Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.



Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras Geométricas são encontradas em suas faces?

Com as informações coletadas, complete a tabela a seguir.

Lados da base do prisma reto	Arestas	Vértices	Faces	Faces do poliedro cujos vértices são pontos médios das arestas do prisma
3				
4				
5				

6				
---	--	--	--	--

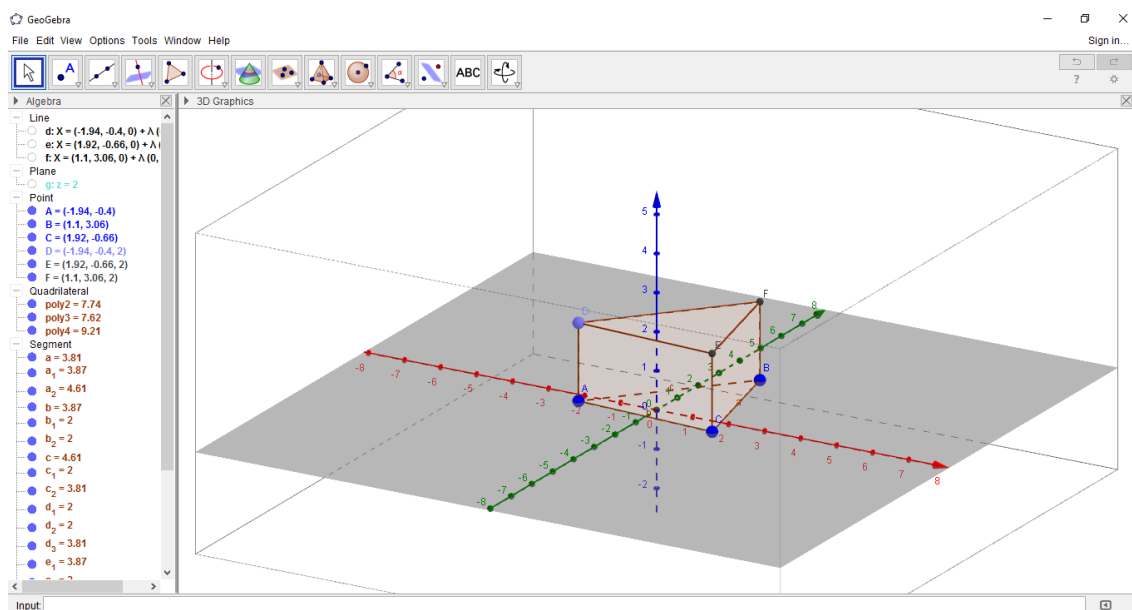
Você consegue prever quantas faces possuirá um poliedro em que seus vértices são os pontos médios das arestas de um prisma reto de base heptagonal? E octogonal? Você consegue generalizar para um prisma de base de lado n ?

Atividade: Prismas (versão 3)

Atividade Geometria Espacial – Prismas

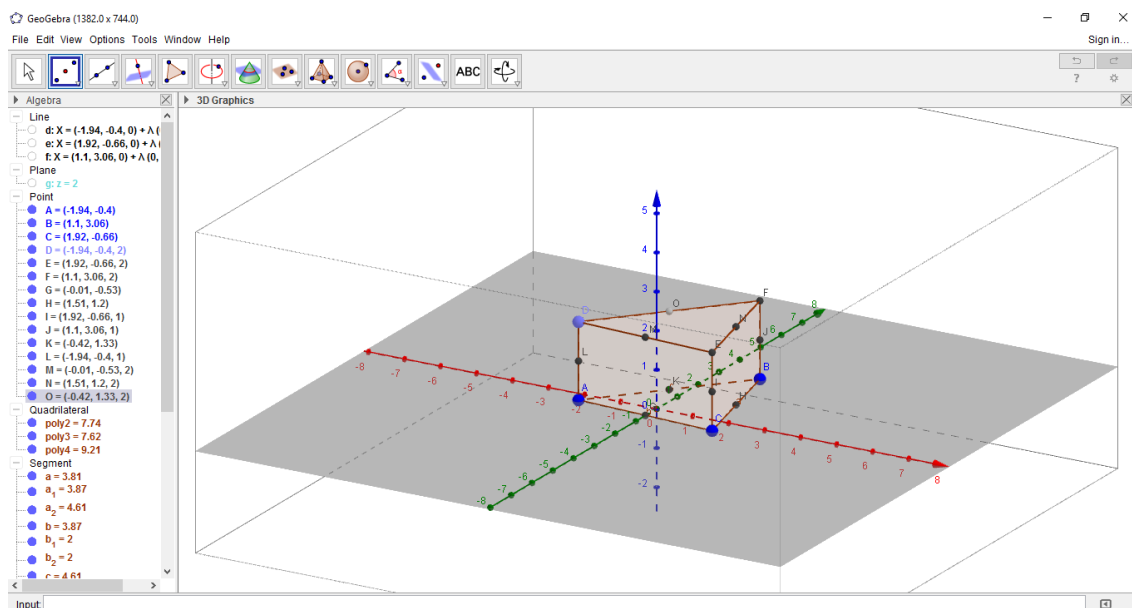
Atividade 1

Construa um prisma triangular reto.



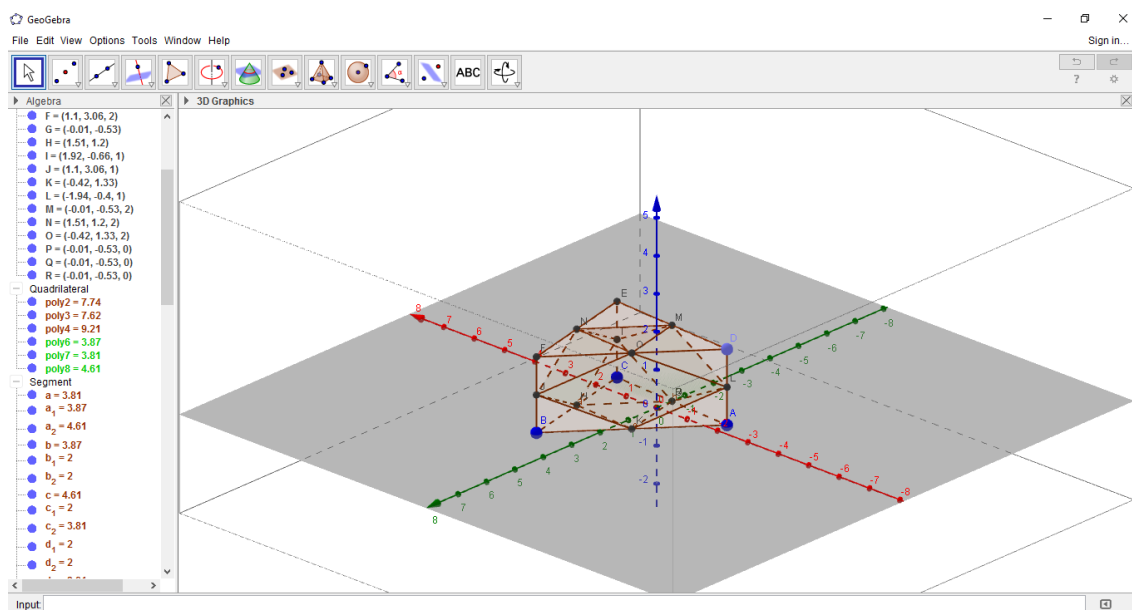
Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

Encontre os pontos médios das arestas do prisma.



Você consegue visualizar o poliedro formado ao ligarmos os pontos médios de todas as arestas do prisma? Realize a construção no Geogebra. (Eu repetiria esse tipo de pergunta em todos, pra ir despertando a intuição e dedução desde o início)

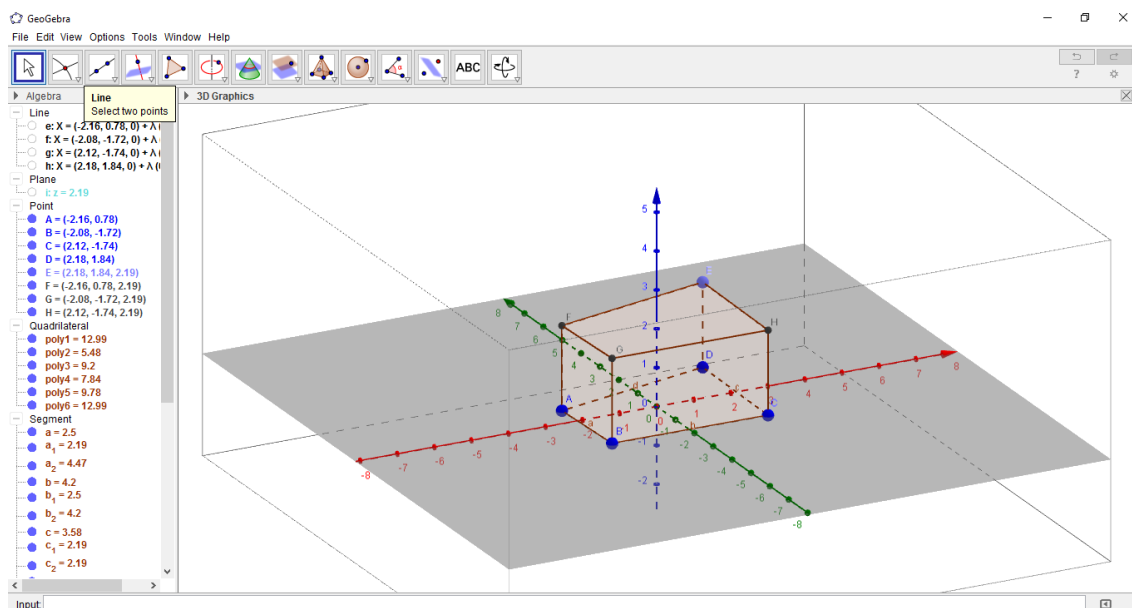
Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.



Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras Geométricas são encontradas em suas faces?

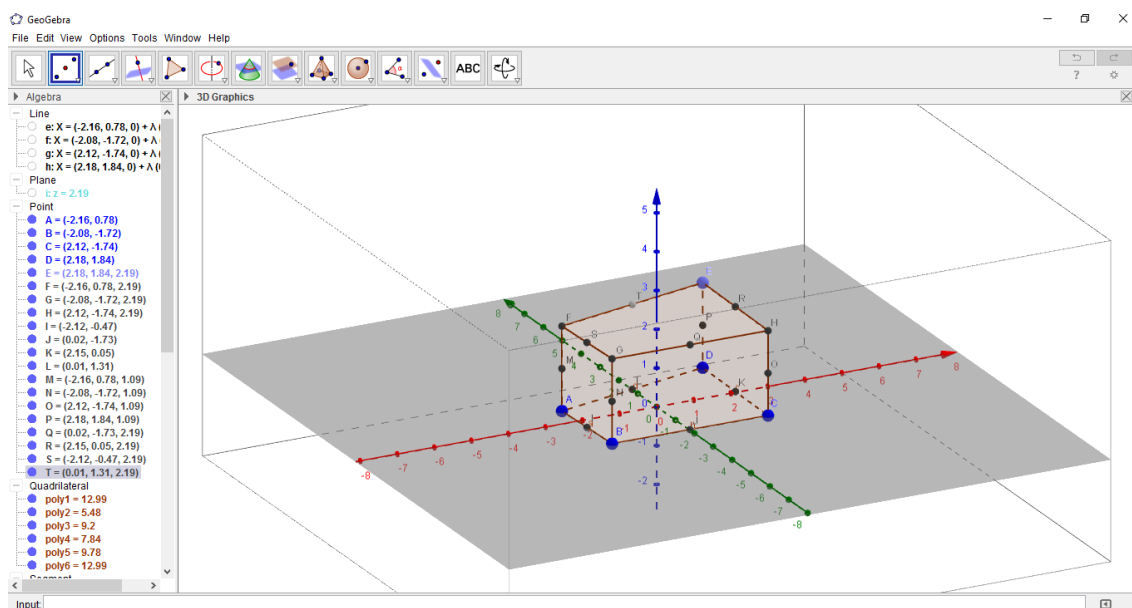
Atividade 2

Construa um prisma quadrangular reto.

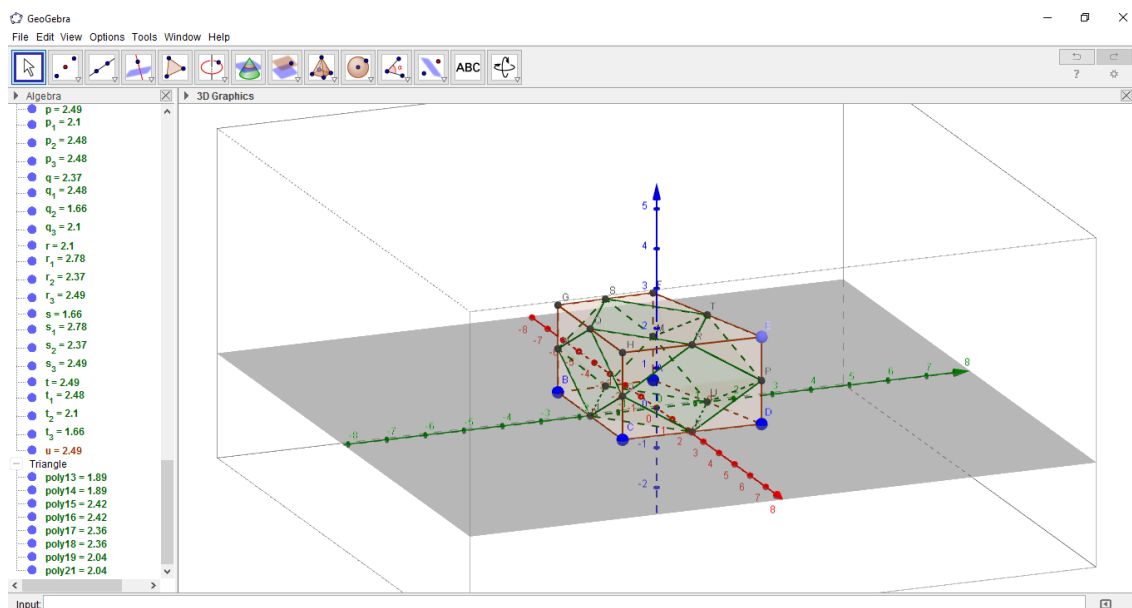


Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

Encontre os pontos médios das arestas.



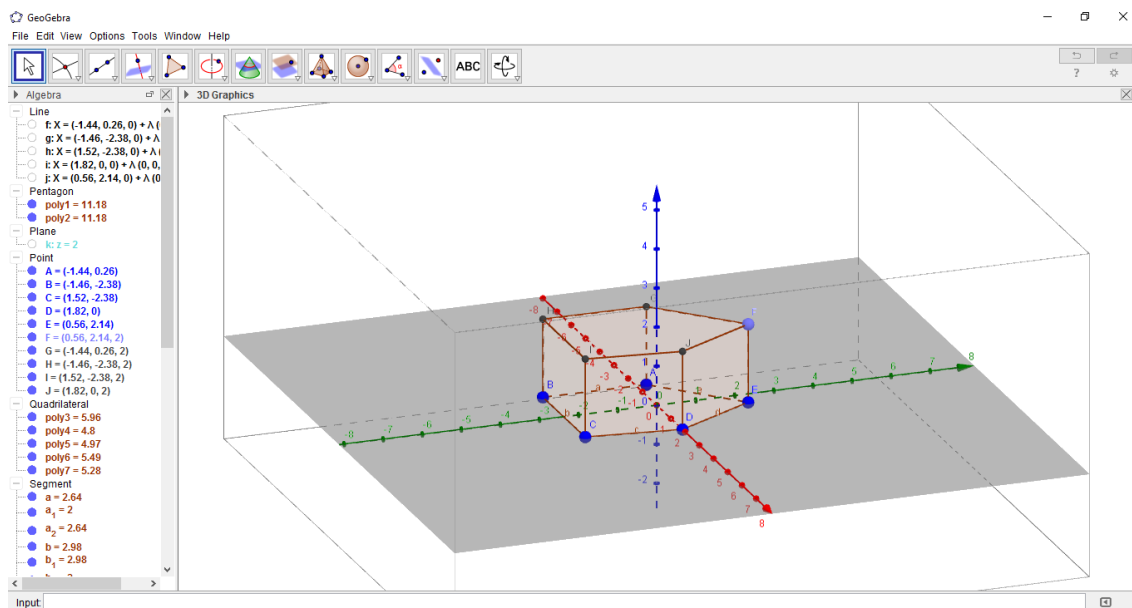
Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do paralelepípedo.



Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras Geométricas são encontradas em suas faces?

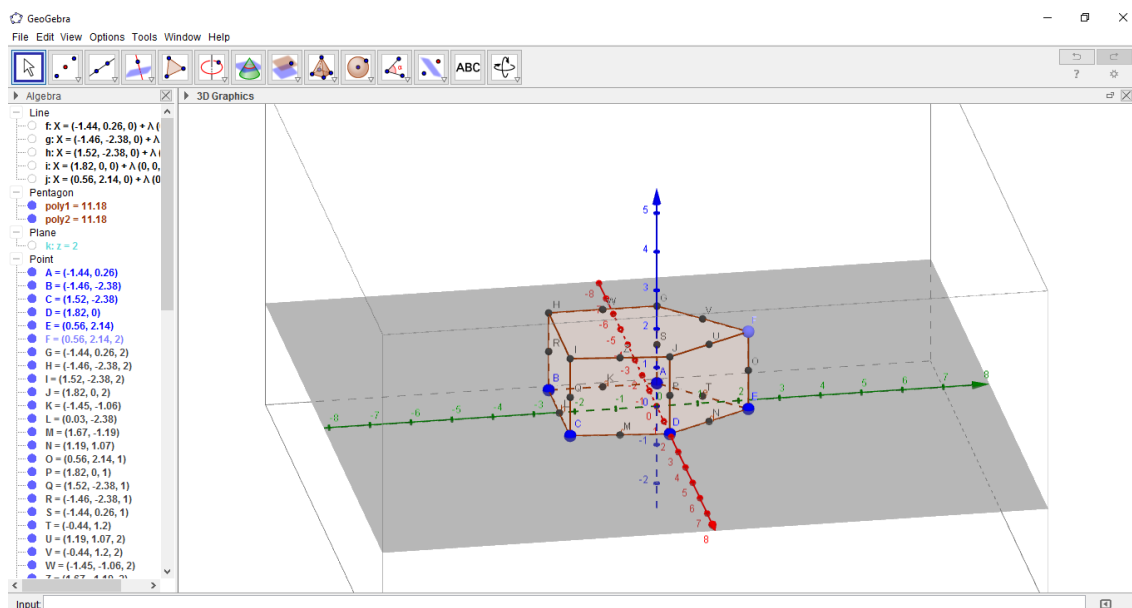
Atividade 3

Construa um prisma pentagonal reto.

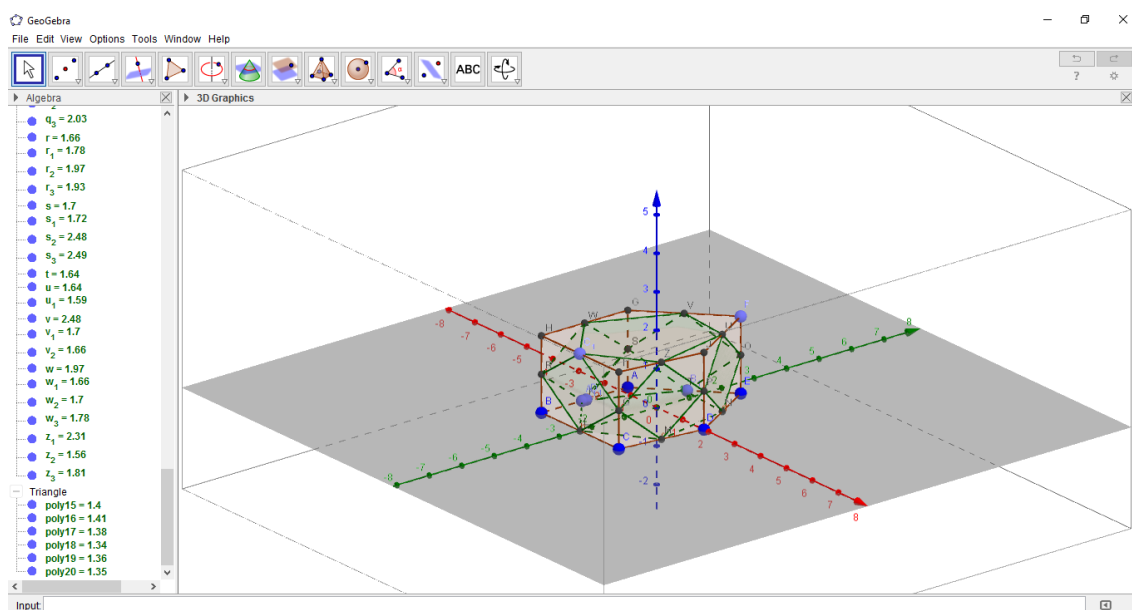


Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

Encontre os pontos médios das arestas do prisma.



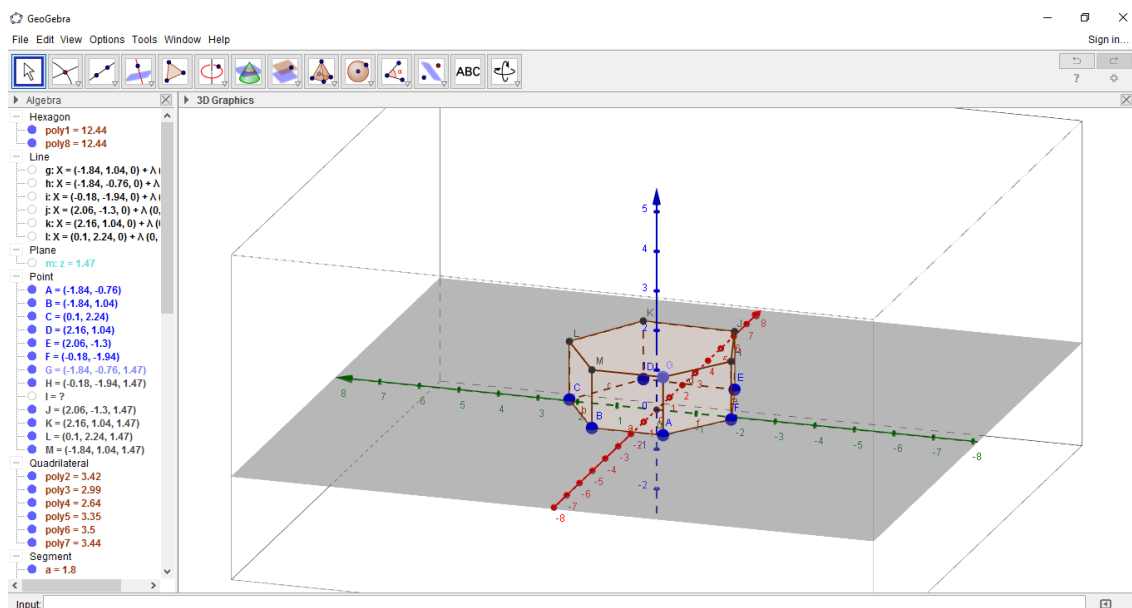
Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.



Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras Geométricas são encontradas em suas faces?

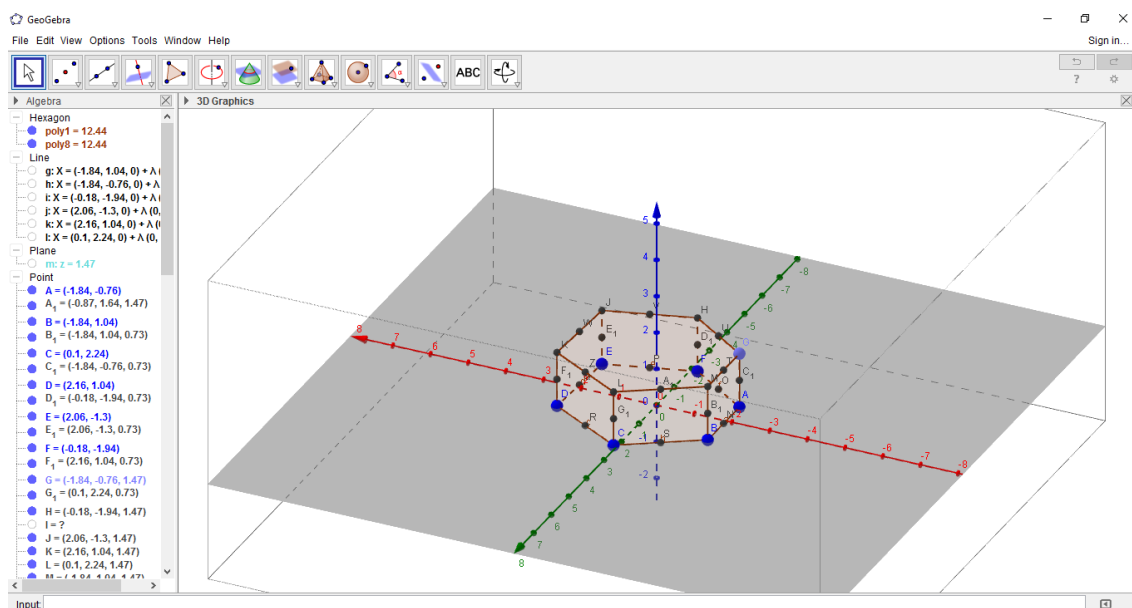
Atividade 4

Construa um prisma hexagonal reto.

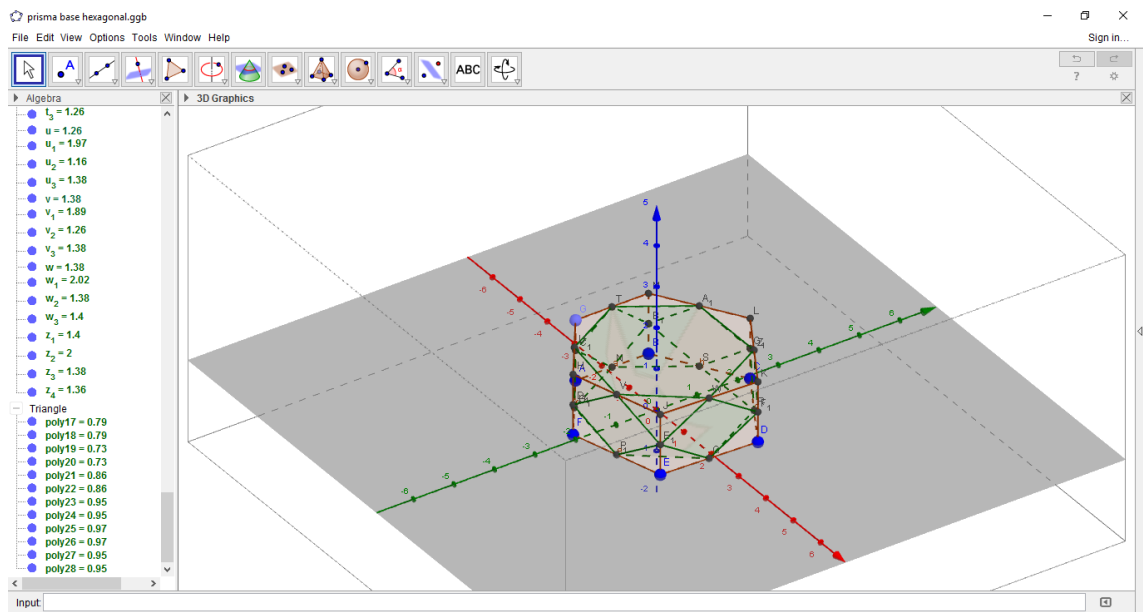


Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?

Encontre os pontos médios das arestas do prisma.



Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma.



Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras Geométricas são encontradas em suas faces?

Com as informações coletadas, complete a tabela a seguir.

Lados da base do prisma reto	Arestas	Vértices	Faces	Faces do poliedro cujos vértices são pontos médios das arestas do prisma
3	18	9	11	Triângulo equiláteros e losangos
4	24	12	14	Triângulos Isósceles e losangos
5	30	15	17	Triângulos, losangos e pentágonos
6	36	18	20	Não consegui prever os

				polígonos das faces.
--	--	--	--	----------------------

Você consegue prever quantas faces possuirá um poliedro em que seus vértices são os pontos médios das arestas de um prisma reto de base heptagonal? E octogonal? Você consegue generalizar para um prisma de base de lado n ?

Um poliedro em que seus vértices são os pontos médios das arestas de um prisma reto de base heptagonal terá 23 faces. Com a base octogonal terá 26 faces. O número de faces pra o lado da base n será $3n + 2$.

Obs: Eu entendi que era pra generalizar só para o número de faces. Por mim seria legal generalizar a tabela toda... não parece difícil

Atividade: Prismas (versão 4)

Parte 1

Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma triangular?

1. Construção de um prisma triangular.

d) Construa um triângulo utilizando a ferramenta “Polígono”



e) Na guia “Exibir”, clique em “Janela de Visualização 3D”



f) Clique na janela 3D, em seguida em “Pirâmide”



para Prisma ou Cilindro”



g) **Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?** (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma Triangular		
Faces	Arestas	Vértices

2. Construção do poliedro cujos vértices são pontos médios das arestas do prisma triangular.

a) Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” , construa os pontos médios das arestas do prisma.

b) Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces desse poliedro, ligando os pontos médios das arestas do prisma.

c) Para facilitar a visualização oculte o prisma, clicando sobre o ícone azul: , referente a esse objeto na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela.

d) **Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais polígonos são encontrados em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?**

Parte 2

Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma quadrangular?

1. Construa um prisma quadrangular.

a) **Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?** (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma Quadrangular		
Faces	Arestas	Vértices

2. Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma quadrangular.

a) **Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras geométricas são encontradas em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?**

Parte 3

Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma pentagonal?

6) Construa um prisma pentagonal.

- a) **Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?** (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma pentagonal		
Faces	Arestas	Vértices

7) Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma pentagonal.

- a) **Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras geométricas são encontradas em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?**

Parte 4

5) Complete os valores na tabela a seguir.

Lados da base do prisma	Arestas	Vértices	Faces	Faces do poliedro cujos vértices são pontos médios das arestas do prisma
3				
4				
5				
6				
7				
8				

n				
---	--	--	--	--

Atividade: Prismas (versão 5)

Nesta atividade estudaremos prismas de diferentes bases abordando o ponto médio de cada uma de suas arestas. A tarefa tem como objetivo identificar o número de arestas, vértices e faces de um prisma e também o poliedro gerado ao ligar cada um dos pontos médios das arestas do prisma.

Um prisma pode ser caracterizado como um poliedro convexo com duas bases (polígonos) congruentes e paralelas, além de possuir faces laterais planas.

Abra o Arquivo do GeoGebra “Atividades Primas T2”. Nele encontram-se três prismas: um de base triangular (P3), um de base quadrada (P4) e um de base pentagonal (P5).

Parte 1

- h) Quantas faces, arestas e vértices o prisma de base triangular (P3) possui? (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma Triangular		
Faces	Arestas	Vértices

- i) Agora faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma triangular?
- j) Utilizando o arquivo disponível clique em explore os botões “Pontos médios de P3”, “Poliedro interior a P3” e “Ocultar P3” e visualize e explore o poliedro gerado. Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais e quantos polígonos são encontrados em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?

Parte 2

- a) Quantas faces, arestas e vértices o prisma quadrangular (P4) possui? (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma Quadrangular		
Faces	Arestas	Vértices

- b) Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma quadrangular?
- c) Utilizando o arquivo disponível explorando os botões referentes e visualize o poliedro gerado. Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais e quantos polígonos são encontrados em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?

Parte 3

- a) Quantas faces, arestas e vértices o prisma pentagonal (P5) possui? (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma pentagonal		
Faces	Arestas	Vértices

- b) Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma pentagonal?
- c) Utilizando o arquivo disponível explorando os botões referentes e visualize o poliedro gerado. Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais e quantos polígonos são encontrados em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?

Parte 4

A tabela a seguir diz respeito aos valores que você encontrou nos itens anteriores. Complete até deduzir a fórmula para um poliedro com base de n lados.

Lados da base do prisma	Faces	Arestas	Vértices	Nº de faces do poliedro gerado

				pelos pontos médios
3				
4				
5				
6				
7				
8				
n				

A sexta e última versão desta atividade encontra-se no capítulo de metodologia, na seção 3.5.

**ANEXO D - ATIVIDADE APRESENTADA POR BORBA, SCUCUGLIA E
GADANIDIS (2014, P. 59 E 60):**

Quadro 2.2: Atividade A - DERIVADA: reta secante → reta tangente

Orientações para construção

- Instale e inicie o GeoGebra.
- Acesse www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/
- Insira na barra de comandos a equação $f(x) = x^2$ e depois a reta $b: y = 0$.
- Configure a janela de visualização.
- Opções → Configurações → Janela de visualização.
- Insira e configure um controle deslizante:
 - Nome a , intervalo $[-4; 4]$, incremento 0.01.
 - Ferramentas → Interface Gráfica → Controle deslizante.
- Encontre a equação da reta $z = g(x)$ determinada por $(1, 1)$ e $(1 + a, f(1 + a))$.
- Insira na barra de comandos a equação da reta encontrada $g(x) = ?$.
- Construa os pontos A e B de intersecção entre f e g .
- Movimente o botão do controle deslizante de modo que a posição da reta permita:
 - Construir a reta c perpendicular à reta b passando pelo ponto B.
 - Construir a reta d perpendicular à reta c passando pelo ponto A.
- Construa o ponto C de intersecção entre as retas c e d .
- Clique com o botão direito do mouse sobre c e d e desabilite a opção *exibir objeto*.
- Construa os segmentos de reta AC e BC, entre os pontos A e C e B e C, respectivamente.
- Insira na barra de comandos $m = BC/AC$.
- Configure os objetos adequadamente (cor, rótulos, etc.).

Fonte: Elaboração própria.

Quadro 2.3: Perguntas – Atividade A

- Que similaridades ou padrões podem ser percebidos com a dinamicidade?
- O que acontece quando variamos o controle deslizante de modo que a tenda a zero?
- Por que a reta secante à parábola tende a tornar-se tangente?
- Por que o valor de m é igual ao do coeficiente dependente na equação de reta $y = g(x)$?
- Há alguma relação entre $y = x^2$ em $x = 1$ e $y = 2x - 1$?
- Por que vários elementos tornam-se indefinidos quando $a = 0$?
- O processo no qual a tende a zero pode ser representado por $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$?
- No caso em que $y = x^2$, qual o valor desse limite?

Fonte: Elaboração própria.