

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

GABRIEL KASPARY MUNHOZ

Projeto de um motor-foguete utilizando o método das características

São João da Boa Vista

2024

Gabriel Kaspary Munhoz

Projeto de um motor-foguete utilizando o método das características

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Aeronáutica.

Orientador: Prof^a Dr.^a Leandra Isabel de Abreu

São João da Boa Vista

2024

M966p Munhoz, Gabriel Kaspary
Projeto de um motor-foguete utilizando o método das características
/ Gabriel Kaspary Munhoz. -- São João da Boa Vista, 2024
37 p. : il., tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia
Aeronáutica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade
de Engenharia, São João da Boa Vista
Orientadora: Leandra Isabel de Abreu

1. Engenharia aeroespacial. 2. Motores de foguetes. 3. Projetos de
engenharia. 4. Simulação por computador. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade
Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos
pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**PROJETO DE UM MOTOR-FOGUETE UTILIZANDO O MÉTODO DAS
CARACTERÍSTICAS**

Aluno: Gabriel Kaspary Munhoz
Orientador: Profa. Dra. Leandra Isabel de Abreu

Banca Examinadora:

- Leandra Isabel de Abreu (Orientadora)
- Éder Luiz Oliveira (Examinador)
- Vagner Candido de Sousa (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Processo nº 397/2023)
--

São João da Boa Vista, 25 de abril de 2024

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, Rosane e José, pela educação e apoio que me possibilitaram ser aprovado e realizar uma faculdade integral em outra cidade. Agradeço imensamente a minha namorada Giulya, que além de me apoiar e me incentivar a cada dia a concluir a graduação, me fez companhia nos extensos dias de estudos.

Gostaria de agradecer também aos docentes Prof^a Dr^a. Leandra Isabel de Abreu, pela orientação e ensinamentos durante o presente trabalho, além dos membros da banca Prof^o Dr. Vagner Candido de Sousa e Prof^o Dr. Éder Oliveira. Em especial ao professor Vagner por me orientar em um trabalho de iniciação científica durante o processo de graduação.

“Todo mundo ia para o aeroclube para aprender a voar, mas jamais pensava que aquele produto, para ser voado, tinha que ser fabricado. Podia ser tão fascinante quanto voar fabricar um avião.”
(Ozires Silva)

RESUMO

Com o passar do tempo, a tecnologia aeronáutica e aeroespacial foi avançando, e com isso, surgiram os motores à reação e motores-foguete. Uma das partes principais destes motores, é o bocal de saída. O presente trabalho apresenta uma das formas de obtenção de seu formato com o mínimo comprimento possível (utilizado em casos em que se faz necessária a economia de peso, por exemplo em foguetes), além de uma simulação em software CFD, para fins de comparação, de forma a demonstrar ao leitor a validação do método das características em um projeto real. Este método, que consiste em encontrar pontos importantes do escoamento (tais como os da parede do bocal) por meio das chamadas "linhas características", é um método iterativo simples, que apesar de necessitar de poucos dados iniciais e possuir um baixo custo computacional, é muito eficaz, e por conta disso, pode ser utilizado ainda hoje em projetos reais.

PALAVRAS-CHAVE: bocal; simulação; método das características.

ABSTRACT

As the time passed, the aeronautical and aerospace technology has been advancing, and with this, reaction and rocket propulsion engines were created. One of the major parts of this type of motors, is the exit nozzle. This work, shows one of the ways of obtaining your shape for the minimum possible length (used in cases when a weight economy is need, for example in rockets), plus a CFD software simulation, for comparison purposes, on the way to demonstrate to the reader, the validation of the characteristics method on a real project. This method, that consists in finding important flow points (such as the wall ones) by the called "characteristic lines", is a simple iterative method, that despite needing only a few initial data and having low computational costs, is very effective, and because of that, can be still used nowadays in real projects.

KEYWORDS: nozzle; simulation; characteristics method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Wright-Flyer	12
Figura 2	14-Bis	13
Figura 3	Fokker Dr. 1	13
Figura 4	Focke-Wulf Ta 152	14
Figura 5	Bell-X1	14
Figura 6	Réplica da Sputnik-1	15
Figura 7	Motor-Foguete	17
Figura 8	Ângulos de uma linha característica	22
Figura 9	Pontos internos ao escoamento	23
Figura 10	Aproximação das linhas características	24
Figura 11	Pontos na parede	25
Figura 12	Pontos na onda de choque	26
Figura 13	Posição da linha sônica	27
Figura 14	Domínio da dependência e região de influência do ponto A	27
Figura 15	Bocal convergente-divergente	28
Figura 16	Bocal de comprimento mínimo	29
Figura 17	Formato ótimo para o bocal para 200 linhas características	31
Figura 18	Malha utilizada na simulação	32
Figura 19	Condições de contorno utilizadas na simulação	32
Figura 20	Distribuição de Mach dentro do bocal	34
Figura 21	Distribuição de Mach dentro do bocal	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades na câmara de combustão	30
Tabela 2 – Propriedades ambientes	30
Tabela 3 – Constantes do gás	30
Tabela 4 – Dados do problema	30

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
CFD	Computer Fluid Dynamics
CAD	Computer Aided Design

LISTA DE SÍMBOLOS

a_0	Velocidade do som em m/s
M	Número de Mach
γ	Coeficiente de expansão adiabática
ρ	Densidade
ν	Função de Prandtl Meyer
μ	Ângulo de Mach
R	Constante universal dos Gases
Pa	Pascal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	OBJETIVOS	16
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
3.1	Motor-foguete	17
3.2	Potencial de Velocidade	17
3.3	Equação da continuidade	18
3.4	Equação de Euler	18
3.5	Dinâmica dos Fluidos Computacional - CFD	19
4	METODOLOGIA	21
4.1	Método das Características	21
4.1.1	Inclinação das linhas características	21
4.2	Equações de compatibilidade	22
4.2.1	Escoamento interno	23
4.2.2	Parede	24
4.2.3	Onda de choque	25
4.3	Linha inicial de dados	27
4.4	Regiões de influência e domínio da dependência	27
4.5	Projeto de um bocal supersônico de comprimento mínimo	28
4.6	Implementação em código	30
4.7	Simulação em software CFD	31
4.7.1	Setup	31
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	34
6	CONCLUSÃO	36
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	36
	REFERÊNCIAS	37

1 INTRODUÇÃO

Desde as primeiras aeronaves movidas a pistão, até os dias atuais onde se utiliza a tecnologia de motores a reação, a humanidade sempre se manteve encantada com a magia de se colocar no ar e em movimento, um objeto tão pesado como o avião.

Para compreender melhor a evolução da história da aviação, ainda que de forma breve, voltaremos ao início do século XX, mais precisamente em 17 de dezembro de 1903, na Carolina do Norte, quando os irmãos Orville e Wilbur Wright voam com o avião denominado "Wright Flyer" sobre a cidade de Kill Devil Hills, sendo a eles creditado como o primeiro voo de uma aeronave, a qual não possuía um meio de decolar sozinho necessitando de um mecanismo semelhante a um estilingue para impulsioná-lo, porém, conseguia se manter no ar por meio de um motor a pistão (LINDBERG, 2003), conforme ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Wrigth-Flyer



fonte: (LINDBERG, 2003)

Poucos anos após esse feito, no dia 12 de Novembro de 1906, Alberto Santos Dumont faz o primeiro voo com sua aeronave batizada de "14-bis", sobre a cidade de Paris. Esta, por sua vez, já não necessitava ser lançada, além de ter alcançado incríveis 41,3 km/h com seu motor de 50 h.p. (BARROS, 2006).

De acordo com (BARROS), pela primeira vez na história, um aparelho mais pesado que o ar conseguia realizar um vôo completo, decolando, voando e pousando sem nenhum auxílio externo, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – 14-Bis



fonte: (LATIN, 2023)

Desse momento em diante, tivemos muitos avanços tecnológicos, principalmente com a primeira e segunda guerras mundiais, as quais tiveram a participação de aeronaves como a Fokker Dr. I, utilizada pela Alemanha, que já alcançava 185 km/h com um motor de 110 h.p (GRAY; THETFORD, 1971) e a Focke-Wulf Ta 152, também alemã, que poderia chegar aos 759 km/h com um motor de 1726 h.p.(LOWE, 2008), conforme ilustram as Figuras 3 e 4.

Figura 3 – Fokker Dr. I



fonte: (GRAY; THETFORD, 1971)

Figura 4 – Focke-Wulf Ta 152



fonte: (LOWE, 2008)

Porém, somente em 1947 (MILLER, 2001), é que tivemos a primeira aeronave experimental a ultrapassar a velocidade do som (ou seja, ter um número de Mach maior que 1). Essa aeronave utilizava um motor-foguete à propelente líquido (XLR11), e foi chamada de Bell-X1, e era capaz de alcançar uma velocidade de 1541 km/h, conforme ilustra a Figura 5.

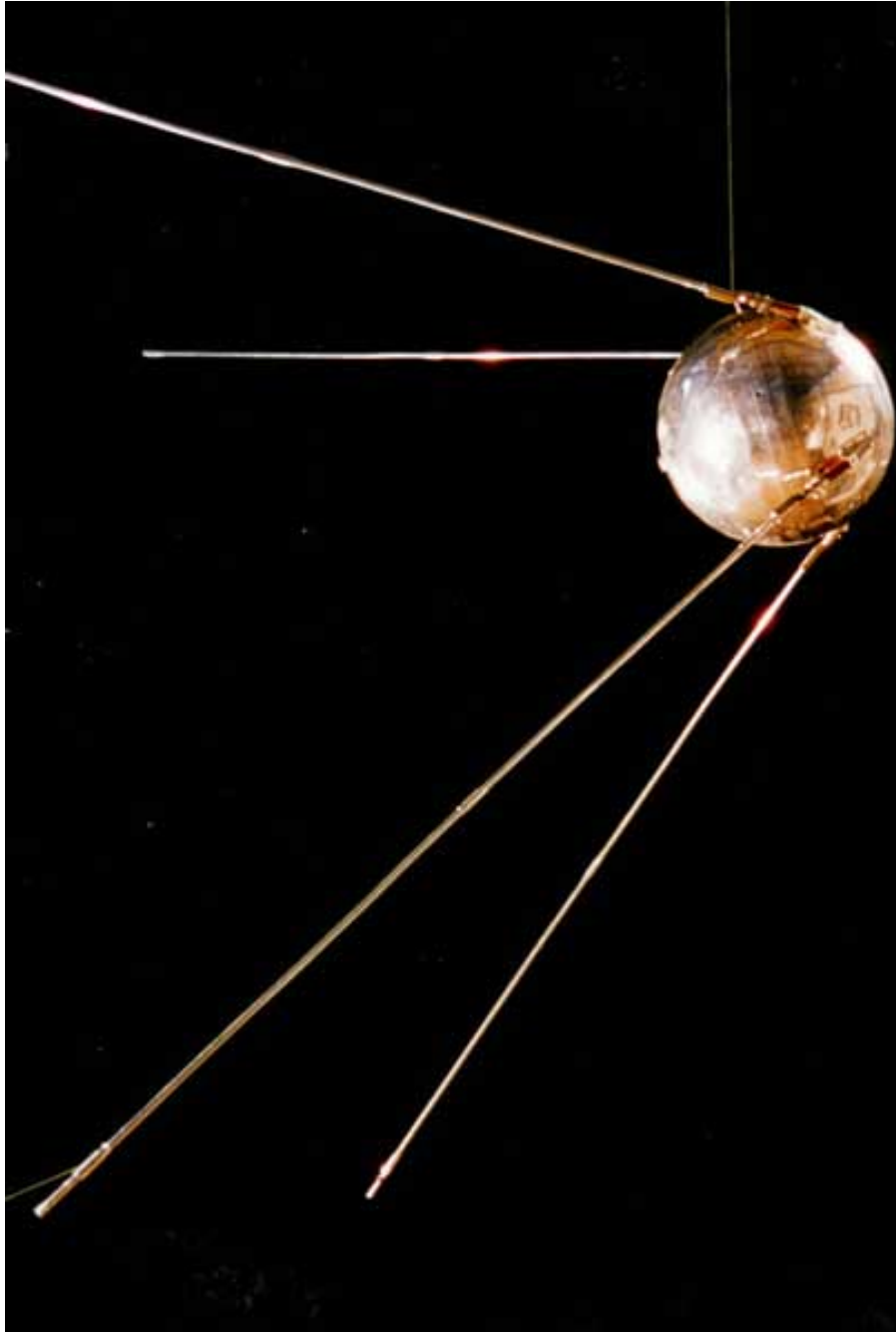
Figura 5 – Bell-X1



fonte: (MILLER, 2001)

Em paralelo com este fascínio pelos céus, tivemos também a vontade de explorar o espaço. Por conta disso, em 1957 (LAUNIUS; LOGSDON; SMITH, 2000), a União Soviética lançou o primeiro foguete espacial, a Sputnik-1, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Réplica da Sputnik-1



fonte: (LAUNIUS; LOGSDON; SMITH, 2000)

A partir desse momento, o estudo dos fenômenos em velocidade supersônica avançaram rápida e significativamente, e hoje, um dos métodos utilizados para se prever o formato de um bocal de motores à reação e foguetes (além de túneis de vento), é o método das características. Nomeadamente, para este trabalho de conclusão de curso, o projeto de um bocal de mínimo comprimento (utilizado em motores-foguete). Método este, que consiste em utilizar o que são chamadas de linhas características, que nada mais são do que linhas formadas por pontos do escoamento onde há alguma indeterminação (nas derivadas de ρ , p , T , u , v , etc).

O cruzamento entre essas linhas é então utilizado para encontrar regiões de interesse no interior de um escoamento, como por exemplo os pontos que formam a parede, que serão utilizados para prever o formato ótimo do bocal e os pontos interiores, utilizados para encontrar o número de Mach interno.

2 OBJETIVOS

O Trabalho de conclusão de curso em questão tem por objetivo projetar um bocal de motor-foguete, utilizando o método das características em um código escrito no Matlab, encontrando suas linhas características (e, consequentemente, o formato do bocal) e simulando a geometria tanto no Matlab, quanto em software CFD (ANSYS - Fluent), para posteriormente comparar o resultado alcançado pelas equações e pelo software.

Este estudo tem por finalidade comprovar o uso do método das características, demonstrando sua equalidade à uma simulação fluido dinâmica assistida por computador.

Para atender aos objetivos propostos, este trabalho primeiramente apresentará na Seção 3 uma breve revisão teórica, demonstrando as equações utilizadas, de forma a mostrar ao leitor sua validação para o caso em questão, além de uma familiarização com o motor-foguete. Em seguida, na Seção 4, detalharemos o processo, desde a utilização do código, passando pela localização dos pontos na parede do bocal, pela simulação desta geometria encontrada, até serem obtidos os resultados, que serão detalhados na Seção 5; e, por fim, na Seção 6, será apresentada uma breve conclusão sobre os resultados obtidos, além de sugestões para trabalhos futuros.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será realizada uma breve revisão sobre as partes principais de um motor-foguete e as principais equações e considerações utilizadas pelo método das características, a fim de familiarizar o leitor com a veracidade do que está sendo feito, como antes descrito na Seção 2.

3.1 MOTOR-FOGUETE

Como descrito na Seção 1, o objeto de estudo deste trabalho em questão, é o projeto de um motor-foguete. Na Figura 7 abaixo podemos ver seus principais componentes.

Figura 7 – Motor-Foguete



fonte: Elaborada pelo autor

Como podemos ver na Figura 7, o motor-foguete é basicamente formado por 3 partes principais: A câmara de combustão, a garganta e a saída do bocal.

A câmara de combustão é onde ocorre a mistura do oxigênio com o combustível, para assim ocorrer a queima. Quando ela se inicia, os gases aquecidos à altíssima temperatura, são empurrados pela pressão em direção à garganta do bocal, onde adquirem Mach 1, aproximadamente, e continuam até a saída do bocal, onde já com velocidade supersônica, são expulsos para a atmosfera. Esse último trecho entre a garganta e a saída deve ser muito bem projetado, de modo a evitar a formação de ondas de choque, e em especial no caso de um motor-foguete, deve ter o mínimo comprimento possível, de modo a diminuir o peso total da estrutura.

3.2 POTENCIAL DE VELOCIDADE

Partindo do princípio que podemos considerar o escoamento através do bocal como sendo irrotacional, além de definir um vetor de velocidades V em coordenadas cartesianas, tal que:

$$V = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad (1)$$

Sendo assim, $\nabla \times V = 0$. Por isso, podemos definir uma função para o potencial de velocidade, como sendo: $\Phi = \Phi(x, y, z)$. De tal forma que $V \equiv \nabla \Phi$.

Lembrando que:

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2)$$

Dessa forma, por comparação entre as Eqs. 1 e 2 teremos que:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3)$$

3.3 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Vamos considerar um escoamento isentrópico e em regime permanente. Com isso teremos a seguinte simplificação da equação da continuidade em sua forma diferencial:

$$\nabla \cdot \rho V = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Agora, por conveniência iremos utilizar alguns símbolos para derivada, como por exemplo: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x$ e $\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = \Phi_{xx}$. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho \Phi_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho \Phi_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho \Phi_z = 0$$

$$\rho(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + \Phi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \Phi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \Phi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

3.4 EQUAÇÃO DE EULER

Como é demonstrado no livro "Modern Compressible Flow" (ANDERSON, 2003), a equação de Euler pode ser aplicada em qualquer direção em um escoamento irrotacional e é escrita da seguinte forma:

$$dp = -\frac{1}{2} \rho d(V^2) = -\frac{\rho}{2} d(u^2 + v^2 + w^2),$$

que utilizando a definição anterior vinda das Eqs. 3:

$$dp = -\rho d \frac{(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)}{2}$$

Agora, sabemos que da relação entre a velocidade do som, pressão e densidade, $a^2 = dp/d\rho$:

$$d\rho = -\frac{\rho d(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)}{a^2} \quad (5)$$

Podemos agora, finalmente extrair suas derivadas parciais, afim de completar os termos da Eq. 4. Sendo eles:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2}(\Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_y \Phi_{yx} + \Phi_z \Phi_{zx})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{a^2}(\Phi_x \Phi_{xy} + \Phi_y \Phi_{yy} + \Phi_z \Phi_{zy})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho}{a^2}(\Phi_x \Phi_{xz} + \Phi_y \Phi_{yz} + \Phi_z \Phi_{zz}),$$

que reescrita na Eq. 4 e considerando um escoamento bidimensional, resulta em:

$$\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right) \Phi_{yy} - \frac{2\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} = 0$$

Reescrevendo em termos das velocidades u,v e w, como visto em 3:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

Relembrando, que por $\Phi_x = f(x, y)$, temos:

$$d\Phi_x = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} dy = \Phi_{xx} dx + \Phi_{xy} dy = du \quad (7)$$

$$d\Phi_y = \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dy = \Phi_{xy} dx + \Phi_{yy} dy = dv \quad (8)$$

Podemos então tratar como um sistema de 3 equações e 3 incógnitas. Juntando então 6, 7 e 8, e resolvendo por Cramer para Φ_{xy} , obtemos:

$$\Phi_{xy} = \frac{\begin{bmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & 0 & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & \frac{-2uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{bmatrix}} = \frac{N}{D} \quad (9)$$

3.5 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL - CFD

Atualmente, temos disponíveis ferramentas de cálculo numérico tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), Diferenças Finitas (MDF), Elementos de Contorno (MEC) e Volumes Finitos (MVF), que aliados com o poder computacional atual, nos permitem realizar rápidas previsões a respeito de um escoamento, inclusive para geometrias e padrões complexos. Essas ferramentas englobam o que chamamos de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD - *Computational Fluid Dynamics*).

Esses recursos são empregados na indústria e na pesquisa, por meio de softwares, que baseiam suas respostas nesses diferentes métodos de resolução, podendo ainda contar com modelos de turbulência aproximados para as equações de Navier-Stokes.

Existem três modelos possíveis para modelagem de fenômenos de turbulência, naturalmente encontrados em um escoamento:

- Simulação via equações médias de Reynolds (RANS - *Reynolds Averaged Navier-Stokes*).
Esta técnica utiliza um conjunto de médias das equações de Navier-Stokes e da continuidade e seu elemento crítico, é a representação das tensões de Reynolds, que descrevem os efeitos das flutuações turbulentas de pressão e velocidade. Uma vantagem é a de geralmente possuir um custo computacional reduzido, por não ser necessário refinar tanto a malha (PADILLA; NETO, 2010);
- Simulação de Grandes Escalas (LES - *Large Eddy Simulation*).
Neste tipo de simulação, somente as grandes escalas são calculadas exatamente e para as pequenas escalas, são utilizados modelagens. Neste caso, teremos ainda uma formulação para escoamento necessariamente transiente e tridimensional. O custo computacional já apresenta um grande aumento em relação ao método RANS (HAMBA, 2003);
- Simulação Numérica Direta (DNS - *Direct Numerical Simulation*).
Neste último caso, não temos nenhum tipo de modelagem de turbulência. São utilizadas malhas bem refinadas e com passos de tempos pequenos, para assim obter a maior precisão possível. Porém isso tudo gera um altíssimo custo computacional, sendo assim utilizado apenas para baixos números de Reynolds(ORSZAG, 1970).

Com as informações citadas acima, podemos concluir que, apesar de ser o método mais preciso, o elevado custo computacional do DNS, nos permitiria somente a simulação para baixos números de Reynolds, além de ser utilizado apenas pra geometrias simples.

Sendo assim, as metodologias RANS e LES se tornam mais atrativas para a resolução de turbulências neste trabalho, sendo a metodologia RANS, a utilizada pelo software CFD Fluent (Ansys - versão 2023 R2).

Adicionalmente, temos ainda um campo relativamente novo de pesquisa, que é a utilização de uma metodologia híbrida, chamada DES (*Detached Eddy Simulation*), que utiliza a técnica de grandes escalas fora da camada limite, e as equações médias de Reynolds por dentro dela (SQUIRES; FORSYTHE; KOTAPATI-APPARAO,).

4 METODOLOGIA

4.1 MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

4.1.1 Inclinação das linhas características

Analisando o numerador e denominador da Eq. 9, percebemos que haverá uma indeterminação, somente se forem escolhidos valores para dx e dy , tais que ambos resultem em zero. Essas são as linhas características mencionadas mais acima em II.

Podemos então igualar, primeiramente, o denominador da Eq. 9 a zero:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{2uv}{a^2} \frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0$$

Para assim, finalmente encontrar $(dy/dx)_{char}$, a inclinação das linhas características, que será dado por:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \frac{-uv/a^2 \pm \sqrt{[(u^2 + v^2)/a^2] - 1}}{[1 - (u/a)^2]} \quad (10)$$

A equação acima define então as curvas características em um espaço bidimensional xy. Podemos agora examinar mais atentamente o termo dentro da raiz.

$$\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1 = \frac{V^2}{a^2} - 1 = M^2 - 1$$

Sendo assim, podemos ressaltar alguns pontos importantes para um ponto qualquer no escoamento:

- Se $M < 1$, as características são imaginárias;
- Se $M = 1$, existe apenas uma linha característica;
- Se $M > 1$, existem duas linhas características reais.

Por conta disso, para um $M > 1$, o método das características se torna um técnica muito prática para resolução de escoamentos supersônicos. Agora do contrário, quando temos um escoamento subsônico, ou seja $M < 1$, o método não poderá ser utilizado por conta das raízes imaginárias.

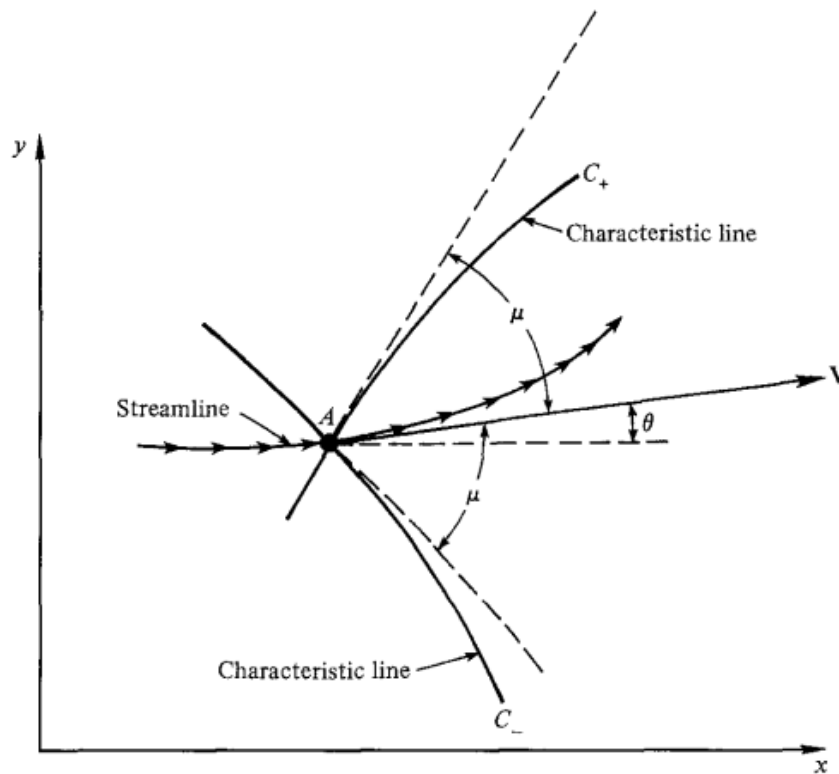
Continuando nosso desenvolvimento, podemos considerar que em um ponto qualquer do escoamento, nossas velocidades sejam dadas por: $u = V \cos(\theta)$ e $v = V \sin(\theta)$ e utilizar μ como ângulo de Mach. Assim, com ainda algumas manipulações algébricas, chegamos em:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \tan(\theta \pm \mu) \quad (11)$$

Uma interpretação gráfica é vista na Figura 8. Nela vemos que em um ponto A qualquer, a linha de corrente forma um ângulo θ com o eixo x. Pela equação 11, temos duas linhas características a partir deste ponto. Uma, com inclinação $\theta + \mu$, chamada C_+ , e outra $\theta - \mu$, chamada C_- . É interessante

notar que as linhas características são curvadas, por conta das diferentes propriedades ao longo do escoamento.

Figura 8 – Ângulos de uma linha característica



fonte: (ANDERSON, 2003)

4.2 EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Anteriormente na seção 4.1.1, encontramos a inclinação das linhas características a partir de igualar o denominador da Eq. 9 a zero. Vamos agora igualar o numerador a zero. Teremos então:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-[1 - (u^2/a^2)]dy}{[1 - (v^2/a^2)]dx} \quad (12)$$

Substituindo a Eq. 10 na equação acima, simplificando e considerando $u = V \cos(\theta)$ e $v = V \sin(\theta)$, temos:

$$d\theta = -\sqrt{(M^2 - 1)} \frac{dV}{V} \quad (13)$$

$$d\theta = \sqrt{(M^2 - 1)} \frac{dV}{V} \quad (14)$$

Sendo a Eq. 13 para C_- e a Eq. 14 para C_+ . Agora, comparando com a equação de Prandtl-Meyer, dada no livro de ANDERSON, vemos que ambas são idênticas, o que faz com que podemos integra-las, para assim encontrar as equações de compatibilidade algébricas:

$$\theta + \nu(M) = \text{constante} = K_- \quad (15)$$

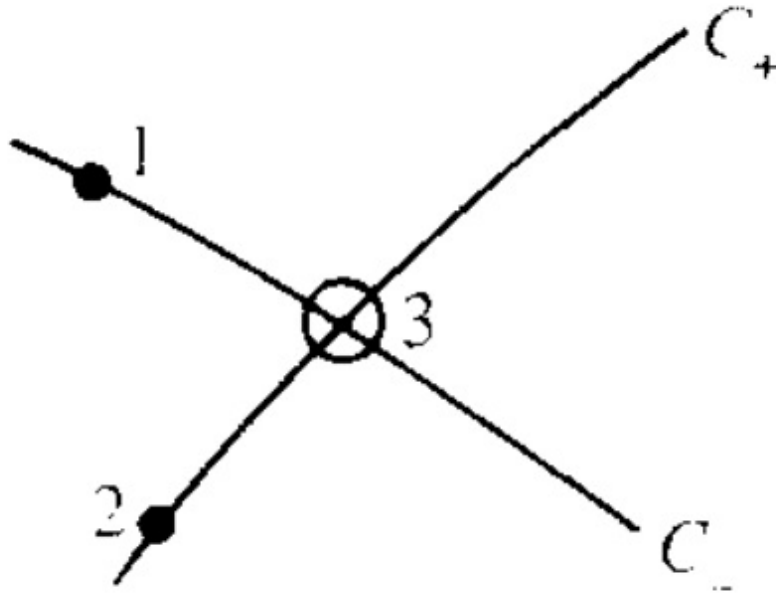
$$\theta - \nu(M) = \text{constante} = K_+ \quad (16)$$

Para utilização dos métodos das características, é necessário a divisão de acordo com a localização do ponto para a aplicação de processos unitários, sendo ela um ponto interno (4.2.1), na onda de choque (4.2.3) ou na parede (4.2.2).

4.2.1 Escoamento interno

Partimos do pressuposto que conheçamos as propriedades em dois pontos diferentes desse escoamento, podemos então, encontrar as propriedades em um terceiro ponto (também interno a esse escoamento). Ou seja, sabendo então os valores de ν_1 e θ_1 do ponto 1 e ν_2 e θ_2 do ponto 2, e considerando a Figura 9 abaixo:

Figura 9 – Pontos internos ao escoamento



fonte: (ANDERSON, 2003)

Podemos dizer que:

$$\theta_1 + \nu(M)_1 = (K_-)_1 \quad (17)$$

$$\theta_2 - \nu(M)_2 = (K_+)_2, \quad (18)$$

e também:

$$\theta_3 + \nu(M)_3 = (K_-)_3 = (K_-)_1 \quad (19)$$

$$\theta_3 - \nu(M)_3 = (K_+)_3 = (K_+)_2 \quad (20)$$

Obtendo as soluções para θ_3 e ν_3 :

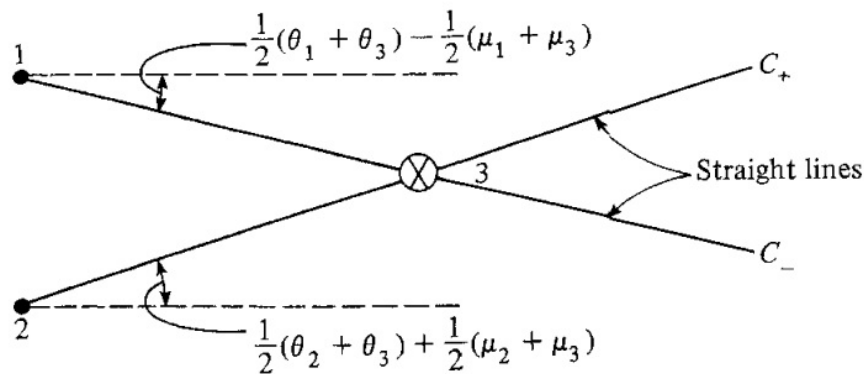
$$\theta_3 = \frac{1}{2}[(K_-)_1 + (K_+)_2] \quad (21)$$

$$\nu_3 = \frac{1}{2}[(K_-)_1 - (K_+)_2] \quad (22)$$

Assim, com as condições conhecidas nos pontos 1 e 2, temos agora as condições conhecidas no ponto 3. Lembrando que como $\nu = f(M)$, temos então como encontrar a pressão, temperatura e densidade pelas relações de escoamento isentrópico.

Agora, para encontrar sua posição espacial, vamos considerar as linhas características, como aproximadamente retas, além de sua inclinação como um valor médio, como vemos **Figura 10** a seguir:

Figura 10 – Aproximação das linhas características



fonte: (ANDERSON, 2003)

Assim teremos os ângulos médios das linhas C_- e C_+ :

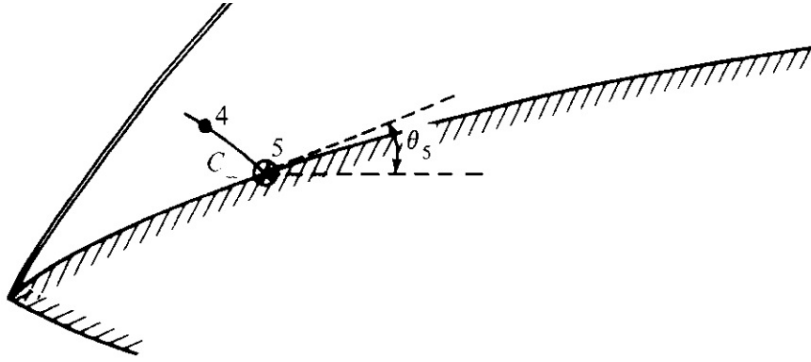
$$C_-: \quad \frac{1}{2}[(\theta_1 + \theta_3) - (\mu_1 + \mu_3)] \quad (23)$$

$$C_+: \quad \frac{1}{2}[(\theta_2 + \theta_3) - (\mu_2 + \mu_3)] \quad (24)$$

4.2.2 Parede

Se soubermos as condições próximas a uma parede em um ponto qualquer, podemos determinar as propriedades na parede. Considere a **Figura 11** a seguir.

Figura 11 – Pontos na parede



fonte: (ANDERSON, 2003)

Supondo que conhecemos as propriedades do ponto 4, entre elas, o valor de K_- , temos:

$$(K_-)_4 = \theta_4 + \nu_4 \quad (25)$$

Como a reta C_- (que parte do ponto 4) intercepta a parede no ponto 5:

$$(K_-)_4 = (K_-)_5 = \theta_5 + \nu_5 \quad (26)$$

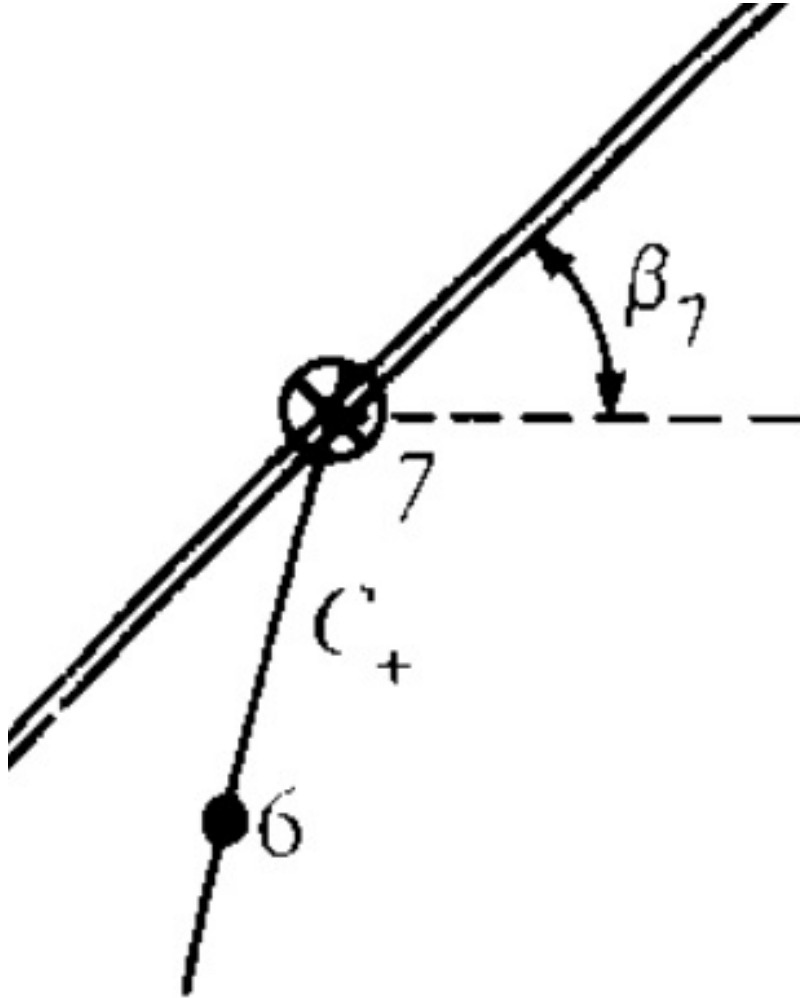
No entanto, se o formato da parede é conhecido, sabemos θ_5 . Com isso (lembrando que o escoamento deve ser tangente à parede), a única variável que sobra é θ_5 , assim:

$$\nu_5 = \nu_4 + \theta_4 - \theta_5 \quad (27)$$

4.2.3 Onda de choque

Da mesma forma, se conhecemos as propriedades de um ponto próximo à onda de choque, podemos encontrar as condições imediatamente atrás desse choque. Considere a [Figura 12](#) a seguir.

Figura 12 – Pontos na onda de choque



fonte: (ANDERSON, 2003)

Considerando então o ponto 6 onde o valor de K_+ da linha C_+ é conhecido:

$$(K_+)_6 = \theta_6 - \nu_6 \quad (28)$$

E assim, pela intersecção com o choque no ponto 7:

$$(K_+)_6 = (K_+)_7 = \theta_7 - \nu_7 \quad (29)$$

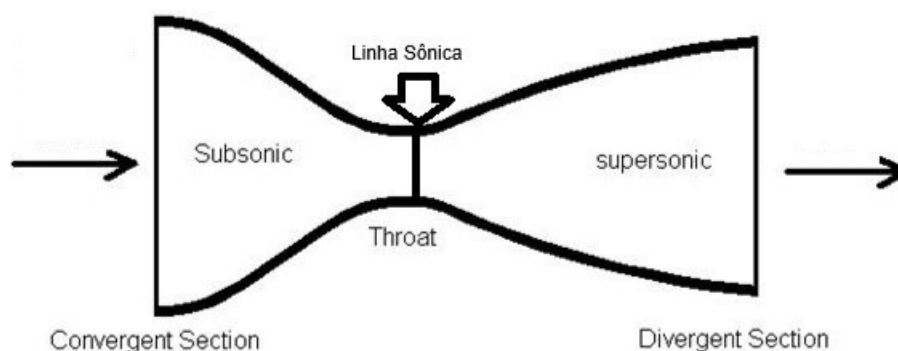
Assim, para um dado valor de M_∞ , encontramos o valor do ângulo de choque local β_7 que nos leva a um valor de $\theta_7 - \nu_7$. Esse valor deve, então, ser igual ao obtido através da equação anterior. Então, com um β_7 e M_∞ conhecidos, teremos como encontrar qualquer outra propriedade do escoamento no ponto 7 pelas relações de choque oblíquo.

4.3 LINHA INICIAL DE DADOS

Como visto acima nas seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, precisamos de dados iniciais para nossos cálculos. É a partir deste fato que surge a ideia da linha inicial de dados.

No caso de um cálculo de bocal, consideramos a linha sônica como sendo reta e vertical (como na imagem abaixo) em um determinado ponto da garganta e a partir dela, encontramos os outros pontos a jusante do escoamento. Esta linha está representada na Figura 13.

Figura 13 – Posição da linha sônica



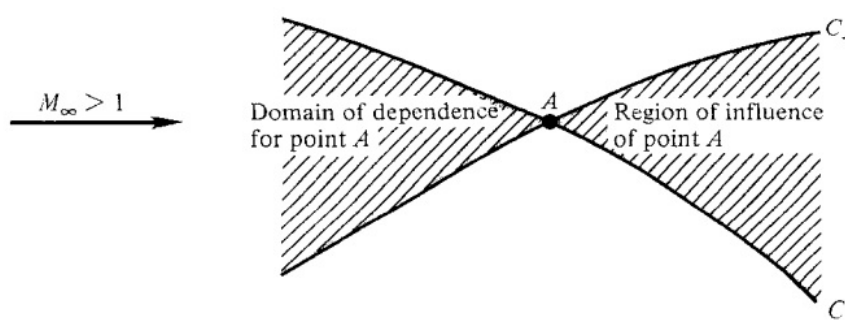
fonte: Adaptada de (FERNANDES; FORTUNATO, 2015)

4.4 REGIÕES DE INFLUÊNCIA E DOMÍNIO DA DEPENDÊNCIA

É importante ressaltar a diferença de região de influência e domínio da dependência em relação a um ponto no escoamento.

Considere a Figura 14 a seguir.

Figura 14 – Domínio da dependência e região de influência do ponto A



fonte: (ANDERSON, 2003)

Nela, podemos ver as duas regiões mais importantes para um ponto em um escoamento supersônico.

No domínio da dependência de A, área à montante do ponto, qualquer distúrbio em qualquer propriedade afeta o ponto A diretamente. Já a região de influência do ponto A, depende totalmente das condições no ponto A, por estar mais a jusante do escoamento. E claro, como já é de se imaginar, qualquer efeito no ponto A ou na região de influência, não afeta o domínio da dependência de A.

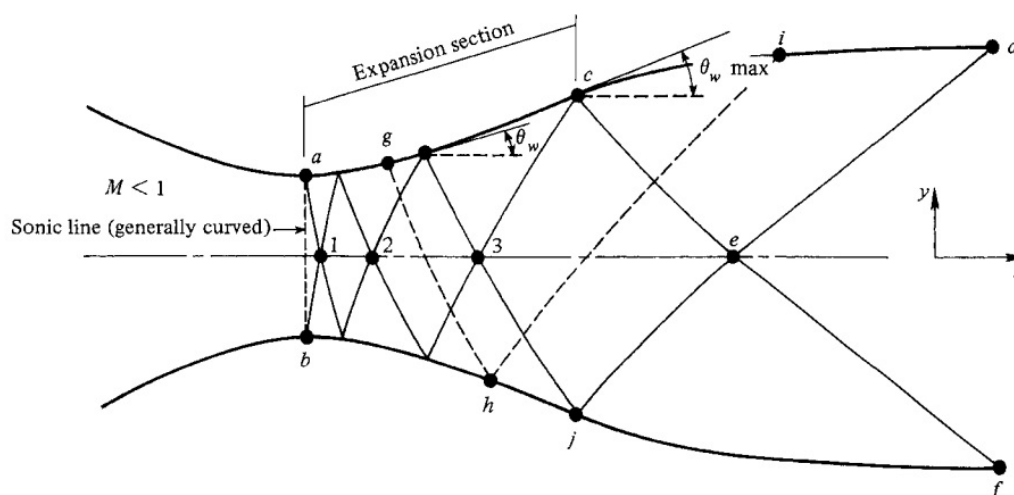
4.5 PROJETO DE UM BOCAL SUPERSÔNICO DE COMPRIMENTO MÍNIMO

Lembrando que para que seja válido a utilização do método das características, temos que fazer as mesmas considerações das equações demonstradas mais acima no Capítulo 3.

Continuando, o projeto de um bocal envolve descobrir a correta variação da área em função da distância à garganta, para assim evitar que ocorram ondas de choque dentro do bocal, algo que poderia gerar um desgaste prematura deste estrutura na prática.

O método das características, é uma ferramenta eficiente nesse sentido, já que prevê a não formação de ondas de choque dentro do escoamento.

Figura 15 – Bocal convergente-divergente

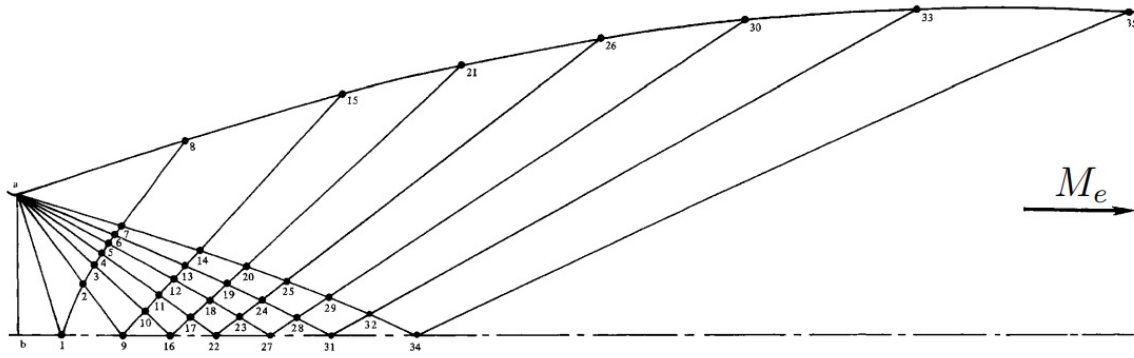


fonte: (ANDERSON, 2003)

Na Figura 15, vemos que a partir da linha sônica, o bocal diverge, formando um ângulo chamado θ_w em relação ao eixo x . A região em que esse ângulo aumenta, é chamada seção de expansão. Esse é o trecho em que ocorrem as ondas de expansão, que refletem nas paredes do bocal. No ponto c , temos o maior valor possível de θ_w , chamado $\theta_{w \max}$, e a partir dele, o ângulo começa a diminuir (uma forma de cancelar as ondas de expansão), até ter suas extremidades paralelas.

A taxa de variação desse ângulo, depende muito da aplicação. Por exemplo, em um túnel de vento, onde se prioriza a qualidade do escoamento, essa variação costuma ser bem mais lenta do que em um bocal de motor-foguete, que por sua vez, prioriza a economia de peso. Em casos onde se deseja a rápida expansão, o bocal deve ser o mais curto possível e teremos apenas a região de estreitamento (a partir do ponto c , Figura 15), como vemos na Figura 16.

Figura 16 – Bocal de comprimento mínimo



fonte: (ANDERSON, 2003)

Para iniciar a construção do problema, necessitamos então, de dois dados essenciais: a altura da garganta, ou seja, a distância entre a linha de centro e o ponto a (Figura 16), e o número de Mach desejado na saída do bocal.

A partir desses dados podemos calcular a curvatura da parede da região divergente.

Para isso, precisamos iniciar encontrando o ângulo $\theta_{w_{max}}$. Sabemos que por estarem na mesma região de influência, as condições dos pontos 34 e 35 (Figura 16) são iguais, além de que ambas possuem um escoamento paralelo e mesmo número de Mach (Mach de saída, ou M_e). Como $\theta_{34} = 0$, obtemos a função Prandtl-Meyer nesses pontos:

$$\nu_{M_e} = \nu_{34} = \nu_{35}, \quad (30)$$

e utilizando a relação da Eq. 8:

$$(K_-)_{34} = \nu_{M_e} = \nu_{34} = \nu_{35} \quad (31)$$

$$\theta_{w_{max}} + \nu_a = (K_-)_a \quad (32)$$

Agora, sabendo que $\nu_a = \theta_{w_{max}}$, temos:

$$\theta_{w_{max}} = \frac{1}{2}(K_-)_a = \frac{1}{2}(K_-)_c = \frac{\nu_{M_e}}{2} \quad (33)$$

A partir disso, podemos encontrar o restante dos pontos pela intersecção de diferentes retas formadas por pontos conhecidos, como por exemplo a-8 com 7-8 (a-8 pode ser considerada uma reta), como discutido anteriormente, já que possuímos as condições em 2 pontos do escoamento (seções 4.2.1 à 4.2.3).

4.6 IMPLEMENTAÇÃO EM CÓDIGO

Podemos agora implementar um código em Matlab, que além de encontrar o formato ótimo do bocal e as linhas características, calcula o número de Mach dentro do mesmo, de acordo com as propriedades em cada ponto formado pela intersecção entre as linhas características e nos apresenta os resultados em formato gráfico, de acordo com algumas entradas, sendo elas:

- Pressão e temperatura na câmara de combustão;
- Pressão e temperatura ambientes;
- Constantes do gás (razão de calor específico do gás e peso molecular);
- Altura da garganta, número de Mach desejado na saída e número de linhas características;

Os valores utilizados estão indicados nas tabelas 1, 2, 3 e 4.

Tabela 1 – Propriedades na câmara de combustão

Pressão total (MPa)	Temperatura total (K)
1, 2	1200

fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 2 – Propriedades ambientes

Pressão total (KPa)	Temperatura total (K)
101	300

fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 3 – Constantes do gás

Razão de calor específico - γ	Peso molecular (kg/kmol)
1,25	28,966

fonte: Elaborada pelo autor

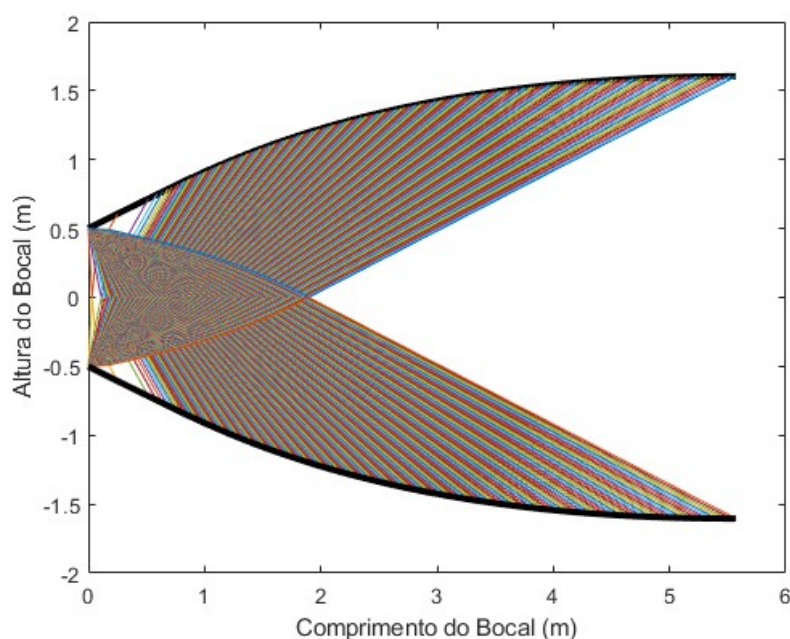
Tabela 4 – Dados do problema

Altura da garganta (m)	Mach de saída desejado	Número de linhas características
0,5	2,5	200

fonte: Elaborada pelo autor

Com os valores citados acima, obtemos o resultado apresentado na Figura 17 para o formato do bocal e linhas características:

Figura 17 – Formato ótimo para o bocal para 200 linhas características



fonte: Elaborada pelo autor

4.7 SIMULAÇÃO EM SOFTWARE CFD

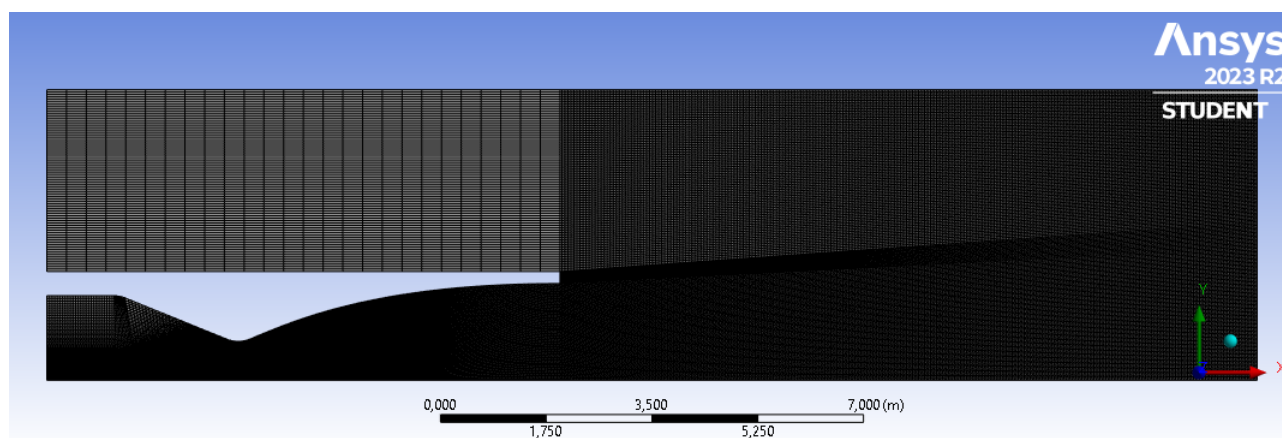
Com o formato do bocal obtido na seção 4.6, além das propriedades citadas nas tabelas 1, 2, 3 e 4, podemos agora simular o comportamento do escoamento no interior do bocal por meio do software Fluent (Ansys - versão 2023 R2), para assim comparar com o resultado obtido no item anterior.

4.7.1 Setup

Primeiramente, o formato da parede do bocal obtido pelo método das características apresentado foi importado para um software CAD (SolidWorks), onde o domínio de cálculo do escoamento foi desenhado, como podemos observar na Figura 18.

Em seguida, essa geometria junto com o domínio de cálculo foi importado para o Ansys Fluent para a geração da malha. A malha foi refinada com o objetivo de melhorar alguns parâmetros médios principais: a qualidade dos elementos próxima de 1 (0,86397), a assimetria o mais baixo possível ($2,5628 \cdot 10^{-2}$) e a qualidade ortogonal o mais próxima de 1 (0,99802). A qualidade da malha também foi priorizada na região entre a câmara de combustão e a saída do bocal. O resultado pode ser observado na Figura 18.

Figura 18 – Malha utilizada na simulação



fonte: Elaborada pelo autor

Foi então definida uma entrada de pressão de acordo com os valores da Tabela [1](#) na extremidade esquerda da câmara de combustão e uma saída de pressão com os valores estabelecidos na Tabela [2](#) na extremidade direita da malha. A extremidade de baixo da malha foi considerada como eixo de simetria do problema, ou seja, a linha central do motor-foguete sendo um problema axissimétrico. As demais bordas foram consideradas como parede, onde se considera as condições de não penetração do fluido e não deslizamento. Ver [Figura 19](#).

Figura 19 – Condições de contorno utilizadas na simulação



fonte: Elaborada pelo autor

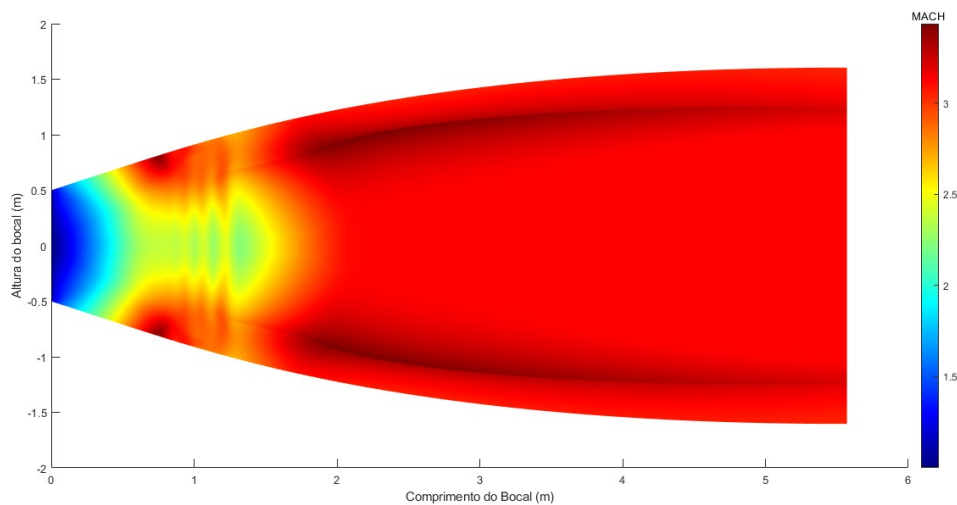
O gás foi considerado como sendo ideal com as condições de operação em 0 Pa e os valores iniciais foram computados da entrada. O tipo de solver utilizado foi o density-based, por se tratar de um escoamento de alta velocidade ($Mach > 0,3$). Foi ainda considerada a equação da energia e o modelo de viscosidade k-epsilon de 2 equações, devido ao menor custo computacional.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, serão comentados os resultados obtidos por cada um dos métodos (numérico e simulação).

De acordo com o bocal obtido na Seção 4.6, temos a distribuição de Mach no interior do bocal apresentado na Figura 20. Podemos observar o aumento do número de Mach de 1 na garganta, até aproximadamente 3,45 na saída do bocal, com algumas oscilações bem pronunciadas devido a simplificações contidas no modelo teórico do método das características.

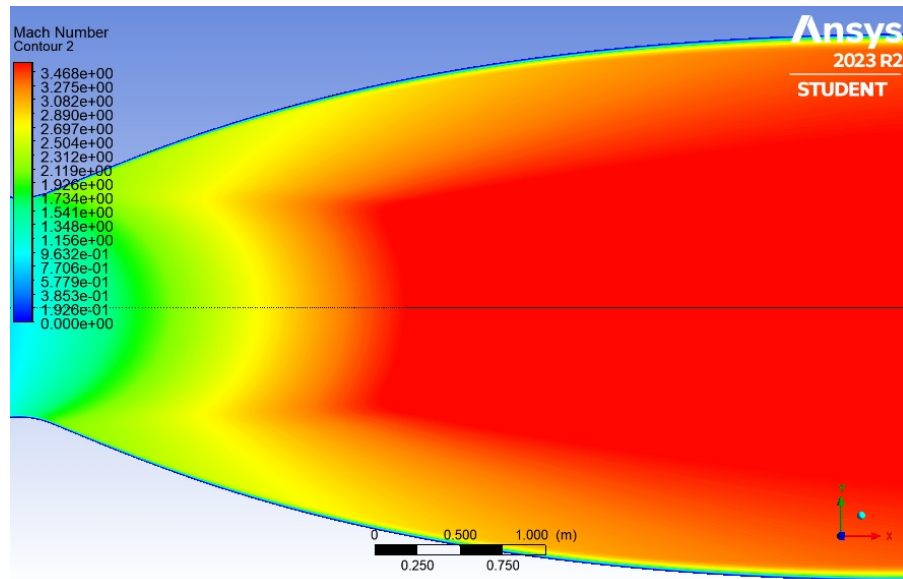
Figura 20 – Distribuição de Mach dentro do bocal



fonte: Elaborada pelo autor

Com o setup e malha apresentados na Seção 4.7, temos o resultado da simulação na Figura 21. Podemos observar o aumento gradual do número de Mach de 1 na garganta, até 3,468 na saída do bocal. A malha utilizada nos resultados de CFD é muito mais precisa e refinada quando comparada ao método das características, o que justifica um comportamento mais suave na transição entre as velocidades no interior do bocal. Além disso, podemos observar que, nesse caso, a condição de não deslizamento que é aplicada nas paredes pelo software, diminui a velocidade da região mais próxima à parede, algo que não aconteceu anteriormente na Figura 20, justamente por não ser uma condição prevista nas equações do método das características.

Figura 21 – Distribuição de Mach dentro do bocal



fonte: Elaborada pelo autor

Como podemos notar na [Figura 20](#) e [Figura 21](#), o comportamento do escoamento no interior do bocal se manteve muito parecido em ambos os casos, apesar das diferenças já citadas e explicadas mais acima.

As partes mais próximas às paredes tiveram um número de Mach entre 2,5 e 3 em ambos os casos (bem próximo ao desejado para a saída, pelo método das características), além de ter uma maior velocidade relativa na região central do bocal. Temos também a zona próxima a garganta com um menor número de Mach formando um arco, com a velocidade aumentando à medida que o fluxo se aproxima do centro do bocal.

6 CONCLUSÃO

Neste estudo foi aplicado o método das características para determinação do formato ideal de um bocal, visando minimizar seu comprimento. Posteriormente, realizamos simulações em software de CFD para validar sua funcionalidade. Para isso, foi utilizado um código em Matlab^(R) para gerar o formato, que foi utilizado para realizar a simulação CFD no Ansys Fluent.

Pelos resultados obtidos da comparação entre o modelo teórico com a simulação em CFD, podemos dizer que o método das características se demonstrou muito eficaz no projeto de bocais, principalmente pela sua simplicidade de implementação e baixíssimo custo computacional, apesar de não apresentar uma precisão tão elevada.

Os resultados apresentados neste trabalho mostram que além de ser um método simples, necessitando de apenas alguns dados iniciais e um processo iterativo, temos ainda o indicativo de sua aplicabilidade em um caso real.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Criar um protótipo do bocal em escala e medir a velocidade de saída dos gases;
- Realizar o mesmo tipo de comparação para um bocal de expansão gradual (utilizado no projeto de túneis de vento).

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. J. D. **Modern Compressible Flow: with historical perspective**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2003.
- BARROS, H. L. d. **Santos-Dumont e a invenção do avião**. [S.l.]: CBPF, 2006.
- FERNANDES, L. M. B.; FORTUNATO, S. C. **Escoamento Compressível Subsonico e Supersonico em Bocais C-D**. 2015. Disponível em: <https://www.fem.unicamp.br/~phoenics/EM974/PROJETOS/PROJETOS%202%20SEM-11/TURMA%20A/G10%20OK/Escoamento%20Compressivel%20Subsonico%20e%20Supersonico%20em%20Bocais%20C-D.pdf>.
- GRAY, P. L.; THETFORD, O. **German Aircraft of the First World War**. [S.l.]: Brassey's, 1971.
- HAMBA, F. A hybrid rans/les simulation of turbulent channel flow. **Theoretical and computational fluid dynamics**, Springer, v. 16, p. 387–403, 2003.
- LATIN, A. **História do 14-bis**. 2023. Disponível em: <https://adslatin.com/conheca-a-historia-do-14-bis/>.
- LAUNIOUS, R.; LOGSDON, J. M.; SMITH, R. W. **Reconsidering Sputnik**. [S.l.]: OPA, 2000.
- LINDBERG, M. **A century of flight**. 2003. Disponível em: <https://www.wingsofhistory.org/a-century-of-flight-2/>.
- LOWE, M. V. **Focke-Wulf Ta 152: Ta 152A, Ta 152B, Ta 152C, Ta 152E, Ta 152H, Ta 153**. [S.l.]: Mark I Limited, 2008.
- MILLER, J. **The X-Planes: X-1 to X-45**. [S.l.]: Midland, 2001.
- ORSZAG, S. A. Analytical theories of turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 41, n. 2, p. 363–386, 1970.
- PADILLA, E. L. M.; NETO, A. da S. Particularidades da modelagem híbrida rans-les com modelo de turbulência sa. **Mecânica Computacional**, v. 29, n. 36, p. 3639–3648, 2010.
- SQUIRES, K.; FORSYTHE, J.; KOTAPATI-APPARAO, R. Prediction of the flow over an airfoil at maximum lift. In: **42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit**. [S.l.: s.n.]. p. 259.