UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

CAROLINA YUMI LEMOS FERREIRA GRACIOLLI

Possibilidades de trabalhar conteúdos matemáticos com origamis

Guaratinguetá - SP
2017

Carolina Yumi Lemos Ferreira Graciolli

Possibilidades de trabalhar conteúdos matemáticos com origamis

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador (a): Prof.ª Dr.ª Rosa Monteiro Paulo

Guaratinguetá - SP
2017

G731p Graciolli, Carolina Yumi Lemos Ferreira

Possibilidades de trabalhar conteúdos matemáticos com origami / Carolina Yumi Lemos Ferreira Graciolli – Guaratinguetá, 2017.

41 f. : il.

Bibliografia: f. 38-41

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2017.

Orientadora: Profª Drª Rosa Monteiro Paulo

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Trissecção do ângulo 3. Geometria - Estudo e ensino I. Título

CDU 51:371.3

Pâmella Benevides Gonçalves

Bibliotecária CRB/8: 9203

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

CAROLINA YUMI LEMOS FERREIRA GRACIOLLI

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **"GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Vivian Gomes
Profa. Dra. Vivian Martins Gomes
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Rosa Monteiro de Paulo
Orientador/UNESP-FEG

Profa. Dra. Elisangela Pavanelo R. dos Santos
UNESP-FEG

Ingrid Cordeiro Firme
Profa. Ms. Ingrid Cordeiro Firme
UNESP-FEG

Dezembro de 2017

RESUMO

Neste texto apresentamos uma pesquisa que busca compreender a produção do conhecimento geométrico do aluno a partir do trabalho com origami. Nas leituras percebemos que a matemática tem uma forte conexão com o origami e por ser um recurso visual poderá possibilitar a compreensão da matemática, pois favorece a investigação, a construção de argumentos e as justificativas, permitindo ao sujeito compreender o sentido matemático. Assumimos como metodologia o estudo de caso e a análise fenomenologia para a interpretação dos dados produzidos. Desenvolvemos em uma aula de Geometria Euclidiana a atividade que envolvia o origami e um problema clássico da geometria, a trissecção do ângulo, com alunos do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus Guaratinguetá. A intenção da atividade foi ver como os alunos exploram matemática quando utilizam o origami para resolver situações problemas que envolvem conteúdos matemáticos, quais conhecimentos expõem e a quais estratégias recorrem. Com a análise dos dados concluímos que, neste grupo especifico, os alunos produzem conhecimento geométrico quando trabalham com o origami no momento em que argumentam sobre o que é feito e investigam possibilidades de fazer.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Ensino de Geometria. Trissecção do ângulo.

ABSTRACT

In this text we present a research that seeks to understand the production of geometric knowledge of the student from the work with origami. In the readings we realize that mathematics has a strong connection with origami and because it is a visual resource it can make possible the understanding of mathematics, because it favors the investigation, the construction of arguments and the justifications allowing the subject to understand the mathematical sense. We assume as methodology the case study and the phenomenology analysis for the interpretation of the data produced. We developed in an Euclidian Geometry class the activity that involved origami and a classic problem of geometry, the trisection of the angle, with students of the third year of the Mathematics Degree course of the São Paulo State University (Unesp), School of Engineering, Guaratinguetá. The intention of the activity was to see how students explore mathematics when they use origami to solve situations involving mathematical contents, what knowledge they expose and what strategies they use. With the analysis of the data we conclude that, in this specific group, students produce geometric knowledge when working with origami when they argue about what is done and investigate possibilities to do.

KEYWORDS: Mathematical Education. Teaching Geometry. Trisection of the angle.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Oliveira (2015) a Matemática, área do conhecimento considerada nas ciências exatas, quando bem explorada pode desenvolver habilidades para resolução de problemas em sala de aula e do cotidiano. Como a Matemática está ao nosso redor, nesta pesquisa vamos explorar as possibilidades de se trabalhar conteúdos matemáticos com o uso dos origamis.

O origami, como arte de dobrar papel tem etimologia japonesa e é muito utilizado em cerimonias religiosas e festas culturais. A palavra origami se originou no Japão, é composta por *ori* (dobrar) e *kami* (papel), literalmente significa “dobrar papel”. No Brasil o origami também é chamado de dobradura. A arte da dobra busca representar animais, plantas e objetos do dia-a-dia, utilizando somente uma folha de papel em formato quadrado sem cortes, desenhos ou colagens.

Iniciando com leituras sobre a arte dos origamis e sua história, vimos que essa arte milenar era utilizada somente como decoração e em eventos culturais no Japão. O origamista japonês Akira Yoshizawa, nascido em 1911 em Kaminokawa, foi responsável pela difusão do origami para todo o mundo. Com os origamis reconhecidos mundialmente a arte passou a ser observada com outros interesses e possibilidades, assim como nas áreas de arquitetura, matemática e, atualmente, computação. Com esse avanço de interesses pela arte de dobrar papeis, alguns origamistas observaram que no ato de dobrar ocorre um fenômeno de precisão matemática.

Além disso, destaca-se que a prática e o estudo dos origamis envolvem vários temas de importância para a matemática. Como, por exemplo, a “dobragem Miura”, uma dobradura rígida que tem sido usada para levar ao espaço grelhas de painéis solares para satélites. Na Educação o trabalho com origami também tem sido estudado. Por exemplo, para o ensino de geometria ele pode auxiliar o desenvolvimento cognitivo, possibilitando a aprendizagem e a compreensão Matemática.

O origami praticado por séculos, só recentemente passou a ser estudado academicamente com objetivos científicos. Esses estudos passaram a desenvolver teoremas para descrever padrões matemáticos das dobras. O matemático e origamista Toshikazu Kawasaki, nascido em Nagasaki em 1955, é um estudioso que se pode citar como exemplo. Durante a escola secundaria Kawasaki viu algumas fotos de origamis criados por Akira Yoshizawa que o inspiraram a aprender a técnica do origami de modo mais aprofundado. Na universidade se formou em teoria algébrica dos números, mas também estudava geometria do origami. Em seus estudos desenvolveu alguns teoremas matemáticos como o teorema de Kawasaki que defini um padrão entre os ângulos formados entre as linhas de dobra de um origami desdobrado.

Nesta pesquisa discutimos as possibilidades de trabalhar conteúdos matemáticos com uso de origamis, mais especificamente conteúdos de geometria. Pretendemos realizar nossa investigação em uma turma de Licenciatura em Matemática na disciplina de Geometria Euclidiana. Para tanto, elegemos as estratégias e o conteúdo. Trabalharemos com a resolução e a demonstração do problema clássico da trissecção de ângulo, usando origami. Pretende-se, no decorrer da atividade, explorar conceitos matemáticos presentes na técnica de dobrar papeis. A pergunta que orienta a pesquisa fica assim formulada: *o que, no trabalho com origami, se mostra acerca da produção do conhecimento geométrico do aluno?* Isso indica que nossa intenção é investigar os modos pelos quais se dá a produção do conhecimento quando se tem o recurso do origami.

Para que seja possível expor a intenção investigativa organizamos este texto do seguinte modo: introdução, objetivos, justificativa, referencial teórico, os axiomas de Huzita-Hatori, problemas clássicos da geometria, em específico o problema da trissecção do ângulo e sua resolução com origami, metodologia assumida, produção e análise dos dados, considerações finais e as referências bibliográficas.

1.1 OBJETIVO

O objetivo é investigar a produção do conhecimento geométrico pelos alunos quando se utiliza origami para explorar conteúdos de Geometria Euclidiana em uma turma de Licenciatura em Matemática. Elegemos o 3º ano de 2017 da Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”, campus de Guaratinguetá. Pretende-se, especificamente, explorar os conteúdos relativos à trissecção de ângulos, um problema clássico da geometria. O foco estará voltado para as possibilidades de compreensão dos conteúdos geométricos pelos alunos quando se trabalha com origami.

1.2 JUSTIFICATIVA

Nasser e Vieira (2015) destacam que há um abandono do ensino de geometria nas escolas de Educação Básica. Enfatizam que um dos fatores que leva a tal abandono é a formação dos professores. Segundo esses autores, desde a década de 1980, “educadores matemáticos mostraram preocupação acerca da desvalorização do ensino de Geometria nas escolas e iniciaram um movimento de discussão e reflexão para tentar reverter essa situação" (NASSER E VIEIRA, 2015, p. 25).

As pesquisas também mostram que os professores do ensino fundamental apresentam dificuldades com o ensino de Geometria. Tal dificuldade pode ter origem na formação inicial, ou seja, no curso de Licenciatura em Matemática. Devido ao modo pelo qual o curso de geometria é tratado na Licenciatura, focando a sistematização de conceitos e demonstração de teoremas, as possibilidades de construção de uma prática docente voltada para o ensino dessa área de conhecimento no Ensino Fundamental pode não ser favorecida. De acordo com Crescenti (2006, p. 55), "os professores, por falta de conhecimento do conteúdo geométrico ou de como ensiná-lo têm deixado essa área relegada ao esquecimento ou têm dado um tratamento superficial aos seus conceitos, princípios e procedimentos".

Isso nos fez querer conhecer o sentido geométrico por detrás das demonstrações, ou seja, buscar possibilidades de, no curso de Licenciatura, ver e compreender a geometria que é ensinada a partir do trabalho com dobraduras. Com o uso dos origamis pode-se explorar as ideias matemáticas presente nas demonstrações e estimular o uso de materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem dessa área de conhecimento. Ou seja, consideramos que tal estudo é relevante, pois, além de analisar a possibilidade da inserção de origami na disciplina de Geometria Euclidiana, no curso de Licenciatura em Matemática, abre possibilidades aos alunos de pensar sobre o conteúdo estudado e considerar modos de ensinar na sala de aula do Ensino Fundamental.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Zarpellon (2013) destaca que na arte de dobrar papéis, tanto o professor quanto o aluno necessitam de atenção, pois é necessária concentração para seguir as regras de construção e então obter o origami desejado. O autor afirma, também, que a matemática envolvida nos origamis facilita a compreensão de conceitos abstratos.

Passos e Sousa (2010) afirmam que os origamis, por conter uma expressiva presença de formas geométricas, podem trazer importantes contribuições ao processo de ensino e de aprendizagem da geometria. Dombrowski (2010) considera que a dobradura também é um artifício que motiva e estimula os principais envolvidos para além da matemática.

Para Imenes (1997) o origami tem uma forte conexão com a matemática e, quando utilizado corretamente, transforma-se em um excelente recurso de investigação, experimentação e reflexão para conteúdos matemáticos principalmente em geometria. Com atividades direcionadas à exploração os alunos podem chegar as suas próprias conclusões e encontrar soluções para problemas que lhes sejam propostos a partir das dobraduras.

Kawano (2007) diz que os origamis se tornaram objeto de estudos acadêmicos em áreas como a matemática e a computação, desenvolvendo teoremas que analisam padrões matemáticos e, com a geometria combinatória, permitem estipular fórmulas computacionais e algoritmos lógicos. O autor também descreve o teorema de Kawasaki e o teorema das cores, desenvolvidos pelo matemático e origamista japonês Toshikazu Kawasaki.

Mattos e Yokoyama (2004) discutem como os problemas clássicos da geometria podem contribuir para o pensamento matemático e para o desenvolvimento de reflexões sobre demonstrações. O autor destaca também, a importância de apresentar esses problemas e promover discussões sobre sua impossibilidade de resolução quando se utiliza os Elementos de Euclides como técnica para a demonstração. Esta discussão, a partir das situações que envolvem o origami, pode favorecer o desenvolvimento do pensamento crítico em sala de aula, segundo esses autores.

Kaleff, et. al. (1989) destacam que os alunos de graduação, mesmo que cursando os últimos semestres, ainda apresentam dificuldade com o pensamento abstrato em geometria, especificamente com relação à sistematização de ideias da própria Geometria Euclidiana, bem como para relacionar sistemas axiomáticos diversos.

Almouloud (2004), por outro lado, destaca a ênfase que é dada a geometria nos cursos de Licenciatura. Segundo o autor, são trabalhadas as demonstrações matemática sem que seja dada ênfase ao seu sentido. Ou seja, é feita uma apresentação do modo pelo qual uma demonstração geométrica é construída e, aos alunos, é solicitada a sua reprodução. Isso elimina as possibilidades de os alunos serem críticos e desenvolverem um tipo de raciocínio que é necessário para construir argumentos e justificativas, provar afirmações geométricas e mesmo compreender o sentido do conteúdo geométrico.

Isso, segundo o autor, faz com que os professores do ensino fundamental, formados nos cursos de Licenciatura, tenham dificuldades com o ensino desse conteúdo específico de matemática no cotidiano da sua prática em sala de aula. Tal dificuldade é oriunda desse modo de proceder que privilegia a apresentação de técnicas de demonstração que não são compreendidas e não se abre espaço ao diálogo ou ao sentido da geometria. Isso leva o professor, no início de sua carreira docente, a buscar cursos de extensão na intenção de conhecer alternativas à sua prática pedagógica.

A partir da compreensão do que dizem esses autores pensamos em uma possibilidade de, no curso de Licenciatura em Matemática, propor situações que articulem a arte do origami aos conteúdos de geometria, discutindo possibilidades de o aluno entender o sentido do que é demonstrado na disciplina (obviamente, exemplificando alguns casos).

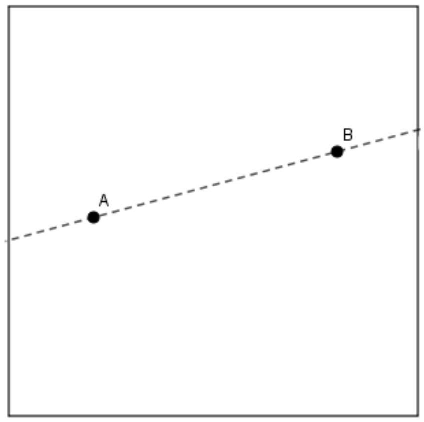
Assim, na sequência do texto, apresentamos alguns axiomas que podem ser interpretados a partir do origami.

2.1 AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

Na década de 1970, o origami passou a chamar a atenção com intuito diferente das artes, adentrando ao estudo do padrão presente nas dobras e das combinações entre elas permitindo destacar elementos da geometria, por exemplo. Um dos matemáticos interessados em buscar padrões e regras em origamis era o japonês Humiaki Huzita que “descreveu seis operações básicas para definir um único vinco que, por si só, alinha várias combinações de pontos e retas já existentes” (MONTEIRO, 2008, p. 8). Estas seis operações foram conhecidas como Axiomas de Huzita e marcaram a primeira descrição formal de construções geométricas utilizando o origami. O matemático japonês Koshiro Hatori em 2002, apresentou uma operação que não era descrita pelos Axiomas Huzita, originando o sétimo axioma. Os sete axiomas são conhecidos como os Axiomas de Huzita-Hatori. A seguir descrevemos os sete axiomas mencionados.

Axioma 1: Dados dois pontos A e B, existe uma única dobra que passa pelos dois pontos.

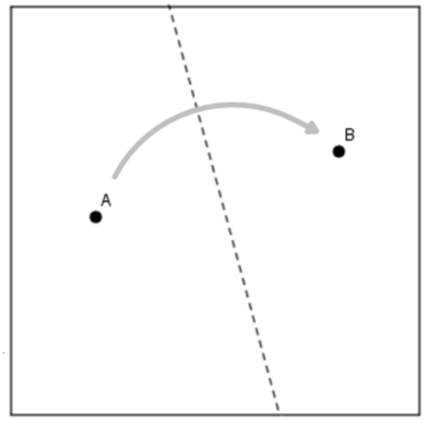
Figura 1 - Axioma 1.



Fonte: elaborado para a pesquisa.

Axioma 2: Dados dois pontos, A e B, existe uma única dobra que os torna coincidentes.

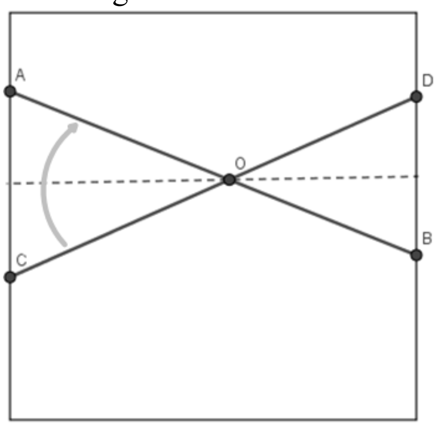
Figura 2 - Axioma 2.



Fonte: elaborado para a pesquisa.

Axioma 3: Dados dois segmentos AB e CD, e um ponto de intersecção O, existe uma dobra que torna coincidentes os segmentos AO e OB; OC e OD, respectivamente.

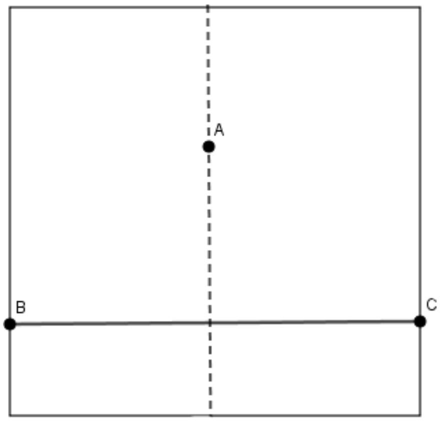
Figura 3 - Axioma 3.



Fonte: elaborado para a pesquisa

Axioma 4: Dados um ponto A e um segmento BC, existe uma única dobra que é perpendicular ao segmento e passa por A.

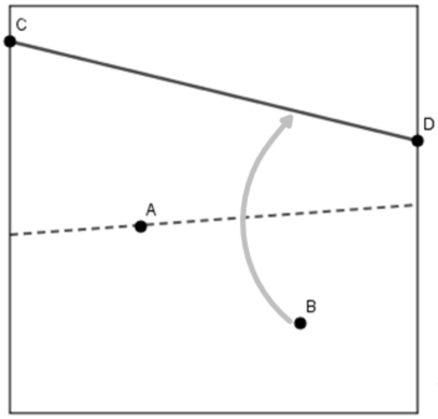
Figura 4 - Axioma 4.



Fonte: elaborado para a pesquisa

Axioma 5: Dados dois pontos, A e B, e um segmento CD, se a distância de A à B for igual ou superior a distância de B ao segmento, há uma única dobra passando por A, tal que B pertença a CD.

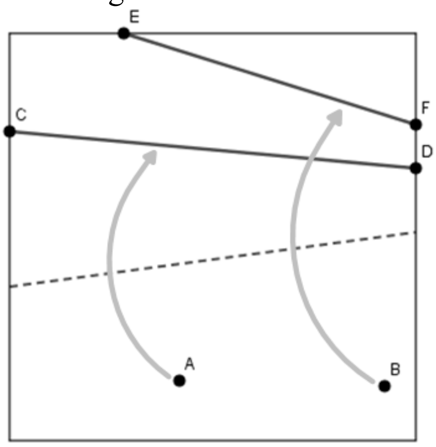
Figura 5 - Axioma 5.



Fonte: elaborado para a pesquisa

Axioma 6: Dados dois pontos, A e B não pertencentes aos segmentos CD e EF, se os segmentos não forem paralelos e se a distância entre eles não for superior a distância entre os pontos, há uma única dobra que leva A em CD e B em EF.

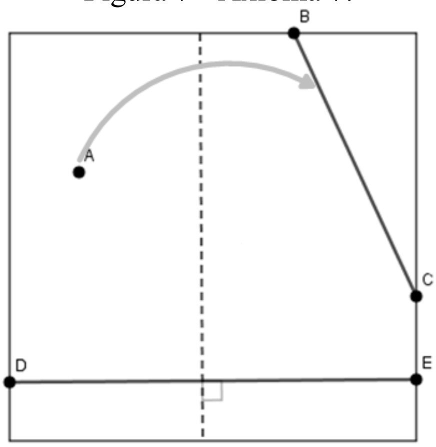
Figura 6 - Axioma 6.



Fonte: elaborado para a pesquisa

Axiona 7: Dado um ponto A e dois segmentos, BC e DE, se os segmentos não são paralelos há uma única dobra que leva A em BC e é perpendicular a DE.

Figura 7 - Axioma 7.



Fonte: elaborado para a pesquisa

Nesta pesquisa não é nosso objetivo trabalhar ou discutir a demonstração destes axiomas. Eles foram, para nós, relevante como um modo de conhecer as possibilidades da geometria das dobraduras em articulação com a geometria euclidiana, tal qual ela é tratada nos cursos de Licenciatura em Matemática. Ou seja, para nos permitir dizer dos modos de demonstração que são possíveis a partir dela. Na sequência do texto iremos falar de modo breve, dos problemas clássicos da geometria, pois um deles foi o que elegemos para a pesquisa com o recurso do origami.

2.2 PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA

Os problemas clássicos da geometria grega, duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo, segundo Sousa (2001) nasceram durante os primeiros quatro séculos do período helênico, entre o século VI a.C. e o século V d.C., período de extraordinárias realizações da matemática grega. Os três problemas geométricos desafiaram matemáticos por mais de dois mil anos.

A trissecção do ângulo expõe “o problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais” (SOUSA, 2001, p. 7). Esse problema pode ser resolvido por secções cônicas e quando escrito em linguagem algébrica obtém-se equações cúbicas. A prova de sua impossibilidade de resolução com régua não graduada e compasso foi demonstrada pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel, no século XIX,

> a demonstração da impossibilidade deve-se ao facto de que as únicas medidas que se podem obter nas construções com régua não graduada e compasso, são as que se podem obter através da adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas a partir de números naturais. (SOUSA, 2001, p. 11)

De acordo com Sousa (2001), a solução da trissecção do ângulo envolve medidas que não podem ser construídas unicamente com régua não graduada e compasso, pois se trata de uma equação cúbica. Quando dizemos “régua não graduada e compasso” fazemos referência aos instrumentos que são descritos nos Elementos de Euclides.

Valendo-nos do origami é possível propor um modo de trisseccionar o ângulo conforme descrevemos a seguir.

2.3 O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO DO ÂNGULO ATRAVÉS DO ORIGAMI

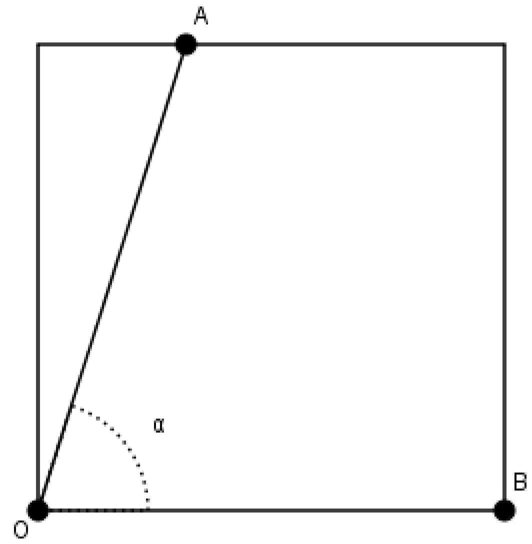
O motivo pelo qual optamos pelo origami é que, por meio dele, é possível desenvolver o pensamento geométrico. E por que desenvolver o pensamento geométrico é relevante? Assim como explica Kaleff et al (1989), os alunos de graduação, mesmo cursando os últimos semestres do curso, ainda apresentam dificuldade com o pensamento abstrato em geometria, principalmente quando se trata da sistematização de ideias da geometria euclidiana bem como para relacionar sistemas axiomáticos diversos. Pensando sobre este problema, consideramos que seria importante abordar com alunos de graduação um problema clássico da geometria que pudesse ser explorado em termos de visualização, análise, dedução e rigor, características destacadas por Van Hiele (1984) como fundamentais ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Leivas (2012) também discute a relevância do pensamento geométrico e destaca três conceitos importantes para a aprendizagem em geometria que envolve a imaginação, a intuição e a visualização. Pela imaginação os alunos podem "expressar uma forma de concepção mental de um conceito matemático" (LEIVAS, 2012, p. 15) que envolve a criação de um símbolo gráfico ou verbal ou uma combinação entre eles através do que seja possível expor um modo de ver (ou pensar) os entes geométricos (trata-se de um processo de simbolização). Já a intuição envolve "um processo de construção de estruturas mentais cognitivas para a formação de um determinado conceito matemático, a partir de experiências concretas do indivíduo com um determinado objeto" (LEIVAS, 2012, p. 15). A visualização está na base e "um processo de formar imagens mentais com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos e ou geométricos" (LEIVAS, 2012, p. 15). Ou seja, imaginação, intuição e visualização são aspectos presentes no processo de desenvolvimento do pensamento geométrico no qual o objeto precisa ser explorado em diferentes perspectivas, compreendido e explicitado.

Entende-se que, pelo origami, pode-se contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico, especialmente no que diz respeito à formação de imagens mentais, destacada por Leivas (2012) e a análise destacada por van Hiele (1984). Em nossa pesquisa optamos pelo trabalho com origami a partir de um método proposto por H. Abel no ano de 1980 para a trissecção de um ângulo agudo arbitrário. Para isso era usado apenas uma folha de papel em formato quadrado. Esse método de resolução é apresentado a seguir.

Suponhamos que α seja um ângulo agudo que pretendemos trissecionar cujos lados são a borda do papel OB e um segmento OA.

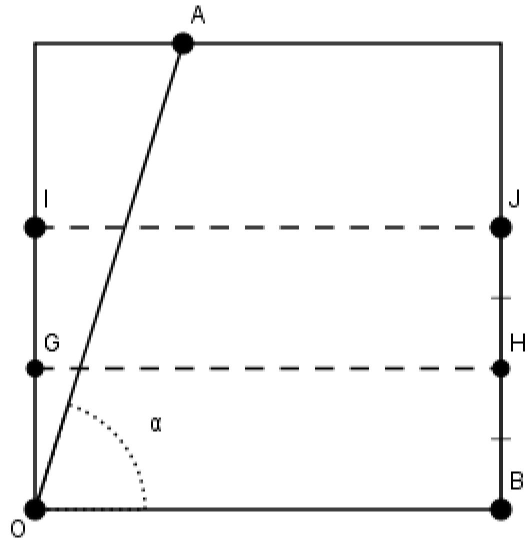
Figura 8 - Passo um da atividade.



Fonte: Elaborado para a pesquisa.

Começamos a dobrar o papel horizontalmente - paralelamente ao segmento da borda do papel OB – obtendo o segmento IJ. Em seguida dobra-se novamente o papel para se obter o segmento GH, paralelo a IJ, e equidistante de IJ e de OB.

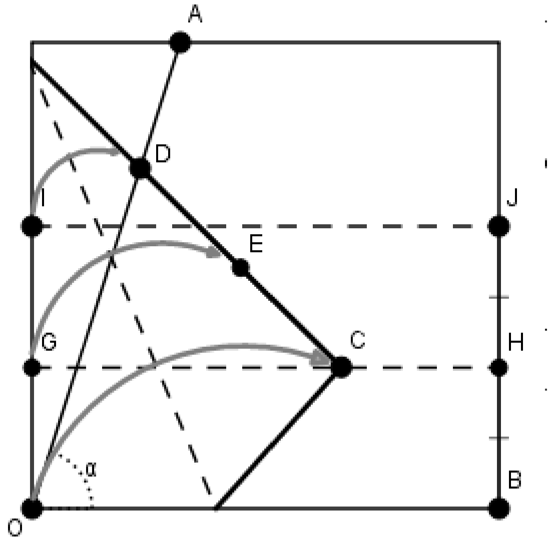
Figura 9 - Passo dois da atividade.



Fonte: Elaborado para a pesquisa

Vamos efetuar uma dobra de tal modo que o ponto I fique sobre o segmento AO, obtendo o ponto D; o ponto O fique sobre o segmento GH, obtendo o ponto C (está dobra é possível pelo axioma 6 de Huzita-Hatori) e o ponto G permite a marcação do ponto E (sendo D*E*C).

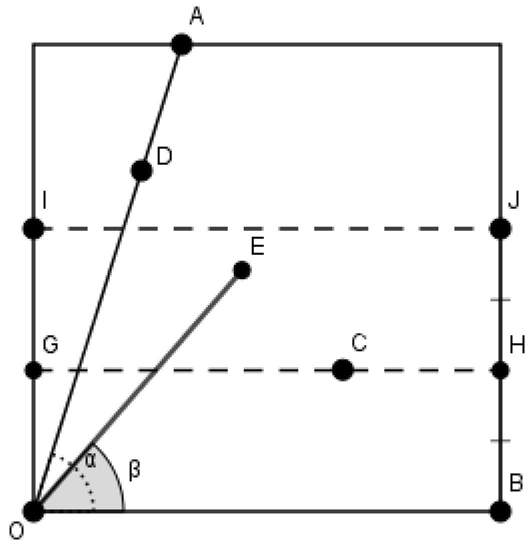
Figura 10 - Passo três da atividade.



Fonte: Elaborado para a pesquisa.

Traçando um segmento do ponto E até o ponto O, obtemos o ângulo β (BOE) que corresponde a 2/3α.

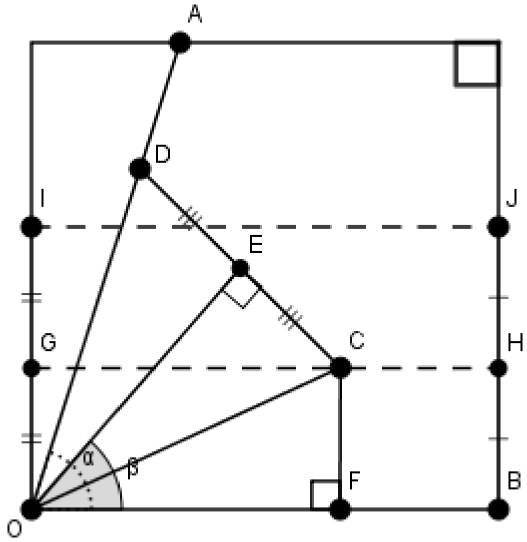
Figura 11 - Passo quatro da atividade.



Fonte: Elaborado para a pesquisa.

Demonstração:

Figura 12 - Imagem de referência para demonstração.



Fonte: Elaborado para a pesquisa.

Sabemos que os segmentos IG e OG são congruentes, pela dobra. Quando transportamos estas medidas, por meio da dobra, obtendo os segmentos DE e EC que também são congruentes (I).

Por utilizarmos uma folha de sulfite (ou poderia ser um papel em formato quadrado) temos que as bordas do papel formam um ângulo de 90º, então o ângulo IOB vale 90º e o ângulo IGH também, pois GH e OB são segmentos paralelos. Quando transportamos o ponto G formando o ponto E o ângulo DEO também será 90º. Seu suplementar OEC também mede 90º(II).

Vamos considerar os triângulos, OCE e ODE. Pela informação (I) temos que DE é congruente a EC, pela informação (II) temos que os ângulos OED e OEC são congruentes e o lado OE é comum. Pelo caso Lado Ângulo Lado, prova-se que os triângulos OCE e ODE são congruentes. Então os ângulos DOE e EOC são congruentes, pois são ângulos correspondentes de triângulos congruentes (III).

Para o terceiro triângulo, vamos construir um segmento perpendicular a OB que passe pelo ponto C. Nomeamos segmento CF com C pertencente a GH e F pertencente a OB. Como CF é congruente a GO e GO é congruente a EC (informação (I)) então, o segmento CF é congruente a EC (IV).

Vamos considerar os triângulos, OFC e OCE. Temos OC, lado comum e pela informação (IV) CF é congruente a EC. Por serem triângulos retângulos utilizaremos o Teorema de Pitágoras para determinar se o terceiro lado dos triângulos têm a mesma medida.

No triângulo OFC, retângulo em F, vem que:

$OC^2 = FC^2 + OF^2$

Analogamente, para o triângulo OEC, retângulo em E, temos:

$OC^2 = EC^2 + OE^2$

Como FC é congruente a EC temos:

$OC^2 = EC^2 + OF^2$ (V)

$OC^2 = EC^2 + OE^2$ (VI)

Analisando V e VI, pode-se concluir que OF é congruente a OE.

Considerando que temos: OF congruente a OE, CF congruente a EC e OC lado comum, pelo caso Lado Lado Lado pode-se afirmar que os triângulos OFC e OCE são congruentes. Portanto, os ângulos FOC e COE são congruentes, já que são ângulos correspondentes de triângulos congruentes (VII).

Pelas informações (III) e (VII) pode-se concluir que DOE é congruente a EOC e EOC é congruente a FOC então DOE também é congruente a FOC. Desse modo FOE (ângulo β) é 2/3 do ângulo AOB, conforme se queria demonstrar.

3 A OPÇÃO METODOLÓGICA

Neste capítulo apresentamos o sentido que para nós faz a pesquisa qualitativa de modo que seja possível compreender por que, nesta pesquisa, opta-se por tal metodologia. Trazemos, também, considerações sobre o estudo de caso realizado e uma breve explicação da análise fenomenológica que assumimos para interpretar os dados produzidos neste trabalho.

3.1 PESQUISA QUALITATIVA

A palavra pesquisa, segundo Martins (1992), refere-se a ter uma interrogação e sempre buscar sentidos para ela. Essa interrogação, de acordo com Bicudo (1993), trata-se de buscar cada vez mais explicações claras sobre a pergunta feita que orienta a busca do pesquisador. Essa pergunta visa compreensões, pois não há uma solução definitiva, não existem interpretações e conclusões plenamente desenvolvidas que encerrem a compreensão do fenômeno interrogado e possam ser consideradas conclusivas. Logo, o que na pesquisa qualitativa se expõe, são perspectivas ou modos de compreender determinado fenômeno.

De acordo com Bicudo (1993) uma pesquisa em Educação Matemática interroga o compreender e desenvolver matemática e não se trata de uma pesquisa na área da Matemática e nem em Educação embora tenha relação com temas focados por essas duas áreas de conhecimento. A pesquisa em Educação Matemática, segundo a autora envolve

> reflexões sobre modos de conceber a Matemática e a Educação. Ela não se restringe à produção do conhecimento matemático. Por sua vez, não basta adentrar pelas questões da Educação, tanto postas em termos ontológicos, quanto epistemológicos, axiológicos e culturais para definir procedimentos de pesquisa. É preciso, sim, considerar esses aspectos, porém à luz de concepções da Matemática e sua realidade, modos de conhecer seus objetos e de trabalhar com eles. (BICUDO, 2005, p. 15).

Com isso pode-se entender que a pesquisa em Educação Matemática não se limita ao estudo da formação de conhecimentos matemáticos, mas "permite que se compreenda a matemática, o modo pelo qual [ela] é constituída, os significados da matemática no mundo" (BICUDO,1993, p. 22).

Buscando compreensões acerca dos modos pelos quais se compreende e produz matemática a Educação Matemática privilegia a pesquisa de abordagem qualitativa. A pesquisa qualitativa, de acordo com Chizotti (2003), adota vários métodos de investigação para o estudo de um fenômeno sempre com a intenção de compreender e interpretar seus significados. "O termo qualitativo implica uma partilha densa com pessoas, fatos e locais que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os significados visíveis e latentes" (CHIZOTTI, 2003, p. 221).

No trecho acima destacado percebe-se que, para o autor, a pesquisa qualitativa tem relevância quando analisa a qualidade do objeto de estudo e o convívio do pesquisador com o investigado é importante para que ele possa extrair informações relevantes ao que deseja compreender. Ainda, segundo Chizotti (2003), a pesquisa qualitativa como investigação cientifica na área da Educação se consolidou no século XX quando a pesquisa qualitativa começou a se profissionalizar buscando compreender o "outro". Na década de 80 foram feitos investimentos públicos e privados para novas pesquisas que culminou na divulgação das técnicas, estratégias e iniciativas de pesquisas em todas as áreas, inclusive na Educação.

Para Bicudo (2012), esse caráter da pesquisa qualitativa é essencial à Educação Matemática, pois possibilita que sejam destacados o sujeito em seu contexto social e cultural, os motivos que levam o pesquisador a investigar e o faz justificar a escolha de determinada metodologia expondo concepções, por exemplo, de ensino, de aprendizagem, de educação. Ou seja, para Bicudo (2012), na pesquisa qualitativa é importante que sejam destacados, pelo pesquisador, os

> aspectos epistemológicos e, também, aqueles concernentes à concepção de educação e de ser humano em formação. Aspectos esses que se entrelaçam, denotando uma complexidade especifica à educação e, assim, evidenciam emaranhados como ensino, aprendizagem, políticas educacionais, ideologias, concepções de ciência, compreensões de história, da vida, possibilitando-nos adentrar em um campo cada vez mais abrangente e profundo e que, ambiguamente, se dá a conhecer e se esconder. (BICUDO, 2012, p. 16).

Tal qual entendemos pelas leituras realizadas, para desenvolver uma pesquisa qualitativa há diversas abordagens e estratégias possíveis e cabe ao pesquisador escolher aquela que melhor se adeque ao seu objetivo de investigação. Pode-se optar, por exemplo, por uma pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica, de abordagem construtivista, uma pesquisa ação, um estudo de caso, entre outras abordagens cada uma delas com embasamento teórico e objetivos distintos. No trabalho que estamos nos propondo a realizar opta-se pela pesquisa qualitativa na modalidade estudo de caso, pois se entende que tendo a intenção de buscar compreender as possibilidades de ensino e aprendizagem da geometria com alunos de um contexto específico, aquele da Licenciatura em Matemática, recorrendo-se aos origamis, essa abordagem é relevante para explicitar o que no percurso irá se mostrar.

3.2 O ESTUDO DE CASO

O estudo de caso surgiu da necessidade de compreender a habilidade de pensar do homem. Originou-se na sociologia entre os séculos XIX e XX quando foi possível perceber que somente as pesquisas quantitativas não respondiam questões problemáticas do contexto social. Bastante utilizado em medicina e áreas da psicologia, o estudo de caso subsidiava as analises de cada caso específico orientando a opção pelo melhor tratamento e acompanhamento do paciente.

Hoje o estudo de caso faz parte de diversas áreas de conhecimento quando o foco é um grupo específico ou "um caso específico". Para desenvolver uma pesquisa na modalidade estudo de caso, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), é necessário definir o foco de estudo e qual o grupo a ser pesquisado. Os autores ainda explicam que existem diversos tipos de grupos que podem ser considerados em um estudo de caso como, por exemplo, sujeitos pertencentes a um local específico, um grupo de pessoas com determinada característica ou uma atividade, nesta pesquisa iremos trabalhar com um grupo de alunos matriculados na disciplina de Geometria Euclidiana. É destacado também que, independe do grupo pesquisado, a presença do pesquisador irá interferir no comportamento dos observados principalmente se for um grupo de poucas pessoas, ressaltando a importância da escolha do grupo e a relevância de o pesquisador, na analise, considerar a sua interferência.

Esteban (2010) apresenta as características essenciais de um estudo de caso dizendo ser ele um estudo particularista, descritivo, heurístico e indutivo. Particularista porque centra-se em uma situação ou um fenômeno em particular, num certo momento em que se observa o grupo estudado. Descritivo, pois deve ter uma descrição rica e "densa" do fenômeno estudado. Heurístico, para "dar lugar ao descobrimento de novos significados, ampliar a experiência do leitor ou confirmar o que já é conhecido" (ESTEBAN, 2010, p.181). Indutivo, pois como o próprio nome diz, baseia-se no raciocínio indutivo para construir generalizações, conceitos e hipóteses que surgem da análise de dados fundamentada no contexto.

O estudo de caso pode ter vários propósitos, como diz Ponte (2006). Devido ao seu caráter *exploratório* trata-se de um trabalho investigativo no qual se buscam informações sobre o objeto de estudo. Essa exploração poderá ser apenas de caráter *descritivo*, se a intenção é expor o que é observado ou *analítico* se pretende explicar os fatos observados.

Em Educação o estudo de caso, de acordo com Ponte (2006), é relevante para que seja possível conhecer uma entidade bem determinada como uma pessoa, um curso, um sistema educativo dentre outras. O principal objetivo do estudo de caso, no contexto educacional, é compreender com profundidade o que se pretende estudar, permitindo ao pesquisador evidenciar a identidade e características próprias do caso em estudo. Pode-se entender que a investigação desenvolvida a partir de um estudo de caso é particularista, pois, conforme mencionado, analisa um caso especifico, único e especial. No entanto é relevante porque tem a intenção – abre possibilidades - esclarecer as suas particularidades.

O estudo de caso em Educação Matemática, chamado de estudo de caso educacional, é recomendado quando o pesquisador se preocupa em investigar a aprendizagem, o modo de conhecimento do aluno, as possibilidades de ensino, a compreensão de determinadas ações educativas, enfim, temas que não são expressos e concebidos da mesma forma por todos os indivíduos. Segundo Ponte (2006),

> na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e contínua de professores, projectos de inovação curricular, novos currículos, etc. (PONTE, 2006, p.3).

Entende-se que o estudo de caso é uma abordagem metodológica que permite expor o sujeito ou a entidade estudada em seu contexto de vivência e, considerando com Deus, Cunha e Maciel (2010), que a opção metodológica na pesquisa deve considerar as situações singulares do fenômeno investigado e dar ao pesquisador condições de compreender relações, conceitos e a realidade especifica do que está investigando. Compreendendo isso vimos que nossa pesquisa pode ser entendida como um estudo de caso.

Ou seja, tendo a intenção de investigar o conhecimento produzido pelos alunos quando, se utilizam origamis para explorar os conteúdos da Geometria Euclidiana temos um grupo bem definido: dos alunos de um curso de geometria euclidiana situados num tempo e espaço específicos. As particularidades da situação vivida com os alunos, sujeitos que produzem conhecimento geométrico, é o que na pesquisa será destacado. Portanto, trata-se de um estudo de caso exploratório com caráter analítico.

Resta-nos, ainda, a opção pelo modo de análise dos dados da pesquisa e, para ser possível explicitar o que se evidencia sem assumir pressupostos, entendemos que a abordagem fenomenológica é uma possibilidade.

3.3 A FENOMENOLOGIA COMO POSSIBILIDADE PARA A ANÁLISE DOS DADOS NA PESQUISA

A palavra fenomenologia, segundo Bicudo (1994) origina-se de duas expressões gregas *phainomenon* que significa aquilo que se mostra por si mesmo, ou seja, o fenômeno e *logos*, discurso esclarecedor. Machado (1994) afirma que a "fenomenologia significa discurso esclarecedor a respeito daquilo que se mostra por si mesmo, enquanto uma práxis ou forma de ação, opera através do método que investiga a experiência, no sentido de compreendê-la e não de explicá-la" (MACHADO, 1994, p. 35)

A fenomenologia surgiu com Hussel como alternativa a postura natural ou não crítica. Na pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica busca-se, com rigor, compreender e explicitar o que se conhece e como se conhece a realidade.

> a atitude natural, não-fenomenológica, faz o homem olhar o mundo de maneira ingênua como mundo dos objetos. A fenomenologia, ao contrário, busca uma fundamentação totalmente nova, não só da filosofia, mas também das ciências singulares. Enquanto as ciências positivas consideram os objetos como independentes do observador, a fenomenologia tematiza o sujeito, o eu transcendental, que "coloca" os objetos. (ZILLES, 2007, p. 218).

Quando se opta por uma pesquisa com abordagem fenomenológica é necessário voltar-se para um fenômeno e, de acordo com Zilles (2007), considerá-lo como o que pode ser compreendido pela consciência que a ele se volta. "A consciência funda sentido como compreensão de algo que é (sentido do ser), através da intencionalidade, ou seja, através de sua orientação intencional para encher o vazio" (ZILLES, 2007, p. 218). Com isso entende-se que a fenomenologia visa, de forma rigorosa, compreender determinado fenômeno ou situação vivida buscando descrever a realidade tal qual ela foi vivida pelo sujeito (a partir do sentido que isso fez para quem vivenciou).

Fini (1994) também discute a pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica descrevendo-a como um modo de pesquisar em que se intenciona "sempre descrever fenômenos e não explicá-los" (FINI, 1994, p. 24). Isso significa que o pesquisador que assume a postura fenomenológica de fazer pesquisa não se preocupa "em buscar relações causais". Ele procura descrever a situação vivida e, a partir do que é descrito, segundo um processo rigoroso de análise, procura "a essência do fenômeno".

A pesquisa em educação que segue a orientação fenomenológica sempre terá um sujeito vivenciando o fenômeno educacional. Esse fenômeno é o que se manifesta para a consciência em torno da interrogação que orienta a busca na pesquisa. Mediante análise da experiência vivida o pesquisador expõe a essência do que é compreendido. Segundo Bicudo (1994) "a essência de que trata a fenomenologia não é idealidade abstrata dada a priori, separada da práxis, mas ela se mostra nesse próprio fazer reflexivo" (BICUDO, 1994, p.21). Ou seja, a essência é o que se mantém como característico do fenômeno interrogado no processo de análise da descrição.

Com isso entende-se que, as pesquisas fenomenológicas partem das transcrições da experiência vivida tal qual ela foi vivida pelo sujeito. Mediante interrogação disso que na descrição se mostra o pesquisador busca um sentido para o que é descrito. Em suas leituras ele destaca unidades de significado que são trechos das transcrições que entende serem relevantes para a compreensão do que interroga. As unidades de significado vão mostrando ao pesquisador, sempre à luz de sua interrogação, aspectos comuns e podem ser agrupadas em categorias de análise. Ou seja, as *unidades de significado* destacadas pelo pesquisador, expressam o sentido presente em cada uma das expressões dos sujeitos pesquisados que foram transcritas. As categorias de análise, ao serem interpretadas ou explicitadas permitirão destacar a *estrutura do fenômeno*.

A estrutura do fenômeno, para Machado (1994) é "o meio através do qual se pode trazer à luz o que as relações vividas apresentam de ordem geral ou de aspectos idiossincráticos" (MACHADO, 1994, p.41-42) e para que a estrutura do fenômeno seja evidenciada faz-se "uma síntese das proposições consistentes apresentadas nas expressões reveladoras do pensar do sujeito, constituindo agrupamentos por temas" (MACHADO, 1994, p.41).

Com isso pode-se entender que o pesquisador, na análise ideográfica faz uma síntese das proposições apresentadas nas expressões dos sujeitos (que pode ser nomeada como asserção articulada) procurando escrever com suas palavras o que compreende, adentrando um movimento de interpretação individual. Nisso algumas ideias gerais vão sendo destacada e dão condições de o pesquisador adentrar a outro momento da análise: a nomotética. Para tanto, o pesquisador organiza as proposições que têm o mesmo sentido visando ao destaque das ideias nucleares. Essas ideias nucleares possibilitam a constituição das Categorias Abertas que lhe permitirá expressar sua compreensão do que é interrogado, expondo a estrutura do fenômeno.

Pode-se dizer então que, na análise ideográfica, o pesquisador busca o sentido do que é dito pelos sujeitos individualmente. Ao buscar as convergências de sentido visando às categorias abertas inicia-se a análise nomotética. Nela o pesquisador busca ir dos aspectos individuais para os gerais, procurando as divergências e convergências das ideias extraídas

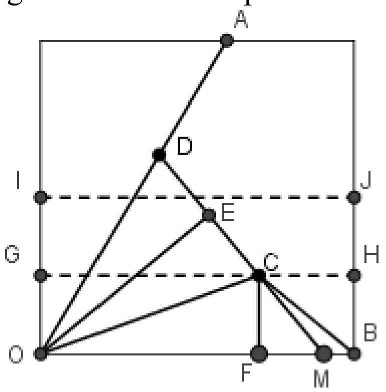
das falas dos sujeitos na análise ideográfica. As convergências possibilitam caracterizar e expressar a estrutura geral do fenômeno. As divergências, por outro lado, indicam percepções individuais, porém relevantes uma vez que dizem de um modo de o sujeito perceber o que lhe está sendo exposto. De modo geral, na análise fenomenológica "as generalidades /.../ indicam a iluminação de uma perspectiva do fenômeno" (MACHADO, 1994, p. 43) que permite ao pesquisador falar do sentido que a pesquisa fez para ele.

O fenômeno que buscamos compreender nesta pesquisa, nossa pergunta orientadora é *a produção do conhecimento geométrico do aluno a partir do trabalho com origami*. Para que isso seja possível filmamos uma aula de Geometria Euclidiana com alunos do terceiro ano do curso de graduação em Licenciatura em Matemática da UNESP, campus de Guaratinguetá, na qual utilizamos o origami para explorar o problema de trissecção de ângulo. Mediante a transcrição da aula, iniciamos o movimento de análise fenomenológica visando expor o que se evidencia como essencial à compreensão do investigado.

4 A PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS NA PESQUISA

Conforme mencionamos, em nossa pesquisa desenvolvemos uma atividade com um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática discutindo a possibilidade de, pela dobradura, trisseccionar um ângulo agudo. Participaram da atividade 16 alunos que foram organizados em pequenos grupos – de 3 a 4 pessoas. As discussões nos grupos foram filmadas gerando 18 vídeos que, posteriormente foram transcritos. Esse texto da transcrição, que expõe o movimento dos alunos na tentativa de solucionar o problema que lhes foi proposto, foi analisado. Fizemos tantas leituras quantas foram necessárias para compreender o sentido do todo e destacamos as Unidades de Significado (U.S.) considerando, sempre, a pergunta orientadora. Abaixo apresentamos o quadro construído na análise organizando-o em colunas do seguinte modo: na primeira coluna procuramos criar um código de identificação do vídeo (que indica o grupo) e do aluno participante. Assim, o código V3J1, indica o terceiro vídeo (terceiro grupo) e o aluno José. O número 1 indica a primeira U.S. destacada na fala de José. Os nomes são fictícios, para preservar a identidade dos alunos participantes. Na segunda coluna do quadro está a transcrição da fala do sujeito (U.S.). Na terceira coluna as explicações do pesquisador sobre a fala do sujeito e na última coluna buscaram expor a ideia presente em cada fala (ideia nuclear).

Figura 13 - Imagem de referência para a análise Ideográfica.



Fonte: Elaborado para a pesquisa.

Quadro 1 - Análise Ideográfica

Identificação	**Fala do sujeito**	**Explicação do pesquisador**	**Ideia nuclear**
V3J1	Porque esse é lado comum (OE) e aqui (DE e EC) tem a mesma distancia, não tem como não ser 90 graus.	O aluno argumenta defendendo a ideia de que a medida do ângulo é 90º.	Argumenta para defender uma ideia
V3M2	“Mano”, aqui “oh” esse ângulo (BÔC) é igual a esse (IGH) aqui pelo teorema das paralelas, que é 90.	O aluno argumenta recorrendo a um teorema conhecido: o teorema das paralelas.	Recorrer a um teorema para defender uma ideia
V3J2	A gente é idiota! “Tá” provado aqui “véio”, aqui “oh”, tem essa linha que é paralela a isso aqui (OB e GH) que quando você joga aqui (DEC), aqui ainda é 90 então aqui também é 90, se isso aqui é 90 então “tá” provado que é 90 aqui.	O aluno justifica porque entende que a medida do ângulo é 90º, detalhando, via imagem construída, o que diz.	Explica o que entende sobre a medida do ângulo
V3J3	Você tem isso aqui que você sabe que é 90 por causa da folha, quando você joga ele aqui, esse ponto que “tá” aqui é dessa reta aqui sabe que essa é paralela a essa.	O aluno justifica porque a medida do ângulo é 90º usando como argumento a borda do papel.	Recorre a dobradura pra justificar a medida do ângulo
V12JO1	Se esse pedaço (GO) é igual a esse (GI), e esse determina um pedaço (G), três pontos e eu ligo	O aluno justifica que os dois segmentos são congruentes a partir da dobra.	Recorre a dobradura para justificar a congruência de

Identificação	Fala do sujeito	Explicação do pesquisador	Ideia nuclear
	aqui (dobrando), vai dar a divisão certinha (DE e EC), não é essa a lógica?		segmentos
V2JO2	Aqui tem as paralelas, certo? Que obviamente é paralela aquela, então aqui (HĜI) é obviamente 90, só que então sobrepondo aqui (O em C e I em D o ângulo DÊO) da 90.	O aluno explica porque a medida do ângulo é 90º recorrendo a borda do papel.	Recorre a dobradura pra justificar a medida do ângulo
V2T1	Fazer um ângulo reto	O aluno propõe que construam um triangulo que possua um ângulo reto.	Sugere uma construção para a prova
V2T2	Não! João olha aqui isso aqui (CF) e não (CB) a altura disso aqui é igual a isso aqui (EC) porque esse é igual a aquele (GO).	O aluno justifica a medida de um segmento usado as paralelas.	Recorre a um teorema para defender uma ideia
V6N1	Então, isso aqui é uma transversal (dobra), se eu considerar que tenho duas paralelas eles são ângulos correspondentes, então são iguais.	O aluno fundamenta sua ideia com o teorema das paralelas	Recorre a um teorema para defender uma ideia
V13D1	Olha é um triangulo aqui /.../ então são três triângulos.	O aluno apresenta o seu raciocino para o outro visando uma possibilidade para a demonstração.	Sugere um caminho para a prova
V13A1	Por causa das duas paralelas e as	O aluno justifica porque os segmentos são congruentes,	Recorre a um teorema para

Identificação	Fala do sujeito	Explicação do pesquisador	Ideia nuclear
	transversais, aqui “oh”, são dois feixes paralelos, e aqui você dobrou uma transversal.	usando as paralelas.	defender uma ideia
V13JO3	Aqui a gente sabe que esse lado é igual a esse pela dobra (DE e EC) e esse é lado comum (OE).	O aluno justifica porque os segmentos são congruentes a partir da dobra.	Recorre a dobradura para justificar a congruência dos segmentos
V14G1	Aqui é ponto médio (E) desse segmento (DC), a gente traçou o OC, daria um triangulo isósceles, a gente consegue provar por lado, ângulo, lado.	O aluno argumenta o modo pelo qual pode provar que os dois triângulos são congruentes.	Sugere um caminho para a prova
V15AN1	Esse aqui era o O que dai ficou C, esse ponto aqui era o I que dai ficou D e aqui era o G que ficou E, que é quando eu sobrepus, seria o ponto de intersecção quando eu faço essa dobra.	O aluno explica o que se pode tirar de informação a partir da dobra realizada.	Recorre a dobradura para tirar informações
V15T3	A gente tem essa transversal da dobra.	O aluno justifica que a transversal surge a partir da dobra.	Identifica um ente geométrico a partir da dobra
V16JO4	É, tem que provar que eles são congruentes, se eles são congruentes então tem três ângulos iguais.	O aluno expõe seu raciocínio dizendo que ao provar que são congruentes (os triângulos) tem-se três ângulos iguais.	Sugere uma ideia para a prova
V17JO5	Da divisão, aqui é igual a	O aluno argumenta que os	Identifica a congruência a

Identificação	Fala do sujeito	Explicação do pesquisador	Ideia nuclear
	esse (IG e GO). Aí esse é igual a esse. Isso a gente sabe.	segmentos são congruentes a partir dos segmentos paralelos e da dobra.	partir de um teorema Recorre a dobradura para mostrar a congruência entre os segmentos
V17JO6	É, porque se eu provar que esse é congruente a esse, aí já sei que esse ângulo é igual a esse.	O aluno defende sua ideia para solucionar o problema através da congruência de triângulos.	Defende uma ideia para a prova
V17JO7	Tenho que provar de qualquer jeito que esse é congruente a esse (ODE e EOC). Aí os três são congruentes, então os ângulos correspondentes são iguais.	O aluno defende sua ideia para solucionar problema através da congruência de triângulos.	Defende uma ideia para a prova
V1B1	Pra provar, eu tenho esse lado comum (OE), é só eu provar que esse ângulo (DÔE e EÔC) é igual daí eu provo que esse triângulo (DOE) é congruente a esse (EOC), daí vai ser congruente a esse (outro triangulo ainda não construído) e os três ângulos são iguais.	O aluno defende sua ideia para a demonstração através da congruência de triângulos e argumenta em favor desse raciocínio.	Defende uma ideia para a prova Argumenta para defender uma ideia
V5B2	Ai nesse caso teria que ter esses ângulos iguais,	O aluno defende que os triângulos construídos têm	Justifica seu argumento

Identificação	Fala do sujeito	Explicação do pesquisador	Ideia nuclear
	e não o de 90.	elementos congruentes, mas que não satisfazem nenhum caso de congruência.	apontando impossibilidade
V5B3	Uma ortogonal passando por esse ponto (C).	O aluno explica a construção do triângulo para a congruência.	Sugere uma possibilidade de construção
V9N2	"Tô" pensando mais ou menos o seguinte, dado um ângulo qualquer, nós temos duas paralelas equidistantes, porque aqui tem a mesma distancia, só que o que não "tá" encaixando é essa transversal (dobra), porque eu sei que não pode ser qualquer uma, porque se não você não tinha dobrando e posto um no outro, só que não sei o que fazer pra traçar essa transversal.	O aluno argumenta sobre o modo como percebe uma possibilidade de separar a hipótese da tese a partir do movimento da dobra	Identifica entes geométricos Reconhece os dados do problema
V10N3	"Tá", a hipótese é o ângulo, a paralela e a transversal.	O aluno identifica a hipótese.	Identifica a hipótese
V7G2	Isso tem o mesmo tamanho. Aqui é 90 por causa do papel.	O aluno justifica a medida do ângulo de 90 graus por causa da borda do papel.	Identifica o ângulo relacionando com a folha de papel
V14A2	Porque é mediatriz.	O aluno argumenta que a medida do ângulo é 90 graus por causa da mediatriz.	Justifica a partir de uma suposição.

Identificação	Fala do sujeito	Explicação do pesquisador	Ideia nuclear
V17JO8	Tenho que provar de qualquer jeito que esse é congruente a esse (ODE e EOC). Aí os três são congruentes, então os ângulos correspondentes são iguais.	O aluno defende sua ideia para solucionar problema através da congruência de triângulos.	Defende uma ideia para a prova
V14A3	Oh pensa bem, você tem dois lados isso implica se dois lados são iguais isso implica que o outro também é.	O aluno defende a ideia de que, em dois triângulos, se existem dois lados congruentes o terceiro lado também será congruente.	Tira conclusões a partir de uma suposição
V14G3	Mas de qualquer forma nós temos aqui esses três pontos se a gente ligar esse aqui ia ficar esse triangulo. É só dividir no meio e vai dar 90.	O aluno defende a ideia de que a medida do ângulo é 90 graus pela mediatriz.	Tira conclusões a partir de uma suposição.

Fonte: Elaborado pela autora.

Ainda, buscando o sentido do que se mostra na fala dos alunos, sujeitos da pesquisa, interrogamos as ideias nucleares na busca de convergências. Na sequência apresentamos o quadro 2 com três colunas: as duas primeiras retiradas do quadro de análise ideográfica e uma terceira coluna construída com o objetivo de expor a ideia principal para a qual as ideias nucleares convergem, segundo o que interrogamos, ou seja, que nos permitem dizer do modo pelo qual compreendemos *a produção do conhecimento geométrico do aluno a partir do trabalho com origami*.

Quadro 2 – Analise Nomotética

Identificação	Ideia Nuclear	Convergência/ Categorias
V3J1	Argumenta para defender uma ideia	Atitude de argumentação
V3M2	Recorrer a um teorema para defender uma ideia	

Identificação	Ideia Nuclear	Convergência/ Categorias
V3J2	Argumenta expondo o raciocínio	Atitude de argumentação
V13D1	Sugere um caminho para a prova	
V13A1	Recorre a um teorema para defender uma ideia	
V5B3	Sugere uma possibilidade de construção	
V6N1	Recorre a um teorema para defender uma ideia	
V16JO4	Sugere uma ideia para a prova	
V17JO5	Identifica a congruência a partir de um teorema	
V17JO6	Sugere uma ideia para a prova	
V17JO7	Sugere uma ideia para a prova	
V1B1	Sugere uma ideia para a prova Argumenta para defender uma ideia	
V2T2	Recorre a um teorema para defender uma ideia	
V5B2	Justifica seu argumento apontando impossibilidade	
V3J1	Argumenta para defender uma ideia	
V14G1	Sugere um caminho para a prova	
V17JO8	Sugere uma ideia para a prova	
V2T1	Sugere uma construção para a prova	
V3J3	Recorre à dobradura para justificar a medida do ângulo	Recurso de Investigação
V15T3	Identifica um ente geométrico a partir da dobra	
V12JO1	Recorre à dobradura para justificar a congruência de segmentos	
V13JO3	Recorre à dobradura para justificar a congruência dos segmentos	
V15AN1	Recorre à dobradura para tirar informações	
V17JO5	Recorre à dobradura para mostrar a congruência entre os segmentos	
V9N2	Identifica entes geométricos Reconhece os dados do problema	
V10N3	Identifica a hipótese	
V7G2	Identifica o ângulo relacionando com a folha de papel	
V2JO2	Recorre à dobradura para justificar a medida do ângulo	

Identificação	Ideia Nuclear	Convergência/ Categorias
V14A3	Tira conclusões a partir de uma suposição.	Idiossincrasia
V14G3	Tira conclusões a partir de uma suposição.	Idiossincrasia
V14A2	Justifica a partir de uma suposição.	Idiossincrasia

Fonte: elaborado pela autora.

O quadro de convergências mostra que, tal qual interpretamos, há duas categorias abertas a discussão que nos permitirão dizer da *produção do conhecimento geométrico do aluno a partir do trabalho com origami*. São elas: atitude de argumentação e recursos de investigação. Ou seja, isso significa que o origami mostra-se, na fala dos sujeitos de nossa pesquisa, alunos da disciplina de geometria euclidiana, no terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da FEG/UNESP, como recurso para realizar investigação e como sendo relevante para o desenvolvimento de uma atitude argumentativa. No entanto, em que sentido isso diz da produção do conhecimento geométrico? Isso é o que se pretende discutir na sequência.

4.1 ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS ABERTAS

Para compreendermos *a produção do conhecimento geométrico do aluno a partir do trabalho com origami* passamos, neste capítulo, à discussão das categorias abertas destacando o que é compreendido pelo aluno no decorrer do trabalho com origami. De modo geral, na análise fenomenológica, as generalidades indicam uma perspectiva do fenômeno que permite ao pesquisador falar do sentido que a pesquisa fez para ele. Isso, segundo nossa compreensão, é o que passaremos a expor neste capítulo: uma perspectiva do fenômeno interrogado ou um modo de interpretar o que se mostrou significativo.

Iniciamos com a discussão da categoria aberta "Atitude de Argumentação". Para tanto vamos buscar o significado da palavra argumentação. Sendo uma palavra derivada do verbo argumentar indica, de acordo com o dicionário *online Dicio*, discutir apresentando e contrapondo razões que, através do raciocínio lógico, levem a uma conclusão. Pode-se, com isso, interpretar que nesta categoria o sujeito quando sugere ou defende uma ideia ele apresenta razões, argumentos para mostrar seu raciocínio acerca do assunto. Tais argumentos são baseados em um teorema ou em uma definição, que explicitam o seu conhecimento.

Falas como "'Mano', aqui 'oh' esse ângulo (BÔC) é igual a esse (IGH) aqui pelo teorema das paralelas, que é 90", ou "É, porque se eu provar que esse é congruente a esse, aí já sei que esse ângulo é igual a esse", ou ainda, "Por causa das duas paralelas e as transversais, aqui 'oh', são dois feixes paralelos, e aqui você dobrou uma transversal", ilustram que os sujeitos fazem uso de teoremas e conceitos matemáticos para argumentar e defender sua linha de raciocínio para a prova. Nota-se que há uma argumentação que recorre ao Teorema da Paralelas, aos casos de Congruência de Triângulos e ao Teorema de Tales, que se vale das propriedades de paralelas cortadas por uma transversal.

Quando o sujeito da pesquisa argumenta, isto é, busca justificativas para as ideias que sugere como modos de resolver problemas, podemos ver que há uma manifestação e exposição do conhecimento matemático ou do conhecimento do conteúdo que é requerido como uma forma de não ser contestado relativamente ao que é capaz de entender na exploração com origami.

Em outras situações nota-se uma contra argumentação que também buscam legitimidade no conhecimento do conteúdo. Por exemplo, nas falas: "Não! João olha aqui isso aqui (CF) e não (CB) a altura disso aqui é igual a isso aqui (EC) porque esse é igual aquele (GO)" ou "Fazer um ângulo reto" vê-se que os sujeitos estão dialogando acerca do modo pelo qual um determinado problema pode ser resolvido. Diante de determinada sugestão, não considerada válida, há argumentos que procuram esclarecer o que deveria ser feito: no primeiro caso analisar quais os segmentos que deveriam ser comparados e no segundo o tipo de triângulo que deveria ser construído.

O modo pelo qual os alunos discutem, apresentam razões, se contrapõe vão expondo um modo de raciocinar em matemática. Matheus (2013) explica que, o sujeito ao resolver um problema precisa da veracidade das premissas utilizadas para então assumir a conclusão como verdadeira e, quando o sujeito passa a explicar, justificar e demostrar está desenvolvendo o raciocínio lógico. Um raciocínio que é lógico, diz de certa produção de conhecimento. O raciocínio lógico caracteriza-se como um processo de estruturação do pensamento baseado em razões lógicas que permitem chegar a uma conclusão ou resolver um problema. Interpretamos que quando o sujeito raciocina logicamente se evidencia o desenvolvimento de um pensamento matemático ou uma produção de conhecimento matemático. Para o aluno o uso de argumento e justificativa lógica fundamenta o seu pensamento. Sendo assim, ele ao buscar tal fundamento volta-se para a validade dos argumentos, produz conhecimento matemático que o permite tirar conclusões lógicas argumentando com o outro, seus colegas que poderão estar junto pensando, analisando e produzindo igualmente.

Por outro lado, ao discutirmos o sentido da categoria "Recurso de Investigação" e, novamente recorrer ao significado da palavra *investigação* no dicionário *Dicio,* vê-se que: Investigação tem significado de análise excessivamente rigorosa sobre alguma coisa, geralmente científica; pesquisa. Interpretamos, pelo que nos dados da pesquisa se mostra, que os sujeitos quando recorrem à dobradura para chegar a alguma conclusão, estão investigando, analisando o que se mostra significativo para a retirada de informações daquela dobra, ou seja, o que lhes dá possibilidades de compreensão. O recurso utilizado – o origami – e o modo pelo qual as situações lhes são proposta – por meio da resolução de problemas – dá aos alunos, sujeitos da pesquisa, modos de pensar para si e para o diálogo com o outro, possibilitando o desenvolvimento cognitivo e a competência matemática para a resolução da atividade. Essa investigação pode ser vista em falas como: "Você tem isso aqui que você sabe que é 90 por causa da folha, quando você joga ele aqui, esse ponto que "tá" aqui é dessa reta aqui, sabe que essa é paralela a essa" ou "Isso tem o mesmo tamanho. Aqui é 90 por causa do papel". O recurso lhe dá a possibilidade de uso da folha de papel para investigar, analisar o que é construído e os passos da atividade vão tomando forma e possibilitando a resolução do problema. No entanto, o recurso desencadeia o processo investigativo que se estabelece pela comparação com o conteúdo. A investigação vai se dando na articulação entre o dobrar o papel e a matemática ou o seu modo de justificar matematicamente o que vê.

Mostra-se nesse modo de fazer e justificar o ver possibilitado pela dobradura. Ou seja, na investigação o aspecto visual é bastante forte em virtude do modo pelo qual o origami vai sendo feito. Barbosa (2011) defende a abordagem visual de um conceito matemático como um método de produção de conhecimento e Guzmán (2002) explica que o uso da visualização é importante para a resolução de problemas. Isso porque o ver é algo natural, isto é, espontâneo ao sujeito e pode favorecer o surgimento (nascimento) do pensamento matemático. Trata-se de um nascimento que é subjetivo, ou que está na "mente" daquele que pensa. Porém, por meio do diálogo vai sendo exposto, abrindo-se a compreensão, refutação, investigação. O origami, segundo o que pudemos ver na pesquisa, favorece tanto esse modo de pensar quanto a sua exposição. Permite, portanto, a comunicação ou a transmissão de ideias que se dá de forma simples. Os sujeitos da pesquisa em diversos momentos apontam ou mostram o que deveria ser feito, mesmo que não sejam capazes de explicar matematicamente. A fala "A gente é idiota! 'Tá' provado aqui 'véio', aqui 'oh', tem essa linha que é paralela a isso aqui (OB e GH) que quando você joga aqui (DEC), aqui ainda é 90 então aqui também é 90, se isso aqui é 90 então 'tá' provado que é 90 aqui", mostra que o sujeito visualiza, entende o que acontece e explica de uma forma natural (espontânea) sem se basear em demonstrações matemáticas construídas com base em argumentos da linguagem formal. Continuando a discussão com os colegas, os argumentos com fundamento matemático, vão surgindo e dando forma a ideia. Com isso os participantes da pesquisa passam a ver o significado matemático e conseguem argumentar fazendo uso de conceitos e definições que vão se clareando e fazendo sentido no contexto do pensamento geométrico. Isso, segundo o que interpretamos, vai dando indícios do desenvolvimento de um pensamento matemático ou da produção de conhecimento matemático pelo aluno quando, para ele, a linguagem matemática vai se constituindo, vai sendo possível de ser compreendida.

O conhecimento, para Anastácio (1999), concebe-se como uma produção, algo construído e não imposto. Relativamente à matemática isso significa voltar-se para as possibilidades que nem sempre são percebidas *a priori*. Ferreira (2015), completando essa ideia de produção destaca que o conhecimento está relacionado ao ato de conhecer, ao aprender, ao ter uma ideia ou noção de certa coisa quando o sujeito, estando ciente da experiência, procura compreender ou explicar o que está acontecendo.

Já Steinbring (2005) afirma que o conhecimento matemático se origina em contexto social e de interpretação individual. Em nossa pesquisa pode-se considerar que a sala de aula de geometria é o contexto no qual as ações se desenvolveram. Vê-se a individualidade do pensar que, no fazer o origami, acontece. Mas esta vai dando lugar a discussão, vai se modificando no diálogo que expõe o que é feito, revelando aspectos da produção de conhecimento.

Ferreira (2015), ao discutir os três níveis de conhecimento em matemática traz a investigação como o segundo deles. A autora diz que por meio da observação e experimentação podem-se obter novas interpretações. Isso se mostra em nossa pesquisa quando os alunos observam o que deve ser feito e experimentam dobras para poder justificar as opções.

Além da questão da investigação e da argumentação que se mostram significativas para produção do conhecimento matemático quando se considera o recurso do origami, outras características também são destacadas de modo idiossincrático. Ou seja, mesmo que não tenham convergência de ideias que sejam abrangentes, são importantes para se compreender o processo de produção do sujeito. Ideias como "tirar conclusões a partir de uma suposição" e "justificar a partir de uma suposição" aparecem em poucas falas dos sujeitos, mas revelam modos de analisar a situação. A primeira idiossincrasia mostra que o sujeito da pesquisa tirou uma conclusão em função de um raciocínio equivocado que se utilizava de um conceito de geometria. Ele diz: "Oh pensa bem, você tem dois lados isso implica, se dois lados são iguais isso implica que o outro também é”. Sua intenção era falar de congruência de triângulos. No entanto ele se vale de uma propriedade não válida. Ou seja, o fato de dois triângulos terem dois lados congruentes não garante a sua congruência. Logo, embora a intenção estivesse correta – usar congruência de triângulos – o raciocínio estava equivocado: não há caso de congruência Lado, Lado.

A segunda ideia idiossincrática expõe o raciocínio do aluno que afirma que, em um triângulo qualquer ABC o segmento que parte do ponto médio da base AB - M - e vai até o vértice C, formando o segmento MC, gera um ângulo de 90º (ou seja, faz com que os segmentos AB e MC sejam perpendiculares). A justificativa do raciocínio usa o argumento: “Porque é mediatriz”. Ou seja, o aluno considera que o fato de ser mediatriz da base AB implica em gerar um segmento MC perpendicular. Como na atividade o sujeito não havia chegado à conclusão de que o triângulo apresentado era isósceles, utilizar essa linha de raciocínio para a prova é equivocada. Isso mostra que, embora o aluno tenha considerado o origami para fazer a sua análise, o raciocínio pauta-se em argumentos que do ponto de vista matemático não são válidos. Assim, em que sentido essa idiossincrasia é relevante à produção do conhecimento? É relevante, pois dá ao professor a oportunidade de compreender o modo pelo qual o aluno está pensando ou está pautando sua argumentação. Isso lhe dá condições de propor outras ações – com recursos variados – que permitam ao aluno ver o seu equívoco e construir novos conceitos que o permitam justificar corretamente o que é feito.

5 CONCLUSÃO

Nesta pesquisa buscamos compreender *a produção do conhecimento geométrico do aluno a partir do trabalho com origami.* Para isso acompanhamos um grupo de alunos do 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Geometria Euclidiana, na FEG/UNESP com a intenção de investigar o conhecimento produzido por eles quando utilizam origamis para explorar os conteúdos da Geometria Euclidiana. Atentos as particularidades da situação vivida com os alunos, buscamos interpretar os dados produzidos através da analise fenomenológica que nos permitiu destacar o que se mostra característico na produção de conhecimento desses alunos.

Interpretamos que os sujeitos da pesquisa expressam ideias similares que, no movimento de análise, convergiram para duas categorias que nomeamos "Atitude de Argumentação" e o "Recurso de Investigação". Destacamos essas categorias para responder a pergunta de pesquisa uma vez que as ideias nelas contidas são relevantes à produção de conhecimento.

Quando nos voltamos para a categoria "Atitude de Argumentação" vimos que o aluno ao argumentar busca explicar ao outro sujeito utilizando o raciocínio logico e seus conhecimentos prévios, sua compreensão da atividade o que, segundo o que interpretamos, indica uma forma de expor o conhecimento matemático que está em desenvolvimento.

Já o "Recurso de Investigação" é essencial para a produção do conhecimento geométrico, pois possibilita que o aluno tire conclusões e compreenda o assunto de um modo que vai revelando o sentido que se faz para ele. O origami permite que aluno visualize o que acontece e articule com a linguagem matemática, pois o ver é algo espontâneo que o sujeito busca relacionar com o que aprendeu em geometria para dar forma a sua ideia e justificar segundo as exigências da matemática formal.

A revisão da literatura nos mostrou que a presença expressiva de formas geométricas nos origami são importantes ao aspecto visual. No entanto fazendo uma analogia com as propriedades matemáticas, o origami permite analisar o que é feito dando evidências do conteúdo necessário a justificação do que fez. Destacamos que o origami é um excelente recurso de investigação e experimentação, possibilitando o desenvolvimento crítico que leva a um raciocínio necessário para a construção de argumentos válidos e justificativas, provas de afirmações matemáticas e compreensão do conteúdo, principalmente em geometria.

Com o que vivenciamos neste trabalho concluímos que há *produção do conhecimento geométrico do aluno a partir do trabalho com origami.* O conhecimento produzido é expresso na investigação, no diálogo que se estabelece entre os alunos, nas justificativas e contra argumentos que vão aparecendo no decorrer da atividade. Pode-se dizer pelo que analisamos, que o origami permite que sejam explorados conteúdos de matemática em uma turma de graduação, isto é, o origami permite que os alunos desenvolvam matemática compreendendo o significado do seu conteúdo, ou seja, atribuindo-lhe sentido.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. et. al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 94-108, 2004.

ANASTACIO, M. Q. A. **Três ensaios numa articulação sobre a racionalidade, o corpo e a educação na matemática.** 1999. 153f. Tese de Doutorado em Educação – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1999.

BARBOSA, S. M. A produção do conhecimento matemático: um processo coletivo. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., Recife, 2011. **Anais...** Recife: CIAEM, 2011.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação Matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **R.B.E.C.T.**, v. 5, n. 2, mai-ago. 2012, p. 16-19.

BICUDO, M. A. V. et al. **Educação matemática**. [S.l]: [S.n.], 2005, p. 18.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, 1993, p. 18-23.

BICUDO, M. A. V. Sobre a Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Orgs). **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: UNIMEP, 1994. p. 35-46.

BICUDO, M. A. V.; ESPÓSITO, V. H. C. **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: Editora Unimep, 1994, p. 35-46.

BIKLEN, S.; BOGDAN, R. C. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, p. 134-301, 1994.

CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. **Explorando geometria com origami.** São Carlos : Departamento de Matemática / Universidade Federal de São Carlos, 2009.

CHIZZOTTI, A. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evoluções e desafios. **Revista Portuguesa de Educação.** Braga ,v.16, n.2, 2003, p. 221-236.

CRESENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria**: opiniões sobre a área e seu ensino. 2006, 242f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2006, Disponível em https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/2380/TeseEPC.pdf?sequence=1. Acesso em: 18 jan. 2018.

DEUS, A. M.; CUNHA, D. E. S. L.; MACIEL, E. M. Estudo de caso na pesquisa qualitativa em educação: uma metodologia. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA UFPI, 6., Teresina, 2010. **Anais...** Teresina: UFPI, 2010.

DOMBROWSKI, V. L. S. M**odelagem matemática:** perspectiva e possibilidades da utilização do origami no ensino da geometria. Paraná: Governo do estado, p. 12-16, 2010.

ESTEBAN, M. P. S. **Pesquisa qualitativa em educação**: fundamentos e tradições. Porto Alegre: AMGH, p. 39-48, 2010.

FERREIRA, M. J. A. A produção do conhecimento matemático ao se estar-com as TIC: um estudo fenomenológico. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 19., Juiz de Fora, 2015. **Anais...** Minas Gerais: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

FINI, M. I. Sobre a pesquisa qualitativa em educação, que tem a fenomenologia como suporte. In: BICUDO, M. A. V. e ESPOSITO, V. H. C. (Orgs) **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: UNIMEP, 1994. p. 23-33.

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS AT THE UNDERGRADUATE LEVEL, 2., 2002, Hersonissos. **Proceedings...** Hersonissos: University of Crete, 2002. p.1-24.

IMENES, L. M. **Geometria das dobraduras**. São Paulo: Scipione, 1997.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: modelo de van Hiele. **Bolema.** Rio Claro, v. 10, p. 21-30, 1994.

KAWANO, C. A Matemática do Origami. **Revista Galileu**. Editora Globo S.A. Ed. 187. Fev. 2007.

LEIVAS, J. C. P. Educação GEOMÉTRICA: REFLEXÕES sobre o ensino e aprendizagem em geometria. **Revista SBEM RS**, v. 1, n. 13, 2012.

MACHADO, O. V. M. Sobre a pesquisa qualitativa em educação, que tem a fenomenologia como suporte. In: BICUDO, M. A. V. e ESPOSITO, V. H. C. (Orgs). **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: UNIMEP, 1994. p. 35-46.

MARTINS, J. **Um enfoque fenomenológico do currículo:** educação como poíesis. São Paulo: Cortez, 1992 .

MATHEUS, A. R.; CANDIDO, C. C. A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico. **Revista Professor de Matemática**. Rio de janeiro. 2013.

MATTOS, F. R. P.; YOKOYAMA, L. A. Construções geométricas por dobraduras Origami. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA. 8., Recife, 2004. **Anais...** Pernambuco: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

MONTEIRO, L. C. N. **Orígamí:** história de um geometría axíomátíca**.** 2008. 111 f. Tese (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, Lisboa, 2008.

NASSER, L.;VIEIRA, E. R. Formação de professores em geometria: uma experiência no ciclo de alfabetização. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 19-36, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015. Disponível em:

<https://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/600/556>. Acesso em: 18 jan. 2018.

OLIVEIRA,V. **Cálculo mental e a produção do conhecimento matemático.** 2015. 75 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

PASSOS, P. M. C.; SOUSA, J. N. F. Trabalhando conceitos de geometria plana através de dobraduras. X Encontro nacional de educação em matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO EM MATEMÁTICA. 10., Salvador, 2010. **Anais...** Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema.** Rio Claro, v.19 n.25, 2006, p. 105-132.

SOUSA, J. M. R. **Trissecção do ângulo e duplicação do cubo:** as soluções na antiga Grécia. 2001. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2001.

STEINBRING, H. **The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction:** an epistemological perspective. Dordrecht: Springer, 2005. 236 p.

VAN HIELE, D. **The didactics of geometry in the lowest class of secondary school.** In: FUYS, David et al. English translation of Selected Writing of Dina Van Hiele – Geodof and Pierre M. Van Hiele. COPYRIGHT, 1984, p. 1-212.

ZARPELLON, J. M. **Origami, geometria, aprendizagem:** uma proposta em ação. Paraná: Governo do Estado, 2014.

ZILLES, U. Fenomenologia e teoria do conhecimento em Husserl. **Revista da Abordagem Gestáltica,** v.13.2 2007, p. 216-221.