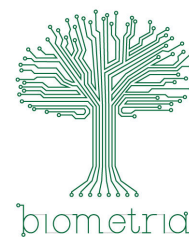




Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Biociências – Câmpus de Botucatu
Programa de Pós-Graduação em Biometria



Modelagem matemática para descrever a recuperação de áreas degradadas na Amazônia

Carlos Frank Lima dos Santos

Botucatu
2022

Carlos Frank Lima dos Santos

Modelagem matemática para descrever a recuperação de áreas degradadas na Amazônia

Tese de Doutorado apresentada ao Curso de Programa de Pós-graduação em Biometria da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Biometria.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Luiz Pio dos Santos

Botucatu
2022

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÉC. AQUIS. TRATAMENTO DA INFORM.
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CÂMPUS DE BOTUCATU - UNESP
BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: ROSEMEIRE APARECIDA VICENTE-CRB 8/5651

Santos, Carlos Frank Lima dos.

Modelagem matemática para descrever a recuperação de áreas degradadas na Amazônia / Carlos Frank Lima dos Santos. - Botucatu, 2022

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências de Botucatu

Orientador: Fernando Luiz Pio dos Santos

Capes: 33004064

1. Ecologia - Modelos matemáticos. 2. Simulação por computador. 3. Equações diferenciais. 4. Recuperação e remediação ambiental.

Palavras-chave: Competições entre espécies;
Difusão-Advecção; Ecologia matemática; Equações diferenciais; Simulação computacional.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE CARLOS FRANK LIMA DOS SANTOS, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM BIOMETRIA, DO INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS - CÂMPUS DE BOTUCATU

Aos 21 dias do mês de fevereiro do ano de 2022, às 14:30 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de CARLOS FRANK LIMA DOS SANTOS intitulada **Modelagem matemática para descrever a recuperação de áreas degradadas na Amazônia**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. FERNANDO LUIZ PIO DOS SANTOS (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Bioestatística Biologia Vegetal Parasitologia e Zoologia / Instituto de Biociências de Botucatu - UNESP, Prof. Dr. JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática Aplicada / Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Prof. Dr. JUNIOR CESAR ALVES SOARES (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Universidade do Estado de Mato Grosso / UNEMAT, Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente - UNESP, Prof. Dr. ADRIANO GOMES GARCIA (Participação Virtual) do(a) ESALQ / Universidade de São Paulo. Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: **APROVADO**.

Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. FERNANDO LUIZ PIO DOS SANTOS

À Deus, ao meu Orientador Dr. Fernando Luiz Pio dos Santos, à minha esposa Karem e à todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização dessa obra.

Agradecimentos

Agradeço primordialmente a presença de Deus em minha vida, sem a qual jamais conseguiria vencer as tribulações;

Gostaria de externar a minha eterna gratidão, carinho e admiração ao meu Orientador ilustríssimo professor Dr. Fernando Luiz Pio dos Santos, pela valiosa orientação, sugestão e conhecimentos a mim oportunizado com paciência, disposição em sempre ajudar sem as quais a conclusão deste trabalho jamais seria possível;

À minha amada esposa pelo apoio e dedicação assumindo meus compromissos e responsabilidades ao longo desses anos, para que eu pudesse dedicar-me exclusivamente a realização dessa pesquisa;

Aos professores que ministraram disciplinas ao longo do curso, pela contribuição no meu amadurecimento intelectual e pessoal;

Aos funcionários e corpo técnico da UNESP, Davi, Luiz, Junior e Arthur, que sempre estiveram dispostos a ajudar nos trabalhos de regulamentação e burocracia;

Aos meus amigos e colegas de estudo e lazer, pelo companheirismo ao longo desta jornada;

Aos meus amados pais: Onoraldo e Maria Silça, pelo legado ético, pelo amor, pela paciência, compreensão e estímulo incomensuráveis a mim dispensados serenamente, na realização deste sonho acalentado por mim há anos;

Ao meu querido irmão, amigo Professor Dr. Alcides de Castro Amorim Neto, pelo apoio, ajuda, conselho e amizade e está sempre presente nas horas mais precisas;

Ao meu eterno amigo professor Dr. Júnior César Alves Soares, pela amizade, apoio e ajuda na construção desse trabalho;

Ao meu eterno admirado amigo Professor Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer (JONI), pela valorosa contribuição, conselho, apoio e brilhantes ideias;

Gostaria de agradecer aos meus tios, Luzia Lima e José João Marques, que durante este período de curso, estiveram ao meu lado sem medir esforços para dá sua parcela de contribuição;

Agradeço à todos que me receberam de braços abertos em Botucatu durante o tempo de estudo, em especial aos meus colegas de sala: Elizabeth, Betina, Juliana, Gustavo, Lucas Romero;

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

If I have been able to see further, it was only because I stood on the shoulders of giants.

Isaac Newton

Resumo

A Amazônia brasileira tem aproximadamente 5,5 milhões de km^2 de floresta e vem sendo desmatada por inúmeras razões, como aumento da área de pastagens, agricultura, exploração de madeira, construção de usinas hidrelétricas, dentre outras. O desmatamento afeta diretamente o microclima local, continental e o convívio das espécies ecológicas, colocando várias espécies em sérios riscos de extinção. Diante disso, faz-se necessário propor estratégias de recuperação às áreas degradadas. O objetivo deste estudo é propor dois modelos matemáticos sendo um para descrever a recuperação da área desmatada e outro para mostrar a influência da vegetação no microclima local. Os modelos matemáticos são descritos por sistemas não-lineares de Equações Diferenciais Parciais (*EDP*). Os sistemas consideram fenômenos de dispersão populacional, dinâmicas vitais do tipo Verhulst e competições inter e intraespecíficas, descritas pela clássica modelagem do tipo Lotka-Volterra (não-linear), combinado às *EDP* de difusão-advecção. Os resultados numéricos, obtidos via discretização dos sistemas pela técnica de diferenças finitas, mostraram que as competições inter e intraespecíficas definiram a nova paisagem ecológica local e que o reflorestamento interfere diretamente no comportamento padrão do microclima local, sendo a advecção responsável pela coexistência das espécies, reforçando que florestas tropicais são fundamentais à manutenção da estabilidade climática local.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Competições entre Espécies, Difusão-Advecção, Simulação Computacional, Ecologia Matemática.

Abstract

The Brazilian Amazon has approximately 5.5 million km^2 of forest and has been deforested for many reasons, as increase of pasture area, agriculture, exploitation of wood, construction of hydroelectric power plants, among others. Deforestation directly affects the local, continental microclimate and the coexistence of ecological species, putting several specie at serious risk of extinction. Therefore, makes it necessary to propose recovery strategies to degraded areas. The objective of this study is to propose two mathematical models being a to describe the recovery of the deforested área a and other to show the influence of the vegetation in the local microclimate. Mathematical models are described by non-linear systems of Equations Partial Differentials (EDP). Systems consider phenomena of population dispersion, vital dynamics of the Verhulst type and inter and intra-specific competitions, described by the classic Lotka-Volterra model (non-linear), combined with diffusion-advection EDP. The numerical results, obtained by discretization of systems by the technique of finite diferences, showed that inter and intra-specific competitions defined the new local ecological landscape and that reforestation directly interferes in the default behavior of the local microclimate, being the advecção responsible for the coexistence of the species, reinforcing that tropical forests are key to maintaining climate stability.

Keywords: Differential Equations, Competition between Species, Diffusion-advection, Computational Simulation, Mathematical Ecology.

Lista de figuras

Figura 1 – Localização do experimento. Fonte: autoria própria.	9
Figura 2 – Área degradada sendo replantada.	10
Figura 3 – Distribuição inicial das espécies P_1 , P_2 e P_3 no domínio computacional. . .	13
Figura 4 – Malha do domínio computacional bidimensional.	18
Figura 5 – Discretização espacial pelo do método de diferenças finitas centrais.	20
Figura 6 – Refinamento da malha computacional para espécie P_1	37
Figura 7 – Refinamento da malha computacional para espécie P_2	38
Figura 8 – Refinamento da malha computacional para espécie P_3	38
Figura 9 – Dinâmicas da espécie P_1 ao longo do tempo, considerando as condições iniciais $C_1 = 0, 5$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1, 5$. $T = 5000$ dias.	41
Figura 10 – Dinâmicas da espécie P_2 ao longo do tempo, considerando as condições iniciais $C_1 = 0, 5$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1, 5$. $T = 5000$ dias.	41
Figura 11 – Dinâmicas da espécie P_3 ao longo do tempo, considerando as condições iniciais $C_1 = 0, 5$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1, 5$. $T = 5000$ dias.	42
Figura 12 – Variação temporal da densidade da espécie P_1 em função dos valores do parâmetro de difusão.	45
Figura 13 – Variação temporal da densidade da espécie P_2 em função dos valores do parâmetro de difusão.	46
Figura 14 – Variação temporal da densidade da espécie P_3 em função dos valores do parâmetro de difusão.	46
Figura 15 – Variações temporais da densidade das espécies P_1 , P_2 e P_3 , em função dos valores dos parâmetros de advecção $u_i, v_i, i = 1, 2, 3$	47
Figura 16 – Variações temporais da densidade das espécies P_1 , P_2 e P_3 em função dos valores do parâmetro de crescimento $\lambda_i, i : 1, 2, 3$	49
Figura 17 – Variação temporal da densidade da espécie P_1 , em função dos valores dos parâmetros de competições $\gamma_i, \sigma_i, i : 1, 2, 3$	50
Figura 18 – Variação temporal da densidade da espécie P_2 , em função dos valores dos parâmetros de competições $\gamma_i, \sigma_i, i : 1, 2, 3$	50
Figura 19 – Variação temporal da densidade da espécie P_3 , em função dos valores dos parâmetros de competições $\gamma_i, \sigma_i, i : 1, 2, 3$	51
Figura 20 – Sensibilidade para cada espécie de vegetação.	52
Figura 21 – Sensibilidade para as três espécies de vegetação.	53
Figura 22 – Resultados numéricos computacionais das dinâmicas temporais das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo t . $T = 13$ anos.	55
Figura 23 – Resultados numéricos computacionais das dinâmicas temporais de P_1 , P_2 e P_3 considerando o modelo 5.4 ao longo do tempo t . $T = 13$ anos.	56

Figura 24 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_1 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$, $T = 13$ anos. Cores próximas do azul indicam baixa densidade da espécie e próximo ao vermelho, alta densidade da espécie.	57
Figura 25 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_2 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$, $T = 13$ anos. Cores próximas do azul indicam baixa densidade da espécie e próximo ao vermelho, alta densidade da espécie.	57
Figura 26 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_3 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$, $T = 13$ anos. Cores próximas do azul indicam baixa densidade da espécie e próximo ao vermelho, alta densidade da espécie.	58
Figura 27 – Resultados numéricos computacionais das dinâmicas temporais de P_1 , P_2 , P_3 , L e H . $\Delta t = 0,01$, $T = 5000$ dias (aproximadamente 13 anos).	59
Figura 28 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de P_1 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades das espécies consideradas.	59
Figura 29 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de P_2 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades das espécies consideradas.	60
Figura 30 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de P_3 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades das espécies consideradas.	60
Figura 31 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de L . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades de L	61
Figura 32 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de H . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades de H	61
Figura 33 – Região recuperada pelas três espécies, com a predominância do Ingá (P_2).	62
Figura 34 – Dinâmicas populacionais das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo considerando as condição inicial $C_1 = 0,5$. $T = 5000$	73
Figura 35 – Dinâmicas populacionais das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo considerando as condição inicial $C_2 = 1$. $T = 5000$	73

Figura 36 – Dinâmicas populacionais das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo considerando as condições iniciais $C_3 = 1, 5$. $T = 5000$	74
Figura 37 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_1 , na ausência de difusão e advecção no modelo (3.1).	75
Figura 38 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_2 , na ausência de difusão e advecção no modelo (3.1).	75
Figura 39 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_3 , na ausência de difusão e advecção no modelo (3.1).	76
Figura 40 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_1 , na ausência da difusão no modelo (3.1).	76
Figura 41 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_2 , na ausência da difusão no modelo (3.1).	77
Figura 42 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_3 , na ausência da difusão no modelo (3.1).	77
Figura 43 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_1 , na ausência da advecção no modelo (3.1).	78
Figura 44 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_2 , na ausência da advecção no modelo (3.1).	78
Figura 45 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_3 , na ausência da advecção no modelo (3.1).	79

Lista de tabelas

Tabela 1 – Trabalhos analisados que contribuíram na construção dos modelos desta pesquisa.	8
Tabela 2 – Utilização dos recursos por cada espécie.	13
Tabela 3 – Valores das taxas de crescimento.	14
Tabela 4 – Valores dos parâmetros referentes ao modelo (3.1)	15
Tabela 5 – Valores dos parâmetros computacionais referentes ao modelo 3.2	17
Tabela 6 – Malhas computacionais	35
Tabela 7 – Erro relativo.	36
Tabela 8 – Ordem de convergência.	36
Tabela 9 – Intervalo de correlação, segundo Rumsey (2011).	44
Tabela 10 – Intervalo dos parâmetros para análise de sensibilidade.	45

Lista de abreviaturas e siglas

CC	Comprimento do Caule
DAS	Diâmetro a altura do solo
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
EDP_s	Equação Diferenciais Parciais
H	Calor sensível
K	Potássio
L	Calor latente
$MCGA_s$	Modelos Numéricos de Circulação Geral da Atmosfera
N	Nitrogênio
P	Fósforo
P_1	Espécie de Cumaru
P_2	Espécie de Ingá
P_3	Espécie de Pau-Pretinho
TC	Taxa de crescimento
TC_d	Taxa de crescimento em diâmetro
TC_h	Taxa de crescimento em altura

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	CONCEITOS BÁSICOS	4
2.1	Climatologia da Amazônia	4
2.2	Espécies arbóreas	6
2.3	Nicho	6
2.4	Modelagem Matemática em Ecologia	7
3	MATERIAIS E MÉTODOS	9
3.1	Caracterização da área de estudo	9
3.1.1	Instalação do experimento	10
3.2	Modelo matemático difusivo-advectivo	11
3.3	Condições de fronteiras	12
3.4	Condições iniciais	13
3.5	Dados	13
3.5.1	Dados para o modelo (3.1)	13
3.6	Modelo matemático para descrever a influência da vegetação no micro-clima local	15
3.6.1	Dados para o modelo (3.2)	17
4	ESQUEMAS NUMÉRICOS	18
4.1	Discretização do domínio	18
4.2	Método de aproximação numérica	19
4.2.1	Discretização temporal	19
4.2.2	Discretização dos termos espaciais	20
4.3	Discretização do modelo difusivo-advectivo (3.1)	21
4.4	Discretização do modelo que descreve a influência da vegetação no micro-clima local (3.2)	27
5	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	35
5.1	Teste de convergência da metodologia numérica	35
5.1.1	Núcleo de Péclét	36
5.2	Pontos de equilíbrio	39
6	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS PARÂMETROS	43
6.1	Análise de sensibilidade	43
6.1.1	Intervalo de confiança	44

6.1.2	Análise de sensibilidade em relação ao parâmetros de difusão	45
6.1.3	Análise de sensibilidade em relação aos parâmetros advectivos	47
6.1.4	Análise de sensibilidade em relação ao parâmetros de crescimento . . .	48
6.1.5	Análise de sensibilidade em relação ao parâmetros de competições . . .	49
7	RESULTADOS NUMÉRICOS DOS MODELOS DIFUSIVO-ADVECTIVO	55
7.1	Resultados referentes ao modelo (3.1)	55
7.1.1	Resultados: dinâmica temporal	55
7.1.2	Resultados: dinâmica espacial	56
7.2	Resultados referente ao modelo 3.2	58
7.2.1	Resultados: dinâmica temporal	58
7.2.2	Resultados: dinâmica espacial	59
8	DISCUSSÕES E CONCLUSÕES	63
8.1	Discussões	63
8.2	Conclusões	65
8.3	Perspectivas	66
	Referências	67
	Apêndices	72
	APÊNDICE A – PONTOS DE EQUILÍBRIO	73
	APÊNDICE B – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	75
B.1	Análise de sensibilidade em relação aos parâmetros difusão e advecção .	75
B.2	Análise de sensibilidade em relação ao parâmetro advecção	76
B.3	Análise de sensibilidade em relação ao parâmetro difusão	77
	APÊNDICE C – CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA DESCREVER A RECUPERAÇÃO DE ÁREAS DEGRADADAS . .	80

1 Introdução

Fenômenos como dispersão, mortalidade de espécies, competições entre espécies na busca por sobrevivência, desmatamento, impactos ambientais e mudanças climáticas vêm sendo estudados, analisados e discutidos por muitos estudiosos da modelagem matemática.

De acordo com [Souza \(2018\)](#), a importância da modelagem se faz necessária por ser uma ferramenta capaz de criar representações simplificadas dos sistemas ecológicos complexos com o objetivo de processar simulações e análises sobre os ecossistemas de interesse.

A modelagem matemática de fenômenos biológicos vem sendo estudada desde Thomas Malthus (1766 – 1834), que apresenta um modelo de crescimento exponencial de uma população, ([MALTHUS, 1824](#)), passando pelo modelo logístico de Verhulst (1804 – 1849), mostrando que uma população não crescerá exponencialmente devido a um fator limitante ([CAMPOS et al., 2019](#)) e o modelo de Lotka-Volterra (1925 – 1939), que descreve interações entre duas espécies, ([BATSCHELET, 1978](#)).

Os modelos mencionados acima são descritos por Equações Diferenciais Ordinárias que consideram apenas a variação temporal. Neste trabalho, o interesse principal são as Equações Diferenciais Parciais não-lineares, clássico no contexto da modelagem de dispersão populacional, envolvendo equação de difusão-advecção acoplada com termos do tipo Lotka-Volterra e dinâmicas vitais do tipo Verhulst, [Sossae et al. \(2003\)](#), cuja dimensão espacial apresenta importância relevante.

Estudos desses tipos de modelos aplicados na investigação de mudanças de paisagens ambientais, como: desmatamento, reflorestamento e seus efeitos ao meio ambiente envolvendo dispersão populacional, competições entre espécies, permitindo melhor compreensão do comportamento temporal e espacial dos fenômenos estudados, vêm sendo desenvolvidos por [Nepstad et al. \(1994\)](#), [Lyra et al. \(1994\)](#), [Nobre et al. \(2009\)](#), entre outros.

Nas alterações ambientais, como mudança de áreas florestadas para áreas de pastagens, agricultura ou solo nu (solo desprovido de vegetação) ou de áreas desmatadas para áreas reflorestadas, podem surgir efeitos ecológicos, climáticos e modificações nas características da vegetação, que afetam diretamente as dinâmicas entre espécies, a biodiversidade, o equilíbrio ecológico, a biota, entre outros. Esses efeitos trazem rigorosas implicações ecológicas e mudanças no microclima local, ([NEPSTAD et al., 1994](#)).

A proposta deste estudo é modelar matematicamente as competições pelos recursos naturais, como água, luz e nutrientes entre três espécies de vegetação (Cumaru, Ingá, Pau-Pretinho) em uma área degradada em processo de recuperação, a fim de encontrar qual a futura paisagem ecológica e sua influência no microclima dessa região, considerando os conceitos de calor latente e calor sensível na modelagem.

Vale ressaltar que calor latente é a energia térmica usada em um sistema termodinâmico, para que haja mudança de seu estado físico. Esse fluxo de calor ocorre próximo à superfície terrestre e exerce grande influência nos processos atmosféricos de ascensão da parcela de ar, da formação de convecção e da consequente geração de intensas precipitações, [Silva \(2012\)](#). Já calor sensível é a energia térmica usada em um sistema termodinâmico para que haja aumento de temperatura.

Em áreas desmatadas, a maior parte da energia disponível é utilizada para aquecer o ar, devido à não disponibilidade de água para evaporar. Assim, o fluxo de calor sensível aumenta e o calor latente diminui. Nas áreas de floresta, o calor sensível representa apenas 14% utilizado para aquecimento, e 71% do calor latente é utilizado para precipitação, ([SOUZA et al., 1997](#)).

O processo de reflorestamento pode impactar significativamente no clima regional e global, ocasionando aumento de 5% a 20% na precipitação, segundo [Malhi \(2010\)](#).

Estudos anteriores mostram que uma alteração na paisagem afeta os fluxos de calor latente e de calor sensível, ou seja, modificam as características do microclima local, implicando na variação da precipitação e da temperatura, ([LYRA et al., 1994](#)).

Desse modo, o aumento do calor latente implica diretamente em aumento de precipitação, a redução de calor latente implica diretamente em escassez de precipitação. Assim como o aumento de calor sensível implica diretamente em aumento de temperatura, a redução de calor sensível implica diretamente em diminuição de temperatura.

O modelo proposto neste trabalho é resolvido numericamente, aproximando-se a variável espacial pelo método de Diferenças Finitas centrais de segunda ordem e a variável temporal pelo de Diferenças Finitas de Crank-Nicolson, aplicando a técnica de escalonamento com pivoteamento. Para isso, simulações computacionais foram realizadas resolvendo-se o modelo discretizado, com o intuito de visualizar a dinâmica espaço-temporal do processo de recuperação da área degradada, sob as influências climáticas locais expressas pelos fatores, como calor latente e calor sensível.

Considerando tudo isso, propõe-se uma aplicação no estudo e na avaliação de uma das áreas de empréstimo da Usina Hidrelétrica de Balbina (UHE-Balbina), localizada no município de Presidente Figueiredo à 170 km de Manaus, AM (01°55'99"S e 59°24'65"W). A área possui 432 m^2 e é uma região plana de fronteira suficientemente regular. A formação florestal no entorno da área é composta predominantemente por "Floresta Ombrófila Densa de Terra Firme". A escolha dessa área para este estudo de caso se deve ao fato de ser um município do Estado do Amazonas

próximo à capital Manaus e por ser muito cobiçado para construção de Usinas Hidrelétricas, devido ao relevo dessa região ser propício a essa atividade.

Em relação aos cenários resultantes das competições é importante modelar, aproximar as soluções numericamente e simular computacionalmente os efeitos dos fenômenos considerados no modelo sobre as espécies envolvidas e se há alguma espécie com melhor estratégia de captação pelos recursos naturais disponíveis no meio e mais adaptada ao ambiente para predominar e determinar a futura paisagem ecológica e sua influência no microclima local.

A tese está dividida em oito capítulos seguindo a seguinte estrutura:

No Capítulo 1, faz-se a apresentação geral do trabalho, enfatizando o tema, o problema de pesquisa, as ferramentas matemáticas usadas, as bases teóricas, os fenômenos descritos pelo modelo matemático, o método de solução e a localização da área de estudo.

No Capítulo 2, propõe-se uma breve descrição da climatologia da Amazônia, apresentando-se uma revisão da literatura, com alguns estudos envolvendo modelos matemáticos de competições entre espécies destacando a difusão, advecção e dinâmicas vitais do tipo Verhulst, acoplados ao modelo clássico de Lotka-Volterra.

No Capítulo 3, apresentam-se a caracterização e a localização da área de estudo, as propostas dos modelos matemáticos, sendo um difusivo-advectivo que descreve os fenômenos de competições entre as espécies arbóreas para recuperação da área degradada e outro que mostra a influência da vegetação no microclima local.

No Capítulo 4, desenvolve-se o processo de discretização do domínio e dos modelos matemáticos pelos métodos de diferenças finitas.

No Capítulo 5, realiza-se o refinamento de malhas espaciais, faz-se a análise de convergência e analisa-se o modelo matemático resultante omitindo-se os termos difusivo-advectivo.

No Capítulo 6, efetua-se a análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo difusivo-advectivo.

No Capítulo 7, apresentam-se os resultados numéricos das dinâmicas espaço-temporal dos modelos matemáticos propostos.

No Capítulo 8, abordam-se as discussões dos resultados obtidos, as principais conclusões deste trabalho, bem como as perspectivas futuras.

2 Conceitos Básicos

2.1 Climatologia da Amazônia

A Amazônia situa-se na região equatorial entre $5^{\circ}N$ e $10^{\circ}S$, seu clima predominante é quente úmido e se deve a uma combinação de vários fenômenos meteorológicos que atuam nessa região, sendo que um dos mais importantes é a disponibilidade de energia solar (NETO, 2013). O valor máximo recebido no topo da atmosfera é de aproximadamente $36,7 MJ.m^{-2}.dia^{-1}$, nos meses de dezembro e janeiro, e um valor mínimo de $30,7 MJ.m^{-2}.dia^{-1}$, nos meses de junho e julho (SALATI; MARQUES, 1984). Esses valores são reduzidos através da atmosfera, chegando $15 MJ.m^{-2}.dia^{-1}$, em média, à superfície.

A energia que atinge a superfície terrestre é particionada em termos de calor sensível (aquecimento) e latente (evapotranspiração), sendo, em seguida, devolvida para a atmosfera. Dessa forma, o balanço de energia e umidade interage entre si, dependendo das condições ambientais e da água disponível no solo.

Em virtude da quantidade de energia que incide na superfície, a temperatura do ar apresenta uma pequena variação ao longo do ano. A amplitude térmica sazonal é de, aproximadamente, $1^{\circ}C$ a $2^{\circ}C$, sendo que os valores médios se situam entre abril, $25,8^{\circ}C$, e Setembro, $27,9^{\circ}C$. Salati e Marques (1984) apresentam as médias mensais de 48 estações meteorológicas espalhadas pela Amazônia.

Os conhecimentos sobre as características climatológicas da região Amazônia segue com incertezas significativas quanto ao entendimento da dinâmica complexa da variabilidade climática na região, as quais se devem, em parte, à falta de dados observacionais, (NOBRE et al., 2009).

A floresta Amazônica desempenha um papel fundamental na regulação do clima regional e global. Por meio de intensa evapotranspiração, as florestas tropicais bombeiam calor latente à atmosfera para equilibrar o forte calor radiativo à superfície, (NOBRE et al., 2009). A forte e extensiva convecção tropical sobre o continente transporta o calor latente para a alta troposfera e o distribui nas zonas temperadas. Ao fazer isso, floresta e convecção, juntas, resfriam a Amazônia, ao mesmo tempo em que se torna uma intensa fonte troposférica de calor para a circulação atmosférica global. Desse modo, a liberação de calor latente é uma grande fonte de calor na

região e é responsável pelas características da circulação regional (DIAS; BONATTI; KOUSKY, 1987).

A esse respeito, Molion (1993) estudou as circulações de macro e meso-escala que atuam na Amazônia e os processos dinâmicos que organizam e promovem a precipitação na área. Segundo esse autor, os mecanismos que provocam chuva na Amazônia podem ser convecção diurna, resultante do aquecimento da superfície e condições de larga-escala favoráveis.

A distribuição espacial e temporal das chuvas na Amazônia foi detalhadamente estudada por Figueroa e Nobre (1990), utilizando-se 226 estações pluviométricas.

A região Amazônica possui uma precipitação média de aproximadamente 2300 mm.ano^{-1} , embora tenham regiões, na fronteira entre Brasil, Colômbia e Venezuela, em que o total anual atinge 3500 mm.ano^{-1} , Figueroa e Nobre (1990).

Através do balanço de vapor d'água em toda a região Amazônica (SALATI et al., 1979), determinaram que a precipitação na região é uma composição da quantidade de água evaporada localmente (evapotranspiração) adicionada a uma contribuição de água advinda do Oceano Atlântico. Estima-se que 50% do vapor d'água que precipita pelas chuvas é gerado localmente (pela evapotranspiração), sendo o restante importado para a região por fluxo atmosférico proveniente do Oceano Atlântico. Em média, a precipitação da bacia é $11,9 \times 10^{12} \text{ m}^3.\text{ano}^{-1}$ (NOVA; SALATI; MATSUI, 1976), sendo que a descarga fluvial do Rio Amazonas no Estreito de Óbidos é $5,5 \times 10^{12} \text{ m}^3.\text{ano}^{-1}$, (OLTMAN, 1968). A estimativa da evapotranspiração foi da ordem de $6,4 \times 10^{12} \text{ m}^3.\text{ano}^{-1}$, obtida por Marques, Salati e Santos (1980) usando método de Penman.

Nas últimas décadas, a Amazônia tem sido foco de atenção mundial devido aos efeitos que o desmatamento em grande escala podem provocar no clima regional e global (FISCH; MARENGO; NOBRE, 1998).

Na relação floresta-clima, o desenvolvimento tecnológico facilitou a utilização de modelos numéricos de Circulação Geral da Atmosfera (MCGAs) para se estudar o efeito das trocas de energia entre a superfície terrestre e a atmosfera. Como ferramenta de análise da problemática do desmatamento, vários estudos de simulação numérica do clima em situações de floresta e desmatamento (troca de superfícies vegetadas de floresta por pastagens) já foram realizados na Amazônia, entre eles, citam-se: Nobre, Sellers e Shukla (1991), Lean et al. (1996), Manzi (1993).

Em geral, os resultados obtidos convergem no sentido de que há aumento de temperatura (entre $0,6^\circ \text{ C}$ a 2° C) do ar próximo à superfície, redução na precipitação e evaporação (entre 20% a 30%) e período seco mais prolongado. Essas mudanças acarretarão severas consequências ecológicas e graves riscos à biota. Nobre, Shukla e Sellers (1989), estudaram os impactos climáticos provocado pelo desmatamento na Amazônia e, como resultado, obtiveram aumento da temperatura do ar em $1,3^\circ \text{ C}$. O aquecimento da superfície e do ar relativo ao desmatamento é coerente com redução na evapotranspiração e no fluxo de calor latente, visto que a maior fração de energia radiativa está disponível para aquecer a superfície terrestre e o ar acima.

O estudo desenvolvido por [Lean et al. \(1996\)](#) no cenário amazônico apresenta resultados semelhantes aos descritos por [Nobre, Shukla e Sellers \(1989\)](#), com redução na evaporação de $0,81 \text{ mm.dia}^{-1}$ (do cenário de floresta $4,32 \text{ mm.dia}^{-1}$ para pastagem $3,51 \text{ mm.dia}^{-1}$), e na precipitação de 7% do caso floresta para pastagem e aumento da temperatura do ar. Na superfície de pastagem houve um aumento de $2,3^{\circ}\text{C}$, devido à um crescimento do fluxo de calor sensível de 30%.

Os estudos de [Lean et al. \(1996\)](#), [Nobre, Shukla e Sellers \(1989\)](#) e [Manzi \(1993\)](#) abordaram as modificações climáticas a nível regional, analisando detalhadamente o comportamento das variáveis meteorológicas na região de floresta e pastagem. No entanto, observa-se que a substituição de floresta por pastagem provoca redução de 8% no saldo de radiação de ondas curtas e aumento na temperatura média do ar em $0,9^{\circ}\text{C}$, redução na umidade do ar, aumento da velocidade do vento, redução na evaporação, precipitação (de 20% e 14%, respectivamente) e período seco mais prolongado.

A compreensão dos fenômenos climatológicos amazônicos será importante na construção dos modelos matemáticos propostos neste estudo.

2.2 Espécies arbóreas

O estudo de espécies arbóreas em processo de restauração florestal é importante para compreender aspectos de funcionamento, de crescimento da floresta e sua influência no microclima local.

As espécies usadas nesse trabalho de reflorestamento são nativas da região amazônica, sendo elas: *Dipteryx odorata* (Cumaru), *Inga edulis* (Ingá), *Cenostigma tocanthum* Ducke (Pau-Pretinho), considerando as taxas de competições inter e intraespecíficas, as taxas de crescimento, advecção e difusão das espécies. A competição se dá pelos recursos limitados que são os nutrientes, água e luz, [Taiz e Zeiger \(2013\)](#).

Na competição interespecífica, indivíduos de espécies distintas utilizam os mesmos recursos, enquanto que na competição intraespecífica são os indivíduos de mesma espécie que utilizam os mesmos recursos. Em geral, assumem-se que os recursos são limitados e, portanto, as dinâmicas de competição provocam efeito negativo sobre o crescimento das espécies competidoras.

2.3 Nicho

Nicho é, em resumo, a função ecológica de uma espécie, definida pelo conjunto de condições, recursos e interações que uma espécie necessita e/ou utiliza, [\(FERRARO, 2017\)](#).

Cada espécie desenvolve uma função própria dentro de uma comunidade ecológica de acordo com suas características e níveis de reações aos diversos fatores ambientais. Espécies

com o mesmo nicho não podem sobreviver no mesmo habitat ao mesmo tempo, porém, espécies que competem parcialmente, podem coexistir, [Gotelli e Graves \(1996\)](#).

A sobreposição de nicho entre as espécies pode ser quantificada em uma matriz de utilização cujas linhas representam as espécies e as colunas representam os recursos, ([BATSCHLET, 1978](#)), ([LEVINS, 1968](#)). Análises de sobreposição de nicho avaliam a similaridade na utilização de recursos por diferentes espécies.

Na competição entre espécies, a sobreposição de nicho na utilização dos recursos pode ser calculada em termos da frequência, F , de utilização de n recursos distintos, ([MACARTHUR; LEVINS, 1967](#)), ([GOTELLI; GRAVES, 1996](#)).

A competição por esses recursos pode ser medida a partir do índice de sobreposição entre duas espécies r e s , $I_{i,j}$, dado por:

$$I_{i,j} = \frac{\sum_{r,s=1}^n F_{r,k} F_{s,k}}{\sum_{r,s=1}^n (F_{r,s})^2}, \quad (2.1)$$

sendo as entradas $F_{r,s}$ da matriz representando a frequência com que as espécies i e j utilizam do recurso k . A equação (2.1) é assimétrica, ou seja, a sobreposição da espécie i na espécie j é diferente da sobreposição da espécie j na espécie i .

Os conceitos básicos aqui descritos serão importantes para o completo entendimento dos fenômenos biológicos do problema de encontrar a nova paisagem ecológica local em área degradada. Em particular, possibilitará estabelecer corretamente os parâmetros envolvidos na modelagem matemática proposta nesta investigação.

2.4 Modelagem Matemática em Ecologia

No século XX tivemos grandes sucessos em desenvolvimentos de modelos em ecologia matemática que consideram interação entre diferentes espécies, são relevantes, como o modelo clássico de Lotka-Volterra (1927), de importância histórica na modelagem matemática em sistemas ecológicos, mostrando que nenhuma espécie existe isoladamente de outra ([BATSCHLET, 1978](#)).

Na Tabela 1, encontram-se algumas referências que contribuíram na construção dos modelos (3.1) e (3.2) desta tese.

Tabela 1 – Trabalhos analisados que contribuíram na construção dos modelos desta pesquisa.

Publicação / ano	Modelo	Fenômenos considerados
Skellam (1951)	EDP	Reação-difusão
Levin (1976)	EDP	Modelagem matemática
McMurtrie e Wolf (1983)	EDP	Competições entre espécies
Shukla et al. (1989)	EDP	Difusão
Totafurno, Trainor et al. (1992)	EDP	Difusão
Ikeda e Mimura (1993)	EDP	Coexistência de espécies
Holmes et al. (1994)	EDP	Dinâmicas populacionais
Gotelli e Graves (1996)	EDP	Competições entre espécies
Sossae et al. (2003)	EDP	Difusão em Dinâmicas
Stump (2006)	EDP	Interações entre espécies
Poletti (2009)	EDP	Difusão-Advecção
Silva (2012)	EDP	Parâmetros de Difusão
Azevedo (2013)	EDO, EDP	Modelos com difusivos
Santos et al. (2013)	EDP	Competições e Advecção
Nascimento et al. (2013)	EDP	Sucessão florestal
Souza (2018)	EDP	Modelagem em Restauração

O presente estudo reúne os conteúdos e as variáveis descritas na Tabela 1, considerando a modelagem matemática em EDPs, com o intuito de elucidar a dinâmica de formação de uma nova paisagem local numa área degradada. A grande quantidade de parâmetros, a dinâmica populacional sensível aos valores dos parâmetros, a complexidade computacional na resolução numérica dos modelos matemáticos propostos, a disponibilidade e confiabilidade dos dados, dentre outros, são os desafios a serem enfrentados nesta investigação. Esperam-se, como principais resultados gerais acerca deste estudo, gerar novos conhecimentos e ferramentas computacionais a serem empregadas no campo da ecologia e preservação ambiental.

Algumas dessas pesquisas referenciadas na Tabela 1 tratam das dinâmicas populacionais não lineares, porém o tratamento numérico aqui apresentado tem alguma semelhança com Santos et al. (2013).

Esses trabalhos apresentados na Tabela 1 exibem informações necessárias a respeito dos fenômenos considerados na dinâmica populacional, tais como difusão, advecção, mortalidade e influência no microclima local.

No Capítulo 3 seguinte, apresentam-se a caracterização da área de estudo, condições de fronteiras e iniciais, a construção e discretização dos modelos matemáticos.

3 Materiais e métodos

Neste Capítulo, apresentam-se dois modelos matemáticos, com o intuito de descrever as competições entre espécies arbóreas na recuperação de áreas degradadas e entender a influência da vegetação no microclima local.

3.1 Caracterização da área de estudo



Figura 1 – Localização do experimento. Fonte: autoria própria.

O experimento foi instalado em uma das áreas de empréstimo da Usina Hidrelétrica de Balbina (UHE-Balbina) localizada no município de Presidente Figueiredo, a 170 *km* de Manaus-AM, local ilustrado na Figura 1. A formação florestal no entorno da área é composta predominantemente por “Floresta Ombrófila Densa de Terra Firme” (VELOSO; RANGEL-FILHO; LIMA, 1991). O clima da região é classificado como quente e úmido segundo KÖPPEN (1948), com temperaturas médias mensais superiores a 25°C e precipitação média anual de 2280 *mm*. O período chuvoso ocorre entre os meses de dezembro a maio. A época de menor precipitação vai de julho a setembro, quando ocorre em média 8% da precipitação anual (JAQUETTI et al., 2018). O relevo na área de estudo é plano, sem a presença de processos erosivos acentuados, em um terreno plano e estrutura igual em toda a sua extensão.

O solo da área de UHE-Balbina pertence a duas classes pedológicas, os Argissolos Vermelho-Amarelos e os Latossolos Vermelho-Amarelos. Os Latossolos Vermelho-Amarelos são bem drenados, resultante da decomposição de rochas do Pré-Cambriano e do Devoniano, segundo Jaquetti et al. (2018).

Na área de empréstimo chamada de “Alalau”, onde o experimento foi instalado, a vegetação foi completamente removida, mas a camada superficial do solo foi mantida. A área foi utilizada como empréstimo na época da construção da barragem e então abandonada há quase trinta anos. A floresta presente no entorno encontra-se relativamente bem preservada segundo Jaquetti et al. (2018).

Para este trabalho, há poucos dados experimentais disponíveis para a área degradada a ser investigada.

3.1.1 Instalação do experimento



Figura 2 – Área degradada sendo replantada.

A Figura 2, corresponde à área degradada replantada, onde foi instalado o experimento para observar o processo de recuperação. Nessa área, é possível notar o espaçamento entre as espécies e as condições em que o experimento foi instalado observando-se o solo completamente desprovido de vegetação.

As mudas de Pau-pretinho foram produzidas no viveiro florestal do Programa de Restauração de Áreas Degradadas de Balbina (PRAD Balbina). As mudas das espécies de Cumaru e Ingá foram obtidas em um viveiro na região de Manaus. As mudas foram selecionadas de acordo com critérios pré-estabelecidos de uniformidade por tamanho, idade e lote de sementes. No total,

foram plantadas 48 mudas, sendo 16 de cada espécie. O plantio foi realizado em toda a área, com covas abertas manualmente com dimensões de $30 \times 30 \times 40 \text{ cm}^3$, 20 dias antes do plantio das mudas para incorporação do adubo. O espaçamento utilizado foi de $3 \times 3 \text{ m}^2$, conforme a metodologia utilizada no Programa de Restauração de Áreas Degradadas de Balbina (PRAD Balbina).

Os dados desse experimento serão utilizados para investigar a dinâmica de recuperação via modelagem matemática e computacional.

3.2 Modelo matemático difusivo-advectivo

Pode-se observar, em muitas situações reais, duas ou mais espécies interagindo no mesmo ambiente. Modelos clássicos no sentido de Lotka-Volterra pressupõe uma homogeneidade na distribuição espacial das espécies, sendo a variável independente apenas o tempo.

Neste trabalho, a não-homogeneidade desempenha um papel fundamental. As três espécies consideradas aqui foram selecionadas, considerando aspectos como rusticidade, crescimento e adaptação em áreas degradadas.

Nesse sentido, considera-se uma função de densidade de vegetação, cujo domínio é $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, um conjunto aberto, não vazio, limitado e com a fronteira suficientemente regular.

A equação diferencial parcial que descreve a densidade das espécies $P_i = P_i(x, y, t)$, $i = \{1, 2, 3\}$, em cada ponto (x, y) do domínio Ω , e em cada instante de tempo $t \in (0, T]$, sendo T o tempo final, terá a seguinte estrutura:

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} - \text{div}(\alpha_i \Delta P_i) + \text{div}(P_i \cdot V_i) + \mu_i P_i = \lambda_i P_i \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^3 \phi_i P_i}{K} \right).$$

Na modelagem por EDP, consideram-se ainda os seguintes fenômenos:

- **Difusão:** será adotada a difusão efetiva de acordo com [Marchuk \(1986\)](#), [Okubo \(1980\)](#), [Skellam \(1951\)](#), e descrita por $\alpha_i = \alpha_i(x, y)$. Considerada constante;
- **Advecção:** considera-se o vento como um campo advectivo, cuja direção e magnitude são representadas, respectivamente, por $\vec{V}_i = (u_i, v_i)$ com $u_i = u_i(x, y)$, $v_i = v_i(x, y)$, $\text{div}(\vec{V}_i) = 0$;
- **Mortalidade:** representada por $\mu_i = \mu_i(x, y)$;
- **Crescimento:** descrito por λ_i (equação logística), sendo K a capacidade de suporte.

Considerando as três espécies estudadas P_1 , P_2 e P_3 , com difusão constante, escreve-se o

sistema não-linear de EDP_s que representa as dinâmicas de competições da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right) - u_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} - \mu_1 P_1 + \lambda_1 P_1 \left[1 - \frac{P_1 + \gamma_1 P_2 + \sigma_1 P_3}{K} \right]; \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} = \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right) - u_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} - \mu_2 P_2 + \lambda_2 P_2 \left[1 - \frac{P_2 + \gamma_2 P_1 + \sigma_2 P_3}{K} \right]; \\ \frac{\partial P_3}{\partial t} = \alpha_3 \left(\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} \right) - u_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} - v_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} - \mu_3 P_3 + \lambda_3 P_3 \left[1 - \frac{P_3 + \gamma_3 P_2 + \sigma_3 P_1}{K} \right]; \end{cases} \quad (3.1)$$

sendo as espécies Cumaru (P_1), Ingá (P_2), Pau-Preto (P_3), respectivamente;

Os coeficientes $\mu_i, i = 1...3$, representam as taxas de mortalidades das respectivas espécies;

Os termos $u_i, v_i, i = 1...3$, são direções do campo advectivo;

O termo $\alpha_i, i = 1...3$, são os coeficientes de difusão. Considerados constantes.

Os termos $-\frac{\lambda_i \gamma_i}{K} P_i P_j, -\frac{\lambda_i \sigma_i}{K} P_i P_j, i, j = 1, 2, 3$, representam os coeficientes de competições interespecíficas nas primeira, segunda e terceira equações, respectivamente, enquanto que $-\frac{\lambda_i}{K} P_i P_i, i = 1, 2, 3$, representam os coeficientes de competições intraespecíficas nas primeira, segunda e terceira equações, respectivamente, do sistema (3.1).

3.3 Condições de fronteiras

Para as condições de fronteira considera-se $\Gamma_i, i = 1, \dots, 4$, uma partição da fronteira de Ω , recorre-se às condições homogêneas de Robin, que descrevem uma variação de P_k na fronteira dependente do próprio P_k ao longo da borda.

Considerando as condições definida por:

$$-\alpha \frac{\partial P_k}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = b_{i_k} P_k,$$

em que, $b_i, i = 1, \dots, 4$, são os parâmetros de proporcionalidade adequados para as condições escolhidas em cada parte Γ_i da fronteira. Entende-se assim que há variação de densidade de vegetação na fronteira.

Dessa forma, as condições de fronteiras do tipo Robin para o modelo 3.1, são descritas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = -c_i P_1, \\ \frac{\partial P_2}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = -d_i P_2, \\ \frac{\partial P_3}{\partial \eta}|_{\Gamma_i} = -g_i P_3, \end{array} \right.$$

$c_i, d_i, g_i : i = 1, \dots, 4$ são constantes de proporcionalidades adequadas às condições de contorno escolhida.

3.4 Condições iniciais

O domínio computacional bidimensional considera, inicialmente, uma população com 48 indivíduos (plantas), sendo 16 de cada espécie (P_1, P_2, P_3), a uma distância de 3 metros entre os indivíduos, distribuídos de forma alternada e dispostos em 8 linhas e 6 colunas, em todo domínio Ω da aplicação, sob as mesmas condições de idade e potencial de captação de recursos, como mostra a Figura 3 seguinte.

P_2	P_1	P_3	P_2	P_1	P_3
P_1	P_3	P_2	P_1	P_3	P_2
P_3	P_2	P_1	P_3	P_2	P_1
P_2	P_1	P_3	P_2	P_1	P_3
P_1	P_3	P_2	P_1	P_3	P_2
P_3	P_2	P_1	P_3	P_2	P_1
P_2	P_1	P_3	P_2	P_1	P_3
P_1	P_3	P_2	P_1	P_3	P_2

Figura 3 – Distribuição inicial das espécies P_1, P_2 e P_3 no domínio computacional.

3.5 Dados

3.5.1 Dados para o modelo (3.1)

Tabela 2 – Utilização dos recursos por cada espécie.

Espécies	Radiação	Água	Nutrientes
Cumarú	$0,13W/m^2$	$0,14mm/m^2$	$0,16g/m^2$
Ingá	$0,25W/m^2$	$0,23mm/m^2$	$0,27g/m^2$
Pau-Preto	$0,09W/m^2$	$0,11mm/m^2$	$0,13g/m^2$

A Tabela 2 mostra a média de captação dos recursos naturais (água, nutriente do solo e radiação solar) por cada espécie. A seguir, uma descrição detalhada desses recursos.

- **Água:** é um elemento fundamental no desenvolvimento de quase todos os seres vivos. A redução na disponibilidade desse recurso no solo afeta de forma negativa o crescimento e a produtividade (ROUHI et al., 2007). A captação de água pelas plantas se dá por meio das raízes, dependendo da disponibilidade desse recurso no solo e da pluviosidade na região que é cerca de 2280 mm anual;
- **Nutrientes:** são elementos essenciais no desenvolvimento de importantes funções, algumas delas diretamente relacionado às taxas de crescimento e ao acúmulo de biomassa. O nitrogênio (N), o fósforo (P) e o Potássio (K) são normalmente os nutrientes mais importantes ao crescimento das plantas (SCHACHTMAN; REID; AYLING, 1998), (ASHLEY; GRANT; GRABOV, 2006). A absorção dos nutrientes pela vegetação ocorre por meio do seu sistema radicular e depende da quantidade disponível no solo que no período do plantio era de 13440 g;
- **Radiação:** a interceptação da radiação solar pelas folhas é a principal fonte energética que possibilita os vegetais transformar energia luminosa em energia química (carboidratos), por meio do processo conhecido como fotossíntese. As plantas captam a radiação solar através das folhas e variam de acordo com o tamanho da copa, das folhas e da energia solar disponível, que na região é aproximadamente 1.390 W/m^2 (SIMON; ALMEIDA, 2014).

A utilização desses recursos por cada espécie está descrita na Tabela 2.

Tabela 3 – Valores das taxas de crescimento.

Variáveis	Cumaru	Ingá	Pau-Pretinho
CC	0,31 cm	0,58 cm	0,22 cm
DAS	0,18 cm	0,23 cm	0,14 cm

A Tabela 3 foi construída a partir de uma contribuição do trabalho de Jaquetti et al. (2018), que forneceu os valores da primeira medição em campo. A segunda medição foi feita em 2020, sendo de autoria própria. Os valores obtidos foram usados para a construção dessa tabela.

O crescimento de cada espécie foi definido pelas taxas de crescimento em relação à altura e ao diâmetro. O crescimento dos indivíduos de cada espécie foram calculados por meio das determinações das taxas de crescimento (TC) de sua altura e diâmetro: comprimento do caule (CC) e diâmetro a altura do solo (DAS), respectivamente. CC e DAS foram determinadas pela diferença entre as medidas final em 2020 e inicial 2014. As taxas de crescimento em altura (TC_h) e diâmetro (TC_d) foram calculados baseada em Jaquetti et al. (2018).

Com base nas informações das Tabelas 2 e 3, dados do domínio computacional, informações de campo e uso da equação (2.1), constrói-se a Tabela 4.

A Tabela 4 mostra os valores dos parâmetros utilizados nas simulações computacionais das três espécies de vegetação P_1 , P_2 e P_3 .

Tabela 4 – Valores dos parâmetros referentes ao modelo (3.1)

Par.	Valores	Par.	Valores	Par.	Valores	Unidade
α_1	$0,0149e^{-2}$	α_2	$0,022e^{-2}$	α_3	$0,0127e^{-2}$	área/tempo
μ_1	0,002	μ_2	0,001	μ_3	0,004	h^{-1}
u_1	0,011	u_2	0,01	u_3	0,013	Km/mês
v_1	0,05	v_2	0,07	v_3	0,072	Km/mês
λ_1	0,31	λ_2	0,58	λ_3	0,22	nº real
K	16	K	16	K	16	nº real
γ_1	0,003	γ_2	0,02	γ_3	0,005	área/ind. t^2
σ_1	$0,011e^{-3}$	σ_2	$0,010e^{-3}$	σ_3	$0,0015e^{-3}$	área/ind. t^2
nx	6	ny	8	dx	0,0125	nº real
dt	0,01	dy	0,0125			

- Os parâmetros α_1, α_2 e α_3 são os coeficientes de difusão e foram considerados de acordo com [Marchuk \(1986\)](#), [Okubo \(1980\)](#) e [Skellam \(1951\)](#), considerando o espaço disponível a cada espécie e a rapidez com que ela se propagou;
- Os parâmetros μ_1, μ_2 e μ_3 são os coeficientes de mortalidades de cada espécie e foram calculados de acordo com [Jaquetti et al. \(2018\)](#);
- Os parâmetros $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \sigma_1, \sigma_2$ e σ_3 são os coeficientes de competições interespecíficas, obtidos considerando a equação (2.1).

3.6 Modelo matemático para descrever a influência da vegetação no microclima local

O sistema de equações diferenciais parciais que descreve a recuperação da área degradada e sua influência no microclima local em cada ponto (x, y) do domínio retangular $\Omega = (a; b) \times (a; c) \subset \mathbb{R}^2$, aberto, não vazio em cada instante de tempo $t \in (0, T]$, sendo T o tempo final, é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial t} = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right) - u_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} - \mu_1 P_1 + \lambda_1 P_1 \left[1 - \frac{P_1 + \gamma_1 P_2 + \sigma_1 P_3}{K} \right]; \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} = \alpha_2 \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right) - u_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} - \mu_2 P_2 + \lambda_2 P_2 \left[1 - \frac{P_2 + \gamma_2 P_1 + \sigma_2 P_3}{K} \right]; \\ \frac{\partial P_3}{\partial t} = \alpha_3 \left(\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} \right) - u_3 \frac{\partial P_3}{\partial x} - v_3 \frac{\partial P_3}{\partial y} - \mu_3 P_3 + \lambda_3 P_3 \left[1 - \frac{P_3 + \gamma_3 P_2 + \sigma_3 P_1}{K} \right]; \\ \frac{\partial L}{\partial t} = \alpha_4 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) - \mu_4 L + \lambda_4 L \left[\frac{\beta_1 P_1}{\beta_1 P_1 + K} + \frac{\beta_2 P_2}{\beta_2 P_2 + K} + \frac{\beta_3 P_3}{\beta_3 P_3 + K} \right]; \\ \frac{\partial H}{\partial t} = \alpha_5 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) - \mu_5 H - \lambda_5 H \left[\frac{\delta_1 P_1}{\delta_1 P_1 + K} + \frac{\delta_2 P_2}{\delta_2 P_2 + K} + \frac{\delta_3 P_3}{\delta_3 P_3 + K} \right], \end{array} \right. \quad (3.2)$$

sendo as espécies Cumaru (P_1), Ingá (P_2), Pau-Prezinho (P_3), Calor latente (L) e Calor sensível (H).

As condições de fronteiras do tipo Robin, para o modelo 3.2, são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_1}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = -c_i P_1, \\ \frac{\partial P_2}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = -d_i P_2, \\ \frac{\partial P_3}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = -g_i P_3, \\ \frac{\partial L}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = -n_i L, \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = -m_i H, \end{array} \right.$$

3.6.1 Dados para o modelo (3.2)

Aqui, apresentam-se os valores dos parâmetros do modelo 3.2 considerando um domínio bidimensional Ω e o tempo $T = 5000$ dias (aproximadamente 13 anos).

Tabela 5 – Valores dos parâmetros computacionais referentes ao modelo 3.2

Par.	Valores	Par.	Valores	Par.	Valores	Par.	Valores	Unidade
α_1	$0,0149e^{-2}$	α_2	$0,022e^{-2}$	α_3	$0,0127e^{-2}$	α_4	0,011	área/tempo
μ_1	0,002	μ_2	0,001	μ_3	0,004	μ_4	0,001	h^{-1}
u_1	0,011	u_2	0,01	u_3	0,013	α_5	0,021	área/tempo
v_1	0,05	v_2	0,07	v_3	0,072			área/tempo
λ_1	0,31	λ_2	0,58	λ_3	0,22	λ_4	0,021	nº real
K	16	ny	8	dx	0,0125	nx	6	nº real
γ_1	0,003	γ_2	0,02	γ_3	0,005			área/ind. t^2
σ_1	$0,011e^{-3}$	σ_2	$0,010e^{-3}$	σ_3	$0,0015e^{-3}$			área/ind. t^2
β_1	0,001	β_2	0,003	β_3	0,005	λ_5	0,013	nº real
δ_1	0,002	δ_2	0,004	δ_3	0,001			nº real
dt	0,01	dy	0,0125					nº real
						μ_5	0,002	h^{-1}

A Tabela 5 mostra os valores dos parâmetros utilizados na simulação computacional das competições entre as três espécies de vegetação P_1 , P_2 e P_3 e sua influência no microclima local.

- Os parâmetros α_4 e α_5 são os coeficientes de difusão do calor latente e sensível, respectivamente, tomados baseando-se em [Okubo \(1980\)](#);
- Os parâmetros μ_5 e μ_3 são os coeficientes de decaimento do calor latente e sensível, respectivamente, estimados baseando-se no trabalho de [Andrade \(2013\)](#);
- Os parâmetros β_i e δ_i , $i = 1, 2, 3$, são as velocidades de respostas de P_1 , P_2 e P_3 ao calor latente e sensível, respectivamente, considerados baseando-se nos estudos de [Nobre, Shukla e Sellers \(1989\)](#), [Lean et al. \(1996\)](#) e [Reschke et al. \(1996\)](#).

4 Esquemas numéricos

Neste Capítulo, encontram-se as discretizações do domínio computacional bidimensional e dos modelos matemáticos 3.1 e 3.2.

Os modelos e o domínio foram discretizados visando a uma solução por aproximação numérica pelo método de diferenças finitas de Crank-Nicolson no tempo, Sossae et al. (2003) e diferenças finitas centrais na dimensão espacial, Santos et al. (2013).

4.1 Discretização do domínio

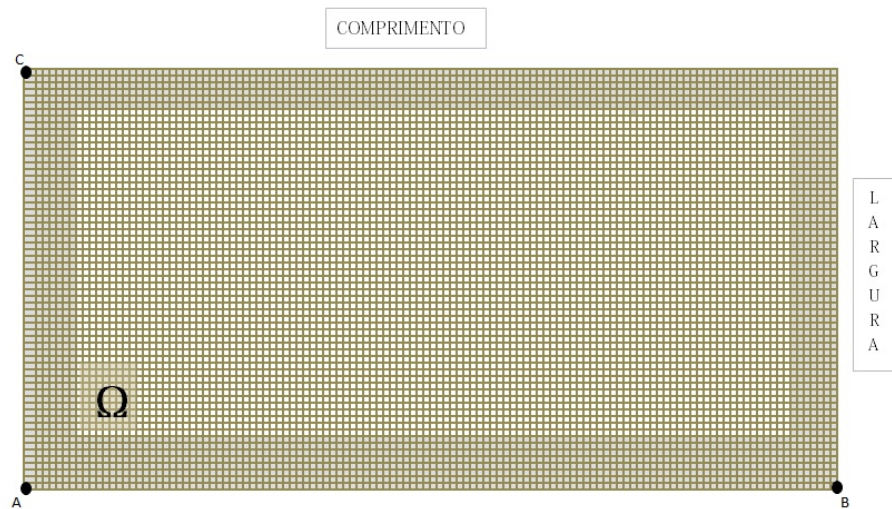


Figura 4 – Malha do domínio computacional bidimensional.

Considera-se o domínio retangular $\Omega = (a, b) \times (a, c) \subset \mathbb{R}^2$ aberto, não vazio e fronteira suficientemente regular que contém em seu interior a área degradada de aproximadamente 432 m^2 , na região da hidrelétrica de Balbina-AM, afetada pelo desmatamento. Considera-se Ω uma região plana com dimensões $18 \text{ m} \times 24 \text{ m}$.

O processo de discretização do domínio visando o uso do método de diferenças finitas centrais para a variável espacial é feito da seguinte forma: considere os intervalos (a, b) e (a, c) particionados em mx e my subintervalos de espaçamentos $\Delta x = 0,0125$ e $\Delta y = 0,0125$, respectivamente.

Os nós da malha são enumerados, considerando-se $nnx = mx + 1$ e $nnx = my + 1$ como sendo os números de nós nos eixos das abscissas e ordenadas, respectivamente.

A Figura 4 ilustra uma malha para o domínio computacional bidimensional, usando $\Delta x = 0,0125$ e $\Delta y = 0,0125$.

4.2 Método de aproximação numérica

Para resolver computacionalmente o sistema (3.1), discretiza-se o modelo e o domínio visando uma solução por aproximação numérica pelo método de diferenças finitas centrais de segunda ordem para a variável espacial, e o método de diferenças finitas de Crank-Nicolson para a variável temporal. As condições de fronteira são do tipo Robin, Santos et al. (2013). A escolha dos métodos devem-se às estabilidades numéricas e às margens de erros, que são de ordem quadrática nas variáveis temporal e espacial.

4.2.1 Discretização temporal

Aqui será apresentado o método de Crank-Nicolson (CUNHA, 2003), de segunda ordem de aproximação para a variável temporal do modelo (3.1) e é numericamente estável, se comparado com outros de menor ordem.

Esse esquema numérico consiste em, primeiramente, particionar o intervalo de tempo $[0, T]$ em r subintervalos regulares de tamanho Δt , de modo que a partição uniforme resultante dessa discretização seja dada por $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_r = T\}$, sendo $t_{n+1} - t_n = \Delta t$, para $n = 1, \dots, r - 1$.

Santos et al. (2013) diz que, para se obter as densidades populacionais ao longo do tempo das espécies $P_i, i = 1, 2, 3$, escreve-se:

$$\frac{\partial P_i^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}, \quad (4.1)$$

sendo

$$P_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2}, \quad (4.2)$$

para encontrar a densidade de vegetação no instante $t_{n+\frac{1}{2}}$.

Desse modo, obtém-se a discretização na variável tempo, Carnahan B.; Luther e Wilkes (1969).

Vale lembrar que:

Δx e Δy são os tamanhos das malhas computacionais nos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, Δt será o incremento no tempo, $P_{k_i}^n$ aproxima o valor de $P_k(x_i, y_j)$ no instante t_n .

4.2.2 Discretização dos termos espaciais

A solução numérica para o modelo (3.1) será pelo método de diferenças finitas centrais para variáveis espaciais (LEVEQUE, 2007), (SANTOS et al., 2013).

O ponto P_{k_i} é o valor aproximado de P_k em $(x_i, y_i) \in \Omega$. Um ponto $(x_i, y_i) \in \Omega = (a; b) \times (a; c) \subset \mathbb{R}^2$, considerando o método de diferenças finitas é representado na Figura 5 seguinte.

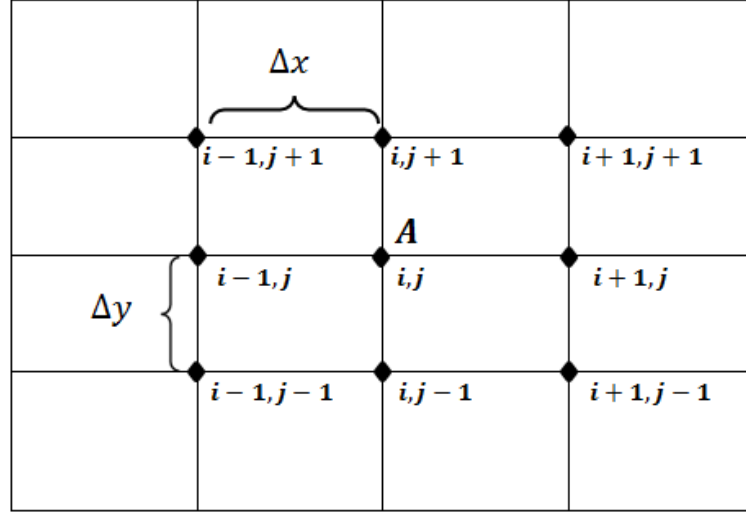


Figura 5 – Discretização espacial pelo do método de diferenças finitas centrais.

Os termos que descrevem o fenômeno de advecção (as derivadas de primeira ordem) no modelo (3.1), segundo Santos et al. (2013), são discretizados em x e em y , respectivamente, por:

$$\frac{\partial P_k}{\partial x} \approx \frac{P_{kes} - P_{kdi}}{2\Delta x} \quad (4.3)$$

e

$$\frac{\partial P_k}{\partial y} \approx \frac{P_{kab} - P_{kac}}{2\Delta y}. \quad (4.4)$$

Os termos de difusão (as derivadas de segunda ordem) em (3.1), segundo Santos et al. (2013), são discretizados em x e em y , respectivamente, por:

$$\frac{\partial^2 P_k}{\partial x^2} \approx \frac{P_{kes} - 2P_k + P_{kdi}}{\Delta x^2}, \quad (4.5)$$

e

$$\frac{\partial^2 P_k}{\partial y^2} \approx \frac{P_{kab} - 2P_k + P_{kac}}{\Delta y^2}, \quad (4.6)$$

$k = 1, \dots, 3$.

4.3 Discretização do modelo difusivo-advectivo (3.1)

Nessa Seção, apresentam-se os processos de discretização nas variáveis temporais e espaciais da primeira equação do modelo 3.1, visto que para as demais equações os processos são análogos.

Aqui efetua-se o processo de discretização da primeira equação do modelo 3.1 pelo método de diferenças finitas centrais para pontos interiores da malha espacial.

Esse processo de discretização consiste em aproximar as derivadas de segunda ordem em x e y pelas equações 4.5 e 4.6, respectivamente. Para as derivadas de primeira ordem as aproximações em x e y serão feitas, respectivamente, por 4.3 e 4.4, para um tempo $t_{n+\frac{1}{2}}$ resultando em:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} = & \alpha_1 \left[\frac{P_{1(i+mx)}^{n+\frac{1}{2}} - 2P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}} + P_{1(i-mx)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{P_{1(i+1)}^{n+\frac{1}{2}} - 2P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}} + P_{1(i-1)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right] - \\
 & - u_1 \left[\frac{P_{1(i+mx)}^{n+\frac{1}{2}} - P_{1(i-mx)}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right] - v_1 \left[\frac{P_{1(i+1)}^{n+\frac{1}{2}} - P_{1(i-1)}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \right] - (\mu_1 - \lambda_1) P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}} - \\
 & - \lambda_1 P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}} \left[\frac{P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_1 P_{2(i)}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_1 P_{3(i)}^{n+\frac{1}{2}}}{K} \right]. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Vale a pena enfatizar que esse processo não gera nenhum índice nativo, pois não extrapola o domínio discreto, visto que esse processo é somente para pontos interiores. Para as fronteiras o tratamento será abordado posteriormente aos pontos interiores.

Para a variável temporal, a discretização da primeira equação do modelo (3.1) será realizada pelo método de diferenças finitas de Crank-Nicolson. Esse processo equivale em aproximar a solução em 4.7 pela equação 4.1 na variação temporal e 4.2 nos termos $P_{1_i}^{n+\frac{1}{2}}$, resultando em:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{1(i)}^{n+1} - P_{1(i)}^n}{\Delta t} = & \alpha_1 \left[\frac{\frac{P_{1(i+mx)}^{n+1} + P_{1(i+mx)}^n}{2} - 2\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + \frac{P_{1(i-mx)}^{n+1} + P_{1(i-mx)}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\
& + \left. \frac{\frac{P_{1(i+1)}^{n+1} + P_{1(i+1)}^n}{2} - 2\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + \frac{P_{1(i-1)}^{n+1} + P_{1(i-1)}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] \\
& - u_1 \left[\frac{\frac{P_{1(i+mx)}^{n+1} + P_{1(i+mx)}^n}{2} - \frac{P_{1(i-mx)}^{n+1} + P_{1(i-mx)}^n}{2}}{2\Delta x} \right] \\
& - v_1 \left[\frac{\frac{P_{1(i+1)}^{n+1} + P_{1(i+1)}^n}{2} - \frac{P_{1(i-1)}^{n+1} + P_{1(i-1)}^n}{2}}{2\Delta y} \right] - (\mu_1 - \lambda_1) \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} \\
& - \lambda_1 \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} \right) \left[\frac{(P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n)}{2K} + \gamma_1 \frac{(P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n)}{2K} + \right. \\
& + \left. \sigma_1 \frac{(P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n)}{2K} \right]. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Após alguns procedimentos algébricos em 4.8, obtém-se:

$$\begin{aligned}
P_{1(i)}^{n+1} - P_{1(i)}^n = & \Delta t \alpha_1 \left[\frac{P_{1(i+mx)}^{n+1} + P_{1(i+mx)}^n - 2P_{1(i)}^{n+1} - 2P_{1(i)}^n + P_{1(i-mx)}^{n+1} + P_{1(i-mx)}^n}{2\Delta x^2} + \right. \\
& + \left. \frac{P_{1(i+1)}^{n+1} + P_{1(i+1)}^n - 2P_{1(i)}^{n+1} - 2P_{1(i)}^n + P_{1(i-1)}^{n+1} + P_{1(i-1)}^n}{2\Delta y^2} \right] \\
& - \Delta t u_1 \left[\frac{P_{1(i+mx)}^{n+1} + P_{1(i+mx)}^n - P_{1(i-mx)}^{n+1} - P_{1(i-mx)}^n}{4\Delta x} \right] - \\
& - \Delta t v_1 \left[\frac{P_{1(i+1)}^{n+1} + P_{1(i+1)}^n - P_{1(i-1)}^{n+1} - P_{1(i-1)}^n}{4\Delta y} \right] - \Delta t (\mu_1 - \lambda_1) \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} \\
& - \lambda_1 \Delta t \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} \right) \left[\frac{(P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n)}{2K} + \gamma_1 \frac{(P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n)}{2K} + \right. \\
& + \left. \sigma_1 \frac{(P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n)}{2K} \right]. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos em 4.9 no mesmo passo de tempo de modo conveniente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& P_{1(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{1(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + \\
& + P_{1(i)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + 1 \right) + \\
& + P_{1(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + P_{1(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) = \\
& P_{1(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{1(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + \\
& + P_{1(i)}^n \left(\frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} + 1 \right) + \\
& + P_{1(i+1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + P_{1(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) - \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Para obter estimativa das derivadas nas fronteiras para espécie P_1 , considera-se:

1. Fronteira horizontal superior

Nesse caso, $\frac{\partial P_1}{\partial \eta} = \frac{\partial P_1}{\partial y}$. Daí, considerando $y \notin \Omega$, segue que $\frac{\partial P_1}{\partial \eta} = -c_1 \frac{P_1}{\alpha_1}$.

Santos et al. (2013) garante que as aproximações para as derivadas de primeira e segunda ordem nos pontos interiores adjacentes ao contorno, são dados por:

$$P_{1(\partial y \notin \Omega)} = P_{1(i-1)}^n - 2\Delta y c_1 \frac{P_{1(i)}^n}{\alpha_1}. \tag{4.11}$$

$$\frac{2P_{1(i-1)}^n - 2(1 + \frac{\Delta y c_1}{\alpha_1})P_{1(i)}^n}{\Delta y^2}. \tag{4.12}$$

Substituindo 4.11 e 4.12 em 4.9 e desenvolvendo o mesmo procedimento de agrupamento feito em 4.10, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& P_{1(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + \\
& + P_{1(i)}^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{c_1 \Delta t}{\Delta y} - \frac{c_1 \Delta t v_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{1(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{1(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) = \\
& = P_{1(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + \\
& + P_{1(i)}^n \left(1 + \frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{c_1 \Delta t}{\Delta y} + \frac{c_1 \Delta t v_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{1(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{1(i-1)}^n \left(\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) - \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right).
\end{aligned}$$

2. Fronteira horizontal inferior

Os tratamentos dados às fronteiras horizontal inferior, vertical à esquerda e vertical à direita são análogos aos realizados na horizontal superior, portanto os procedimentos numéricos serão omitidos e apresentados apenas os resultados dos agrupamentos.

$$\begin{aligned}
& P_{1(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + \\
& + P_{1(i)}^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{c_2 \Delta t}{\Delta y} + \frac{c_2 \Delta t v_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{1(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{1(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) = \\
& = P_{1(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + \\
& + P_{1(i)}^n \left(1 + \frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{c_2 \Delta t}{\Delta y} - \frac{c_2 \Delta t v_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{1(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u_1}{4\Delta x} \right) + P_{1(i+1)}^n \left(\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) - \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right).
\end{aligned}$$

3. Fronteira vertical à esquerda

$$\begin{aligned}
& P_{1(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + \\
& + P_{1(i)}^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} + \frac{c_3 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{1(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + P_{1(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) = \\
& = P_{1(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + \\
& + P_{1(i)}^n \left(1 + \frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} - \frac{c_3 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{1(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + P_{1(i+1)}^n \left(\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) - \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right).
\end{aligned}$$

4. Fronteira vertical à direita

$$\begin{aligned}
& + P_{1(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + \\
& + P_{1(i)}^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{c_4 \Delta t}{\Delta x} + \frac{c_4 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& + P_{1(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + P_{1(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) = \\
& = P_{1(i+1)}^n \left(\frac{\alpha_1 \Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) + \\
& + P_{1(i)}^n \left(1 + \frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{c_4 \Delta t}{\Delta x} - \frac{c_4 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) + \\
& + P_{1(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t v_1}{4\Delta y} \right) - P_{1(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) - \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right).
\end{aligned}$$

5. Fronteira no canto superior à esquerda

Aqui, serão feitas combinações das soluções das fronteiras 1 e 3 simultâneas.

$$\begin{aligned}
& P_{1(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} \right) + P_{1(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& + P_{1(i)}^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} + \frac{c_1 \Delta t v_1}{2\alpha_1} + \frac{c_1 \Delta t}{\Delta y} + \frac{c_3 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) = \\
& = P_{1(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} \right) + P_{1(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& + P_{1(i)}^n \left(1 + \frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} - \frac{c_1 \Delta t v_1}{2\alpha_1} - \frac{c_1 \Delta t}{\Delta y} - \frac{c_3 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right).
\end{aligned}$$

6. Fronteira no canto superior à direita

As combinações das soluções aqui envolvem as fronteiras horizontal superior e vertical à direita.

$$\begin{aligned}
& P_{1(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} \right) + P_{1(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& P_{1(i)}^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{c_4 \Delta t}{\Delta x} + \frac{c_1 \Delta t v_1}{2\alpha_1} + \frac{c_1 \Delta t}{\Delta y} + \frac{c_4 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) \\
& = P_{1(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} \right) + P_{1(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& P_{1(i)}^n \left(1 + \frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{c_4 \Delta t}{\Delta x} - \frac{c_1 \Delta t v_1}{2\alpha_1} - \frac{c_1 \Delta t}{\Delta y} - \frac{c_4 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right).
\end{aligned}$$

7. Fronteira no canto inferior à esquerda

Aqui consideram-se as fronteiras horizontal inferior e vertical à esquerda.

$$\begin{aligned}
& P_{1(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} \right) + P_{1(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& P_{1(i)}^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} + \frac{c_2 \Delta t v_1}{2\alpha_1} + \frac{c_2 \Delta t}{\Delta y} + \frac{c_3 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) \\
& = P_{1(i+1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} \right) + P_{1(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& P_{1(i)}^n \left(1 + \frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} - \frac{c_2 \Delta t v_1}{2\alpha_1} - \frac{c_2 \Delta t}{\Delta y} - \frac{c_3 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right).
\end{aligned}$$

8. Fronteira no canto inferior à direita

As combinações aqui consideram as fronteiras horizontal inferior e vertical à direita.

$$\begin{aligned}
& P_{1(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} \right) + P_{1(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& P_{1(i)}^{n+1} \left(1 - \frac{\Delta t \lambda_1}{2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_1}{2} + \frac{c_4 \Delta t}{\Delta x} + \frac{c_2 \Delta t v_1}{2\alpha_1} + \frac{c_2 \Delta t}{\Delta y} + \frac{c_4 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& + \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^{n+1} \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right) \\
& = P_{1(i+1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} \right) + P_{1(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} \right) + \\
& P_{1(i)}^n \left(1 + \frac{\Delta t \lambda_1}{2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_1}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_1}{2} - \frac{c_4 \Delta t}{\Delta x} - \frac{c_2 \Delta t v_1}{2\alpha_1} - \frac{c_2 \Delta t}{\Delta y} - \frac{c_4 \Delta t u_1}{2\alpha_1} \right) \\
& - \lambda_1 \frac{\Delta t}{2} P_{1(i)}^n \left(\frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2K} + \gamma_1 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2K} + \sigma_1 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2K} \right).
\end{aligned}$$

4.4 Discretização do modelo que descreve a influência da vegetação no microclima local (3.2)

Aqui será apresentado o processo de discretização apenas da equação L , visto que as equações de P_1, P_2, P_3 foram discretizadas na Secção 4.3. A discretização da equação de H é análoga à efetuada para L .

Escreve-se a aproximação da solução para os pontos interiores de Ω para a variação de densidade de L , feita pelo método de diferenças finitas centrais de segunda ordem para variável espacial e pelo método de Crank-Nicolson para variável tempo.

Os termos que descrevem o fenômeno de difusão na equação L (as derivadas de segunda ordem) em (3.2) são discretizados por:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \approx \frac{L_{ies} - 2L_i + L_{idi}}{\Delta x^2}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \approx \frac{L_{iab} - 2L_i + L_{iac}}{\Delta y^2}, \quad (4.14)$$

e os termos temporais serão discretizados por:

$$\frac{\partial L^{n+\frac{1}{2}}}{\partial t} \approx \frac{L_{(i)}^{n+1} - L_{(i)}^n}{\Delta t}, \quad (4.15)$$

$$L_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{L_{(i)}^{n+1} + L_{(i)}^n}{2}. \quad (4.16)$$

A discretização da equação L do modelo 3.2 será realizada pelo método de diferenças finitas centrais para pontos interiores da malha espacial, procedimento análogo ao realizado em 4.7 para um tempo $t_{n+\frac{1}{2}}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{L_{(i)}^{n+1} - L_{(i)}^n}{\Delta t} = \alpha_4 & \left[\frac{L_{(i+mx)}^{n+\frac{1}{2}} - 2L_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + L_{(i-mx)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{L_{(i+1)}^{n+\frac{1}{2}} - 2L_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + L_{(i-1)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right] - \\ & - \mu_4 L_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} + \lambda_4 L_{(i)}^{n+\frac{1}{2}} \left[\frac{\beta_1 P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}}}{\beta_1 P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}} + K} + \frac{\beta_2 P_{2(i)}^{n+\frac{1}{2}}}{\beta_2 P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}} + K} + \frac{\beta_3 P_{3(i)}^{n+\frac{1}{2}}}{\beta_3 P_{1(i)}^{n+\frac{1}{2}} + K} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A discretização da variável temporal da equação L em 3.2 será desenvolvida pelo método de Crank-Nicolson, que equivale a substituir em 4.17 as equações 4.15 na variação temporal e 4.16 nos termos $L_i^{n+\frac{1}{2}}$, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{L_{(i)}^{n+1} - L_{(i)}^n}{\Delta t} = \alpha_4 & \left[\frac{\frac{L_{(i+mx)}^{n+1} + L_{(i+mx)}^n}{2} - 2\frac{L_{(i)}^{n+1} + L_{(i)}^n}{2} + \frac{L_{(i-mx)}^{n+1} + L_{(i-mx)}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\ & + \left. \frac{\frac{L_{(i+1)}^{n+1} + L_{(i+1)}^n}{2} - 2\frac{L_{(i)}^{n+1} + L_{(i)}^n}{2} + \frac{L_{(i-1)}^{n+1} + L_{(i-1)}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] - \mu_4 \frac{L_{(i)}^{n+1} + L_{(i)}^n}{2} + \\ & \lambda_4 \left(\frac{L_{(i)}^{n+1} + L_{(i)}^n}{2} \right) \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Com alguns procedimentos algébricos em 4.18, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 L_{(i)}^{n+1} - L_{(i)}^n = & \Delta t \alpha_4 \left[\frac{L_{(i+mx)}^{n+1} + L_{(i+mx)}^n - 2L_{(i)}^{n+1} - 2L_{(i)}^n + L_{(i-mx)}^{n+1} + L_{(i-mx)}^n}{2\Delta x^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{L_{(i+1)}^{n+1} + L_{(i+1)}^n - 2L_{(i)}^{n+1} - 2L_{(i)}^n + L_{(i-1)}^{n+1} + L_{(i-1)}^n}{2\Delta y^2} \right] - \Delta t \mu_4 \frac{L_{(i)}^{n+1} + L_{(i)}^n}{2} - \\
 & \lambda_4 \Delta t \left(\frac{L_{(i)}^{n+1} + L_{(i)}^n}{2} \right) \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Agrupando os termos em 4.19 no mesmo passo de tempo de modo conveniente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & L_{(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + 1 \right) + \\
 & + L_{(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta y^2} \right) + L_{(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + \\
 & \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
 & = L_{(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^n \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} + 1 \right) + \\
 & + L_{(i+1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta y^2} \right) + L_{(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) - \\
 & \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
 \end{aligned}$$

Para obter as aproximações das derivadas nas fronteiras da equação L do sistema (3.2), tem-se:

- **Fronteira horizontal superior**

Com os mesmos procedimentos algébricos aplicados na fronteira horizontal superior para o modelo 3.1 na Seção 4.3, tem-se que as aproximações para os pontos interiores adjacentes são dadas respectivamente, por:

$$\frac{2L_{(i-1)}^n - 2(1 + \frac{\Delta y e_1}{\alpha_4})L_{(i)}^n}{\Delta x^2}, \tag{4.20}$$

$$\frac{2L_{(i-1)}^n - 2(1 + \frac{\Delta y e_1}{\alpha_4})L_{(i)}^n}{\Delta y^2}. \tag{4.21}$$

Substituindo 4.20 e 4.21 nos termos de difusão em x e em y , respectivamente, na equação 4.19, realizando alguns procedimentos algébricos e agrupando os termos no mesmo passo de tempo de modo conveniente, tem-se:

$$\begin{aligned}
& L_{(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + \frac{e_1 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\alpha_4 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
& = L_{(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i)}^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} - \frac{e_1 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i-1)}^n \left(\frac{\alpha_4 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) - \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
\end{aligned}$$

• Fronteira horizontal inferior

Os tratamentos dados às fronteiras horizontal inferior, vertical à esquerda e vertical à direita são similares aos procedimentos realizados na fronteira horizontal superior, então os procedimentos numéricos aqui serão omitidos e mostrados apenas os resultados já agrupados.

$$\begin{aligned}
& L_{(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + \frac{e_2 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\alpha_4 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
& = L_{(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i)}^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} - \frac{e_2 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta x^2} \right) + L_{(i+1)}^n \left(\frac{\alpha_4 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) - \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
\end{aligned}$$

• **Fronteira vertical à esquerda**

$$\begin{aligned}
& L_{(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + \frac{e_3 \Delta t}{\Delta x} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) + L_{(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\alpha_4 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
& = L_{(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{2\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} - \frac{e_3 \Delta t}{\Delta x} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) + L_{(i+1)}^n \left(\frac{\alpha_4 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) - \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
\end{aligned}$$

• **Fronteira vertical à direita**

$$\begin{aligned}
& L_{(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + \frac{e_4 \Delta t}{\Delta x} \right) + \\
& + L_{(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\alpha_4 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + L_{(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
& = L_{(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) + L_{(i)}^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} - \frac{e_4 \Delta t}{\Delta x} \right) + \\
& + L_{(i+1)}^n \left(\frac{\alpha_4 \Delta t}{2\Delta y^2} \right) + L_{(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) - \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
\end{aligned}$$

• **Fronteira no canto superior à esquerda**

Aqui, serão feitas combinações das soluções das fronteiras horizontal superior e vertical à esquerda, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& L_{(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + \frac{e_3 \Delta t}{\Delta x} + \frac{e_1 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) + \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
& = L_{(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} - \frac{e_3 \Delta t}{\Delta x} - \frac{e_1 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) - \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
\end{aligned}$$

• **Fronteira no canto superior à direita**

As combinações feitas aqui, envolvem as fronteiras horizontal superior e vertical à direita, resultando em:

$$\begin{aligned}
& L_{(i-1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + \frac{e_4 \Delta t}{\Delta x} + \frac{e_1 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) + \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
& = L_{(i-1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} - \frac{e_4 \Delta t}{\Delta x} - \frac{e_1 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) - \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
\end{aligned}$$

• **Fronteira no canto inferior à esquerda**

Para estimativa das derivadas de L no canto inferior à esquerda envolvem combinações das fronteiras horizontal inferior e vertical à esquerda, resultando em:

$$\begin{aligned}
& L_{(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + \frac{e_3 \Delta t}{\Delta x} + \frac{e_2 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) + \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
& = L_{(i+1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} - \frac{e_3 \Delta t}{\Delta x} - \frac{e_2 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i+mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) - \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
\end{aligned}$$

• **Fronteira no canto inferior à direita**

As combinações para o canto inferior à direita, são entre as fronteiras horizontal inferior e vertical à direita, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& L_{(i+1)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_4}{2} + \frac{e_4 \Delta t}{\Delta x} + \frac{e_2 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i-mx)}^{n+1} \left(-\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) + \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^{n+1} \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right] \\
& = L_{(i+1)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} \right) + L_{(i)}^n \left(1 - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_4}{2} - \frac{e_4 \Delta t}{\Delta x} - \frac{e_2 \Delta t}{\Delta y} \right) + \\
& + L_{(i-mx)}^n \left(\frac{\Delta t \alpha_4}{\Delta x^2} \right) - \\
& \lambda_4 \frac{\Delta t}{2} L_{(i)}^n \left[\frac{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2}}{\beta_1 \frac{P_{1(i)}^{n+1} + P_{1(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2}}{\beta_2 \frac{P_{2(i)}^{n+1} + P_{2(i)}^n}{2} + K} + \frac{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2}}{\beta_3 \frac{P_{3(i)}^{n+1} + P_{3(i)}^n}{2} + K} \right].
\end{aligned}$$

Esse sistema foi resolvido aplicando os mesmos procedimentos adotados por Sossae et al. (2003), Douglas Jr, Dupont e Ewing (1979), Meyer (1988).

De modo sucinto, tem-se:

$$\mathbb{A}_I (P_1^n, P_2^n, P_3^n, P_1^{n+1}, P_2^{n+1}, P_3^{n+1}) P_I^{n+1} = \mathbb{B}_I (P_1^n, P_2^n, P_3^n, P_1^{n+1}, P_2^{n+1}, P_3^{n+1}) P_I^n$$

com condições iniciais $P_I^{(0)} = (P_{I_1}^{(0)}, P_{I_2}^{(0)}, \dots, P_{I_n}^{(0)})$, $I = 1, 2, 3$.

Os processos iterativos são obtidos mediante o seguinte algoritmo:

1. resolve-se o sistema

$$\mathbb{A}_1 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)} \right) P_1^{(*)} = \mathbb{B}_1 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)} \right) P_1^{(0)}$$

obtendo o vetor $P_1^{(*)}$;

2. resolve-se, agora, o sistema

$$\mathbb{A}_2 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)} \right) P_2^{(*)} = \mathbb{B}_2 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)} \right) P_2^{(0)}$$

obtendo o vetor $P_2^{(*)}$;

3. resolve-se, em seguida o sistema

$$\mathbb{A}_3 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(0)} \right) P_3^{(*)} = \mathbb{B}_3 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(0)} \right) P_3^{(0)}$$

obtendo o vetor $P_3^{(*)}$;

4. resolve-se então, o sistema

$$\mathbb{A}_1 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)} \right) P_1^{(**)} = \mathbb{B}_1 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(*)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)} \right) P_1^{(0)}$$

obtendo o vetor $P_1^{(**)}$;

5. resolve-se agora o sistema

$$\mathbb{A}_2 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)} \right) P_2^{(**)} = \mathbb{B}_2 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(*)}, P_3^{(*)} \right) P_2^{(0)}$$

obtendo o vetor $P_2^{(**)}$;

6. resolve-se agora o sistema

$$\mathbb{A}_3 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(**)}, P_3^{(*)} \right) P_3^{(**)} = \mathbb{B}_3 \left(P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, P_1^{(**)}, P_2^{(**)}, P_3^{(*)} \right) P_3^{(0)}$$

obtendo o vetor $P_3^{(**)}$;

7. Procedendo de maneira análoga, obtêm-se sucessivamente $P_1^{(***)}$, $P_2^{(***)}$ e $P_3^{(***)}$ até que se definam as aproximações dos vetores $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ e $P_3^{(1)}$;

8. Os procedimentos de 1 a 7 são repetidos para $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ e $P_3^{(n)}$ no lugar de $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}$ e $P_3^{(0)}$, para se obter, após as iterações internas $(n+1)$ —ésimo na iteração temporal, $P_1^{(n+1)}$, $P_2^{(n+1)}$ e $P_3^{(n+1)}$.

Esse método de preditor-corretor, definido no âmbito de uma discretização para Crank-Nicolson, irá melhorar as aproximações da ordem de $(\Delta t)^2$ em cada iteração temporal.

5 Análise de Convergência

5.1 Teste de convergência da metodologia numérica

Nas simulações numéricas para análise de convergência, foram adotadas 5 malhas com espaçamento $dx = dy$. A Tabela 6 ilustra esses espaçamentos. O procedimento adotado neste trabalho se baseia em [Leveque \(2007\)](#).

A malha de menor espaçamento M_5 é considerada a de referência para a análise de convergência das soluções numéricas.

Tabela 6 – Malhas computacionais

Malha	Células	$dx = dy$
M_1	120×90	0,5
M_2	240×180	0,1
M_3	480×360	0,05
M_4	960×720	0,025
M_5	1920×1440	0,0125

A análise quantitativa será baseada no erro relativo, levando em conta a norma L_2 , definida por:

$$||E_h(\epsilon)||_2 = \frac{||\epsilon_{ref} - \epsilon_{M_i}||_2}{||\epsilon_{ref}||_2}.$$

Consideram-se ϵ_{ref} e ϵ_{M_i} os erros das soluções numéricas obtidas na malha refinada referencial, M_5 , nas demais malhas M_i , $i = 1, \dots, 4$, respectivamente. A Tabela 7 exibe os erros relativos das soluções numéricas obtidas em cada uma das malhas em relação à malha referencial, M_5 , nas simulações para cada espécie, P_1 , P_2 e P_3 .

O comportamento do erro será estimado por:

$$||\epsilon_h||_2 \approx Ch^p, \quad (5.1)$$

sendo:

- C constante;

- h espaçamento da malha no espaço;
- p a ordem de convergência do método.

Tabela 7 – Erro relativo.

Malha	$\epsilon(P_1)$	$\epsilon(P_2)$	$\epsilon(P_3)$
M_1	$3,4365356e^{-2}$	$1,56e^{-2}$	$2,34e^{-2}$
M_2	$8,75e^{-3}$	$3,705258317e^{-3}$	$5,623766234e^{-3}$
M_3	$2,153947399e^{-3}$	$9,310781209e^{-4}$	$1,415818789e^{-3}$
M_4	$5,000634339e^{-4}$	$2,272219522e^{-4}$	$3,512418433e^{-4}$

Com algumas manipulações algébricas a equação (5.1) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$p \cong \frac{\ln\left(\frac{\|\epsilon_{h_i}\|_2}{\|\epsilon_{h_j}\|_2}\right)}{\ln\left(\frac{h_i}{h_j}\right)}, \quad (5.2)$$

em que $i = 1, \dots, 3$ e $j = i + 1$.

Considerando-se um refinamento de malha, tal que $h_i = 2h_j$, a equação (5.2) ficará:

$$p \cong \frac{\ln\left(\frac{\|\epsilon_{h_i}\|_2}{\|\epsilon_{h_j}\|_2}\right)}{\ln 2}. \quad (5.3)$$

A equação 5.3 foi utilizada na obtenção da ordem de convergência dos resultados numéricos obtidos para cada espécie P_1 , P_2 e P_3 , nas diferentes malhas adotadas. A Tabela 8 reúne os resultados encontrados para a ordem p . Os resultados quantitativos evidenciam que a ordem de convergência encontrada nas diferentes malhas é majoritariamente próxima de segunda ordem.

Tabela 8 – Ordem de convergência.

$p(M_i, M_j)$	P_1	P_2	P_3
$p(M_1, M_2)$	1,9736	2,0739	2,0569
$p(M_2, M_3)$	2,0223	1,9926	1,9899
$p(M_3, M_4)$	2,1068	2,0348	2,0111

5.1.1 Núcleo de Péclet

As equações abordadas neste trabalho têm suas variáveis dependentes do espaço e do tempo. Para a variável espacial, optou-se pelo método das diferenças finitas centrais para aproximar numericamente a solução dos modelos matemáticos propostos, cujas equações apresentam operadores de advecção e de difusão. Verifica-se sempre que, se o número de Péclet não for

respeitado como limitante, podem ocorrer indesejáveis oscilações, e os efeitos de difusão numérica podem gerar instabilidades ou a não convergência dos resultados numéricos das simulações, [Vieira \(1990\)](#).

As oscilações e as instabilidades nas soluções numéricas podem ser controladas, respeitando-se as condições abaixo:

$$P_{ex} = \frac{u * \Delta x}{\alpha} < 2$$

e

$$P_{ey} = \frac{v * \Delta y}{\alpha} < 2,$$

sendo u, v as componentes de velocidade do termo advectivo, P_x, P_y são os números de Péclet nos eixos x e y respectivamente; Δx e Δy são os espaçamentos da malha computacional no sentido x e y , respectivamente, α é o coeficiente de difusão.

As simulações computacionais exibidas nas Figuras 6, 7 e 8 seguintes ilustram a convergência dos resultados numéricos independentes da malha empregada, para as três espécies P_1 , P_2 e P_3 .

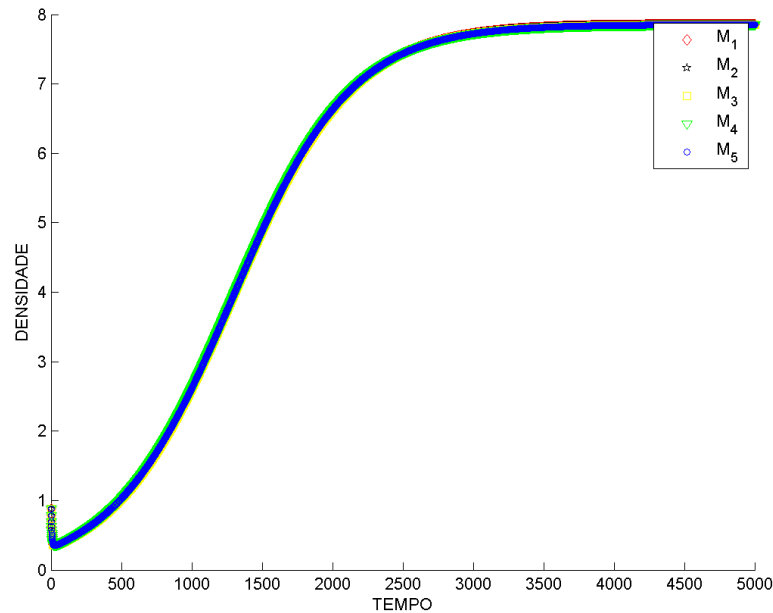


Figura 6 – Refinamento da malha computacional para espécie P_1 .

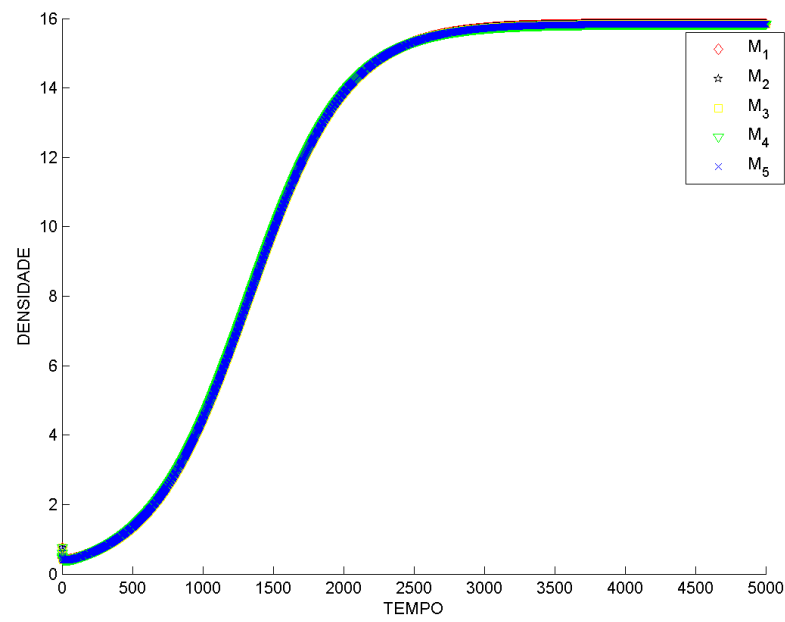


Figura 7 – Refinamento da malha computacional para espécie P_2 .

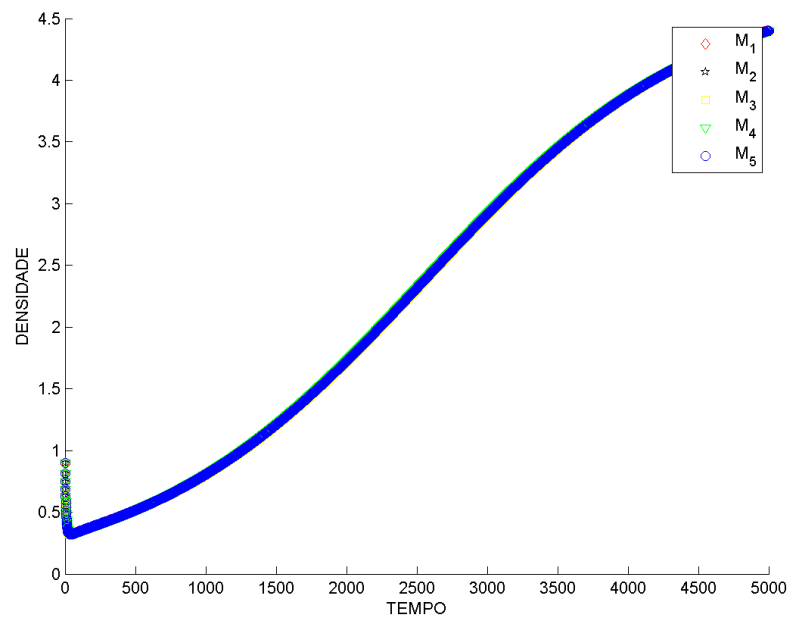


Figura 8 – Refinamento da malha computacional para espécie P_3 .

Na Seção 5.2 seguinte, apresentam-se os pontos de equilíbrio, análise de estabilidade do modelo de EDO 5.4, obtido desprezando-se os termos difusivo e advectivo em 3.1.

5.2 Pontos de equilíbrio

Esta Seção apresenta a obtenção dos pontos de equilíbrio do modelo temporal, obtidos desprezando-se os termos difusivo e advectivo dos modelos em 3.1. O principal intuito é entender a dinâmica temporal das espécies P_1 , P_2 e P_3 . Em particular, espera-se entender a priori como se dá a convergência dos resultados das simulações computacionais ao longo do tempo. Espera-se que os resultados aqui encontrados possam servir de base de entendimento para as simulações envolvendo a modelagem do problema em EDP_s .

Desprezando-se os termos de difusão-advectação em (3.1), o modelo resultante fica descrito por um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias acopladas (5.4), conforme dado abaixo:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = \lambda_1 P_1 \left(1 - \frac{P_1 + \gamma_1 P_2 + \sigma_1 P_3}{K} \right) - \mu_1 P_1; \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda_2 P_2 \left(1 - \frac{P_2 + \gamma_2 P_1 + \sigma_2 P_3}{K} \right) - \mu_2 P_2; \\ \frac{dP_3}{dt} = \lambda_3 P_3 \left(1 - \frac{P_3 + \gamma_3 P_2 + \sigma_3 P_1}{K} \right) - \mu_3 P_3. \end{cases} \quad (5.4)$$

- Os parâmetros $\frac{\lambda_i}{K} P_i P_i$, $i = 1, 2, 3$, são os coeficientes de competições intraespecíficas de P_1 , P_2 e P_3 , respectivamente;
- Os parâmetros $\frac{\lambda_i \gamma_i}{K} P_i P_j$, $\frac{\lambda_i \sigma_i}{K} P_i P_j$, $i = 1, 2, 3$, são os coeficientes de competições interespecíficas entre as espécies P_i e P_j , $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$.

Como está sendo considerado, na modelagem, que os recursos naturais disponíveis ao meio são limitados, então os coeficientes de competições intra e interespecíficas dependem da capacidade de suporte K , ou seja,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i}{K} = 0.$$

Isso mostra que quanto maior for a capacidade de suporte K , mais recursos estarão disponíveis e menor são os valores dos coeficientes de competições. Agora, observe que

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\lambda_i}{K} = \infty.$$

Daí, tem-se que quanto menor for a capacidade de suporte K , menos recursos estarão disponíveis e maior serão os valores dos coeficientes de competições. Para os demais coeficientes o processo é análogo.

O sistema (5.4) admite 8 pontos de equilíbrio, na forma $M_i = (P_1^*, P_2^*, P_3^*)$, $i = 1, 2, 3$ que foram encontrados pelo pacote *solu := solve* do software Maple 17 (versão para teste), a

saber:

$$M_1 = (0; 0; 0), M_2 = (16; 0; 0), M_3 = (0; 16; 0), M_4 = (0; 0; 16), M_5 = (0; 15, 84; 15, 75), \\ M_6 = (15, 93; 15, 99; 0), M_7 = (15, 97; 0; 15, 96), M_8 = (15, 80; 15, 86; 15, 84).$$

Observe que M_8 representa a coexistência das três espécies e M_1 a total inexistência de qualquer espécie na dinâmica temporal. Os demais pontos indicam a inexistência de ao menos uma espécie ao longo do tempo, nesse caso, expressa pela coordenada nula.

Como o problema principal é investigar a recuperação de uma área degradada, com replantio de três espécies coexistindo no mesmo local, M_8 será, assim, analisado, conforme descrito por Bassanezi (2011).

Calculando-se a matriz Jacobiana nas coordenadas do ponto M_8 , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,165815176560588e^{-2} \\ -0,173320725224458e^{-1} \\ -0,172919437809484e^{-1} \end{bmatrix}$$

sendo w_i os autovalores dessa matriz, $i = 1, 2, 3$, com $w_i < 0$, então M_8 é localmente assintoticamente estável.

Para estudos mais detalhados sobre análise de estabilidades e ponto de equilíbrio, consultar Strogatz (2018), Bessa (2011), Marino et al. (2008).

O sistema (5.4) é resolvido numericamente pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de tempo $\Delta t = 0,01$, considerando o tempo máximo T igual a 5000 dias. O método foi implementado computacionalmente na linguagem de programação Python, em um notebook modelo HP 240 G3, processador Intel CORE i3, RAM 4 GB, com tempo médio aproximado de processamento de 18 minutos.

Nas simulações, consideram-se os seguintes:

- As simulações ilustram as competições das espécies pelos recursos naturais limitados disponíveis ao meio;
- Os valores dos parâmetros do modelo usados nas simulações numéricas computacionais são apresentados na Tabela 4;
- A capacidade de suporte K é um parâmetro determinante para que haja ou não as competições entre espécies.

Com intuito de avaliar a convergência das soluções, considerou-se diferentes condições iniciais para as simulações. Os resultados das simulações para P_1 pode ser visualizada na Figura 9.

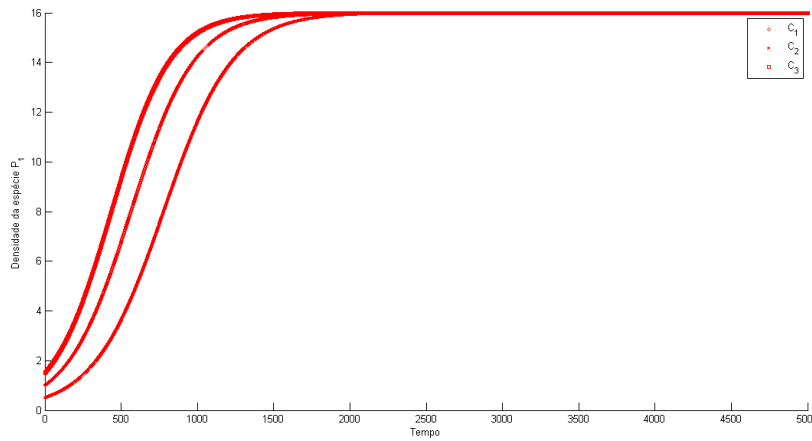


Figura 9 – Dinâmicas da espécie P_1 ao longo do tempo, considerando as condições iniciais $C_1 = 0,5$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1,5$. $T = 5000$ dias.

Observa-se, nessa Figura 9, que a dinâmica temporal de P_1 convergiu para a coordenada $P_1^* = 15,80$, independentemente da condição inicial estabelecida.

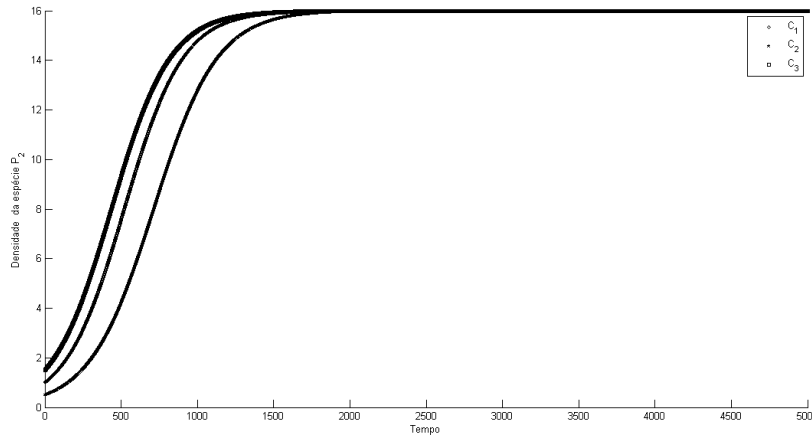


Figura 10 – Dinâmicas da espécie P_2 ao longo do tempo, considerando as condições iniciais $C_1 = 0,5$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1,5$. $T = 5000$ dias.

A Figura 10 exibe os resultados para P_2 , em que se pode notar a convergência para a coordenada $P_2^* = 15,86$.

Na Figura 11, é possível notar a convergência das soluções para a coordenada $P_3^* = 15,84$ de M_8 .

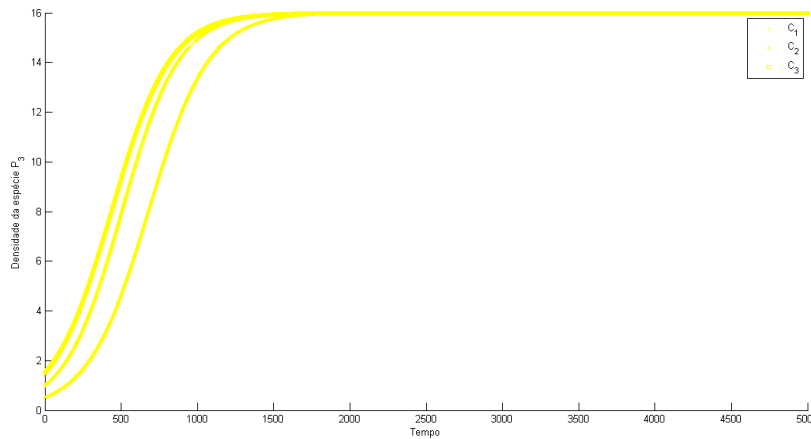


Figura 11 – Dinâmicas da espécie P_3 ao longo do tempo, considerando as condições iniciais $C_1 = 0,5$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1,5$. $T = 5000$ dias.

Com esses resultados, cujos parâmetros de competições intra e interespecíficas e capacidade de suporte K estão sendo considerados no modelo temporal, mas desprezando os efeitos difusivo-advectivo no modelo (3.1), concluiu-se que as espécies P_1 , P_2 e P_3 convergiram, respectivamente, para as coordenadas do ponto de equilíbrio de coexistência das espécies, $M_8 = (15, 80; 15, 86; 15, 84)$, considerando condições iniciais distintas.

Observa-se ainda, nas figuras 9, 10 e 11, a similaridade entre os resultados, devido aos efeitos dos termos logísticos nas equações do modelo, bem como na convergência para coordenadas muito próximas numericamente, nesse caso, devido a uma mesma capacidade de suporte K ter sido estabelecida para as três espécies.

Em resumo, com base nas simulações realizadas, observou-se que as soluções numéricas não dependem das condições iniciais tomadas e, dessa forma, foi possível mostrar numericamente a convergência e a estabilidade do ponto de equilíbrio de coexistência das espécies no modelo. Simulações numéricas envolvendo simultaneamente P_1 , P_2 e P_3 com as mesmas condições iniciais, encontram-se no Apêndice A.

As análises de sensibilidades para avaliar o quanto o modelo é sensível às variações dos parâmetros serão apresentadas no próximo Capítulo.

6 Análise de Sensibilidade dos Parâmetros

6.1 Análise de sensibilidade

Nesta Seção apresenta-se a análise de sensibilidade do modelo matemático 3.1 em relação aos seus parâmetros.

Os métodos de análise de sensibilidade investigam a saída dos modelos como uma função dos parâmetros de entrada, cujo objetivo é avaliar como as variações nos valores dos parâmetros de entradas do modelo impactam os resultados das simulações numéricas computacionais.

Uma amostragem baseada na análise de sensibilidade é aquela em que o modelo é executado repetidas vezes, testando-se várias combinações dos valores amostrados a partir da distribuição dos fatores de entrada, conforme descrito em [Camelo et al. \(2017\)](#).

Neste estudo, a análise de sensibilidade será realizada baseada em [Scarpore \(2011\)](#) e [Garcia et al. \(2014\)](#), adotando o seguinte procedimento: 1— Altera-se o valor de uma única variável, enquanto se mantinham as demais inalteradas; 2— Executa-se as simulações numéricas do modelo 3.1 repetidamente, variando o valor do parâmetro escolhido a cada execução.

Assim, por exemplo, pode-se medir como uma espécie de vegetação reage à alteração dos valores assumido por cada parâmetros, ou seja, a sensibilidade da saída do modelo, como densidade populacional, para cada um de seus parâmetros, conforme o que descrevem [Saltelli et al. \(2004\)](#) e [Scarpore \(2011\)](#). A associação entre os valores de entrada do modelo e a saída é dada pelo modelo matemático (3.1).

Cada parâmetro assume um valor dentro de um intervalo pré-definido uma única vez, de modo que todo o intervalo seja explorado. Na prática, o modelo é simulado repetidas vezes, em que as soluções vão sendo encontradas, usando-se as combinações de parâmetros que são escolhidos dentro de intervalos adequados para cada uma deles.

Para cada conjunto de parâmetros, foram realizadas 30 simulações. Esse processo foi repetido cuidadosamente para cada parâmetro considerado no modelo 3.1, para que todos mantivessem a mesma perturbação, a fim de se evitar resultados enviesados.

Na Tabela 9, apresentam-se os intervalos de correlações e suas respectivas interpretações nas análises dos gráficos descritos nas figuras 20 e 21.

Tabela 9 – Intervalo de correlação, segundo Rumsey (2011).

Intervalo de variação	Interpretações
0,00 , ±0,19	Correlação bem fraca
±0,20 , ±0,39	Correlação fraca
±0,40 , ±0,69	Correlação moderada
±0,70 , ±0,89	Correlação forte
±0,90 , ±1,00	Correlação bem forte

6.1.1 Intervalo de confiança

Seja uma amostra com média amostral $\bar{x}$, desvio padrão $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, com n sendo o tamanho dessa amostra e a distribuição normal descrita por $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Daí, segue que $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z \approx N(0, 1)$. A partir de $Z \approx N(0, 1)$ define-se um intervalo de confiança, o qual deve conter uma determinada porcentagem de uma observação. É possível determinar Z_1 e Z_2 , tais que $P(Z_1 \leq Z \leq Z_2) = 1 - \alpha$, em que $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confiança é o percentual desejado. Com alguns procedimentos algébricos em $P(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$, o intervalo de confiança será dado por:

$$\left[\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

O nível de significância α é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que a observada, correspondendo ao erro que se pode cometer, cujos valores mais comuns estão entre 1% e 5%, segundo Vieira (2011).

O nível de confiança $(1 - \alpha)$ é a frequência com a qual o intervalo observado contém o valor correto do parâmetro de interesse quando o experimento é repetido várias vezes. O nível 95% de confiança significa que os intervalos construídos contêm o valor verdadeiro do parâmetro.

Neste trabalho, primeiramente foram calculados $\bar{x}$ e $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para cada parâmetro. Em seguida foi considerado o nível de significância $\alpha = 0,05$, resultando em $\frac{\alpha}{2} = Z_{0,025} = 1,96$, (VIEIRA, 2011) e nível de confiança de 95%. Portanto, o intervalo de confiança adotado aqui é dado por:

$$\left[\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]. \quad (6.1)$$

Com valores dos parâmetros dispostos na Tabela 4 aplicados em 6.1, constrói-se a Tabela 10, apontando o intervalo de confiança de cada parâmetro adotado no modelo matemático (3.1).

Com base nos valores dos parâmetros e nas amplitudes dos intervalos descritos na Tabela 10, apresentam-se os resultados numéricos das simulações computacionais para analisar a sensibilidade do modelo (3.1) em relação aos parâmetros.

Tabela 10 – Intervalo dos parâmetros para análise de sensibilidade.

Par.	Valores	Par.	Valores	Par.	Valores
α_1	$[1, 49e^{-5}; 1, 49e^{-3}]$	α_2	$[2, 2e^{-5}; 2, 2e^{-3}]$	α_3	$[1, 27e^{-5}; 1, 27e^{-3}]$
α_4	$[0, 01; 0, 05]$	α_5	$[0, 01; 0, 08]$		
u_1	$[0, 01; 0, 07]$	u_2	$[0, 01; 0, 08]$	u_3	$[0, 01; 0, 07]$
v_1	$[0, 02; 0, 08]$	v_2	$[0, 04; 0, 09]$	v_3	$[0, 04; 0, 09]$
μ_1	$[0, 001; 0, 0005]$	μ_2	$[0, 001; 0, 006]$	μ_3	$[0, 004; 0, 008]$
μ_4	$[0, 001; 0, 007]$	μ_5	$[0, 002; 0, 008]$		
λ_1	$[0, 2; 0, 6]$	λ_2	$[0, 2; 0, 8]$	λ_3	$[0, 1; 0, 7]$
λ_4	$[0, 01; 0, 6]$	λ_5	$[0, 01; 0, 08]$		
γ_1	$[0, 001; 0, 006]$	γ_2	$[0, 01; 0, 06]$	γ_3	$[0, 002; 0, 007]$
σ_1	$[1, 1e^{-5}; 1, 1e^{-3}]$	σ_2	$[1, 0e^{-5}; 1, 0e^{-3}]$	σ_3	$[1, 5e^{-5}; 1, 5e^{-3}]$
β_1	$[0, 001; 0, 005]$	β_2	$[0, 001; 0, 007]$	β_3	$[0, 002; 0, 008]$
δ_1	$[0, 001; 0, 006]$	δ_2	$[0, 002; 0, 007]$	δ_3	$[0, 001; 0, 005]$

6.1.2 Análise de sensibilidade em relação ao parâmetros de difusão

As Figuras 12, 13 e 14 mostram a sensibilidade do modelo (3.1) em relação aos parâmetros de difusão $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, respectivamente, considerando os intervalos indicados na Tabela 10, com o intuito de avaliar o efeito do fenômeno difusivo nos resultados apresentados pelas simulações numéricas computacionais.

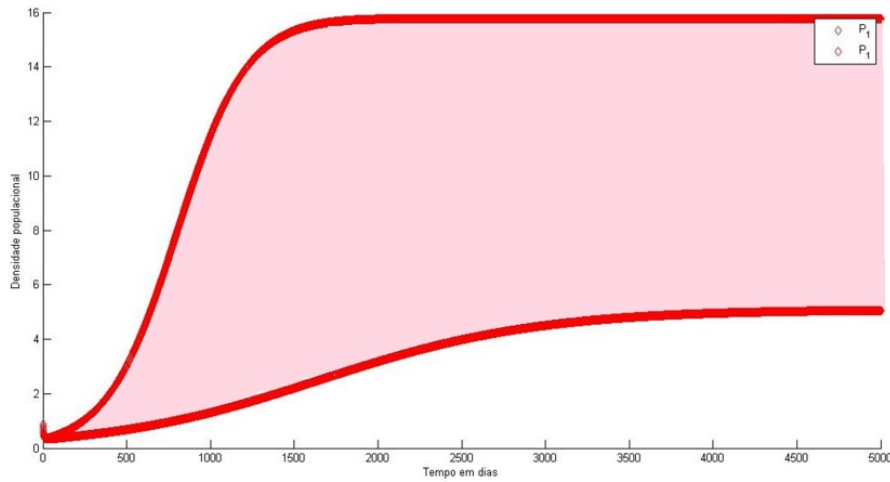


Figura 12 – Variação temporal da densidade da espécie P_1 em função dos valores do parâmetro de difusão.

A Figura 12 descreve a influência do parâmetro de difusão α_1 na dinâmica da espécie P_1 . Pode-se observar a variação da densidade da espécie quando o parâmetro de difusão assume valores dentro do intervalo apresentado na Tabela 10. Para valores próximos ao extremo inferior do intervalo, observa-se que a espécie tendeu a capacidade de suporte K . Quando os valores do parâmetro difusivo estão próximos ao extremo superior desse intervalo, nota-se que a espécie P_1 reduziu significativamente sua densidade.

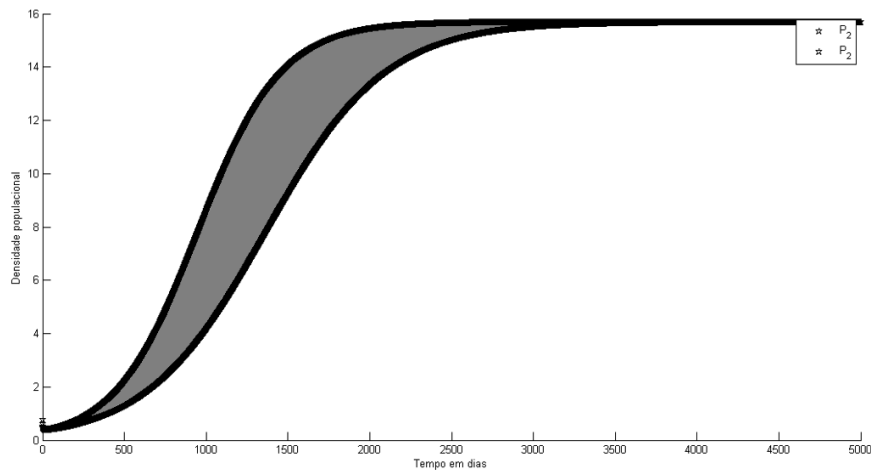


Figura 13 – Variação temporal da densidade da espécie P_2 em função dos valores do parâmetro de difusão.

Na Figura 13, observa-se o efeito do fenômeno difusivo na dinâmica da espécie P_2 quando o parâmetro α_2 assume valores dentro do intervalo exibido na Tabela 10. Nessa Figura nota-se que esta espécie não apresentou variação da densidade, ocorrendo apenas um retardo de tempo até alcançar a capacidade de suporte K .

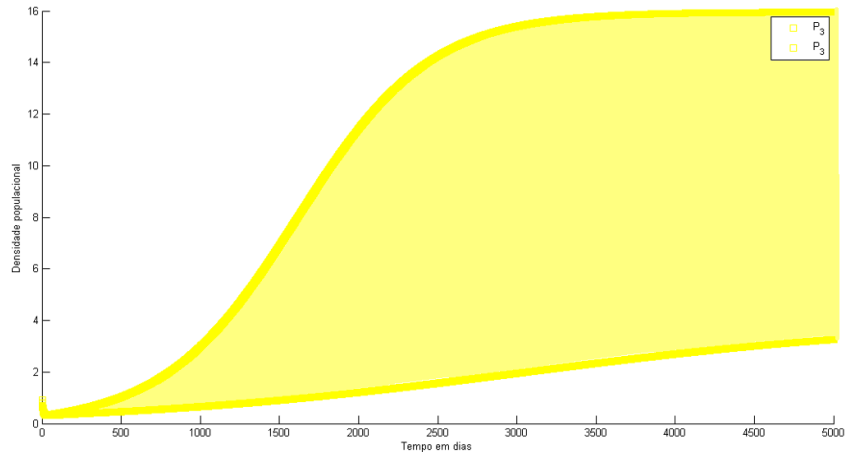


Figura 14 – Variação temporal da densidade da espécie P_3 em função dos valores do parâmetro de difusão.

A Figura 14 descreve a influência do parâmetro de difusão α_3 na dinâmica da espécie P_3 , em que se pode notar que houve variação da densidade da espécie quando α_3 assume valores no intervalo considerado. Quando o parâmetro assume valores próximos ao extremo inferior do intervalo, observa-se que a espécie tendeu a capacidade de suporte K . Porém, quando o parâmetro difusivo assume valores próximos ao extremo superior do intervalo, nota-se que a espécie P_3 reduziu significativamente sua densidade.

Observa-se que, quando considerados valores do parâmetro de difusão próximo ao ex-

tremo inferior do intervalo apresentado na Tabela 10 (valores menores de difusão), as três espécies P_1 , P_2 e P_3 tenderam à capacidade de suporte K . Nesse cenário, as três espécies mantiveram suas dinâmicas inalteradas, sendo possível a coexistência entre elas. Esse comportamento corrobora com o observado na análise de estabilidade do ponto de equilíbrio de coexistências das espécies, da Seção 5.2.

Quando considerados valores do parâmetro de difusão próximo ao extremo superior (valores maiores de difusão), as espécies P_1 e P_3 tenderam à redução de suas densidades e a espécie P_2 tendeu à capacidade de suporte K .

O modelo apresentou forte correlação com os parâmetros de difusão, isso pode ter ocorrido pelo espalhamento das espécies P_1 , P_2 e P_3 na região degradada, ocasionado pela difusão, que provoca a sobreposição de nichos que, por sua vez motiva a competição, de acordo com Gotelli e Graves (1996).

6.1.3 Análise de sensibilidade em relação aos parâmetros advectivos

A Figura 15 descreve a sensibilidade do modelo matemático (3.1) com relação aos parâmetros advectivos u e v nas dinâmicas de cada espécie de vegetação, levando-se em conta os valores dispostos na Tabela 10.

O intuito foi avaliar o efeito do fenômeno advectivo nos resultados apresentados pelas simulações.

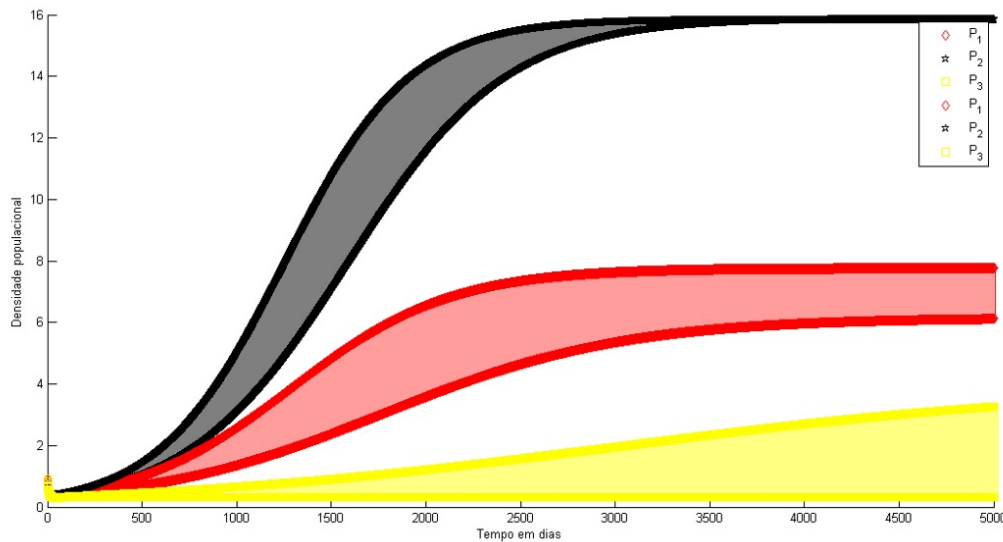


Figura 15 – Variações temporais da densidade das espécies P_1 , P_2 e P_3 , em função dos valores dos parâmetros de advecção u_i , v_i , $i = 1, 2, 3$.

- A variação temporal da densidade de espécie P_1 , descrita na Figura 15 pela cor vermelha, mostra a sensibilidade do modelo matemático em relação aos parâmetros advectivos u_1 e v_1 .

Observa-se que há variação da densidade dessa espécie quando os parâmetros de advecção u_1, v_1 mudaram de valores dentro do intervalo considerado na Tabela 10. Para valores próximos ao extremo inferior do intervalo, verifica-se que a espécie apresentou maior densidade. Todavia, quando os valores dos parâmetros advectivos estiveram próximos ao extremo superior do intervalo, nota-se que a espécie P_1 reduziu sua densidade;

- A sensibilidade do modelo em relação aos parâmetros de advecção u_2 e v_2 para P_2 é exibida na Figura 15 representada pelo cor preta. Nessa espécie, verifica-se que também não houve grande variação da densidade quando os parâmetros de advecção u_2, v_2 mudaram de valores no intervalo considerado. Porém, notou-se um tempo maior para a espécie P_2 atingir a capacidade de suporte K . Quando os parâmetros u_2 e v_2 assumem valores próximos ao extremo superior (maior influência da advecção), o tempo foi maior para P_2 atingir a capacidade de suporte K ;
- A variação temporal da densidade de P_3 , representada na Figura 15 pela cor amarela, mostra a sensibilidade do modelo matemático em relação aos parâmetros advectivos u_3 e v_3 . Nesse caso, observa-se que houve variação da densidade dessa espécie quando os parâmetros de advecção u_3, v_3 mudaram de valores dentro do intervalo estabelecido. Para valores próximos ao ponto médio do intervalo, verifica-se que esta espécie apresentou maior densidade, quando se considerou valores dos parâmetros advectivos u_3, v_3 próximos ao extremo superior, notou-se que esta espécie reduziu sua densidade e quando os valores dos parâmetros advectivos u_3, v_3 estiveram próximos ao extremo inferior do intervalo, notou-se que a espécie P_3 tendeu à extinção.

Esse conjunto de resultados mostra que P_1 e P_3 tiveram suas densidades alteradas, mas a densidade de P_2 manteve-se sem grandes alterações ao longo do tempo simulado, dado que essa espécie possui alto poder competitivo. Observa-se que P_3 foi à extinção quando os valores dos parâmetros advectivos são pequenos. Os parâmetros advectivos apresentaram fraca correlação com modelo, mas foram determinantes para composição de floresta mista. Esses resultados apontam que espécies com baixo poder competitivo em regiões com fraca advecção têm dificuldades de sobrevivência, isso porque espécies com o mesmo nicho não podem sobreviver no mesmo habitat ao mesmo tempo, conforme apontado também em Gotelli e Graves (1996).

6.1.4 Análise de sensibilidade em relação ao parâmetros de crescimento

Na Figura 16, encontra-se a sensibilidade do modelo matemático em relação ao parâmetro de crescimento λ , para avaliar os efeitos desse parâmetro nas dinâmicas das espécies de vegetação, levando-se em conta os valores dispostos na Tabela 10.

- A variação da densidade de P_1 escrito pelo parâmetro λ_1 é representada pela cor vermelha na Figura 16. Quando λ_1 assume valores mais próximos do extremo inferior do intervalo,

P_1 teve sua densidade diminuída e, quando assume valores mais próximos do extremo superior do intervalo, ocorreu o contrário;

- No caso de P_2 , representada pela cor preta na Figura 16, observou-se que, independente do valor de λ_2 assumido no intervalo indicado, a espécie atingiu a capacidade de suporte K , porém levou mais tempo para atingir K quando os valores do parâmetro são tomados próximo ao extremo inferior do intervalo;
- Os resultados para P_3 , representados pela cor amarela na Figura 16, mostram a sensibilidade do modelo matemático em relação ao parâmetro de crescimento λ_3 . Observa-se que quando os valores são tomados próximos ao extremo superior do intervalo descrito, a referida espécie apresentou maior densidade, mas quando são tomados próximos ao extremo inferior, teve a densidade diminuída.

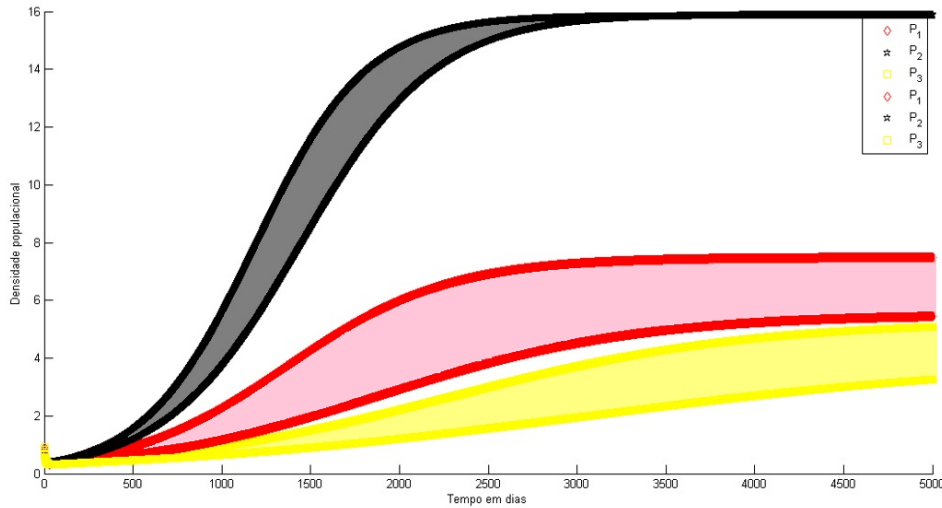


Figura 16 – Variações temporais da densidade das espécies P_1 , P_2 e P_3 em função dos valores do parâmetro de crescimento λ_i , $i : 1, 2, 3$.

Os resultados indicaram que P_1 e P_3 apresentaram diferentes densidades quando o parâmetro de crescimento assume valores distintos no intervalo considerado. P_2 manteve-se com a mesma densidade, mas levou maior tempo para atingir a densidade máxima.

6.1.5 Análise de sensibilidade em relação aos parâmetros de competições

As Figuras 17, 18 e 19 apresentam a sensibilidade do modelo (3.1) em função dos parâmetros de competições interespecíficas γ_i e σ_i , $i = 1, 2, 3$, com a finalidade de analisar os efeitos das competições nos resultados apresentados pelas simulações numéricas.

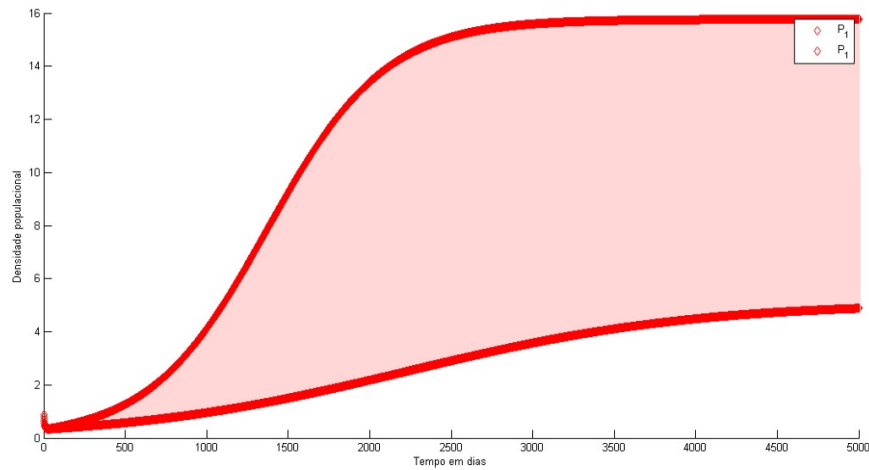


Figura 17 – Variação temporal da densidade da espécie P_1 , em função dos valores dos parâmetros de competições $\gamma_i, \sigma_i, i : 1, 2, 3$.

A Figura 17 mostra a influência dos parâmetros de competições γ_1 e σ_1 na dinâmica da espécie P_1 . Quando os parâmetros assumiram valores próximos ao extremo inferior do intervalo indicado, observa-se que P_1 tendeu para a densidade máxima. Quando os parâmetros assumiram valores próximos ao extremo superior do intervalo, observou-se que P_1 reduziu significativamente sua densidade. Isso pode ser indícios das competições com P_2 e P_3 .

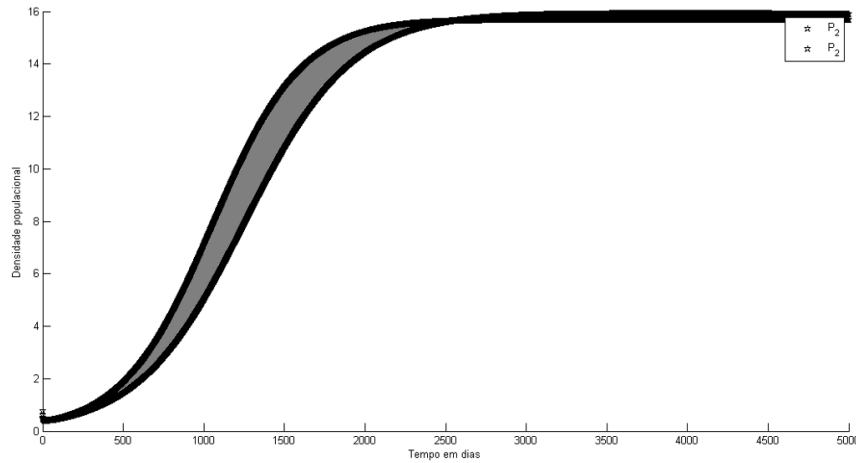


Figura 18 – Variação temporal da densidade da espécie P_2 , em função dos valores dos parâmetros de competições $\gamma_i, \sigma_i, i : 1, 2, 3$.

Na Figura 18, apresenta-se a sensibilidade no modelo (3.1) em relação aos parâmetros γ_2 e σ_2 que descreve as dinâmicas de competições da espécie P_2 . Observa-se o efeito das competições na dinâmica de P_2 quando γ_2 e σ_2 variam seus valores no intervalo indicado. Nota-se que a referida espécie não alterou sua densidade, ocorrendo apenas um retardo temporal até atingir a densidade máxima. Isso pode ser explicado por interferência das competições com P_1 e P_3 .

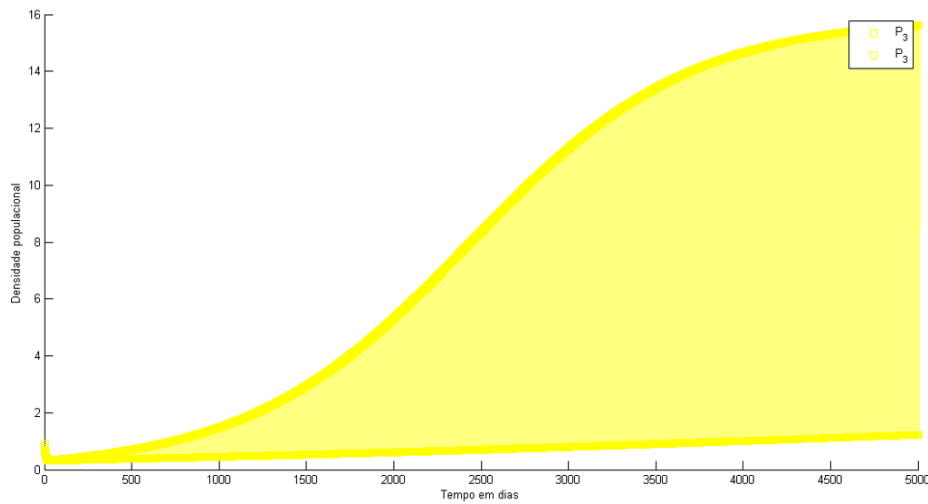


Figura 19 – Variação temporal da densidade da espécie P_3 , em função dos valores dos parâmetros de competiçãoes $\gamma_i, \sigma_i, i : 1, 2, 3$.

A Figura 19 descreve a influência dos parâmetros de competiçãoes γ_3 e σ_3 na dinâmica da espécie P_3 . Nota-se que houve grandes variações de densidade de P_3 quando γ_3 e σ_3 variam seus valores no intervalo estabelecido. Quando os parâmetros assumiram valores próximos ao extremo inferior do intervalo, observa-se que a espécie tendeu para a capacidade de suporte K . Quando γ_3 e σ_3 assumiram valores próximos ao extremo superior do intervalo, nota-se que a espécie P_3 reduziu significativamente sua densidade. Esse resultado pode ser explicado pelas competiçãoes dessa espécie com P_1 e P_2 .

Nota-se que, quando são levados em conta valores dos parâmetros de competiçãoes próximos ao extremo inferior do intervalo, as três espécies P_1, P_2 e P_3 tenderam para a capacidade de suporte K . Nesse cenário, as três espécies mantiveram suas dinâmicas inalteradas, sendo possível a coexistência de P_1, P_2 e P_3 . Quando considerados valores dos parâmetros de competiçãoes próximos ao extremo superior do intervalo, as espécies P_1 e P_3 reduziram significativamente suas densidades, e a espécie P_2 tendeu a capacidade de suporte K . Isso pode ser causado pelas competiçãoes entre as três espécies P_1, P_2 e P_3 , em que uma espécie influi na dinâmica das outras.

Esses resultados numéricos computacionais apresentados nas Figuras 17, 18 e 19 são respectivamente similares aos resultados apresentados pelas Figuras 12, 13 e 14. Isso pode ser indício de que fortes competiçãoes são provocadas pelo fenômeno difusivo. Simulações numéricas apresentando-se análise de sensibilidade no espaço, encontram-se no Apêndice B.

Na Figura 20, apresentam-se os resultados da análise de sensibilidade feita de forma individual para cada espécie de vegetação, sem considerar as competiçãoes interespecíficas, para avaliar os efeitos de cada fenômeno dentro da dinâmica intraespecífica de P_1, P_2 e P_3 .

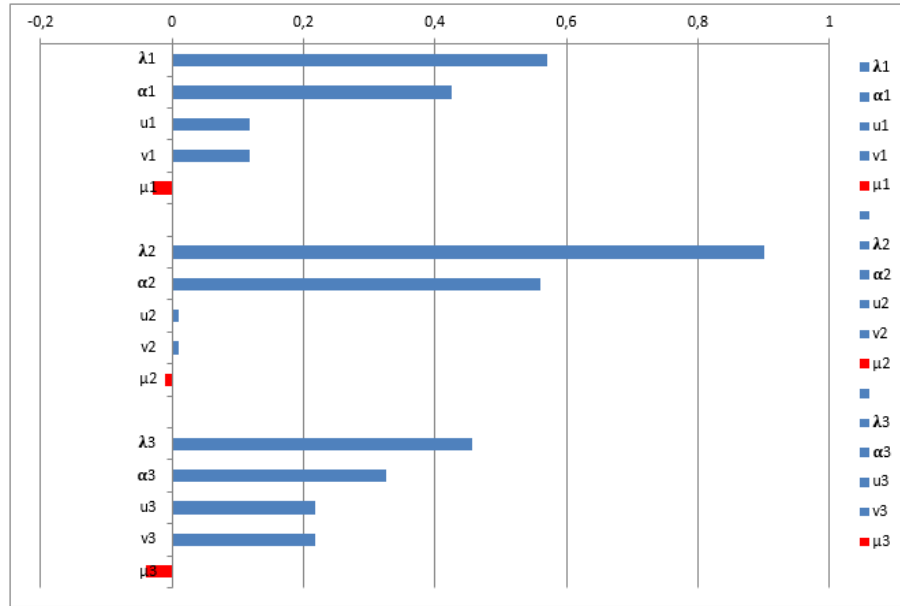


Figura 20 – Sensibilidade para cada espécie de vegetação.

Conclui-se dessa análise que:

- Na dinâmica da espécie P_1 , observa-se que os parâmetros de crescimento λ_1 e de difusão α_1 são os que têm maiores influências positivas, enquanto os parâmetros advectivos u_1 e v_1 possuem influências moderadas positivas e o parâmetro de decaimento, μ_1 , apresenta fraca influência negativa;
- Na espécie P_2 , nota-se que o parâmetro de crescimento λ_2 apresenta forte influência positiva e a difusão α_2 tem influência moderada positiva. Os parâmetros advectivos u_2 e v_2 possuem fracas influências positivas e o parâmetro de decaimento, μ_2 , apresenta fraca influência negativa;
- Ao analisar a dinâmica da espécie P_3 , verifica-se que os parâmetros de crescimento λ_3 e de difusão α_3 têm maiores influências positivas, os parâmetros advectivos u_3 e v_3 possuem influências moderadas positivas e o parâmetro de decaimento, μ_3 , apresenta fraca influência negativa. Observa-se que das três espécies analisadas, P_3 possui maior influência do fenômeno advectivo.

Verificam-se que nas dinâmicas de P_1 , P_2 e P_3 os parâmetros de crescimento λ_i e de difusão α_i , $i = 1, 2, 3$, apresentaram maiores influências positivas. Portanto, pequenas variações nesse parâmetro resultam em variações diretas e significativas no valor da densidade final das espécies, enquanto os demais foram praticamente inexpressivos.

Na Figura 21, apresentam-se os resultados da análise de sensibilidade do convívio das três espécies de vegetação P_1 , P_2 e P_3 , considerando os fenômenos de competições intra e interespecíficas, para avaliar a interferência de uma espécie nas dinâmicas das demais.

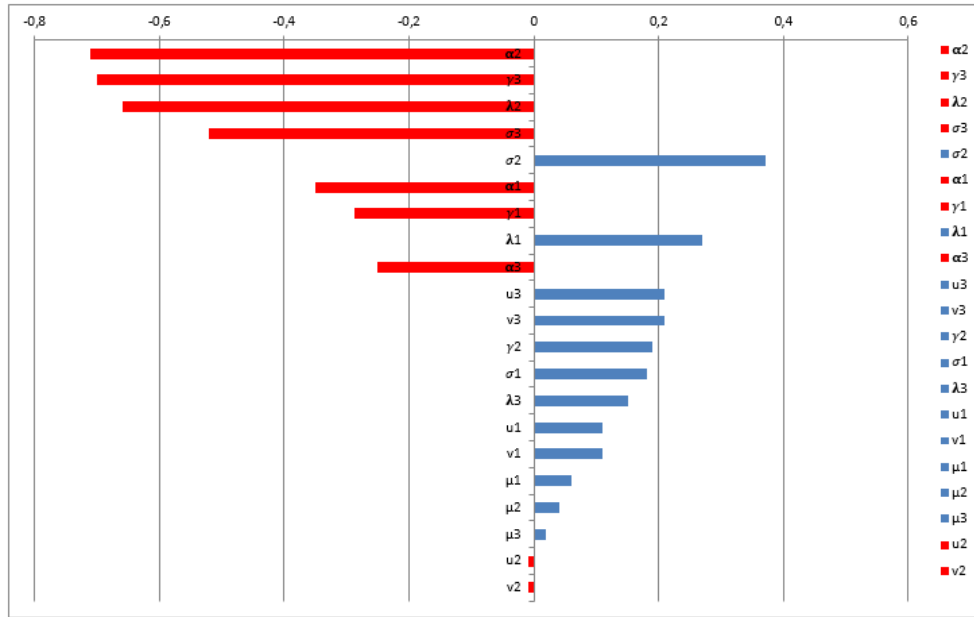


Figura 21 – Sensibilidade para as três espécies de vegetação.

A Figura 21 mostra a influência de cada parâmetro na dinâmica da população (convívio das três espécies juntas), daí conclui-se que:

- Os parâmetros de difusão $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, atuam no sistema ecológico com fortes influências negativas, visto que o fenômeno difusivo provoca a sobreposição de nicho, que causam as competições, tendo como consequência, a lentidão no crescimento ou mortalidade das espécies;
- As competições interespecíficas representadas pelos parâmetros $\gamma_i, \sigma_i, i = 1, 2, 3$, apresentaram resultados similares aos obtidos da difusão, visto que as competições são consequências do fenômeno difusivo. As variáveis de entrada, γ_2, σ_1 e σ_2 atuam de forma positiva apenas retardando o crescimento das espécies. γ_1, γ_3 e σ_3 atuam de forma negativa, provocando mortalidade ou redução na densidade das espécies;
- O crescimento das espécies são descritos pelos parâmetros $\lambda_i, i = 1, 2, 3$. A variável de entrada λ_2 apresentou forte influência negativa no sistema ecológico, devido a elevado poder de competição, enquanto que λ_1 e λ_3 têm moderadas influências positivas, apenas com retardo no crescimento, sem causar mortalidade das espécies;
- O fenômeno advectivo é representado pelos parâmetros u_i e $v_i, i = 1, 2, 3$. As entradas u_2 e v_2 atuam de forma fraca e negativa no sistema por contribuírem com espalhamento da espécie e provocam as competições. Enquanto u_1, v_1, u_3 e v_3 atuam de forma moderada e positiva, visto que a advecção contribui para coexistência dessas espécies;
- O decaimento descrito pelos parâmetros $\mu_i, i = 1, 2, 3$, atuam de forma fraca e positiva no sistema ecológico.

De modo geral, verificou-se que, entre os parâmetros analisados para as dinâmicas envolvendo as três espécies P_1 , P_2 e P_3 , o modelo apresentou maior sensibilidade aos parâmetros de difusão, α_2 , de competições, γ_3 e σ_3 , e de crescimento λ_2 . Confalonieri et al. (2006) afirmam que os parâmetros que compõem modelos complexos de crescimento de plantas estão organizados de forma hierárquica, ou seja, existe certa dominância de uns parâmetros em relação a outros.

Dessa forma constata-se, neste estudo, que os parâmetros ligados diretamente à difusão e à competição atuam no topo da hierarquia para a definição de uma nova paisagem ecológica.

7 Resultados numéricos dos modelos difusivo-advectivo

7.1 Resultados referentes ao modelo (3.1)

Nesta Seção, encontram-se os resultados numéricos das simulações computacionais considerando o modelo 3.1, que descreve as dinâmicas das três espécies de vegetação, com o intuito de visualizar a recuperação da área degradada.

7.1.1 Resultados: dinâmica temporal

Apresentam-se, primeiramente, aqui os resultados das dinâmicas temporais em 3.1 das três espécies de vegetação. Nota-se que há a predominância da espécie P_2 ao longo do tempo considerado na simulação.

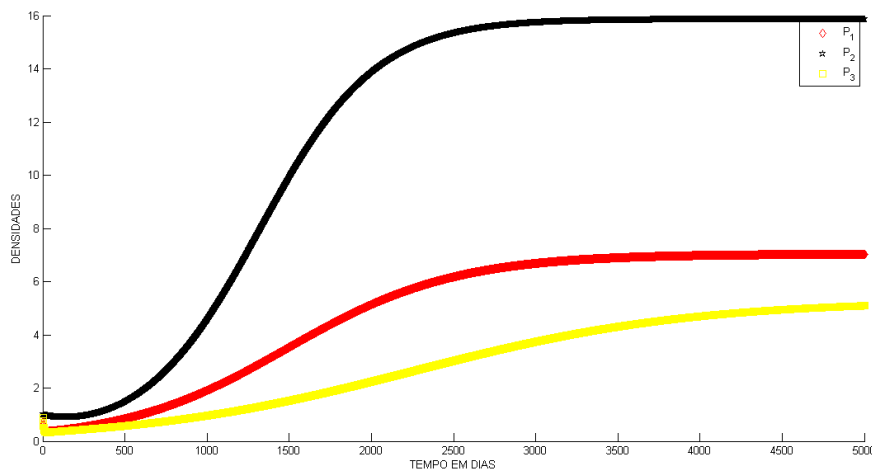


Figura 22 – Resultados numéricos computacionais das dinâmicas temporais das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo t . $T = 13$ anos.

As curvas apresentadas na Figura 22 descrevem "a partir das condições iniciais" o comportamento no tempo das três espécies de vegetação P_1 , P_2 e P_3 , como resultado das simulações numéricas.

Os resultados mostram também que, desde o início da simulação, a espécie P_2 vem se destacando, ou seja, no decorrer do tempo, essa espécie aumentou sua densidade em relação às demais, predominando na região.

Nesse cenário, é possível constatar que, ao longo do tempo, a densidade de vegetação vai aumentando, tendendo a capacidade de suporte do meio e a uma estabilidade ecológica na região antes degradada, corroborando mais uma vez com os resultados analíticos apresentados na Seção 6.1.

Percebe-se que há uma estabilidade entre as espécies e que em aproximadamente 13 anos, a área antes degradada estará recuperada, com predominância da espécie P_2 , definindo a nova paisagem ecológica no meio desmatado.

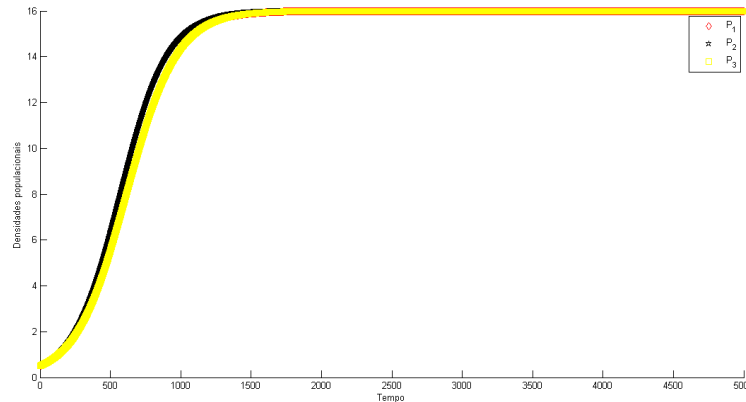


Figura 23 – Resultados numéricos computacionais das dinâmicas temporais de P_1 , P_2 e P_3 considerando o modelo 5.4 ao longo do tempo t . $T = 13$ anos.

Na Figura 22, apresentam-se as dinâmicas temporais das espécies P_1 , P_2 e P_3 em 3.1 que considera os fenômenos difusão e advecção. Enquanto a Figura 23 descreve as dinâmicas temporais de P_1 , P_2 e P_3 em 5.4, em que se omite a difusão e a advecção.

Comparando as Figura 22 e 23, observa-se claramente os efeitos da difusão e advecção, corroborando com os resultados das análises de sensibilidade apresentadas na Seção 6.1.

É necessário ressaltar que, nas simulações numéricas para obtenção das Figuras 22 e 23, considerou-se os mesmo valores para os parâmetros de crescimento, mortalidade, competições inter e intraespecíficas, capacidade de suporte e o mesmo tempo de simulação. Porém, na Figura 22, considerou-se também a difusão e a advecção.

7.1.2 Resultados: dinâmica espacial

Apresentam-se, aqui os resultados das dinâmicas espaciais em 3.1 das três espécies de vegetação. Nota-se que há a predominância da espécie P_2 em toda região considerado na simulação.

A sequência de Figuras 24, 25 e 26 descrevem a partir das condições iniciais as dinâmicas espaciais de cada espécie de vegetação considerada no modelo (3.1).

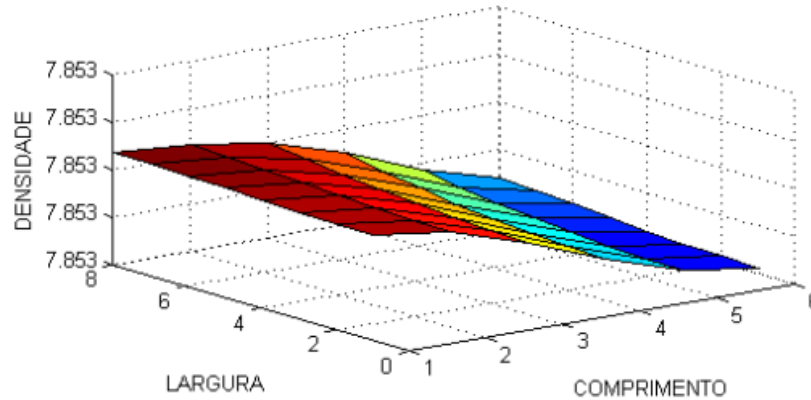


Figura 24 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_1 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$, $T = 13$ anos. Cores próximas do azul indicam baixa densidade da espécie e próximo ao vermelho, alta densidade da espécie.

A Figura 24 mostra a dinâmica espacial da espécie P_1 , considerando os efeitos de todos os fenômenos representados no modelo. Observa-se claramente seu espalhamento por todo domínio motivando a sobreposição de nicho, acarretando as competições e, conseqüentemente, impedindo o aumento de sua densidade. Em diferentes regiões do domínio, essa espécie apresentou densidades distintas, isso se deve ao efeito das competições.

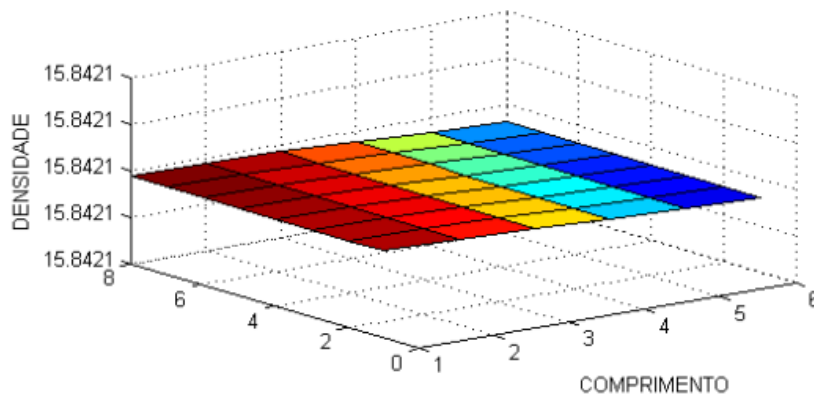


Figura 25 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_2 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$, $T = 13$ anos. Cores próximas do azul indicam baixa densidade da espécie e próximo ao vermelho, alta densidade da espécie.

Na Figura 25, encontra-se a dinâmica espacial da espécie P_2 , sob o efeito dos fenômenos descritos no modelo, que provocam espalhamento e causam a sobreposição de nicho acarretando as competições que não inibiram seu crescimento. Porém, existem diferentes regiões do domínio que essa espécie apresenta densidades distintas, devido às competições com as demais espécies.

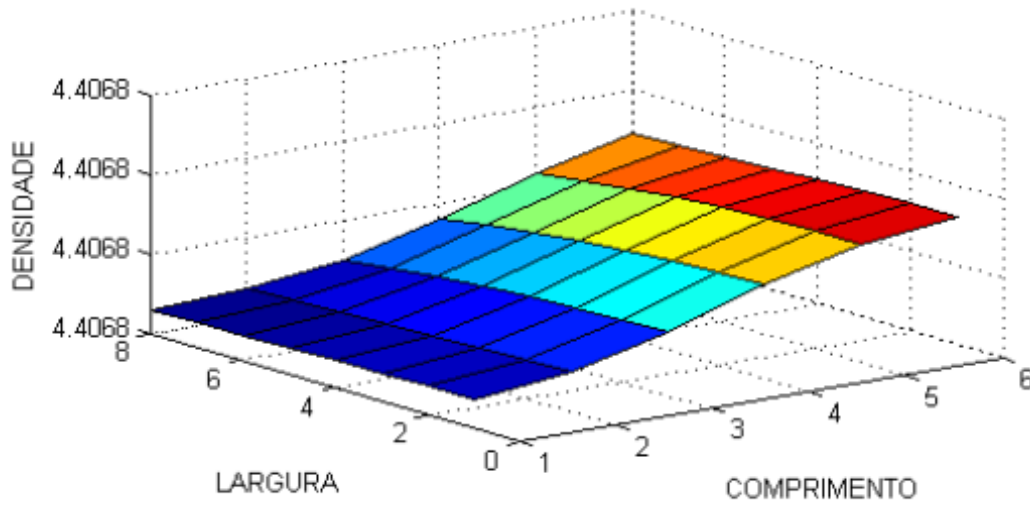


Figura 26 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_3 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$, $T = 13$ anos. Cores próximas do azul indicam baixa densidade da espécie e próximo ao vermelho, alta densidade da espécie.

A Figura 26 apresenta a dinâmica espacial da espécie P_3 , quando se considera os efeitos de todos os fenômenos contemplados no modelo. Observa-se evidências das competições influenciadas pela sobreposição de nicho, causada pelo espalhamento. Nota-se também que P_3 teve densidade mais alta na mesma região que as espécies P_1 e P_2 tiveram densidade mais baixa.

Esse resultado mostra que P_1 e P_3 tiveram suas dinâmicas bastante alteradas, no sentido que o aumento da difusão acarreta intensificação das competições, implicando na redução de suas densidades. A espécie P_2 manteve sua dinâmica inalterada.

7.2 Resultados referente ao modelo 3.2

Nessa Seção, apresentam-se os resultados numéricos das simulações computacionais do modelo 3.2 para as três espécies de vegetação, com o intuito de visualizar a recuperação da área degradada e também a influência dessa regeneração no microclima local Amazônico.

7.2.1 Resultados: dinâmica temporal

A Figura 27 seguinte descreve as dinâmicas temporais de P_1 , P_2 e P_3 e suas influências no microclima local.

Pode-se notar, nessa Figura 27, que há uma estabilidade entre as espécies em aproximadamente 13 anos. No tempo final, a simulação mostra que a área antes degradada estará recuperada com a predominância da espécie P_2 , definindo a nova paisagem ecológica no meio antes desmatado. Note a coexistência entre as três espécies.

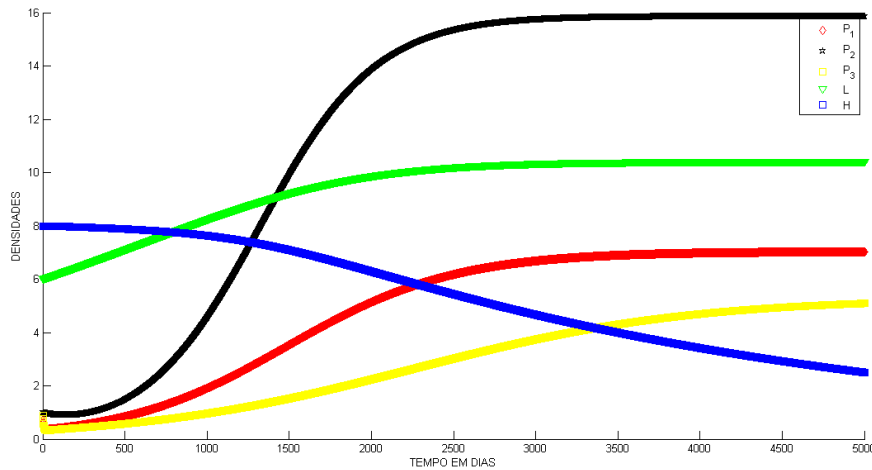


Figura 27 – Resultados numéricos computacionais das dinâmicas temporais de P_1 , P_2 , P_3 , L e H . $\Delta t = 0,01$, $T = 5000$ dias (aproximadamente 13 anos).

Os resultados mostram ainda que em áreas desmatadas, H é predominante em relação a L . Consta-se que à medida que a densidade de vegetação vai aumentando na região desmatada, ocorre uma inversão de fluxo de calor, ou seja, H , que era predominante, reduziu, e L , que era menos intenso, passou a predominar na região que antes era dominado por H . Isso é uma clara manifestação da influência da vegetação no microclima.

7.2.2 Resultados: dinâmica espacial

A sequência de Figuras 28 a 32 descrevem, a partir das condições iniciais, as dinâmicas espaciais de cada espécie de vegetação e o comportamento espacial de L e H , conforme descritos pelo modelo 3.2.

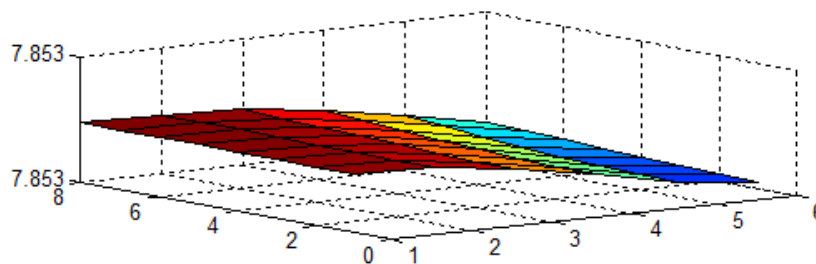


Figura 28 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de P_1 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades das espécies consideradas.

A Figura 28 descreve os efeitos dos fenômenos considerados no modelo 3.2 sobre a espécie P_1 . Pode-se observar o espalhamento natural de P_1 por todo o domínio, devido aos efeitos

da difusão e da advecção, provoca a sobreposição de nicho e acarretam as competições que inibiram o crescimento natural de espécies com baixo poder de competição. Ainda nessa Figura é possível notar uma região do domínio em que a densidade de P_1 é menor que em outra. Isso pode ser explicado pela intensificação das competições entre as três espécies.

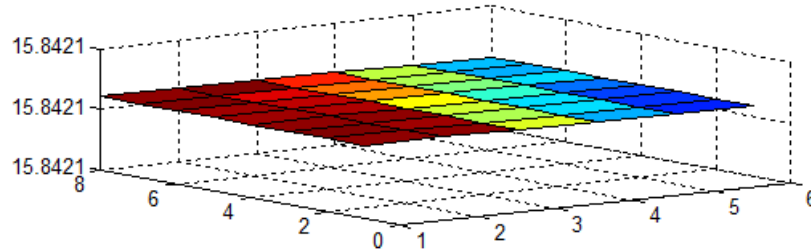


Figura 29 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de P_2 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades das espécies consideradas.

A Figura 29 mostra a dinâmica espacial da espécie P_2 . Pode-se notar que as competições não provocaram inibição de crescimento nessa espécie. Uma explicação que pode ser dada é que a espécie P_2 , na sobreposição de nicho, pode ter desenvolvido melhor estratégia de competição, dificultando acesso das demais espécies aos recursos disponíveis, inibindo o crescimento das demais espécies.

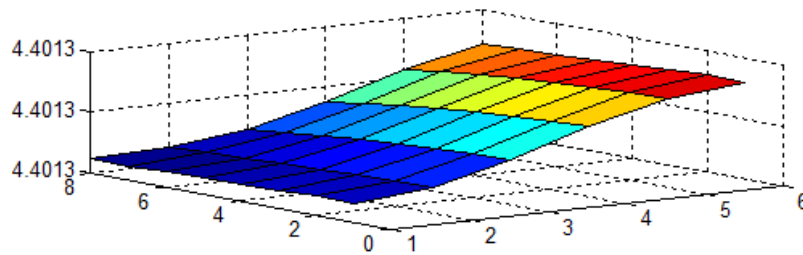


Figura 30 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de P_3 . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades das espécies consideradas.

A Figura 30 exibe a dinâmica espacial da espécie P_3 . Nota-se, nesse resultado, os efeitos mais evidentes das competições provocadas pela sobreposição de nicho (devido difusão e advecção), inibindo o crescimento dessa espécie. A baixa densidade de P_3 poderia ser explicada por ter alguma desvantagem na competição com as demais espécies, obtendo menos recursos para o seu desenvolvimento. Em regiões distintas de Ω , esta espécie teve densidades diferentes. A região de maior densidade ocorreu exatamente onde P_1 e P_2 tiveram menos densidades, devido às competições terem sido favoráveis à P_3 nessa região.

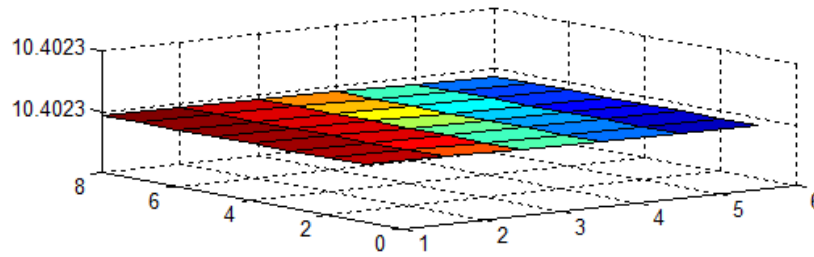


Figura 31 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de L . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades de L .

A Figura 31 descreve o comportamento do calor latente, L , que se manteve estável e teve densidade mais alta na região onde a floresta tornou-se mais densa. Na região em que a floresta apresentou densidade mais baixa, L também teve densidade mais baixa. Isso ocorreu devido à influência da vegetação.

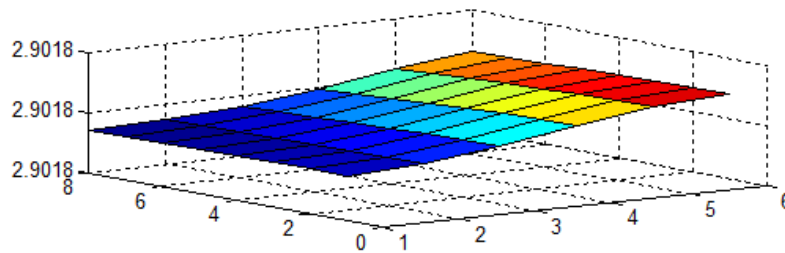


Figura 32 – Resultados numéricos computacionais da distribuição final da densidade de H . Malha computacional: $\Delta x = \Delta y = 0,0125$, $\Delta t = 0,01$ e $T = 13$ anos. Cores próximas ao azul e ao vermelho indicam, respectivamente, baixa e alta densidades de H .

A Figura 32 descreve o comportamento do calor sensível, H . Aqui é possível observar uma intensidade maior de H na parte em que as espécies P_1 e P_2 tiveram densidades mais baixas e o calor latente, L , teve menor densidade. Como antes a região era desmatada, isso contribuiu para o grande aumento da densidade de H nessa região. Essa alta densidade foi amenizada ao longo do domínio, devido à influência da vegetação, que está se recuperando, aumentando a densidade do calor latente, L , na região.

O tempo de competição pode gerar prejuízos no crescimento e no desenvolvimento das espécies e isso pode ser um fator determinante na estrutura e composição futura do ecossistema (GUSTAFSON; GIBSON; NICKRENT, 2004).

Wilson (1988) declara que competição é uma interação entre indivíduos provocada por uma exigência compartilhada para um recurso de previsão limitada, conduzindo à redução no crescimento e na sobrevivência da espécie menos adaptada, verificando se tais competições são prejudiciais ou não às espécies, destacando as principais ações mútuas (competições intra e interespecíficas) numa comunidade biológica.

Em síntese, nesse conjunto de simulações, as densidades finais encontradas para cada espécie foram: $P_1 = 7,85$, $P_2 = 15,84$, $P_3 = 4,4$, $L = 10,4$ e $H = 2,9$. Nas Figuras 28 a 32, observou-se que a espécie P_2 predominou em todo domínio Ω , definindo a nova paisagem ecológica, corroborando com os resultados das dinâmicas temporais Seção 7.2.1.

A Figura 33 exibe a região recuperada, após o replantio, com a predominância da espécie Ingá, P_2 , corroborando com os resultados numéricos das simulações computacionais aqui realizadas. Vale lembrar que essa mesma região foi anteriormente apresentada na Figura 2, da Seção 3.1.1, como a área degradada, totalmente desprovida de vegetação e em processo de replantio.



Figura 33 – Região recuperada pelas três espécies, com a predominância do Ingá (P_2).

8 Discussões e Conclusões

8.1 Discussões

A restauração ecológica é uma ciência nova que vem despertando a atenção da comunidade científica, devido à capacidade de produzir simultaneamente bens e serviços (econômicos e ecológicos), segundo [Young, Petersen e Clary \(2005\)](#) e [Rodrigues et al. \(2009\)](#), e deve ganhar mais força à medida que os recursos naturais se tornarem mais escassos:

- ecológicos: recuperação da biodiversidade, restabelecimento dos serviços florestais (estabilidade do solo, estoque de C, ciclos hidrológicos e biogeoquímicos);
- econômicos: produção de bens florestais (madeireiros e não madeireiros).

Com base nessas informações, é possível selecionar as melhores técnicas (condução da regeneração natural, semeadura direta, plantio de mudas, etc.) e métodos (espaçamento, composição e arranjo das espécies, etc.), para atender os objetivos de forma rápida com o menor custo possível ([RODRIGUES et al., 2009](#)).

Nesse sentido, a escolha das espécies passa a desempenhar um papel fundamental nos plantios de restauração florestal, segundo [Jr, Gonçalves e Feldpausch \(2006\)](#).

A seleção das plantas é uma etapa fundamental no planejamento de um plantio de restauração florestal. Aspectos silviculturais como rusticidade, rápido crescimento, alta resistência, adaptação em áreas degradadas de acordo com estudos previamente realizados, observações de campo, além da arquitetura da planta e suas utilizações comerciais, são características que devem ser consideradas para o pleno estabelecimento de uma espécie ou de um conjunto de espécies em uma área degradada. No entanto, os estudos sobre a fisiologia e o crescimento de espécies nativas das regiões tropicais merecem uma atenção maior, visto que a enorme biodiversidade de espécies e as respostas sob diferentes condições ambientais irão garantir altas taxas de sobrevivência e crescimento das espécies.

As espécies são nativas da região amazônica, sendo elas *Acacia mangium*, *Clitoria fairchildiana*, *Dipteryx odorata*, *Inga edulis*, *Cenostigma tocantinum* e *Senna reticulata*.

A área em questão tem aproximadamente 3 hectares e encontrava-se totalmente desprovida de vegetação. A floresta presente no entorno encontrava-se relativamente bem preservada. O plantio de restauração florestal realizado na região degradada da Usina Hidrelétrica Balbina (PRAD Balbina/UHE Balbina) foi instalado em toda área degradada. Ao todo foram plantadas 432 mudas de 6 espécies. O experimento é em blocos de tamanhos distintos em 12 tratamentos, que são combinações das 6 espécies.

Com isso espera-se entender mecanismos adaptativos e evolutivos das espécies estudadas e seu desenvolvimento em ambientes degradados.

Nesse trabalho, optou-se em escolher 1 entre os 12 tratamentos para esse estudo de caso. O tratamento escolhido foi o de número 3, sua escolha se deve aos dados disponíveis e por ter as espécies mais usadas em restaurações florestais na Amazônia Central, sendo elas Cumaru, Ingá e Pau-Prezinho.

Por meio da análise dos parâmetros, foi possível compreender os mecanismos que definem o estabelecimento dos indivíduos e das espécies em competições nos meios degradados.

Os resultados numéricos obtidos pelas simulações computacionais dos modelos temporal e difusivo-advectivo possibilitaram apontar a espécie que desenvolveu a melhor estratégia de captação dos recursos naturais. Notou-se, pelos resultados, que essa espécie foi a que teve o maior aumento de sua densidade, comparando-se com as demais consideradas na investigação, predominando na região.

Os importantes fenômenos de difusão, advecção e a dinâmica de competições, incorporados na modelagem, foram cruciais para elucidar de forma qualitativa e quantitativa a dinâmica de formação da nova paisagem ecológica local.

Uma comparação das densidades evidenciou o efeito das competições entre as espécies no processo de recuperação da área desmatada, ao longo do tempo, ou seja, aquela que desenvolveu melhor estratégia de captação de recursos, impediu que as demais tivessem acesso ao mesmos recursos, inibindo o crescimento das demais na região.

Em particular, foi revelado que o fenômeno advectivo garantiu a coexistência entre as três espécies e o difusivo causou a sobreposição de nicho que acarretam as competições que por sua vez definem a paisagem ecológica.

Após a investigação computacional das variações das densidades no tempo e no espaço contínuos, foi possível obter um cenário para a distribuição final da cobertura vegetal do meio.

O modelo 3.1 proposto neste trabalho possibilitou estimar o tempo de recuperação e a futura paisagem ecológica. O modelo 3.2 mostrou-se importante na tarefa de revelar a influência da vegetação no microclima local, bem como no entendimento da formação da nova paisagem em áreas degradadas.

Os principais motivadores deste estudo são compreender como ocorrem e quais fatores

contribuem para o processo de sucessão, composição e estruturação de uma nova paisagem ecológica em áreas degradadas, propondo cenários possíveis e prováveis na sucessão ecológica. Espera-se que os modelos desenvolvidos neste trabalho possam ser instrumentos matemáticos relevantes que contribuam significativamente para planos e execução de ações de preservação da biodiversidade, fortalecendo o equilíbrio ecológico entre as espécies a ampliação da diversidade, de modo que se disponha de ferramentas mais acessíveis a profissionais e pesquisadores ligados aos estudos de ecologia matemática e meio ambiente, bem como aos responsáveis pelas adoções de medidas de emergências e contingências de áreas destruídas pelas ações antrópicas.

Apresentam-se, a seguir, as principais conclusões acerca dessa investigação computacional da modelagem matemática da dinâmica de recuperação de áreas degradadas, bem como as perspectivas que se abriram a partir do desenvolvimento deste trabalho.

8.2 Conclusões

Há evidências de resultados extremamente prejudiciais à vida e à biodiversidade a curto, médio e longo prazos, decorrentes de uma larga gama de efeitos de impactos ambientais. Dentre eles, o desmatamento, a redução da precipitação e o aumento da temperatura afetam de modo irreversível o delicado e instável equilíbrio do convívio de espécies que se inter-relacionam ambientalmente.

Neste trabalho, dois modelos matemáticos não-lineares descritos por equações diferenciais parciais foram desenvolvidos com os principais objetivos de descrever qualitativa e quantitativamente a recuperação da área desmatada, considerando competições entre três espécies de vegetação (Cumarú, Ingá e Pau-Preto) elucidando a futura sucessão ecológica e sua influência no microclima local.

Os modelos foram analisados matematicamente e resolvidos numericamente. A partir dos resultados obtidos das simulações numéricas computacionais, conclui-se o seguinte:

- A análise matemática do modelo 3.1, desprezando os fenômenos difusão e advecção, possibilitou a obtenção do ponto de equilíbrio para coexistência das três espécies de vegetação, vindo a ser, em seguida, uma informação importante nas investigações numéricas dos modelos espaço-temporais;
- O aumento da difusão provoca forte influência na ocorrência das competições que, por sua vez definiu a nova paisagem ecológica;
- O fenômeno advectivo é um fator determinante na coexistências de algumas espécies e na formação de floresta mista;
- A formação da nova paisagem ecológica somente pode ser visualizada no domínio quando se considera os efeitos difusivo e advectivo na modelagem;

- A análise de sensibilidade do modelo 3.1 permitiu mostrar a correlação dos parâmetros com os resultados numéricos das simulações e como afetam a dinâmica ecológica;
- Neste estudo, a nova paisagem ecológica foi definida pela espécie Ingá, que desenvolveu melhor estratégia de competição na captação dos recursos naturais, do que as espécies Cumaru e Pau-Pretinho;
- A cobertura vegetal em áreas desprovidas de vegetação pode provocar mudanças no fluxo de energia, ocasionando redução da temperatura e aumento na precipitação, reveladas devido considerar os fenômenos calor latente e calor sensível na modelagem matemática proposta.

A mudança do solo desprovido de vegetação para outro com a cobertura vegetal, devido ao reflorestamento, afeta diretamente os fluxos de calor latente e calor sensível. Além disso, como o aumento de calor latente implica no aumento da precipitação e a redução de calor sensível acarreta em diminuição da temperatura, se torna evidente que as mudanças no uso da terra interferem diretamente no comportamento padrão do microclima local e que as florestas tropicais são fundamentais à manutenção da estabilidade climática local.

8.3 Perspectivas

- Estudar e analisar os efeitos da recuperação da vegetação sobre o convívio de espécies de animais no ecossistema, com o objetivo de avaliar a influência da vegetação no convívio das espécies de animais;
- Inserir, na modelagem, espécies de animais capazes de aumentar as chances de sobrevivência de vegetações dependente da advecção, com intuito de verificar o quanto as espécies de animais contribui na formação de florestas mistas;
- Estender o modelo de difusão-advecção aqui proposto para domínios computacionais com geometrias mais gerais, a fim de tornar os resultados mais realísticos;
- Adaptar os modelos proposto neste estudo a fim de estimar emissão ou absorção de CO_2 , com o propósito de verificar a influência da vegetação no efeito estufa.

Referências

- ANDRADE, N. L. R. *Fluxo de calor latente em uma floresta tropical da Amazônia: análise de séries temporais com produto MOD16*. 2013. 168 f. Tese (Doutorado) — Instituto de Física , 2013. 17
- ASHLEY, M. K.; GRANT, M.; GRABOV, A. Plant responses to potassium deficiencies: a role for potassium transport proteins. *Journal of experimental botany*, Oxford University Press, v. 57, n. 2, p. 425–436, 2006. 14
- AZEVEDO, F. S. Sistemas ecológicos modelados por equações de reação-difusão. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013. 8
- BASSANEZI, R. C. Equações diferenciais ordinárias-um curso introdutório. *BC&T-UFABC Textos Didáticos*, 2011. 40
- BATSCHLET, E. *Introdução à matemática para biocientistas*. [S.l.]: Interciência; São Paulo: EDUSP, 1978. 1, 7
- BESSA, G. R. Teoria de estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011. 40
- CAMELO, M. C. S. et al. Análise de sensibilidade aplicada a um reator de redução catalítica seletiva (sensitivity analysis applied for a reactor of selective catalytic reduction). *Engvista*, v. 19, n. 1, p. 166–184, 2017. 43
- CAMPOS, G. et al. Modelos pioneiros com dinâmica populacional: uma breve análise. Florianópolis, SC, 2019. 1
- CARNAHAN B.; LUTHER, H.; WILKES, J. *Applied Numerical Methods*. [S.l.]: New York: John Wiley, 1969. 19
- CONFALONIERI, R. et al. Exploratory sensitivity analysis of cropsyst, warm and wofost: a case-study with rice biomass simulations. 2006. 54
- CUNHA, M. C. C. *Métodos numéricos*. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2003. 19
- DIAS, P. L. S.; BONATTI, J. P.; KOUSKY, V. E. Diurnally forced tropical tropospheric circulation over south america. *Monthly Weather Review*, v. 115, n. 8, p. 1465–1478, 1987. 5
- DOUGLAS JR, J.; DUPONT, T.; EWING, R. E. Incomplete iteration for time-stepping a galerkin method for a quasilinear parabolic problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 16, n. 3, p. 503–522, 1979. 33
- FERRARO, J. L. S. Análise de conteúdo sobre o conceito de nicho ecológico: o que dizem os livros didáticos? *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 2017. 6
- FIGUEROA, S. N.; NOBRE, C. A. Precipitation distribution over central and western tropical south america. *Climanálise*, v. 5, n. 6, p. 36–45, 1990. 5
- FISCH, G.; MARENGO, J. A.; NOBRE, C. A. Uma revisão geral sobre o clima da amazônia. *Acta amazônica*, SciELO Brasil, v. 28, n. 2, p. 101–101, 1998. 5

- GARCIA, A. et al. A mathematical approach to simulate spatio-temporal patterns of an insect-pest, the corn rootworm *diabrotica speciosa* (coleoptera: Chrysomelidae) in intercropping systems. *Landscape ecology*, Springer, v. 29, n. 9, p. 1531–1540, 2014. [43](#)
- GOTELLI, N. J.; GRAVES, G. R. *Null models in ecology*. [S.l.: s.n.], 1996. [7](#), [8](#), [47](#), [48](#), [79](#)
- GUSTAFSON, D.; GIBSON, D.; NICKRENT, D. Competitive relationships of andropogon gerardii (big bluestem) from remnant and restored native populations and select cultivated varieties. *Functional Ecology*, Wiley Online Library, v. 18, n. 3, p. 451–457, 2004. [61](#)
- HOLMES, E. E. et al. Partial differential equations in ecology: spatial interactions and population dynamics. *Ecology*, Wiley Online Library, v. 75, n. 1, p. 17–29, 1994. [8](#)
- IKEDA, T.; MIMURA, M. An interfacial approach to regional segregation of two competing species mediated by a predator. *Journal of Mathematical Biology*, Springer, v. 31, n. 3, p. 215–240, 1993. [8](#)
- JAQUETTI, R. K. et al. Ecophysiology of fabaceae tree species during forest restoration in the balbina hydroelectric dam in Amazonas state. Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia, 2018. [9](#), [10](#), [14](#), [15](#)
- JR, U. M. dos S.; GONÇALVES, J. F. de C.; FELDPAUSCH, T. R. Growth, leaf nutrient concentration and photosynthetic nutrient use efficiency in tropical tree species planted in degraded areas in central amazonia. *Forest ecology and management*, Elsevier, v. 226, n. 1-3, p. 299–309, 2006. [63](#)
- KÖPPEN, W. Climatologia. México. *Fundo de Cultura Econômica*, 1948. [9](#)
- LEAN, J. et al. The simulated impact of amazonian deforestation on climate using measured abracos vegetation characteristics. *Amazonian deforestation and climate*, Wiley Chichester, v. 1, 1996. [5](#), [6](#), [17](#)
- LEVEQUE, R. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. [20](#), [35](#)
- LEVIN, S. A. Population dynamic models in heterogeneous environments. *Annual review of ecology and systematics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 7, n. 1, p. 287–310, 1976. [8](#)
- LEVINS, R. *Evolution in changing environments: some theoretical explorations*. [S.l.]: Princeton University Press, 1968. [7](#)
- LYRA, R. et al. Efeitos do desmatamento sobre a termodinâmica da baixa atmosfera. In: *Anais do VIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 1, p. 81–84. [1](#), [2](#)
- MACARTHUR, R.; LEVINS, R. The limiting similarity, convergence, and divergence of coexisting species. *The American Naturalist*, Science Press, v. 101, n. 921, p. 377–385, 1967. [7](#)
- MALHI, Y. The carbon balance of tropical forest regions, 1990–2005. *Current Opinion in Environmental Sustainability*, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 237–244, 2010. [2](#)
- MALTHUS, T. *O princípio da população-última versão (1824)*. [S.l.: s.n.], 1824. [1](#)

- MANZI, A. Introdução de um esquema de transferência solo-vegetação-atmosfera em um modelo de circulação geral e aplicação à simulação de desmatamento na amazônia. 1993. 5, 6
- MARCHUK, G. I. *Mathematical models in environmental problems*. [S.l.]: North Holland, 1986. v. 16. 11, 15
- MARINO, S. et al. A methodology for performing global uncertainty and sensitivity analysis in systems biology. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 254, n. 1, p. 178–196, 2008. 40
- MARQUES, J.; SALATI, E.; SANTOS, J. M. Cálculo da evapotranspiração real na bacia amazônica através do método aerológico. *Acta Amazonica*, SciELO Brasil, v. 10, p. 357–361, 1980. 5
- MCMURTRIE, R.; WOLF, L. A model of competition between trees and grass for radiation, water and nutrients. *Annals of Botany*, Oxford University Press, v. 52, n. 4, p. 449–458, 1983. 8
- MEYER, J. *Modelagem e simulacao numérica do transiente térmico em meios compostos*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, 1988. 33
- MOLION, L. *Amazonia rainfall and its variability. Hydrology and water management in the humid tropics. International Hydrology Series*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993. 5
- NASCIMENTO, R. G. M. et al. Modelagem da sobrevivência, mortalidade e recrutamento de uma floresta na amazônia central. v. 41, p. 319–330, *Scientia Forestalis (ipef)*, 2013. 8
- NEPSTAD, D. C. et al. The role of deep roots in the hydrological and carbon cycles of amazonian forests and pastures. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 372, n. 6507, p. 666–669, 1994. 1
- NETO, A. C. A. Estrutura e evolução de frentes frias intensas na região amazônica brasileira. Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia-INPA, 2013. 4
- NOBRE, C.; SHUKLA, J.; SELLERS, P. Impactos climáticos do desmatamento da amazônia. *Climanálise*, v. 4, p. 44–53, 1989. 5, 6, 17
- NOBRE, C. A. et al. Características do clima amazônico: aspectos principais. *Amaz. Glob. Chang*, p. 149–162, 2009. 1, 4
- NOBRE, C. A.; SELLERS, P. J.; SHUKLA, J. Amazonian deforestation and regional climate change. *Journal of climate*, v. 4, n. 10, p. 957–988, 1991. 5
- NOVA, N. V.; SALATI, E.; MATSUI, E. Estimativa da evapotranspiração na bacia amazônica. *Acta amazônica*, SciELO Brasil, v. 6, p. 215–228, 1976. 5
- OKUBO, A. *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*. [S.l.]: Springer, 1980. v. 1. 11, 15, 17
- OLTMAN, R. E. *Reconnaissance investigations of the discharge and water quality of the Amazon River*. [S.l.]: US Government Printing Office, 1968. v. 552. 5
- POLETTI, E. C. C. Dispersão de poluente em sistema de reservatório: modelagem matemática e simulação computacional utilizando-se aproximação numerica e conjuntos fuzzy. 2009. Tese de Doutorado IMECC-UNICAMP. 8

- RESCHKE, G. A. et al. Influência do desmatamento no balanço de radiação e nos fluxos de calor sensível e calor latente. Universidade Federal de Viçosa, 1996. 17
- RODRIGUES, R. R. et al. On the restoration of high diversity forests: 30 years of experience in the brazilian atlantic forest. *Biological conservation*, Elsevier, v. 142, n. 6, p. 1242–1251, 2009. 63
- ROUHI, V. et al. Photosynthetic gas exchange characteristics in three different almond species during drought stress and subsequent recovery. *Environmental and Experimental Botany*, Elsevier, v. 59, n. 2, p. 117–129, 2007. 14
- RUMSEY, D. J. Statistics for dummies. 2011. xii, 44
- SALATI, E. et al. Recycling of water in the amazon basin: an isotopic study. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 15, n. 5, p. 1250–1258, 1979. 5
- SALATI, E.; MARQUES, J. Climatology of the amazon region. In: *The Amazon*. [S.l.]: Springer, 1984. p. 85–126. 4
- SALTELLI, A. et al. *Sensitivity analysis in practice: a guide to assessing scientific models*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2004. v. 1. 43
- SANTOS, C. F. L. et al. Modelagem matemática do aumento de densidade de vegetação na amazônia e dinâmica populacional com competição intra e interespecífica. [sn], 2013. 8, 18, 19, 20, 23
- SCARPARE, F. V. Simulação do crescimento da cana-de-açúcar pelo modelo agrohidrológico swap/wofost. *Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”*. Piracicaba, Brasil, 2011. 43
- SCHACHTMAN, D. P.; REID, R. J.; AYLING, S. M. Phosphorus uptake by plants: from soil to cell. *Plant physiology*, Am Soc Plant Biol, v. 116, n. 2, p. 447–453, 1998. 14
- SHUKLA, J. et al. Degradation and subsequent regeneration of a forestry resource: a mathematical model. *Ecological Modelling*, Elsevier, v. 44, n. 3-4, p. 219–229, 1989. 8
- SILVA, A. B. Influência dos fluxos de calor em superfície no início e no final da estação chuvosa sobre a região centro-oeste brasileiro. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2012. 2, 8
- SIMON, J.; ALMEIDA, R. Revisão sobre saldo de radiação em plantas de cobertura contínua e descontínua e perspectivas para sistemas mistos. *Embrapa Pesca e Aquicultura-Documents (INFOTECA-E)*, Palmas: Embrapa Pesca e Aquicultura, 2014. 14
- SKELLAM, J. C. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika*, 1951. 8, 11, 15
- SOSSAE, R. C. et al. A presença evolutiva de um material impactante e seu efeito no transiente populacional de espécies interativas: modelagem e aproximação. [sn], 2003. 1, 8, 18, 33
- SOUZA, L. R. Modelos matemáticos aplicados a restauração ecológica: caracterização, avaliação e valoração dos serviços ecossistêmicos promovidos pela avifauna. Universidade Federal do Paraná, 2018. 1, 8
- SOUZA, S. S. et al. A substituição da floresta amazônica por pastagem e sua repercussão ao nível da termodinâmica da camada limite atmosférica. Universidade Federal de Campina Grande, 1997. 2

- STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: CRC press, 2018. 40
- STUMP, S. M. Succession, invasion and coexistence: Pdes in ecology. 2006. 8
- TAIZ, L.; ZEIGER, E. *Fisiologia vegetal*. porto alegre: Artmed. 2013. 6
- TOTAFURNO, J.; TRAINOR, L. et al. Bifurcation analysis of a nonlinear field model of regeneration. *Journal of Mathematical Biology*, Springer, v. 30, n. 4, p. 355–377, 1992. 8
- VELOSO, H. P.; RANGEL-FILHO, A. L. R.; LIMA, J. C. A. *Classificação da vegetação brasileira, adaptada a um sistema universal*. [S.l.]: IBGE, 1991. 9
- VIEIRA, J. R. Modelação matemática da circulação e transporte hidrodinâmicos em regiões costeiras. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, p. 119–134, 1990. 37
- VIEIRA, S. *Introdução à bioestatística recurso eletrônico. 4o edição*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Elsevier, 2011. 44
- WILSON, J. B. Shoot competition and root competition. *Journal of applied ecology*, JSTOR, p. 279–296, 1988. 61
- YOUNG, T. P.; PETERSEN, D.; CLARY, J. The ecology of restoration: historical links, emerging issues and unexplored realms. *Ecology letters*, Wiley Online Library, v. 8, n. 6, p. 662–673, 2005. 63

Apêndices

A Pontos de equilíbrio

Com objetivo de analisar a convergência das soluções numéricas de P_1 , P_2 e P_3 considerou-se as três espécies com a mesma condição inicial para as simulações. Os resultados das simulações podem ser visto na Figura 34.

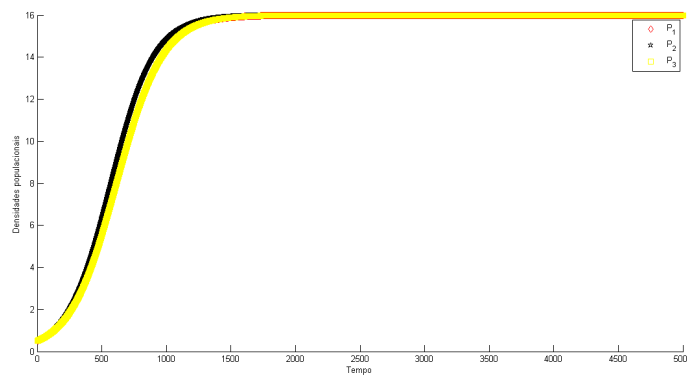


Figura 34 – Dinâmicas populacionais das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo considerando as condição inicial $C_1 = 0,5$. $T = 5000$.

Observa-se nesta Figura (34) que as dinâmicas temporais de P_1 , P_2 e P_3 convergiram respectivamente para as coordenadas $P_1^* = 15,80$, $P_2^* = 15,86$ e $P_3^* = 15,84$.

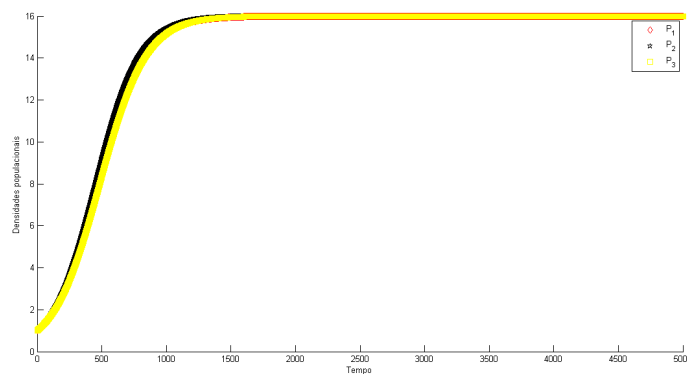


Figura 35 – Dinâmicas populacionais das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo considerando as condição inicial $C_2 = 1$. $T = 5000$.

A Figura (35) apresenta os resultados para P_1 , P_2 e P_3 em que se pode notar a convergência para as respectivas coordenadas $P_1^* = 15,80$, $P_2^* = 15,86$ e $P_3^* = 15,84$.

Na Figura (36) é possível verificar a convergência das soluções de P_1 , P_2 e P_3 para as respectivas coordenadas $P_1^* = 15,80$, $P_2^* = 15,86$ e $P_3^* = 15,84$.

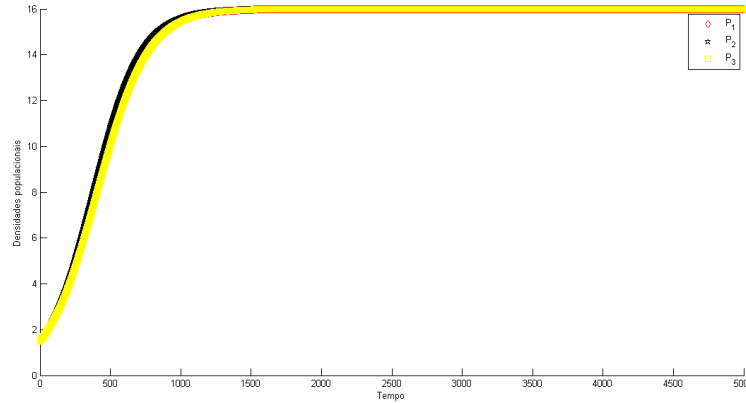


Figura 36 – Dinâmicas populacionais das espécies P_1 , P_2 e P_3 ao longo do tempo considerando as condição inicial $C_3 = 1,5$. $T = 5000$.

Com estes resultados, considerando-se os parâmetros de competições intra e interespecíficas e capacidade de suporte K no modelo temporal, concluiu-se que as espécies P_1 , P_2 e P_3 convergiram, respectivamente, para as coordenadas do ponto de equilíbrio de coexistência das espécies, $M_8 = (15,80, 15,86, 15,84)$.

Nota-se ainda nas Figuras (34), (35) e (36), a similaridade entre os resultados, motivados pelos efeitos dos termos logísticos nas equações do modelo, bem como na convergência para coordenadas próximas numericamente, neste caso, devido, uma mesma capacidade de suporte K ter sido estabelecida para as três espécies.

Observa-se ainda a similaridade entre os resultados numéricos aqui apresentados e os exibidos na Seção 5.2. Assim, observou-se que as soluções numéricas não dependem das condições iniciais tomadas e, dessa forma, foi possível mostrar numericamente a convergência e estabilidade do ponto de equilíbrio de coexistência das espécies no modelo.

B Análise de sensibilidade

B.1 Análise de sensibilidade em relação aos parâmetros difusão e advecção

A sequência de Figuras 37, 38 e 39 descrevem as dinâmicas espaciais de P_1 , P_2 e P_3 , respectivamente, sem considerar no modelo (3.1) os parâmetros de difusão e advecção.

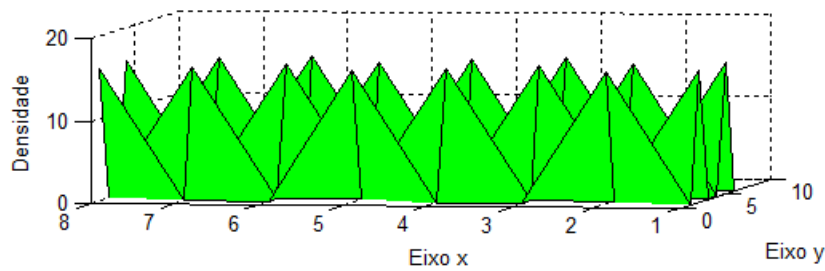


Figura 37 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_1 , na ausência de difusão e advecção no modelo (3.1).

A Figura 37, exibe a dinâmica espacial da espécie P_1 , na ausência dos fenômenos difusivo e advectivo. Observa-se que não houve nenhuma interferência em sua dinâmica, mesmo com a presença das demais.

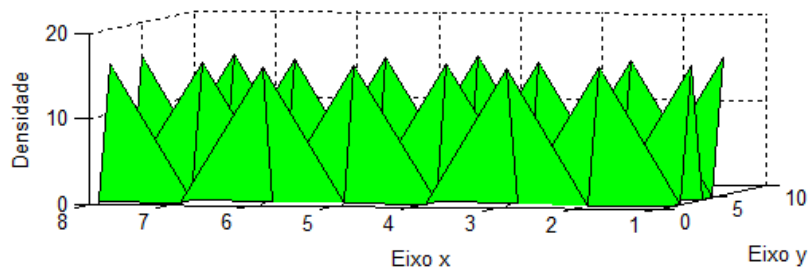


Figura 38 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_2 , na ausência de difusão e advecção no modelo (3.1).

Na Figura 38, observa-se a dinâmica espacial da espécie P_2 , sem considerar os fenômenos difusivo e advectivo. Nota-se que P_2 manteve sua dinâmica, sem sentir efeitos da presença das outras espécies.

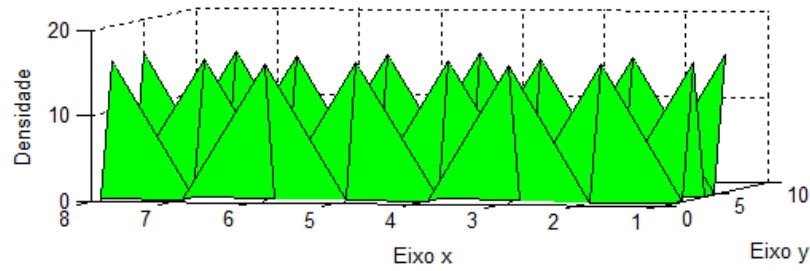


Figura 39 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_3 , na ausência de difusão e advecção no modelo (3.1).

A Figura 39, apresenta a dinâmica espacial da espécie P_3 , que se desenvolveu no ambiente sem interferência das outras espécies na ausência da difusão e advecção.

Estes resultados mostram que cada espécie tem sua dinâmica inalterada, nenhuma espécie interfere na dinâmica das demais, não há nenhuma evidência de competição, pois não há espalhamento, então não há sobreposição de nicho. Nessa condição as três espécies sobrevivem neste ambiente. Neste cenário a existência de cada espécie fica em função de λ e μ parâmetro de crescimento e mortalidade, respectivamente.

B.2 Análise de sensibilidade em relação ao parâmetro advecção

As Figuras 40, 41 e 42 apresentam respectivamente, as dinâmicas espaciais de P_1 , P_2 e P_3 , considerando no modelo (3.1) o parâmetro advectivo.

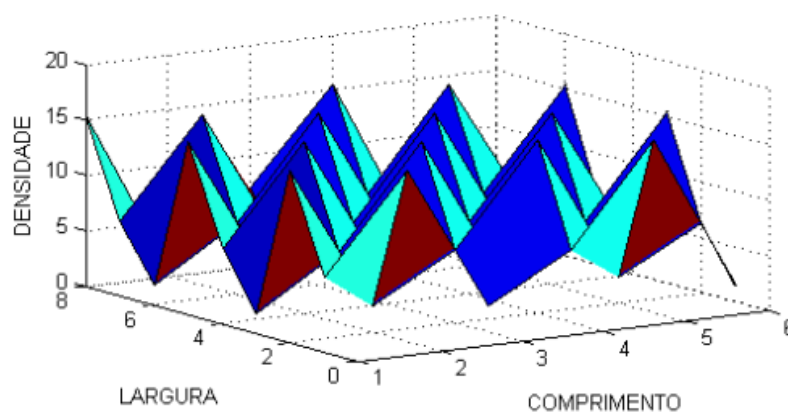


Figura 40 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_1 , na ausência da difusão no modelo (3.1).

A Figura 40, apresenta a dinâmica espacial de P_1 . Nota-se que ocorreu espalhamento, mas que P_1 não apresentou efeito das competições, visto que a densidade da espécie não foi alterada;

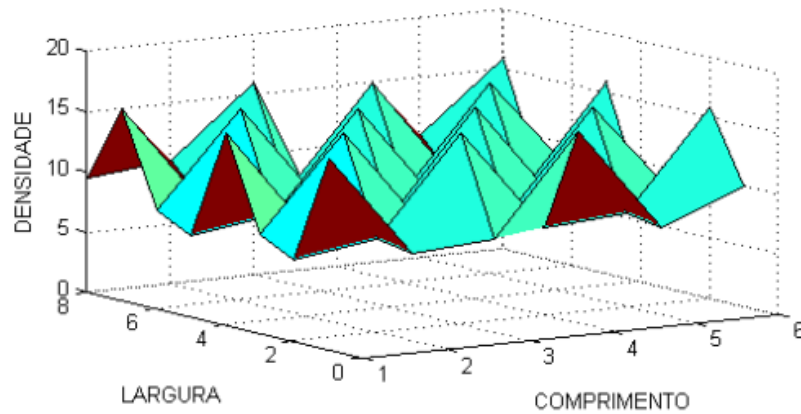


Figura 41 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_2 , na ausência da difusão no modelo (3.1).

Na Figura 41, observa-se a dinâmica espacial de P_2 . Nota-se pequeno espalhamento da espécie por toda região do domínio, mas não comprometeu a densidade de P_2 .

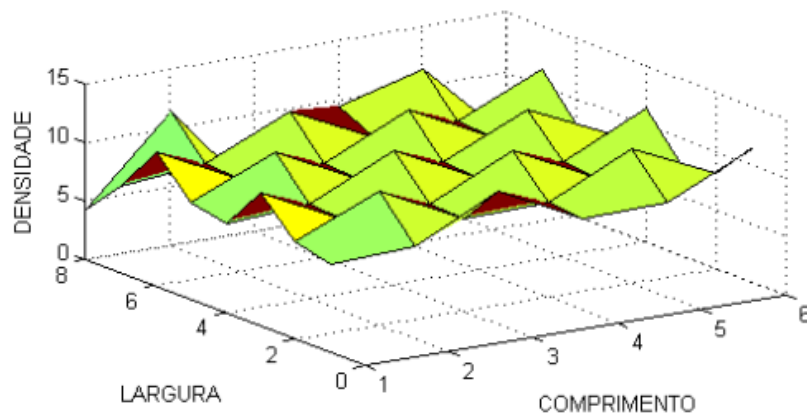


Figura 42 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_3 , na ausência da difusão no modelo (3.1).

A Figura 42, exibe a dinâmica espacial de P_3 . Na presença da advecção, verifica-se que ocorreu espalhamento da espécie por todo domínio. Nota-se alteração em sua densidade que pode ser indícios das competições causadas pela sobreposição de nicho, provocada pelo espalhamento.

Este resultado mostra que houve espalhamento das três espécies pelo espaço disponível, indicando que há indícios de sobreposição de nicho que implica em competição. Neste cenário, observa-se que é possível a coexistência das três espécies.

B.3 Análise de sensibilidade em relação ao parâmetro difusão

A sequência de Figuras 43, 44 e 45 descrevem as dinâmicas espaciais de cada espécie de vegetação, sem considerar no modelo (3.1) o fenômeno advectivo. Cores próximas do azul

indicam baixa densidade da espécie e próximo ao vermelho, alta densidade da espécie.

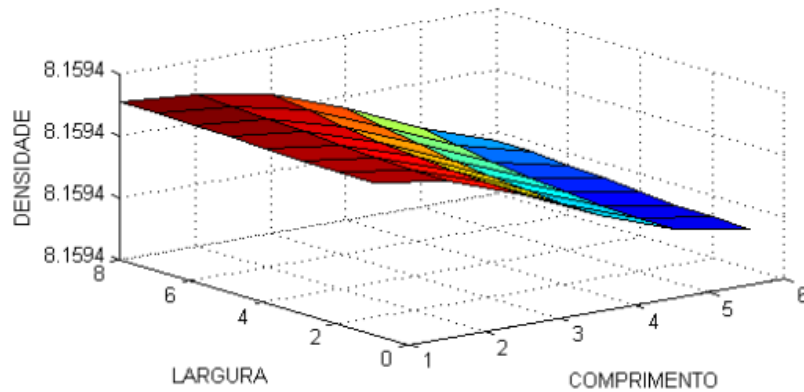


Figura 43 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_1 , na ausência da advecção no modelo (3.1).

A Figura 43, mostra a dinâmica espacial de P_1 , desprezando no modelo o efeito da advecção. Nota-se que houve espalhamento da espécie por todo o domínio, motivando a sobreposição de nicho que acarretaram as competições e conseqüentemente inibiu o aumento de sua densidade. Em regiões diferentes do domínio P_1 apresentou densidade distintas, isso pode ser efeito das competições com P_2 e P_3 . O efeito difusivo em P_1 pode ser verificado comparando a Figura 43 com as Figuras 37 e 40.

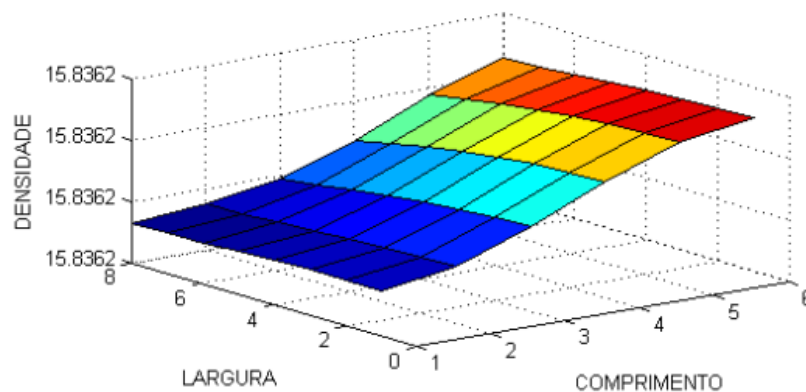


Figura 44 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_2 , na ausência da advecção no modelo (3.1).

Na Figura 44, apresenta-se a dinâmica espacial de P_2 , sem considerar no modelo o efeito advectivo. Observa-se que houve espalhamento de P_2 por todo o domínio, causando a sobreposição de nicho que provocaram fortes competições, mas não inibiram o aumento de densidade da espécie. Porém existem diferentes regiões do domínio que P_2 apresentou densidades distintas, isso pode ser evidências das competições com as demais espécies que em áreas com cor azul foram favoráveis as outras espécies. O efeito difusivo em P_2 pode ser verificado comparando a Figura 44 com as Figuras 38 e 41.

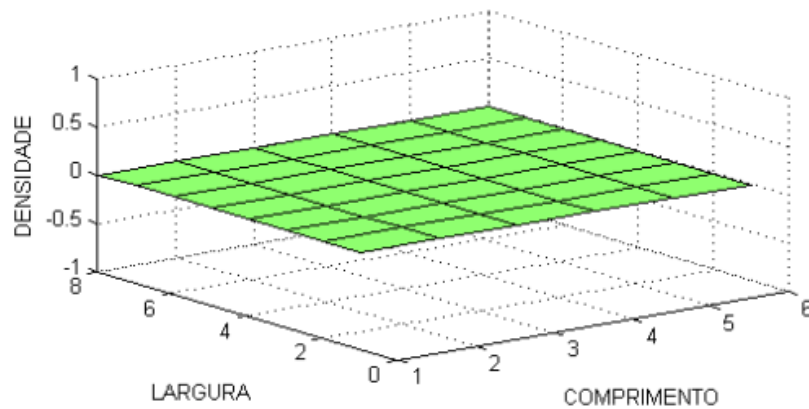


Figura 45 – Resultados numéricos computacionais da dinâmica espacial de P_3 , na ausência da advecção no modelo (3.1).

A Figura 45, exibe a dinâmica espacial de P_3 , desconsiderando no modelo o fenômeno de advecção. Verifica-se que P_3 foi à extinção. Isso pode ser explicado pelas fortes competições com as demais espécies pelos recursos naturais disponíveis.

Este resultado mostra que as três espécies tiveram sua dinâmica bastante alteradas, com diferentes densidades em regiões distintas do domínio, com a espécie P_3 indo à extinção, isso porque espécies com o mesmo nicho não podem sobreviver no mesmo habitat ao mesmo tempo, [Gotelli e Graves \(1996\)](#). O efeito difusivo em P_3 pode ser verificado comparando a Figura 45 com as Figuras 39 e 42.

Diante disso pode-se constatar que o fenômeno de advecção garante a sobrevivência de algumas espécies com baixo poder de competição e contribui na formação de florestas mistas.

C Código computacional para descrever a recuperação de áreas degradadas

```
% EDP da Competicao
%
clear all
%
% entrada de parametros do problema
alfa_1=0.0; alfa_2=0.0; alfa_3=0.0;
u_1=0.0; u_2=0.0; u_3=0.0; v_1=0.0; v_2=0.0; v_3=0.0;
mu_1=0.00; mu_2=0.00; mu_3=0.00;
lambda_1=0.0; lambda_2=0.0; lambda_3=0.0;
gama_1=0.0; gama_2=0.0; gama_3=0.00;
sigma_1=0.0 ; sigma_2=0.0; sigma_3=0.00; K=0.0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% parametros do dominio
l=yy; h=xx; tf=zz;
%
% parametros da discretizacao
nx=20; dx_1=l/nx; ny=16; dy_1=h/ny; dx_2=l/nx; dy_2=h/ny; dx_3=l/nx; dy_3=h/ny;
nnx=nx+1; nny=ny+1; nn=nnx*nny;
npt=8; dt=tf/npt;
%
% calculos auxiliares
ddx_1=dx_1*dx_1; ddy_1=dy_1*dy_1;
dd2x_1=2*ddx_1; dd2y_1= 2*ddy_1;
ddx_2=dx_2*dx_2; ddy_2=dy_2*dy_2;
dd2x_2=2*ddx_2; dd2y_2= 2*ddy_2;
ddx_3=dx_3*dx_3; ddy_3=dy_3*dy_3;
dd2x_3=2*ddx_3; dd2y_3=2*ddy_3;
atx_1=alfa_1*dt/dd2x_1; aty_1=alfa_1*dt/dd2y_1;
```

```

atx_2=alfa_2*dt/dd2x_2; aty_2=alfa_2*dt/dd2y_2;
atx_3=alfa_3*dt/dd2x_3; aty_3=alfa_3*dt/dd2y_3;
d4x_1=4*dx_1; d4y_1= 4*dy_1;
d4x_2=4*dx_2; d4y_2= 4*dy_2;
d4x_3=4*dx_3; d4y_3= 4*dy_3;
u_1dx_1= u_1*dt/d4x_1; v_1dy_1=v_1*dt/d4y_1;
u_2dx_2= u_2*dt/d4x_2; v_2dy_2=v_2*dt/d4y_2;
u_3dx_3= u_3*dt/d4x_3; v_3dy_3=v_3*dt/d4y_3;
dP_1le=(mu_1-lambda_1)*dt/2;
dP_2le=(mu_2-lambda_2)*dt/2;
dP_3le=(mu_3-lambda_3)*dt/2;
dP_1ld=(-mu_1+lambda_1)*dt/2;
dP_2ld=(-mu_2+lambda_2)*dt/2;
dP_3ld=(-mu_3+lambda_3)*dt/2;
%p_1le=(mu_1-lambda_1)*dt/2;
%p_2le=(mu_2-lambda_2)*dt/2;
%p_3le=(mu_3-lambda_3)*dt/2;
%p_1ld=-(mu_1-lambda_1)*dt/2;
%p_2ld=-(mu_2-lambda_2)*dt/2;
%p_3ld=-(mu_3-lambda_3)*dt/2;
%cnl_1=lambda_1*dt/(4*K);
%cnl_2=lambda_2*dt/(4*K);
%cnl_3=lambda_3*dt/(4*K);
P_1e=zeros(nn); P_1d=zeros(nn);
P_2e=zeros(nn); P_2d=zeros(nn);
P_3e=zeros(nn); P_3d=zeros(nn);
%
% montagem das matrizes - parte linear apenas
for i=1:nn
P_1e(i,i)=1+2*(atx_1+aty_1)+dP_1le;
P_1d(i,i)=1-2*(atx_1+aty_1)+dP_1ld;
P_2e(i,i)=1+2*(atx_2+aty_2)+dP_2le;
P_2d(i,i)=1-2*(atx_2+aty_2)+dP_2ld;
P_3e(i,i)=1+2*(atx_3+aty_3)+dP_3le;
P_3d(i,i)=1-2*(atx_3+aty_3)+dP_3ld;
end
for i= 1:nn-1;
P_1e(i+1,i)=-aty_1-v_1dy_1;
P_1d(i+1,i)=aty_1+v_1dy_1;

```

```

P_1e(i,i+1)=-aty_1+v_1dy_1;
P_1d(i,i+1)=aty_1-v_1dy_1;
P_2e(i+1,i)=-aty_2-v_2dy_2;
P_2d(i+1,i)=aty_2+v_2dy_2;
P_2e(i,i+1)=-aty_2+v_2dy_2;
P_2d(i,i+1)=aty_2-v_2dy_2;
P_3e(i+1,i)=-aty_3-v_3dy_3;
P_3d(i+1,i)=aty_3+v_3dy_3;
P_3e(i,i+1)=-aty_3+v_3dy_3;
P_3d(i,i+1)=aty_3-v_3dy_3;
end
for i= 1:nn-nny;
P_1e(i+nny,i)=-atx_1-u_1dx_1;
P_1d(i+nny,i)=atx_1+u_1dx_1;
P_1e(i,i+nny)=-atx_1+u_1dx_1;
P_1d(i,i+nny)=atx_1-u_1dx_1;
P_2e(i+nny,i)=-atx_2-u_2dx_2;
P_2d(i+nny,i)=atx_2+u_2dx_2;
P_2e(i,i+nny)=-atx_2+u_2dx_2;
P_2d(i,i+nny)=atx_2-u_2dx_2;
P_3e(i+nny,i)=-atx_3-u_3dx_3;
P_3d(i+nny,i)=atx_3+u_3dx_3;
P_3e(i,i+nny)=-atx_3+u_3dx_3;
P_3d(i,i+nny)=atx_3-u_3dx_3;
end
%adequar a borda horizontal inferior
for i=1:nnx-1;
ind=i*nny+1;
P_1e(ind,ind-1)=0;
P_1d(ind,ind-1)=0;
P_1e(ind,ind+1)=-2*aty_1;
P_1d(ind,ind+1)=2*aty_1;
P_2e(ind,ind-1)=0;
P_2d(ind,ind-1)=0;
P_2e(ind,ind+1)=-2*aty_2;
P_2d(ind,ind+1)=2*aty_2;
P_3e(ind,ind-1)=0;
P_3d(ind,ind-1)=0;
P_3e(ind,ind+1)=-2*aty_3;

```

```

P_3d(ind,ind+1)=2*aty_3;
end
%
%falta ind=1
P_1e(1,2)=-2*aty_1;
P_1d(1,2)=2*aty_1;
P_2e(1,2)=-2*aty_2;
P_2d(1,2)=2*aty_2;
P_3e(1,2)=-2*aty_3;
P_3d(1,2)=2*aty_3;
%
%adequar a borda horizontal superior
for i= 1:nnx-1;
ind=i*nny+1;
P_1e(ind,ind+1)=0;
P_1d(ind,ind+1)=0;
P_1e(ind,ind-1)=-2*aty_1;
P_1d(ind,ind-1)=2*aty_1;
P_2e(ind,ind+1)=0;
P_2d(ind,ind+1)=0;
P_2e(ind,ind-1)=-2*aty_2;
P_2d(ind,ind-1)=2*aty_2;
P_3e(ind,ind+1)=0;
P_3d(ind,ind+1)=0;
P_3e(ind,ind-1)=-2*aty_3;
P_3d(ind,ind-1)=2*aty_3;
end
%falta ind=nn
P_1e(nn,nn-1)=-2*aty_1;
P_1d(nn,nn-1)=2*aty_1;
P_2e(nn,nn-1)=-2*aty_2;
P_2d(nn,nn-1)=2*aty_2;
P_3e(nn,nn-1)=-2*aty_3;
P_3d(nn,nn-1)=2*aty_3;
%adequar a borda vertical da esquerda
for i=1:nny
P_1e(i,i+nny)=-2*atx_1;
P_1d(i,i+nny)=2*atx_1;
P_2e(i,i+nny)=-2*atx_2;

```

```

P_2d(i,i+nny)=2*atx_2;
P_3e(i,i+nny)=-2*atx_3;
P_3d(i,i+nny)=2*atx_3;
end
%
%adequar a borda vertical da direita
for i=1:nny
in=nx*nny+i;
P_1e(in,in-nny)=-2*atx_1;
P_1d(in,in-nny)=2*atx_1;
P_2e(in,in-nny)=-2*atx_2;
P_2d(in,in-nny)=2*atx_2;
P_3e(in,in-nny)=-2*atx_3;
P_3d(in,in-nny)=2*atx_3;
end
% condicao inicial
P_1z=(K-16)*ones(nn,1);
j=1;
while j<358;
    P_1z(j)=0;
    j=j+3;
end
P_1=P_1z;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P_2z=(K-16)*ones(nn,1);
j=2;
while j<358;
    P_2z(j)=0;
    j=j+3;
end
P_2=P_2z;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P_3z=(K-16)*ones(nn,1);

j=3;
while j<358;
    P_3z(j)=0;
    j=j+3;
end

```



```

P_3=P_3z;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% resolução repetida do sistema
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
nP_1e=P_1e; nP_1d=P_1d;
nP_2e=P_2e; nP_2d=P_2d;
nP_3e=P_3e; nP_3d=P_3d;
%para visualizar %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
verP_1=zeros(nny,nnx);
verP_2=zeros(nny,nnx);
verP_3=zeros(nny,nnx);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
nP_1e=P_1e; nP_1d=P_1d;
nP_2e=P_2e; nP_2d=P_2d;
nP_3e=P_3e; nP_3d=P_3d;

P1total=zeros(npt,1);
P2total=zeros(npt,1);
P3total=zeros(npt,1);
for it=1:npt;
P_1int=(P_1+P_1z)/2;
P_2int=(P_2+P_2z)/2;
P_3int=(P_3+P_3z)/2;
for k=1:nn
nP_1e(k,k)=P_1e(k,k)+(lambda_1/(K))*(P_1int(k)+gama_1*P_2int(k)+sigma_1*
P_3int(k))*dt/2;
nP_1d(k,k)=P_1d(k,k)-(lambda_1/(K))*(P_1int(k)+gama_1*P_2int(k)+sigma_1*
P_3int(k))*dt/2;
end
P_1=nP_1e\(nP_1d*P_1z);
P_1int=(P_1+P_1z)/2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=1:nn
nP_2e(k,k)=P_2e(k,k)+(lambda_2/(K))*(P_2int(k)+gama_2*P_1int(k)+sigma_2*
P_3int(k))*dt/2;
nP_2d(k,k)=P_2d(k,k)-(lambda_2/(K))*(P_2int(k)+gama_2*P_1int(k)+sigma_2*
P_3int(k))*dt/2;
end
P_2=nP_2e\(nP_2d*P_2z);

```

```

P_2int=(P_2+P_2z)/2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=1:nn
nP_3e(k,k)=P_3e(k,k)+(lambda_3/(K))*(P_3int(k)+gama_3*P_2int(k)+sigma_3*
P_1int(k))*dt/2;
nP_3d(k,k)=P_3d(k,k)-(lambda_3/(K))*(P_3int(k)+gama_3*P_2int(k)+sigma_3*
P_1int(k))*dt/2;
end
P_3=nP_3e\(nP_3d*P_3z);
P_3int=(P_3+P_3z)/2;

%% Final (real)%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=1:nn
nP_1e(k,k)=P_1e(k,k)+(lambda_1/(K))*(P_1int(k)+gama_1*P_2int(k)+sigma_1*
P_3int(k))*dt/2;
nP_1d(k,k)=P_1d(k,k)-(lambda_1/(K))*(P_1int(k)+gama_1*P_2int(k)+sigma_1*
P_3int(k))*dt/2;
end
P_1=nP_1e\(nP_1d*P_1z);
P_1int=(P_1+P_1z)/2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=1:nn
nP_2e(k,k)=P_2e(k,k)+(lambda_2/(K))*(P_2int(k)+gama_2*P_1int(k)+sigma_2*
P_3int(k))*dt/2;
nP_2d(k,k)=P_2d(k,k)-(lambda_2/(K))*(P_2int(k)+gama_2*P_1int(k)+sigma_2*
P_3int(k))*dt/2;
end
P_2=nP_2e\(nP_2d*P_2z);
P_2int=(P_2+P_2z)/2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k=1:nn
nP_3e(k,k)=P_3e(k,k)+(lambda_3/(K))*(P_3int(k)+gama_3*P_2int(k)+sigma_3*
P_1int(k))*dt/2;
nP_3d(k,k)=P_3d(k,k)-(lambda_3/(K))*(P_3int(k)+gama_3*P_2int(k)+sigma_3*
P_1int(k))*dt/2;
end
P_3=nP_3e\(nP_3d*P_3z);
P_3int=(P_3+P_3z)/2;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P_1z=P_1; P_2z=P_2; P_3z=P_3;
P1total(it)=sum(P_1);
P2total(it)=sum(P_2);
P3total(it)=sum(P_3);
end
%P1total=sum(P_1)
%P_1lt(it)=P_1(1);
%P_2lt(it)=P_2(1);
%P_3lt(it)=P_3(1);
% para poder ver
for i=1:nny
    for j=1:nnx
        ind=(j-1)*nny+i;
        verP_1(nny+1-i,j)=P_1(ind);
    end
end
for i=1:nny
    for j=1:nnx
        ind=(j-1)*nny+i;
        verP_2(nny+1-i,j)=P_2(ind);
    end
end
for i=1:nny
    for j=1:nnx
        ind=(j-1)*nny+i;
        verP_3(nny+1-i,j)=P_3(ind);
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %surf(verP_1), grid on
    contour(verP_1,3),grid
    pause(0.75)
    it;
    figure()
    hold on
    plot(P1total,'b')
    plot(P2total,'r')

```

```

plot(P3total,'g')
hold off

%subplot(2,2,1)
%plot(mlt),grid, xlabel('tempo'), ylabel('mata')
%subplot(2,2,2)
%plot(plt), xlabel('tempo'), ylabel('paca')
%subplot(2,2,3)
%plot(clt), xlabel('tempo'), ylabel('cotia')
%subplot(2,2,2)
%plot(plt)
%subplot(2,2,3)
%plot(clt)
%subplot(2,2,4)
% para poder ver
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%for i=1:nny
%for j=1:nnx
%ind=(j-1)*nny+i;
%verm(nny+1-i,j)=m(ind);
%end
%end
%for i=1:nny
%for j=1:nnx
%ind=(j-1)*nny+i;
%verP_1(nny+1-i,j)=p(ind);
%end
%end
%for i=1:nny
%for j=1:nnx
%ind=(j-1)*nny+i;
%verP-1(nny+1-i,j)=c(ind);
%end
%end
% subplot(2,2,1), surf(verP_1)
% subplot(2,2,2), surf(verP_1)
% subplot(2,2,3), surf(verP_1)
% pause

```

```
%subplot(2,2,1), surf(verP_1), axis([0 10 0 7.5 0 24])  
%subplot(2,2,2), surf(verP_1)  
%subplot(2,2,3), surf(verP_1)  
%surf(verP_1)  
%contour(verP_1,3),grid
```