



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO

IFT-D.004/97

Aspectos Universais em Sistemas de Três Corpos

Antonio Eduardo Assis Amorim



ORIENTADOR:

Prof. Dr. Lauro Tomio

Co-orientador:

Prof. Dr. Tobias Frederico

Novembro - 1997

Agradecimentos

Na elaboração deste trabalho, devo o apoio e o incentivo de várias pessoas, as quais não poderia deixar de agradecer.

Aos profs. Lauro Tomio e Tobias Frederico pela orientação, as discussões sobre os problemas envolvendo sistemas de três corpos, o apoio, a paciência e compreensão durante estes anos todos.

Aos profs. Sadhan Kumar Adhikari e Gerhard Bund pelos comentários sobre o trabalho durante o tempo que estive no IFT.

Ao prof. Paulo Leal Ferreira o qual me recebeu no IFT e me incentivou sempre.

Aos funcionários do IFT pelo apoio e facilidades oferecidas.

Ao amigo Pacheco do IFUSP pelas discussões durante este trabalho.

A minha família, pelo apoio, compreensão principalmente nos momentos mais críticos durante o doutorado.

Ao CNPQ e a CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicação

À minha esposa e filhos

Resumo

Sistemas de três corpos sob a ação de forças de curto alcance são interessantes pois apresentam dois efeitos curiosos. O primeiro deles, conhecido por *efeito Thomas* é obtido quando o alcance da interação de dois corpos vai a zero ($r_o \rightarrow 0$). Nesta situação a energia do sistema de três partículas tende ao infinito, colapsando o sistema. O outro, chamado *efeito Efimov* surge no limite em que a energia de ligação de dois corpos vai a zero. Nesta situação ocorrem infinitos estados fracamente ligados de três corpos. Neste trabalho mostramos, numa forma simples, como ambos os efeitos estão relacionados por uma transformação de escala.

A presença do efeito Thomas, no limite de alcance zero usado neste trabalho, requer a *regularização* do integrando da equação integral correspondente. Isto implica na introdução de um novo parâmetro de escala, independente dos observáveis de dois corpos que pode ser associado a um observável de três corpos como a energia do estado fundamental, no procedimento de *renormalização*. Tal processo independe do modo como a regularização é feita; e a renormalização introduz uma nova escala no sistema.

Tendo em mente as observações acima, estudamos alguns problemas relevantes sobre as correlações em sistemas de três corpos. Em um dos problemas, consideramos a correlação existente entre a largura de decaimento e a energia do estado fundamental de três corpos, quando é introduzido um potencial absorptivo na Hamiltoniana. Em outro problema, consideramos os efeitos Efimov e Thomas em sistemas relativísticos com uma e duas dimensões espaciais, além da dimensão temporal.

Finalmente, estudamos os núcleos exóticos leves que foram recentemente descobertos, no contexto de três corpos. Tais sistemas, chamados *halo-núcleos*, podem ser considerados como constituídos por um caroço e um *halo* composto por dois nêutrons; esses (dois nêutrons) afastados do caroço a uma distância bem maior do que o raio do *caroço*. Conjecturou-se que tais sistemas poderiam possuir estados Efimov em trabalhos recentes na literatura. Assim, em um procedimento geral, válido para sistemas de três corpos com duas partículas idênticas, consideramos a existência de estados Efimov em tais núcleos exóticos. Com base nos dados experimentais existentes, concluímos que o carbono-20 seria o candidato mais provável e estimamos a energia do primeiro estado Efimov excitado para o sistema.

Abstract

Three-body systems under the action of short range forces are very interesting because they have two curious effects. The first one, called *Thomas effect* is present when the range of the interaction goes to zero ($r_o \rightarrow 0$) and by consequence the system energy goes to infinity, collapsing the system. The other one, called *Efimov effect* appears in the limit when the two body binding energy goes to zero. In this situation, there are infinity weakly three-body bound states. In this work, we show, in a simple way, how both effects are connected via a scale transformation.

The presence of Thomas effect, in the zero range approach used in this work, requires the *regularization* of the kernel of the corresponding integral equation. This fact implies in introducing a new scale parameter, independent of the two-body observables, which can be related to a three-body observable like the energy of the three-body ground state, in our renormalization procedure. Such process is independent of the way in which the regularization process is performed and the renormalization introduces a new scale in the system.

With the above in mind, we study some relevant problems about correlations in three-body systems. One of them considers the possible existent correlation between the decay width with respect to ground state three-body energy when an absorptive potential is introduced in the Hamiltonian. The other, considers the Efimov and Thomas effects in relativistic systems in 1+1 and 2+1 dimensions.

Finally, we studied the recently discovered exotic light nuclei in the context of three-body systems. One of such systems, called *halo-nucleus*, can be viewed as a core and halo composed by two neutrons, which is characterized by having a long tail in the neutron spatial distribution. It was conjectured, in some recent works, that such systems could have Efimov states. So, in a general approach, valid for three-body systems with two identical particles, we considered the possible existence of Efimov states in such exotic nuclei. With support from the available experimental data, we conclude that carbon-20 is the only probable candidate, and we estimate the first excited Efimov state for the system.

Índice

1	Introdução	3
2	Método de Mitra	11
2.1	Introdução	11
2.2	Potencial Separável em Sistemas de Dois Corpos	12
2.3	Hamiltoniana para Sistema de Três Bósons	19
2.4	Formalismo de Mitra	22
3	Efeito Efimov e o Sistema de Três Bósons Idênticos	29
3.1	Introdução	29
3.2	Sistema de Três Partículas Idênticas	31
3.3	Condições Limites para Estados Efimov	36
4	Potencial Absortivo de Curto Alcance	41
4.1	Introdução	41
4.2	Largura dos Estados de Efimov	43
5	Três Partículas Relativísticas em 1 + 1 e 2 + 1 Dimensões	61
5.1	Introdução	61

<u>Índice</u>	<u>2</u>
5.2 Método do Plano Nulo	63
5.2.1 Dimensão 1+1	68
5.2.2 Dimensão 2+1	73
5.3 Limite Não Relativístico	75
5.3.1 Dimensão 1+1	75
5.3.2 Dimensão 2+1	78
6 Estados Efimov e os Núcleos com Halo	83
6.1 Introdução	83
6.2 Formalismo de Mitra para o Sistema de Três Corpos $C - n - n$	91
6.3 Resultados e os <i>Halo-Núcleos</i>	94
7 Conclusões e Perspectivas	107
7.1 Perspectivas	111
Referências Bibliográficas	111

Capítulo 1

Introdução

Na década de 1950, eram conhecidos dois grupos de valores teóricos para os comprimentos de espalhamento nêutron-dêuteron (n-d), a_2 e a_4 , para o estado dubleto e quarteto, respectivamente. Ambos os resultados teóricos eram compatíveis com o resultado experimental obtido na colisão n-d [Hu-51], ou seja, se mantinham dentro da faixa de erro experimental.

Utilizando a aproximação de Born para ondas parciais e um método variacional, Christian e Gammel [Ch-53] obtiveram os valores

$$a_2 = 0.7 \pm 0.3 \text{ fm} \quad a_4 = 6.38 \pm 0.6 \text{ fm} .$$

Por outro lado, considerando o sistema n-d como de dois corpos, Gordon [Go-50] obteve resultados discrepantes dos obtidos acima:

$$a_2 = 8.26 \pm 0.12 \text{ fm} \quad a_4 = 2.6 \pm 0.2 \text{ fm} .$$

Em torno de 1967, Alfimenkov [Al-67] obteve o seguinte resultado experimental para a razão a_2/a_4 ,

$$\frac{a_2}{a_4} = 0.12 \pm 0.05 ,$$

que favoreciam os resultados do primeiro grupo. Nesta mesma época, surgiram os primeiros trabalhos utilizando potenciais separáveis, para a interação de dois corpos, aplicados aos sistemas de três núcleons, cujos resultados também davam suporte aos resultados do primeiro grupo [Aa-64, Bh-65, Si-63]. Essas formas de potenciais separáveis, não locais, foram utilizadas inicialmente por Wigner [Wi-32] e são representadas, no espaço de coordenadas, por

$$V(\vec{r}, \vec{r}') = \lambda g(\vec{r})g(\vec{r}') \quad (1.1)$$

onde λ é a constante de acoplamento e $g(\vec{r})$ é o fator de forma do potencial.

Porém, a questão continuaria aberta, já que na mesma época, Seagrave e van Oers [Oe-67] obtiveram um terceiro grupo de valores para os comprimentos de espalhamento:

$$a_2 = 0.12 \pm 0.07 \text{ fm} \quad a_4 = 6.11 \pm 0.06 \text{ fm} .$$

Em 1970, Dilg et al. [Di-71] mediram a_2 e a_4 que, após uma criteriosa revisão feita por Fiarman e Hanna [Fi-75], foram considerados como corretos. Tais valores obtidos foram:

$$a_2 = 0.65 \pm 0.04 \text{ fm} \quad a_4 = 6.35 \pm 0.02 \text{ fm} .$$

Esse problema só foi melhor entendido após um importante trabalho devido a Phillips [Ph-68], que observou a existência de uma correlação entre a energia do trítio e o comprimento de espalhamento nêutron-dêuteron, a_2 , para várias interações de curto-alcance, conforme mostra a figura 1.1. Utilizando diversos modelos de potenciais, com diferentes valores para o comprimento de espalhamento, Phillips representou neste gráfico os resultados obtidos, correspondentemente, para a energia do trítio.

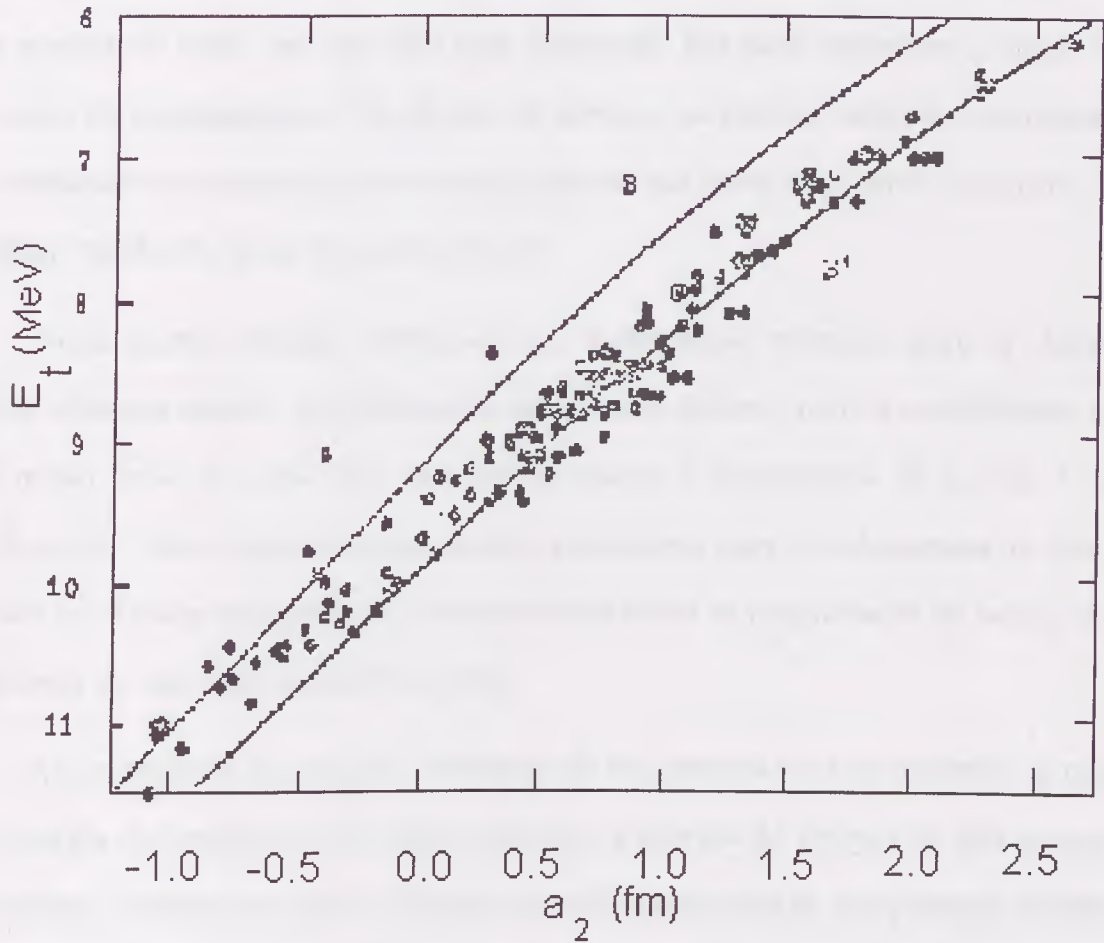


Figura 1.1 - Correlação entre a energia do trítio e o comprimento de espalhamento neutron-deuteron a_2 . Cada ponto representado no gráfico é proveniente de um modelo diferente para a interação de dois corpos [Ph-68].

Nesse gráfico da energia do trítio em função do valor do comprimento de espalhamento a_2 , ele observou uma correlação entre estas duas quantidades, que se aproximava de uma faixa reta. Esta correlação é conhecida como *linha de Phillips* e está intimamente relacionada com o alcance da interação nuclear, como veremos mais adiante. Uma vez que a energia do trítio tem um valor bem conhecido, fica fácil estabelecer o valor do comprimento de espalhamento. Na década de setenta, os estudos teóricos mostravam que tais correlações independiam do modelo, apesar de não haver uma prova conclusiva desse fato [Bray-74, Ha-75, Bran-74, Le-74, Mc-75].

Nesta mesma década, verificou-se que a correlação existente entre os observáveis de três núcleons aparece principalmente nos estados dubleto, onde a sensibilidade ao modelo é muito forte, ao passo que, nos outros estados a dependência de modelo é mais fraca [Bray-74]. Além disto, bastavam poucos parâmetros para os subsistemas de dois núcleons para que fossem completamente determinadas todas as propriedades de baixas energias do sistema de três núcleons [Ef-70, Ef-90].

Ao se resolver as equações dinâmicas de um sistema de três núcleons, à medida que a energia de ligação de dois corpos decresce, a energia do sistema de três corpos diminui também, conforme esperado. Contudo, quando a constante de acoplamento da interação de dois corpos assume um valor crítico, de tal forma que deixam de existir estados ligados de dois corpos ($E_2 = 0$), o que se observa é a presença de infinitos estados fracamente ligados de três corpos, que foram inicialmente discutidos por Efimov em trabalho publicado em 1970 [Ef-70] e, por esta razão, ficaram sendo conhecidos como *estados Efimov*.

Por outro lado, esse problema está relacionado a um problema já descoberto muitos anos

antes, em 1937, por Thomas [Th-35]. Thomas observou que, se um sistema não relativístico de três partículas interage via um potencial de interação de dois corpos de curto alcance, então quando o alcance da interação de dois corpos vai a zero ($r_o \rightarrow 0$), a energia de ligação do sistema de três partículas tende a infinito, colapsando o sistema.

A energia de ligação de três corpos depende fortemente do alcance da interação. Para potenciais de alcance muito curto, a energia do estado fundamental do sistema de três corpos não é determinada apenas pela energia do estado fundamental do subsistema de dois corpos, tornando-se infinita no limite de alcance zero. Essa é uma observação válida para o espaço usual tri-dimensional, que estamos interessados. Em uma ou duas dimensões, o que ocorre é que a energia do estado fundamental do sistema de três corpos é praticamente determinada pela energia do estado fundamental do subsistema. Este fato está ligado à renormalizabilidade das equações não - relativísticas para uma interação de curto alcance, o que pode ser visto analiticamente para uma interação de alcance zero, ou seja, quando $g(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ na equação(1.1) [Ad-95]. Em uma ou duas dimensões, o traço do integrando (“kernel”) da equação integral não apresenta divergências enquanto que em três dimensões o mesmo é singular e requer uma regularização. Este fato implica na introdução de um novo parâmetro nas equações tri-dimensionais, independente dos observáveis de dois corpos e que pode ser associado a uma grandeza física de três corpos, por exemplo, a energia do estado fundamental do sistema. Dentro do conceito de renormalização, em sendo a teoria renormalizável, este procedimento independe do processo de regularização adotado; logo, quando se efetua a renormalização, dizemos que uma nova escala é introduzida no sistema. Os demais observáveis de três corpos irão depender das escalas físicas do sistema, ou seja,

dos observáveis de dois corpos a baixas energias e da energia do estado fundamental de três corpos [Ad-95].

A renormalizabilidade da teoria de muitos corpos com força de alcance zero, em particular aplicada a sistemas de três corpos, assegura que todas as propriedades físicas de baixas energias do sistema estão bem definidas se um observável de três corpos e todos os demais de baixas energias de dois corpos forem fixados.

Considerando as observações acima, pode-se explicar vários aspectos do sistema de poucos corpos, que interagem a curta distância, com auxílio das teorias de renormalização. Assim, podemos realizar estudos das propriedades de baixas energias de sistemas de três corpos utilizando modelos simples para a interação de dois corpos, já que as correlações obtidas devem, nesse caso, independer da forma do potencial de curto alcance que seja utilizado.

O colapso da energia do estado ligado de um sistema de três bósons em três dimensões, para interações de curto alcance, que aparece no limite em que $r_o \rightarrow 0$ (efeito Thomas), é um exemplo de um problema de duas escalas no sistema de três corpos. A correlação entre os observáveis é aparente quando um observável do sistema de três corpos, que é fixo na renormalização da teoria, praticamente determina os outros observáveis do sistema. Com este procedimento é possível mostrar que a linha de Phillips é estável no limite em que $r_o \rightarrow 0$ [Ef-85]; e que as correlações entre observáveis no sistema de três corpos vêm em consequência da renormalizabilidade da mecânica quântica para potenciais de curto alcance.

A motivação desse trabalho foi estudar a correlação existente entre observáveis de baixas

energias do sistema de três corpos, considerando-se em particular as interações de curto alcance que ocorrem em física nuclear. Assim, consideramos nesse capítulo introdutório a origem dessa preocupação. Nos capítulos que seguem, examinaremos as propriedades das equações dinâmicas do sistema e suas peculiaridades. Detalharemos os seguintes importantes aspectos das equações dinâmicas de três corpos:

- sistema de bósons idênticos, não - relativístico, sem e com parte absorptiva no potencial de dois corpos;
- sistema relativístico, com uma e duas dimensões espaciais;
- sistema não - relativístico, com duas partículas idênticas e os *halo* - núcleos.

No capítulo 2, escrevemos a equação dinâmica para um sistema de três corpos sem spins, usando o formalismo de Mitra, em que é considerado uma interação separável para o sub-sistema de dois corpos. Esse formalismo é a seguir particularizado para uma interação de alcance zero.

No capítulo 3, consideramos um sistema de três partículas idênticas. Discutimos os efeitos Efimov e Thomas, de uma maneira simples, mostrando como ambos os efeitos se apresentam, e reproduzimos numericamente alguns valores para as energias dos estados de três corpos. Conforme se verifica, tanto o efeito Thomas como o efeito Efimov geram a mesma divergência no traço do “kernel” da equação integral e estão relacionados entre si por meio de uma mudança de escala.

No capítulo 4, detalhamos um trabalho em que introduzimos uma parte absorptiva no potencial de dois corpos, ao analisar o comportamento dos estados Efimov de três partículas.

Mostramos como a largura de decaimento do sistema está correlacionada à parte real da energia deste estado.

No capítulo 5, estudamos o sistema relativístico de três bósons com interação de alcance zero, usando as coordenadas do cone de luz (método do plano nulo), para o caso em que temos uma dimensão espacial (1+1) e para o caso de duas dimensões espaciais (2+1). Examinamos também os limites não relativísticos correspondentes.

No capítulo 6, temos o principal estudo feito nessa tese, que se refere ao limite Thomas-Efimov para o caso geral de um sistema de três partículas sem spins, em que uma delas tem massa diferente das demais. Nesse capítulo consideramos que o sub-sistema de dois corpos interage de tal forma que pode ser ligado ou estar em um estado virtual. Variamos os intervalos de energia para tais sub-sistemas, em uma escala adimensional, estudando a região onde é possível a existência de estados excitados Efimov.

Os resultados do estudo feito no capítulo 6 são aplicados para os núcleos exóticos chamados de *halo-núcleos*, que são caracterizados por terem uma quantidade de nêutrons muito maior do que a de prótons e por terem uma distribuição espacial de nêutrons de alcance bem maior que o raio do caroço. Dessa forma, tais sistemas podem ser descritos como um núcleo e um par de nêutrons bem afastados, podendo serem tratados como um sistema de três corpos. Estudamos a possibilidade de ocorrência de estados excitados Efimov em tais sistemas e apontamos o carbono-20 (^{20}C) como o mais provável candidato para possuir pelo menos um estado excitado Efimov.

No último capítulo apresentamos as nossas conclusões, discutindo os aspectos mais relevantes do presente estudo.

Capítulo 2

Método de Mitra

2.1 Introdução

Neste capítulo, descreveremos o método de Mitra [Mi-62, Mi-63, Bh-65] para o estudo de sistemas bosônicos de três corpos envolvendo potenciais separáveis de curto alcance. O resultado obtido é uma equação integral dependente de uma variável após a projeção em ondas parciais. Estudaremos as correlações entre os observáveis de três corpos utilizando-se apenas potenciais na onda S, já que é neste caso que existe uma maior sensibilidade ao tipo de potencial utilizado. Assumiremos apenas interações de dois corpos.

Inicialmente, para se estudar sistemas com três corpos, eram utilizadas as equações de Lippmann-Schwinger [Jo-75]. Contudo a função de onda encontrada não era única o que causava sérios inconvenientes. Mais tarde, Faddeev resolveu este problema escrevendo a equação correta que levava em conta todos os canais possíveis e fornecia desta forma uma solução única para o espalhamento [Fa-61].

Obtemos simplificações significativas nas equações de Faddeev utilizando potenciais separáveis não locais. Neste caso as equações tornam-se unidimensionais, após a expansão em ondas parciais, envolvendo apenas uma variável [Aa-64, Aa-65]. O método de Mitra,

desenvolvido para estudar o espalhamento de três núcleons interagindo com potenciais separáveis, é equivalente às equações de Faddeev [Fa-61]. Na seção 2.2 discutimos de forma sucinta o potencial separável na interação de dois corpos. Na seção 2.3 escrevemos a Hamiltoniana livre no centro de massa do sistema de três corpos. Finalmente, na seção 2.4 apresentamos o formalismo de Mitra e, desta forma, obtemos a equação (2.55) que é a equação integral para um sistema de três bósons cuja interação é realizada por um potencial separável de dois corpos e a particularizamos para o caso em que o potencial possui alcance zero e o fator de forma é dado por $g(\vec{p}) = 1$.

2.2 Potencial Separável em Sistemas de Dois Corpos

O potencial separável que descreve a interação entre dois corpos, em notação operatorial [Co-77], é dado por

$$V = \lambda |\chi\rangle \langle \chi|, \quad (2.1)$$

onde λ é a constante de acoplamento relativa à interação nuclear e o “ket” $|\chi\rangle$ fornecerá o fator de forma do potencial ao ser projetado em uma dada representação.

Portanto, na representação dos momentos, em que o fator de forma é

$$g(\vec{p}) = \langle \chi | \vec{p} \rangle, \quad (2.2)$$

escrevemos o elemento de matriz do potencial como

$$V(\vec{p}, \vec{p}') = \lambda g(\vec{p}) g(\vec{p}'). \quad (2.3)$$

Na notação operatorial, a equação de Schrödinger que descreve o estado de um sistema

de duas partículas k e j , cuja interação é dada por (2.1), será

$$\left(\frac{p^2}{2\mu_{jk}} + \lambda |\chi\rangle\langle\chi| \right) |\psi\rangle = E_2^{jk} |\psi\rangle, \quad (2.4)$$

onde μ_{jk} é a massa reduzida e E_2^{jk} o autovalor para a energia do sistema.

Invertendo-se a equação (2.4), temos

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{\lambda}{E_2^{jk} - \frac{p^2}{2\mu_{jk}}} |\chi\rangle\langle\chi|\psi\rangle, \quad (2.5)$$

onde $|\phi\rangle$ representa a solução de onda plana, ou seja, tal que $\langle\chi|\phi\rangle = 0$.

Assim, projetando-se à esquerda em $\langle\chi|$, obtemos

$$\langle\chi|\psi\rangle = \lambda \langle\chi| \frac{1}{E_2^{jk} - \frac{p^2}{2\mu_{jk}}} |\chi\rangle\langle\chi|\psi\rangle, \quad (2.6)$$

resultando a equação

$$\left(\lambda^{-1} - \langle\chi| \frac{1}{E_2^{jk} - \frac{p^2}{2\mu_{jk}}} |\chi\rangle \right) \langle\chi|\psi\rangle = 0. \quad (2.7)$$

A equação acima nos fornece a energia E_2^{jk} do estado de um sistema de dois corpos, que interage através de um potencial de curto alcance cuja constante de acoplamento é λ .

Finalmente, após a projeção em ondas parciais, obtemos para cada onda parcial l a expressão que conecta a constante de acoplamento λ com a energia E_2^{jk} :

$$\lambda^{-1} = 4\pi \int_0^\infty \frac{g^2(p)}{E_2^{jk} - \frac{p^2}{2\mu_{jk}}} p^2 dp, \quad (2.8)$$

onde $p \equiv |\vec{p}|$ e assumiu-se que $g(\vec{p}) \equiv g(p)$ é real.

Considere-se um fator de forma constante, $g(p) = 1$ em (2.8). Portanto, se o estado de dois corpos está ligado e tem energia de ligação $E_2^{jk} = -|E_2^{jk}|$, teremos que reescrever a equação de modo a eliminar a divergência que ocorre quando p tende a infinito. Dessa forma, introduzimos um corte no limite superior:

$$\lambda^{-1} = -4\pi \int_0^\Lambda \frac{p^2}{|E_2^{jk}| + \frac{p^2}{2\mu_{jk}}} dp. \quad (2.9)$$

O corte Λ representa qualitativamente o inverso do alcance da interação [Kh-73]. Para o caso em que o potencial tem alcance zero, $\Lambda \rightarrow \infty$.

Em um sistema de dois corpos, na região de espalhamento, podemos obter as amplitudes de espalhamento f_k através da matriz T , analisando-se os elementos de matriz na camada de energia.

A equação da matriz T , para dois núcleons, é dada por

$$T(E) = V + V G_o(E) T(E), \quad (2.10)$$

onde $E \equiv (\hbar k)^2/(2\mu_{jk})$, sendo $\hbar \vec{k}$ definido como momento na camada de energia (*on-shell*), e $G_o(E)$ é a função de Green relacionada ao Hamiltoniano não perturbado H_0 :

$$G_o(E) = \frac{1}{(E + i0 - H_o)}. \quad (2.11)$$

A partir deste momento, e a menos que a notação se torne inconveniente, usaremos o sistema de unidades usual na física nuclear, em que $c = \hbar = m_N = 1$, sendo m_N a massa do

núcleon. Nesse caso, $\vec{k}$ ou $\vec{k}'$ serão chamados momentos *on-shell* (desde que $k^2 = k'^2 = E$) e $2\mu_{jk} \equiv 1$.

Portanto, usando a interação separável definida pela equação (2.1), temos

$$T(E) = \lambda |\chi\rangle \langle \chi| + \lambda |\chi\rangle \langle \chi| G_o(E) T(E) . \quad (2.12)$$

Multiplicando-se pela esquerda a equação operatorial acima por $\langle \chi| G_o(E)$, temos que

$$\langle \chi| G_o(E) T(E) = \lambda \langle \chi| G_o(E) |\chi\rangle \langle \chi| + \lambda \langle \chi| G_o(E) |\chi\rangle \langle \chi| G_o(E) T(E) . \quad (2.13)$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$\langle \chi| G_o(E) T(E) = \frac{\langle \chi| G_o(E) |\chi\rangle \langle \chi|}{\lambda^{-1} - \langle \chi| G_o(E) |\chi\rangle} . \quad (2.14)$$

Substituindo a equação (2.14) na equação (2.12), obtemos

$$T(E) = |\chi\rangle \left(\frac{1}{\lambda^{-1} - \langle \chi| G_o(E) |\chi\rangle} \right) \langle \chi| . \quad (2.15)$$

A amplitude de espalhamento “*on-shell*” é dada por [Jo-75]

$$f_k(\theta) = N \langle \vec{k}' | T(E) | \vec{k} \rangle , \quad (2.16)$$

onde $k^2 = (k')^2 = E$, θ é o ângulo entre $\vec{k}$ e $\vec{k}'$, e N uma constante de normalização.

Portanto, a amplitude de espalhamento na onda S, para um potencial separável, será

$$f_k(\theta) = N \left(\frac{g^2(k)}{\lambda^{-1} - 4\pi \int_0^\infty dq \frac{g^2(q)q^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon}} \right) . \quad (2.17)$$

Por outro lado, a amplitude de espalhamento pode ser escrita em termos do deslocamento de fase δ_o e do momento *on-shell* $\vec{k}$, ou seja

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k \cot \delta_o - ik}. \quad (2.18)$$

Portanto

$$k \cot \delta_o = ik + \frac{1}{f_k(\theta)} = ik + \frac{1}{Ng^2(k)} \left(\lambda^{-1} - 4\pi \int_0^\infty dq \frac{g^2(q)q^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \right). \quad (2.19)$$

Separando o valor principal da equação acima, obtemos

$$k \cot \delta_o = ik + \frac{1}{N\lambda g^2(k)} - \frac{4\pi}{Ng^2(k)} V_p \int_0^\infty dq \frac{g^2(q)q^2}{k^2 - q^2} + \frac{2\pi^2 ik}{N}. \quad (2.20)$$

Como o lado esquerdo da expressão contém apenas termos reais, a parte imaginária do lado direito deve se anular; portanto, $N = -2\pi^2$. Logo,

$$k \cot \delta_o = \frac{-\lambda^{-1}}{2\pi^2 g^2(k)} - \frac{2}{\pi g^2(k)} \int_0^\infty dq \frac{g^2(q)q^2 - g^2(k)k^2}{q^2 - k^2}. \quad (2.21)$$

Expandindo $g^{-2}(k)$ em torno de $g^{-2}(0)$, até a ordem k^2 ,

$$g^{-2}(k) = g^{-2}(0) + k^2 \frac{dg^{-2}(0)}{dk^2}, \quad (2.22)$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
k \cot \delta_o = & -\frac{g^{-2}(0)}{2\pi^2\lambda} - \frac{2}{\pi}g^{-2}(0) \int_0^\infty g^2(q)dq - \\
& -\frac{k^2}{2} \left\{ \frac{dg^{-2}(0)}{dk^2} \left[\frac{1}{\lambda\pi^2} + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty g^2(q)dq \right] - \right. \\
& \left. -\frac{4}{\pi}g^{-2}(0) \int_0^\infty \frac{g^2(q) - g^2(0)}{q^2} dq \right\}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Na teoria do alcance efetivo [Jo-75], temos

$$k \cot \delta_o \approx -\frac{1}{a} + \frac{k^2 r_o}{2}, \tag{2.24}$$

onde a é o comprimento de espalhamento e r_o é o alcance efetivo da interação. Identificando as equações (2.24) e (2.23), temos

$$-\frac{1}{a} = -\frac{g^{-2}(0)}{2\pi^2\lambda} - \frac{2}{\pi}g^{-2}(0) \int_0^\infty g^2(q)dq, \tag{2.25}$$

e

$$r_o = \frac{dg^{-2}(0)}{dk^2} \left[-\frac{1}{\lambda\pi^2} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty g^2(q)dq \right] - \frac{4}{\pi}g^{-2}(0) \int_0^\infty \frac{g^2(q) - g^2(0)}{q^2} dq. \tag{2.26}$$

Para o caso em que o fator de forma é constante, $g(p) = 1$, as integrações nos momentos devem ficar limitadas a um valor máximo de corte Λ . Para o comprimento de espalhamento teremos

$$-\frac{1}{a} = -\frac{1}{2\pi^2\lambda} - \frac{2}{\pi} \int_0^\Lambda dq = -\frac{1}{2\pi^2\lambda} - \frac{2}{\pi}\Lambda. \quad (2.27)$$

Com auxílio da equação (2.9), obtemos

$$-\frac{1}{a} = \frac{2}{\pi} \int_0^\Lambda \frac{p^2}{|E_2| + p^2} dp - \frac{2}{\pi}\Lambda, \quad (2.28)$$

de onde identificamos o inverso do comprimento de espalhamento em função de E_2 e do corte Λ :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\pi} \sqrt{|E_2|} \arctan \frac{\Lambda}{\sqrt{|E_2|}}. \quad (2.29)$$

Notamos claramente que o comprimento de espalhamento depende da energia de ligação do sistema de dois corpos e do corte Λ . Para o caso em que o sistema possui estado fracamente ligado ($E_2 \rightarrow 0$), o comprimento de espalhamento tende ao infinito.

Para estudarmos a dependência do alcance da interação com o corte Λ , iremos reescrever o fator de forma como

$$g(p) \approx \exp \left[- \left(\frac{p}{\Lambda} \right)^n \right], \quad (2.30)$$

que numericamente simula a função $\theta(p - \Lambda)$ no limite $n \rightarrow \infty$. Com n um número natural muito maior que 1, substituindo o fator de forma acima na expressão para r_o , dada pela equação (2.26), obtemos

$$r_o = -\frac{2}{\pi\Lambda n} \int_0^\infty [\exp(-y) - 1] y^{-\frac{1}{n}-1} dy, \quad (2.31)$$

que nos mostra que o alcance da interação é inversamente proporcional ao corte Λ ($\Lambda^{-1} \sim r_o$), de acordo com o que já havia sido mostrado por Kharchenko [Kh-73]. Estes resultados são informações relevantes para o estudo de sistemas de três corpos.

2.3 Hamiltoniana para Sistema de Três Bósons

Nesta seção iremos escrever a Hamiltoniana livre de três corpos, não em termos dos momentos de cada corpo, mas em termos dos momentos canonicamente conjugados às coordenadas relativas de Jacobi, que correspondem aos momentos relativos entre dois corpos e o momento relativo de uma partícula em relação ao centro de massa das outras duas. A Hamiltoniana, nestas novas coordenadas tem a vantagem de ser invariante quer estejamos no sistema de referência do centro de massa ou no referencial do laboratório. Além disto, trabalhando-se com as coordenadas de Jacobi no centro de massa, temos apenas dois momentos independentes.

Considere-se um sistema composto por três partículas livres, que serão representadas pelos índices i, j e k , que variam de 1 a 3, sendo $i \neq j \neq k \neq i$. Escolhendo o sistema de referência do laboratório, a posição e o momento associado de cada partícula i serão, respectivamente, denotados pelos vetores $\vec{r}_i$ e $\vec{p}_i$.

Definimos a coordenada relativa entre as partículas j e k , como sendo

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_j - \vec{r}_k, \quad (2.32)$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$ e permutações cíclicas.

O momento conjugado à coordenada relativa entre as partículas j e k é dado por:

$$\vec{P}_i = \frac{m_j m_k}{m_j + m_k} \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \mu_{jk} \frac{d\vec{\rho}_i}{dt}, \quad (2.33)$$

onde μ_{jk} é a massa reduzida das partículas j e k .

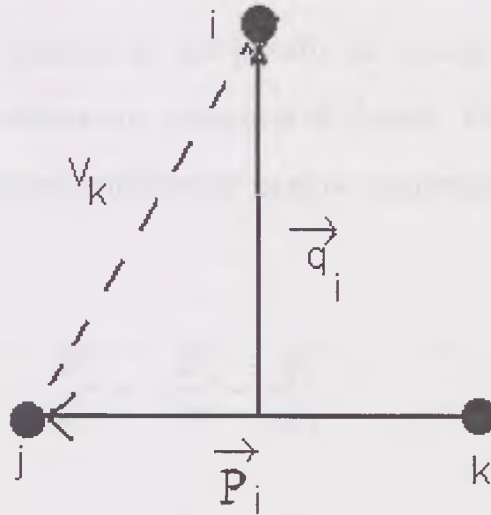


Figura 2.1 - Representação esquemática dos momentos relativos $\vec{q}_i$ e $\vec{P}_i$. V_k é o potencial de interação entre as partículas i e j .

É conveniente definirmos uma outra coordenada tal que relacione a posição do centro de massa de duas das partículas em relação à outra. Desta forma, definimos tal coordenada como sendo

$$\vec{\zeta}_i = -\frac{m_j \vec{r}_j + m_k \vec{r}_k}{m_j + m_k} + \vec{r}_i. \quad (2.34)$$

O momento conjugado à coordenada $\vec{\zeta}_i$ é

$$\vec{q}_i = \frac{m_i(m_j + m_k)}{m_i + (m_j + m_k)} \frac{d\vec{\zeta}_i}{dt} = \mu_{i,jk} \frac{d\vec{\zeta}_i}{dt} = -\frac{\mu_{i,jk}}{m_j + m_k} (\vec{p}_j + \vec{p}_k) + \frac{\mu_{i,jk}}{m_i} \vec{p}_i, \quad (2.35)$$

onde $\mu_{i,jk} = \frac{m_i(m_j + m_k)}{m_i + m_j + m_k}$ é a massa reduzida da partícula i e a soma das partículas j e k .

Ao invés de escrevermos a equação de movimento em termos dos momentos de cada partícula, podemos fazê-lo em termos dos momentos de Jacobi. Variando-se os índices i , j e k , obtemos três pares de equações equivalentes para os momentos de Jacobi, do tipo que segue abaixo:

$$\frac{\vec{P}_j}{\mu_{ik}} = -\frac{\vec{P}_i}{m_k} - \frac{\vec{q}_i}{\mu_{i,jk}}, \quad (2.36)$$

$$\vec{q}_j = \vec{P}_i - \frac{m_j}{m_j + m_k} \vec{q}_i. \quad (2.37)$$

Usando as equações dadas pela relação acima, iremos escrever a Hamiltoniana no centro de massa. A vantagem de se trabalhar no sistema de referência do centro de massa é que temos apenas dois momentos independentes, pois $\vec{P}_{cm} = \sum \vec{p}_i = \vec{0}$. A posição do centro de massa é dada por

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (2.38)$$

onde $M = \sum m_i$ é a massa total do sistema. No sistema de referência do centro de massa, as posições das partículas são denotadas pelos vetores $\vec{R}_i$. Uma vez que

$$\vec{R}_{cm} = \vec{r}_i - \vec{R}_i, \quad (2.39)$$

observamos que tanto $\vec{\rho}_i$ como $\vec{\zeta}_i$ independem da escolha do sistema. Portanto é conveniente trabalharmos com este novo conjunto de coordenadas.

A Hamiltoniana total H_o que descreve um sistema de três partículas livres, no referencial do laboratório, será

$$H_o = \frac{P_{cm}^2}{2M} + \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} + \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}, \quad (2.40)$$

enquanto que, para a Hamiltoniana no referencial do centro de massa do sistema ($\vec{P}_{cm} = 0$), teremos:

$$H_{CM} = \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} + \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}. \quad (2.41)$$

2.4 Formalismo de Mitra

Nesta seção iremos descrever o método de Mitra, que é um caso particular das equações de Faddeev para potenciais separáveis. Nesse caso, é conveniente fazer a dedução a partir do formalismo de Schrödinger. Escrevemos inicialmente a equação de Schrödinger na forma operatorial, para um sistema de três corpos com energia E_3 , no centro de massa:

$$\left(\frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} + \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}} \right) |\psi\rangle + \sum_{j=1}^3 \lambda_j |\chi_j\rangle \langle \chi_j | \psi\rangle = E_3 |\psi\rangle, \quad (2.42)$$

onde o potencial separável do sistema é

$$V = \sum_{j=1}^3 \lambda_j |\chi_j\rangle\langle\chi_j|. \quad (2.43)$$

Invertendo-se a equação e multiplicando-se à esquerda por $\langle\chi_i|$, da mesma forma que na seção 2.2, obtemos

$$\langle\chi_i|\psi\rangle \left[1 - \langle\chi_i| \frac{\lambda_i}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} |\chi_i\rangle \right] = \sum_{j \neq i} \langle\chi_i| \frac{\lambda_j}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} |\chi_j\rangle \langle\chi_j|\psi\rangle. \quad (2.44)$$

Introduzindo-se os “autokets” do operador momento relativo $\vec{q}_i$ na equação acima, através da projeção à esquerda em $\langle\vec{q}_i|$, e definindo-se $\langle\vec{q}_i|\langle\chi_i| \equiv \langle\vec{q}_i\chi_i|$, temos

$$\begin{aligned} \langle\vec{q}_i\chi_i|\psi\rangle - \lambda_i \int d^3q'_i \langle\vec{q}_i\chi_i| \frac{1}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} |\vec{q}_i\chi_i\rangle \langle\vec{q}_i\chi_i|\psi\rangle = \\ \sum_{j \neq i} \lambda_j \int d^3q_j \langle\vec{q}_i\chi_i| \frac{1}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} |\vec{q}_j\chi_j\rangle \langle\vec{q}_j\chi_j|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Definindo-se o termo $\lambda_i \langle\vec{q}_i\chi_i|\psi\rangle = \phi^{jk}(\vec{q}_i)$ como a função de onda espectadora da interação entre as partículas j e k [Mi-62, Bh-65],

$$\begin{aligned} \lambda_i^{-1} \phi^{jk}(\vec{q}_i) - \int d^3q'_i d^3P_i d^3P'_i \langle\vec{q}_i\chi_i|\vec{P}_i\rangle \langle\vec{P}_i| \frac{1}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} |\vec{P}_i\rangle \langle\vec{P}_i| \vec{q}_i\chi_i\rangle \phi^{jk}(\vec{q}_i) = \\ \sum_{j \neq i} \int d^3q_j d^3P_i d^3P_j \langle\vec{q}_i\chi_i|\vec{P}_i\rangle \langle\vec{P}_i| \frac{1}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} |\vec{P}_j\rangle \langle\vec{P}_j| \vec{q}_j\chi_j\rangle \phi^{ik}(\vec{q}_j). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Usando-se a notação adotada na equação (2.2), temos

$$\left\{ \lambda_i^{-1} - \int d^3 P_i \frac{[g(\vec{P}_i)]^2}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} \right\} \phi^{jk}(\vec{q}_i) = \sum_{j \neq i} \int d^3 q_j d^3 P_i d^3 P_j \langle \vec{q}_i \vec{P}_i | \vec{P}_j \vec{q}_j \rangle \frac{g(\vec{P}_i) g(\vec{P}_j)}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} \phi^{ik}(\vec{q}_j) . \quad (2.47)$$

Porém, das equações (2.36) e (2.37) temos que

$$\langle \vec{q}_i \vec{P}_i | \vec{P}_j \vec{q}_j \rangle = \delta \left(\vec{q}_j - \vec{P}_i + \frac{m_j}{m_j + m_k} \vec{q}_i \right) \delta \left(\vec{P}_j + \frac{\mu_{ik}}{\mu_{i,jk}} \vec{q}_i + \frac{\mu_{ik}}{m_k} \vec{P}_i \right) ; \quad (2.48)$$

de formas que a equação (2.47) se escreve como

$$\left\{ \lambda_i^{-1} - \int d^3 P_i \frac{[g(\vec{P}_i)]^2}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} \right\} \phi^{jk}(\vec{q}_i) = \sum_{j \neq i} \int d^3 q_j \frac{g(\vec{q}_j + \frac{m_j}{m_j + m_k} \vec{q}_i) g \left[\left(-\frac{\mu_{ik}}{\mu_{i,jk}} - \frac{\mu_{ik}}{m_k} \frac{m_j}{m_j + m_k} \right) \vec{q}_i - \frac{\mu_{ik}}{m_k} \vec{q}_j \right]}{E_3 - \frac{q_j^2}{2\mu_{jk}} - \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{m_k} - \frac{q_i^2}{2\mu_{ik}}} \phi^{ik}(\vec{q}_j) . \quad (2.49)$$

Para potenciais sem estrutura interna $g(p) = 1$, a equação acima reduz-se a

$$\left\{ \lambda_i^{-1} - \int d^3 P_i \frac{1}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} \right\} \phi^{jk}(\vec{q}_i) = \sum_{j \neq i} \int d^3 q_j \frac{1}{E_3 - \frac{q_j^2}{2\mu_{jk}} - \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{m_k} - \frac{q_i^2}{2\mu_{ik}}} \phi^{ik}(\vec{q}_j) . \quad (2.50)$$

O fato de usarmos este tipo de potencial, com fator de forma constante no espaço dos momentos, justifica-se pelo interesse, neste trabalho, em obtermos inicialmente informações qualitativas que permitam distinguir os efeitos provenientes do alcance da interação dos demais efeitos. Observar-se-á, entretanto, que devido ao fato de que a mecânica quântica para interações no limite de alcance zero é renormalizável, pode-se fazer previsões quantitativas, em particular para baixas energias, conforme veremos nos capítulos que seguirão. A renormalizabilidade da teoria nos permitirá obter correlações entre os observáveis de três corpos na onda S.

Na equação (2.50), temos uma divergência linear na integral do momento, no lado esquerdo da equação. Contudo, para eliminar essa divergência, usamos o mesmo raciocínio que nos levou a introduzir um corte na equação (2.50) para eliminar a divergência, e a seguir, na equação (2.29), associá-lo a um observável de dois corpos.

Segue, portanto, que

$$4\pi \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{E_2^{jk} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} - \frac{1}{E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} - \frac{P_i^2}{2\mu_{jk}}} \right) P_i^2 dP_i \phi^{jk}(\vec{q}_i) =$$

$$\sum_{j \neq i} \int d^3 q_j \frac{1}{E_3 - \frac{q_j^2}{2\mu_{jk}} - \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{m_k} - \frac{q_i^2}{2\mu_{ik}}} \phi^{ik}(\vec{q}_j) . \quad (2.51)$$

Ou seja,

$$-8\pi\mu_{jk} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{P_i^2 - 2\mu_{jk}E_2^{jk}} - \frac{1}{P_i^2 - 2\mu_{jk} \left(E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}} \right)} \right) P_i^2 dP_i \phi^{jk}(\vec{q}_i) =$$

$$\sum_{j \neq i} \int d^3 q_j \frac{1}{E_3 - \frac{q_j^2}{2\mu_{jk}} - \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{m_k} - \frac{q_i^2}{2\mu_{ik}}} \phi^{ik}(\vec{q}_j) . \quad (2.52)$$

Como o integrando, no lado esquerdo da equação acima, é uma função par, então

$$\begin{aligned}
 & -4\pi\mu_{jk} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{P_i^2 - 2\mu_{jk}E_2^{jk}} - \frac{1}{P_i^2 - 2\mu_{jk}\left(E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}}\right)} \right) P_i^2 dP_i \phi^{jk}(\vec{q}_i) = \\
 & \sum_{j \neq i} \int d^3q_j \frac{1}{E_3 - \frac{q_j^2}{2\mu_{jk}} - \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{m_k} - \frac{q_i^2}{2\mu_{ik}}} \phi^{ik}(\vec{q}_j) . \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

No lado esquerdo da equação acima os pólos são $\pm i\sqrt{-2\mu_{jk}E_2}$ e $\pm i\sqrt{-2\mu_{jk}\left(E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}}\right)}$.

$$\begin{aligned}
 & 4\pi\mu_{jk} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\mu_{jk}\left(E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}}\right) - 2\mu_{jk}E_2^{jk}}{\left(P_i^2 - 2\mu_{jk}E_2^{jk}\right)\left[P_i^2 - 2\mu_{jk}\left(E_3 - \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}}\right)\right]} \right) P_i^2 dP_i \phi^{jk}(\vec{q}_i) = \\
 & \sum_{j \neq i} \int d^3q_j \frac{1}{E_3 - \frac{q_j^2}{2\mu_{jk}} - \frac{\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j}{m_k} - \frac{q_i^2}{2\mu_{ik}}} \phi^{ik}(\vec{q}_j) . \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

Efetutando-se as integrações, obtemos na onda S

$$\begin{aligned}
 & \left(-\sqrt{-E_2^{jk}} + \sqrt{-E_3 + \frac{q_i^2}{2\mu_{i,jk}}} \right) \phi^{jk}(\vec{q}_i) = \\
 & \frac{1}{\pi (2\mu_{jk})^{\frac{3}{2}}} \sum_{j \neq i} m_k \int_0^\Lambda dq_j \frac{q_j}{q_i} \ln \frac{\frac{q_j^2}{2\mu_{jk}} + \frac{q_i q_j}{m_k} + \frac{q_i^2}{2\mu_{ik}} - E_3}{\frac{q_j^2}{2\mu_{jk}} - \frac{q_i q_j}{m_k} + \frac{q_i^2}{2\mu_{ik}} - E_3} \phi^{ik}(\vec{q}_j) . \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

onde Λ é o corte da interação nuclear e, como já mencionamos antes, está relacionado ao alcance da interação

$$\Lambda^{-1} \approx r_o. \quad (2.56)$$

Este parâmetro regulariza o integrando da equação (2.55), tornando-o quadraticamente integrável e corresponde a uma nova escala física que deverá ser fixada quando efetuamos o limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Esta escala física é a energia de ligação do sistema de três corpos.

O processo acima efetuado é semelhante ao processo de renormalização usado em teoria quântica de campos. O valor da constante de acoplamento, dado pela equação (2.8), elimina as divergências lineares da integral do momento para a propagação do subsistema de dois corpos, a energia E_2^{jk} é a escala física introduzida na renormalização da matriz T de dois corpos. Argumento similar foi utilizado por Jackiw [Ja-91] para determinar a amplitude de espalhamento de duas partículas em duas dimensões espaciais.

Concluindo, desenvolvemos nesse capítulo o formalismo de três corpos com potenciais separáveis, na onda S , segundo o método de Mitra, que será aplicado nos capítulos seguintes. O resultado principal consiste na equação 2.55.

Capítulo 3

Elaboración de la Memoria de Proyecto de Construcción

3.1. Introducción

Este capítulo describe el proceso de elaboración de la Memoria de Proyecto de Construcción, que es el documento que define los requisitos y condiciones para la construcción de un sistema de información. El proceso comienza con la identificación de los requisitos del usuario, que se obtienen a través de entrevistas, cuestionarios y análisis de documentos. Estos requisitos se organizan en un modelo de datos, que describe la estructura y relaciones de los datos del sistema. A continuación, se elabora el modelo de flujo de datos, que describe el proceso de flujo de información entre los componentes del sistema. Finalmente, se elabora el modelo de flujo de control, que describe el proceso de flujo de control entre los componentes del sistema. Estos tres modelos se integran en la Memoria de Proyecto de Construcción, que es el documento que define los requisitos y condiciones para la construcción de un sistema de información.

Capítulo 3

Efeito Efimov e o Sistema de Três Bósons Idênticos

3.1 Introdução

Em um sistema de dois núcleons, a energia de ligação diminui à medida que a constante de acoplamento decresce. Em um sistema de três núcleons, à medida que a constante de acoplamento da interação, que liga dois corpos, decresce, a energia do sistema de três corpos diminui também. Contudo, quando a constante de acoplamento da interação de dois corpos assume um valor crítico de tal forma que os estados de dois corpos são fracamente ligados ($E_2 \rightarrow 0$), o que se observa é a presença de infinitos estados fracamente ligados de três corpos. Estes estados são conhecidos como *estados Efimov* [Ef-70], sendo discutidos mais recentemente por Efimov em um artigo de revisão [Ef-90]. Amado e Noble [Am-72] explicaram esse efeito inesperado em termos das propriedades do integrando da equação integral de três corpos, mostrando que tal integrando se tornava *não-compacto* no limite zero para a energia de ligação do sub-sistema de duas partículas. A seguir, Fonseca, Redish e Shanley [Fo-79] estudaram o efeito em um sistema composto de duas partículas pesadas e uma leve, usando o modelo de Born-Oppenheimer no limite em que a energia de ligação entre o par leve - pesado vai a zero. Concluíram que, devido ao tamanho grande do estado

ligado desse sub-sistema, no limite Efimov as duas partículas pesadas sentiam um potencial atrativo que ia com o inverso do quadrado da distância entre elas.

Os estados Efimov são extremamente interessantes tanto do ponto de vista experimental como teórico, devido a suas propriedades não usuais. O estudo de suas propriedades singulares podem conduzir a um melhor entendimento da física de sistemas de três corpos. Tais estados são fracamente ligados e suas funções de onda se estendem muito além dos estados normais, o que afetará os fatores de forma carregados do estado considerado. Assim, se tais estados existem na natureza, eles certamente irão dominar o espalhamento de baixas energias de uma das partículas com o estado ligado das outras duas. Iremos explorar mais essa possibilidade no capítulo 6, no contexto dos núcleos exóticos leves, que foram recentemente descobertos.

A determinação numérica de várias energias de ligação, no limite Efimov de sistemas de três núcleons na onda S , estado de spin dubleto, foi feita em [Ad-82], usando interações separáveis de dois corpos com fatores de forma de Yamaguchi [Ya-54], no modelo de Amado [Am-63]. O principal resultado obtido foi que o estado virtual, que é bem conhecido para tal sistema, seria um estado Efimov.

Consideraremos nesse capítulo o caso mais simples de um sistema de três bósons idênticos, com massa unitária, e com interação de dois corpos do tipo delta de Dirac no espaço de coordenadas, com auxílio da renormalizabilidade da teoria. Calculamos alguns estados Efimov, mostrando a dependência da energia de três corpos com o comprimento de espalhamento de dois corpos, e discutimos os aspectos gerais do problema, incluindo a conexão entre os estados Efimov e os estados Thomas.

3.2 Sistema de Três Partículas Idênticas

O sistema que consideraremos a seguir é o de três bósons idênticos, com massa unitária, cujo potencial de dois corpos, no espaço dos momentos, onde S , é dado por fator de forma constante,

$$g(p) = 1, \quad (3.1)$$

que corresponde a uma interação tipo delta no espaço de coordenadas.

Obtemos as energias correspondentes para o sistema usando-se a equação (2.55). Desta forma, temos

$$\left\{ \left(\sqrt{-E_3 + \frac{3q_i^2}{4}} \right) \right\} \phi(q_i) = \frac{2}{\pi} \int_0^\Lambda dq_j \frac{q_j}{q_i} \ln \frac{q_j^2 + q_i q_j + q_i^2 - E_3}{q_j^2 - q_i q_j + q_i^2 - E_3} \phi(q_j), \quad (3.2)$$

onde Λ qualitativamente representa o inverso do alcance da interação, como já discutido no capítulo anterior.

Eliminamos as dimensões na equação acima, através de uma mudança nas variáveis,

$$x \equiv \frac{q_j}{\Lambda} \quad e \quad y \equiv \frac{q_i}{\Lambda}, \quad (3.3)$$

e através de uma redefinição da energia,

$$\epsilon_3 \equiv \frac{E_3}{\Lambda^2}. \quad (3.4)$$

Redefinimos também as funções correspondentes:

$$f(y) \equiv q_i \phi(q_i) \quad e \quad f(x) \equiv q_j \phi(q_j), \quad (3.5)$$

de modo que

$$f(y) = \frac{2}{\pi \left[\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - \epsilon_3} \right]} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{y^2 + x^2 + yx - \epsilon_3}{y^2 + x^2 - yx - \epsilon_3} \right] f(x) . \quad (3.6)$$

As quantidades ϵ_3 são adimensionais e são as energias dos estados Efimov quando $\epsilon_2 = \frac{E_2}{\Lambda^2} \rightarrow 0$ para uma interação de alcance efetivo finito tal que $\Lambda^{-1} = 1$ e cujo potencial tem o fator de forma constante dado por (3.1). Na tabela 3.1, são mostradas as energias adimensionais correspondentes, obtidas numericamente, para alguns estados Efimov.

n	$-\epsilon_n$
0	3.166×10^{-2}
1	6.021×10^{-5}
2	1.174×10^{-7}

Tabela 3.1 - Energia dos estados Efimov.

A compreensão deste processo de formação dos estados Efimov ligados de três corpos não é simples. Em 1972, Stelbovics e Dodd [St-72] estudaram as trajetórias dos autovalores para um sistema de três corpos com um potencial separável de Yamaguchi [Ya-54], com spins e sem spins, utilizando o modelo de Amado [Am-63, Aa-64, Aa-65]. Eles observaram que, para constantes de acoplamento que produziam grandes valores para o comprimento de espalhamento de dois corpos, inúmeros estados fracamente ligados eram produzidos.

De fato, o número de estados ligados em sistemas de três corpos pode ser estimado por [Ef-70, Ef-81]

$$N \approx \pi^{-1} \log\left(\frac{|a|}{r_o}\right) , \quad (3.7)$$

de formas que, para $a \rightarrow \infty$, temos $N \rightarrow \infty$.

Na figura 3.1, tomamos $r_o = 1$ fm, utilizando o potencial de Yamaguchi e variamos o comprimento de espalhamento. Notamos que, quando o comprimento de espalhamento tende ao infinito, a energia de três bósons tende a um dos autovalores dos estados Efimov. As energias adimensionais de três bósons ϵ_3^n são constantes e independem do alcance da interação. Conseqüentemente, a energia do sistema de três bósons é inversamente proporcional ao quadrado do alcance da interação (Λ^{-1}). Este resultado está de acordo com os resultados obtidos por Skorniyakov e Ter-Martirosian [Sk-56, Da-61].

Em um contexto diferente, em 1937, Thomas [Th-35] observou que, se um sistema não relativístico de três partículas interage via potencial de interação de dois corpos de curto alcance, então quando o alcance da interação de dois corpos vai a zero ($r_o \rightarrow 0$), a energia do sistema de três partículas tende ao infinito, colapsando o sistema.

Note-se que, usando a equação (2.55) para um valor fixo de ϵ_2 , obtemos numericamente o valor da energia adimensional do sistema ϵ_3 . Percebe-se que, à medida que o alcance da interação diminui, o estado de três corpos tende a ficar mais ligado, de modo que quando o alcance da interação nuclear se anula ($\Lambda \rightarrow \infty$), a energia do sistema de três corpos é infinita, como já fora observado por Skorniyakov e Ter-Martirosian [Sk-56]. Desta forma no limite Thomas ($\Lambda \rightarrow \infty$), o sistema de três núcleons tem infinitos estados ligados com energia infinita.

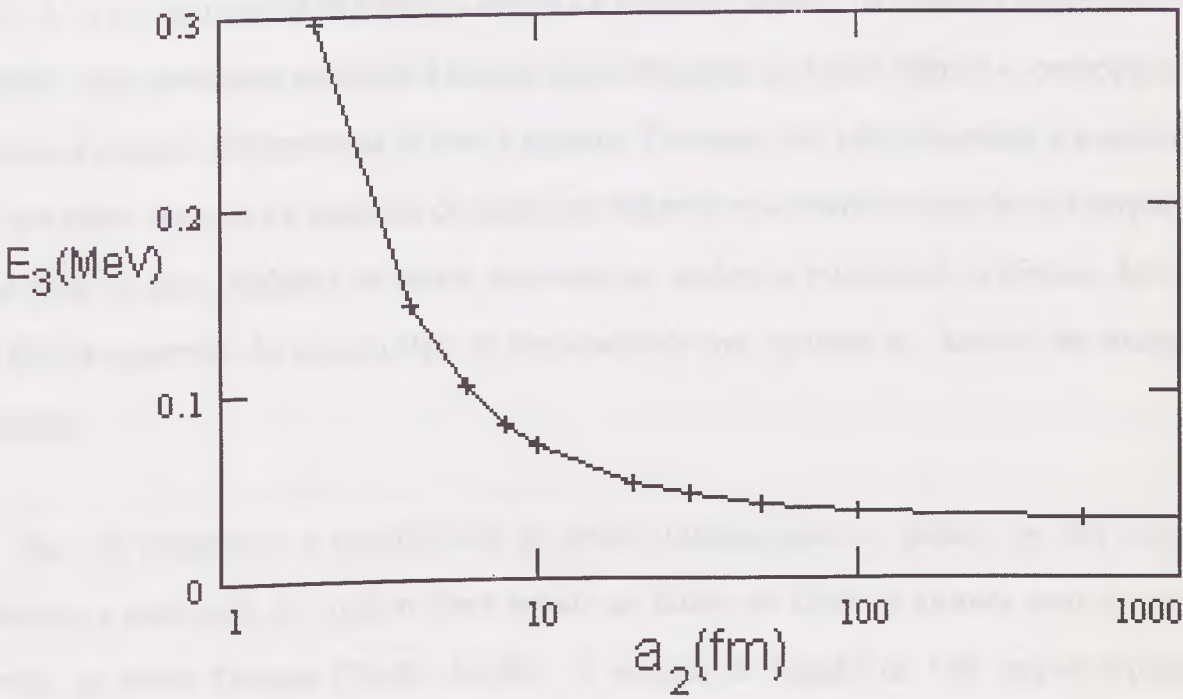


Fig. 3.1 - Dependência da energia de três corpos com o comprimento de espalhamento.

Examinando a equação (3.6), observamos claramente a conexão entre os efeitos Thomas e Efimov, um resultado já bem conhecido [Te-76, Ef-88, Ad-91], tendo sido mostrado em [Ad-88] que ambos os efeitos são provenientes da mesma singularidade do integrando (“kernel”) da equação integral. Para obtermos o efeito Efimov, devemos considerar $E_2 \rightarrow 0$ ou, equivalentemente, $a \rightarrow \infty$ enquanto que, para o efeito Thomas, consideramos $r_o \rightarrow 0$ ou seja, $\Lambda \rightarrow \infty$. Em ambos os casos, ϵ_2 tenderá a zero e o “kernel” da equação integral será o mesmo, quer estejamos no limite Thomas, quer estejamos no limite Efimov e, conseqüentemente, a energia adimensional ϵ_3^n será a mesma. Portanto, em três dimensões a existência de um efeito implica na presença do outro em sistemas não relativísticos de três corpos, e por meio de uma mudança na escala das energias, podemos reproduzir os efeitos. Ambos os efeitos decorrem do mesmo tipo de singularidade que aparece no “kernel” da equação integral.

Em três dimensões, a sensibilidade do estado fundamental do sistema de três corpos é devida a existência do colapso deste estado no limite da força de alcance zero, ou seja, devido ao efeito Thomas [Th-35, Ad-88]. A energia de ligação de três corpos depende fortemente do alcance da interação. Para potenciais de alcance muito curto, a energia do estado fundamental do sistema de três corpos não é determinada apenas pela energia do estado fundamental do subsistema de dois corpos e torna-se infinita no limite do alcance zero, sendo que a equação dinâmica apresenta divergência e necessita de uma regularização. Este fato implica na introdução de um novo parâmetro, independente dos observáveis de dois corpos e que pode ser assimilado a uma grandeza física de três corpos, em três dimensões. Iremos escolher, por exemplo, a energia do estado fundamental do sistema de

três corpos. Este procedimento independe do processo de regularização adotado e, quando se efetua a renormalização, dizemos que uma nova escala é introduzida no sistema. Os demais observáveis de três corpos irão depender das escalas físicas do sistema, ou seja, dos observáveis de dois corpos à baixas energias e da energia do estado fundamental [Ad-95].

A renormalizabilidade da teoria de muitos corpos com força de alcance zero, em particular aplicada a sistemas de três corpos, assegura que todas as propriedades físicas de baixas energias do sistema de três corpos estão bem definidas se um observável de três corpos e todos os demais de baixas energias de dois corpos são fornecidos [Ad-95]. Em vista disto, podemos realizar os estudos necessários utilizando-se modelos mais simples, já que as correlações obtidas, devem, a baixa energia, independender do tipo de potencial de curto alcance utilizado. A correlação entre os observáveis de três corpos aparece no limite do efeito Thomas, quando um observável do sistema de três corpos é determinado pela energia de ligação do estado fundamental de três corpos. As correlações entre observáveis no sistema de três corpos são uma consequência da renormalizabilidade da mecânica quântica no limite de potencial de alcance zero.

3.3 Condições Limites para Estados Efimov

Para uma dada constante de acoplamento que liga o subsistema de dois corpos, temos, correspondentemente, um estado ligado de três corpos. Variando essa constante de acoplamento, acompanhamos a evolução destes estados, e verificamos que à medida que a energia de ligação de dois corpos diminui, tanto a energia dos estados ligados como o número de estados ligados de três corpos diminui. Quando a constante de acoplamento de dois corpos

atinge um certo valor crítico, tal que $E_2 = 0$, infinitos estados fracamente ligados de três corpos aparecem, conhecidos por estados Efimov. Porém, se diminuirmos mais ainda a constante de acoplamento da interação de dois corpos, os estados dos subsistemas serão virtuais enquanto que, a energia de cada estado Efimov diminui. Portanto, teremos alguns valores críticos para a constante de acoplamento que irão estabelecer os limites para a existência de estados excitados Efimov. A presença de estados virtuais nos subsistemas provoca uma atração menos intensa, afastando mais as partículas e diminuindo a quantidade de estados fracamente ligados. Portanto, existe uma energia crítica de um estado virtual de dois corpos E_2^{vc} de tal maneira que não existe mais qualquer estado ligado de três corpos.

Anteriormente foi feito um estudo por Richard e Fleck [Ri-94], relacionado aos estados Efimov, usando interações de curto alcance. Eles mostraram que existe um certo intervalo (domínio) para as constantes de acoplamento que, quando os sub-sistemas não são ligados, poderia garantir três e até quatro estados ligados de três corpos. Entretanto, considerando-se que o que temos diretamente disponível são as energias de ligação e não as constantes de acoplamento, em nosso procedimento fixamos as energias de tais sub-sistemas (ligadas ou virtuais) juntamente com a energia do estado ligado de três corpos através dos dados experimentais e procuramos pelo estado excitado de três corpos cuja energia é imediatamente superior à (menos ligada que a) energia que foi fixada. Assim, estudamos o intervalo de energia dos subsistemas que anula o $(n+1)$ -ésimo estado excitado Efimov usando o modelo de alcance zero, procurando, naturalmente, alguma correlação entre a energia de ligação do sistema de três corpos, a energia do estado de dois corpos e a energia do n -ésimo estado

excitado Efimov.

Obtemos a equação de Mitra para um sistema de três bósons idênticos a partir de (2.55):

$$f(y) = \frac{2\pi^{-1}}{\pm\sqrt{-\epsilon_2^v} + \sqrt{\frac{3}{4}y^2 - \epsilon_3^n}} \int_0^1 dx \ln \frac{x^2 + y^2 - \epsilon_3^n + yx}{x^2 + y^2 - \epsilon_3^n - yx} f(x), \quad (3.8)$$

na qual $f(x)$ é a função espectadora do bóson. As energias adimensionais do subsistema de dois corpos e do sistema de três corpos são definidas, respectivamente, por

$$\epsilon_2^v = \frac{E_2^v}{\Lambda^2}, \quad (3.9)$$

e

$$\epsilon_3^n = \frac{E_3^n}{\Lambda^2}, \quad (3.10)$$

em que E_2^v e E_3^n são as correspondentes energias do subsistema de dois corpos e do sistema de três corpos e Λ é a função corte e que está relacionada com o alcance da interação ($r_o \sim \Lambda^{-1}$). Os momentos adimensionais x e y são dados por

$$y = \frac{p}{\Lambda} \quad e \quad x = \frac{k}{\Lambda}. \quad (3.11)$$

O sinal $(-)$ está associado ao estado virtual e o $(+)$ ao estado ligado de dois corpos na equação (3.8).

O estado virtual de dois corpos com energia crítica ϵ_2^{vc} anula o $(n+1)$ -ésimo estado Efimov. Para obtermos este valor, precisamos resolver numericamente a equação (3.8) com $\epsilon_3^{n+1} = 0$. A energia do n -ésimo estado Efimov ϵ_3^n é obtida numericamente, mantendo-se fixo os valores de ϵ_2^{vc} ,

Eliminando o corte Λ , que não é diretamente observável, podemos estudar a correlação entre a energia do estado excitado Efimov E_3^1 e a energia do estado fundamental Efimov E_3^0 em termos da energia de dois corpos E_2 . A curva obtida na figura 3.2 define a região onde é possível encontrar pelo menos um estado Efimov excitado. De forma equivalente, podemos estudar a correlação entre a energia do segundo estado excitado Efimov E_3^2 e a energia do primeiro estado excitado E_3^1 . A curva obtida superpõe a que foi obtida na figura 3.2. Esta coincidência nos gráficos reflete a renormalizabilidade da teoria do alcance zero. Em suma, se os demais observáveis do sistema de três corpos ficam bem determinados estando os observáveis de dois corpos e um de três corpos fixos no limite de alcance zero, isto implica que o corte Λ é o fator de escala do sistema de forma que as razões se tornam estáveis:

$$\frac{E_3^2 - E_2}{E_3^1} = \frac{E_3^1 - E_2}{E_3^0}. \quad (3.12)$$

Quando a energia de dois corpos é nula, a razão entre as energias do estado excitado e do fundamental é da ordem de 10^{-3} . A energia do estado excitado é bem menor que a do estado fundamental. Um incremento na ligação de dois corpos implica num potencial mais atrativo, aumentando a energia de separação do estado excitado. Contudo existe um ponto limiar a partir do qual um incremento na energia de ligação de dois corpos implica numa diminuição da energia de separação até se anular em $\sqrt{E_2/E_3^{(0)}} \approx 0.25$.

Por outro lado, quando o estado de dois corpos é virtual, a interação é menos atrativa. Como consequência, a região onde podemos encontrar um estado excitado de três corpos é bem menor. O extremo, nesse caso, ocorre quando $\sqrt{E_2^{vc}/E_3^{(0)}} \approx -0.03$.

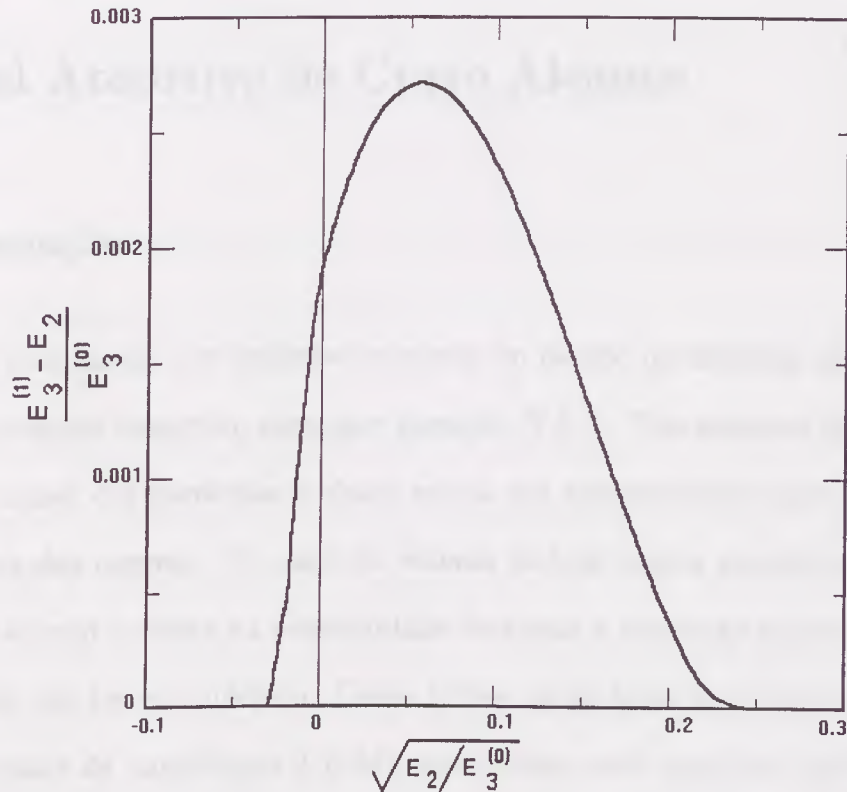


Figura 3.2 - Razão da energia de separação do primeiro estado excitado Efimov (E_3^1) com a energia de ligação do estado fundamental (E_3^0). Para a região do estado fundamental de dois corpos ($\sqrt{E_2/E_3^0} < 0$), temos E_3^1/E_3^0 e para a de estados ligados de dois corpos ($\sqrt{E_2/E_3^0} > 0$) temos $(E_3^1 - E_2)/E_3^0$. Não existe estado excitado Efimov para razões $\sqrt{E_2/E_3^0}$ fora do suporte da curva.

Capítulo 4

Potencial Absortivo de Curto Alcance

4.1 Introdução

Ultimamente tem havido um interesse crescente no estudo de sistemas de três partículas envolvendo potencial absortivo, como por exemplo $\bar{N}NN$. Tais sistemas permitiriam uma aproximação maior das partículas e, deste modo, um conhecimento mais profundo da estrutura interna das mesmas. No caso do sistema de três corpos antipróton - dêuteron, a motivação do estudo consiste na possibilidade de testar a interação núcleon - antinúcleon na presença de um terceiro núcleon. Dessa forma, se poderia ter a oportunidade de testar os mecanismos de aniquilação [Cu-84], assim como, sob condições diferentes, a parte imaginária do potencial núcleon - antinúcleon, que é pouco conhecida.

A formulação de sistemas de três corpos com potenciais absortivos tem aplicação em teorias de muitos corpos [Au-87] assim como no sistema $\bar{p}d$ [Sh-81, Fr-90], onde há dados experimentais disponíveis [Ba-89]. Como um sistema de três corpos, a energia e a largura do sistema antipróton - dêuteron foi calculada [La-88], assim como o espectro do núcleon espectador, usando-se cálculos de Faddeev com interações separáveis [Fr-90].

Motivados pelo trabalho de Rafelski [Ra-80], Cugnon e Vandermeulen [Cu-84] exami-

naram a possibilidade de formação de uma fire-ball num processo de aniquilação, cujo número bariônico final B seja não nulo, ou seja, aniquilação envolvendo um antinúcleon e dois núcleons dentro do núcleo. Eles mostraram que a probabilidade para que estes processos possam ocorrer era apreciável. Bizzarri et al. [Bi-69] mencionam que uma parte dos eventos $\bar{p}d \rightarrow \Lambda K\pi$ não podem ser descritos, na sua totalidade, como reespalhamento dos mésons K e sugerem que devam ser considerados como eventos envolvendo aniquilação de três corpos.

Torna-se evidente a importância em se estudar sistemas de três partículas com potenciais absortivos e, sobretudo, analisar algumas correlações entre os observáveis de três corpos que vão existir.

Dentro do contexto deste trabalho, sobre as correlações nos sistemas de três corpos, iremos considerar o problema em que parte do potencial tem interação absortiva. Vamos estudar o comportamento do sistema, usando um modelo de interação nuclear de dois corpos de forma a permitir estudarmos o seu comportamento no limite em que o alcance da interação tenda a zero (limite Thomas). Nos sistemas $\bar{p}d$, as distâncias características das interações nucleares são pequenas comparadas com a dimensão do dêuteron.

Para termos uma visão qualitativa da dependência dos observáveis deste sistema em termos do alcance da interação ($r_o \approx \Lambda^{-1}$), o potencial de dois corpos, no espaço dos momentos, terá o fator de forma dado por:

$$g(\vec{p}) = 1. \quad (4.1)$$

Quando o parâmetro Λ tende ao infinito, o alcance da interação tende a zero e neste

limite as correlações independem, portanto do alcance da interação. São funções universais que dependem dos observáveis de dois corpos e de uma escala física do sistema de três corpos.

Na seção 4.2, iremos estudar o comportamento dos estados Efimov quando uma parte imaginária é introduzida no potencial de interação de dois corpos, representando um termo absortivo. Realizamos uma expansão perturbativa das energias de três corpos e correspondentes funções espectadoras, na equação integral, obtendo a dependência da largura do estado de três corpos em função do corte Λ . A seguir, através da eliminação desse parâmetro de corte em favor da parte real da energia de três corpos, mostramos a correlação entre a largura e a parte real da energia desses estados, que foram fornecidos em função do módulo da energia do estado de dois corpos.

4.2 Largura dos Estados de Efimov

No capítulo anterior, através do método de Mitra, descrevemos a dinâmica de um sistema de três bósons idênticos com um fator de forma $g(\vec{p}) = 1$, por meio de uma equação integral, em um sistema de unidades em que $\hbar$, c e a massa do núcleon m são iguais a 1 e que é dada por

$$f(y) = \frac{-2}{\pi \left[\sqrt{-\epsilon_2} - \sqrt{\frac{3}{4}y^2 - \epsilon_3} \right]} \int_0^1 dx \ln \frac{x^2 + y^2 + xy - \epsilon_3}{x^2 + y^2 - xy - \epsilon_3} f(x), \quad (4.2)$$

na qual $f(x)$ é a função espectadora do bóson. As energias adimensionais do subsistema de dois corpos ϵ_2 e do sistema ϵ_3 são definidas por

$$\epsilon_2 = \frac{E_2}{\Lambda^2}, \quad (4.3)$$

$$\epsilon_3 = \frac{E_3}{\Lambda^2}, \quad (4.4)$$

na qual E_2 e E_3 são, respectivamente, as energias do subsistema de dois corpos e do sistema de três corpos e Λ é a função corte e que está relacionado com o alcance da interação ($r_o \sim \Lambda^{-1}$). Os momentos adimensionais x e y são dados por

$$y = \frac{p}{\Lambda} \quad e \quad x = \frac{k}{\Lambda}. \quad (4.5)$$

O colapso do sistema surge, para um valor fixo de E_2 , quando o alcance da interação tende a zero ($\Lambda \rightarrow \infty$). Nesta situação, $\epsilon_2 \rightarrow 0$. Portanto surgem infinitos estados ligados com energia adimensional ϵ_3 reais. No limite Thomas ($r_o \rightarrow 0$), o sistema colapsa com energia E_3 infinita. Da mesma maneira, podemos obter infinitos estados ligados se considerarmos o alcance da interação r_o fixo (Λ fixo) e $E_2 \rightarrow 0$. Neste caso, as energias adimensionais do sistema ϵ_3 são as mesmas que as do efeito Thomas, sendo a energia do sistema dada por

$$E_3 = \epsilon_3 \Lambda^2. \quad (4.6)$$

Nesse limite temos o efeito Efimov. Ambos os efeitos, Thomas e Efimov, são portanto

diretamente relacionados por uma transformação de escala, dada pelo parâmetro Λ . Inicialmente, iremos verificar se este efeito ainda persiste com a introdução de uma parte absorptiva no potencial que temos usado, na teoria de alcance zero (cujo fator de forma é constante no espaço dos momentos).

Naturalmente, se a constante de acoplamento λ é complexa, a energia de dois corpos ϵ_2 também será. Torna-se claro, ao olharmos a Eq.(4.2), que as energias dos n -ésimos estados Efimov ϵ_3^n não irão se alterar quando introduzirmos um potencial absorptivo, pois $\epsilon_2 \rightarrow 0$. Portanto, de antemão podemos observar que a introdução de um potencial absorptivo não eliminará o efeito Efimov, mantendo-se o colapso do sistema, já que a parte real da energia de três bósons depende quadraticamente de Λ e tende a infinito quando o alcance da interação tende a zero.

Torna-se, entretanto, de interesse examinar a dependência da largura do estado de três corpos (relacionado à parte imaginária da energia) com o alcance da interação. Para estimarmos a dependência da largura Γ_3^n em função do alcance da interação, iremos expandir a equação(4.2) em termos de $\sqrt{-\epsilon_2}$, já que a razão $\frac{E_2}{E_3}$, na teoria do alcance zero, se anula pois E_2 é um valor fixo e E_3 tende ao infinito.

Introduzimos as quantidades perturbadas

$$\epsilon_3'^n = \epsilon_3^n + \delta\epsilon_3^n, \quad (4.7)$$

e

$$f'^n(y) = f^n(y) + \delta f^n(y). \quad (4.8)$$

As quantidades $\epsilon_3'^n$ e f'^n são complexas quando o subsistema decai enquanto que ϵ_3^n e f^n são

reais e determinadas numericamente quando $\epsilon_2 \rightarrow 0$. Deste modo, a expansão da equação (3.6) na ordem mais baixa em $\sqrt{-\epsilon_2}$ é

$$\begin{aligned} \delta f^n(y) = & \left(\sqrt{-\epsilon_2} + \frac{\delta \epsilon_3^n}{2\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - \epsilon_3^n}} \right) \frac{f^n(y)}{\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - \epsilon_3^n}} + \\ & + \frac{2}{\pi\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - \epsilon_3^n}} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{y^2 + x^2 + yx - \epsilon_3^n}{y^2 + x^2 - yx - \epsilon_3^n} \right) \delta f^n(x) + \right. \\ & \left. + \frac{2yx f^n(x) \delta \epsilon_3^n}{(y^2 + x^2 - \epsilon_3^n)^2 - (yx)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Da linearidade da equação acima, a variação da energia de três bósons é dada por

$$\delta \epsilon_3^n = -C_n \sqrt{-\epsilon_2}, \quad (4.10)$$

onde C_n são coeficientes provenientes da solução da Eq.(4.10) para cada estado bosônico. Estes coeficientes são valores universais, dependentes apenas da estrutura da equação integral dada pela Eq.(3.6) e independem da energia de dois corpos.

Estes coeficientes C_n são também aproximadamente proporcionais à $\sqrt{-\epsilon_3^n}$, de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{\sqrt{-\epsilon_3^n}} = \alpha, \quad (4.11)$$

na qual α é uma grandeza bem definida, obtida numericamente, como pode ser observado na tabela 4.1 e que pode ser assumida como constante, haja visto a pequena variação de α em comparação com a variação da energia de três corpos.

Para entendermos melhor esta propriedade, devemos lembrar que $\epsilon_3^n \ll 1$, conforme mostrado na tabela acima. O valor de ϵ_3^n na Eq.(4.10) é importante quando apenas $y^2 \approx -\epsilon_3^n$. O termo não homogêneo na Eq.(4.10), isto é, o primeiro termo do lado direito da igualdade cresce com o inverso de $\sqrt{-\epsilon_3^n}$, à medida que $\epsilon_3^n \rightarrow 0$. No segundo termo do lado direito da equação, temos que $\delta\epsilon_3^n$ deve ser proporcional a $\sqrt{-\epsilon_3^n}$, para produzir o mesmo comportamento do termo não homogêneo quando $-\epsilon_3^n$ vai a zero. Portanto, temos

$$\delta\epsilon_3^n \approx -2\sqrt{-\epsilon_3^n}\sqrt{-\epsilon_2} . \quad (4.12)$$

Nesta análise, não levamos em conta o comportamento de f^n , já que a normalização é livre. As considerações, acima expostas, podem ser verificadas observando-se os valores na tabela que segue abaixo.

n	$-\epsilon_n$	C_n	$C_n/\sqrt{-\epsilon_3^n}$
0	3.166×10^{-2}	3.570×10^{-1}	2.0
1	6.021×10^{-5}	1.640×10^{-2}	2.1
2	1.174×10^{-7}	7.193×10^{-4}	2.1

Tabela 4.1 - Energia dos estados de Efimov e coeficientes universais dos estados de três corpos colapsados.

A energia de três corpos é, com auxílio das Eqs.(4.7) e (3.4),

$$E_3^n = (\epsilon_3^n + \delta\epsilon_3^n)\Lambda^2 = (\epsilon_3^n - C_n\sqrt{-\epsilon_2})\Lambda^2 . \quad (4.13)$$

Como

$$E_2 = Re(E_2) - i\frac{\Gamma_2}{2} , \quad (4.14)$$

então podemos escrever

$$\sqrt{-E_2} = \sqrt{\frac{|E_2| - \text{Re}(E_2)}{2}} + i\sqrt{\frac{|E_2| + \text{Re}(E_2)}{2}}. \quad (4.15)$$

Portanto encontramos que a parte real da energia de três bósons é

$$\text{Re}(E_3^n) = \epsilon_3^n \Lambda^2 - C_n \sqrt{\frac{|E_2| - \text{Re}(E_2)}{2}} \Lambda, \quad (4.16)$$

ao passo que a largura Γ_3^n do sistema é

$$\Gamma_3^n = 2C_n \sqrt{\frac{|E_2| + \text{Re}(E_2)}{2}} \Lambda. \quad (4.17)$$

Observe-se que a largura do sistema depende linearmente do inverso do parâmetro do alcance. Já a parte real da energia depende quadraticamente do inverso deste parâmetro. Este parâmetro pode ser determinado através da parte real da energia do sistema, ou seja

$$\begin{aligned} \Lambda = & \left(\frac{1}{2\sqrt{-\epsilon_3^n}} \right) \left[\frac{C_n}{-\sqrt{-\epsilon_3^n}} \sqrt{\frac{|E_2| - \text{Re}(E_2)}{2}} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\left(\frac{C_n}{\sqrt{-\epsilon_3^n}} \right)^2 \left(\frac{|E_2| - \text{Re}(E_2)}{2} \right) - 4\text{Re}(E_3^n)} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente, para obtermos a expressão que correlaciona a largura do sistema de três bósons com a parte real da energia deste sistema, substituímos a Eq.(4.18) na Eq.(4.17) de onde obtemos [Am-92]

$$\Gamma_3 \cong \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \Gamma_2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\alpha} \right)^2 \frac{2\text{Re}(-E_3)}{|E_2| - \text{Re}(E_2)}} - 1 \right], \quad (4.19)$$

na qual consideramos, baseado nos valores numéricos da tabela, o valor de α como constante. Na figura 4.1, podemos observar a correlação entre a largura e a parte real da energia de três corpos. As curvas representam as correlações entre a largura Γ_3 e a parte real da energia de três corpos, para distintos valores de $\Gamma_2/2|E_2|$. Todas as quantidades são dadas em unidades do valor absoluto da energia de dois bósons e com $\alpha = 2$. Pode-se ver, no gráfico, que os valores de Γ_3 têm um limite superior dado pela curva onde a energia de dois corpos E_2 é puramente complexa ($|E_2| = \Gamma_2/2$).

Observe-se que apesar de termos utilizado a teoria de alcance zero para estudarmos o comportamento da largura de decaimento em função da parte real da energia de ligação de três bósons, podemos estender tais idéias para potenciais de curto alcance. Neste caso, a informação física contida na amplitude de espalhamento vai além do polo de dois bósons e isto pode refletir num valor distinto para o coeficiente α .

Na figura 4.2 comparamos os valores extraídos da Eq.(4.19) com os valores numéricos, utilizando potenciais do tipo Yamaguchi [Ya-54],

$$g(p) = \frac{1}{(p^2 + \beta^2)}, \quad (4.20)$$

onde β (fixo em 1.4 fm^{-1} , nesse estudo) é uma constante relacionada ao alcance da interação. De forma equivalente ao estudo feito para o caso em que $g(p) = 1$, temos o gráfico da correlação entre a largura Γ_3 e a parte real da energia de três corpos.

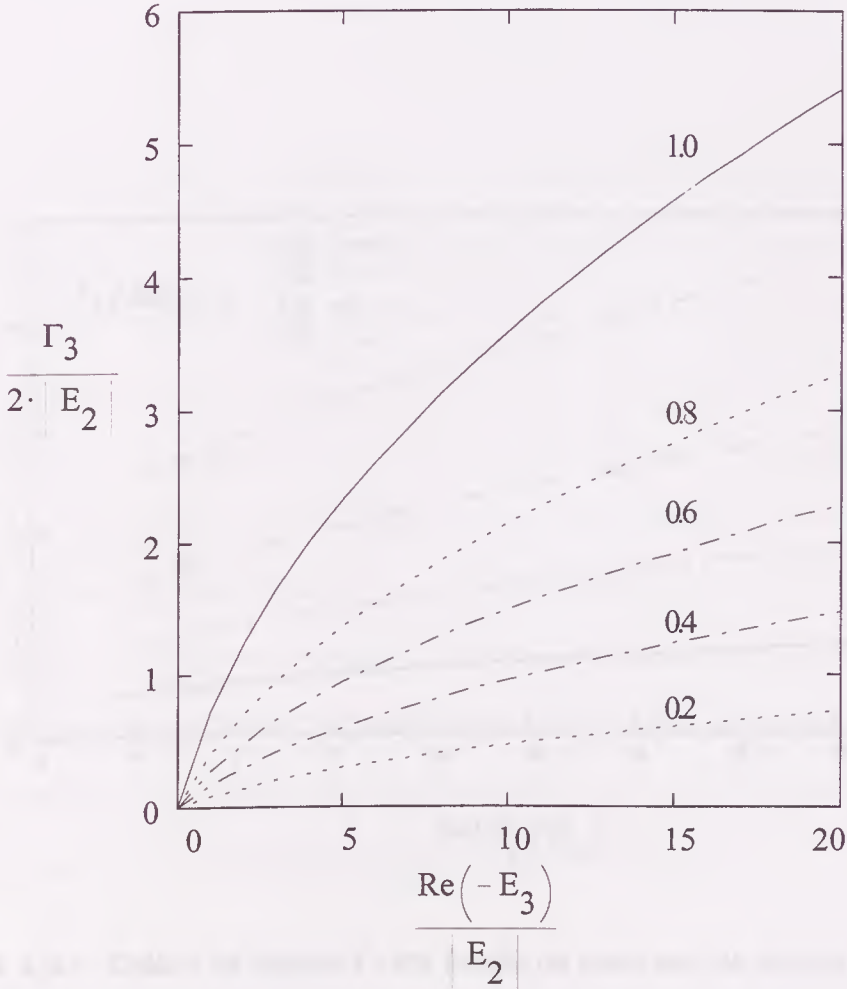


Figura 4.1 - Gráfico mostrando a correlação entre a parte imaginária e a parte real da energia de três corpos. Todas as quantidades são dadas em unidades do valor absoluto da energia complexa de dois corpos, para $\alpha = 2$ e para diversos valores de $\Gamma_2/(2|E_2|)$ ($= 1.0, 0.8, 0.6, 0.4$ e 0.2) que estão representados em cada curva. O limite superior para $\Gamma_3/(2|E_2|)$ é obtido para o caso em que a energia de dois corpos é puramente imaginária ($|E_2| = \Gamma_2/2$).

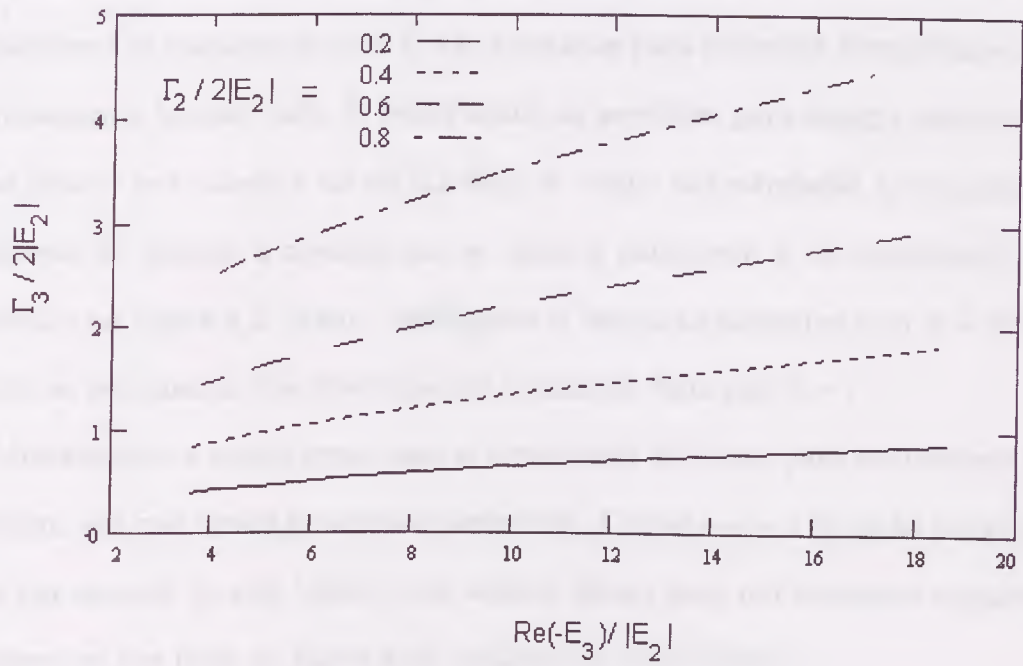


Figura 4.2 - Gráfico da largura Γ_3 em função da parte real da energia de três corpos para um potencial de Yamaguchi, com $\beta = 1.4 \text{ fm}^{-1}$.

Em 1988, Latta e Tandy [La-88], estudaram a dinâmica nuclear de sistemas $NN\bar{N}$, considerando a constante de acoplamento como sendo

$$\lambda = \lambda_R + i\sigma\lambda_I, \quad (4.21)$$

na qual σ é um parâmetro adimensional que incrementa a parte imaginária da interação. Inicialmente os parâmetros λ_R e λ_I são ajustados para descrever o espalhamento a energias extremamente baixas, onde S , sendo usado as previsões para energia zero do potencial de Graz [Sc-85] [ver tabela 1 da ref.[La-88]]. A seguir são estudadas as trajetórias no plano complexo de energia à medida que se varia o parâmetro σ de aniquilação, conforme é mostrado na figura 4.3. Assim, desligou-se a interação absortiva com $\sigma = 0$ e, gradativamente, se incrementa essa interação até o máximo dado por $\sigma = 1$.

Mostraremos a seguir como usar o formalismo de Mitra para estudarmos este tipo de problema em que temos potenciais absortivos. Considere-se a equação integral da onda S para um sistema de três bósons com massas iguais para um potencial separável de curto alcance com um fator de forma $g(p)$ qualquer de curto alcance,

$$\phi(q) = 2 \left[\lambda^{-1} - \int d^3p \frac{g^2(p)}{E_3 - \frac{3}{4}q^2 - p^2} \right]^{-1} \int \frac{d^3k g(\vec{q} + \frac{\vec{k}}{2}) g(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2})}{E_3 - q^2 - k^2 - qk \cos \theta} \phi(k). \quad (4.22)$$

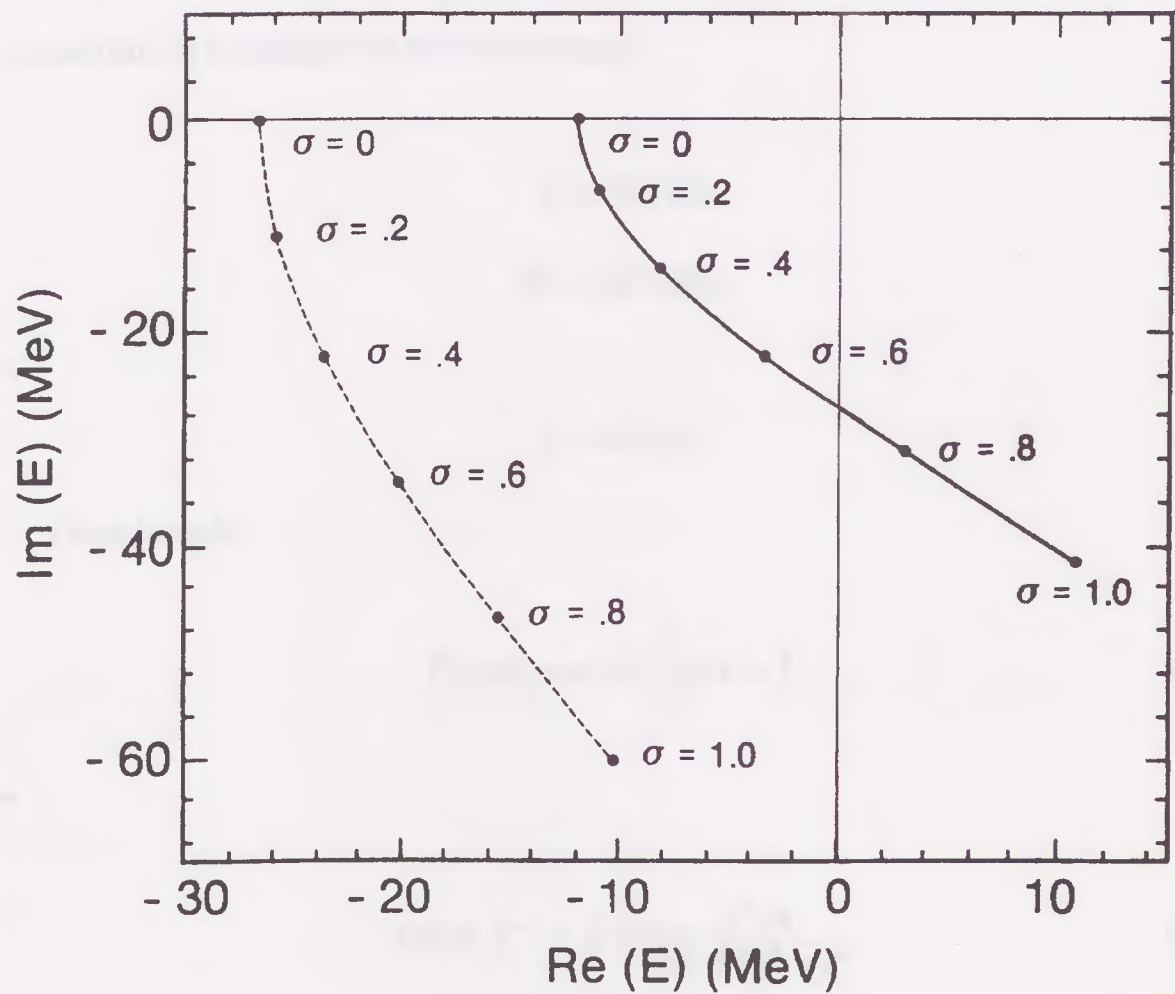


Figura 4.3 - Trajetórias no plano complexo da energia de três corpos, fornecidas em [La-88]. Temos aniquilação nula para $\sigma = 0$, conforme a equação (4.21). A curva cheia corresponde a um cálculo de Faddeev; a tracejada corresponde a uma aproximação de dois corpos para o $\bar{p}d$.

Tomando-se uma variação infinitesimal de σ na constante λ , conforme a equação (4.21), e substituindo na equação (4.22), teremos que

$$\phi' = \phi + \delta\phi, \quad (4.23)$$

$$E'_3 = E_3 + \delta E_3, \quad (4.24)$$

e

$$\lambda' = \lambda + \delta\lambda. \quad (4.25)$$

Considerando

$$G(q, k) = g(\vec{q} + \frac{\vec{k}}{2})g(\vec{k} + \frac{\vec{q}}{2}), \quad (4.26)$$

e

$$A(q) = \lambda^{-1} - \int d^3p \frac{g^2(p)}{E'_3 - \frac{3}{4}q^2 - p^2}, \quad (4.27)$$

expandimos $\delta\lambda$ até a primeira ordem:

$$\phi'(q) = 2 \left(\frac{1}{A(q)} + \frac{\delta\lambda}{[A(q)\lambda]^2} \right) \int \frac{d^3k G(q, k)}{E'_3 - q^2 - k^2 - qk \cos \theta} \phi'(k). \quad (4.28)$$

Porém, expandindo A em termos da energia até a primeira ordem obtemos

$$A(q) = A_o(q) + \delta E_3 B(q), \quad (4.29)$$

na qual

$$A_o(q) = \lambda^{-1} - \int d^3p \frac{g^2(p)}{E_3 - \frac{3}{4}q^2 - p^2}, \quad (4.30)$$

e

$$B(q) = \int d^3p \frac{g^2(p)}{\left(E_3 - \frac{3}{4}q^2 - p^2\right)^2}. \quad (4.31)$$

Portanto, expandindo até a primeira ordem em δE_3 , obtemos

$$\phi'(q) = \frac{2}{A_o^2(q)} \left(A_o(q) - \delta E_3 B(q) + \frac{\delta \lambda}{\lambda^2} \right) \int \frac{d^3k G(q, k) \left(1 - \frac{\delta E_3}{E_3 - q^2 - k^2 - qk \cos \theta}\right)}{(E_3 - q^2 - k^2 - qk \cos \theta)} \phi'(k). \quad (4.32)$$

Definindo

$$D(q) = \int d^3k \frac{G(q, k)}{E_3 - q^2 - k^2 - qk \cos \theta} \phi(k), \quad (4.33)$$

e expandindo até a primeira ordem, em $\delta \phi$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \phi(q) = & \frac{2}{A_o(q)^2} [-\delta E_3 (F(q) A_o(q) + B(q) D(q)) \\ & + A_o(q) \int \frac{d^3k G(q, k)}{E_3 - q^2 - k^2 - qk \cos \theta} \delta \phi(k) + D(q) \frac{\delta \lambda}{\lambda^2}], \end{aligned} \quad (4.34)$$

na qual

$$F(q) = -2 \left(\frac{1}{A_o(q)} \right) \int d^3k G(q, k) \frac{\phi(k)}{(E_3 - q^2 - k^2 - qk \cos \theta)^2}. \quad (4.35)$$

Da linearidade das equações, temos que

$$\delta E_3 \approx C \frac{\delta \lambda}{\lambda^2}, \quad (4.36)$$

na qual C é uma constante que é determinada numericamente. Portanto

$$\delta Re(E_3) = \frac{2C\sigma\lambda_R\lambda_I^2\delta\sigma}{|\lambda|^4}, \quad (4.37)$$

e

$$\delta\Gamma_3 = \frac{2C\lambda_I(\lambda_R^2 - \sigma^2\lambda_I^2)\delta\sigma}{|\lambda|^4}. \quad (4.38)$$

Desta forma

$$\frac{\delta\Gamma_3}{\delta Re(E_3)} = \frac{(\lambda_R^2 - \sigma^2\lambda_I^2)}{\sigma\lambda_R\lambda_I} \quad (4.39)$$

Note que $\sigma \rightarrow 0$, então

$$\frac{\delta\Gamma_3}{\delta Re(E_3)} \rightarrow \infty. \quad (4.40)$$

À medida que $\sigma \rightarrow 0$, a curva intercepta perpendicularmente o eixo das abscissas. Este resultado já era esperado e pode ser visto facilmente usando o teorema de Feynman-Hellmann

$$\frac{\partial E_3}{\partial \sigma} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \sigma} \right\rangle = i\lambda_I \langle V \rangle|_{\sigma \rightarrow 0}, \quad (4.41)$$

e que independe de σ . Note que como a equação acima é um número puramente imaginário para $\sigma \rightarrow 0$, decorre então que a variação da parte real da energia

$$\delta Re(E_3) = 0, \quad (4.42)$$

enquanto que a variação da parte complexa nos fornece a relação

$$\delta \Gamma_3 = -2 \lambda_I \langle V \rangle|_{\sigma \rightarrow 0} \delta \sigma. \quad (4.43)$$

Portanto,

$$C = -\frac{|\lambda|^4}{\lambda_R^2} \langle V \rangle|_{\sigma \rightarrow 0}, \quad (4.44)$$

e

$$\frac{\delta \Gamma_3}{\delta Re(E_3)} \rightarrow \infty. \quad (4.45)$$

Por outro lado, podemos verificar a curvatura da largura de três corpos em função da variação da parte real da energia de três corpos para valores pequenos da largura de dois corpos. Assim, o módulo da energia de dois corpos, neste limite é

$$|E_2| \approx Re(-E_2) + \frac{\Gamma_2^2}{8Re(-E_2)}, \quad (4.46)$$

enquanto que equação (4.17) é

$$\Gamma_3 = \frac{C_n}{2} \frac{\Gamma_2 \Lambda}{\sqrt{Re(-E_2)}}. \quad (4.47)$$

Quando $\Gamma_2 = 0$, a parte real da energia de três corpos é

$$Re(E_3^n) = \epsilon_3^n \Lambda^2 - C_n \sqrt{Re(-E_2)} \Lambda, \quad (4.48)$$

enquanto que para pequenos valores de Γ_2 , a parte real da energia de três corpos torna-se

$$Re(E_3^{*n}) = \epsilon_3^n \Lambda^2 - C_n \left[\sqrt{Re(-E_2)} + \frac{\Gamma_2^2}{32 (Re(-E_2))^2} \right], \quad (4.49)$$

de modo que a variação da parte real da energia de três corpos é

$$\delta Re(E_3^n) = -C_n \frac{\Gamma_2^2}{32 (Re(-E_2))^2} \Lambda. \quad (4.50)$$

Eliminando Γ_2 , com auxílio da equação (4.47), obtemos que

$$\delta Re(E_3^n) = -\frac{\Gamma_3^2}{8C_n Re(-E_2)\Lambda}. \quad (4.51)$$

Porém, quando $\Gamma_2 = 0$, a equação (4.18) torna-se

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon_3^n}} \left[\sqrt{Re(E_3^n + E_2)} - \sqrt{Re(-E_2)} \right], \quad (4.52)$$

de forma que a variação da parte real da energia de três corpos é

$$\delta Re(E_3^n) = -\frac{\Gamma_3^2}{16Re(-E_2) \left[\sqrt{Re(E_3^n + E_2)} - \sqrt{Re(-E_2)} \right]}. \quad (4.53)$$

Analisando a figura obtida por Latta e Tandy, notamos que no limite em que Γ_2 é pequeno, a curva da parte imaginária de três corpos em função da parte real da energia de três corpos é parabólica.

Em resumo, o estudo feito nesse capítulo mostra que a absorção na interação de dois bósons não evita o colapso do sistema de três corpos no limite de alcance zero. A largura dos estados colapsados cresce linearmente com o inverso do alcance da interação. Tal largura é desprezível quando comparada à parte real da energia do sistema nesse limite. Esperamos que o estudo apresentado nesse modelo esquemático possa ser de grande utilidade para o estudo de um sistema mais realístico com parte absortiva.

Capítulo 5

Três Partículas Relativísticas em $1 + 1$ e $2 + 1$ Dimensões

5.1 Introdução

No capítulo anterior, estudamos dois tipos de efeitos para sistemas de três bósons não relativísticos em três dimensões. O primeiro deles, conhecido por efeito Efimov, aparece quando a constante de acoplamento atinge um valor crítico de modo que não haja mais estados ligados de dois corpos. Desta forma, apesar de não haver mais estados ligados de dois corpos temos infinitos estados fracamente ligados de três corpos, conhecidos por estados Efimov. À medida que aumentamos a interação de dois corpos, ao contrário do senso comum, a quantidade destes estados diminui. Isto ocorre porque um incremento na energia de ligação do subsistema de dois corpos implica num acréscimo na energia de ligação do sistema de três corpos e este estado desaparece quando atinge o limiar da energia de ligação do subsistema. Contudo, como a ordem de grandeza dos valores destas energias são bem pequenas, os estados mais excitados atingem rapidamente o limiar em função da pequena variação de energia do subsistema.

O segundo tipo, conhecido por efeito Thomas, surge quando o alcance da interação

tende a zero, mantendo-se a energia de dois corpos fixa. Nesta situação, notamos que as energias dos estados ligados de três corpos tende ao infinito, colapsando o sistema.

Ambos os efeitos produzem o mesmo tipo de singularidade no “kernel” da equação integral e mostramos que por meio de uma transformação de escala podemos relacioná-los. A inclusão de um potencial absoritivo não elimina o efeito Efimov.

Podemos, por outro lado, averiguar a presença de tais efeitos no caso relativístico, e uma maneira simples e conveniente de fazê-lo é por meio do método do plano nulo, desenvolvido por Dirac. Tal método é apropriado para o tratamento da dinâmica relativística de três corpos por permitir uma separação simples das coordenadas do centro de massa; e por eliminar o processo de criação de pares partícula - antipartícula. O método consiste, basicamente, em redefinir as variáveis dinâmicas e reescrever a equação que descreve o estado de um sistema, misturando-se uma das coordenadas espaciais com a coordenada temporal.

Neste capítulo, iremos estudar o colapso de sistemas relativísticos de três bósons, usando o método do plano nulo. Na primeira seção apresentamos o método do plano nulo aplicando-o para um sistema formado por três bósons idênticos em 1+1 e 2+1 dimensões. O potencial de interação de onda S é de alcance zero e a dinâmica do sistema é expressa na forma de uma equação integral, cujos resultados são obtidos numericamente.

Na seção seguinte, estudamos o limite não relativístico desta equação, mostrando como o sistema relativístico converge para o caso não-relativístico.

5.2 Método do Plano Nulo

Para um espaço-tempo N dimensional, definimos os novos momentos k^+ e k^- , como sendo

$$k^+ = k_0 + k_3, \quad (5.1)$$

e

$$k^- = k_0 - k_3, \quad (5.2)$$

onde k^0 é a energia do sistema e k^3 é o momento da partícula na direção z . Portanto

$$k_3 = \frac{k^+ - k^-}{2}, \quad (5.3)$$

e

$$k_0 = \frac{k^+ + k^-}{2}, \quad (5.4)$$

enquanto que

$$k^+ k^- = (k_0)^2 - (k_3)^2. \quad (5.5)$$

Portanto

$$k^2 = k^+ k^- - k_\perp^2 (1 - \delta_{N,2}), \quad (5.6)$$

onde $k_\perp$ é o momento perpendicular à direção z e é dado por

$$k_\perp^2 = \sum_{i=1}^{N-2} (k_i)^2, \quad (5.7)$$

e $\delta_{N,2}$ é a função delta de Kronecker.

O Jacobiano desta transformação é $1/2$, de forma que

$$\prod_{i=1}^N dx^i = \frac{1}{2} dk^+ dk^- d^{N-2} k_{\perp}. \quad (5.8)$$

As equações de Faddeev foram reescritas, utilizando-se o método do plano nulo, há algum tempo atrás [Ba-79] e, recentemente foram usadas para encontrar a massa do estado ligado de um sistema bosônico em 3+1 dimensões espaço-tempo [Fr-92], usando uma interação de alcance zero e sem efeitos retardados, o que simplifica o estudo do sistema [Da-66, Fu-66, Al-73].

Mediante estas transformações, a função de onda permite uma descrição relativística dos estados ligados que apresentam as seguintes características:

- a coordenada do centro de massa é facilmente separada [Ba-79, Te-76];
- ocorre supressão do processo de criação de pares partícula-antipartícula [Al-73, Fr-79, Fr-81].

Desta forma, podemos contruir a função de onda do estado ligado em termos do grau de liberdade da partícula. Tal método tem sido bastante usado para se construir modelos relativísticos à quarks [Dz-87, Dz-88, Ch-88a, Ji-90, Az-88, Az-90] e para se estudar espalhamento elétron-déuteron [Fr-81, Gr-84, Ch-88b, Fr-91].

Aplicaremos este método em um sistema de três bósons idênticos que interagem mediante um potencial de alcance zero. Apesar de não ser um potencial realístico, à baixas energias, ele descreve qualitativamente bem as propriedades físicas de três corpos. Para simplificar a nossa descrição relativística, escolhemos a interação de contato que não tem efeitos de retardo.

A equação para a componente da função de onda de Faddeev para o vértice é mostrada na figura 5.1.



Figura 5.1 - Representação diagramática da equação integral para a componente de Faddeev do vértice do estado ligado de três bósons.

O vértice v , no centro de massa do sistema depende apenas do momentum da partícula espectadora q^μ , que será escolhida como estando na camada de massa no modelo da interação de alcance zero. O vértice total é a soma de cada contribuição onde cada bóson é a partícula espectadora, ou seja

$$v(q^\mu) = 2\tau(M_2) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(P_3 - q - k)^2 - M^2 + i\varepsilon} v(k^\mu), \quad (5.9)$$

onde $\tau(M_2)$ é a amplitude de espalhamento de dois bósons, P_3 é o quadrivetor do momento de três corpos no centro de massa do sistema e n é a dimensão do espaço-tempo. O fator 2 é oriundo da simetrização do vértice total e M é a massa do bóson. A massa do subsistema de dois bósons é dada por

$$M_2^2 = (P_3 - q)^2. \quad (5.10)$$

A amplitude de dois corpos $\tau(M_2)$, no modelo de alcance zero, mostrada pela figura

5.2, pode ser resolvida analiticamente e a solução é

$$\tau(M_2) = \left\{ i\lambda^{-1} - B(M_2) \right\}^{-1}, \quad (5.11)$$

onde λ é a constante de acoplamento e M_2 a massa do subsistema de dois corpos. $B(M_2)$ é o kernel da equação integral para a amplitude de espalhamento, sendo representado pelo diagrama de bolha da figura 5.3, dado analiticamente por

$$B(M_2) = - \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \left\{ (k^2 - M^2 + i\varepsilon) \left((P - k)^2 - M^2 + i\varepsilon \right) \right\}^{-1}, \quad (5.12)$$

onde M é a massa do bóson e $P^\mu = (M_2, 0, 0, 0)$, seguindo a convenção e notação de Bjorken and Drell [Bj-65].



Figura 5.2 - Representação diagramática da equação integral para a amplitude de espalhamento de dois bósons.



Figura 5.3 - Representação diagramática do kernel da equação integral.

Portanto, a expressão acima se escreve, com auxílio das equações (5.1), (5.2) e (5.7),

$$\begin{aligned}
 B(M_2) = & -\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \frac{d^{(n-2)}k_{\perp} dk^+ dk^-}{k^+(P^+ - k^+)} \left(k^- - \frac{k_{\perp}^2(1 - \delta_{n,2}) + M^2 - i\varepsilon}{k^+} \right)^{-1} \\
 & \times \left(P^- - k^- - \frac{(P - k)_{\perp}^2(1 - \delta_{n,2}) + M^2 - i\varepsilon}{P^+ - k^+} \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

A equação acima é integrada na energia do plano nulo k^- . A função delta de Kronecker é introduzida para o caso bidimensional.

As posições dos pólos no plano complexo k^- dependem dos valores de k^+ . Os pólos são

$$k^- = \frac{k_{\perp}^2(1 - \delta_{n,2}) + M^2 - i\varepsilon}{k^+}, \tag{5.14}$$

e

$$k^- = P^- - \frac{(P - k)_{\perp}^2(1 - \delta_{n,2}) + M^2 - i\varepsilon}{P^+ - k^+}. \tag{5.15}$$

Para $k^+ > P^+$ e $k^+ < 0$, os pólos estão localizados no mesmo semi-plano e, portanto não contribuem à integração. Porém se $0 < k^+ < P^+$ a integral não é nula. Redefinindo as variáveis

$$x = \frac{k^+}{P^+}, \tag{5.16}$$

onde x tem o intervalo

$$0 < x < 1, \tag{5.17}$$

então, integrando obtemos, para $n \neq 2$

$$B(M_2) = -\frac{i}{2(2\pi)^{(n-1)}} \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int d^{(n-2)}k_{\perp} \frac{1}{M_2^2 - \frac{k_{\perp}^2 + M^2}{x(1-x)}}, \quad (5.18)$$

e, para $n = 2$

$$B(M_2) = -\frac{i}{2(2\pi)} \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \frac{1}{M_2^2 - \frac{M^2}{x(1-x)}}. \quad (5.19)$$

A condição acima, dada pela equação (5.17) suprime a propagação de anti-partículas, no cálculo do loop.

Para dimensões espaço-tempo bi- e tri-dimensionais, a função $B(M_2)$ é finita. O valor de λ é escolhido de forma que o sistema de dois corpos tenha um estado ligado. Desta forma, esta escolha faz com que apareça um pólo na amplitude de espalhamento. Portanto,

$$i\lambda^{-1} = B(M_{2B}). \quad (5.20)$$

Por outro lado, em quatro dimensões temos uma divergência logarítmica. Contudo, por meio da renormalização, esta divergência pode ser incorporada na redefinição de λ . A informação física introduzida na renormalização da amplitude física é a massa do dois bósons, M_{2B} . Substituindo λ nas equações acima, a divergência no denominador é cancelada.

A integração de $B(M_2)$ em 1+1 e 2+1 dimensões é feita analiticamente.

5.2.1 Dimensão 1+1

Em duas dimensões, a amplitude de espalhamento de dois bósons é obtida da equação (5.19), ou seja

$$B(M_2) = \frac{i}{4\pi M_2^2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + \left(\frac{M}{M_2}\right)^2}. \quad (5.21)$$

O discriminante Δ é

$$\Delta = 1 - 4 \left(\frac{M}{M_2}\right)^2, \quad (5.22)$$

e nossa área de interesse físico é definida para $\Delta < 0$, resultando que $M_2 < 2M$.

Definindo

$$\beta(M_2) = \sqrt{\frac{M^2}{M_2^2} - \frac{1}{4}}, \quad (5.23)$$

obtemos que

$$B(M_2) = \frac{i}{4\pi M_2^2} \int \frac{dx}{x^2 - x + \beta^2(M_2) + \frac{1}{4}}, \quad (5.24)$$

e, portanto,

$$B(M_2) = \frac{i}{2\pi M_2^2 \beta(M_2)} \tan^{-1} [2\beta(M_2)]^{-1}. \quad (5.25)$$

Portanto a matriz $\tau(M_2)$ se escreve

$$\tau(M_2) = -2\pi i \left\{ \left[M_{2B}^2 \beta(M_{2B}) \right]^{-1} \tan^{-1} [2\beta(M_{2B})]^{-1} - \left[M_2^2 \beta(M_2) \right]^{-1} \tan^{-1} [2\beta(M_2)]^{-1} \right\}^{-1}. \quad (5.26)$$

A função espectadora é, para 1+1 dimensão, dada por

$$v(q^+) = -\frac{i\tau(M_2)}{2\pi} \int \frac{dk^+}{k^+(M_3 - q^+ - k^+)} \frac{1}{\left(M_3 - \frac{M^2}{k^+} - \frac{M^2}{q^+} - \frac{M^2}{M_3 - q^+ - k^+}\right)} v(k^+). \quad (5.27)$$

Os limites de integração são $0 < k^+ < p^+ - q^+$ que poderiam ser obtidos da integral de Cauchy em k^- na equação (5.9). Porém veremos mais adiante que o limite inferior de k^+ deve ser modificado.

$$y = \frac{q^+}{M_3}, \quad (5.28)$$

e

$$x = \frac{k^+}{M_3}, \quad (5.29)$$

temos que

$$v(y) = -\frac{i\tau(M_2)}{2\pi} \int \frac{dx}{x(1-y-x)} \frac{1}{\left(M_3^2 - \frac{M^2}{x} - \frac{M^2}{y} - \frac{M^2}{1-x-y}\right)} v(x), \quad (5.30)$$

ou seja

$$v(y) = -\left\{ \left[M_{2B}^2 \beta(M_{2B}) \right]^{-1} \tan^{-1} [2\beta(M_{2B})]^{-1} - \left[M_2^2 \beta(M_2) \right]^{-1} \tan^{-1} [2\beta(M_2)]^{-1} \right\}^{-1} \times \\ \times \int \frac{dx}{x(1-y-x)} \frac{1}{\left(M_3^2 - \frac{M^2}{x} - \frac{M^2}{y} - \frac{M^2}{1-x-y}\right)} v(x). \quad (5.31)$$

Precisamos verificar os limites de integração. A energia do subsistema na camada de massa é dada por

$$M_2^2 = (p_3 - q)^2 = (p_3^+ - q^+)(p_3^- - q^-), \quad (5.32)$$

e como $p_3^\mu = (M_3, 0)$, então

$$M_2^2 = (M_3 - q^+)(M_3 - \frac{M^2}{q^+}) > 0, \quad (5.33)$$

pois

$$q^+ q^- = M^2. \quad (5.34)$$

Logo

$$(1 - y)(1 - \frac{M^2}{M_3^2 y}) > 0. \quad (5.35)$$

Da equação acima podemos ter duas condições

- Ambos os termos da equação (5.35) são positivos; esta forma, temos

$$y < 1 \quad (5.36)$$

e

$$y > \frac{M^2}{M_3^2}. \quad (5.37)$$

- A outra possibilidade é que ambos sejam negativos e, assim temos

$$y > 1, \quad (5.38)$$

e

$$y < \frac{M^2}{M_3^2}, \quad (5.39)$$

cujo resultado é impossível já que $q^+ < M_3$ ou $y < 1$.

- Portanto, em 1+1 dimensão temos

$$v(y) = - \left\{ \left[M_{2B}^2 \beta(M_{2B}) \right]^{-1} \tan^{-1} [2\beta(M_{2B})]^{-1} - M_2^{-2} \left[M_2^2 \beta(M_2) \right]^{-1} \tan^{-1} [2\beta(M_2)]^{-1} \right\}^{-1} \times$$

$$\times \int_{M^2/M_3^2}^{1-y} \frac{dx}{x(1-y-x)} \frac{1}{\left(M_3^2 - \frac{M^2}{x} - \frac{M^2}{y} - \frac{M^2}{1-x-y} \right)} v(x). \quad (5.40)$$

Definindo, para 1+1 dimensão,

$$M_{03}^2 = \frac{M^2}{x} + \frac{M^2}{y} + \frac{M^2}{1-x-y}, \quad (5.41)$$

então

$$v(y) = - \left\{ \left[M_{2B}^2 \beta(M_{2B}) \right]^{-1} \tan^{-1} [2\beta(M_{2B})]^{-1} - M_2^{-2} \left[M_2^2 \beta(M_2) \right]^{-1} \tan^{-1} [2\beta(M_2)]^{-1} \right\}^{-1} \times$$

$$\times \int_{M^2/M_3^2}^{1-y} \frac{dx}{x(1-y-x)} \frac{1}{(M_3^2 - M_{03}^2)} v(x), \quad (5.42)$$

5.2.2 Dimensão 2+1

Em 2+1 dimensões, temos

$$B(M_2) = -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{\perp} \frac{1}{M_2^2 - \frac{k_{\perp}^2 + M^2}{x(1-x)}}, \quad (5.43)$$

e integrando-se por Cauchy, obtemos

$$B(M_2) = \frac{i}{8\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{M^2 - M_2^2 x(1-x)}}. \quad (5.44)$$

Fazendo

$$y = x - \frac{1}{2}, \quad (5.45)$$

obtemos

$$B(M_2) = \frac{i}{8\pi M_2} \int_{-1/2}^{+1/2} dy \frac{1}{\sqrt{\beta^2(M_2) + y^2}}, \quad (5.46)$$

cujo resultado é

$$B(M_2) = \frac{i}{8\pi M_2} \ln \frac{2M + M_2}{2M - M_2}. \quad (5.47)$$

Desta forma, a matriz $\tau(M_2)$ é

$$\tau(M_2) = -8\pi i \left\{ M_{2B}^{-1} \ln \left(\frac{2M + M_{2B}}{2M - M_{2B}} \right) - M_2^{-1} \ln \left(\frac{2M + M_2}{2M - M_2} \right) \right\}^{-1}. \quad (5.48)$$

Com auxílio das definições utilizadas no caso 1+1, teremos para 2+1 dimensões que

$$v(y, q_{\perp}) = \frac{2}{\pi} \left\{ M_{2B}^{-1} \ln \left(\frac{2M + M_{2B}}{2M - M_{2B}} \right) - M_2^{-1} \ln \left(\frac{2M + M_2}{2M - M_2} \right) \right\}^{-1} \times$$

$$\times \int_{M^2/M_3^2}^{1-y} \frac{dx}{x(1-y-x)} \int_{-k_{\perp}^{\max}}^{+k_{\perp}^{\max}} \frac{dk_{\perp}}{(M_3^2 - \frac{k_{\perp}^2 + M^2}{x} - \frac{k_{\perp}^2 + M^2}{y} - \frac{(q+k)_{\perp}^2 + M^2}{1-x-y})} v(x, k_{\perp}). \quad (5.49)$$

Os limites de integração em 2+1 dimensões são obtidos do fato de que

$$M_2^2 = (M_3 - q^+) \left(M_3 - \frac{q_{\perp}^2 + M^2}{q^+} \right) - q_{\perp}^2 > 0, \quad (5.50)$$

de modo que

$$q_{\perp}^2 < (1-y)(M_3^2 y - M^2), \quad (5.51)$$

ou seja,

$$1 > y > \frac{M^2}{M_3^2}. \quad (5.52)$$

Para 2+1 dimensões, se tomarmos

$$M_{03}^2 = \frac{k_{\perp}^2 + M^2}{x} + \frac{k_{\perp}^2 + M^2}{y} + \frac{(q+k)_{\perp}^2 + M^2}{1-x-y}, \quad (5.53)$$

obtemos

$$v(y, q_{\perp}) = \frac{2}{\pi} \left\{ M_{2B}^{-1} \ln \left(\frac{2M + M_{2B}}{2M - M_{2B}} \right) - M_2^{-1} \ln \left(\frac{2M + M_2}{2M - M_2} \right) \right\}^{-1} \times$$

$$\times \int_{M^2/M_3^2}^{1-y} \frac{dx}{x(1-y-x)} \int_{-k_{\perp}^{\max}}^{+k_{\perp}^{\max}} \frac{dk_{\perp}}{(M_3^2 - M_{03}^2)} v(x, k_{\perp}). \quad (5.54)$$

e $k_{\perp}^{\max}$ é dado por

$$k_{\perp}^{\max} = \sqrt{(1-x)(M_3^2 x - M^2)}. \quad (5.55)$$

No caso de três bósons temos que, enquanto o par de bósons está interagindo, o bóson espectador, que está situado a uma distância finita qualquer do par, está se propagando livremente e, portanto é plausível que esteja na camada de massa.

5.3 Limite Não Relativístico

Torna-se interessante estudarmos o limite não relativístico das equações (5.42) e (5.54) e verificarmos que estas equações reduzem-se às correspondentes equações não relativísticas.

Para estudarmos estas equações no limite não-relativístico, devemos considerar o limite de massa M infinita.

5.3.1 Dimensão 1+1

Usando a relação

$$M_2 = 2M - E_2, \quad (5.56)$$

e expandindo até a primeira ordem em M , obtemos

$$\beta(M_2) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_2}{M}}, \quad (5.57)$$

onde E_2 é a energia do subsistema de dois corpos. Por outro lado, temos que

$$\tan^{-1} [2\beta(M_2)]^{-1} \approx \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{E_2}{M}} \right], \quad (5.58)$$

e, no limite em que $M \rightarrow \infty$, temos

$$\tan^{-1} [2\beta(M_2)]^{-1} \rightarrow \pi. \quad (5.59)$$

Neste limite, temos até a ordem mais baixa, que

$$[M^2\beta(M_2)] \approx 2\sqrt{E_2}M^{3/2}. \quad (5.60)$$

Desta forma, em 1+1 dimensão temos que a amplitude de dois bósons é dada por

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tau = 4iM^{3/2} \left\{ \left(\sqrt{E_2} \right)^{-1} - \left(\sqrt{E_{2B}} \right)^{-1} \right\}^{-1}, \quad (5.61)$$

onde $M_{2B} = 2M - E_{2B}$, com E_{2B} sendo a energia de ligação do subsistema de dois corpos.

O limite não relativístico envolve a mudança na variável de integração de x para k_z .

Em 1+1 dimensão, temos

$$x = \frac{k^+}{p^+} = \frac{k_0 + k}{M_3} = \frac{\sqrt{M^2 + k^2} + k}{M_3}, \quad (5.62)$$

e, portanto

$$\frac{dx}{dk} = \frac{k_0 + k}{M_3 k_0} = \frac{x}{M}. \quad (5.63)$$

Por outro lado, expandindo a variável x até a ordem mais baixa em M , obtemos

$$x \approx \frac{1}{3} \left(1 + \frac{k}{M} + \frac{E_3}{M} \right), \quad (5.64)$$

onde $M_3 = 3M - E_3$.

Desta forma, no limite não relativístico, temos

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x = \lim_{M \rightarrow \infty} y = \frac{1}{3}. \quad (5.65)$$

A massa do sistema virtual de três bósons é dada por

$$M_{03} = \sqrt{\vec{q}^2 + M^2} + \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} + \sqrt{(\vec{q} + \vec{k})^2 + M^2}. \quad (5.66)$$

Portanto, no limite que $M \rightarrow \infty$, temos, restando até a primeira ordem, que

$$M_{03}^2 \approx 9M^2 + 3 \left[\frac{\vec{q}^2}{2M} + \frac{\vec{k}^2}{2M} + \frac{(\vec{q} + \vec{k})^2}{2M} \right]. \quad (5.67)$$

Desta forma, o termo

$$M_3^2 - M_{03}^2 \approx 6M \left[-E_3 - \frac{\vec{q}^2}{2M} - \frac{\vec{k}^2}{2M} - \frac{(\vec{q} + \vec{k})^2}{2M} \right] \quad (5.68)$$

de forma que a equação (5.42) se escreve

$$v_{NR}(q) = \frac{1}{\pi\sqrt{M}} \left\{ \left(\sqrt{E_2} \right)^{-1} - \left(\sqrt{E_{2B}} \right)^{-1} \right\}^{-1} \int dk \frac{v_{NR}(k)}{\left[-E_3 - \frac{\vec{q}^2}{2M} - \frac{\vec{k}^2}{2M} - \frac{(\vec{q}+\vec{k})^2}{2M} \right]}, \quad (5.69)$$

onde E_3 é a energia de ligação do sistema de três bósons. A energia de ligação não relativística pode ser encontrada analiticamente [Do-70] e é dada por

$$E_3 = 4E_{2B}. \quad (5.70)$$

5.3.2 Dimensão 2+1

No limite não relativístico ($M \rightarrow \infty$), usando as relações

$$M_{2B} = 2M - E_{2B} \quad (5.71)$$

e

$$M_2 = 2M - E_2 \quad (5.72)$$

com E_{2B} sendo a energia de ligação de dois bósons, então expandindo até a ordem mais baixa em $1/M$, temos

$$\tau(M_2) \approx -16M\pi i \left\{ \ln \left(\frac{4M - E_{2B}}{E_{2B}} \right) - \ln \left(\frac{4M - E_2}{E_2} \right) \right\}^{-1}; \quad (5.73)$$

ou seja

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tau = -i16\pi M \{ \ln(E_2) - \ln(E_{2B}) \}^{-1}. \quad (5.74)$$

O limite não relativístico do integrando envolve a mudança de variável de x para k_z nos mesmos moldes como efetuado na dimensão 1+1. A massa do sistema virtual de três bósons é substituída por:

$$M_{03} = \sqrt{\vec{q}^2 + M^2} + \sqrt{\vec{k}^2 + M^2} + \sqrt{(\vec{q} + \vec{k})^2 + M^2}. \quad (5.75)$$

e o resultado é

$$v_{NR}(q) = 2\pi^{-1} \{ \ln(E_{2B}) - \ln(E_2) \}^{-1} \int d^2k \frac{v_{NR}(k)}{-E_3 - \frac{\vec{q}^2}{2M} - \frac{\vec{k}^2}{2M} - \frac{(\vec{q}+\vec{k})^2}{2M}}. \quad (5.76)$$

A energia de ligação não relativística é [Br-79]

$$E_3 = 16.3 E_{2B}. \quad (5.77)$$

Olhando para as equações relativísticas nas dimensões 1+1 e 2+1, notamos que há um limite inferior para a massa do sistema de três bósons que é oriundo dos limites na integração em x e da condição $y > \frac{M^2}{M_3^2}$

$$M_3 > \sqrt{2}M. \quad (5.78)$$

O mesmo limite é obtido na dimensão 3+1 [Fr-92]. Nesta dimensão, o limite não relativístico da equação para a função espectadora no plano nulo tem as propriedades qualitativas do estado ligado de três bósons quando $M_{2B} \sim 2M$. O efeito Efimov ainda persiste. Entretanto, o comportamento de curto alcance é fortemente modificado e o efeito Thomas

do sistema desaparece [Fr-92]. A massa do estado de três bósons em 3+1 dimensões tem um limite inferior de $\sqrt{2}M$.

O vértice da componente de Faddeev e a massa do estado fundamental é obtida resolvendo-se numericamente as equações (5.42) e (5.54) em 1+1 e 2+1 dimensões respectivamente. A massa do bóson dá a escala do sistema. Na figura 5.4, mostramos a razão entre as energias de ligação do sistema de três corpos e a de dois corpos em função da energia de ligação de dois corpos para $M = 1$. O limite não relativístico é atingido para $E_{2B} \rightarrow 0$. Neste limite, temos para a dimensão 1+1 que a energia de ligação é $E_3/E_{2B} = 4$, enquanto que na dimensão 2+1 temos $E_3/E_{2B} = 16.3$.

Para energias $E_{2B} \geq 0.5$ os dois sistemas comportam-se de uma maneira bastante semelhante para E_{3B} em função de E_{2B} . A dominância da direção z aparece no limite do referencial do momento infinito e neste caso a contribuição da direção transversa é pequena.

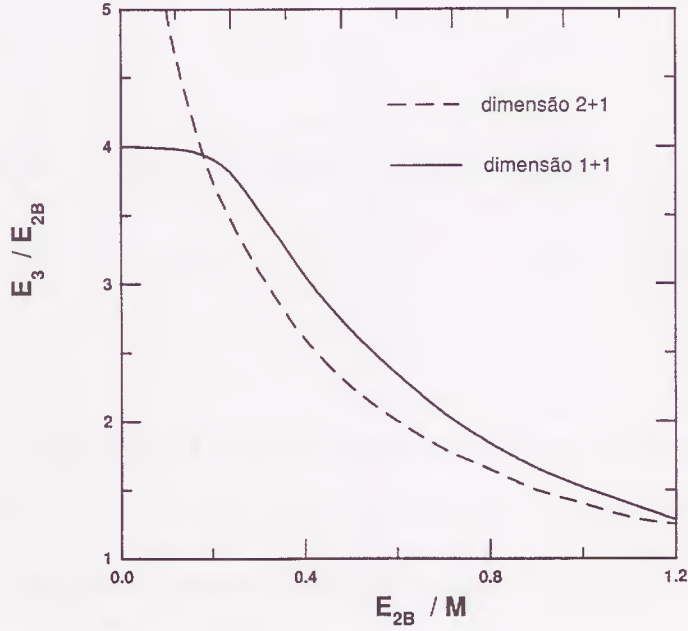


Figura 5.4 - Energia do sistema de três bósons (em unidades da energia do sub-sistema) em função da energia do sub-sistema (em unidades da massa de um bóson). A curva mostrada para dimensão 2+1, no limite não relativístico ($E_{2B} \rightarrow 0$), converge para $E_3 = 16.3 E_{2B}$.

Capítulo 6

Estados Efimov e os Núcleos com Halo

6.1 Introdução

O principal objetivo desse capítulo é discutir os aspectos universais dos estados Efimov para sistemas em que uma das massas é diferente e, em geral, maior que as outras duas, assim como aplicar esse estudo para o caso específico de certos núcleos exóticos com halo, que denominamos *halo-núcleos*. Para melhor definir o que sejam esses núcleos e o seu interesse atual, fazemos uma breve introdução da física relacionada a tais objetos.

Observou-se recentemente uma classe de núcleos exóticos, fracamente ligados, cujo número de nêutrons era excessivamente maior que o de prótons para o vale de estabilidade, sendo que a característica principal desses núcleos era o seu tamanho muito grande e a formação de halos de nêutrons [Ta-85, Ko-88]. Os dois últimos nêutrons estariam a uma distância muito grande ao se comparar com o tamanho do núcleo restante. Definiu-se assim os chamados *halo-núcleos* que, como veremos nesse capítulo, aparentam ter as características necessárias de sistemas de três corpos para apresentarem estados Efimov, considerando-se o sistema de três partículas como sendo um *caroço* e dois nêutrons afastados.

A descoberta de *halo* - núcleos, como o ^{11}Li , atraiu grande interesse da comunidade sobre a possibilidade de se identificar estados Efimov, já que a procura e identificação em sistemas atômicos e nucleares ainda não tinha uma evidência clara da ocorrência de tais estados [Li-77, Hu-78, Ef-90]. Em uma primeira tentativa, Fedorov, Jensen e Riisager [Fe-94] sugeriram como candidatos promissores os núcleos de carbono-18 e carbono-20, assim como a possível ocorrência em isótopos do oxigênio, ricos em nêutrons. Outro interesse no estudo dos halo-núcleos consiste em que a interação fundamental entre dois núcleons pode ficar mais aparente e direta em tais núcleos do que nos núcleos normais. Para uma discussão mais elaborada e recente sobre esses núcleos exóticos, ver, por exemplo, as refs. [Zh-93, Be-93, Ha-95, Ta-96].

A primeira ocorrência em laboratório de *halo* - núcleos leves aconteceu em 1985, quando feixes de tais núcleos exóticos foram produzidos através do processo de fragmentação do projétil e foram utilizados para se medir a seção de choque de interação σ_i para isótopos do hélio [Ta-85]. Esta técnica, posteriormente, permitiu que se estudasse os demais núcleos, analisando-se a densidade nuclear e a distribuição dos momentos [Ko-88]. Entre as diversas características peculiares dos resultados experimentais, uma delas está relacionada à distribuição de momentos perpendiculares dos fragmentos ^9Li , originados em reações de ^{11}Li em alvos mais pesados. A distribuição de momento transversal dos fragmentos fornece informações sobre a distribuição de matéria nuclear do ^{11}Li próximo à superfície, pois os mesmos são originados a partir de reações periféricas. A curva de seções de choque de fragmentação experimental, que é mostrada na figura 6.1(b), fornece a distribuição de momento transversal do ^9Li na fragmentação do ^{11}Li . Essa distribuição é formada pela superposição

de dois picos, um estreito (com largura $\sim 23 \pm 5$ MeV/c) e outro mais largo (com largura $\sim 95 \pm 12$ MeV/c), conforme mostra a figura 6.1(a). (Ver [Be-93, Be-90]). Como a energia associada com a distribuição deve estar intimamente ligada com a energia de separação dos constituintes, a energia associada à distribuição mais larga se refere à energia de separação de um nêutron mais interno do núcleo, enquanto que a energia associada à distribuição mais estreita se refere à energia de separação dos dois nêutrons.

Tais resultados mostram que estes fragmentos são originados de reações periféricas e permitem que sejam obtidas informações úteis acerca da distribuição da matéria nuclear próxima à superfície. Portanto, de acordo com os dados experimentais, o fragmento ${}^9\text{Li}$ é formado pela remoção dos dois nêutrons mais externos do núcleo ${}^{11}\text{Li}$ sendo que este possui uma extensa distribuição radial [Ta-85, Ko-88]. A baixa energia de separação dos dois últimos nêutrons $S(2n)$ no ${}^{11}\text{Li}$, de $S_{2n} = 0.25 \pm 0.08$ MeV, é uma evidência da grande extensão radial e, considerando-se o tamanho do caroço ${}^9\text{Li}$, da formação do halo de nêutrons sugerido por Hansen e Jonson [Ha-87]. Desta maneira, o isótopo ${}^{11}\text{Li}$, por ter uma extensa distribuição radial e pelo fato de que o ${}^9\text{Li}$ se origina de uma reação periférica envolvendo os dois nêutrons mais externos do ${}^{11}\text{Li}$, pode ser considerado como um sistema de três corpos: um caroço formado pelo ${}^9\text{Li}$ e dois nêutrons bem afastados. Tais sistemas são conhecidos como *halo-núcleos*, por serem formados por um caroço e por uma halo de nêutrons de grande extensão e fracamente ligados ao caroço.

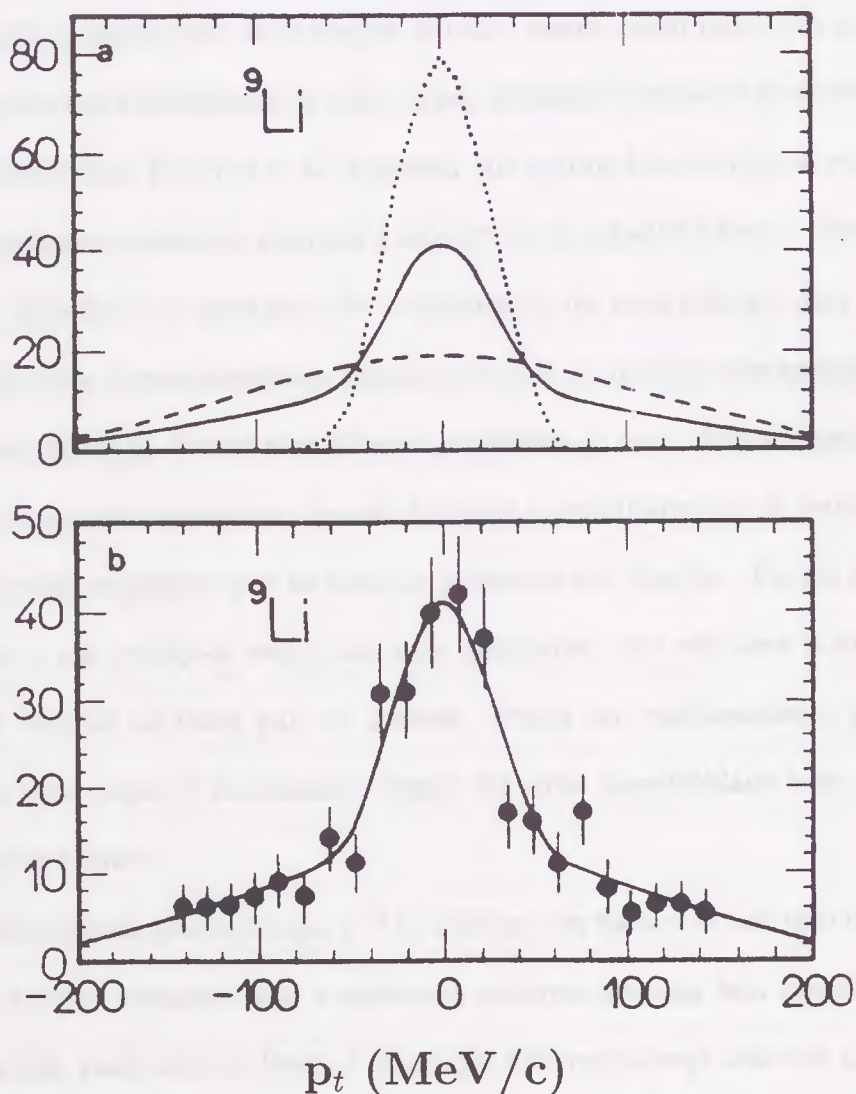


Figura 6.1 - Seções de choque de fragmentação, em função dos momentos transversais, mostrando a distribuição dos fragmentos de ^9Li , originados na reações $^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^9\text{Li} + 2n + X$ [Be-93]. Em (a) temos as distribuições calculadas. A curva contínua representa a soma normalizada das duas que, em (b) é comparada com dados experimentais.

Discussões teóricas sobre o comportamento assintótico destes sistemas halo-núcleo foram feitas para sistemas envolvendo dois corpos [Ri-92], assim como para três corpos, como o ^{11}Li , onde nenhum dos subsistemas de dois corpos era ligado (estados *Borromeanos*) [Fe-93, Fe-94]. Nestes trabalhos, Fedorov et al. sugerem que alguns halo-núcleo se enquadram bem nas características que poderiam permitir a existência de estados Efimov. Estes estados são caracterizados pelo fato da constante de acoplamento da interação de dois corpos ser tal que o sistema de dois corpos apresenta estados virtuais ou ligados com energias próximas a zero. As funções de onda dos estados Efimov estendem-se bem além daquelas dos estados normais. Se tais estados existirem, devem dominar o espalhamento de baixas energias de uma das partículas enquanto que as demais permanecem ligadas. Como tanto o par de nêutrons como o par caroço-n estão bastante afastados, isto nos leva à hipótese de que as energias de ligação de cada par, se houver, devem ser extremamente pequenas e se, um sistema de três corpos é fracamente ligado, há uma possibilidade bem grande de que contenha estados Efimov.

Dados experimentais mostram que o ^{11}Li contém um halo com um raio de aproximadamente 12 fm [An-90], enquanto que a interação nêutron-nêutron tem um alcance de cerca de 1 fm. Em geral, para núcleos leves, a interação nêutron-caroço tem um alcance de cerca de 3 fm. O ^{11}Li , considerado como um sistema de três corpos, ($^9\text{Li} + n + n$), é também chamado sistema *Borromeano*¹, já que os subsistemas de dois corpos, $^9\text{Li} + n$ e $n + n$, não são ligados. Da mesma forma o ^6He , visto como $^4\text{He} + n + n$, seria também um sistema desse tipo. Assim, sistemas *Borromeanos* seriam sistemas de três corpos que não

¹Esse adjetivo se refere a São Carlos Borromeu, correspondendo a uma figura geométrica que é atribuída a ele, com significado teológico: três anéis *ligados* de tal forma que cada um dos pares de anéis isolados estariam livres.

sobrevivem como sistemas ligados se uma das peças é retirada da interação. Esse tipo de problema foi inicialmente discutido por Migdal em [Mi-73]. Apesar de que até o presente os dados disponíveis indicarem que o ^{10}Li não é ligado, existe ainda alguma controvérsia acerca desse fato [Kr-93, Zi-95].

Vários outros estudos relevantes foram feitos recentemente sobre os *halo - núcleos*, em particular sobre o Lítio-11, onde se enfatizou a estrutura de um caroço e dois nêutrons afastados. Assumindo o ^{11}Li como um ^9Li e um di-nêutron puntiforme, Bertulani e Baur [Be-88] fizeram previsões de seções de choque para dissociações eletromagnéticas para o ^{11}Li em alvos pesados, que se verificaram compatíveis com os resultados experimentais [Ko-89, Bl-91].

Em [Ca-93] foi considerado a dissociação do ^{11}Li ao interagir com alvo muito mais pesado, em um estudo de canais acoplados, obtendo-se uma boa descrição do espectro de energias. Cálculos sobre a polarizabilidade em *halo-núcleos*, assim como maiores referências para outros estudos e sobre a determinação de potenciais de polarização devidos à dissociação nuclear do ^{11}Li , podem ser obtidos na Ref. [Ca-95].

Por outro lado, Dasgupta, Mazumdar e Bhasin [Da-94] apresentaram resultados preliminares encorajadores sobre as características mais gerais do Lítio-11, considerado como um sistema de três corpos, $^9\text{Li} - n - n$, empregando um modelo com potenciais separáveis de dois corpos, equivalente ao que empregamos nessa tese.

A estrutura de muitos corpos do *halo - núcleo* manifesta-se no sistema $n - n$ -caroço quando os dois nêutrons estão dentro do caroço. Para distâncias relativas muito maiores que o raio do caroço r_c , a dinâmica de três corpos gera uma força efetiva de longo alcance

com uma cauda decrescente do tipo $1/R^2$, onde R é o hiper-raio do sistema, definido em termos das coordenadas de Jacobi. Para R maior que o comprimento de espalhamento, a , dos subsistemas $(n - n)$ e $(n - c)$, a força vai com $\exp(-R/a)/R^2$ [Ef-90]. Se $a \gg r_c$, a separação da dinâmica de muitos corpos para a de três corpos ocorre para $r_c < R < a$. Nas distâncias onde o potencial de longo alcance atua, a cauda da função de onda do sistema é construída com o conhecimento da energia de ligação. Os detalhes do potencial de longo alcance retêm a informação física sobre os comprimentos de espalhamento do nêutron dos subsistemas n - n e n -caroço. O estado excitado aparece no potencial de longo alcance, tem a mesma componente angular do estado fundamental e é determinado pela derivada logarítmica da função de onda do estado fundamental para uma certa distância r_b , tal que $r_c < r_b \ll a$.

Desta forma, a estrutura interna do caroço não é muito relevante desde que o raio do halo de nêutrons seja bem maior que o raio do caroço. Deve-se observar também que estudos recentes avaliaram os efeitos devidos a polarizações do caroço, mostrando que os mesmos são praticamente suprimidos nos *halo-núcleos* como o ^{11}Li ou ^6He [Ku-97]. Mesmo que sejam considerados relevantes tais efeitos para se determinar a energia do estado fundamental, em nosso modelo as energias de ligação do sistema e do sub-sistema são dados de entrada no processo de renormalização. Logo, se espera que os efeitos devido a polarizações do caroço já estejam essencialmente incluídos indiretamente em tais energias.

A correção devida a spins, em caroços com spin finito, foi também estudada em [Fe-95], sendo mostrado que é pequena, já que a estrutura espacial fica praticamente inalterada, assim como os momentos magnéticos. Esse é um resultado esperado, considerando-se que o

spin dos dois nêutrons externos sempre acoplam a zero e a probabilidade de se encontrarem na região do caroço é pequena [Fe-93]. Porém, na ref.[Fe-95] se concluiu adicionalmente que, apesar de tal efeito ser negligível para a estrutura espacial e momentos magnéticos, a ocorrência de um estado Efimov em tais sistemas deveria ser descartada, considerando-se que o “splitting” típico devido a spins seria da ordem de frações de MeV. O presente estudo, que leva em conta apenas a distribuição espacial e as energias experimentais do sistema, assim como dos sub-sistemas, confirma a não ocorrência de estados Efimov no Lítio-11, assim como em outros *halo-núcleos* cujo spin do caroço é não nulo.

Consideramos também que, por estarmos lidando com sistemas de três corpos a baixas energias, os detalhes da interação não são relevantes, refletindo a renormalizabilidade da teoria no limite de alcance zero. O procedimento que usamos é parametrizado pelas energias de dois e três corpos nesse limite. A renormalizabilidade da mecânica quântica de muitos corpos no limite de alcance zero implica que todas as propriedades de baixas energias do sistema de três corpos ficam bem definidas se um observável de três corpos e as informações de baixas energias de dois corpos são conhecidas [Ad-95].

No caso, como informação de três corpos, escolhemos a energia do estado fundamental. Todas as informações detalhadas sobre a força de curto alcance, além dos observáveis de dois corpos a baixas energias, são mantidas em apenas uma informação física de três corpos no limite da interação de alcance zero. A sensibilidade da energia de ligação de três corpos em relação às propriedades da interação vem do colapso do sistema (efeito Thomas) [Th-35], no limite da força de alcance zero. A universalidade observada do sistema para baixas energias é uma consequência.

Na próxima seção desse capítulo, detalhamos as equações principais do formalismo que, na seção seguinte, iremos utilizar nos sistemas *halo-núcleo*. As energias de dois corpos serão fixas e a energia do estado fundamental será ajustada pelo valor experimental permitindo que procuremos os estados excitados. Variando as energias de dois corpos, podemos obter uma curva limite na qual teremos apenas um estado excitado Efimov acima do estado fundamental. Na seção 6.2 aplicamos o método de Mitra aos sistemas *halo-núcleo* e escrevemos um par de equação integral acoplada para um sistema bosônico com um potencial de interação de dois corpos de curto alcance, que são resolvidas numericamente, dependentes das energias dos pares n - n e n -caroço e da energia do sistema. Na seção 6.3, concluímos com uma avaliação dos resultados obtidos.

6.2 Formalismo de Mitra para o Sistema de Três Corpos $C - n - n$

As equações integrais de três corpos, no limite de alcance zero, para o estado ligado de duas partículas idênticas e um caroço sem spin, é escrita a partir da equação de Mitra para três bósons, dadas pela expressão (2.55). É composta por duas equações integrais acopladas, para um modelo de interação separável na onda S .

Para os *halo-núcleos* as partículas idênticas serão os nêutrons. A antisimetrização nos spins dos dois nêutrons externos é satisfeita já que o spin total dessas partículas é nulo [Fe-95]. Deve-se observar, também que, para tais sistemas, conforme discutido em [Fe-93], a energia do estado excitado, se existir, é extremamente pequena apenas permitindo momento angular zero.

Vamos identificar, nas equações de Mitra, a partícula 1 como sendo o caroço, repre-

sentada pelo índice c , enquanto que as partículas 2 e 3 idênticas serão representadas pela letra n . Usaremos um potencial de interação de dois corpos cujo fator de forma é dado por $g(p) = 1$. Desta forma, temos que,

$$\phi^{nn}(q) = \frac{2\pi^{-1}}{\left[\mp\sqrt{|E_{nn}|} + \sqrt{-E_3 + \frac{(A+2)}{4A}q^2}\right]} \int_0^{\Lambda_{nc}} dk \frac{k}{q} \ln \frac{\frac{(A+1)}{2A}q^2 + k^2 - E_3 + qk}{\frac{(A+1)}{2A}q^2 + k^2 - E_3 - qk} \phi^{nc}(k), \quad (6.1)$$

enquanto que para $i = 2, 3$ temos

$$\begin{aligned} \phi^{nc}(q) = & \frac{\pi^{-1} \left(\frac{A+1}{2A}\right)^{3/2}}{\left[\mp\sqrt{|E_{nc}|} + \sqrt{-E_3 + \frac{(A+2)}{2(A+1)}q^2}\right]} \left[\int_0^{\Lambda_{nn}} dk \frac{k}{q} \ln \frac{q^2 + \frac{A+1}{2A}k^2 - E_3 + qk}{q^2 + \frac{A+1}{2A}k^2 - E_3 - qk} \phi^{nn}(k) + \right. \\ & \left. A \int_0^{\Lambda_{nc}} dk \frac{k}{q} \ln \frac{\frac{A+1}{2}(q^2 + k^2) - AE_3 + qk}{\frac{A+1}{2}(q^2 + k^2) - AE_3 - qk} \phi^{nc}(k) \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

O sinal $-$ na equação integral representa o estado ligado do subsistema de dois corpos enquanto o sinal $+$ representa o estado virtual enquanto que A é a massa atômica do caroço. Os alcances das interações $n-c$ e $n-n$ serão supostos de mesma magnitude, uma vez que a renormalização da teoria independe do esquema adotado.

Os cortes Λ_{nc} e Λ_{nn} representam o inverso do raio de interação, que vão para infinito à medida que o raio decresce. Dessa forma, assumimos que $\Lambda_{nc} \approx \Lambda_{nn} = \Lambda$. Tal hipótese não deve ser considerada como limitação do modelo, já que o modelo de três corpos é renormalizável, e requer apenas um observável de três corpos para ser fixo, juntamente com os observáveis de baixas energias de dois corpos. Os resultados são independentes das formas de regularização, que no caso significam diferentes cortes.

A seguir, usando as seguintes definições

$$\epsilon_3 = \frac{E_3}{\Lambda^2}, \quad \epsilon_{nc} = \frac{E_{nc}}{\Lambda^2}, \quad \epsilon_{nn} = \frac{E_{nn}}{\Lambda^2}, \quad (6.3)$$

$$x = \frac{q}{\Lambda}, \quad y = \frac{k}{\Lambda}, \quad (6.4)$$

$$f(x) = \phi(q)q \quad e \quad f(y) = \phi(k)k, \quad (6.5)$$

temos

$$f^{nn}(x) = \frac{2\pi^{-1}}{\left[\mp\sqrt{|\epsilon_{nn}|} + \sqrt{-\epsilon_3 + \frac{(A+2)}{4A}x^2}\right]} \int_0^1 dy \ln \frac{\frac{(A+1)}{2A}x^2 + y^2 - \epsilon_3 + xy}{\frac{(A+1)}{2A}x^2 + y^2 - \epsilon_3 - xy} f^{nc}(y), \quad (6.6)$$

e

$$f^{nc}(x) = \frac{\pi^{-1} \left(\frac{A+1}{2A}\right)^{3/2}}{\left[\mp\sqrt{|\epsilon_{nc}|} + \sqrt{-\epsilon_3 + \frac{(A+2)}{2(A+1)}x^2}\right]} \left[\int_0^1 dy \ln \frac{x^2 + \frac{A+1}{2A}y^2 - \epsilon_3 + xy}{x^2 + \frac{A+1}{2A}y^2 - \epsilon_3 - xy} f^{nn}(y) + \right. \\ \left. A \int_0^1 dy \ln \frac{\frac{A+1}{2}(x^2 + y^2) - AE_3 + xy}{\frac{A+1}{2}(x^2 + y^2) - AE_3 - xy} f^{nc}(y) \right]. \quad (6.7)$$

No procedimento que utilizamos, os fatores de forma do potencial e as correspondentes constantes λ são substituídas, no processo de renormalização, pelas energias de ligação dos sub-sistemas, E_{nn} e E_{nc} . No caso de estados ligados de dois corpos, essas quantidades são as energias de separação. Consideramos também a existência de estados virtuais no sistema de dois corpos. Assim, distinguimos esses dois casos pela seguinte definição:

$$K_{nn} = \pm\sqrt{E_{nn}}, \quad e \quad K_{nc} = \pm\sqrt{E_{nc}}, \quad (6.8)$$

e

$$\kappa_{nn} = \pm\sqrt{\epsilon_{nn}}, \quad e \quad \kappa_{nc} = \pm\sqrt{\epsilon_{nc}}, \quad (6.9)$$

onde + se refere ao caso de estados ligados e – ao caso de estados virtuais.

6.3 Resultados e os Halo-Núcleos

Nessa seção apresentamos os resultados mais relevantes de nosso estudo, quando consideramos a possibilidade de existência de estados Efimov em sistemas de três partículas, em que apenas duas são idênticas. Esses resultados não levam em consideração o spin das partículas e, conforme será discutido, se mostraram apropriados para a análise da existência de estados Efimov nos núcleos exóticos com excesso de nêutrons conhecidos como *halo-núcleos*.

A resolução do par de equações integrais acopladas, (6.6) e (6.7), é feita numericamente. As energias adimensionais dos subsistemas ϵ_{nc} e ϵ_{nn} são valores fornecidos na entrada do programa. Consideramos essas energias para estados *ligados* e para estados *virtuais*; ou seja, apenas para os casos em que o momento associado é um imaginário puro. O método numérico empregado para a solução dessas equações integrais foi o de quadratura Gaussiana, com um número de pontos arbitrários até se atingir convergência e estabilidade das soluções. Observou-se que, em geral, 40 pontos na discretização das variáveis x e y são suficientes para um resultado razoavelmente preciso e estável. Dependendo da energia se observou a necessidade de aumentar o número de pontos na procura de um resultado estável.

Tabela 6.1: Energias de ligação, em unidades adimensionais (conforme definidas no texto, como função do número de massa A do sistema colapsado de três corpos.

$A =$	1	5	9	18	50	100
$-10^2 \epsilon_0 =$	3.17	4.83	5.17	5.41	5.58	5.68
$-10^4 \epsilon_1 =$	0.60	2.31	2.93	3.46	3.88	4.15
$-10^6 \epsilon_2 =$	0.11	1.16	1.77	2.38	2.92	3.29

Resumindo, os resultados obtidos para as energias de ligação (adimensionais) do sistema de três corpos no limite Efimov (energia de dois corpos no limite zero) são fornecidos na tabela 6.1. São apresentados os primeiros três valores para as energias, ϵ_N , onde N identifica o N -ésimo estado, em função do número de massa do caroço A . As energias dos estados excitados, nas unidades em que $\Lambda = 1$, se aproximam de zero com o aumento de N .

Os observáveis de dois corpos podem ser escritos em termos das energias de ligação de três corpos

$$B_N \equiv -E_3^{(N)},$$

substituindo-se Λ , de tal forma que

$$\epsilon_N \equiv -\frac{B_N}{\Lambda^2}, \tag{6.10}$$

$$\frac{\kappa_{nn}}{\sqrt{-\epsilon_N}} = \frac{K_{nn}}{\sqrt{B_N}} \tag{6.11}$$

e

$$\frac{\kappa_{nc}}{\sqrt{-\epsilon_N}} = \frac{K_{nc}}{\sqrt{B_N}}. \tag{6.12}$$

Nesse caso, o colapso da energia de três corpos e a presença dos estados Efimov são consequências da existência de soluções das equações correspondentes, no limite em que

$$\kappa_{nn} \rightarrow 0 \quad e \quad \kappa_{nc} \rightarrow 0.$$

O efeito Thomas é observado para $\Lambda \rightarrow \infty$, mantendo as energias de dois corpos fixas; enquanto o efeito Efimov é observado para $K_{nn} \rightarrow 0$ e $K_{nc} \rightarrow 0$, mantendo Λ fixo.

As energias de três corpos dos *halo-núcleos* têm Λ como fator de escala e o colapso Thomas é observado pelo crescimento sem limite das energias dos estados ligados à medida que $\Lambda \rightarrow \infty$.

Na figura 6.2 são apresentados os principais resultados, analisando-se o caso dos *halo-núcleos* como caso particular de um sistema de três corpos em que duas partículas têm massas iguais. Variando-se as energias dos subsistemas podemos encontrar a energia de ligação do estado fundamental do sistema de três corpos de forma que a energia de separação do primeiro estado excitado Efimov (de três corpos) seja nula em relação à energia de ligação de dois corpos. Fazendo este procedimento, tanto para os estados ligados como para os estados virtuais dos subsistemas, geramos uma curva paramétrica, dada pelos observáveis de dois corpos, que delimita a região onde pode ocorrer o primeiro estado excitado de Efimov. Considerando-se o caso em que um estado excitado de Efimov tenha sido localizado, podemos repetir o processo acima para tentar localizar a região limite em que é possível a existência de um segundo estado excitado, e assim por diante.

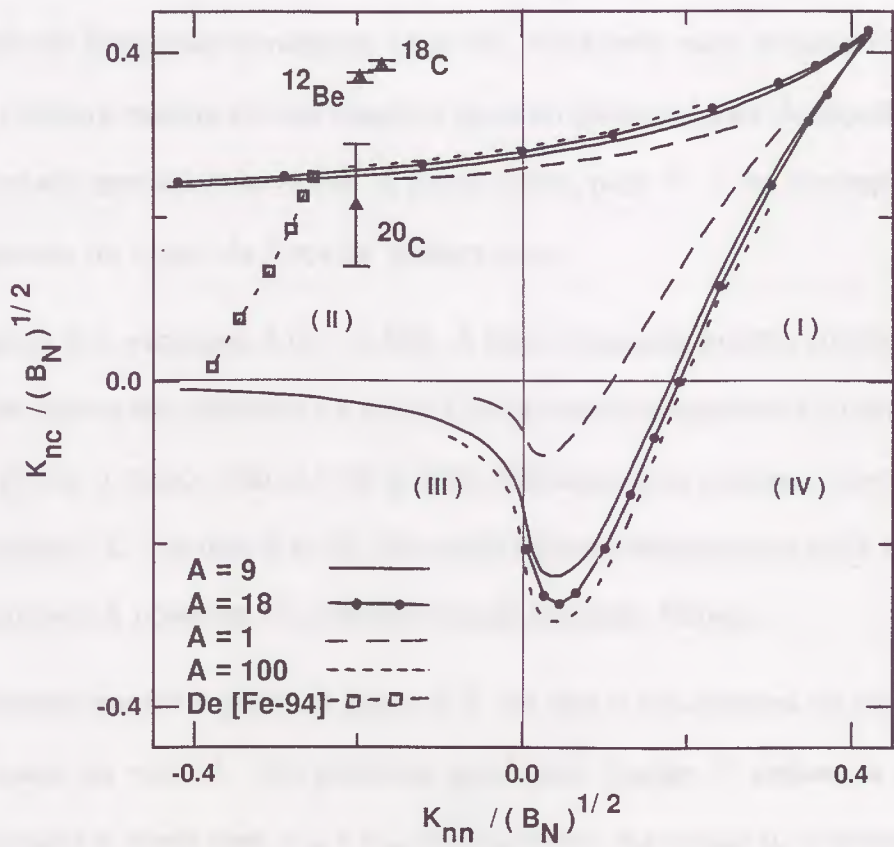


Figura 6.2 - Curvas que delimitam a presença do primeiro estado excitado de Efimov para alguns núcleos exóticos. Mostramos também três dados experimentais, para o ^{20}C , ^{18}C e ^{12}Be [Au-95]. Os quadrados conectados com linha tracejada foram obtidos a partir da fig.2 de [Fe-94], para $A = 9$, mostrando que a região de existência de estado Efimov no ^{11}Li implicaria em termos ^{10}Li praticamente ligado.

Na escala em que apresentamos o resultado na figura 6.2, onde as energias de dois corpos estão em unidades da energia do estado N ($N = 0$ para o caso do estado fundamental), as correspondentes figuras para $N = 0, 1, 2, \dots$ devem praticamente se superpor, o que mostramos que ocorre para $N = 0$ e $N = 1$. Tal superposição somente deixa de ser exata em virtude de limitações numéricas. [Am-97]. Para cada caso, a curva limite significa que a $(N + 1)$ -ésima energia de três corpos é igual ao limiar inferior de espalhamento. Fora da região o estado excitado não existe. A curva limite, para $N \rightarrow \infty$, corresponde ao resultado renormalizado no limite da força de alcance zero.

Na figura 6.2, variamos A de 1 a 100. A linha tracejada interna corresponde ao caso em que os três bósons são idênticos ($A = 1$); a linha contínua representa o caso que corresponde ao ^{11}Li , já que o caroço tem $A = 9$; a linha contínua, com pontos, o caso que corresponde ao *halo-núcleo* ^{20}C , em que $A = 18$. Na região interna respectiva de cada uma dessas curvas está assegurado a presença do primeiro estado excitado Efimov.

Mostramos quatro regiões na figura 6.2, em que o sub-sistema de dois corpos tem um estado ligado ou virtual. No primeiro quadrante (região I) ambos os subsistemas têm estados ligados e, nesse caso, κ_{nc} e κ_{nn} são positivos. Na região II, o sistema $n - c$ é ligado, enquanto $n - n$ tem um estado virtual. Na região III, ambos os sub-sistemas possuem estados virtuais e a região em que é possível estados ligados de três corpos é bastante reduzida, conforme seria esperado. Na região IV temos o caso análogo ao que ocorre na região II, em que, nesse caso, o sistema $n - n$ é ligado, enquanto $n - c$ tem um estado virtual.

As equações (6.6) e (6.7) nos fornecem as energias adimensionais. Dadas as energias

adimensionais ϵ_{nn} e ϵ_{nc} , obtemos como resultado do programa as energias adimensionais $\epsilon_3^{(0)}$ e $\epsilon_3^{(1)}$. Para determinarmos a energia na unidade precisamos determinar o corte Λ . O corte cresce para N crescente e cada valor de B_N é identificado com a energia de separação de dois nêutrons. A curva limite para a existência do estado Efimov $(N+1)$ é praticamente estável para $N \geq 0$, pois os valores de $-\epsilon_3^N \ll 1$. Fixando a energia do estado fundamental B_N e do estado virtual nêutron-nêutron, temos o valor do corte.

Ao efetuarmos o cálculo no limite Efimov, mantendo-se $\epsilon_{nn} = 0$ e variando-se ϵ_{nc} , observamos que o desaparecimento do primeiro estado excitado ocorre para uma energia crítica ϵ_{nc}^c diferente da energia crítica que ocorre se fizéssemos na ordem contrária, mantendo $\epsilon_{nc} = 0$. Esta assimetria é esperada já que representam duas configurações distintas. Quando $\epsilon_{nn} = 0$, isto representa um sistema onde temos dois subsistemas $(n - c)$ ligados, conforme representado no diagrama da figura 6.3. Nesta situação, o estado excitado está mais ligado e portanto requer uma energia de dois corpos maior para que ocorra o desaparecimento do estado Efimov.



Figura 6.3 - Representação esquemática de um sistema halo-núcleo contendo dois subsistemas ligados (linha contínua) e um sistema com interação virtual (linha tracejada).

Por outro lado, quando $\epsilon_{nc} = 0$, este sistema contém apenas um par ligado, como mostra o diagrama da figura 6.4. Neste caso, como o estado excitado está menos ligado, isto requer uma energia crítica menor para que ocorra o desaparecimento do estado Efimov. Portanto ϵ_{nc}^c é maior que a energia ϵ_{nn}^c .



Figura 6.4 - Representação esquemática do sistema de três corpos (halo-núcleo) com um sub-sistema ligado (linha contínua), enquanto os outros dois sub-sistemas com interações virtuais.

No quadrante II da figura 6.2 os sub-sistemas caroço-nêutron estão ligados mas o sub-sistema n-n é virtual e, como já vimos no capítulo anterior, esse estado virtual provoca uma diminuição da atração entre as partículas em relação ao caso em que todos os sub-sistemas são ligados. Mesmo se reduzindo a atração até um limite suficientemente grande para a energia do estado virtual ($n - n$), na escala mostrada na figura, observamos ainda a ocorrência de um estado ligado ($n - c$) que estende a região em uma faixa onde o estado excitado de três corpos é possível. O limite em que o estado virtual ($n - n$) é infinito quebrará a estrutura de três corpos do modelo e teríamos o caso de apenas duas partículas ligadas, conforme eqs. (6.6) e (6.7). Esse limite mostra que a curva deve se fechar.

No terceiro quadrante, todos os subsistemas contém estados virtuais, provocando uma interação mais fraca entre as partículas. Para $\epsilon_{nn} = 0$, existe um valor crítico ϵ_{nc}^c de forma a suprimir o estado excitado já que se trata da contribuição de dois subsistemas enquanto o terceiro está ligado com energia nula. Porém para $\epsilon_{nc} \approx 0$, o desaparecimento do estado excitado ocorre para $\epsilon_{nn} \gg \epsilon_{nc}^c$.

No quadrante IV, temos dois subsistemas caroço-nêutron com estados virtuais e um subsistema ligado n-n. Uma diminuição na energia do estado virtual implica num aumento da interação atrativa e, portanto o estado excitado fica mais ligado e para que ocorra o desaparecimento deste estado requer uma energia de ligação maior.

Finalmente, no quadrante I temos duas curvas que se unem no limiar das energias, ou seja quando $\epsilon_{nc} = \epsilon_{nn} = \epsilon_3^{(1)}$. As curvas possuem inclinações distintas pois descrevem configurações distintas.

Aumentando-se a massa do caroço, percebe-se que a figura se amplia, o que era de se esperar, pois o incremento na massa de um dos constituintes aumenta a energia de ligação do estado excitado e, desta forma, requer um incremento nas energias dos subsistemas para que ocorra o desaparecimento do estado Efimov. Nota-se, na figura 6.2, uma saturação quando incrementamos a massa, já que a diferença nas curvas entre $A = 1$ e $A = 9$ é mais significativa do que entre as curvas $A = 18$ e $A = 100$.

Usando os dados experimentais podemos determinar se alguns sistemas de três corpos podem conter estados de Efimov. Para tal, usamos a energia de separação de dois nêutrons S_{2n} para um determinado núcleo $A + 2$ como sendo a energia de ligação do sistema de três corpos e a energia de separação de um nêutron S_{1n} para o núcleo $A + 1$ como sendo a

energia do subsistema caroço-nêutron. Experimentalmente, temos que o subsistema $n - n$ tem um estado virtual cuja energia é da ordem de 143 keV.

O ponto experimental referente ao ^{11}Li está muito afastado da curva, no quadrante III, considerando-se os dados experimentais conhecidos para a energia do ^{10}Li , que não é ligado, tendo estado virtual de ~ 50 keV [Zi-95]. Tomando-se o valor experimental para a energia de ligação do ^{11}Li (300.69 ± 27.14 keV) e a energia do estado virtual $n - n$ (143 keV), as coordenadas desse ponto na figura 6.2, seriam centradas em $(x, y) = (-0.69, -0.41)$. Mesmo considerando-se os erros experimentais, em particular no que se refere ao valor conhecido para o ^{10}Li , é pouco provável que esse núcleo (^{11}Li) possa vir a apresentar um estado Efimov, já que essa possibilidade somente poderia ocorrer se o ^{10}Li tivesse energia praticamente nula.

O mesmo ocorre para ^{12}B , ^{14}Be e outros *halo-núcleos* que não foram indicados na figura. Entre os *halo-núcleos*, mostramos apenas três deles, que estariam mais próximos da região que permite estados Efimov. O ^{20}C , conforme se observa, é o único desse núcleos exóticos que teria uma grande possibilidade de conter pelo menos um estado excitado de Efimov, a se confirmar o valor do estado ligado do ^{19}C com menor erro experimental.

Na figura 6.2, incluímos também a análise feita por Fedorov, Jensen e Riisager [Fe-94], para o Lítio-11 ($A = 9$), mostrando que a região de existência de estado Efimov no ^{11}Li implicaria em termos ^{10}Li praticamente ligado. Um resultado que mostra total consistência com os resultados que obtivemos e exclui a possibilidade de efeito Efimov no ^{11}Li , a menos que o ^{10}Li seja ligado. Deve-se observar que em [Fe-94], foram usadas interações consideradas mais realísticas para o sistema de três corpos *halo-núcleo*, juntamente com o método

dos hiperesféricos, desenvolvidos em [Fe-93b] para o tratamento desses sistemas. Portanto, um procedimento bastante diferente do que usamos nesse trabalho. A consistência dos resultados mostra ser irrelevante certos detalhes da interação para energias suficientemente baixas, que é o caso de tais sistemas.

Considerando que o valor experimental da energia de separação do nêutron no ^{19}C tem um erro apreciável, ($E_{nc} = 162 \pm 112$) keV [Au-95], teremos que estimar uma faixa possível para a energia do estado excitado. O valor experimental da energia do estado fundamental de três corpos do ^{20}C tem um erro pequeno comparado ao de E_{nc} . Logo, manteremos fixos a energia desse estado fundamental, dado pela energia de separação dos dois nêutrons, $S_{2n} = 3506$ MeV, e estudamos a variação da energia do estado excitado Efimov em função de E_{nc} . Os resultados são apresentados na figura 6.5. Observamos que, se $E_{nc} > 215$ keV, o estado excitado desaparece, porém na região de $40 \text{ keV} < E_{nc} < 215 \text{ keV}$, o sistema *halo* - *núcleo* ^{20}C permite a existência de um estado Efimov. A energia de ligação relativa ao limiar de espalhamento $n - (nc)$ está abaixo de 14 keV. Estimamos que o tamanho desse estado excitado seja de pelo menos 35 fm, o que permite a interpretação de tal estado como um estado Efimov. A precisão do cálculo da energia de ligação do estado Efimov obviamente irá depender das energias experimentais que foram usadas como dados de entrada, sendo que o erro relativo na energia de ligação do nêutron no ^{19}C é da ordem de 0.7. Acrescentamos também que a presente análise feita para o ^{20}C está fundamentada na evidência experimental de que o último nêutron do ^{19}C estaria em um estado de onda S .

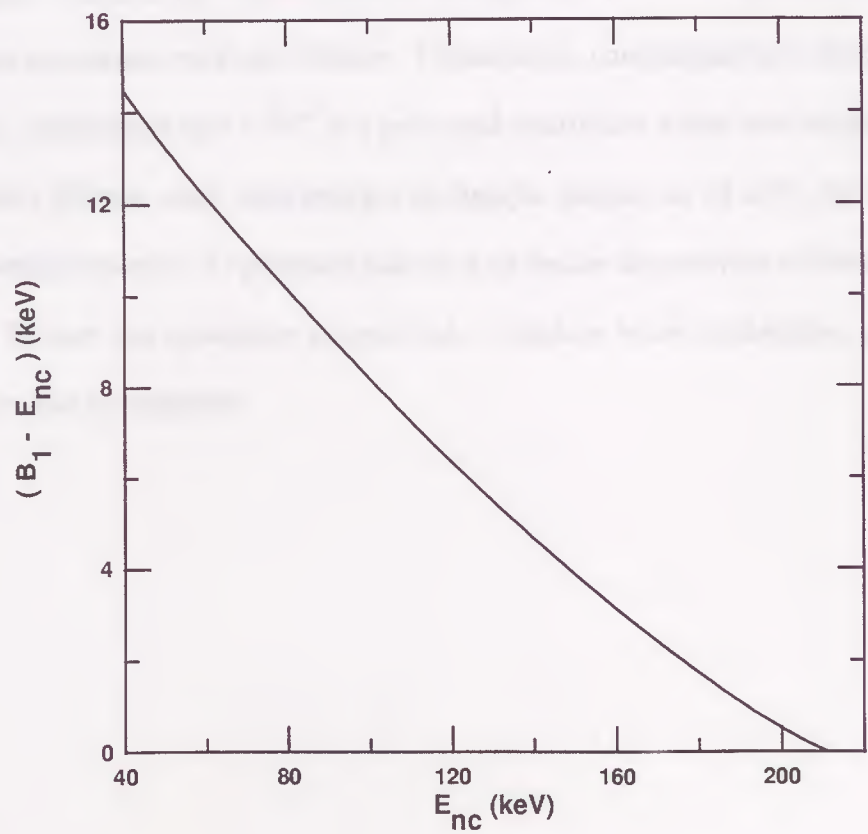


Figura 6.5 - Diferença de energia entre o estado excitado do ^{20}C e a energia de separação de um nêutron no ^{19}C em função da energia de separação no ^{19}C ($E_{nc}^{\text{exp}} = 162 \pm 112$ keV) [Au-95]. A energia de separação de dois nêutrons do ^{20}C foi fixa no valor experimental $S_{2n} = 3506 \pm 200$ keV bem como a energia do estado virtual nn.

Resumindo este capítulo, discutimos os aspectos universais de sistemas de três corpos, particularizando para o caso dos *halo* - *núcleos*, no limite de interação de alcance zero. Usamos a correlação do valor da energia do estado fundamental e do primeiro estado Efimov e obtemos um conjunto de valores para as energias $n - n$ e $n - c$ que permitem a existência de ao menos um estado excitado Efimov. Finalmente, considerando os dados experimentais disponíveis, concluimos que o ^{20}C é o principal candidato entre tais núcleos exóticos para ter um estado Efimov, com uma energia de ligação abaixo de 14 keV, em relação ao limiar inferior de espalhamento. O presente cálculo e os dados disponíveis excluem a possibilidade de estados Efimov em quaisquer outros *halo* - *núcleos* leves conhecidos, como ^{11}Li , ^{12}Be , ^{18}C , ou isótopos do oxigênio.

Exercício 2

Quadrados e Permutações

Considere o espaço $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclídea. Seja S um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Prove que a função distância $d(x, S)$ é contínua em $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que a função $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ é diferenciável e que $F'(x) = f(x)$. Use o Teorema da Derivada da Integral para provar este resultado.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que a função $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ é diferenciável e que $F'(x) = f(x)$. Use o Teorema da Derivada da Integral para provar este resultado.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Concluímos esse trabalho destacando os principais resultados obtidos e sugerindo algumas perspectivas para trabalhos futuros.

No capítulo 2 descrevemos o formalismo de Mitra, que é um caso particular das equações de Faddeev, aplicável para potenciais separáveis de curto alcance. Para o caso geral de um sistema de três partículas com massas diferentes, sem spins e na onda S , deduzimos a equação principal que é utilizada nos outros capítulos.

No capítulo 3 mostramos, de uma maneira simples, a conexão entre os efeitos Thomas e Efimov em um sistema de três bósons idênticos. Ambos efeitos apresentam o mesmo tipo de singularidade no “kernel” da equação integral. Mostramos que, por meio de uma transformação de escala, os dois efeitos estão diretamente relacionados. No caso do efeito Thomas (para $r_o \rightarrow 0$), notamos que a energia do estado fundamental do sistema tende ao infinito. Para a regularização, é introduzido um parâmetro Λ que vem a ser absorvido por uma grandeza de três corpos quando efetuamos a renormalização da teoria. Desta forma todos os demais observáveis de três corpos estão bem determinados se fixarmos as grandezas de dois corpos e, por exemplo, a energia do estado fundamental de três corpos.

Neste limite aparecem as correlações entre os observáveis de três corpos. Finalmente, nesse capítulo 3 estudamos a correlação entre a energia do estado excitado Efimov E_3^1 e a energia do estado fundamental Efimov E_3^0 em termos da energia de dois corpos E_2 . Variando a energia do subsistema, encontramos a energia de ligação do estado fundamental do sistema de três corpos de forma que a energia de separação do primeiro estado excitado Efimov seja nula em relação à de dois corpos. Fazendo este procedimento, tanto para os estados ligados como para os estados virtuais do subsistema, obtemos uma curva que representa os valores de energias do subsistema na qual o primeiro estado excitado desaparece. A curva obtida define a região onde é possível encontrar pelo menos um estado Efimov excitado.

No capítulo 4 discutimos a universalidade decorrente no sistema de três bósons quando um potencial absoritivo é introduzido na interação no limite da força de alcance zero. Enquanto a parte real da energia do sistema depende inversamente do quadrado da função corte Λ , a largura de decaimento depende inversamente de Λ . Portanto, a inclusão de um potencial absoritivo não elimina o efeito Efimov. Por outro lado, obtivemos a correlação entre a largura de decaimento e a parte real da energia do sistema de três corpos tanto para um potencial de Yamaguchi como para um potencial cujo fator de forma é $g(p) = 1$. Ambos apresentaram o comportamento análogo. Posteriormente, mostramos que a reta tangente à curva no plano da energia é perpendicular ao eixo da parte real da energia quando a parte complexa da interação tende a zero. Vimos ainda que a variação da parte real da energia de três corpos depende quadraticamente da largura do sistema quando variamos a parte complexa da interação. Os estudos feitos nesse capítulo espera-se que sejam úteis para se estudar as correlações de observáveis de baixas energias em sistemas realísticos em

que ocorram absorção, como sistemas que envolvem anti-partículas.

No capítulo 5 estudamos o sistema relativístico ligado de três bósons idênticos nas dimensões 1+1 e 2+1, utilizando método do plano nulo juntamente com o modelo de alcance zero. O método do plano nulo mostra-se apropriado para se estudar a dinâmica relativística em sistemas de três partículas, devido a duas importantes características na formulação das funções de onda dos estados ligados: (a) permite uma separação clara das coordenadas do centro de massa; e (b) elimina o processo de criação de pares. As equações dinâmicas para o estado fundamental foram resolvidas numericamente, sendo que os resultados mostraram consistência com o limite não relativístico da teoria de alcance zero, para uma e duas dimensões espaciais. Na situação relativística, os resultados obtidos em 1+1 e 2+1 dimensões convergem, devido ao fato de que a contribuição de uma das direções prevalece sobre as demais.

No capítulo 6, concluímos o estudo iniciado no capítulo 3 sobre a correlação entre a energia do estado excitado Efimov E_3^1 e a energia do estado fundamental Efimov E_3^0 em termos da energia de dois corpos E_2 , dessa vez para um sistema de três partículas, sendo uma diferente das outras duas. Da mesma forma que no capítulo 3, variando a energia do subsistema, encontramos a energia de ligação do estado fundamental do sistema de três corpos de forma que a energia de separação do primeiro estado excitado Efimov seja nula em relação à de dois corpos. Fazendo este procedimento, tanto para os estados ligados como para os virtuais do subsistema, obtemos uma curva que representa os valores de energias do subsistema na qual o primeiro estado excitado desaparece. A curva obtida define a região onde é possível encontrar pelo menos um estado Efimov excitado.

Os resultados desse formalismo, desenvolvido no capítulo 6, aplicamos para o estudo dos sistemas halo-núcleos. Em alguns casos, os sistemas halo-núcleo podem ser descritos como um sistema formado por um caroço e por um par nêutrons bem distantes podendo serem tratados como sistemas de três corpos, desde que o comprimento de espalhamento do par seja bem maior que o alcance da interação. Tais sistemas são fracamente ligados e apresentam uma grande extensão espacial. Vários autores já haviam sugerido que alguns núcleos exóticos poderiam conter estados Efimov, conforme discutido em [Be-93]. Na ref.[Fe-95] é estudado especificamente essa possibilidade, concluindo-se que os mais prováveis candidatos de conter estados Efimov seriam os núcleos ^{18}C e ^{20}C . Nessa referência foi também mostrado que a ocorrência de estados Efimov no ^{11}Li seria possível, para uma certa região em que ^{10}Li seria ligado. O estudo que fizemos mostrou total consistência com esse resultado, que na prática elimina a possibilidade de haver estados Efimov no ^{11}Li , considerando que as evidências experimentais apontam para um estado virtual do ^{10}Li . Além disto, nosso estudo mostrou também que os detalhes do potencial não são relevantes nesse caso em que estarmos a baixas energias. O conceito de renormalizabilidade da teoria de alcance zero permite que estudemos alguns problemas de três corpos analisando a correlação entre os observáveis físicos de três corpos usando potenciais bem simples. Nesta situação, as correlações são universais e os resultados obtidos podem ser estendidos para potenciais realísticos.

Finalmente, concluímos que, entre os *halo-núcleos* leves conhecidos, o único a apresentar uma grande chance de possuir estados excitados Efimov seria o ^{20}C , desde que confirmados os resultados experimentais obtidos para o ^{19}C , com uma faixa de erro menor. Estimamos

nesse caso que o ^{20}C pode apresentar um estado excitado com uma energia de separação de um nêutron entre 0 e 14 keV.

7.1 Perspectivas

Consideramos que os estudos apresentados nesta tese abrem várias perspectivas para trabalhos futuros que resumimos a seguir.

Os resultados obtidos no capítulo 4, para um modelo de três corpos com absorção, espera-se que sejam úteis para se estudar as correlações de observáveis de baixas energias em sistemas realísticos em que ocorram absorção, como sistemas que envolvem anti-partículas, como antipróton - dêuteron.

Também deve-se estender o estudo para sistemas de três corpos relativísticos, tomando-se como ponto de partida os resultados alcançados no capítulo 5 em $1+1$ e $2+1$ dimensões. No caso relativístico, é também de interesse o tratamento das equações de espalhamento e estudo dos observáveis relacionados.

Considerando-se o enfoque apresentado no capítulo 6, é de interesse também re-examinar sistemas não nucleares (atômicos e moleculares) de três corpos, para se verificar a possibilidade de existência de estados Efimov na natureza [Li-77, Hu-78].

Outros importantes estudos que devem ser seguidos e que têm mais urgência, por serem de grande interesse atual, se referem às propriedades dos *halo* - núcleos, que foram tratados no capítulo 6. Detalhes da função de onda para o cálculo da distribuição de momento, assim com cálculo de observáveis de espalhamento, devem ser considerados. Por outro lado, para melhor se esclarecer o alcance do modelo de três corpos para o tratamento de

tais núcleos exóticos, devemos considerar a inclusão explícita de outras ondas parciais, além da onda S , considerando-se certos *halo* - núcleos específicos, como o ${}^6\text{He}$, em que se tenham suficientes dados experimentais. Também a dependência do modelo em relação a diferentes fatores de forma do potencial merece ser estudada, para se estabelecer o alcance das considerações que foram feitas. Deve-se lembrar que as nossas conclusões apontam para uma insensibilidade dos resultados alcançados em relação aos detalhes da interação no limite de baixas energias, em consequência da renormalizabilidade da teoria. Esse fato foi observado ao compararmos nossos resultados, representados na figura 6.2, com os resultados de outro grupo de pesquisadores, que usaram interações consideradas mais realísticas.

Referências Bibliográficas

- [Aa-64] R. Aaron, R. D. Amado e Y. Y. Yam, Phys. Rev. **B136** (1964) 650.
- [Aa-65] R. Aaron, R. D. Amado e Y. Y. Yam, Phys. Rev. **B140** (1965) 1291.
- [Ad-82] S. K. Adhikari e L. Tomio, Phys. Rev. **C26** (1982) 83.
- [Ad-88] S. K. Adhikari, A. Delfino, T. Frederico, I. D. Goldman e L. Tomio, Phys. Rev. **A37** (1988) 3666.
- [Ad-91] S. K. Adhikari e K. L. Kowalski, *Dynamical Collision Theory and Its Applications*, Academic Press, Boston, 1991, Cap. 7.
- [Ad-95] S. K. Adhikari, T. Frederico e I. D. Goldman, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 487;
S. K. Adhikari e T. Frederico, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 4572.
- [Al-73] V. de Alfara, S. Fubini, G. Furlan, C. Rossetti, em *Currents in Hadron Physics*, North Holland Publ., Amsterdam, 1973.
- [Al-67] V. P. Alfimenkov et al., Phys. Lett. **24B** (1967) 151.
- [Am-63] R. D. Amado, Phys. Rev. **132** (1963) 485.
- [Am-72] R. D. Amado e J. V. Noble, Phys. Rev. **D5** (1972) 1992.

- [Am-92] A. E. A. Amorim, Lauro Tomio e T. Frederico, Phys. Rev. **C 46** (1992) 2224.
- [Am-97] A. E. A. Amorim, Lauro Tomio e T. Frederico, Phys Rev. **C 56** (1997) R2378.
- [An-90] R. Anne et al., Phys. Lett. **B250** (1990) 19.
- [Au-95] G. Audi e A. H. Wapstra, Nucl. Phys. **A595** (1995) 3569.
- [Au-87] N. Austern, Y. Iseri, M. Kamimura, M. Kawai, G. Rawitscher e M. Yahiro, Phys. Rep. **154** (1987) 125.
- [Az-88] I. G. Aznauryan and K. A. Oganessian, Sov. J. Nucl. Phys. **47**, (1988) 1097.
- [Az-90] I. G. Aznauryan and K. A. Oganessian, Phys. Lett. **B249** (1990) 309.
- [Ba-89] C. J. Batty, Rep. Prog. Phys. **52** (1989) 1165.
- [Ba-79] B.L.G.Bakker, L.A.Kondratyuk and M.V.Terent'ev, Nucl. Phys. **B158** (1979) 497.
- [Be-88] C. Bertulani e G. Baur, Nucl. Phys. **A480** (1988) 615.
- [Be-90] C. Bertulani e M. S. Hussein, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1099.
- [Be-93] C. A. Bertulani, L. F. Canto e M. S. Hussein, Phys. Rep. **226** (1993) 281.
- [Bh-65] V. S. Bhasin, G. L. Schrenk e A. N. Mitra, Phys. Rev. **B137** (1965) 398.
- [Bi-69] R. Bizzarri, Lett. Nuovo Cim. **2** (1969) 431.
- [Bj-65] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, N.York, 1965.

- [Bl-91] B. Blank et al. Z. Phys. **A340** (1991) 41.
- [Bran-74] R. A. Brandenburg, Y. E. Kim e A. Tubis, Phys. Lett. **49B** (1974) 205.
- [Bray-74] D. D. Brayshaw, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 382.
- [Br-79] L. W. Bruch e J. A. Tjon, Phys. Rev. **A19** (1979) 425.
- [Ca-93] L.F. Canto, R. Donangelo e A. Romanelli e H. Schulz, Phys. Lett. **318B** (1993) 415.
- [Ca-95] L.F. Canto, R. Donangelo, P. Lotti e M.S. Hussein, Nucl. Phys. **A589** (1995) 117.
- [Ch-53] R. S. Christian e J. L. Gammel, Phys. Rev. **91** (1953) 100.
- [Ch-88a] P. L. Chung , F. Coester and W. N. Polizou , Phys. Lett. **B205** , (1988) 545.
- [Ch-88b] P.L.Chung, F. Coester, B. D. Keister and W.N. Polizou, Phys. Rev. **37** (1988) 2000.
- [Co-77] C. Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Franck Laloë, *Quantum mechanics*, Trad., 2^a Ed. Cap. 2, Ed. John Wiley & Sons e Hermann.
- [Cu-84] J. Cugnon e J. Vandermeulen, Phys. Lett. **146B** (1984) 16.
- [Da-61] G. S. Danilov, Sov. Phys. JETP **13** (1961) 349.
- [Da-94] S. Dasgupta, I. Mazumdar e V. S. Bhasin, Phys. Rev. **C 50** (1994) R550.
- [Da-66] R. Dashen and M. Gell-Mann, 1966, em *Proceedings of the 3rd Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High-Energy* (Freeman).

- [Di-71] W. Dilg, L. Koester e W. Nistler, Phys. Lett. **36B** (1971) 208.
- [Do-70] L. R. Dodd, J. Math. Phys. **11** (1970) 207.
- [Dz-87] Z. Dziembowski and L. Mankiewicz, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 2175.
- [Dz-88] Z. Dziembowski and L. Mankiewicz, Phys. Rev. **D37** (1988) 778.
- [Ef-70] V. N. Efimov, Phys. Lett. **33B** (1970) 563;
Sov. J. Nucl. Phys. **12** (1971) 589.
- [Ef-81] V. N. Efimov, Nucl. Phys. **A362** (1981) 45.
- [Ef-85] V. Efimov and E. G. Tkachenko, Phys. Lett. **B157** (1985) 108;
- [Ef-88] V. Efimov, Few Body Syst. **4** (1988) 71.
- [Ef-90] V. Efimov, Comm. Nucl. Part. Phys. **19** (1990) 271.
- [Fa-61] L. D. Faddeev, Sov. Phys. JETP **12** (1961) 1014;
Sov. Phys. Doklady **6** (1961) 384.
- [Fe-93] D. V. Fedorov, A. S. Jensen e K. Riisager, Phys. Lett. **B312** (1993) 1.
- [Fe-93b] D. V. Fedorov e A. S. Jensen, Phys. Rev. Lett. **25** (1993) 4103.
- [Fe-94] D. V. Fedorov, A. S. Jensen e K. Riisager, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 2817;
Phys. Rev. **C49** (1994) 201;
Phys. Rev. **C50** (1994) 2372.
- [Fe-95] D. V. Fedorov, E. Garrido e A. S. Jensen, Phys. Rev. **C51** (1995) 3052.

- [Fi-75] S. Fiarman e S. S. Hanna, Nucl. Phys. **A251** (1975) 1.
- [Fo-79] A. C. Fonseca, E. F. Redish e P. E. Shanley, Nucl. Phys. **A320** (1979) 273.
- [Fr-79] L.L.Frankfurt and M.I.Strikman, Nucl. Phys. **B148** (1979) 107
- [Fr-81] L.L.Frankfurt and M.I.Strikman, Phys. Rep. **76** (1981) 215.
- [Fr-88] T. Frederico, I. D. Goldman and A. Delfino, Phys. Rev. **C37** (1988) 497.
- [Fr-90] T. Frederico, B. V. Carlson, C. Mastroleo, L. Tomio e M. S. Hussein, Phys. Rev. **C42** (1990) 138.
- [Fr-91] T. Frederico, G.A. Miller and E. M. Henley, Nucl. Phys. **A533** (1991) 617.
- [Fr-92] T. Frederico, Phys. Lett. **B282** (1992) 409.
- [Fu-66] S. Fubini, G. Segré and D. Walecka, Ann. Phys. **39** (1966) 381.
- [Go-50] M. M. Gordon, Phys. Rev. **801** (1950) 111.
- [Gr-84] I.L.Grach and L.A. Kondratyuk, Sov. J. Nucl. Phys. **39** (1984) 198.
- [Ha-87] P. G. Hansen e B. Jonson, Europhys. Lett. **4** (1987) 409.
- [Ha-95] P. G. Hansen, A. S. Jensen e B. Jonson, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **45** (1995) 591.
- [Ha-75] E. P. Harper, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 677.
- [Hu-78] H. S. Huber, T. K. Lim e D. H. Feng, Phys. Rev. **C18** (1978) 1534.

- [Hu-51] D. G. Hurst e J. Alcock, *Can. J. Phys.* **29** (1951) 36.
- [Ja-91] R. Jackiw, *Breaking of Classical Symmetries by Quantum Effects*, Symposium on Quantum Physics, Geneva, Switzerland, 1991 (MIT Report No. MIT-CTP 1971).
- [Ji-90] C.R. Ji and S. Cotanch, *Phys. Rev.* **D21** (1990) 2319.
- [Jo-75] Charles J. Joachain, *Quantum Collision Theory* North-Holland Publishing Company, 1975.
- [Kh-73] V. F. Kharchenko, *Sov. J. Nucl. Phys.* **16** (1973) 173.
- [Ko-88] T. Kobayashi et al., *Phys. Rev. Lett* **60**, (1988) 2599.
- [Ko-89] T. Kobayashi et al., *Phys. Lett* **232B** (1989) 51.
- [Kr-93] R. A. Kryger et al., *Phys. Rev.* **C 47** (1993) R2439.
- [Ku-97] T. T. S. Kuo, F. Krmpotic e Y. Tzeng, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 2708.
- [La-88] G. P. Latta e P. C. Tandy, *Phys. Lett.* **209B** (1988) 14.
- [Le-74] J. S. Levinger, *The two and three-body problem* 1974, Springer, New York.
- [Li-77] T. K. Lim, K. Duffy e W. C. Dames, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 341.
- [Mc-75] N. J. McGurk e H. Fieldelley, *Can. J. Phys.* **53** (1975) 1749.
- [Mi-73] A. B. Migdal, *Sov. J. Nucl. Phys.* **16** (1973) 238.
- [Mi-62] A. N. Mitra, *Nucl. Phys.* **32** (1962) 529.

- [Mi-63] A. N. Mitra e V. S. Bhasin, Phys. Rev. **131** (1963) 1265.
- [Oe-67] W. T. H. van Oers e J. D. Seagrave, Phys. Lett. **24B** (1967) 562.
- [Ph-68] A. C. Phillips, Nucl. Phys. **107A** (1968) 209.
- [Ra-80] J. Rafelski, , Phys. Lett. **91B** (1980) 281.
- [Ri-94] J.-M. Richard e S. Fleck, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 1464.
- [Ri-92] K. Riisager, A. S. Jensen e P. Møller, Nucl. Phys. **A548** (1992) 393.
- [Sc-85] W. Schweiger, J. Haidenbauer e W. Plessas, Phys. Rev. **C32** (1985) 1261.
- [Sh-81] M. Zh. Shmatikov e I. L. Grach, Sov. J. Nucl. Phys. **34** (1981) 538.
- [Si-63] A. G. Sitenko e V. F. Kharchenko, Nucl. Phys. **95** (1963) 15.
- [Sk-56] G. V. Skorniyakov e K. A. Ter-Martirosyan, Sov. Phys. JETP **4** (1957) 648.
- [St-72] A. T. Stelbovics e L. R. Dodd, Phys. Lett. **39B** (1972) 450.
- [Ta-85] I. Tanihata et al., Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2676.
- [Ta-96] I. Tanihata, J. Phys. **G22** (1996) 157.
- [Te-76] M. V. Terent'ev, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 106.
- [Th-35] L. H. Thomas, Phys. Rev. **47** (1935) 903.
- [To-90] L. Tomio, T. Frederico e A. Delfino, Phys. Rev. **C41** (1990) 876.
- [Wi-32] E. Wigner, Phys. Rev. **31** (1932) 546.

- [Ya-54] Y. Yamaguchi e Y. Yamaguchi, Phys. Rev. **95** (1954) 1628.
- [Zi-95] M. Zinser et al., Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1719.
- [Zh-93] M.V. Zhukov, B. V. Danilin, D. V. Fedorov, J. M. Bank, I. S. Thompson e J. S. Vaagen, Phys. Rep. **231** (1993) 151.

