Universidade Estadual Paulista – UNESP
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS
Departamento de Engenharia Elétrica – DEE
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista – UNESP, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Márcio Roberto Covacic
Engenheiro Eletricista – FEIS/UNESP

Julho de 2001

Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira** – FEIS/UNESP

"Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI"

Márcio Roberto Covacic

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA – UNESP, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).

Prof. Dr. Antônio Padilha Feltrin – Coordenador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira – Orientador

Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia

Prof. Dr. Liu Hsu

Aos meus pais, Pedro e Maria, pelo incentivo e pelo apoio em todos os momentos difíceis da minha vida, pela confiança, carinho e amor que sempre depositaram em mim e por serem, em sua simplicidade, os melhores pais que eu poderia desejar

OFEREÇO

À minha irmã, Ana Cláudia, pelo incentivo, companheirismo, cumplicidade e principalmente pelo amor que me concede

DEDICO

"A mentira deixa o problema para o futuro; a verdade deixa o problema no passado."

Rick Pitino - Leed to succeed (Broadway)

"Há duas maneiras de estudar borboletas: persegui-las com redes e inspecionar os organismos mortos ou sentar-nos em silêncio e observá-las dançando entre as flores."

Nongnuch Bassham

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que me deu força e vontade para superar todos os obstáculos encontrados no caminho até chegar a este momento.

Aos meus pais, Pedro e Maria, à minha irmã e à minha família, pelo apoio, incentivo e carinho sempre presentes.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por participar diretamente da minha formação científica, pela amizade, humildade, empenho, competência e por seu espírito nobre, correto e altruísta, que me deram muitos ensinamentos.

Ao Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia, ao Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho e ao Prof. Dr. Nobuo Oki, pela amizade e pelos ensinamentos.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelas suas dicas de organização, ajuda com o *Latex*, *Matlab*, *LMISol*, com as simulações e pela amizade.

Ao Prof. Dr. Liu Hsu, da COPPE/UFRJ, pela sua participação, suas sugestões e suas críticas pertinentes.

Aos professores, técnicos e demais funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica e da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, que propiciaram a infra-estrutura necessária para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da graduação, pós-graduação e da cidade de Ilha Solteira, pela amizade, companheirismo e saudável convivência.

Ao Arlindo, à Fátima e ao Paulo, da seção de Pós-Graduação, pela gentileza e simpatia.

Finalmente, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pelo auxílio financeiro dado a esta pesquisa.

Resumo

Propõem-se novas condições, em termos de Desigualdades Lineares Matriciais (em inglês, *Linear Matrix Inequalities*, LMI), para a resolução do seguinte problema, classificado como síntese Estritamente Real Positiva (ERP): dada uma planta linear invariante no tempo, com o número de saídas maior ou igual ao número de entradas, encontre uma matriz constante de realimentação da saída K e uma matriz constante em série com a saída F para que o sistema controlado seja ERP. Então, com base neste resultado, um novo projeto baseado em LMI para o Controle com Estrutura Variável (CEV) com realimentação da saída de plantas dinâmicas incertas é apresentado. O método considera as seguintes especificações do projeto: distúrbios casados ou não-linearidades da planta, restrições na saída, taxa de decaimento e, finalmente, incertezas da planta não casadas. O método é aplicado em alguns exemplos. As contribuições principais desta dissertação são: a generalização do método de projeto para plantas com o mesmo número de entradas e saídas e a proposta de um novo método de projeto para plantas com o número de saídas maior que o número de entradas.

Abstract

We propose new Linear Matrix Inequalities (LMI) conditions for the following problem, called Strictly Positive Real (SPR) synthesis: given a linear time-invariant plant, with the number of outputs greater or equal to the number of inputs, find a constant output feedback matrix K and a constant output tandem matrix F for the controlled system to be SPR. Then, taking into account this result, a new LMI based design for output Variable Structure Control (VSC) of uncertain dynamic plants is presented. The method considers the following design specifications: matched disturbances or nonlinearities of the plant, output constraints, decay rate and, finally, unmatched plant uncertainties. The method is applied in some examples. This dissertation presents a more general design method for the case where the plant has the same number of inputs and outputs and it proposes a new design method for the case where the plant has more outputs than inputs.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes **7**

2.1 Modos Deslizantes 7

2.2 Controle com Estrutura Variável e Observação de Sistemas Não-Lineares . . 16

2.2.1 Descrição do sistema e definições básicas 18

2.2.2 Projeto do Controlador 19

2.2.3 Observação dos estados 22

2.2.4 Síntese do controlador-observador 25

2.3 Conclusão 28

3 Novas Condições Baseadas em LMI para Sistemas ERP **29**

3.1 Sistemas com Mesmo Número de Entradas e Saídas 29

3.1.1 Sistemas Incertos 37

3.2 Sistemas com Diferentes Números de Entradas e Saídas 41

3.3 Conclusão 48

4 Controle com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI **50**

4.1 Estabilidade e Robustez 51

4.2 Estabilidade, Robustez e Taxa de Decaimento 56

4.3 Estabilidade, Robustez, Taxa de Decaimento e Restrições na Saída 57

4.4 Conclusão 59

5 Exemplos de Aplicação **60**

5.1 Aproximação da função sinal 60

5.2 Exemplo SISO 61

5.2.1 Resultados 62
5.2.2 Análise dos Resultados 68
5.3 Exemplo MIMO 69
5.3.1 Resultados 70
5.3.2 Análise dos Resultados 80
5.4 Exemplo com Número de Saídas Superior ao Número de Entradas 81
5.4.1 Resultados 83
5.4.2 Análise dos Resultados 86
5.5 Conclusão 86

6 Conclusões Finais **88**
6.1 Conclusões Gerais 88
6.2 Sugestões para Pesquisas Futuras 89

Referências Bibliográficas **90**

A Zeros de Transmissão de um Sistema **94**

B Demonstração do Lema 3 [1] **96**

C Restrição nos Vetores de Entrada e Saída da Planta **99**
C.1 Restrição no Vetor de Entrada 99
C.2 Restrição no Vetor de Saída 102

D Demonstração do Complemento de Schur [2] **104**

Lista de Figuras

2.1 Modo deslizante. 8

2.2 Ocorrência de modo deslizante apenas na intersecção das superfícies. 9

2.3 Subsistemas lineares instáveis: (a)$\psi = -\alpha$ e (b)$\psi = \alpha$. 10

2.4 Estabilidade assintótica através de EVMD, no plano $(x_1, x_2) = (x, \dot{x})$. 11

2.5 Método de Filippov. 13

2.6 Modo deslizante em sistema com histerese. 14

2.7 Modo deslizante em sistema com atraso. 16

2.8 Configuração do Controlador-Observador. 26

3.1 Sistema realimentado dos Teoremas 5 e 6. 31

3.2 Sistema realimentado do Problema 1. 32

3.3 Sistema realimentado do Problema 2. 38

3.4 Sistema realimentado do Problema 3. 42

5.1 Estados da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = 0$. 65

5.2 Estados da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = 0.5$. 65

5.3 Comparação do estado x_1 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = 0$ e $\delta = 0.5$. . . . 66

5.4 Comparação do estado x_2 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = 0$ e $\delta = 0.5$. . . . 66

5.5 Estados da planta com taxa de decaimento $\gamma = 0.47$ e $\delta = 0$. 67

5.6 Estados da planta com taxa de decaimento $\gamma = 0.47$ e $\delta = 0.5$. 67

5.7 Comparação do estado x_1 da planta com $\gamma = 0.47$, $\delta = 0$ e $\delta = 0.5$. 68

5.8 Comparação do estado x_2 da planta com $\gamma = 0.47$, $\delta = 0$ e $\delta = 0.5$. 68

5.9 Estados da planta x_1 e x_2 sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$. 73

5.10 Estados da planta x_3 e x_4 sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$. 73

5.11 Estados da planta x_1 e x_2 sem taxa de decaimento, com $\delta = 0.8$. 74

5.12 Estados da planta x_3 e x_4 sem taxa de decaimento, com $\delta = 0.8$. 74
5.13 Comparação do estado x_1 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$. . . 75
5.14 Comparação do estado x_2 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$. . . 75
5.15 Comparação do estado x_3 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$. . . 76
5.16 Comparação do estado x_4 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$. . . 76
5.17 Estados da planta x_1 e x_2 com taxa de decaimento $\gamma = 0.19$ e $\delta = -0.8$. 77
5.18 Estados da planta x_3 e x_4 com taxa de decaimento $\gamma = 0.19$ e $\delta = -0.8$. 77
5.19 Estados da planta x_1 e x_2 com taxa de decaimento $\gamma = 0.19$ e $\delta = 0.8$. 78
5.20 Estados da planta x_3 e x_4 com taxa de decaimento $\gamma = 0.19$ e $\delta = 0.8$. 78
5.21 Comparação do estado x_1 da planta com $\gamma = 0.19$, $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$. 79
5.22 Comparação do estado x_2 da planta com $\gamma = 0.19$, $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$. 79
5.23 Comparação do estado x_3 da planta com $\gamma = 0.19$, $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$. 80
5.24 Comparação do estado x_4 da planta com $\gamma = 0.19$, $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$. 80
5.25 Estado x_1 da planta. 84
5.26 Estados x_3 e x_4 da planta. 85
5.27 Estados x_2 e x_5 da planta. 85
5.28 Estados x_6 e x_7 da planta (em detalhe). 86

Capítulo 1

Introdução

As características reais de um sistema são descritas através da modelagem matemática. Este modelo pode conter incertezas devido ao desconhecimento de parâmetros, que podem ser constantes, variantes no tempo ou imprecisamente conhecidos, e incertezas devido ao desconhecimento das entradas do sistema.

Desde a introdução da teoria de sistemas com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (EVMD) pelo Professor Vadim I. Utkin, para a comunidade ocidental que pesquisa sistemas de controle [3], as atividades de pesquisa, fora da antiga União Soviética e Iugoslávia, em sistemas com EVMD, têm continuado crescentes. Além disso, a natureza dessas investigações tem-se expandido, de assuntos normalmente teóricos durante as décadas de setenta e oitenta, para muitos problemas de aplicações práticas industriais interessantes, em muitos campos da Engenharia, no final dos anos oitenta [4].

O interesse por Controle com Estrutura Variável (CEV) justifica-se pelas suas aplicações efetivas em problemas de automação que são muito diversificados em sua natureza física e propósitos funcionais. No curso de toda a história do desenvolvimento da teoria de controle automático, a intensidade das investigações de controle descontínuo tem-se mantido em um nível suficientemente alto. Particularmente, durante os estágios iniciais, relés tomaram destaque no projeto de sistemas de controle a realimentação, por facilidade de implementação e eficiência do equipamento de controle [4].

Recentemente, tem sido dada uma atenção crescente para sistemas onde as ações de controle são funções descontínuas de suas coordenadas e distúrbios. As trajetórias de estado representam as propriedades de um sistema dinâmico. Portanto, através de uma escolha

adequada das ações de controle, as trajetórias de estado podem ser mudadas para que sejam dadas as propriedades desejadas de um processo a um sistema [5].

Um sistema com CEV consiste de um conjunto de subsistemas contínuos, com uma lógica própria de chaveamento. A ação de controle resultante é uma função descontínua dos estados do sistema, distúrbios e referências de entrada. Essencialmente, um sistema com estrutura variável utiliza uma lei de controle com alta velocidade de chaveamento para levar a trajetória de estado da planta a uma superfície especificada no plano de fase, mantendo-a sobre esta superfície por todo o tempo subseqüente. Então, a dinâmica da planta fica restrita a esta superfície, que é convenientemente escolhida, de maneira a obter um comportamento desejado [4].

O projeto de sistemas com ações de controle descontínuas normalmente se reduz à seleção de superfícies no plano de fase para que a função de controle tenha descontinuidades. Quando certas relações são válidas, um tipo especial de movimento, chamado de modo deslizante pode aparecer. Este pode ser o caso, por exemplo, se, na vizinhança da superfície onde a função de controle tenha descontinuidades, as trajetórias de estado estiverem direcionadas a esta superfície.

Uma vez nesta superfície, o sistema evidentemente não pode se mover ao longo de nenhuma trajetória adjacente a esta em qualquer outro instante. Portanto, em resposta a qualquer mudança, um movimento que começa sempre retorna a esta superfície. Conseqüentemente, no sistema em discussão, a trajetória pode se mover somente ao longo da superfície descontínua. Este movimento é convencionalmente chamado de modo deslizante [5].

O primeiro passo no projeto de um CEV, em geral, é a escolha de um subespaço deslizante (superfície de chaveamento). Um modo deslizante estável é conseguido através da seleção adequada de hiperplanos, de maneira que a resposta dinâmica de malha fechada desejada seja alcançada. O segundo passo envolve a seleção de uma lei de controle que assegure o alcance e a permanência do sistema em modo deslizante [6].

Estudos subseqüentes têm revelado que movimentos em modos deslizantes resultam em controle ótimo. A teoria de sistemas com CEV tem-se tornado um campo independente na teoria geral de sistemas não-lineares [5].

Nos últimos anos, surgiu um novo paradigma para o projeto de CEV: a descrição do problema através de Desigualdades Lineares Matriciais (em inglês, *Linear Matrix Inequalities*,

LMI). Três fatores tornam as técnicas de LMI especiais:

(a) Uma grande variedade de especificações e restrições de projeto podem ser expressas como LMI;

(b) Uma vez formulado em termos de LMI, o problema pode ser solucionado com exatidão por algoritmos de otimização bastante eficientes;

(c) Enquanto a maioria dos problemas com múltiplas restrições ou objetivos falham em encontrar soluções analíticas em termos de suas equações matriciais, eles são freqüentemente factíveis no tratamento por LMI.

Agora, serão descritos seis artigos que abordam o CEV com LMI, obtidos após um levantamento bibliográfico eletrônico. Em [7], os autores apresentam dois métodos numéricos para o projeto de CEV, com acesso somente às saídas da planta. O projeto considera funções de chaveamento do tipo $s = Gy$, sendo y a saída da planta e G uma matriz constante. A matriz G, que define o comportamento no deslizamento, é considerada disponível e o projeto procura satisfazer a condição $s^T\dot{s} < 0$, para $s \neq 0$, utilizando uma lei de controle adequada e métodos de otimização empregados nas soluções das LMI.

Todos os outros trabalhos, descritos a seguir, sobre o emprego de LMI no projeto de CEV, consideram a disponibilidade do vetor de estado.

Em [8], a especificação das superfícies de deslizamento é feita em termos de LMI, permitindo, inclusive, a especificação da taxa de decaimento. Posteriormente, o artigo [9] generalizou estes resultados, considerando incertezas não casadas.

Em [10], é demonstrado que as condições de existência para as LMI descritas em [9] são necessárias e suficientes, além de serem apresentadas novas condições para o projeto da superfície de chaveamento linear, em termos de LMI, permitindo o projeto por alocação de pólos do sistema de ordem reduzida no deslizamento, mais geral do que os métodos descritos em [8] e [9]. Em [11], o projeto das superfícies de deslizamento é feito de modo a minimizar, adicionalmente, a influência de distúrbios não casados. Foi empregado o método de controle ótimo com a norma $\mathcal{H}_\infty$ e são consideradas incertezas nos parâmetros da planta pertencentes a um politopo convexo. Recentemente, estes autores apresentaram um método similar, considerando agora a norma $\mathcal{H}_2$ [12].

Aqui, foi abordado o projeto de CEV, com acesso somente às saídas da planta, utilizando apenas controladores estáticos invariantes no tempo e um método de projeto baseado em

LMI. Assume-se, inicialmente, como efetuado em [13], que a planta apresenta o mesmo número de entradas e saídas e o método proposto permite a consideração de não-linearidades ou distúrbios casados, de restrições nas saídas, da taxa de decaimento e da robustez, com respeito a incertezas nos parâmetros da planta, casadas e não casadas. Em seguida, o método é aplicado para sistemas com diferentes números de entradas e saídas, sendo esta a principal contribuição desta dissertação.

O projeto de CEV com controladores invariantes no tempo e acesso somente às saídas da planta já foi estudado, por exemplo, em [14], [15] e [16]. Entretanto, estes métodos não são tão gerais, pois não permitem, por exemplo, a especificação da robustez com respeito às incertezas nos parâmetros da planta não casadas ou de restrições nas saídas da planta.

Em [17], é apresentada uma metodologia de controle com CEV para sistemas dinâmicos incertos com várias entradas, utilizando somente informações da saída da planta. O projeto da superfície de chaveamento através de aproximação LMI utiliza realimentação estática da saída. Uma nova aproximação da otimização baseada em LMI é empregada na construção da lei de controle para garantir o modo deslizante. Em [18], é considerado um controlador em modo deslizante que requer somente informações da saída e é estático por natureza. A novidade é a razão e o método usado para sintetizar o componente de controle linear que envolve uma otimização em termos de LMI. Em ambos os casos, os sistemas apresentam um número de saídas maior ou igual ao número de entradas. Entretanto, estes métodos não permitem a especificação da taxa de decaimento, robustez e restrições nas saídas, como proposto nesta dissertação.

Os sistemas ERP também têm uma grande importância no controle de sistemas com incertezas, devido aos importantes resultados disponíveis sobre a estabilidade destes sistemas, como por exemplo a hiperestabilidade assintótica de Popov [19]. Desta forma, um procedimento para a análise e projeto de sistemas de controle consiste na manipulação do sistema, com o objetivo de colocá-lo na forma de um sistema ERP, de modo que os resultados sobre a estabilidade destes sistemas possam ser utilizados.

Os sistemas Reais Positivos (RP), também conhecidos como passivos, nasceram na teoria de circuitos e foram definidos, inicialmente, dentro dos Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (SLIT). As matrizes de transferência RP e ERP possuem duas interpretações interessantes em termos de circuitos elétricos. Considere dois nós de um circuito elétrico composto pela conexão de elementos passivos com parâmetros concentrados R, L e C (re-

sistores, indutores e capacitores), de modo arbitrário. Então, a impedância em Laplace entre os dois nós, $Z(s)$ é RP, e, de modo inverso, qualquer função de transferência $Z(s)$ RP pode ser realizada como a impedância entre dois nós de um circuito elétrico com elementos passivos R, L e C. Agora, se aplicarmos uma tensão entre estes dois nós mencionados anteriormente e se $Z(s)$ for RP, então a soma da energia inicial armazenada no circuito, no instante inicial $t = 0$, com a energia fornecida no intervalo $t \in [0, T]$, $T > 0$, deve ser maior ou igual à energia armazenada em $t = T$.

Esta dissertação apresenta novos resultados, baseados em LMI, sobre o projeto de sistemas ERP, para plantas com o número de saídas maior ou igual ao número de entradas, e generaliza os resultados disponíveis para plantas com o mesmo número de entradas e saídas. Estes resultados viabilizaram o desenvolvimento de um novo método para o projeto de CEV baseado em LMI, com acesso somente às saídas da planta. Este novo método permite a consideração de não-linearidades ou distúrbios casados, de restrições na saída, da taxa de decaimento e da robustez com respeito às incertezas nos parâmetros da planta, casados e não casados. Estes resultados não têm similar na literatura [13].

A base para o desenvolvimento dos novos resultados desta dissertação foi a formulação, em termos de LMI, de novas condições para tornar uma planta ERP, utilizando controladores estáticos e acesso somente às saídas da planta. As LMI aqui descritas são mais adequadas para o projeto de CEV do que as propostas por [20], pois estas últimas não permitem a especificação direta da robustez paramétrica e de restrições na saída [21]. Em [22], é apresentado o projeto de controladores dinâmicos para sistemas ERP, com acesso às saídas da planta, através da solução por LMI, de uma função de custo, de maneira a prover um controle robusto da planta. Existe uma diferença fundamental entre este artigo e os resultados desta dissertação. Considerando a planta dada pelas matrizes $\{A, B, C, D\}$, então em [22], é considerado que $D + D^T > 0$, enquanto que, nesta dissertação, assume-se que $D = 0$. O ponto chave dos resultados foi a formulação, em termos de LMI, de novas condições para tornar uma planta ERP, utilizando compensadores estáticos: encontrar dois controladores estáticos, K que realimenta a saída da planta e F em série com a saída da planta, de modo que o sistema controlado seja ERP.

No Capítulo 2, é apresentada a teoria e os métodos de projeto de controladores com EVMD. No Capítulo 3, são descritas novas condições para sistemas ERP, baseadas em LMI. No Capítulo 4, são descritos novos métodos de projeto de CEV para sistemas não-lineares,

com acesso somente às saídas da planta, levando em consideração índices de desempenho como robustez paramétrica, taxa de decaimento e restrição no vetor de saída da planta. O Capítulo 5 apresenta alguns exemplos de aplicação e suas simulações, considerando acesso somente às saídas da planta. O Capítulo 6 é uma conclusão geral da dissertação.

Capítulo 2

Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes

2.1 Modos Deslizantes

A característica principal de um sistema de CEV está na realimentação não-linear que possui descontinuidades sobre uma ou mais superfícies no espaço de estados. Assim, a estrutura do sistema de realimentação é alterada, ou chaveada, conforme os estados atravessam cada superfície descontínua. Em conseqüência deste fato, o sistema de malha fechada é descrito como sendo um sistema de Controle com Estrutura Variável, considerado como a combinação de subsistemas, cada qual com uma estrutura fixa e que opera em uma região específica do espaço de estados.

O CEV é caracterizado pela existência do modo deslizante. Isto ocorre quando o estado do sistema cruza imediatamente e repetidamente a superfície de chaveamento, pois todos os movimentos nas vizinhanças da superfície estão direcionados a esta superfície. Dependendo da forma da lei de controle selecionada, o movimento deslizante pode ocorrer em superfícies de chaveamento individuais no espaço de estados, sobre um conjunto de superfícies, ou em todas as superfícies de chaveamento juntas [6].

A existência de um modo deslizante requer a estabilidade da trajetória de estado para a superfície de deslizamento, no mínimo em uma vizinhança de $\{x(t) \mid s(x(t)) = 0\}$, ou seja, deve aproximar-se da superfície no mínimo assintoticamente. A vizinhança máxima é chamada região de atração. Geometricamente, o vetor tangente ou a derivada no tempo

do vetor de estado deve apontar para a superfície de deslizamento na região de atração. Isto assemelha-se a um problema de estabilidade generalizado, e o segundo método de Lyapunov fornece uma ferramenta natural para a análise. Especificamente, a estabilidade para a superfície de chaveamento requer a seleção de uma função de Lyapunov generalizada $V(x,t)$, que é definida positiva e tem uma derivada no tempo negativa, na região de atração [23].

Um procedimento de projeto para o seguinte sistema [4]

$$\dot{x}(t) = f(x,t,u) \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(x,t) \in \mathbb{R}^m, \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+(x,t) & \text{se} \quad s(x(t)) > 0 \\ u^-(x,t) & \text{se} \quad s(x(t)) < 0 \end{cases}, \tag{2.2}$$

consiste em duas etapas. A primeira é a determinação das superfícies $s(x(t)) = 0$ no espaço de estados, em que o controle é descontínuo e segunda é a seleção das funções de controle contínuas $u^+(x,t)$ e $u^-(x,t)$. Devido à descontinuidade, a derivada dos vetores de estado pode estar direcionada para uma das superfícies e um modo deslizante pode ocorrer sobre ela (arcos *ab* e *cb*, na Fig. 2.1). Isto pode acontecer também sobre a intersecção (arcos *bd*). A Fig. 2.2 ilustra o modo deslizante na intersecção, mostrando um caso em que ele não ocorre separadamente em cada superfície.

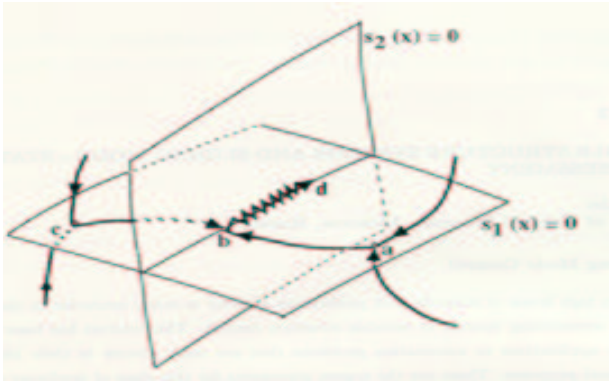

Figura 2.1: Modo deslizante.

Modos deslizantes são muito importantes por dois motivos. Primeiro, no modo deslizante, o elemento que implementa a função descontínua, por exemplo um relé, chaveia em alta freqüência. A sua entrada está em zero, enquanto que a sua saída, ou mais precisamente

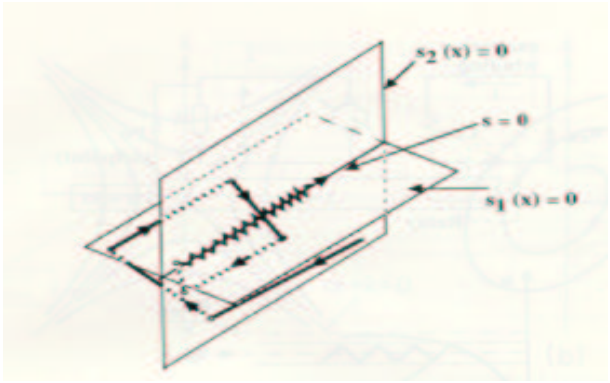

Figura 2.2: Ocorrência de modo deslizante apenas na intersecção das superfícies.

o seu valor médio, pode assumir um valor não nulo. Conseqüentemente, o elemento implementa um alto ganho (teoricamente infinito), que é o meio convencional para se atenuar a influência dos distúrbios e incertezas do sistema. Diferentemente dos sistemas com derivadas contínuas, o efeito de invariância é atingido pelo uso de ações de controle finito. Segundo, a ordem da equação do movimento é reduzida, pois as trajetórias do modo deslizante pertencem a alguma superfície de dimensão inferior à do sistema, ou seja, o movimento dinâmico do sistema é restringido e permanece dentro de um certo subespaço do espaço de estados. Assim, comporta-se como um sistema relaxado, de ordem inferior, chamado *sistema equivalente*. O movimento deste sistema equivalente é diferente dos subsistemas constituintes. Isto permite a simplificação e a decomposição do procedimento de projeto da lei de controle $u(x,t)$. Assim, o conceito básico do projeto da maioria dos sistemas com CEV se baseia em modos deslizantes, já que são o principal modo operacional deste tipo de sistema.

Por exemplo, admita o sistema apresentado em [5], descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 - a_1 x_1 + u, \end{aligned} \tag{2.3}$$

sendo a_1 e a_2 constantes. Considere a lei de controle

$$u = -\psi x_1, \tag{2.4}$$

e assuma que existem duas estruturas lineares para este sistema, associadas aos valores $-\alpha$ e α (α constante) do coeficiente ψ, como descrito em (2.5). Assuma também, a_2 negativo em (2.3) e que α seja selecionado de maneira que o sistema (2.3) e (2.4) tenha pólos complexos

para $\psi = \alpha$ e pólos reais para $\psi = -\alpha$. Para ambos os casos, o sistema é instável, e representado pelos planos de fase da Fig. 2.3, com um foco instável e um ponto de sela, respectivamente, pois para a matriz característica A do sistema (2.3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-a_1 - \psi) & -a_2 \end{bmatrix}$$

a equação característica dada por $det(sI - A) = s^2 + a_2 s + (a_1 + \psi) = 0$ leva às raízes:

$$s = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4(a_1 + \psi)}}{2}$$

e portanto, os pólos do sistema em malha fechada sempre terão parte real positiva, pois $a_2 < 0$. Pela equação acima, note que as raízes para $\psi = \alpha > (a_2^2 - 4a_1)/4$ e $\psi = -\alpha < (a_2^2 - 4a_1)/4$ serão, respectivamente, complexas conjugadas e reais.

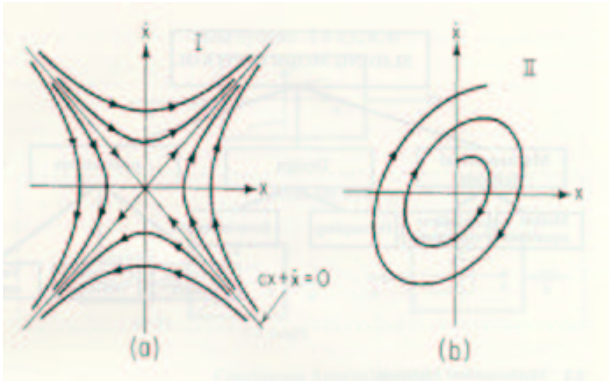

Figura 2.3: Subsistemas lineares instáveis: (a)$\psi = -\alpha$ e (b)$\psi = \alpha$.

Verifica-se, agora, que a estabilidade assintótica pode ser alcançada pela mudança das estruturas nas superfícies $x_1 = 0$ e $s = cx_1 + x_2 = 0$, (c constante). O coeficiente c é selecionado de maneira que a superfície $s = 0$ esteja entre o eixo x_1 e a assíntota das trajetórias hiperbólicas associadas com a estrutura $\psi = -\alpha$. A Fig. 2.4 representa o plano de fase do sistema (2.3), para a lei de controle

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{se } x_1 s > 0 \\ -\alpha & \text{se } x_1 s < 0 \end{cases}, \tag{2.5}$$

que mostra que a trajetória de estado alcança a superfície de chaveamento $s = 0$ para toda condição inicial. Nas vizinhanças da superfície de chaveamento, as trajetórias de ambas as estruturas estão direcionadas a ela, ocorrendo assim, um modo deslizante.

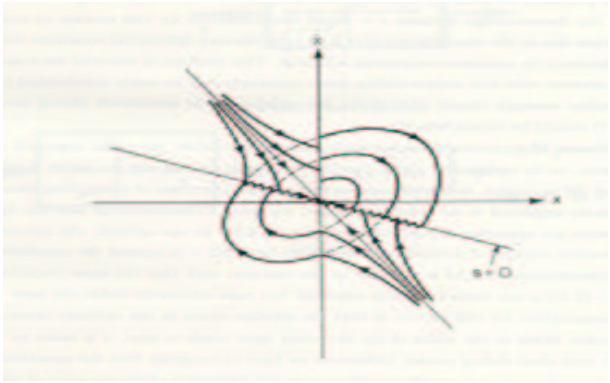

Figura 2.4: Estabilidade assintótica através de EVMD, no plano $(x_1, x_2) = (x, \dot{x})$.

As incertezas de um sistema aparecem como resultado da imperfeição do modelo descrito pela equação (2.1), que procura representar o sistema real [24]. O modelo descrito em (2.2) falha em reconhecer as imperfeições do dispositivo de chaveamento (atraso, zona morta, histerese, inércia, etc). As equações do sistema real podem ter uma ordem maior do que a do modelo e os instrumentos utilizados para obter os valores do vetor de estado, que são necessários para se realizar o controle, também podem apresentar inércia. A aproximação física implica na introdução de tais imperfeições que, subseqüentemente, tendem a zero. Então, os resultados obtidos em tais limites são uma descrição apropriada de um modo deslizante.

Um conceito mais geral requer a introdução da camada limite. Essencialmente, este conceito implica que o controle ideal, definido em (2.2), em alguma vizinhança das superfícies descontínuas, seja substituído por outro, de maneira que a equação obtida, fazendo-se com que a camada limite tenda a zero, seja um modo deslizante. O uso da camada limite permite que, na fronteira da descontinuidade, os modos deslizantes sejam descritos sem que se especifique a natureza das imperfeições, sejam em sistemas com uma única superfície descontínua, ou com um certo número de intersecções de superfícies descontínuas.

Freqüentemente, sistemas dinâmicos não-lineares são descritos através do método de Filippov [24]. Segundo este método, para o sistema descrito pela equação (2.1), em cada ponto da superfície descontínua, o vetor velocidade $f^0(x, t, u)$ pertence a um mínimo convexo, contendo todos os valores de $f(x, t, u)$, quando $x(t)$ cobre toda a vizinhança δ do ponto em consideração (com δ tendendo a zero), exceto possivelmente, em zero.

Portanto, a equação do modo deslizante ideal, definida de acordo com Filippov, para o sistema definido por (2.1) e (2.2), é da forma

$$\dot{x}(t) = f^0(x, t, u), \tag{2.6}$$

com

$$f^0(x, t, u) = \mu f^+ + (1 - \mu) f^-, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

sendo que μ é um parâmetro que depende das direções e magnitudes dos vetores f^+, f^- e do vetor $grad\ s$, que é o gradiente da função $s(x(t))$.

Logo:

$$\begin{aligned}
&grad\ s\ f^0(x, t, u) = 0,\\
&grad\ s\ [\mu f^+ + (1 - \mu) f^-] = 0,\\
&grad\ s\ [\mu f^+ + f^- - \mu f^-] = 0,\\
&\mu grad\ s\ f^+ + grad\ s\ f^- - \mu grad\ s\ f^- = 0,\\
&\mu[grad\ s\ f^+ - grad\ s\ f^-] + grad\ s\ f^- = 0,\\
&\mu[grad\ s\ f^+ - grad\ s\ f^-] = -grad\ s\ f^-,\\
&\mu = \frac{-grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(1 - \mu) &= 1 + \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]},\\
&= \frac{grad\ s\ f^+ - grad\ s\ f^- + grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]},\\
&= \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s[f^+ - f^-]}.
\end{aligned}$$

Logo, de (2.6)

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \mu f^+ + (1 - \mu) f^-,\\
&= \frac{-grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]} f^+ + \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s[f^+ - f^-]} f^-,\\
&= \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^- - f^+]} f^+ - \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s[f^- - f^+]} f^-.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Assim, a equação (2.7) descreve o movimento em modo deslizante.

Portanto, em sistemas com uma única superfície descontínua, o método de Filippov leva aos seguintes resultados:

(a) O mínimo convexo de todos os vetores $f(x,t,u)$, na vizinhança de algum ponto (x,t,u), na superfície descontínua (Fig. 2.5), é uma linha reta que liga o fim dos vetores f^+ e f^-;

(b) Desde que $f^0(x,t,u)$ é um modo deslizante em um plano tangencial à superfície descontínua, o fim deste vetor pode ser considerado como um ponto de intersecção deste plano com a linha reta que liga o fim dos vetores f^+ e f^-.

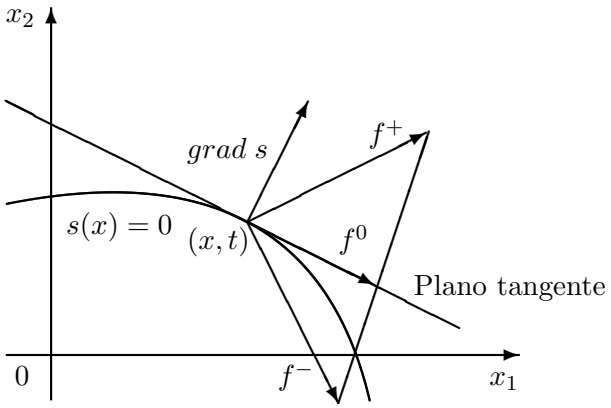

Figura 2.5: Método de Filippov.

O método de Filippov é adequado no tratamento de funções de controle descritas por (2.1) e (2.2), desde que as relações dadas por (2.2) não levem a definições ambíguas do vetor $f(x,t,u)$, fora da superfície descontínua e permita que um mínimo convexo seja constituído para qualquer ponto em tal superfície. Logo, conclui-se que o modo deslizante, em sistemas reais, não ocorre sobre as superfícies descontínuas, mas dentro de uma camada limite, em que os componentes do controle possuem valores entre $u(x,t) = u^+(x,t)$ e $u(x,t) = u^-(x,t)$.

Nos sistemas atuais, todos os dispositivos responsáveis por mudanças descontínuas da função de controle sempre possuem imperfeições, tais como atrasos, histerese, etc. Na situação descrita, as imperfeições fazem com que o chaveamento da ação de controle ocorra a uma freqüência finita e a trajetória de estado oscile em uma certa vizinhança da superfície de chaveamento.

Para eliminar a ambigüidade do comportamento do sistema sobre o limite descontínuo, algumas não-idealidades que sempre estão presentes devem ser consideradas, resultando em

modos deslizantes reais. As equações para o deslizamento real são obtidas quando as não-idealidades tendem a zero. Discute-se a seguir, dois casos de não-idealidades, mostrando-se que quando introduzidas no sistema descrito por (2.1) e (2.2), elas levam aos mesmos resultados descritos pela equação (2.7) [5].

Histerese: Considere que o elemento que executa o chaveamento possua uma histerese. Então, a função $u(x,t)$, descrita em (2.2) será da forma

$$u(x,t) = \begin{cases} u^+(x,t) & \text{se} \quad s(x(t)) > \Delta \\ u^-(x,t) & \text{se} \quad s(x(t)) < -\Delta \end{cases} \qquad (\Delta = constante),$$

e na região $|s(x(t))| \leq \Delta$, a função $u(x,t)$ mantém o valor que possuía, quando $|s(x(t))|$ era igual a Δ.

Em um sistema ideal (com $\Delta = 0$), a condição para o modo deslizante

$$\lim_{s(x(t))\to 0^+} \dot{s}(x(t)) < 0 \quad e \quad \lim_{s(x(t))\to 0^-} \dot{s}(x(t)) > 0,$$

ainda é válida, implicando que nas vizinhanças da superfície descontínua $s(x(t)) = 0$, as trajetórias de estado estão direcionadas a ela. A histerese fará com que as trajetórias de estado não se movam exatamente sobre a superfície, mas que oscilem sobre uma vizinhança de largura 2Δ (Fig. 2.6). Para determinar a velocidade média associada com o movimento, deve-se primeiro encontrar o deslocamento na trajetória $\Delta x(t)$ sobre dois intervalos vizinhos (em um deles $u(x,t)$ é igual a $u^-(x,t)$ e no outro igual a $u^+(x,t)$).

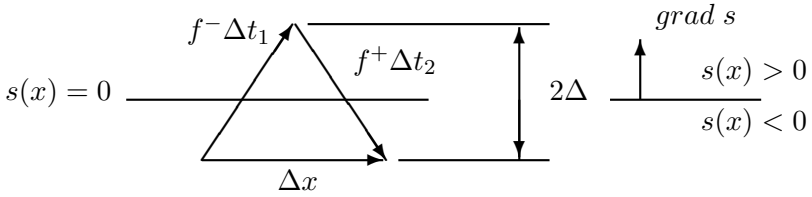

Figura 2.6: Modo deslizante em sistema com histerese.

Logo,

$$\Delta x(t) = f^-\Delta t_1 + f^+\Delta t_2,$$

sendo que Δt_1 e Δt_2 são os tempos de duração dos intervalos definidos como

$$\Delta t_1 = \frac{2\Delta}{grad\ s\ f^-} \quad \text{e} \quad \Delta t_2 = -\frac{2\Delta}{grad\ s\ f^+}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= \frac{2\Delta f^-}{grad\ s\ f^-} - \frac{2\Delta f^+}{grad\ s\ f^+} \\ &= \frac{2\Delta grad\ s\ f^+ f^- - 2\Delta grad\ s\ f^- f^+}{[grad\ s\ f^-][grad\ s\ f^+]}.\end{aligned}$$

Determina-se, então, a velocidade média

$$\begin{aligned}f^0(x,t,u) &= \frac{\Delta x(t)}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \\ &= \frac{\frac{2\Delta grad\ s\ f^+ f^- - 2\Delta grad\ s\ f^- f^+}{[grad\ s\ f^-][grad\ s\ f^+]}}{\frac{2\Delta grad\ s\ f^+ - 2\Delta grad\ s\ f^-}{[grad\ s\ f^-][grad\ s\ f^+]}} \\ &= \frac{grad\ s\ f^+ f^- - grad\ s\ f^- f^+}{grad\ s\ f^+ - grad\ s\ f^-} \\ &= \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s\ [f^+ - f^-]} f^- - \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^+ - f^-]} f^+ \\ &= \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s[f^- - f^+]} f^+ - \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s\ [f^- - f^+]} f^-. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Comparando as equações (2.7) e (2.8), verifica-se que o vetor velocidade acima encontrado coincide com aquele obtido através do método de Filippov.

Atraso: Considere que o controle possua descontinuidades não no instante em que o sinal de $s(x(t))$ muda, mas após um atraso τ, desta mudança de sinal. Em tal sistema, as trajetórias de estado, que se movem da região $s(x(t)) < 0$, alcançam a superfície descontínua $s(x(t)) = 0$ (ponto 1 na Fig. 2.7) e continuam se movendo durante um intervalo de tempo τ, através da trajetória associada ao controle $u(x,t)$, igual a $u^-(x,t)$ (ou $f(x,t,u) = f^-$). No tempo τ (ponto 2 na Fig. 2.7), o controle chaveia de $u^-(x,t)$ para $u^+(x,t)$ e, durante Δt_1, as trajetórias de estado se movem a uma taxa de f^+, para a superfície descontínua $s(x(t)) = 0$ (ponto 3 na Fig. 2.7). O chaveamento de $u^+(x,t)$ para $u^-(x,t)$ ocorre após um período τ (ponto 4 na Fig. 2.7). Desta maneira, um movimento com a velocidade de estado f^- se inicia e após um período Δt_2, resulta no encontro com a superfície descontínua (ponto 5 na Fig. 2.7). Para determinar a velocidade média, leva-se em consideração o deslocamento $\Delta x(t)$ (vetor 1-5 na Fig. 2.7) e os intervalos Δt_1 e Δt_2:

$$\Delta x(t) = f^-\tau + f^+\Delta t_1 + f^+\tau + f^-\Delta t_2,$$

sendo:

$$\Delta t_1[grad\ s\ f^+] + \tau[grad\ s(x(t))f^-] = 0,$$

$$\Delta t_1 = -\frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s\ f^+}\tau \quad \text{e}$$
$$\Delta t_2[grad\ s\ f^-] + \tau[grad\ s\ f^+] = 0,$$
$$\Delta t_2 = -\frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s\ f^-}\tau.$$

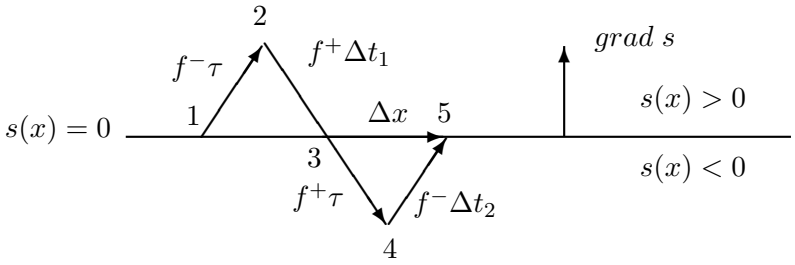

Figura 2.7: Modo deslizante em sistema com atraso.

Os valores resultantes determinam a velocidade média

$$\begin{aligned} f^0(x,t,u) &= \frac{\Delta x(t)}{2\tau + \Delta t_1 + \Delta t_2} \\ &= \frac{grad\ s\ f^-}{grad\ s\ [f^- - f^+]} f^+ - \frac{grad\ s\ f^+}{grad\ s\ [f^- - f^+]} f^+. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Comparando as equações (2.7) e (2.9), verifica-se que o vetor velocidade acima encontrado coincide com aquele obtido através do método de Filippov.

Deve-se notar que, em ambos os casos, os resultados equivalentes ao descrito pelo método de Filippov foram obtidos sem o processo de limite que assume que a largura do ciclo de histerese de 2Δ, no primeiro caso e, o tempo de atraso τ, no segundo caso, tendam a zero. Contudo, o limite está implicitamente contido no fato de que os vetores f^+, f^- e $grad\ s$ são constantes, porque estas condições somente são válidas no caso extremo em que as deflexões do ponto em consideração tendem a zero.

2.2 Controle com Estrutura Variável e Observação de Sistemas Não-Lineares

Recentemente, várias publicações têm sido dedicadas ao tópico de controle de sistemas não-lineares e/ou incertos. Uma aproximação para o problema de controle de sistemas não-lineares é a linearização do sistema sobre uma trajetória nominal e então, a aplicação da

bem conhecida teoria de controle linear. Uma desvantagem deste método é que as leis de controle linear são válidas somente quando as trajetórias estiverem em uma vizinhança das trajetórias nominais.

Outra aproximação seria encontrar uma transformação não-linear que converta o sistema para a forma canônica controlável, ou outra forma linear equivalente, em que o projeto do controlador seja facilitado. A desvantagem deste método é que a construção de uma transformação apropriada não é, geralmente, trivial.

Um dos métodos mais atrativos, que pode ser aplicado em muitos sistemas não-lineares, resultando em controladores que são robustos para erros de modelagem e distúrbios desconhecidos no sistema, é o Controle com Estrutura Variável.

CEV é o controle de sistemas dinâmicos com realimentação de estados descontínua. O conceito desta teoria se baseia na mudança da estrutura do controlador, em resposta às mudanças dos estados do sistema, para que se obtenha a resposta desejada. Isto é realizado através do uso de uma lei de controle de chaveamento de alta velocidade, que força a trajetória do sistema a se manter em uma determinada superfície por todo o tempo subseqüente. O sistema é insensível à variação de certos parâmetros e distúrbios, enquanto as trajetórias estiverem sobre a superfície. Se o vetor de estado não estiver acessível, então a implementação de um observador adequado é uma solução para a obtenção de um controlador.

A questão da observação de sistemas não-lineares também tem recebido grande atenção na literatura. Aqui, também, uma aproximação para o problema é a linearização da equação do erro do observador sobre os pontos constantes de operação do sistema. Assim, além do fato de o projeto do observador ser válido apenas nas vizinhanças destes pontos operacionais constantes, o projeto não é feito independentemente da estratégia de controle. Isto sugere que tal observador não funcionaria bem quando combinado com uma lei de controle não constante.

Outro método para a observação dos estados de sistemas não-lineares, seria encontrar uma transformação que leve o sistema existente para a forma canônica observável, de modo que o projeto de um observador seja simplificado. Como antes mencionado, na estratégia de controle similar, encontrar uma transformação apropriada é, em geral, difícil se não impossível. Um problema comum em tais aproximações é que as não-linearidades da planta devem ser incorporadas, direta ou indiretamente, na dinâmica do observador.

A síntese combinada do controlador/observador envolve três passos. O primeiro é o projeto do controlador, assumindo a disponibilidade do vetor de estado. O segundo passo é o projeto do observador de estado. O observador deverá utilizar apenas a entrada e a saída da planta. O último passo é a combinação dos dois primeiros passos em uma estratégia de controle que utilize os valores estimados do vetor de estado ao invés dos reais.

A seguir é apresentada uma metodologia de projeto de controladores e observadores de estado com estrutura variável e modos deslizantes, para sistemas não-lineares, descrita em [25].

2.2.1 Descrição do sistema e definições básicas

Considere o sistema dinâmico modelado pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta A(t,x)]x + f(t,x) + B[u + w(t,x)], \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{2.10}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ a saída do sistema ($p \geq m$), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $\Delta A(t,x)$ representando a incerteza na matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema, $f(t,x)$ representando as não-linearidades da planta e $w(t,x)$ representando as não-linearidades ou distúrbios na entrada do sistema.

Para propósitos de existência, assume-se que $\Delta A(t,x)$, $f(t,x)$ e $w(t,x)$ são contínuos e que as matrizes B e C têm posto completo. Além disso, considera-se que as seguintes condições são válidas:

A1 Existem funções $h(.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $d(.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de maneira que $f(t,x) = Bh(t,x)$, $\Delta A(t,x)x = Bd(t,x)$.

Então, define-se:

$$v(t,x) = \begin{bmatrix} v_1(t,x) \\ \vdots \\ v_m(t,x) \end{bmatrix} = h(t,x) + d(t,x)x + w(t,x); \tag{2.11}$$

A2 Existem funções contínuas, positivas, limitadas por valores reais, $r_i(.)$ e $\rho(.)$, de maneira que:

$$|v_i(t,x)| < r_i(t,x),\ i = 1,\ldots,m \text{ e } ||v(t,x)|| \leq \rho(t).$$

A3 O par (A,B) é completamente controlável e o par (A,C) é completamente observável.

Portanto, o sistema descrito em (2.10) é simplificado para

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[u + v(t,x)], \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{2.12}$$

sendo que $v = v(t,x)$ representa o conjunto de incertezas e/ou não-linearidades.

2.2.2 Projeto do Controlador

O projeto de um CEV se baseia na escolha das superfícies de chaveamento, na especificação das funções de controle descontínuas e na determinação da lógica de chaveamento associada às superfícies descontínuas. As superfícies de chaveamento são, normalmente, hiperplanos fixos no espaço de estados, passando através da origem, cuja intersecção forma o subespaço deslizante. O objetivo do projeto é levar o estado do sistema, de uma condição inicial arbitrária, para a intersecção das superfícies de chaveamento. Assim que o estado começa a deslizar, a ação de controle é necessária apenas para manter o estado sobre a intersecção destas superfícies ou em sua vizinhança.

O sistema equivalente, que corresponde ao comportamento no deslizamento, deve ser assintoticamente estável, para que haja garantia de que o estado alcance a origem dentro do modo deslizante. O modo deslizante estável é assegurado através da escolha adequada das superfícies de chaveamento. Isto forma o primeiro estágio do projeto de um CEV. A questão da determinação do conjunto de hiperplanos que dará um comportamento adequado ao modo deslizante é descrito como sendo a questão da existência.

Uma vez resolvida a questão da existência, o segundo estágio no procedimento de projeto envolve a seleção de um controle, de maneira a assegurar que o modo deslizante seja atingido. Por esta razão, a questão da determinação de uma estrutura de controle e dos ganhos associados, que irão garantir a existência do modo deslizante, é chamada questão de alcançabilidade. A solução da questão de alcançabilidade é dependente das superfícies de chaveamento, já que as funções de controle são descontínuas sobre elas e, portanto, não podem ser alcançadas sem que a questão da existência tenha sido resolvida.

O transiente de um sistema com estrutura variável consiste, portanto, em dois estágios independentes: num movimento, preferencialmente rápido, que traga o estado do sistema para a superfície em que o modo deslizante ocorra e num movimento deslizante mais lento, durante a qual o estado deslize para a origem do espaço de estados, enquanto permanece no subespaço deslizante. Este comportamento de dois estágios pode ajudar a resolver o conflito entre as exigências opostas de exatidão estática e dinâmica que são encontradas no projeto de sistemas de controle lineares, porque o sistema de CEV pode ser projetado para dar uma resposta rápida sem perda de estabilidade, regulação de estado assintótica, insensibilidade a uma classe de variações de parâmetros e invariância a certos distúrbios externos [6].

Em um modo deslizante, para o caso da superfície de chaveamento linear $s(x(t)) = Sx(t) = 0$, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e posto $(S) = m$, o sistema equivalente de ordem $n - m$ deve satisfazer a dinâmica estabelecida previamente no deslizamento, considerando-se as m equações algébricas $s(x(t)) = 0$. O uso de ambas as limitações reduz a ordem do sistema para um modelo de ordem $(n - m)$. Especificamente, deve-se supor que o sistema não-linear é restrito à superfície de chaveamento. Então, é possível resolver para m variáveis de estado, em termos das $(n - m)$ variáveis de estado restantes, se o posto$(S) = m$. Para obter a solução, deve-se resolver o sistema para m variáveis de estado, em termos das $(n - m)$ restantes. Substitui-se, então, estas relações nas $(n - m)$ equações restantes e as equações correspondentes às m variáveis de estado. O sistema de ordem $(n - m)$ resultante descreve completamente o sistema equivalente, dada uma condição inicial, satisfazendo $Sx(t) = 0$ [23].

Como no modo deslizante, $S\dot{x} = 0$, obtem-se

$$S\dot{x} = S[Ax + B(u + v)] = SAx + SB(u + v) = 0 \Rightarrow u_{eq} = -(SB)^{-1}SAx - v.$$

Assim, o sistema equivalente, de ordem reduzida, é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = [I - B(SB)^{-1}S]Ax, \\ Sx = 0. \end{cases}$$

É fácil de se verificar que $B(SB)^{-1}$ possui posto m e $[I - B(SB)^{-1}S]$ posto $(n - m)$. Portanto, a matriz $A_{eq} = [I - B(SB)^{-1}S]A$, no sistema equivalente, pode ter no máximo $(n - m)$ autovalores não nulos. Nosso objetivo é escolher S, de modo que os autovalores não nulos de A_{eq} sejam valores com parte real negativa e os autovetores correspondentes

$\{w_1, \ldots, w_{n-m}\}$ sejam escolhidos de maneira que permaneçam sobre a superfície de chaveamento. Assim, $W = [w_1 \ldots w_{n-m}]$, $W \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$. Sabe-se que a completa controlabilidade do par (A, B) é equivalente à existência de um controlador da forma $u = -Kx$, de maneira que os autovalores de $(A - BK)$ possam ser alocados arbitrariamente.

Se considerarmos $K = (SB)^{-1}SA$, temos que $(A - BK)$ deve possuir $(n - m)$ autovalores com parte real negativa $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}\}$ e $(n - m)$ autovetores correspondentes $\{w_1, \ldots, w_{n-m}\}$. Isto equivale a $(A - BK)W = WJ$, sendo $J = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}]$.

Considere $R(T)$ o *range* do operador T. Desde que SB seja não-singular e $SW = 0$, tem-se que $R(B) \cap R(W) = \{0\}$. Então, deve-se escolher inversas B^g, W^g, de B e W, respectivamente, de maneira que $B^gW = 0$ e $W^gB = 0$. Escolhe-se $\{w_1, \ldots, w_{n-m}\}$ de maneira que W^gB seja satisfeita. Obseve que $R(B) \cap R(W) = \{0\}$ é verificado em $W^gB = 0$. Agora, pode-se determinar S. Se for escolhido $B^g = S$, então $SB = I$ e $SW = 0$. Assim, a superfície de chaveamento é determinada de modo que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = Sx = 0\}$. Suponhamos que $|v_i(t, x)| < r_i(t, x)$, $i = 1, \ldots, m$, sendo que $v(t, x) = [v_1(t, x), \ldots, v_m(t, x)]^T$ é definido por (2.11) e $r_i(t, x) > 0$.

Considera-se

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} -r_1(t,x)sign(s^TSb_1) \\ \vdots \\ -r_m(t,x)sign(s^TSb_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix},$$

sendo que b_i é a i-ésima coluna da matriz B, e $s(x(t)) = Sx(t)$ e $sign(\varpi)$ é igual a 1, quando $\varpi > 0$ e igual a -1, quando $\varpi < 0$. Pode-se verificar que se

$$u = -(SB)^{-1}SAx + \bar{u} \tag{2.13}$$

então, $s^T\dot{s} < 0$.

Portanto, com a lei de controle anteriormente descrita, consegue-se um modo deslizante. Realmente,

$$\begin{aligned} s^T\dot{s} &= s^TS\dot{x} \\ &= s^TS[Ax - B(SB)^{-1}SAx + B\bar{u} + Bv(t,x)] \\ &= s^TSB[\bar{u} + v(t,x)] \\ &= \sum_{i=1}^{m} s^TSb_i[\bar{u}_i + v_i(t,x)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} s^T S b_i [-r_i(t,x) sign\ s^T S b_i + v_i(t,x)] \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} (-r_i(t,x) + |v_i(t,x)|)\ |s^T S b_i| < 0,
\end{aligned}
$$

se $s^T S b_i \neq 0$.

Uma desvantagem da lei de controle descrita pela equação (2.13) é que ela é descontínua e isto pode ser uma dificuldade em implementações práticas causando, por exemplo, fadiga mecânica. Adicionalmente, quando as trajetórias do sistema estiverem sobre a superfície de chaveamento, ocorrerá um rápido chaveamento dos termos de controle $\bar{u}_i$, tendendo a excitar os modos de alta freqüência da planta. Este problema pode ser atenuado através da inserção de uma camada limite sobre as superfícies de chaveamento.

Considere o vetor $\epsilon = [\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m]^T$, sendo $\epsilon_i > 0$, para $i = 1, \ldots, m$. Substituindo $\bar{u}$ na equação (2.13) por $\bar{u}(\epsilon)$, sendo $\bar{u}(\epsilon) = [\bar{u}_i(\epsilon_1), \ldots, \bar{u}_m(\epsilon_m)]^T$, obtém-se:

$$
\bar{u}_i(\epsilon_i) = \begin{cases} -r_i(t,x) sign(s^T S b_i) & |s(x(t))^T b_i| \geq \epsilon_i \\ \frac{-r_i(t,x) s^T S b_i}{\epsilon_i} & |s(x(t))^T b_i| < \epsilon_i \end{cases}.
$$

O desempenho deste controlador contínuo pode ser feito arbitrariamente próximo do desempenho do controlador descontínuo correspondente, selecionando-se ϵ_i suficientemente pequeno.

2.2.3 Observação dos estados

Considere o sistema modelado pela equação (2.12), com o objetivo de construir um observador de estado. Considere $\bar{x}$ os estados estimados de x, obtidos pelo observador. Então, a equação do observador, para o sistema linear ($v(t,x) = 0$), será descrita por:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu + G(y - \bar{y}) \\
&= A\bar{x} + Bu + Gy - GC\bar{x} \\
&= (A - GC)\bar{x} + Gy + Bu. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

O erro é descrito por $e = \bar{x} - x$ e a sua derivada em relação ao tempo por

$$
\dot{e} = \dot{\bar{x}} - \dot{x}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (A - GC)\bar{x} + Gy + Bu - Ax - Bu \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} + GCx - Ax \\
&= A(\bar{x} - x) - GC(\bar{x} - x) \\
&= (A - GC)(\bar{x} - x) \\
&= (A - GC)e. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

A observabilidade de (A, C) implica na existência de uma matriz G, de maneira que $(A - GC)$ tenha autovalores com parte real negativa arbitrariamente posicionados.

Considere, então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática

$$V(e) = e^T P e,$$

em que P é uma matriz real simétrica e definida positiva. A derivada desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\
&= [(A - GC)e]^T P e + e^T P[(A - GC)e] \\
&= (Ae - GCe)^T P e + e^T P(Ae - GCe) \\
&= (e^T A^T - e^T C^T G^T) P e + e^T P(Ae - GCe) \\
&= e^T A^T P e - e^T C^T G^T P e + e^T P A e - e^T P G C e \\
&= e^T (A^T P + PA - C^T G^T P - PGC) e. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Isto significa que, para qualquer matriz real simétrica definida positiva $Q = Q^T > 0$, pode-se resolver

$$(A - GC)^T P + P(A - GC) = -Q.$$

Escolhendo-se Q, de modo que, para algum $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $FC = B^T P$. Se tais Q e F existirem, então a função $T(s) = FC[sI - A + GC]^{-1} B$ é ERP.

Define-se, então, a função

$$E(e, \rho) = \begin{cases} \rho \frac{BFCe}{\|FCe\|} & FCe \neq 0 \\ 0 & FCe = 0 \end{cases},$$

sendo que $\rho(t)$ obedece à condição A2. Assim, a equação completa do observador é descrita por

$$\dot{\bar{x}} = (A - GC)\bar{x} - E(e, \rho) + Gy + Bu. \qquad (2.17)$$

Teorema 1 *[25] A função $\bar{x}$ é uma estimativa assintótica do estado x, isto é*

$$\lim_{t\to\infty} e = \lim_{t\to\infty} (\bar{x} - x) = 0$$

e o erro tende a zero exponencialmente.

Introduz-se, agora, uma versão modificada do observador. Este novo observador é mais fácil de ser implementado do que a estrutura descrita anteriormente.

Considere $\tilde{C} = [\tilde{c}_1^T, \ldots, \tilde{c}_m^T]^T = FC$, em que $\tilde{c}_i \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Pela suposição A2, pode-se encontrar $\bar{\rho}(t) = [\bar{\rho_1}, \ldots, \bar{\rho}_m]^T$, de maneira que

$$|v_i(t,x)| < \bar{\rho}_i(t,u) \quad i = 1, \ldots, m.$$

Define-se a seguinte função

$$\bar{E}(e,\bar{\rho}) = B \begin{bmatrix} z_1(e,\bar{\rho}_1(t,u)) \\ \vdots \\ z_m(e,\bar{\rho}_m(t,u)) \end{bmatrix},$$

sendo

$$z_i(e,\bar{\rho}_i) = \begin{cases} \bar{\rho}_i(t,u) sign(\tilde{c}_i e) & \tilde{c}_i e \neq 0 \\ 0 & \tilde{c}_i e = 0 \end{cases}.$$

Considere o observador de estado não-linear, descrito por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x} - \bar{E}(e,\bar{\rho}) + Gy + Bu. \tag{2.18}$$

Então, segue o seguinte:

Teorema 2 *[25] A função $\tilde{x}$ é uma estimativa assintótica do estado x, isto é*

$$\lim_{t\to\infty} e = \lim_{t\to\infty} (\tilde{x} - x) = 0$$

e o erro tende a zero exponencialmente.

Devido à lei de controle de sistemas com estrutura variável, uma desvantagem do observador, descrito por (2.18), é que o termo $\bar{E}(e,\bar{\rho})$ é descontínuo. O observador é particularmente vulnerável a excitações de modos de alta freqüência, se o observador for projetado de maneira que o tempo de resposta seja rápido. Pode-se implementar uma camada limite para superar este problema.

Substitui-se, então, o termo $\bar{E}(e,\bar{\rho})$ por $\bar{E}_\epsilon(e,\bar{\rho})$, sendo

$$\bar{E}_\epsilon(e,\bar{\rho}) = B \begin{bmatrix} z_{\epsilon_1}(e) \\ \vdots \\ z_{\epsilon_m}(e) \end{bmatrix}$$

e

$$z_{\epsilon_i}(e,\bar{\rho}_i) = \begin{cases} \bar{\rho}_i(t,u) sign(\tilde{c}_i e) & |\tilde{c}_i e| \geq \epsilon_i \\ \frac{\bar{\rho}_i(t,u)\tilde{c}_i e}{\epsilon_i} & |\tilde{c}_i e| < \epsilon_i \end{cases}, \quad i = 1,\ldots,m.$$

Embora tenha sido dada uma interpretação para a condição $FC = B^T P$, esta interpretação não ajuda no projeto do observador. A seguir, é dada uma receita para a construção das matrizes F e C [25].

Passo 1: Escolher $G \in \mathbb{R}^{n\times p}$, de maneira que $(A - GC)$ tenha autovalores prescritos no semi-plano esquerdo;

Passo 2: Resolver a equação matricial $C^T F^T = PB$, para os elementos de P, em termos dos elementos de F. Obter relações entre os elementos de F, de maneira que a simetria de P seja preservada. Chame o resultado deste passo de P_F;

Passo 3: Formar $Q(P_F) = -[(A - GC)^T P_F + P_F(A - GC)]$;

Passo 4: Escolher os elementos de $Q(P_F)$, de maneira que $\Delta_i[Q(P_F)] > 0$, para $i = 1,\ldots,n$, sendo que $\Delta_i[Q(P_F)] > 0$ denota o i-ésimo menor principal líder de $Q(P_F)$. Isto pode ser conseguido trabalhando-se com sucessivas submatrizes de $Q(P_F)$ e escolhendo-se os elementos de P_F, de maneira que os determinantes destas submatrizes sejam positivos. Adicionalmente, nomeando-se os elementos livres da matriz P_F para zero, simplifica esta tarefa;

Passo 5: Avaliar $P = P_F$ e substituir os valores correspondentes de volta em F. Utilizar as relações entre os elementos de F, encontrados no passo 2 e complete F. Esta escolha de P e F irá garantir que a condição $C^T F^T = PB$ seja satisfeita.

2.2.4 Síntese do controlador-observador

Anteriormente, foram discutidos o controlador e o observador, separadamente. Agora, o observador será utilizado para prover uma estimativa dos estados como a entrada para um

CEV (Fig. 2.8) e, neste caso, não se deve esperar que os estados se mantenham sobre a superfície de chaveamento.

Como $\bar{x}(t) = x + e$, então a trajetória dos estados, em modo deslizante, não estará precisamente sobre $s(x) = 0$, mas ao longo de $s(\bar{x}) = s(x + e) = 0$. Assim, o estado irá oscilar sobre a superfície. A meta é mostrar que o estado estimado $\bar{x}$, do observador, irá permanecer sobre a superfície $\{\bar{x} \mid s(\bar{x}) = 0\}$. Desde que $\bar{x}$ tende a x, tem-se que x estará sobre a superfície de chaveamento, quando $\bar{x}$ estiver em modo deslizante.

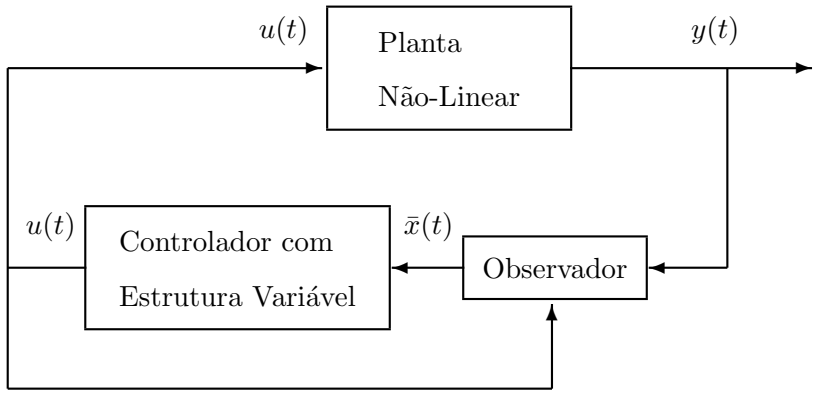

Figura 2.8: Configuração do Controlador-Observador.

A planta e o observador possuem a seguinte forma:
planta:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bv(t, x),$$

$$y = Cx,$$

observador:

$$\dot{\bar{x}} = (A - GC)\bar{x} - E(e, \rho) + Gy + Bu.$$

A condição para que ocorra o deslizamento do sistema composto pelo controlador e pelo observador é $S\bar{x} = 0$ e $S\dot{\bar{x}} = 0$. Mais explicitamente:

$$S(A - GC)\bar{x} + SGy - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGCx - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGC(\bar{x} - e) - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGC\bar{x} + SGC\bar{x} - SGCe - SE(e, \rho) + SBu_{eq} = 0,$$

$$SA\bar{x} - SGCe - SE(e,\rho) + SBu_{eq} = 0.$$

Resolvendo para u_{eq}, chega-se ao controle equivalente:

$$u_{eq} = -(SB)^{-1}SA\bar{x} + (SB)^{-1}SE(e,\rho) + (SB)^{-1}SGCe.$$

A substituição de u_{eq} na equação do observador leva a:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= (A-GC)\bar{x} + Gy - E(e,\rho) + Bu_{eq} \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} + GCx - E(e,\rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + B(SB)^{-1}SE(e,\rho) \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} + GC(\bar{x}-e) - E(e,\rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + B(SB)^{-1}E(e,\rho) \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} + GC\bar{x} - GCe - E(e,\rho) - B(SB)^{-1}SA\bar{x} + B(SB)^{-1}SGCe + B(SB)^{-1}SE(e,\rho) \\
&= [I - B(SB)^{-1}S]A\bar{x} + [I - B(SB)^{-1}S](-GCe) + [I - B(SB)^{-1}S](-E(e,\rho)). \\
&= [I - B(SB)^{-1}S](A\bar{x} - GCe - E(e,\rho)). \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Como $e = \bar{x} - x$ e, portanto, $\dot{e} = \dot{\bar{x}} - \dot{x}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= (A-GC)\bar{x} - E(e,\rho) + Gy + Bu - Ax - Bu - Bv \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e,\rho) + GCx - Ax - Bv \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e,\rho) + GC(\bar{x}-e) - Ax - Bv \\
&= A\bar{x} - GC\bar{x} - E(e,\rho) + GC\bar{x} - GCe - Ax - Bv \\
&= A(\bar{x}-x) - E(e,\rho) - GCe - Bv \\
&= Ae - E(e,\rho) - GCe - Bv \\
&= (A-GC)e - E(e,\rho) - Bv. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Deste modo, (2.19) e (2.20) descrevem o sistema composto pelo controlador e pelo observador, em modo deslizante.

Observação 1 *No sistema composto pelo controlador e pelo observador, não é possível garantir a estabilidade, isto é, não se conhecem resultados sobre a estabilidade deste sistema de controle completo.*

Resumindo, existem dois passos básicos no projeto de um CEV:

(a) O projeto da superfície de chaveamento, para que o comportamento do sistema tenha certas propriedades pré-estabelecidas sobre a superfície. Por exemplo, a superfície de chaveamento é projetada de maneira que o sistema seja assintoticamente estável sobre ela;

(b) O projeto da estratégia de controle de maneira a levar o sistema para a superfície de chaveamento e mantê-lo sobre ela por todo o tempo subseqüente.

2.3 Conclusão

Neste capítulo, foi apresentada a teoria e os métodos de projeto de controladores e observadores com EVMD. Inicialmente, foram definidos os modos deslizantes. Em seguida, foi apresentado o projeto dos controladores e dos observadores, utilizando os modos deslizantes.

Capítulo 3

Novas Condições Baseadas em LMI para Sistemas ERP

3.1 Sistemas com Mesmo Número de Entradas e Saídas

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ a saída do sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a matriz de saída do sistema.

Definição 1 *[19] A matriz de transferência $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ do sistema (3.1) é Real Positiva (RP) se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(a) Os elementos de $G(s)$ não possuem pólos com parte real positiva;

(b) $G^*(s) = G^T(s^*)$ e

(c) A matriz hermitiana $J(s) = G(s) + G^T(s^*)$ é semi-definida positiva em $Re(s) > 0$,

sendo que o asterisco (*) denota o complexo conjugado de um escalar ou o complexo conjugado transposto de um vetor ou matriz.

Definição 2 *[19] A matriz de transferência $G(s)$ é Estritamente Real Positiva (ERP) se $G(s - \epsilon)$ for RP para algum $\epsilon > 0$.*

Considere o SLIT controlável e observável abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{3.2}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ e o vetor de entrada $u \in \mathbb{R}^m$ tal que, para todo T positivo,

$$\int_0^T u(t)^T y(t) dt < \delta[||x(0)||] sup||x(t)||, \ 0 \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

Neste caso, δ é uma constante positiva, que depende do estado inicial do sistema $x(0)$ mas independe do tempo T. Os resultados a seguir foram formulados por V. M. Popov na década de 1960 [19].

Definição 3 *[19] O sistema (3.2) é dito hiperestável se, para qualquer u(.) limitado satisfazendo (3.3), a desigualdade*

$$||x(t)|| \leq K(||x(0)|| + \delta) \tag{3.4}$$

é satisfeita para alguma constante positiva K e para todo $t \geq 0$.

Definição 4 *[19] O sistema (3.2) é dito assintoticamente hiperestável se, para qualquer u(.) limitado satisfazendo (3.3), a desigualdade (3.4) é satisfeita e, também,*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0. \tag{3.5}$$

Seja, por definição, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ a matriz de transferência do sistema (3.2), então:

Teorema 3 *[19] A condição necessária e suficiente para que o sistema (3.2) seja hiperestável é que $G(s)$ seja RP.*

Teorema 4 *[19] A condição necessária e suficiente para que o sistema (3.2) seja assintoticamente hiperestável é que $G(s)$ seja ERP.*

O Lema 1, a seguir, fornece condições para os sistemas ERP.

Lema 1 *[19] A matriz de transferência do sistema (3.1), $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, é ERP, se e somente se, existir uma matriz $P = P^T$, tal que:*

$$\begin{aligned} &PA + A^T P < 0, \\ &B^T P = C, \\ &P > 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Recentemente, foram obtidas em [20] novas condições, utilizando LMI, para que o sistema realimentado descrito na Fig. 3.1, com entrada $V(s)$ e saída $Y(s)$, seja ERP para alguma matriz constante K.

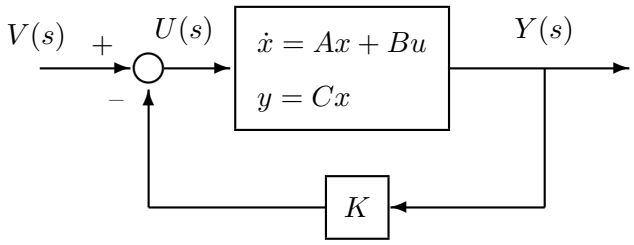

Figura 3.1: Sistema realimentado dos Teoremas 5 e 6.

Teorema 5 *[20] Existe uma matriz K, constante, de realimentação da saída, que torna o sistema em malha fechada da Fig. 3.1 ERP, se e somente se, para $\tilde{C} = C^T$,*

$$B^T\tilde{C} = \tilde{C}^T B > 0, \tag{3.7}$$

e se existir uma matriz $X = X^T > 0$, tal que

$$\tilde{C}_\perp^T herm(B_\perp X B_\perp^T A)\tilde{C}_\perp < 0. \tag{3.8}$$

A matriz $\tilde{C}_\perp$ é definida como

$$\tilde{C}_\perp \in \mathbb{R}^{n\times n-m},\ posto(\tilde{C}_\perp) = n - m \ e\ \tilde{C}^T\tilde{C}_\perp = 0$$

e a função $herm(X)$ é dada por:

$$herm(X) = \frac{1}{2}(X + X^*),$$

sendo X^* a matriz complexa conjugada transposta de X.

Sendo (3.7) e (3.8) factíveis, todas as soluções para K serão descritas por:

$$K = \tilde{C}^\dagger herm(PA)\{I - \tilde{C}_\perp[\tilde{C}_\perp^T herm(PA)\tilde{C}_\perp]^{-1}\tilde{C}_\perp^T herm(PA)\}\tilde{C}^{\dagger T} + S, \tag{3.9}$$

sendo

$$P = P^T = \tilde{C}(B^T\tilde{C})^{-1}\tilde{C}^T + B_\perp X B_\perp^T > 0,$$

S uma matriz definida positiva qualquer e $\tilde{C}^\dagger = (\tilde{C}^T\tilde{C})^{-1}\tilde{C}^T$ denota a pseudo-inversa de Moore-Penrose de $\tilde{C}$.

O problema descrito no Teorema 5 já foi estudado teoricamente em [26] e [27], como mostra o Teorema 6.

Teorema 6 *[27], [28]: Considere a Fig. 3.2, com $F = I$. Então, existe uma matriz constante K, tal que o sistema da Fig. 3.2, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, seja ERP, se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $C_oB_o = (C_oB_o)^T > 0$*;*

(ii) *todos os zeros de transmissão da planta $\{A_o, B_o, C_o\}$ apresentam parte real negativa.*

Observação 2 *É oportuno mencionar que o Teorema 6 apresenta as mesmas condições descritas em [28], Lema 1, p. 55, excetuando-se que, naquele lema, a condição (i) do Teorema 6 é substituída pela condição $C_oB_o > 0$.*

Embora não tenha sido explicitado, no Lema 1 em [28], a condição de simetria (i) do Teorema 6 está implícita. Esta simetria é necessária, pois das condições (3.6), $C_oB_o = B_o^TPB_o = (B_o^TPB_o)^T$, tendo em vista que $P = P^T$.

Para uma exploração mais profunda das especificações, em termos de restrições, que as LMI oferecem, foi proposto o seguinte problema, mais geral que o abordado em [20].

Problema 1 [13], [21] Dada a planta $\{A_o, B_o, C_o\}$ linear, invariante no tempo, controlável e observável, com posto(B_o) = posto$(C_o) = m$, encontre condições necessárias e suficientes, usando LMI, para a existência de matrizes constantes F e $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$, para que o sistema descrito na Fig. 3.2, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ seja ERP.

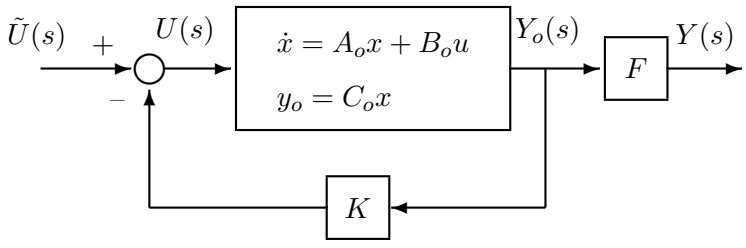

Figura 3.2: Sistema realimentado do Problema 1.

A solução do Problema 1 é apresentada no Teorema 7.

Teorema 7 *[13], [21] O Problema 1 tem solução, se e somente se, existirem matrizes* $P = P^T$, R *e* F, *tais que:*

$$PA_o + A_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o < 0, \tag{3.10}$$

$$B_o^T P = F C_o, \tag{3.11}$$

$$P > 0. \tag{3.12}$$

Além disso, quando (3.10)-(3.12) são satisfeitas, então a matriz K, *dada por:*

$$K = (F^T)^{-1} R, \tag{3.13}$$

torna o sistema da Fig. 3.2, com entrada $\tilde{U}(s)$ *e saída* $Y(s)$, *ERP.*

Prova [13] A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3.3, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ é ERP, se e somente se, existirem matrizes $P = P^T$, K e F, tais que:

$$\begin{aligned} &P(A_o - B_o K C_o) + (A_o - B_o K C_o)^T P < 0, \\ &B_o^T P = F C_o, \\ &P > 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Agora, considerando (3.10) e definindo $R = F^T K$, tem-se:

$$\begin{aligned} &PA_o + A_o^T P - C_o^T F^T K C_o - C_o^T K^T F C_o < 0, \\ &PA_o + A_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o < 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

que corresponde à equação (3.10). Agora, de (3.11), como posto$(B) = m$ então $B_o^T P B_o = F C_o B_o$ tem posto m. Portanto, $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ também tem posto m e assim $(F^T)^{-1}$ existe. Então, se o sistema na Fig. 3.2 for ERP, (3.10)-(3.12) são factíveis e se (3.10)-(3.12) forem factíveis, o sistema na Fig. 3.2 é ERP, para K dado em (3.13). □

Observação 3 *Se as LMI dadas em (3.10)-(3.12) forem factíveis, elas podem ser facilmente resolvidas utilizando-se* softwares *compatíveis, como o Matlab [29] e o LMISol [30].*

Normalmente, apenas a estabilidade de um sistema de controle é insuficiente para se conseguir um desempenho adequado. Freqüentemente, também é necessário especificar a resposta transitória. O Teorema 8 estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os pólos do sistema da Fig. 3.2 tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP.

O Apêndice A define o conceito de zeros de transmissão de um sistema, que será importante para o entendimento do Teorema 8.

Teorema 8 *[13] Considere $z_i = \sigma_i + j\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, os zeros de transmissão do sistema $\{A_o, B_o, C_o\}$, descrito no Problema 1. Então, dada uma constante positiva γ, existem matrizes $P = P^T$, R e F, tais que:*

$$PA_o + A_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o < -2\gamma P, \tag{3.16}$$

$$B_o^T P = F C_o, \tag{3.17}$$

$$P > 0. \tag{3.18}$$

se e somente se $\gamma < -\sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$, e posto$(C_o B_o) = m$.

Prova [13] Definindo $\tilde{A}_o = A_o + \gamma_p I$, então (3.16) pode ser descrita por

$$\begin{aligned}
&P(\tilde{A}_o - \gamma I) + (\tilde{A}_o - \gamma I)^T P - C_o^T (R + R^T) C_o < -2\gamma P, \\
&P\tilde{A}_o - \gamma P + \tilde{A}_o^T P - \gamma P - C_o^T (R + R^T) C_o < -2\gamma P, \\
&P\tilde{A}_o + \tilde{A}_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o - 2\gamma P < -2\gamma P, \\
&P\tilde{A}_o + \tilde{A}_o^T P - C_o^T (R + R^T) C_o < 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Do Teorema 7, de (3.16) (que é equivalente a (3.19)), (3.17) e (3.18) são factíveis se e somente se o sistema $\{\tilde{A}_o - B_o K C_o, B_o, F C_o\}$ é ERP. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [28]. Sabe-se que os zeros de transmissão de um sistema $\{A_o, B_o, C_o\}$, $A_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_o \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C_o \in \mathbb{R}^{m \times n}$, são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A_o & B_o \\ -C_o & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (3.17), a matriz F tem posto m e, assim, é fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A}_o - B_o K C_o, B_o, F C_o\}$ e $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A}_o + B_o K C_o & B_o \\ -F C_o & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A}_o & B_o \\ -F C_o & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A}_o & B_o \\ -C_o & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$ são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s - \gamma_p) I - A_o & B_o \\ -C_o & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s = s_o$ for um zero de transmissão de $\{A_o, B_o, C_o\}$, então $s = s_o + \gamma_p$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$. Daí, $\gamma_p < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$. Agora, de (3.17) e (3.18), posto$(B_o^T P B_o)$ = posto$(FC_oB_o) = m$ e, assim, posto$(C_oB_o) = m$. A necessidade está provada. Para demonstrar a suficiência, considere que $0 < \gamma < -\sigma$, ou seja, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}_o, B_o, C_o\}$ apresentam parte real negativa e que posto$(C_oB_o) = m$. Agora, defina $F = (C_oB_o)^T$ e note que o sistema $\{\tilde{A}_o, B_o, FC_o\}$ satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 6. Assim, existe K_o tal que $K = K_oF$ torne o sistema $\{\tilde{A}_o - B_oKC_o, B_o, FC_o\}$ ERP. Finalmente, do Teorema 7, (3.16) (que é equivalente a (3.19)), (3.17) e (3.18) são factíveis e o Teorema 8 está provado. □

Observação 4 *[13] Considere uma candidata a função de Lyapunov $V(t) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T > 0$, para o sistema na Fig. 3.2. Se a planta tem zeros de transmissão $z_i = \sigma_i + j\beta_i$, $i = 1, \ldots, p$ e $0 < \gamma < -\sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$, então, do Teorema 8, as LMI (3.16), (3.17) e (3.18) são factíveis e, então, não é difícil ver que $\dot{V}(t) \leq -2\gamma V(t)$. Portanto, $V(t) \leq V(0)e^{-2\gamma t}$ e [8]*

$$||x(t)|| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}\ ||x(0)||\ e^{-\gamma t},$$

sendo $\lambda_{max}(P)$ e $\lambda_{min}(P)$ o máximo e o mínimo autovalor de P, respectivamente. O Teorema 8 mostra que existe um limite superior para γ, relacionado com os zeros de transmissão da planta, para que o sistema na Fig. 3.2 seja ERP. Uma conclusão geral é que, para sistemas ERP, os zeros de transmissão definem o máximo valor da taxa de decaimento ERP. A taxa de decaimento do sistema ERP não considera a restrição (3.17) e então pode ser diferente da taxa de decaimento ERP. Em controle adaptativo e CEV de sistemas incertos utilizando a teoria ERP, a restrição (3.17) é necessária. O resultado do Teorema 8 é considerado razoável, se for utilizada uma realimentação K com alto ganho, como nos modos CEV e deslizante, pois sabe-se que, neste caso, os zeros de transmissão da planta serão os pólos do sistema de malha fechada (no caso de CEV e modos deslizantes, os zeros de transmissão da planta serão os pólos do sistema no deslizamento [16]). O inesperado é a influência da localização dos zeros de transmissão para todas as matrizes K, que realimentam a planta e F na Fig. 3.2.

O lema a seguir permite remover a restrição de igualdade do Teorema 7, como descrito no Corolário 1 abaixo.

Lema 2 *[14], [26] Considere o sistema $\{A, B, C\}$, descrito em (3.1), com posto$(CB) = m$. Então, existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que:*

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} = Tx, \tag{3.20}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{y}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} u, \tag{3.21}$$

$$y_o = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ y_o \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Corolário 1 *[21] Considere que as matrizes A_o, B_o e C_o, na Fig. 3.2, tenham as seguintes formas:*

$$A_o = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \; B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} \; e \; C_o = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

sendo posto$(CB) = m$. Então, as condições necessárias e suficientes para a solução do Problema 1 são a existência de matrizes $P = P^T$ e R, tais que

$$P = \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix} > 0 \; e \tag{3.24}$$

$$PA + A^T P - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (R + R^T) \end{bmatrix} < 0, \tag{3.25}$$

sendo as matrizes K e F obtidas pelas expressões:

$$K = (F^T)^{-1} R = (P_c CB)^{-1} R, \tag{3.26}$$

$$F = (CB)^T P_c. \tag{3.27}$$

A prova deste corolário é similar à prova do Teorema 7 e é apresentada em [21].

Comparando-se os resultados do Corolário 1 com os do Teorema 7, observa-se que foi removida a Igualdade Linear Matricial (em inglês, *Linear Matrix Equality*, LME) (3.11). Alguns *softwares*, como o *toolbox* de LMI do *Matlab* não aceitam diretamente a existência de LME. Desta forma, o Corolário 1 pode ser útil para a obtenção de uma solução numérica do Problema 1.

3.1.1 Sistemas Incertos

Nas situações práticas em geral, existem incertezas nos parâmetros da planta. Desta forma, é importante levar em conta estas incertezas no projeto de sistemas de controle.

Considere, agora, a planta descrita em (3.28):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + Bu, \\ y &= C(\alpha)x, \end{aligned} \tag{3.28}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha \in \mathbb{R}^r$ dado por:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

sendo $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, r$ constantes desconhecidas, com $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$

São admitidas as seguintes hipóteses:

A1 O par $(A(\alpha), B)$ é controlável e o par $(A(\alpha), C(\alpha))$ é observável, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^r$ admissível;

A2 O vetor x não está disponível, mas o vetor y está disponível;

A3 $\text{posto}(B) = \text{posto}(C(\alpha)) = \text{posto}(C(\alpha)B) = m$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^r$ factível;

A4 As matrizes com incertezas $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$ são constantes, mas desconhecidas e descritas por:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_i \text{ e } C(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i C_i,$$

sendo $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, r$ constantes desconhecidas, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$ e as matrizes A_i e $C_i,\ i = 1, \ldots, r$ são conhecidas (incertezas politópicas).

As condições A1 e A3 são usuais em CEV [24]. A condição A2 considera o CEV com acesso somente às saídas da planta, estudada, por exemplo, em [7], [15] e [16]. A condição A4 é geral porque permite incertezas politópicas arbitrárias em $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$.

Foi proposto o seguinte problema, nesta dissertação:

Problema 2 Dada a planta $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$, satisfazendo as condições A1-A4, encontre condições necessárias e suficientes, usando LMI, para a existência de matrizes constantes F

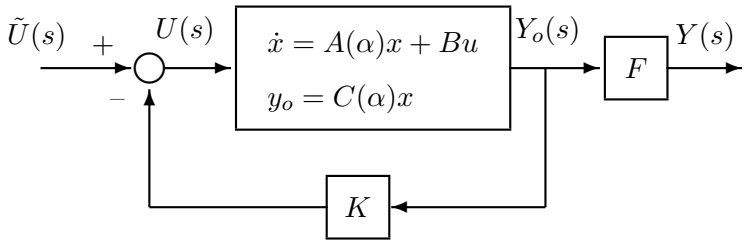

Figura 3.3: Sistema realimentado do Problema 2.

e $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$, para que o sistema descrito na Fig. 3.3, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$, seja ERP.

A solução do Problema 2 é apresentada no Teorema 9.

Teorema 9 *O Problema 2 tem solução, se e somente se, existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, R e F, tais que:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < 0, \tag{3.30}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \tag{3.31}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{3.32}$$

para todo α definido em (3.29) e A4. Aliás, se (3.30)-(3.32) forem satisfeitas, então K é dado por:

$$K = (F^T)^{-1}R. \tag{3.33}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3.3, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ é ERP, se e somente se, existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, K e F, tais que:

$$P(\alpha)(A(\alpha) - BKC(\alpha)) + (A(\alpha) - BKC(\alpha))^T P(\alpha) < 0, \tag{3.34}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \tag{3.35}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{3.36}$$

Agora, considerando (3.34) e definindo $R = F^T K$, segue que:

$$\begin{aligned} &P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T KC(\alpha) - C(\alpha)^T K^T FC(\alpha) < 0, \\ &P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < 0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

que corresponde à equação (3.30). Agora, de (3.31), com posto$(B) = m$, então $B^T P(\alpha)B = FC(\alpha)B$ tem posto m. Portanto, $F \in \mathbb{R}^{m\times m}$ também tem posto m e assim $(F^T)^{-1}$ existe.

Então, se o sistema na Fig. 3.3 for ERP, (3.30)-(3.32) são factíveis e se (3.30)-(3.32) forem factíveis, o sistema na Fig. 3.3 é ERP, para K dado em (3.33). □

Observação 5 *Se as incertezas consideradas no Teorema 9 forem removidas, tem-se o Teorema 7. Note, também, que a condição de igualdade (3.31) limita a localização das incertezas na matriz* $C(\alpha)$.

Normalmente, apenas a estabilidade de um sistema de controle é insuficiente para se conseguir um desempenho adequado. Freqüentemente, também é necessário especificar a resposta transitória. O Teorema 10, concebido nesta dissertação, estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os pólos do sistema incerto da Fig. 3.3 tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP.

Teorema 10 *Sejam* $z_i(\alpha) = \sigma_i(\alpha) + j\beta_i(\alpha)$, $\sigma_i(\alpha)$ *e* $\beta_i(\alpha) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ *os zeros de transmissão do sistema* $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$, *descrito no Problema 2. Então, dada uma constante positiva* γ, *existem matrizes* $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, R *e* F, *tais que:*

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \tag{3.38}$$

$$B^T P(\alpha) = FC(\alpha), \tag{3.39}$$

$$P(\alpha) > 0. \tag{3.40}$$

se e somente se $\gamma < -\sigma$, *sendo* $\sigma = max\{\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_p(\alpha)\}$ *e existe* $F \in \mathbb{R}^{m\times m}$, *tal que* $FC(\alpha)B = (FC(\alpha)B)^T > 0$, *para todo* α *admissível.*

Prova Definindo $\tilde{A}(\alpha) = A(\alpha) + \gamma I$, então (3.38) pode ser descrito por:

$$\begin{aligned}
&P(\alpha)(\tilde{A}(\alpha) - \gamma I) + (\tilde{A}(\alpha) - \gamma I)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),\\
&P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) - \gamma P(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)^T P(\alpha) - \gamma P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),\\
&P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) - 2\gamma P(\alpha) < -2\gamma P(\alpha),\\
&P(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Do Teorema 9, de (3.38) (que é equivalente a (3.41)), (3.39) e (3.40), o sistema $\{\tilde{A}(\alpha) - BKC(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ é ERP. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [28]. Sabe-se que os zeros de transmissão de um sistema $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$, $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, são os números $s(\alpha) \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} s(\alpha)I - A(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (3.39), a matriz F tem posto m e, assim, é fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A}(\alpha) - BKC(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ e $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$:

$$\begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) + BKC(\alpha) & B \\ -FC(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) & B \\ -FC(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} s(\alpha)I - \tilde{A}(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ são os números $s(\alpha) \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s(\alpha) - \gamma)I - A(\alpha) & B \\ -C(\alpha) & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s(\alpha) = s_o(\alpha)$ for um zero de transmissão de $\{A(\alpha), B, C(\alpha)\}$, então $s(\alpha) = s_o(\alpha) + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i(\alpha) + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$. Daí, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1(\alpha), \ldots, \sigma_p(\alpha)\}$, para todo α admissível. Agora, de (3.39) e (3.40), $FC(\alpha)B = B^T PB > 0$. A necessidade está provada. Para demonstrar a suficiência, considere que $0 < \gamma < -\sigma$, ou seja, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}(\alpha), B, C(\alpha)\}$ apresentam parte real negativa e, ainda, que existe $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que $FC(\alpha)B = (FC(\alpha)B)^T > 0$. Note que, nestas condições, o sistema $\{\tilde{A}(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 6. Assim, existe $K_o(\alpha)$ tal que $K(\alpha) = K_o(\alpha)F$ torne o sistema $\{\tilde{A}(\alpha) - BK(\alpha)C(\alpha), B, FC(\alpha)\}$ ERP. Mais especificamente, pode-se demonstrar que, usando argumentos descritos em [26] e [27], $K_o(\alpha) = kI$, $k > 0$, constante e suficientemente grande torna o sistema descrito acima ERP. Finalmente, do Teorema 9, (3.38) (que é equivalente a (3.41)), (3.39) e (3.40) são factíveis e o Teorema 10 está demonstrado. □

Observação 6 *Se as incertezas consideradas no Teorema 10 forem removidas, tem-se o Teorema 8.*

3.2 Sistemas com Diferentes Números de Entradas e Saídas

Serão descritos, agora, os resultados obtidos nesta dissertação para o problema abordado na Seção 3.1, para plantas com o número de saídas maior que o número de entradas.

Considere a planta linear, invariante no tempo, controlável e observável:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_o\tilde{x} + B_o u, \\ y &= C_o\tilde{x}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

sendo $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$, a saída do sistema, $A_o \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a matriz característica do sistema, $B_o \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C_o \in \mathbb{R}^{p\times n}$ a matriz de saída do sistema, com $p \geq m$, $\text{posto}(C_o) = p$ e $\text{posto}(B_o) = \text{posto}(C_oB_o) = m$.

Considere o seguinte lema:

Lema 3 *[1], [26] Considere o sistema (3.42), com $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ e $p \geq m$. Então, existe uma transformação linear T, de modo que:*

$$x = T\tilde{x}, \tag{3.43}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ C_oB_o \end{bmatrix} u = Ax + Bu, \tag{3.44}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} x = Cx \tag{3.45}$$

sendo I_p a matriz identidade de ordem p. Note que, no Lema 3, $C_oB_o = CB$ e que $B^T = (CB)^TC$.

A prova do Lema 3 é reproduzida no Apêndice B.

Um procedimento para a obtenção da matriz T no Lema 3 é o seguinte:

(a) Obtenha P_o, tal que:

$$B_o^TP_o = (C_oB_o)^TC_o \text{ e } P_o = P_o^T > 0;$$

(b) Calcule $T_o = \sqrt{P_o}$ (o *Matlab* faz este cálculo diretamente). Então, $P_o = T_oT_o$ e é bem conhecido [31], [32] que, como $P_o = P_o^T > 0$, então, $T_o = T_o^T > 0$.

Note que:

$$B_o^T P_o = (C_o B_o)^T C_o \;\Rightarrow\; B_o^T T_o T_o = (C_o B_o)^T C_o$$
$$(T_o B_o)^T = (C_o T_o^{-1} T_o B_o)^T (C_o T_o^{-1})$$
$$B^T = (CB)^T C.$$

Para explorar as especificações, em termos de restrições, que as LMI oferecem, foi proposto o seguinte problema, baseado no Problema 1:

Problema 3 Dada a planta $\{A, B, C\}$ linear, invariante no tempo, controlável e observável, com posto$(C) = p$, posto(B) = posto$(CB) = m$ e $B^T = (CB)^T C$, obtenha condições suficientes, usando LMI, para a existência de matrizes constantes F e $K \in \mathbb{R}^{m \times p}$, para que o sistema descrito na Fig. 3.4 seja ERP.

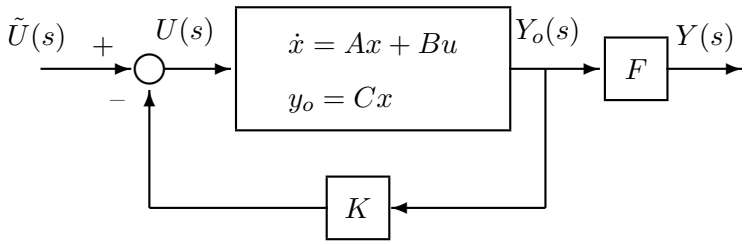

Figura 3.4: Sistema realimentado do Problema 3.

Uma solução do Problema 3 é apresentada no Teorema 11.

Teorema 11 *O Problema 3 tem solução se existirem matrizes $P = P^T$, N e M, tais que:*

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0, \tag{3.46}$$
$$B^T P = MB^T, \tag{3.47}$$
$$P > 0. \tag{3.48}$$

Quando (3.46)-(3.48) são satisfeitas, então as matrizes F e K são dadas por:

$$F = M(CB)^T, \tag{3.49}$$
$$K = (M^T)^{-1} N. \tag{3.50}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3.4, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ é ERP, se e somente se, existirem matrizes $P = P^T$, K e F, tais que:

$$P(A - BKC) + (A - BKC)^T P < 0, \tag{3.51}$$

$$B^T P = FC, \tag{3.52}$$

$$P > 0. \tag{3.53}$$

Considere que existem matrizes P, N e M que satisfazem as equações (3.46)-(3.48). As equações (3.48) e (3.53) são equivalentes.

Como $B^T = (CB)^T C$, então, de (3.47), tem-se que:

$$B^T P = MB^T = M(CB)^T C.$$

Desta forma, para $F = M(CB)^T$, a equação (3.47) implica na equação (3.52).

Finalmente, de (3.46) e (3.47), obtém-se:

$$\begin{aligned}
&PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T \\
&= PA + A^T P - BM^T (M^T)^{-1} NC - C^T N^T M^{-1} MB^T \\
&= PA + A^T P - PB(M^T)^{-1} NC - C^T N^T M^{-1} B^T P \\
&= P(A - B(M^T)^{-1} NC) + (A - B(M^T)^{-1} NC)^T P < 0.
\end{aligned}$$

Definindo-se $K = (M^T)^{-1} N$, tem-se:

$$P(A - BKC) + (A - BKC)^T P < 0.$$

Portanto, a equação (3.46) implica na equação (3.51). □

Corolário 2 *A condição necessária e suficiente para a factibilidade das LMI (3.46)-(3.48) é que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ tenham parte real negativa.*

Prova (Suficiência) Pelo Teorema 6, se todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ têm parte real negativa, então, existe uma matriz K, tal que o sistema $\{A - BKB^T, B, B^T\}$ seja ERP, pois posto$(B) = m$, então $B^T B > 0$. Assim, de acordo com o Lema 1, existe $P = P^T$, tal que:

$$P(A - BKB^T) + (A - BKB^T)^T P < 0, \tag{3.54}$$

$$B^T P = B^T, \tag{3.55}$$

$$P > 0. \tag{3.56}$$

As equações (3.56) e (3.48) são equivalentes. A partir de (3.55), definindo $M = I_m$, tem-se:

$$B^T P = MB^T.$$

Portanto, a equação (3.55) implica na equação (3.47).

A partir de (3.54), tem-se:

$$PA + A^T P - PBKB^T - BK^T B^T P < 0. \tag{3.57}$$

Substituindo (3.55) em (3.57), segue que:

$$PA + A^T P - BKB^T - BK^T B^T < 0. \tag{3.58}$$

Da hipótese de que $B^T = (CB)^T C$, tem-se:

$$PA + A^T P - BK(CB)^T C - C^T (CB) K^T B^T < 0. \tag{3.59}$$

Definindo $N = K(CB)^T$, segue que:

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0.$$

Portanto, a equação (3.54) implica na equação (3.46).

(Necessidade) De (3.46) a (3.48), o sistema $\{A - BKC, B, MB^T\}$ é ERP e, portanto, todos os zeros de transmissão deste sistema têm parte real negativa. Como a matriz M é inversível, pode-se verificar que os sistemas $\{A - BKC, B, MB^T\}$ e $\{A, B, B^T\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{A - BKC, B, MB^T\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - A + BKC & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ têm parte real negativa. □

Normalmente, apenas a estabilidade de um sistema de controle é insuficiente para se conseguir um desempenho adequado. Freqüentemente, também é necessário especificar a resposta transitória. O Teorema 12 estabelece condições necessárias e suficientes para que todos os pólos do sistema da Fig. 3.4 tenham parte real menor que $-\gamma$ e que este sistema seja ERP.

Teorema 12 *Considere $z_i = \sigma_i + j\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$, descrito no Problema 3. Então, dada uma constante positiva γ, uma condição necessária para a existência de matrizes $P = P^T$, N e M, tais que:*

$$PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < -2\gamma P, \tag{3.60}$$

$$B^T P = MB^T, \tag{3.61}$$

$$P > 0, \tag{3.62}$$

é que $\gamma < -\sigma$*, sendo* $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$.

Prova Definindo $\tilde{A} = A + \gamma I$, então (3.60) pode ser descrita por

$$\begin{aligned} &P(\tilde{A} - \gamma I) + (\tilde{A} - \gamma I)^T P - BNC - (BNC)^T < -2\gamma P, \\ &P\tilde{A} - \gamma P + \tilde{A}^T P - \gamma P - BNC - (BNC)^T < -2\gamma P, \\ &P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - BNC - (BNC)^T - 2\gamma P < -2\gamma P, \\ &P\tilde{A} + \tilde{A}^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Do Teorema 11, de (3.60) (que é equivalente a (3.63)), (3.61) e (3.62), o sistema $\{\tilde{A} - BKC, B, MB^T\}$ é ERP. Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [28]. É conhecido, também, que os zeros de transmissão de um sistema $\{A, B, B^T\}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $p \geq m$, são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

De (3.60), a matriz F tem posto m e, assim, é fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A} - BKC, B, MB^T\}$ e $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares, primeiro nas colunas e depois nas linhas, da matriz que define os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, B^T\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + BKC & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -MB^T & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, os zeros de transmissão $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s-\gamma)I - A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s = s_o$ for um zero de transmissão de $\{A, B, B^T\}$, então $s = s_o + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}, B, B^T\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, B, B^T\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i + \gamma < 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Daí, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$. □

Uma solução dual do Problema 3 é apresentada no Teorema 13.

Teorema 13 *O Problema 3 tem solução se existirem matrizes $X = X^T$, Y e Z, tais que:*

$$AX + XA^T - BZC - C^T Z^T B^T < 0, \tag{3.64}$$

$$CX = YC, \tag{3.65}$$

$$X > 0. \tag{3.66}$$

Quando (3.64)-(3.66) são satisfeitas, então as matrizes F e K são dadas por:

$$F = (CB)^T Y^{-1}, \tag{3.67}$$

$$K = ZY^{-1}. \tag{3.68}$$

Prova A partir do Lema 1, o sistema descrito na Fig. 3.4, com entrada $\tilde{U}(s)$ e saída $Y(s)$ é ERP, se e somente se, existirem matrizes $P = P^T$, K e F, tais que:

$$P(A - BKC) + (A - BKC)^T P < 0, \tag{3.69}$$

$$B^T P = FC, \tag{3.70}$$

$$P > 0. \tag{3.71}$$

Como $X = P^{-1}$, tem-se:

$$(A - BKC)X + X(A - BKC)^T < 0, \tag{3.72}$$

$$B^T = FCX, \tag{3.73}$$

$$X > 0. \tag{3.74}$$

Considere a existência de matrizes X, Y e Z, que satisfazem as equações (3.64)-(3.66). As equações (3.66) e (3.74) são equivalentes. Note que, de (3.65) e (3.66), $CXC^T = YCC^T$ tem posto m e, assim, $Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$ também tem posto m.

Como $B^T = (CB)^T C$, então, de (3.65), segue que:

$$\begin{aligned} CX &= YC, \\ (CB)^T Y^{-1} CX &= (CB)^T Y^{-1} YC, \\ (CB)^T Y^{-1} CX &= (CB)^T C = B^T. \end{aligned}$$

Assim, para $F = (CB)^T Y^{-1}$, a equação (3.65) implica na equação (3.73).

A partir da equação (3.64), obtém-se:

$$\begin{aligned} &AX + XA^T - BZC - C^T Z^T B^T < 0, \\ &AX + XA^T - BZY^{-1}YC - C^T Y^T (Y^{-1})^T Z^T B^T < 0. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Substituindo (3.65) em (3.75), segue que:

$$AX + XA^T - BZY^{-1}CX - X^TC^T(Y^{-1})^TZ^TB^T < 0,$$
$$(A - BZY^{-1}C)X + X(A - BZY^{-1}C)^T < 0. \tag{3.76}$$

Definindo $K = ZY^{-1}$, segue que:

$$(A - BKC)X + X(A - BKC)^T < 0.$$

Portanto, a equação (3.64) implica na equação (3.72). □

Corolário 3 *Uma condição necessária para a factibilidade das LMI (3.64)-(3.66) é que todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, C^T, C\}$ tenham parte real negativa.*

Prova De (3.64)-(3.68), o sistema $\{A - BKC, C^T, Y^{-1}C\}$ é ERP e, portanto, todos os zeros de transmissão deste sistema têm parte real negativa. Como a matriz Y^{-1} é inversível, pode-se verificar que os sistemas $\{A - BKC, C^T, Y^{-1}C\}$ e $\{A, C^T, C\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares nas linhas da matriz que define os zeros de transmissão de $\{A - BKC, C^T, Y^{-1}C\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - A + BKC & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - A & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, se o sistema $\{A - BKC, C^T, Y^{-1}C\}$ é ERP, ou de forma equivalente, se (3.64)-(3.66) são factíveis, todos os zeros de transmissão do sistema $\{A, C^T, C\}$ têm parte real negativa. □

Teorema 14 *Considere $z_i = \sigma_i + j\beta_i$, σ_i e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ os zeros de transmissão do sistema $\{A, C^T, C\}$, descrito no Problema 3. Então, dada uma constante positiva γ, uma condição necessária para a existência de matrizes $P = P^T$, N e M, tais que:*

$$AX + XA^T - BZC - C^TZ^TB^T < -2\gamma X, \tag{3.77}$$
$$YC = CX, \tag{3.78}$$
$$X > 0, \tag{3.79}$$

é que $\gamma < -\sigma$, sendo $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$.

Prova Definindo $\tilde{A} = A + \gamma I$, então (3.77) pode ser descrita por:

$$\begin{aligned}
&(\tilde{A} - \gamma I)X + X(\tilde{A} - \gamma I)^T - BZC - (BZC)^T < -2\gamma X,\\
&\tilde{A}X - \gamma X + X\tilde{A} - \gamma X - BZC - (BZC)^T < -2\gamma X,\\
&\tilde{A}X + X\tilde{A}^T - BZC - (BZC)^T - 2\gamma X < -2\gamma X,\\
&\tilde{A}X + X\tilde{A}^T - BZC - C^T Z^T B^T < 0. \qquad (3.80)
\end{aligned}$$

Do Teorema 13, de (3.77) (que é equivalente a (3.80)), (3.78) e (3.79), o sistema $\{\tilde{A} - BKC, C^T, Y^{-1}C\}$ é ERP, para F e K descritas em (3.67)-(3.68). Agora, sabe-se, também, que todos os zeros de transmissão de um sistema ERP apresentam parte real negativa [28]. É bem conhecido, também, que os zeros de transmissão de um sistema $\{A, C^T, C\}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $p \geq m$, são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} sI - A & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

É fácil verificar que os sistemas $\{\tilde{A} - BKC, C^T, Y^{-1}C\}$ e $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ têm os mesmos zeros de transmissão, usando operações elementares nas linhas da matriz que define os zeros de transmissão de$\{\tilde{A}, C^T, C\}$:

$$\begin{bmatrix} sI - \tilde{A} + BKC & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & C^T \\ -Y^{-1}C & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} sI - \tilde{A} & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, os zeros de transmissão $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ são os números $s \in \mathbb{C}$, tais que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} (s - \gamma_p)I - A & C^T \\ -C & 0 \end{bmatrix} < n + m.$$

Portanto, se $s = s_o$ for um zero de transmissão de $\{A, C^T, C\}$, então $s = s_o + \gamma$ será um zero de transmissão de $\{\tilde{A}, C^T, C\}$. Então, todos os zeros de transmissão de $\{\tilde{A}, C^T, C\}$ apresentam parte real negativa se $\sigma_i + \gamma < 0, \forall i \in \{1, \ldots, r\}$. Daí, $\gamma < -\sigma$, $\sigma = max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$. □

3.3 Conclusão

Neste capítulo, inicialmente, foram apresentadas definições e resultados disponíveis sobre os sistemas ERP. Para plantas sem incertezas e com o mesmo número de entradas e saídas,

os resultados sobre o problema de síntese de sistemas ERP com controladores estáticos e acesso somente às saídas da planta, formulado no Problema 1, e solucionado em [13] e [21], foi discutido.

A primeira contribuição desta dissertação foi o estudo do Problema 2, que considera a planta com incertezas politópicas e, no restante, é similar ao Problema 1. Foram apresentadas condições necessárias e suficientes para a solução do problema, incluindo condições para a taxa de decaimento, relacionadas com os zeros de transmissão da planta.

Finalmente, o Problema 1 foi estudado, agora, para plantas com o número de saídas maior que o número de entradas, de acordo com a formulação apresentada no Problema 3. Este problema mostrou-se muito mais complexo do que o Problema 1. Foram obtidas duas condições suficientes, duais, e também resultados relacionando as taxas de decaimento com os zeros de transmissão da planta. Embora a solução necessária e suficiente para este caso não tenha sido encontrada, acredita-se que os resultados obtidos são um passo, a nosso ver, importante para a obtenção desta solução.

Capítulo 4

Controle com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI

Considere o sistema incerto descrito por (4.1), com o mesmo número de entradas e saídas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\alpha)x + B(\alpha)(u + \xi(t,x)), \\ y &= C(\alpha)x, \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha \in \mathbb{R}^r$ dado por:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

sendo $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, r$ constantes desconhecidas, com $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$.

A lei de controle é dada por:

$$u = -Ky - \beta sign(Fy), \tag{4.3}$$

São admitidas as seguintes hipóteses:

B1 O par $(A(\alpha), B(\alpha))$ é controlável e o par $(A(\alpha), C(\alpha))$ é observável, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^r$ admissível;

B2 O vetor x não está disponível, mas o vetor y está disponível;

B3 $\text{posto}(B(\alpha)) = \text{posto}(C(\alpha)) = \text{posto}(C(\alpha)B(\alpha)) = m$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^r$ admissível;

B4 As matrizes com incertezas $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$ são constantes, mas desconhecidas e descritas por:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_i \text{ e } C(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i C_i,$$

sendo $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, r$ constantes desconhecidas, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$ e as matrizes A_i e $C_i,\ i = 1, \ldots, r$ conhecidas (incertezas politópicas);

B5 Definindo-se $|\xi(t,x)| = |\xi_1(t,x)| + \ldots + |\xi_m(t,x)|$, sendo que $\xi(t,x)^T = [\xi_1(t,x), \ldots, \xi_m(t,x)]$, então, existem e são conhecidas constantes positivas a e b, tais que $|\xi(t,x)| \leq a|x| + b$;

B6 A matriz $B(\alpha) = B + \Delta B$, sendo $\Delta B = B\Delta\tilde{B}$. Existem e são conhecidas $l_i,\ i = 1, \ldots, m$, tais que $1 + \Delta\tilde{B}_{i,i} - |\Delta\tilde{B}_{i,1}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{i,i-1}| - |\Delta\tilde{B}_{i,i+1}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{i,m}| > l_i > 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

As condições B1, B3 e B5 são usuais em CEV [24]. A condição B2 considera o CEV com acesso somente às saídas da planta, estudada por exemplo em [7], [15], [16], [17] e [18]. O método de projeto proposto nesta seção é mais geral que os resultados anteriores, pois apenas o método proposto considera estabilidade, taxa de decaimento, robustez e restrições no sinal. A condição B4 é geral, pois permite incertezas arbitrárias politópicas em $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$. Por exemplo, considere $C(\alpha) = [\ c_1 \quad c_2\ ]$, sendo que as constantes $c_1 \in [2,3]$ e $c_2 \in [4,5]$ são desconhecidas. Então, para todo c_1 e c_2 factível, existem constantes $\beta_i \in [0,1],\ i = 1, \ldots, 4$, satisfazendo as condições $\beta_1 + \beta_2 = 1$ e $\beta_3 + \beta_4 = 1$, de modo que $c_1 = 2\beta_1 + 3\beta_2$ e $c_2 = 4\beta_3 + 5\beta_4$. Agora, note que $c_1 = (\beta_3 + \beta_4)(2\beta_1 + 3\beta_2) = 2\beta_1\beta_3 + 2\beta_1\beta_4 + 3\beta_2\beta_3 + 3\beta_2\beta_4$ e $c_2 = (\beta_1 + \beta_2)(4\beta_3 + 5\beta_4) = 4\beta_1\beta_3 + 5\beta_1\beta_4 + 4\beta_2\beta_3 + 5\beta_2\beta_4$. Então, definindo-se $\alpha_1 = \beta_1\beta_3$, $\alpha_2 = \beta_1\beta_4$, $\alpha_3 = \beta_2\beta_3$ e $\alpha_4 = \beta_2\beta_4$, note que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ e $C(\alpha) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4$, sendo $C_1 = [\ 2 \quad 4\ ]$, $C_2 = [\ 2 \quad 5\ ]$, $C_3 = [\ 3 \quad 4\ ]$ e $C_4 = [\ 3 \quad 5\ ]$. A incerteza em $\Delta\tilde{B}$, dada em B6, é também usual, mas é possível relaxar esta condição, como mostrado em [33].

4.1 Estabilidade e Robustez

Para a análise da estabilidade do sistema incerto (4.1), com as condições B1-B6, uma candidata a função de Lyapunov é:

$$V(x,\alpha) = x^T P(\alpha) x,\ P(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i, \tag{4.4}$$

sendo $P_i = P_i^T > 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Considere a existência de $P(\alpha) = P(\alpha)^T$, R e F, de modo que, dadas $A(\alpha)$ e $C(\alpha)$ satisfazendo B4 e $B(\alpha)$ satisfazendo B6, as equações abaixo sejam satisfeitas:

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T (R + R^T) C(\alpha) < 0, \tag{4.5}$$

$$B(\alpha)^T P(\alpha) = FC(\alpha). \tag{4.6}$$

$$P(\alpha) > 0, \tag{4.7}$$

para todo $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, r$, admissível. Então, para a lei de controle (4.3), de (4.1), B1-B6 e (4.5)-(4.3) chega-se em (4.8), pois:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,\alpha) \;=\; & [A(\alpha)x - B(\alpha)Ky - B(\alpha)\beta sign(Fy) + B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x \\
& + x^T P(\alpha)[A(\alpha)x - B(\alpha)Ky - B(\alpha)\beta sign(Fy) + B(\alpha)\xi] \\
\\
=\; & [A(\alpha)x - B(\alpha)KC(\alpha)x - B(\alpha)\beta sign(Fy) \\
& + B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)[A(\alpha)x - B(\alpha)KC(\alpha)x \\
& - B(\alpha)\beta sign(Fy) + B(\alpha)\xi] \\
\\
=\; & x^T A(\alpha)^T P(\alpha)x - x^T C(\alpha)^T K^T B(\alpha)^T P(\alpha)x \\
& - [B(\alpha)\beta sign(Fy) - B(\alpha)\xi]^T P(\alpha)x + x^T P(\alpha)A(\alpha)x \\
& - x^T P(\alpha)B(\alpha)KC(\alpha)x - x^T P(\alpha)[B(\alpha)\beta sign(Fy) - B(\alpha)\xi] \\
\\
=\; & x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(\alpha)KC(\alpha) \\
& - C(\alpha)^T K^T B(\alpha)^T P(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)B(\alpha)(-\beta sign(Fy) + \xi).
\end{aligned}$$

Mas, $B(\alpha) = B(I + \Delta\tilde{B})$, então

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,\alpha) \;=\; & x^T [P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})KC(\alpha) \\
& - C(\alpha)^T K(I + \Delta\tilde{B})^T B^T P(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)B(I + \Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy) + \xi).
\end{aligned}$$

Também, $B^T P(\alpha) = FC(\alpha)$, assim

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,\alpha) &= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T(I+\Delta\tilde{B})KC(\alpha) \\
&\quad - C(\alpha)^T K(I+\Delta\tilde{B})^T FC(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)B(I+\Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy)+\xi) \\
&= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T F^T KC(\alpha) \\
&\quad - C(\alpha)^T F^T\Delta\tilde{B}KC(\alpha) - C(\alpha)^T KFC(\alpha) \\
&\quad - C(\alpha)^T K\Delta\tilde{B}^T FC(\alpha)]x + 2x^T P(\alpha)B(I+\Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy)+\xi) \\
&= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(F^T K + KF)C(\alpha) \\
&\quad - C(\alpha)^T(F^T\Delta\tilde{B}K + K\Delta\tilde{B}^T F)C(\alpha)]x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(I+\Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy)+\xi) \\
&= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(F^T K + KF)C(\alpha)]x \\
&\quad - x^T C(\alpha)^T F^T\Delta\tilde{B}KC(\alpha)x - x^T C(\alpha)^T K\Delta\tilde{B}^T FC(\alpha)x \\
&\quad + 2x^T P(\alpha)B(I+\Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy)+\xi) \\
&= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(F^T K + KF)C(\alpha)]x \\
&\quad - y^T F^T\Delta\tilde{B}Ky - y^T K\Delta\tilde{B}^T Fy + 2x^T C(\alpha)^T F^T(I+\Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy)+\xi) \\
&= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(F^T K + KF)C(\alpha)]x \\
&\quad - 2y^T F^T\Delta\tilde{B}Ky + 2y^T F^T(I+\Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy)+\xi) \\
&= x^T[P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(F^T K + KF)C(\alpha)]x \\
&\quad + \overbrace{2y^T F^T[(I+\Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy)+\xi) - \Delta\tilde{B}Ky]}^{J}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Assim, de B6 e definindo $y^T F^T = \begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_m \end{bmatrix}$, observe que

$$J = 2y^T F^T[(I+\Delta\tilde{B})(-\beta sign(Fy)+\xi) - \Delta\tilde{B}Ky]$$

$$
\begin{aligned}
= \; & 2\begin{bmatrix} f_1 & \dots & f_m \end{bmatrix}\Bigg\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1+\Delta\tilde{B}_{1,1} & \Delta\tilde{B}_{1,2} & \dots & \Delta\tilde{B}_{1,m-1} & \Delta\tilde{B}_{1,m} \\ \Delta\tilde{B}_{2,1} & 1+\Delta\tilde{B}_{2,2} & \dots & \Delta\tilde{B}_{2,m-1} & \Delta\tilde{B}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta\tilde{B}_{m-1,1} & \Delta\tilde{B}_{m-1,2} & \dots & 1+\Delta\tilde{B}_{m-1,m-1} & \Delta\tilde{B}_{m-1,m} \\ \Delta\tilde{B}_{m,1} & \Delta\tilde{B}_{m,2} & \dots & \Delta\tilde{B}_{m,m-1} & 1+\Delta\tilde{B}_{m,m} \end{bmatrix}}^{(I+\Delta\tilde{B})} \\
& \cdot \left(-\beta \begin{bmatrix} sign(f_1) \\ \vdots \\ sign(f_m) \end{bmatrix} + \xi \right) - \Delta\tilde{B}Ky \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & -2\beta f_1[(1+\Delta\tilde{B}_{1,1})sign(f_1) + \Delta\tilde{B}_{1,2}sign(f_2) + \ldots + \Delta\tilde{B}_{1,m}sign(f_m)] - \ldots \\
& - 2\beta f_m[\Delta\tilde{B}_{m,1}sign(f_1) + \Delta\tilde{B}_{m,2}sign(f_2) + \ldots + (1+\Delta\tilde{B}_{m,m})sign(f_m)] \\
& + 2f_1\xi_1[(1+\Delta\tilde{B}_{1,1}) + \Delta\tilde{B}_{1,2} + \ldots + \Delta\tilde{B}_{1,m}] + \ldots \\
& + 2f_m\xi_m[\Delta\tilde{B}_{m,1} + \Delta\tilde{B}_{m,2} + \ldots + (1+\Delta\tilde{B}_{m,m})] - 2y^TF^T\Delta\tilde{B}Ky
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq \; & -2\beta|f_1|\overbrace{[(1+\Delta\tilde{B}_{1,1}) - |\Delta\tilde{B}_{1,2}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{1,m}|]}^{>l_1>0} - \ldots \\
& - 2\beta|f_m|\overbrace{[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| \ldots - (1+\Delta\tilde{B}_{m,m})]}^{>l_m>0} + \ldots \\
& + 2|f_1||\xi_1|\overbrace{[(1+\Delta\tilde{B}_{1,1}) - |\Delta\tilde{B}_{1,2}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{1,m}]}^{>l_1>0} + \ldots \\
& + 2|f_m||\xi_m|\overbrace{[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| - \ldots - (1+\Delta\tilde{B}_{m,m})]}^{>l_m>0} + 2[|f_1| + \ldots + |f_m|]|\Delta\tilde{B}Ky|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq \; & -2\beta|f_1|\overbrace{[(1+\Delta\tilde{B}_{1,1}) - |\Delta\tilde{B}_{1,2}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{1,m}|]}^{>l_1>0} - \ldots \\
& - 2\beta|f_m|\overbrace{[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| \ldots - (1+\Delta\tilde{B}_{m,m})]}^{>l_m>0} + \ldots \\
& + 2|f_1|(a|x_1| + b)\overbrace{[(1+\Delta\tilde{B}_{1,1}) - |\Delta\tilde{B}_{1,2}| - \ldots - |\Delta\tilde{B}_{1,m}]}^{>l_1>0} + \ldots \\
& + 2|f_m|(a|x_m| + b)\overbrace{[-|\Delta\tilde{B}_{m,1}| - |\Delta\tilde{B}_{m,2}| - \ldots - (1+\Delta\tilde{B}_{m,m})]}^{>l_m>0} + 2[|f_1| + \ldots + |f_m|]|\Delta\tilde{B}Ky|
\end{aligned}
$$

Assim, especificando-se $\beta > 0 \in \mathbb{R}$, suficientemente grande, o último termo de $\dot{V}(x,\alpha)$ em (4.8), é menor ou igual a zero. Logo, definindo-se $R = F^T K$, a condição (4.5) implica que, em (4.8) $\dot{V}(x,\alpha) < 0$, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Logo, (4.5)-(4.3) são suficientes para a estabilidade global assintótica de (4.1).

Da hipótese B4, então (4.6) e (4.7) são verificadas, para todos α_i, $i = 1, \ldots, r$ admissíveis, se e somente se,

$$B^T P_i = F C_i, \ i = 1, \ldots, r, \tag{4.9}$$

$$P_i = P_i^T > 0, \ i = 1, \ldots, r. \tag{4.10}$$

A condição (4.5) é equivalente a:

$$\left[\begin{array}{ccc} \alpha_1 I & \ldots & \alpha_r I \end{array} \right] Q \left[\begin{array}{ccc} \alpha_1 I & \ldots & \alpha_r I \end{array} \right]^T < 0,$$

sendo:

$$Q = \left[\begin{array}{c} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} A_1 \cdots A_r \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} A_1^T \\ \vdots \\ A_r^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} P_1 \cdots P_r \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} C_1^T \\ \vdots \\ C_r^T \end{array} \right] (R + R^T) \left[\begin{array}{ccc} C_1 \cdots C_r \end{array} \right]. \tag{4.11}$$

Portanto, uma condição suficiente para (4.5) é

$$Q < 0. \tag{4.12}$$

Se as LMI (4.9), (4.10) e (4.12), com Q definido em (4.11) (que são equivalentes a (4.5)-(4.7)) forem factíveis, então a matriz K pode ser obtida pela expressão $K = (F^T)^{-1} R$.

Seguindo as idéias descritas em [34], a LMI (4.11) pode ser flexibilizadas através do Teorema 15.

Teorema 15 *Considere a matriz Q dada em (4.11). Então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado (4.1) é globalmente assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas $P_i > 0$ e $P_{ij} \geq 0$ de modo que:*

$$Q_N = Q + \left[\begin{array}{cccc} 0 & P_{12} & \cdots & P_{1r} \\ P_{12} & 0 & \cdots & P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1r} & P_{2r} & \cdots & 0 \end{array} \right] < 0. \tag{4.13}$$

Prova A matriz Q dada em (4.11) pode ser decomposta em:

$$Q = [Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & \cdots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^T & Q_{2r}^T & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix}.$$

Então, dada uma candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x^T(t)P(\alpha)x(t)$, de (4.1) e (4.11), tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 x^T(t)Q_{ii}x(t) + 2\sum_{i<j}^{r}\alpha_i\alpha_j x^T(t)Q_{ij}x(t),$$

sendo que:

$$\sum_{i<j}^{r}\alpha_i\alpha_j x^T(t)Q_{ij}x(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i+1}^{r}\alpha_i\alpha_j x^T(t)Q_{ij}x(t)$$

Dadas as matrizes $P_{ij} = P_{ij}^T \geq 0$, segue que:

$$\sum_{i<j}^{r}\alpha_i\alpha_j x^T(t)P_{ij}x(t) \geq 0.$$

Então:

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 x^T(t)Q_{ii}x(t) + 2\sum_{i<j}^{r}\alpha_i\alpha_j x^T(t)Q_{ij}x(t) + \sum_{i<j}^{r}\alpha_i\alpha_j x^T(t)P_{ij}x(t),$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 x^T(t)Q_{ii}x(t) + 2\sum_{i<j}^{r}\alpha_i\alpha_j x^T(t)(Q_{ij} + P_{ij})x(t),$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq x^T(t)\begin{bmatrix} \alpha_1 I & \alpha_2 I & \cdots & \alpha_r I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12}+P_{12} & \cdots & Q_{1r}+P_{1r} \\ Q_{12}^T+P_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{2r}+P_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1r}^T+P_{1r} & Q_{2r}^T+P_{2r} & \cdots & Q_{rr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 I \\ \alpha_2 I \\ \vdots \\ \alpha_r I \end{bmatrix} x(t).$$

Portanto, se (4.13) for satisfeita, $\dot{V}(x(t)) < 0$ e o sistema será globalmente assintoticamente estável. □

4.2 Estabilidade, Robustez e Taxa de Decaimento

A taxa de decaimento γ é especificada pela equação

$$P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) - C(\alpha)^T(R + R^T)C(\alpha) < -2\gamma P(\alpha), \tag{4.14}$$

ou, de forma equivalente,

$$P(\alpha)(A(\alpha)+\gamma I)+(A(\alpha)+\gamma I)^T P(\alpha)-C(\alpha)^T(R+R^T)C(\alpha)<0. \tag{4.15}$$

De modo similar à análise de (4.5), descrita nas equações (4.11)-(4.12), uma condição suficiente para a equação (4.15) é

$$Q+\left[\begin{array}{ccc} \gamma I & \cdots & \gamma I \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{ccc} P_1 & \cdots & P_r \end{array}\right]+\left[\begin{array}{ccc} P_1 & \cdots & P_r \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{ccc} \gamma I & \cdots & \gamma I \end{array}\right]<0. \tag{4.16}$$

As LMI (4.9), (4.10) e (4.16), com Q definido em (4.11), especificam o projeto que garante estabilidade, robustez e taxa de decaimento, para o sistema controlado.

Assim como a LMI (4.11), a LMI (4.16) pode ser flexibilizada através do Teorema 15, substituindo-se Q por Q_N, definido em (4.13).

4.3 Estabilidade, Robustez, Taxa de Decaimento e Restrições na Saída

Considere o sinal:

$$s=Hx, \tag{4.17}$$

sendo $H\in\mathbb{R}^{q\times n},\ 1\leq q\leq n$ uma matriz constante conhecida. Devido às limitações impostas pelas aplicações práticas de sistemas de controle, muitas vezes devem ser consideradas restrições no projeto, como as descritas abaixo:

$$\max_{t\geq 0}||s(t)||\leq \xi_o, \tag{4.18}$$

sendo ξ_o uma constante conhecida, para uma dada condição inicial $x(0)$.

Em [35], foram apresentadas duas LMI para a especificação destas restrições, para um sinal de controle $u=Gx$. Analisando-se a dedução deste resultado, dada no Apêndice C, observa-se que a lei de controle pode ser arbitrária, desde que exista uma função de Lyapunov $V(x)=x^TPx$, com $P=P^T>0$ e $\dot{V}(x)<0$, para $x\neq 0$.

As condições apresentadas por [35], que asseguram que (4.17) e (4.18) são satisfeitas, são dadas por:

$$\left[\begin{array}{cc} P(\alpha) & P(\alpha)H^T \\ HP(\alpha) & \xi_o^2 I \end{array}\right]>0, \tag{4.19}$$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & x(0)^T \\ x(0) & P(\alpha) \end{array}\right]>0. \tag{4.20}$$

Considerando a definição de $P(\alpha)$ em (4.4), então (4.19) e (4.20) são, respectivamente, equivalentes às seguintes LMI:

$$\begin{bmatrix} P_i & P_i H^T \\ H P_i & \xi_o^2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{4.21}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & P_i \end{bmatrix} > 0. \tag{4.22}$$

Se for necessário especificar restrições em mais de um sinal, podemos adicionar LMI, como as descritas em (4.21) e (4.22), para cada sinal. As LMI que especificam estas restrições devem ser consideradas juntamente com as LMI que garantem estabilidade, robustez e taxa de decaimento, dadas por (4.9), (4.10) e (4.16), com Q definido em (4.11).

Para o caso especial, no qual $s = y$, com y dada em (4.1) e considerando-se a condição B5, a LMI (4.19) pode ser analisada mais detalhadamente:

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & P(\alpha)C(\alpha)^T \\ C(\alpha)P(\alpha) & \xi_o^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\right] P(\alpha) & P(\alpha)C(\alpha)^T \\ C(\alpha)P(\alpha) & \xi_o^2 \left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\right]^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 I & \dots & \alpha_r I \end{bmatrix}^T > 0, \tag{4.23}$$

sendo

$$S_1 = \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix}, \; S_2 = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T & \dots & C_r^T \end{bmatrix} \text{ e } S_3 = \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_o^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}^T. \tag{4.24}$$

Uma condição suficiente para (4.17) e (4.18), com $H = C(\alpha)$, neste caso, é

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix} > 0,$$

além da equação (4.22).

4.4 Conclusão

Neste capítulo, foram descritas condições, em termos de LMI, para o controle com estrutura variável de sistemas com incertezas politópicas, com acesso somente às saídas da planta, considerando-se que esta tem o mesmo número de entradas e saídas.

A contribuição desta dissertação ao assunto, abordado originalmente em [21], foi o Teorema 15, que apresentou condições mais relaxadas para o projeto. Esta flexibilização mostrou-se muito útil nos dois primeiros exemplos descritos no próximo capítulo, pois, sem ela, não foram encontradas soluções para as LMI e assim o método de projeto não funcionaria. No terceiro exemplo, esta flexibilização não foi utilizada, pois, neste exemplo, não foram consideradas as incertezas na planta.

Capítulo 5

Exemplos de Aplicação

Neste capítulo, são apresentados os resultados das simulações de três sistemas, considerando-se incertezas nos dois primeiros. O primeiro com duas variáveis de estado, uma entrada e uma saída (em inglês, *Single Input Single Output*, SISO), o segundo com quatro variáveis de estado, duas entradas e duas saídas (em inglês, *Multiple Input Multiple Output*, MIMO) e o terceiro com sete variáveis de estado, duas entradas e quatro saídas. Em todos os casos, foi projetado um controlador estático, considerando-se o acesso somente às saídas da planta e utilizando-se os resultados apresentados nos capítulos anteriores.

5.1 Aproximação da função sinal

Nos sistemas de controle, foi utilizada a lei de controle:

$$u = -\beta \text{sign}(FCx).$$

A função sinal de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é definida como:

$$\text{sign}(A) = \text{sign}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \text{sign}(a_{11}) & \cdots & \text{sign}(a_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{sign}(a_{n1}) & \cdots & \text{sign}(a_{nm}) \end{bmatrix},$$

sendo a função sinal de um escalar a dada por:

$$\text{sign}(a) = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}.$$

O problema da utilização da lei de controle acima é a descontinuidade da função sinal, fazendo com que a simulação se torne lenta e ocupe uma quantidade muito grande de memória no computador. Para contornar este problema, a função sinal foi aproximada:

$$\text{sign}(a) \approx \frac{a}{|a| + \epsilon}, \tag{5.1}$$

sendo que ϵ é positivo e, em geral, pequeno.

5.2 Exemplo SISO

Foi simulado o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + \xi), \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{5.2}$$

com $x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, e as matrizes A, B e C dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

sendo:

$$\begin{aligned} a &= 0.98 - \delta, \\ b &= 2 + 2\delta, \\ c &= (1 + \delta)^2, \end{aligned} \tag{5.4}$$

com $\delta \in [0, 0.5]$.

Note que as matrizes A e C podem ser descritas na forma apresentada na hipótese B4, no Capítulo 4:

$$A = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i A_i \quad \text{e} \quad C = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i C_i,$$

sendo:

$$\alpha_i \in [0, 1], \; i = 1, \ldots, 8 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{8} \alpha_i = 1,$$

e os as matrizes A_i e C_i dadas por:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_m & -b_m \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_m & -b_m \end{bmatrix}, \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_M & -b_M \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_M & -b_M \end{bmatrix}, \\
A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_m & -b_M \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_m & -b_M \end{bmatrix}, \\
A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_M & -b_m \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_M & -b_m \end{bmatrix}, \\
C_1 &= \begin{bmatrix} a_m & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} a_M & 1 \end{bmatrix}, \\
C_3 &= \begin{bmatrix} a_m & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_4 = \begin{bmatrix} a_M & 1 \end{bmatrix}, \\
C_5 &= \begin{bmatrix} a_m & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_6 = \begin{bmatrix} a_M & 1 \end{bmatrix}, \\
C_7 &= \begin{bmatrix} a_m & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_8 = \begin{bmatrix} a_M & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

sendo a_m, b_m e c_m o valor mínimo de a, b e c, respectivamente e a_M, b_M e c_M o valor máximo de a, b e c, respectivamente. Esses valores são dados por:

$$
\begin{aligned}
a_m = 0.98 - \delta_M, \quad a_M = 0.98 - \delta_m, \\
b_m = 2 + 2\delta_m, \qquad b_M = 2 + 2\delta_M, \\
c_m = (1 + \delta_m)^2, \quad c_M = (1 + \delta_M)^2,
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

sendo δ_m e δ_M os valores mínimo e máximo de δ, respectivamente.

5.2.1 Resultados

Dada a planta incerta $\{A, B, C\}$, definida em (5.2), com as matrizes A, B e C dadas em (5.3) e (5.4), foi projetado um sistema de controle que garante a estabilidade do sistema, independentemente das incertezas no sistema. Para isto, as matrizes K e F foram obtidas

através da resolução das LMI (4.9), (4.10) e (4.12), com Q definido em (4.11), mas a última LMI foi flexibilizada através do Teorema 15 e descrita em (4.13).

Em seguida, foi especificada uma taxa de decaimento $\gamma_p = 0.47$, com a finalidade de melhorar a resposta transitória. Segundo o Teorema 8, como a planta tem um único zero de transmissão $z_1 \in [-0.98, -0.48]$, a taxa de decaimento especificada deve ser menor que $\sigma = 0.48$. Com a taxa de decaimento $\gamma_p = 0.47$, as matrizes K e F foram obtidas através da resolução das LMI (4.9), (4.10) e (4.16), com Q definido em (4.11), mas a última LMI foi flexibilizada através do Teorema 15.

As matrizes K e F obtidas para os casos acima foram as seguintes:

Sem taxa de decaimento:

$$K = [0.9808] \text{ e } F = [3.1110].$$

Com taxa de decaimento $\gamma_p = 0.47$:

$$K = [19.7807] \text{ e } F = [0.1581].$$

Observação 7 *Inicialmente, com a resolução das LMI, no Matlab, foram obtidas as seguintes matrizes:*

Sem taxa de decaimento:

$$K = [78.1878] \ e \ F = 10^6.[1.4218].$$

Com taxa de decaimento $\gamma_p = 0.47$*:*

$$K = [745.0172] \ e \ F = 10^5.[7.2678].$$

Como estas matrizes não podem ser implementadas na prática, foi necessário adicionar restrições nas matrizes F *e* R*:*

$$F^T F < 10I,$$

$$R^T R < 10I,$$

que, segundo o complemento de Schur, são representadas pelas LMI:

$$\begin{bmatrix} 10I & F^T \\ F & I \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} 10I & R^T \\ R & I \end{bmatrix} > 0,$$

que foram adicionadas às LMI que determinam estabilidade, robustez e taxa de decaimento.

Em ambos os casos, o sinal de distúrbio adotado foi:

$$\xi = 5\text{sin}(2\pi t)$$

e foi utilizada a lei de controle:

$$u = -\beta\text{sign}(FCx),$$

com $\beta = 10$ e a função sinal aproximada através da expressão (5.1), com $\epsilon = 10^{-3}$.

A seguir, são apresentados os resultados das simulações para ambos os casos, considerando-se os valores extremos de δ. Ambos os sistemas partem do estado inicial $x(0) = [\ 1 \quad 1\ ]^T$.

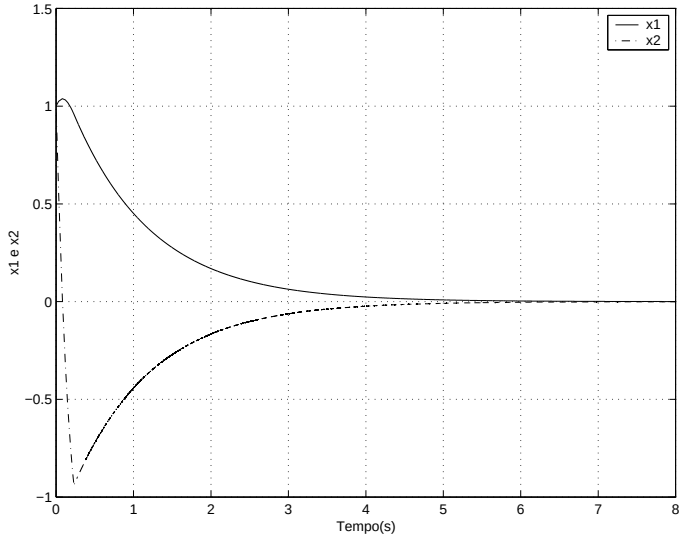

Figura 5.1: Estados da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = 0$.

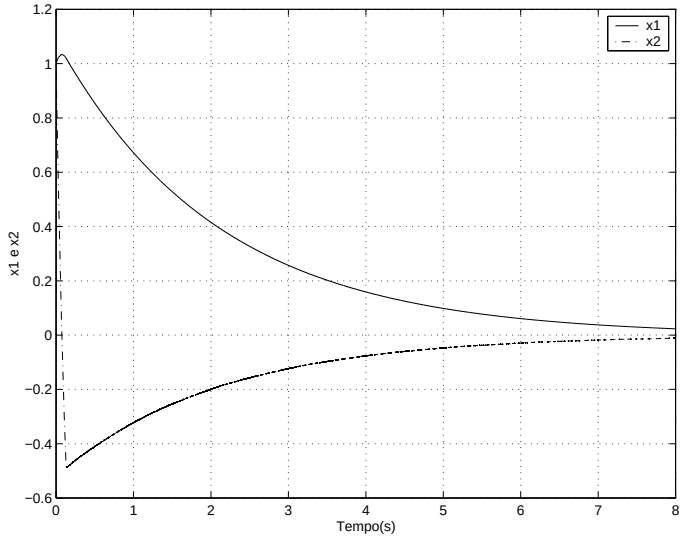

Figura 5.2: Estados da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = 0.5$.

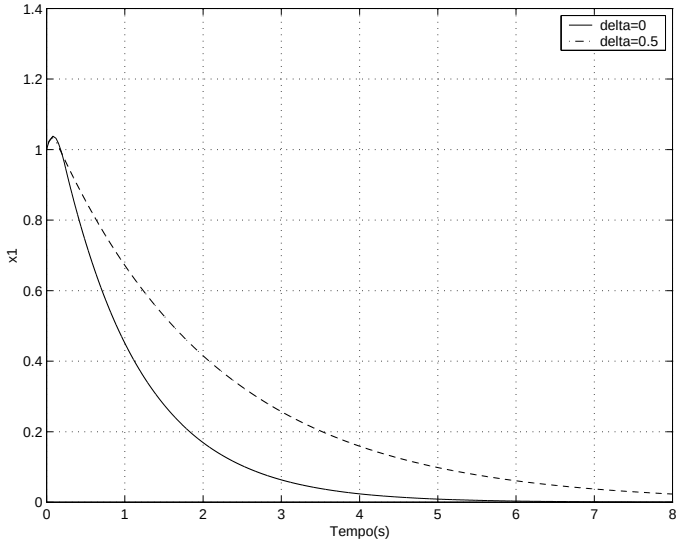

Figura 5.3: Comparação do estado x_1 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = 0$ e $\delta = 0.5$.

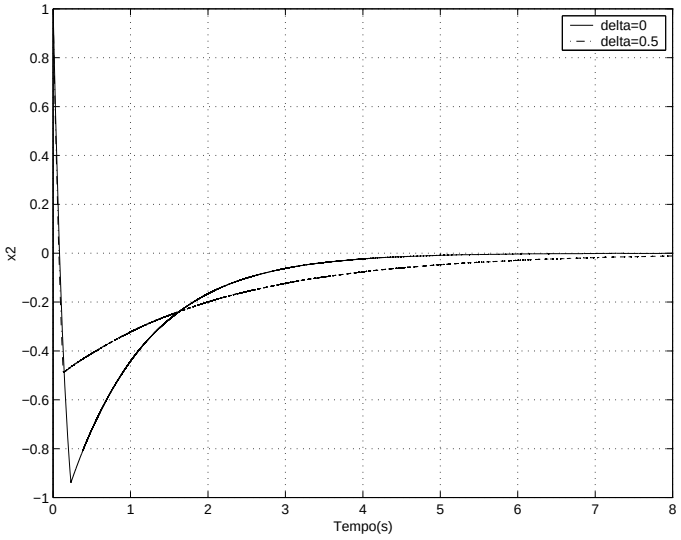

Figura 5.4: Comparação do estado x_2 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = 0$ e $\delta = 0.5$.

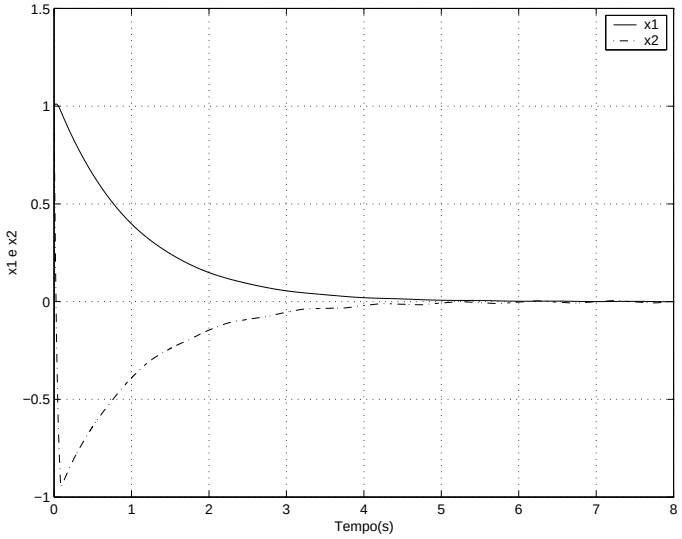

Figura 5.5: Estados da planta com taxa de decaimento $\gamma = 0.47$ e $\delta = 0$.

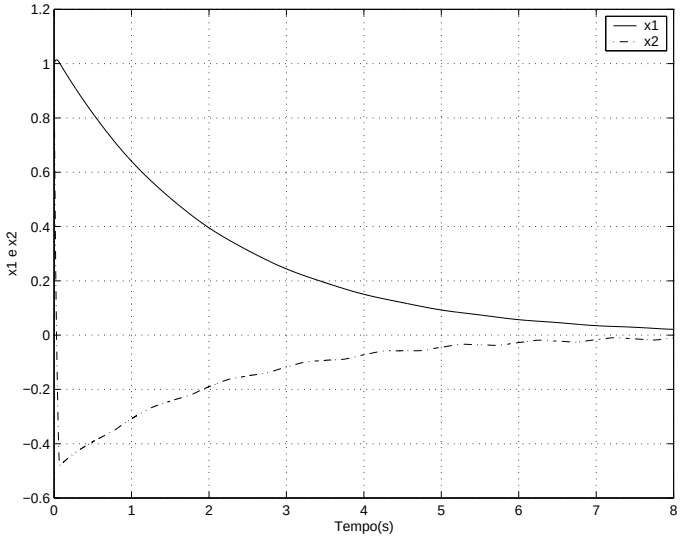

Figura 5.6: Estados da planta com taxa de decaimento $\gamma = 0.47$ e $\delta = 0.5$.

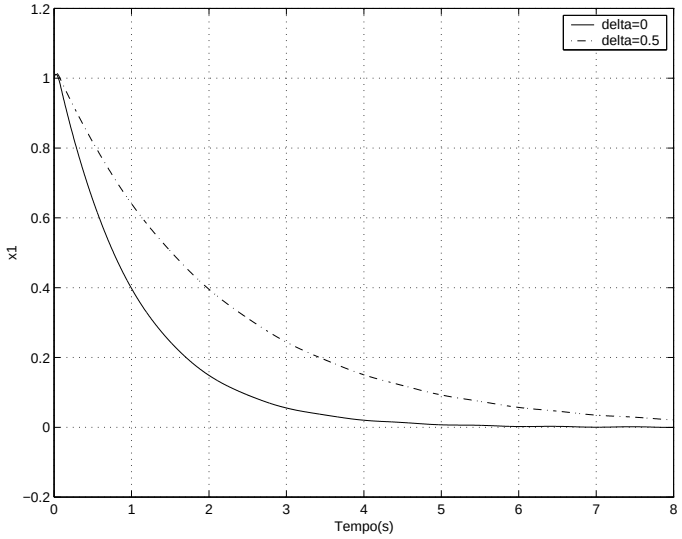

Figura 5.7: Comparação do estado x_1 da planta com $\gamma = 0.47$, $\delta = 0$ e $\delta = 0.5$.

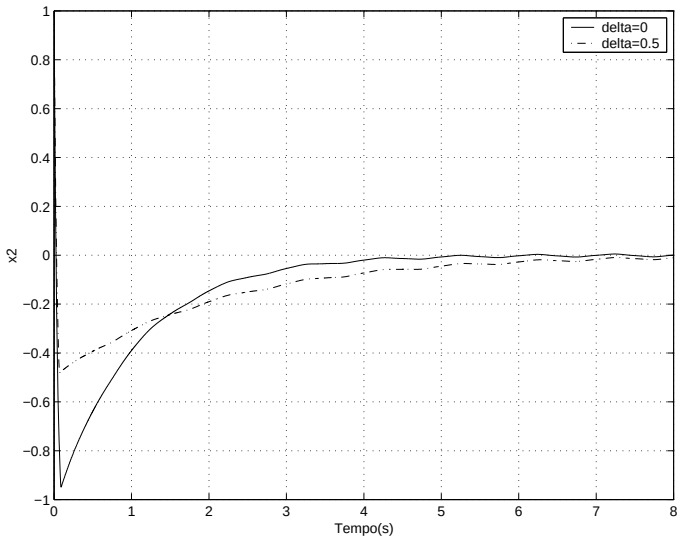

Figura 5.8: Comparação do estado x_2 da planta com $\gamma = 0.47$, $\delta = 0$ e $\delta = 0.5$.

5.2.2 Análise dos Resultados

Através das figuras anteriores, pode-se observar que o sistema é estável e robusto, obedecendo aos padrões especificados, mesmo quando se determina uma taxa de decaimento. Independentemente das incertezas na planta, ambos os estados do sistema convergem rapidamente para o ponto de equilíbrio, obedecendo à taxa de decaimento, quando esta é especificada.

Observa-se que não ocorreu grande diferença especificando-se uma taxa de decaimento ou sem especificá-la. Uma justificativa deste fato é que a solução apresentada pelas LMI, sem impor uma taxa de decaimento positiva, já produziu naturalmente um controlador que proporcionou um transitório rápido.

Observa-se, ainda, uma oscilação residual nas respostas transitória e em regime, que se devem à aproximação na função sinal, definida em (5.1).

Observação 8 *O transitório pode ser estimado pela taxa de decaimento γ. Note que $A+\gamma I$ deve ter todos os autovalores com parte real negativa. Portanto, todos os autovalores de A dever ter parte real menor que $-\gamma$.*

Considerando que todos os pólos do sistema são reais distintos, ou, no máximo, complexos em pares conjugados, o tempo de estabilização é dado por:

Para pólos reais distintos $p = -1/\tau$:

$$t_s = 4\tau.$$

Para pólos complexos conjugados $p = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}.$$

Considerando o caso de pólos reais distintos, se todos os pólos obedecerem à inequação:

$$p = -\frac{1}{\tau} \leq -\gamma,$$

então:

$$\frac{1}{\tau} \geq \gamma \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \geq \tau \Rightarrow \frac{4}{\gamma} \geq 4\tau = t_s.$$

Portanto,

$$t_s \leq \frac{4}{\gamma}.$$

Neste exemplo, o tempo de estabilização deve ser:

$$t_s \leq \frac{4}{0.47} \approx 8.5s.$$

5.3 Exemplo MIMO

Foi simulado o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + \xi), \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{5.7}$$

com $x \in \mathbb{R}^4$ e $u \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}^2$, e as matrizes A, B e C dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

sendo:

$$\begin{aligned} a &= -1 + \delta, \\ b &= -2 - \delta, \end{aligned} \tag{5.9}$$

com $\delta \in [-0.8; 0.8]$.

Note que a matriz A pode ser descrita na forma apresentada na hipótese B4, no Capítulo 4:

$$A = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i A_i,$$

sendo:

$$\alpha_i \in [0, 1], \; i = 1, 2 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 1,$$

e as matrizes A_i dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

sendo a_1 e b_1 o mínimo valor de a e b, respectivamente, e a_2 e b_2 o máximo valor a e b, respectivamente. Estes valores são dados por:

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 + \delta_m, \quad a_2 = -1 + \delta_M, \\ b_1 &= -2 - \delta_m, \quad b_2 = -2 - \delta_M, \end{aligned} \tag{5.11}$$

sendo δ_m e δ_M os valores mínimo e máximo de δ, respectivamente.

5.3.1 Resultados

Dada a planta incerta $\{A, B, C\}$, definida em (5.7), com as matrizes A, B e C dadas em (5.8) e (5.9), foi projetado um sistema de controle que garante a estabilidade do sistema, independentemente das incertezas no sistema. Para isto, as matrizes K e F foram obtidas

através da resolução das LMI (4.9), (4.10) e (4.12), com Q definido em (4.11), mas a última LMI foi flexibilizada através do Teorema 15 e descrita em (4.13).

Em seguida, foi especificada uma taxa de decaimento $\gamma_p = 0.19$, com a finalidade de melhorar a resposta transitória. Segundo o Teorema 8, como a planta tem dois zeros de transmissão $z_1 \in [-1.8, -0.2]$ e $z_2 \in [-2.8, -1.2]$, a taxa de decaimento especificada deve ser menor que $\sigma = 0.2$. Com a taxa de decaimento $\gamma_p = 0.19$, as matrizes K e F foram obtidas através da resolução das LMI (4.9), (4.10) e (4.16), com Q definido em (4.11), mas a última LMI foi flexibilizada através do Teorema 15.

As matrizes K e F obtidas para os casos acima foram as seguintes:

Sem taxa de decaimento:

$$K = \begin{bmatrix} 10.9794 & -1.9779 \\ -5.4897 & 3.9558 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0.0753 & 0.1157 \\ 0.0377 & 0.2314 \end{bmatrix}.$$

Com taxa de decaimento $\gamma_p = 0.19$:

$$K = \begin{bmatrix} 177.6864 & -2.2652 \\ -88.8432 & 4.5305 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0.0049 & 0.1019 \\ 0.0025 & 0.2039 \end{bmatrix}.$$

Observação 9 *Como o Matlab não conseguiu resolver as LMI acima, foi utilizado o LMI-Sol para a resolução dos problemas. Entretanto, foram obtidas, inicialmente, as seguintes matrizes:*

Sem taxa de decaimento:

$$K = 10^{14}. \begin{bmatrix} 1.2196 & 6.4812 \\ -2.0861 & -3.4171 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0.1957 & 0.3206 \\ 0.1144 & 0.6081 \end{bmatrix}.$$

Com taxa de decaimento $\gamma_p = 0.19$:

$$K = 10^{16}. \begin{bmatrix} -0.0145 & -1.8982 \\ 0.0226 & 0.9522 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0.0104 & 0.4373 \\ 0.0067 & 0.8717 \end{bmatrix}.$$

Como estas matrizes não podem ser implementadas na prática, foi necessário adicionar uma restrição na matriz R:

$$R^T R < I,$$

que, segundo o complemento de Schur, são representadas pelas LMI:

$$\begin{bmatrix} I & R^T \\ R & I \end{bmatrix} > 0,$$

que foram adicionadas às LMI que determinam estabilidade, robustez e taxa de decaimento.

Em ambos os casos, o sinal de distúrbio adotado foi:

$$\xi = 5\text{sin}(2\pi t)$$

e foi utilizada a lei de controle:

$$u = -\beta\text{sign}(FCx),$$

com $\beta = 10$ e a função sinal aproximada através da expressão (5.1), com $\epsilon = 10^{-3}$.

A seguir, são apresentados os resultados das simulações para ambos os casos, considerando-se os valores extremos de δ. Ambos os sistemas partem do estado inicial $x(0) = [\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\ ]^T$.

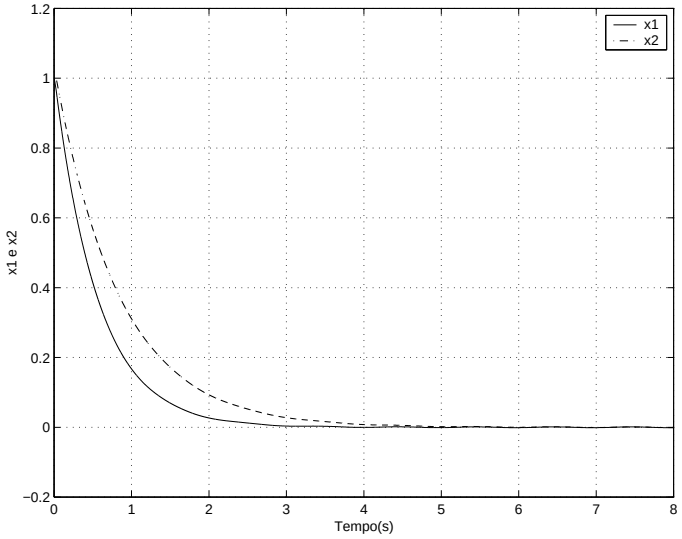

Figura 5.9: Estados da planta x_1 e x_2 sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$.

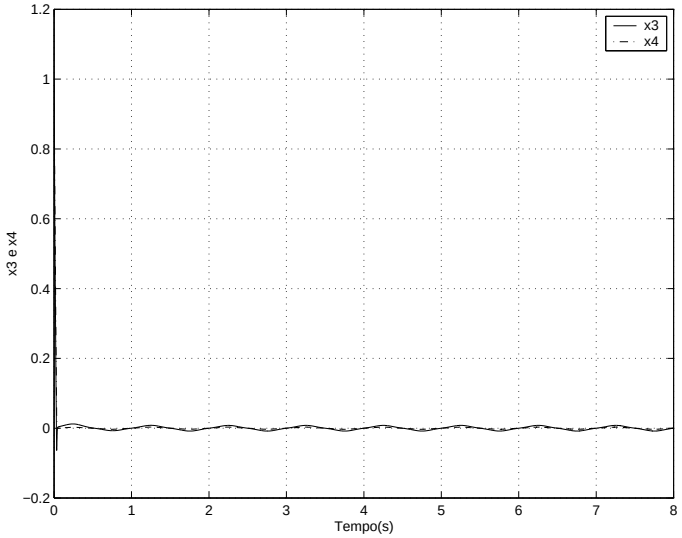

Figura 5.10: Estados da planta x_3 e x_4 sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$.

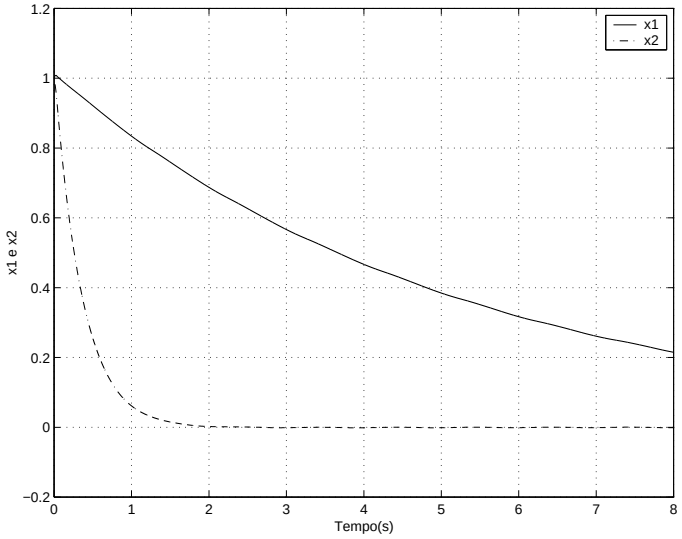

Figura 5.11: Estados da planta x_1 e x_2 sem taxa de decaimento, com $\delta = 0.8$.

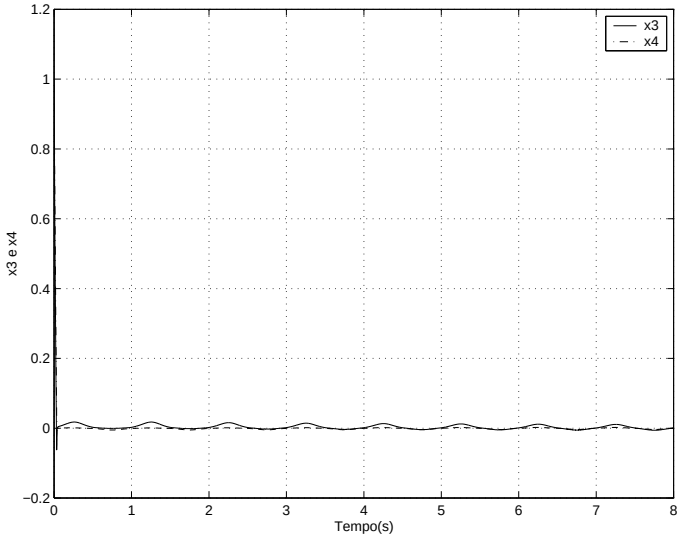

Figura 5.12: Estados da planta x_3 e x_4 sem taxa de decaimento, com $\delta = 0.8$.

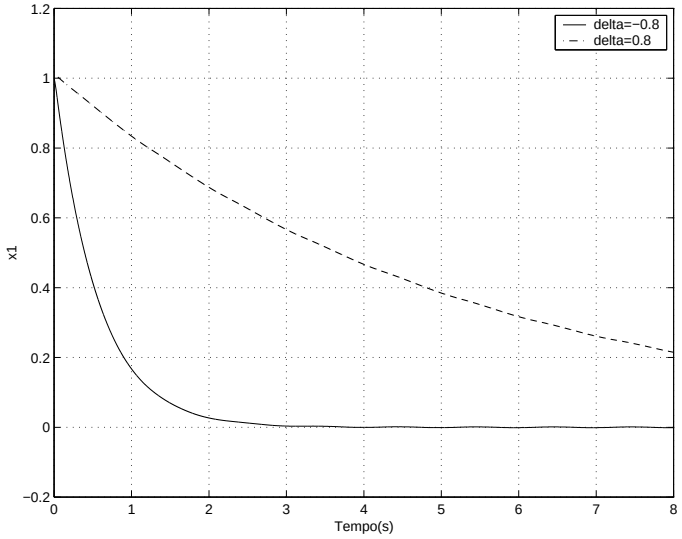

Figura 5.13: Comparação do estado x_1 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$.

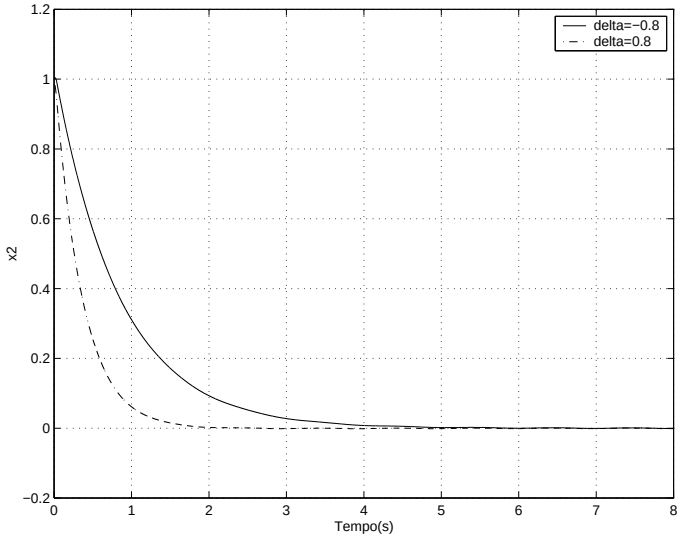

Figura 5.14: Comparação do estado x_2 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$.

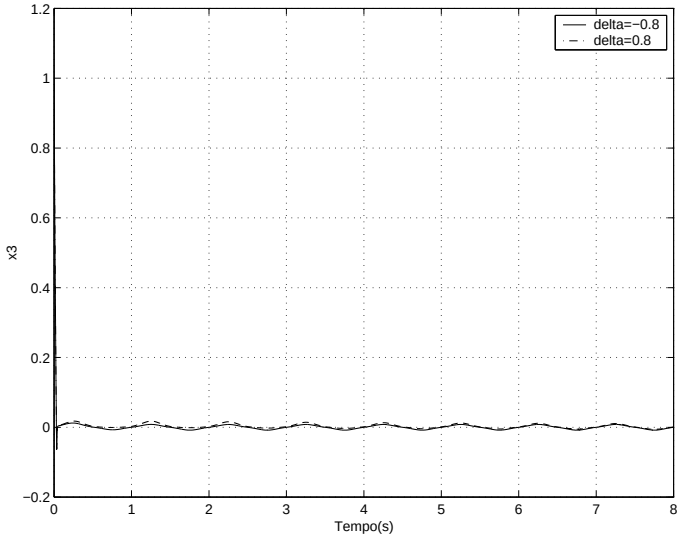

Figura 5.15: Comparação do estado x_3 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$.

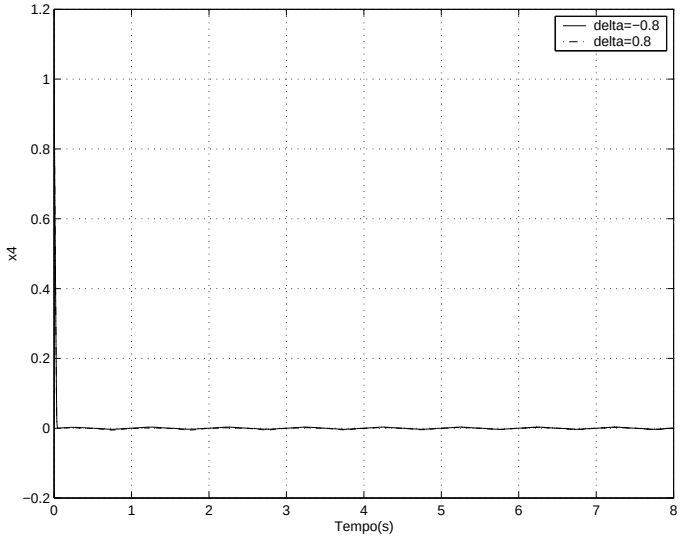

Figura 5.16: Comparação do estado x_4 da planta sem taxa de decaimento, com $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$.

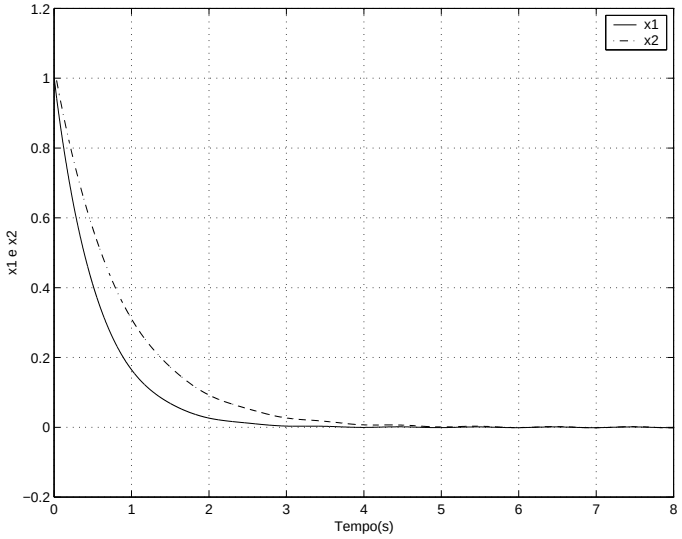

Figura 5.17: Estados da planta x_1 e x_2 com taxa de decaimento $\gamma = 0.19$ e $\delta = -0.8$.

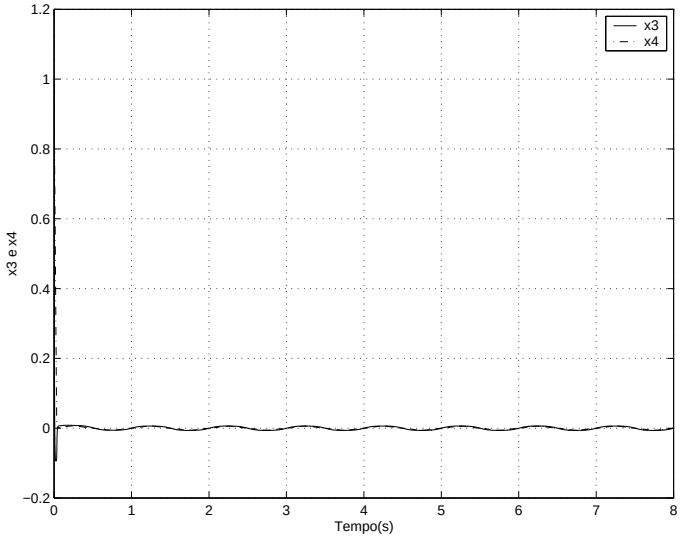

Figura 5.18: Estados da planta x_3 e x_4 com taxa de decaimento $\gamma = 0.19$ e $\delta = -0.8$.

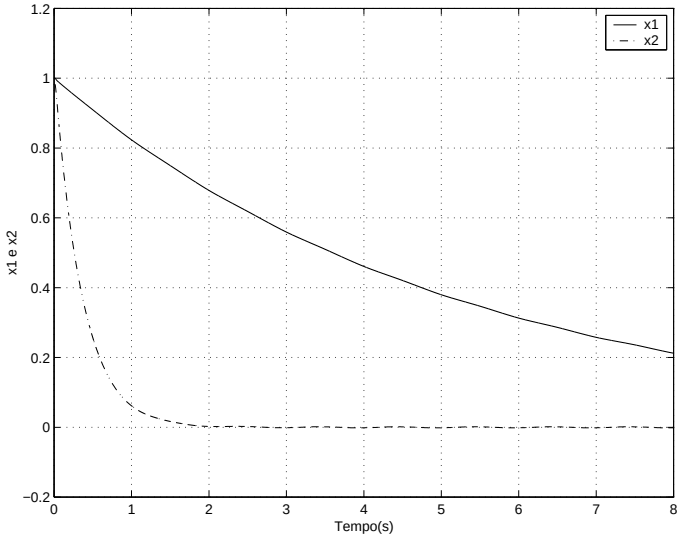

Figura 5.19: Estados da planta x_1 e x_2 com taxa de decaimento $\gamma = 0.19$ e $\delta = 0.8$.

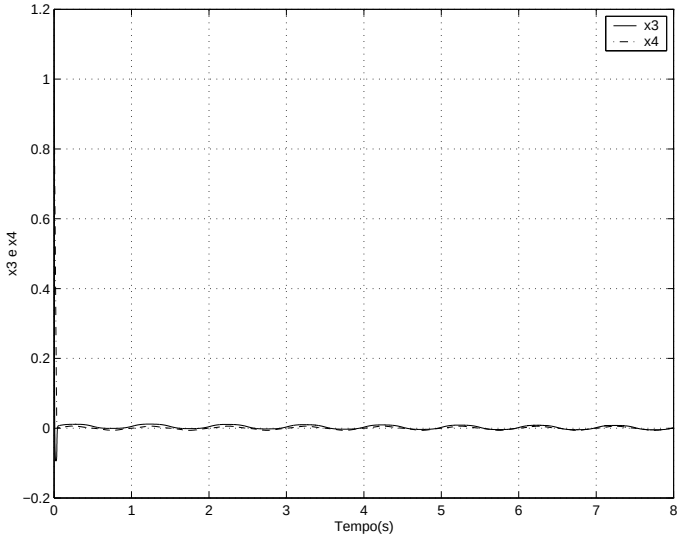

Figura 5.20: Estados da planta x_3 e x_4 com taxa de decaimento $\gamma = 0.19$ e $\delta = 0.8$.

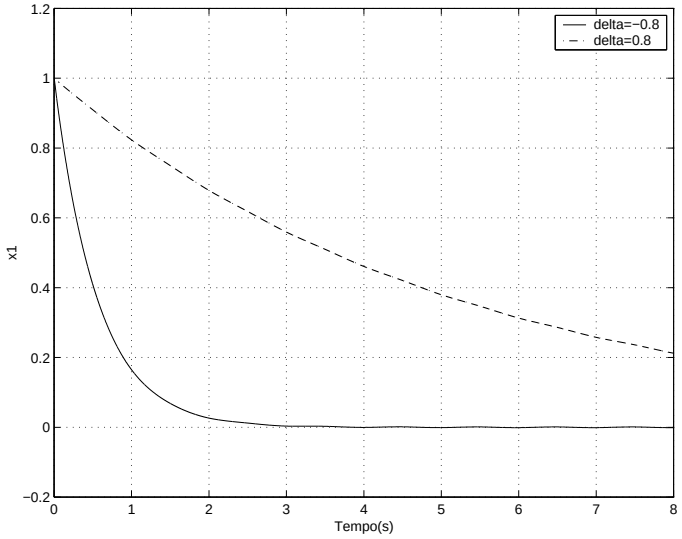

Figura 5.21: Comparação do estado x_1 da planta com $\gamma = 0.19$, $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$.

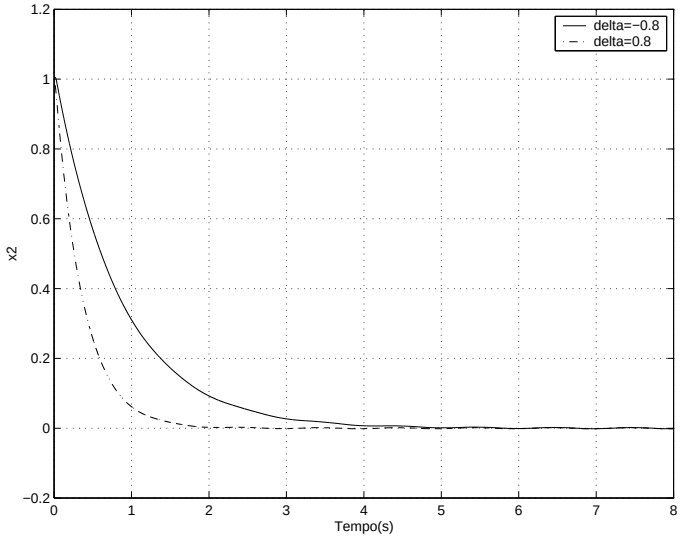

Figura 5.22: Comparação do estado x_2 da planta com $\gamma = 0.19$, $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$.

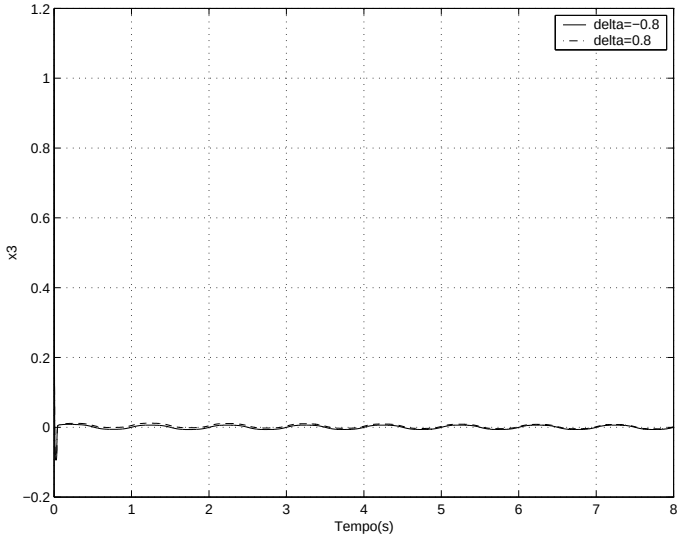

Figura 5.23: Comparação do estado x_3 da planta com $\gamma = 0.19$, $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$.

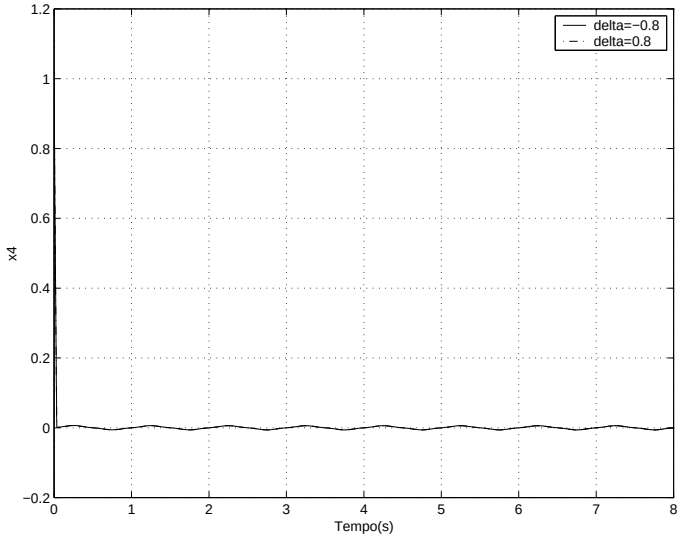

Figura 5.24: Comparação do estado x_4 da planta com $\gamma = 0.19$, $\delta = -0.8$ e $\delta = 0.8$.

5.3.2 Análise dos Resultados

Através das figuras anteriores, pode-se observar que o sistema é estável e robusto, obedecendo aos padrões especificados, mesmo quando se determina uma taxa de decaimento. Independentemente das incertezas na planta e da taxa de decaimento especificada, os estados x_3 e x_4 apresentam uma convergência praticamente instantânea para o ponto de equilíbrio. O estado x_2 também atinge rapidamente o equilíbrio, embora a convergência

não seja tão rápida quanto nos estados x_3 e x_4. Para $\delta = 0.8$, o estado x_2 converge mais rapidamente que para $\delta = -0.8$, mas obedece com folga à taxa de decaimento quando esta é especificada.

Já o estado x_1 atinge rapidamente o equilíbrio para $\delta = -0.8$, mas converge lentamente para $\delta = 0.8$. Isto se deve à existência de um zero de transmissão muito próximo da origem no segundo caso ($z_1 = -1 + \delta = -0.2$, para $\delta = 0.8$). Assim, não é possível especificar uma taxa de decaimento muito alta, que garanta a mesma robustez.

Observa-se, ainda, uma oscilação residual nas respostas transitória e em regime, que se devem à aproximação na função sinal, definida em (5.1).

Observação 10 *Seguindo a linha de raciocínio da Observação 8, o tempo de estabilização neste exemplo deve ser:*

$$t_s \leq \frac{4}{0.19} \approx 21s.$$

5.4 Exemplo com Número de Saídas Superior ao Número de Entradas

Nesta seção, foi apresentado um projeto de controle de uma aeronave, apresentada em [18]. O sistema de controle desta aeronave é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_o\tilde{x} + B_o(u + \xi), \\ y &= C_o\tilde{x}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

com $\tilde{x} \in \mathbb{R}^7, u \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}^4$, e as matrizes A_o, B_o e C_o dadas por:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1540 & -0.0042 & 1.5400 & 0 & -0.7440 & -0.0320 \\ 0 & 0.2490 & -1 & -5.2 & 0 & 0.3370 & -1.1200 \\ 0.0386 & -0.9960 & -0.0003 & -2.1170 & 0 & 0.0200 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

$$B_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & -0.1540 & -0.0042 & 1.5400 & 0 & -0.7440 & -0.0320 \\ 0 & 0.2490 & -1 & -5.2 & 0 & 0.3370 & -1.1200 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

As entradas representam, respectivamente, os comandos do leme e do aileron, em radianos, e as saídas representam, respectivamente, as acelerações de giro e guinada, em rad/s^2, o ângulo de aterramento, em radianos, e o estado do filtro de solapamento. As variáveis de estado representam, respectivamente, o ângulo de aterramento, taxa de guinada, taxa de giro, ângulo de derrapagem, estado do filtro de solapamento, e as deflexões do leme e do aileron.

Como o sistema não obedece à condição $B^T = (CB)^T C$, foi necessário utilizar uma transformação T, de modo que o sistema obedecesse a essa condição:

$$T = \begin{bmatrix} 0.5374 & 0.0035 & 0.0086 & -0.5084 & -0.0922 & 0 & 0 \\ 0.0048 & 0.5770 & -0.0019 & 0 & 0.0013 & 0 & 0 \\ 0.0168 & -0.0016 & 0.5891 & 0 & 0.1278 & 0 & 0 \\ 0.0371 & 0 & 0 & 0 & 0.0103 & 0 & 0 \\ -0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0.0197 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0107 & -0.0016 & -0.1120 & 0 & 0.0500 & 0 \\ 0 & -0.0063 & 0.0353 & 0.1587 & 0 & 0 & 0.0400 \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

Assim, o novo sistema de controle é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + \xi), \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{5.17}$$

e as matrizes A, B e C do novo sistema são dadas por:

$$A = TA_oT^{-1} = \begin{bmatrix} -2.0722 & 0.8164 & 0.9448 & 28.7680 & -12.1906 & -0.1970 & -0.2431 \\ 0 & 0.0011 & 0.0082 & -0.0092 & -0.3033 & -8.5990 & -0.4078 \\ 0 & 0.1108 & 0.0288 & -0.4797 & -25.8443 & 3.9941 & -16.4943 \\ 0 & 0.0091 & 0.0629 & -0.0727 & -2.4596 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0171 & -0.0010 & -0.0710 & -3.9572 & 0 & 0 \\ 3.9507 & 0.5407 & -0.1108 & -56.5657 & 48.6840 & -20.2148 & 0.0367 \\ -7.1595 & -0.5017 & 1.6018 & 101.6163 & -96.8626 & 0.3956 & -25.9840 \end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

$$B = TB_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

$$C = C_oT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14.8800 & -0.8000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7400 & -28.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 26.7334 & -13.9636 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8783 & 50.1954 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

5.4.1 Resultados

Dada a planta $\{A, B, C\}$, definida em (5.17), com as matrizes A, B e C dadas em (5.18)-(5.20), foi projetado um sistema de controle para garantir a estabilidade do sistema. Para isto, as matrizes K e F foram obtidas através da resolução das LMI (3.46), (3.47) e (3.48), e das equações (3.49) e (3.50).

O sistema $\{A, B, B^T\}$ tem cinco zeros de transmissão: $z_1 = -3.9997$, $z_2 = -2.0722$, $z_3 = -2.0624 \times 10^{-6}$, $z_4 = -1.5869 \times 10^{-4} + j\ 2.6878 \times 10^{-3} = z_5^*$. Como o sistema tem alguns zeros de transmissão com parte real muito próxima de zero, segundo o Teorema 12, não é possível especificar uma taxa de decaimento elevada.

As matrizes K e F obtidas neste caso foram as seguintes:

$$K = \begin{bmatrix} -16.0888 & -4.1976 & -0.0416 & -3.2843 \\ -11.5910 & -16.8815 & 0.0739 & -20.7007 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$F = 10^{-4}. \begin{bmatrix} -3.0544 & 1.3301 & 0 & 0 \\ 1.6183 & -1.5904 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 11 *Como o Matlab não conseguiu resolver as LMI acima, foi utilizado o LMI-Sol para a resolução dos problemas.*

O sinal de distúrbio adotado foi:

$$\xi = 0$$

e foi utilizada a lei de controle:

$$u = -\beta \text{sign}(FCx),$$

com $\beta = 10$ e a função sinal aproximada através da expressão (5.1), com $\epsilon = 10^{-3}$.

A seguir, são apresentados os resultados das simulações para este caso. O sistema parte do estado inicial $x(0) = [\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\ ]^T$.

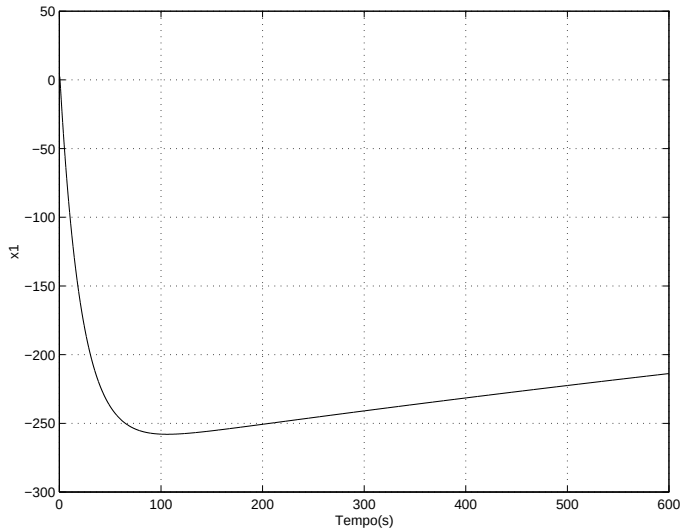

Figura 5.25: Estado x_1 da planta.

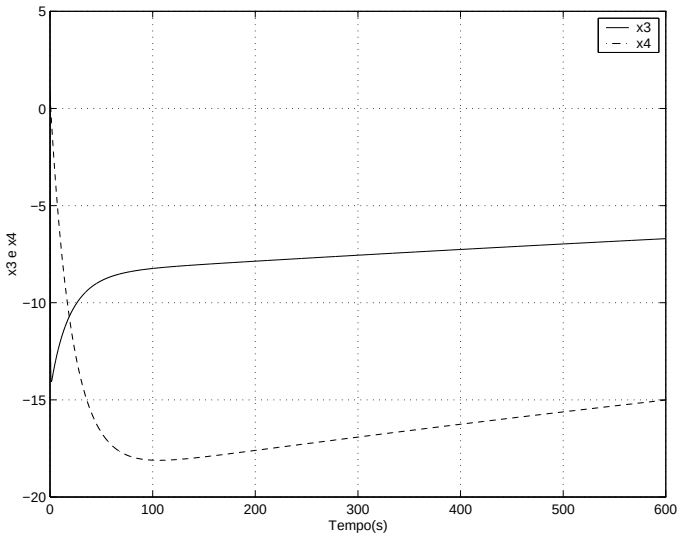

Figura 5.26: Estados x_3 e x_4 da planta.

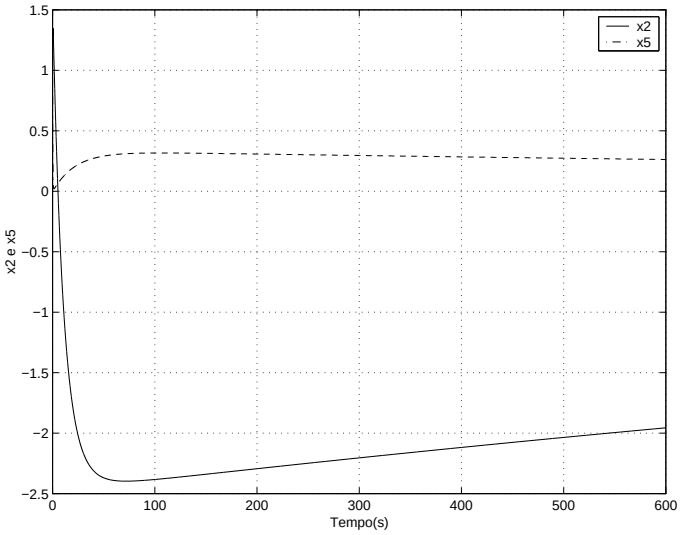

Figura 5.27: Estados x_2 e x_5 da planta.

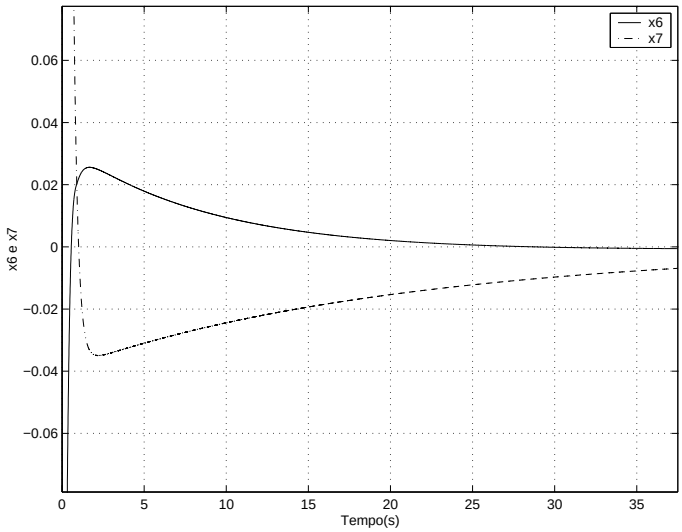

Figura 5.28: Estados x_6 e x_7 da planta (em detalhe).

5.4.2 Análise dos Resultados

Através das figuras anteriores, pode-se observar que o sistema, embora seja estável, apresenta uma resposta transitória extremamemte lenta, devido à presença de três zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ com parte real próxima de zero. Além disso, alguns estados, especialmente o estado x_1, assumem valores muito elevados durante o transitório. Estes fatos tornam o sistema de controle inviável para aplicações práticas. Assim, este exemplo indica que são necessários estudos adicionais para refinar o método de projeto.

5.5 Conclusão

Através dos exemplos apresentados, observa-se que os dois primeiros sistemas apresentam estabilidade, robustez e taxa de decaimento dentro dos padrões especificados. Isto significa que os sistemas, além de serem estáveis e robustos, atingem o equilíbrio com a taxa de decaimento desejada, desde que estejam dentro do limite imposto pelos zeros de transmissão do sistema.

No exemplo MIMO, o sistema possui um zero de transmissão que, dependendo das incertezas, pode ficar muito próximo da origem, o que impede uma convergência rápida de um dos estados da planta.

Já no exemplo da aeronave, o sistema apresenta uma resposta transitória muito lenta,

devido à presença de zeros de transmissão do sistema $\{A, B, B^T\}$ com parte real próxima de zero. Devido a esses zeros de transmissão, não é possível especificar uma resposta transitória mais rápida. Este fato sugere novos estudos para refinar o método proposto.

Capítulo 6

Conclusões Finais

6.1 Conclusões Gerais

Foi apresentado um novo método para o projeto de CEV, baseado em LMI. O método permite a especificação da taxa de decaimento, restrições nas saídas, rejeição de distúrbios, incertezas e termos não-lineares da planta casados e incertezas paramétricas nos parâmetros da planta não casadas.

A chave destes resultados foi uma nova formulação, em termos de LMI, de condições necessárias e suficientes para tornar um sistema ERP, com controladores estáticos. As constribuições desta dissertação neste assunto foram a obtenção de novos resultados para plantas incertas com o mesmo número de entradas e saídas e a proposta de novos métodos para plantas com o número de saídas maior que o número de entradas. Demonstrou-se que a taxa de decaimento máxima está relacionada com a parte real dos zeros de transmissão, havendo ou não modos deslizantes.

Inicialmente, são dadas duas aplicações técnicas no projeto de CEV, através do projeto de controladores para dois exemplos, para plantas com incertezas politópicas e com o mesmo número de entradas e saídas, considerando a estabilidade, a robustez e a taxa de decaimento. Os controladores apresentados são estáticos e compostos apenas por duas matrizes constantes, que foram facilmente obtidas, utilizando-se programas computacionais disponíveis.

Posteriormente, o método proposto foi aplicado no projeto de um controlador para uma aeronave, com duas entradas e quatro saídas. O transitório obtido foi muito lento, o que indica que o método proposto pode ser refinado.

6.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

Trabalhos futuros relacionados aos resultados obtidos nesta dissertação são:

(i) Generalização das condições para tornar uma planta controlada ERP, propostas nesta dissertação, para plantas com um número de saídas maior que o número de entradas;

(ii) Generalização das condições para tornar uma planta controlada ERP, baseadas em LMI, para plantas com um número de entradas superior ao número de saídas;

(iii) Projeto com observadores de ordem completa ou de ordem reduzida de CEV, baseados em LMI, considerando incertezas na planta;

(iv) Generalização das condições para tornar uma planta ERP, baseadas em LMI, para plantas $\{A, B, C\}$, com o mesmo número m de entradas e saídas e posto$(CB) < m$, utilizando as idéias apresentadas em [36];

(v) Generalização das condições para tornar uma planta ERP, baseadas em LMI, para plantas $\{A, B, C\}$, com m entradas e p saídas e posto$(CB) < min(m, p)$.

Referências Bibliográficas

[1] M. C. M. Teixeira, "Control of Uncertain Dynamical Systems Using Strictly Positive Real Systems," in *Lecture Notes in Control and Information Optimization, 144: Analysis and Optimization of Systems*, 1990. Berlin: Springer-Verlag, pp. 900–911.

[2] J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz, "A Tutorial on Linear and Bilinear Matrix Inequalities," *Journal of Process Control*, vol. 10, pp. 363–385, 2000.

[3] V. I. Utkin, "Variable Structure Systems with Sliding Modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212–222, 1977.

[4] K. K. D. Young, *Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Applications*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, 1993.

[5] V. I. Utkin, *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure*, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[6] A. S. I. Zinober, *Deterministic Control of Uncertain Systems*, London IEEE Control Engineering Series, Peter Peregrinus, 1990.

[7] B. S. Heck, S. V. Yallapragada, and M. K. H. Fan, "Numerical Methods to Design the Reaching Phase of Output Feedback Variable Structure Control," *Automatica*, vol. 31, no. 2, pp. 275–279, 1995.

[8] H. H. Choi, "A New Method for Variable Structure Control System Design: A Linear Matrix Inequality Approach," *Automatica*, vol. 33, no. 11, pp. 2089–2092, 1997.

[9] H. H. Choi, "An Explicit Formula of Sliding Surfaces for a Class of Uncertain Dynamic Systems with Mismatched Uncertainties," *Automatica*, vol. 34, no. 8, pp. 1015–1020, 1998.

[10] H. H. Choi, "On the Existence of Linear Sliding Surfaces for a Class Uncertain Dynamic Systems with Mismatched Uncertainties," *Automatica*, vol. 35, no. 10, pp. 1707–1715, 1999.

[11] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres, "$\mathcal{H}_\infty$ Design of Switching Surfaces for Sliding-Mode Control with Nonmatching Disturbances," *IEE Proceedings - Control Theory Applications*, vol. 145, no. 4, pp. 435–441, 1998.

[12] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres, "$\mathcal{H}_2$ Guaranteed Cost-Swiching Surface Design for Sliding Modes with Nonmatching Disturbances," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 44, no. 11, pp. 2214–2218, 1999.

[13] M. C. M. Teixeira, A. D. S. Lordelo, and E. Assunção, "On LMI Based Design of SPR Systems and Output Variable Structure Controllers," in *Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications - Proceedings of the 6th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, Sydney, Australia, 2000. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., pp. 199–208.

[14] M. C. M. Teixeira, "Condições para Tornar um Sistema Estritamente Real Positivo e Aplicação no Controle com EVMD Utilizando Somente as Saídas da Planta," in 8^o *CBA*, 1990, pp. 291–296.

[15] M. C. M. Teixeira, "Output Control with Dynamical Compensators and Strictly Positive Real Systems," *International Journal of Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1101–1105, 1993.

[16] S. H. Żak and S. Hui, "On Variable Structure Output Feedback Controllers for Uncertain Dynamic Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 10, pp. 1509–1512, 1993.

[17] C. Edwards, S. K. Spurgeon, and A. Akoachere, "A Sliding Mode Static Output Feedback Controller Based on Linear Matrix Inequalities Applied to an Aircraft System," *Transactions of the ASME*, vol. 122, pp. 656–662, 2000.

[18] C. Edwards, A. Akoachere, and S. K. Spurgeon, "Sliding-Mode Output Feedback Controller Design Using Linear Matrix Inequalities," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 46, no. 1, pp. 115–119, 2001.

[19] B. D. O. Anderson, "A Simplified Viewpoint of Hyperstability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, pp. 292–294, 1968.

[20] C. H. Huang, P. A. Ioannou, J. Maroulas, and M. G. Safanov, "Design of Strictly Positive Real Systems Using Constant Output Feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 3, pp. 569–573, 1999.

[21] A. D. S. Lordelo, *Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI*, Dissertação de mestrado, FEIS-UNESP, Ilha Solteira-SP, Brasil, 2000.

[22] J. Bernussou, J. C. Geromel, and M. C. Oliveira, "On Strict Positive Real Systems Design: Guaranteed Cost and Robustness Issues," *Systems & Control Letters*, vol. 36, pp. 135–141, 1999.

[23] R. A. DeCarlo, S. H. Żak, and G. P. Mathews, "Variable Structure Control of Multivariable Systems: a Tutorial," *Proceedings of IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212–232, 1988.

[24] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[25] B. L. Walcott and S. H. Żak, "Combined Observer-Controller Synthesis for Uncertain Dynamical Systems with Applications," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, no. 1, pp. 88–104, 1988.

[26] D. H. Owens, D. Pratzel-Wolters, and A. Ilchmann, "Positive-Real Structure and High-Gain Adaptive Stabilization," *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, vol. 4, no. 2, pp. 167–181, 1987.

[27] M. C. M. Teixeira, *Real Positive Systems and Adaptive Control*, Tese de doutorado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil, 1989.

[28] H. Kaufman, I. Bar-Kana, and K. Sobel, *Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications*, Communications and Control Engineering Series, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.

[29] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox - For Use with Matlab*, The Math Works, Inc., 1995.

[30] M. C. de Oliveira, D. P. Farias, and J. C. Geromel, *LMISol, User's Guide*, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil, 1997.

[31] The Math Works, Inc., *The Student Edition of Matlab - User's Guide*, 1995.

[32] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 3rd edition, 1996.

[33] L. Hsu, E. Kaszkurewicz, and A. Bhaya, "Matrix-Theoretic Conditions for the Realizability of Sliding Manifolds," in *14th World Congress of IFAC*, Beijing, China, 1999, pp. Paper No.E–2c–15–5.

[34] M. C. M. Teixeira, H. C. Pietrobom, and E. Assunção, "Novos Resultados sobre a Estabilidade e Controle de Sistemas Não-Lineares Utilizando Modelos Fuzzy e LMI," *Revista Controle & Automação*, vol. 11, no. 1, pp. 37–48, 2000.

[35] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.

[36] L. Hsu, A. Araújo, and R. R. Costa, "Analysis and Design of I/O Based Variable-Structure Adaptive-Control," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 4–21, 1994.

[37] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, Inc., 3rd edition, 1999.

Apêndice A

Zeros de Transmissão de um Sistema

Considere $A(s) = B(s)C(s)$, sendo $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$ polinômios de ordens compatíveis. Assim, $C(s)$ é um *divisor à direita* de $A(s)$ e $A(s)$ é um *múltiplo à esquerda* de $C(s)$. De maneira similar, $B(s)$ é um *divisor à esquerda* de $A(s)$ e $A(s)$ é um *múltiplo à direita* de $B(s)$. Considere, também, duas matrizes polinomiais $D(s)$ e $N(s)$, com o mesmo número de linhas e colunas, p. Então, uma matriz polinomial quadrada $R(s) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ é um *divisor comum à direita* de $D(s)$ e $N(s)$, de maneira que

$$D(s) = \hat{D}(s)R(s) \quad \text{e} \quad N(s) = \hat{N}(s)R(s).$$

Uma matriz polinomial quadrada $M(s)$ é *unimodular* se o seu determinante for diferente de zero e independente de s.

Uma matriz polinomial $R(s)$ é o *maior divisor comum à direita* de $D(s)$ e $N(s)$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $R(s)$ é um divisor à direita de $D(s)$ e $N(s)$;

(ii) $R(s)$ é um múltiplo à esquerda de todos os divisores comuns à direita de $D(s)$ e $N(s)$.

Se um maior divisor comum à direita é uma matriz unimodular, então $D(s)$ e $N(s)$ é dita *coprima à direita*.

Considere uma matriz $\hat{G}(s) = N(s)D(s)^{-1}$, $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{q\times p}$ racional *própria* ($\hat{G}(s)$ é própria $\Leftrightarrow$ grau $D(s) \geq$ grau $N(s) \Leftrightarrow \hat{G}(\infty) = 0$ ou $\hat{G}(\infty)$ é igual a uma constante diferente

de zero), sendo que $N(s)$ e $D(s)$ são coprimas à direita. Então, um número $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *zero de transmissão* de $\hat{G}(s)$, se o posto de $N(\lambda) < min(p, q)$ [37].

Os zeros de transmissão também podem ser definidos através da realização mínima de $\hat{G}(s)$. Considere $\{A, B, C, D\}$ qualquer realização mínima $n-$dimensional de uma matriz própria racional $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}^{q\times p}$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p},\ C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$. Então, os zeros de transmissão são os valores de $s = \lambda \in \mathbb{C}$, tais que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} < n + \min(p, q).$$

Apêndice B

Demonstração do Lema 3 [1]

Defina $B_\perp = [b_{\perp 1}, \ldots, b_{\perp n-m}] \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$ e considere que posto$(B_\perp) = n - m$, $B_\perp^T B = 0$ e $b_{\perp i}^T b_{\perp j} = 0$ para $i \neq j$, i e $j \in \{1, \ldots, n-m\}$. Então, C pode ser considerado igual a:

$$C = M_1 B^T + M_2 B_\perp^T, \tag{B.1}$$

pois, de posto$(CB) = m$, segue que posto$(B) = m$ e, assim, posto$([B \vdots B_\perp]) = n$. Note que, em (B.1), $M_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $CB = M_1 B^T B$. Então, da condição de que posto$(CB) = m$ segue que:

$$\text{posto}(M_1) = m. \tag{B.2}$$

Agora, considere, por hipótese, posto$(C) = p$ e, de (B.1),

$$C = \left[\begin{array}{c:c} M_1 & M_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B^T \\ \hdashline B_\perp^T \end{array} \right] \tag{B.3}$$

e, então, posto$([M_1 \vdots M_2]) = p$. Portanto, de (B.2) e $[M_1 \vdots M_2] \in \mathbb{R}^{p \times n}$, existem $p - m$ colunas de M_2, iguais por definição a $m_1, \ldots, m_{p-m}$, tal que

$$\text{posto} \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} M_1 & m_1 & \cdots & m_{p-m} \end{array} \right] = \text{posto} \left[\begin{array}{c:c} M_1 & M_4 \end{array} \right] = p. \tag{B.4}$$

Note que:

$$\left[\begin{array}{c:c} M_3 & M_4 \end{array} \right] = M_2 N_1 N_2 \ldots N_q = M_2 N, \tag{B.5}$$

sendo $N_i \in \mathbb{R}^{n-m \times n-m}$, $i = 1, \ldots, q$ não singulares e que permutam duas colunas de $M_2 N_0 \ldots N_{i-1}$, sendo $N_0 = I_{n-m}$.

É fácil mostrar que $N_i^{-1} = N_i$ e assim, de (B.5), $N^{-1} = N_q \dots N_1$. Então, de (B.3) e (B.5), segue que:

$$C = \left[\begin{array}{c:c} M_1 & M_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} I_m & 0 \\ 0 & NN^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B^T \\ B_\perp^T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c:c:c} M_1 & M_3 & M_4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B^T \\ N^{-1}B_\perp^T \end{array} \right]. \tag{B.6}$$

Note que $N^{-1}B_\perp^T$ tem as mesmas linhas de $B_\perp^T$, mas com algumas mudanças de posição. Portanto, de $B_\perp^T B = 0$ e $b_{\perp i}^T b_{\perp j} = 0,\ i \neq j$, defina:

$$N^{-1}B_\perp^T = \left[\begin{array}{c:c} B_{0\perp} & \tilde{B}_{0\perp} \end{array} \right]^T, \tag{B.7}$$

sendo $B_{0\perp}^T \in \mathbb{R}^{n-p \times n}$ e $\tilde{B}_{0\perp}^T \in \mathbb{R}^{p-m \times n}$. Então, $B_{0\perp}^T B = 0$, $\tilde{B}_{0\perp}^T B = 0$ e $B_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp} = 0$. Portanto, de (B.6) e (B.7), segue que:

$$C = M_1 B^T + M_3 B_{0\perp}^T + M_4 \tilde{B}_{0\perp}^T.$$

Sabendo-se que $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, temos, a partir de (B.4):

$$\text{posto}\left(\left[\begin{array}{c:c} M_1 & M_4 \end{array} \right] \right) = \text{posto}\left(\left[\begin{array}{c:c:c} M_1 & M_3 & M_4 \end{array} \right] \right) = p. \tag{B.8}$$

Agora, considere a matriz:

$$T = \left[\begin{array}{c} B_{0\perp}^T \\ C \end{array} \right]. \tag{B.9}$$

Então:

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} B_{0\perp}\left[B_{0\perp}^T B_{0\perp}\right]^{-1} + BK_1 + \tilde{B}_{0\perp}K_2 & C^T\left[CC^T\right]^{-1} + C_\perp^T K_3 \end{array} \right], \tag{B.10}$$

sendo:

$$C_\perp^T = B\left[B^T B\right]^{-1} K_4 + B_{0\perp}\left[B_{0\perp}^T B_{0\perp}\right]^{-1} + \tilde{B}_{0\perp}\left[\tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp}\right]^{-1} K_5, \tag{B.11}$$

$$M_3 + M_1 K_4 + M_4 K_5 = M_3 + M_4 \tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp} K_2 + M_1 B^T B K_1 = 0, \tag{B.12}$$

$$K_3 = -\tilde{B}_{0\perp}^T C\left(CC^T\right)^{-1}. \tag{B.13}$$

Note que $CC_\perp^T = 0$ e, de (B.8), existem K_1, K_2, K_4 e K_5 tais que (B.12) seja satisfeita, pois $\tilde{B}_{0\perp}^T \tilde{B}_{0\perp}$ e $B^T B$ são não-singulares. Portanto, de (3.42), (B.9) e (B.10), é fácil mostrar que:

$$TB = \left[\begin{array}{c} 0 \\ CB \end{array} \right] = B_N, \quad CT^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_p \end{array} \right] = C_N, \tag{B.14}$$

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = A_N, \quad Tx = \begin{bmatrix} e_1 \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \tag{B.15}$$

sendo $A_1 \in \mathbb{R}^{n-p \times n-p}$, $A_4 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{p \times n-p}$ e $A_2 \in \mathbb{R}^{n-p \times p}$. Então, o Lema 3 está provado.

Apêndice C

Restrição nos Vetores de Entrada e Saída da Planta

C.1 Restrição no Vetor de Entrada

Admita que um SLIT possua a seguinte representação em variáveis de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{C.1}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^p$ a saída do sistema ($p \geq m$), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema.

O problema da restrição no vetor de entrada u consiste em especificar LMI, de modo a assegurar que:

$$\max_{t \geq 0} ||u|| \leq \mu_o,$$

sendo μ_o uma especificação considerada no projeto do controlador. Para a lei de controle $u = Kx$, tem-se:

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

Considera-se, então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática $V(x) = x^T P x$, na qual P é uma matriz real simétrica definida positiva. A derivada desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por:

$$\dot{V}(x) \quad = \quad \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^T(A+BK)^TPx + x^TP(A+BK)x \\
&= x^T(A^TP + K^TB^TP)x + x^T(PA+PBK)x \\
&= x^T(PA + A^TP + PBK + K^TB^TP)x \\
&= x^TPP^{-1}(PA + A^TP + PBK + K^TB^TP)P^{-1}Px \\
&= x^TP(AP^{-1} + P^{-1}A^T + BKP^{-1} + P^{-1}K^TB^T)Px. \qquad \text{(C.2)}
\end{aligned}
$$

Definindo-se $X = P^{-1}$ e $F = KP^{-1} = KX$, tem-se:

$$\dot{V}(x) = x^TP(AX + XA^T + BF + F^TB^T)Px$$

Como $V(x)$ foi escolhida sendo definida positiva, para que se tenha estabilidade assintótica, é suficiente que $\dot{V}(x)$ seja definida negativa. Logo,

$$AX + XA^T + BF + F^TB^T < 0$$

Então, as condições para a estabilidade são a existência de X e F, tais que:

$$AX + XA^T + BF + F^TB^T < 0 \text{ e } X = X^T > 0, \qquad \text{(C.3)}$$

que são LMI em X e F.

Quando uma determinada condição inicial $x(0)$ é conhecida, é possível encontrar um limite superior para a norma euclidiana da entrada de controle u [35]. Considera-se, inicialmente, que $X = X^T > 0$ satisfaça:

$$x(0)^TX^{-1}x(0) < 1 \qquad \text{(C.4)}$$

Esta condição não restringe a solução de (C.3), pois limita apenas a norma de X^{-1} e (C.3) não impõe outras restrições à matriz X.

Segundo [2], a idéia básica do complemento de Schur diz que a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \qquad \text{(C.5)}$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x, é equivalente a:

$$R(x) > 0 \text{ e } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,$$

isto é, este conjunto de inequações não-lineares pode ser representado através da LMI (C.5).

O Apêndice D mostra a demonstração do complemento de Schur.

Logo, pelo complemento de Schur, (C.4) possui a seguinte equivalência:

$$1 - x(0)^T X^{-1} x(0) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0 \tag{C.6}$$

Como $K = FX^{-1}$ e definindo-se $z = X^{-\frac{1}{2}}x$, tem-se:

$$\begin{aligned} \max_{t\geq 0} \|u\|_2 &= \max_{t\geq 0} \|Kx\|_2 \\ &= \max_{t\geq 0} \|FX^{-1}x\|_2 \\ &= \max_{t\geq 0} \|FX^{-1}X^{\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}x\|_2 \\ &= \max_{t\geq 0} \|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2. \end{aligned} \tag{C.7}$$

De $(C.4)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \|z(0)\|_2^2 &= \|X^{-\frac{1}{2}}x(0)\|_2^2 \\ &= x(0)^T X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} x(0) \\ &= x(0)^T X^{-1} x(0) \leq 1. \end{aligned} \tag{C.8}$$

Como para $V(x) = x^T X^{-1} x$, $\dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$, então $(C.8)$ é satisfeita para todo x, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \|X^{-\frac{1}{2}}x\|_2^2 \\ &= x^T X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} x \\ &= x^T X^{-1} x \leq 1 \end{aligned} \tag{C.9}$$

De $(C.7)$ e $(C.8)$,

$$\begin{aligned} \max_{t\geq 0} \|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2 &= \max_{t\geq 0} \sqrt{z^T X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}} z} \\ &= \sqrt{\lambda_{max}(X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}}) z^T z} \\ &= \sqrt{\lambda_{max}(X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Assim,

$$\max_{t\geq 0} \|FX^{-\frac{1}{2}}z\|_2^2 < \mu_0^2 \Rightarrow \lambda_{max}(X^{-\frac{1}{2}} F^T F X^{-\frac{1}{2}}) < \mu_0^2.$$

Esta condição é equivalente a:

$$X^{-\frac{1}{2}}F^TFX^{-\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I < 0, \tag{C.11}$$

pois:

$$z^T(X^{-\frac{1}{2}}F^TFX^{-\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I)z \leq z^Tz(\lambda_{max}(X^{-\frac{1}{2}}F^TFX^{-\frac{1}{2}}) - \mu_0^2).$$

Multiplicando-se $(C.11)$, em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} & X^{\frac{1}{2}}(X^{-\frac{1}{2}}F^TFX^{-\frac{1}{2}})X^{\frac{1}{2}} - X^{\frac{1}{2}}\mu_o^2 I X^{\frac{1}{2}} < 0, \\ & F^TF - \mu_o X < 0, \\ & \mu_o^2 X - F^TF > 0, \\ & X - F^T(\mu_o^{-2}I)F > 0. \end{aligned} \tag{C.12}$$

Logo, pelo complemento de Schur, $(C.12)$ possui a seguinte equivalência:

$$-X^{-\frac{1}{2}}F^TFX^{-\frac{1}{2}} + \mu_o^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & F^T \\ F & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{C.13}$$

Portanto, as LMI $(C.6)$ e $(C.13)$ solucionam o problema.

C.2 Restrição no Vetor de Saída

O problema da restrição no vetor de saída y consiste em especificar LMI, de modo a assegurar que:

$$\max_{t\geq 0} ||y|| \leq \xi_o,$$

sendo ξ_o uma especificação considerada no projeto do controlador.

A análise a seguir é semelhante àquela efetuada no estudo da restrição no vetor de entrada. Para isso, considera-se, novamente, o SLIT descrito em (C.1). Como $x = X^{\frac{1}{2}}z$, tem-se:

$$\begin{aligned} \max_{t\geq 0} \|y\|_2^2 &= \max_{t\geq 0} \|Cx\|_2^2 \\ &= \max_{t\geq 0} \|CX^{\frac{1}{2}}z\|_2^2 \\ &= \max_{t\geq 0} \sqrt{z^TX^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}}z} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}}z^Tz)}$$
$$= \sqrt{\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}})}. \quad \text{(C.14)}$$

Portanto, analogamente ao desenvolvimento realizado anteriormente em $(C.11)$, $(C.12)$ e $(C.13)$, tem-se que

$$\max \|CX^{\frac{1}{2}}z\|_2^2 < \xi_0^2 \Rightarrow \lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}}) < \xi_0^2.$$

Esta condição é equivalente a

$$X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I < 0, \quad \text{(C.15)}$$

pois,

$$z^T(X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I)z \leq z^Tz(\lambda_{max}(X^{\frac{1}{2}}C^TC - \xi^2 X^{\frac{1}{2}}) - \xi_0^2).$$

Multiplicando-se $(C.15)$, em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se

$$XC^TCX - \xi_0^2 X < 0,$$
$$\xi_0^2 X - XC^TCX > 0,$$
$$X - XC^T(\xi_0^{-2} I)CX > 0. \quad \text{(C.16)}$$

Logo, pelo complemento de Schur, $(C.16)$ possui a seguinte equivalência:

$$-X^{\frac{1}{2}}C^TCX^{\frac{1}{2}} + \xi_0^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & XC^T \\ CX & \xi_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad \text{(C.17)}$$

Portanto, as LMI $(C.6)$ e $(C.17)$ solucionam o problema.

Apêndice D

Demonstração do Complemento de Schur [2]

A idéia básica do complemento de Schur diz que a LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0,$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x, é equivalente a:

$$R(x) > 0 \text{ e } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0.$$

($\Rightarrow$) Suponha que:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{D.1}$$

e defina:

$$F(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{D.2}$$

Então

$$F(u,v) > 0, \ \forall [u,v] \neq 0 \tag{D.3}$$

Considere, inicialmente, $u = 0$. Então:

$$F(0,v) = v^T R(x) v > 0, \ \forall v \neq 0 \Rightarrow R(x) > 0.$$

Adote, agora,

$$v = -R(x)^{-1}S(x)^T u, \text{ com } u \neq 0.$$

Então,

$$F(u,v) = u^T(Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T)u > 0,\ \forall u \neq 0$$

$$\Rightarrow Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0.$$

($\Leftarrow$) Suponha que:

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,\ R(x) > 0. \tag{D.4}$$

Fixando-se u e otimizando-se em termos de v $F(u,v)$ definido em (D.2), obtém-se:

$$\nabla_v F^T = 2R(x)v + 2S(x)^T u = 0 \tag{D.5}$$

Desde que $R(x) > 0$, de (D.5), segue que:

$$v = -R(x)^{-1}S(x)^T u. \tag{D.6}$$

Substituindo (D.6) em (D.2), então:

$$F(u) = u^T(Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T)u.$$

Desde que $(Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T) > 0$, o mínimo de $F(u)$ ocorre para $u = 0$, que também implica que $v = 0$. Então, o mínimo de $F(u,v)$ ocorre em $(0,0)$ e é igual a zero. Portanto, $F(u,v) > 0,\ \forall [u,v] \neq 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0.$$