



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Presidente Prudente

MARCELO APARECIDO FERNANDES JÚNIOR

**APLICAÇÃO DE DIFERENTES METODOLOGIAS DO *VALUE*
AT RISK (VAR) PARA MENSURAÇÃO DO RISCO DE
MERCADO DE UMA CARTEIRA TEÓRICA DE AÇÕES**

PRESIDENTE PRUDENTE

2021/2022

MARCELO APARECIDO FERNANDES JÚNIOR

APLICAÇÃO DE DIFERENTES METODOLOGIAS DO *VALUE AT RISK (VAR)* PARA MENSURAÇÃO DO RISCO DE MERCADO DE UMA CARTEIRA TEÓRICA DE AÇÕES

Relatório Final de Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística da FCT/Unesp para aproveitamento na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ivanildo Silvestre Bezerra.

PRESIDENTE PRUDENTE

2021/2022

F363a Fernandes Júnior, Marcelo Aparecido
Aplicação de diferentes metodologias do Value at Risk (VaR) para mensuração do risco de mercado de uma carteira teórica de ações / Marcelo Aparecido Fernandes Júnior. -- Presidente Prudente, 2022
63 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Estatística) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Manoel Ivanildo Silvestre Bezerra

1. Estatística. 2. Gestão do risco de mercado. 3. Value at Risk. I.
Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

MARCELO APARECIDO FERNANDES JÚNIOR

APLICAÇÃO DE DIFERENTES METODOLOGIAS DO *VALUE AT RISK (VAR)* PARA MENSURAÇÃO DO RISCO DE MERCADO DE UMA CARTEIRA TEÓRICA DE AÇÕES

Relatório de Final de Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito para obtenção de créditos na disciplina Trabalho de Conclusão do curso de graduação em Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:

Prof. Dr. Manoel Ivanildo Silvestre Bezerra
Departamento de Estatística



Prof. Dr. Fernando Antonio Moala
Departamento de Estatística



Prof. Dr. Mário Hissamitsu Tarumoto
Departamento de Estatística

Presidente Prudente, 17 de março de 2022.

Este trabalho é dedicado ao meu grande amigo e excepcional felino, Carlos Fernandes do Prado, por encher meus dias de alegria desde que entrou na minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para minha formação e realização deste trabalho:

Ao Prof. Dr. Manoel Ivanildo Silvestre Bezerra, pela orientação, paciência, tempo dedicado às nossas reuniões e apoio durante todo o processo de construção deste TCC.

Aos meus pais Adriana Ferreira Teixeira Fernandes e Marcelo Aparecido Fernandes, por todo esforço empreendido na minha educação, apoio, suporte e incentivo. Sem eles nada disso seria possível.

A Maria Eduarda do Prado e Queiroz, por trilhar comigo a mesma trajetória de graduação, com noites em claro estudando e aturar todas as explicações teóricas.

Ao meu avô José Antônio Fernandes (*in memoriam*), por me ensinar valores para toda vida, sendo meu maior exemplo de caráter, honestidade e generosidade.

A minha avó Terezinha de Fátima Prieto, por todo o apoio e pela grande contribuição na minha criação e desenvolvimento.

Ao felino Carlos Fernandes do Prado, por contribuir com a minha frequência nas aulas matutinas, exigindo que seu pote fosse reabastecido (mesmo que estivesse cheio) ou quando decidia transformar a cama num parque de diversões. Obrigado por ter tornado a minha vida mais feliz desde o primeiro dia em que te conheci, sua simples presença é capaz de amenizar qualquer tristeza ou angústia, facilitando o processo de construção deste TCC.

RESUMO

O *Value at Risk* é uma medida de risco amplamente utilizada por instituições financeiras para auxiliar na alocação do requerimento mínimo de capital. Neste trabalho foi abordada a regulamentação da gestão de riscos para instituições financeiras e os seguintes métodos de estimação do *VaR*: Simulação Histórica (*HS*), Média Móvel Exponencialmente Ponderada (*EWMA*), Autorregressivo de Heteroscedasticidade Condicional Generalizado (*GARCH Normal e Skew-t-GARCH*) e Teoria dos Valores Extremos (*EVT*). Para análise foi construída uma carteira teórica contendo as ações do Itaú, Bradesco, Petrobrás e Vale, das quais foram observadas as séries temporais de um período referente a pandemia da COVID-19 (janeiro de 2020 até setembro de 2021), que foram utilizadas para prever as perdas máximas potenciais com 99% de confiança para os meses de agosto e setembro de 2021, segundo cada um dos métodos. Os modelos foram aprovados pelo *Backtesting* segundo critério de Kupiec, com exceção de dois modelos *EWMA* univariados que foram reprovados e da Teoria dos valores extremos que não foi implementada devido suas restrições. Os modelos apresentaram resultados satisfatórios mesmo em um período de alta volatilidade.

Palavras-chave: Valor em Risco. Risco de Mercado. Carteira de ações. Simulação Histórica. Suavização Exponencial. Volatilidade Condicional. Teoria dos Valores Extremos.

ABSTRACT

Value at Risk is a risk measure widely used by financial institutions to assist in the allocation of the minimum capital requirement. This study presents the regulation of risk management for financial institutions and the following VaR estimation methods: Historical Simulation – HS, Exponentially Weighted Moving Average – EWMA, Autoregressive Conditional Heterocedasticity – GARCH (GARCH Normal and Skew-t-GARCH) and Extreme Value Theory – EVT. For the analysis, a theoretical portfolio was built containing the shares of Itaú, Bradesco, Petrobras and Vale, from which the time series of a period referring to the COVID-19 pandemic (january 2020 to september 2021) was observed, which served to predict the maximum potential losses with 99% confidence for the month of august and semptember 2021, according to each of the methods. The models were approved by Backtesting according to Kupiec's criterion, with the exception of two univariate EWMA models that were disapproved and the Theory of Extreme Values, which was not implemented due to its restrictions. The models showed satisfactory results even in a period of high volatility.

Keywords: Value at Risk. Market risk. Stock portfolio, Historical Simulation, Exponentially Weighted Moving Average. GARCH. Extreme Value Theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Value at Risk	21
Figura 2 - Janela de estimação	33
Figura 3 - Séries temporais dos log-retornos dos ativos (janeiro 2020 a setembro 2021)	37
Figura 4 - Janelas de estimação de tamanho 300.....	38
Figura 5 - Séries temporais dos log-retornos dos ativos (maio de 2020 a setembro de 2021)	39
Figura 6 – Histogramas dos log-retornos dos ativos	40
Figura 7 - Predições de VaR HS para os log-retornos dos ativos	42
Figura 8 - Predições de VaR EWMA para os log-retornos dos ativos	44
Figura 9 - Predições de VaR GARCH Normal (1,1) para os log-retornos dos ativos	45
Figura 10 - Predições de VaR Skew-t-GARCH (1,1) para os log-retornos dos ativos	46
Figura 11 - Predições de VaR HS para os log-retornos da carteira teórica (agosto a setembro - 2022)	48
Figura 12 - Predições de VaR EWMA para os log-retornos da carteira	49
Figura 13 - VaR das 4 metodologias univariadas para os log-retornos de cada um dos ativos	51
Figura 14 - VaR HS e EWMA para os log-retornos da carteira	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Carteira teórica.....	35
Tabela 2 - Estatísticas descritivas dos log-retornos dos ativos	39
Tabela 3 - Coeficientes de assimetria para as distribuições dos log-retornos dos ativos	40

LISTA DE SÍMBOLOS

h : horizonte temporal (ou horizonte de risco).

α : nível de significância.

$P_{t,i}$: Preço do ativo i no tempo t , ($t = 1, \dots, n$) e ($i = 1, \dots, C$).

$P_{t-1,i}$: Preço do ativo i no tempo $t - 1$ (tempo anterior a t).

C : Número de ativos da carteira.

$y_{t,i}$: Logaritmo do retorno (log-retorno) do ativo i no tempo t .

Y_i : Vetor de logaritmos de retornos do ativo i .

Y : Matriz dos logaritmos de retornos dos ativos da carteira.

Q : Função de perdas e lucros.

σ_t^2 : Volatilidade de um ativo no tempo t .

σ_t : Desvio padrão de um ativo no tempo t .

$F_y(*)$: Função distribuição acumulada dos log-retornos padronizados (y_t/σ_t).

$F_y^{-1}(\alpha)$: Função distribuição acumulada inversa dos log-retornos padronizados (y_t/σ_t).

$\gamma(\alpha)$: Valor da variável associado a uma probabilidade acumulada α .

Σ_t : Matriz de covariâncias dos ativos da carteira para o tempo t .

Σ_{t-1} : Matriz de covariâncias dos ativos da carteira para o tempo anterior a t .

$\hat{\Sigma}_t$: Matriz de covariâncias estimadas dos ativos da carteira para o tempo t .

$\hat{\Sigma}_{t-1}$: Matriz de covariâncias estimadas dos ativos da carteira para o tempo anterior a t .

$\sigma_{t,carteira}^2$: Volatilidade da carteira no tempo t .

$\sigma_{t,carteira}$: Desvio padrão da carteira no tempo t .

w : Vetor de pesos dos ativos da carteira.

$VaR(\alpha)$: *Value at Risk* de um ativo ao nível de significância α , apresentado na forma de valor de perda monetária do ativo (valor positivo).

$VaRlnr(\alpha)$: *Value at Risk* de um ativo ao nível de significância α , apresentado na forma de logaritmo de retorno (valor negativo).

$VaR_{carteira}(\alpha)$: *Value at Risk* de uma carteira ao nível de significância α , apresentado na forma de valor de perda monetária da carteira (valor positivo).

$VaRlnr_{carteira}(\alpha)$: *Value at Risk* de uma carteira ao nível de significância α , apresentado na forma de logaritmo de retorno (valor negativo).

Qt_i : Quantidade teórica do ativo i .

v : Valor da carteira.

W_E : Tamanho das janelas de estimativa.

W_T : Janela de teste.

$y_{Carteira}$: Vetor de retornos da carteira.

x : número de falhas do VaR .

v_t : Falha ou não falha do VaR no tempo t .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 GESTÃO DE RISCO	16
2.1 RISCO DE MERCADO	16
2.2 REGULAMENTAÇÃO DA GESTÃO DE RISCOS FINANCEIROS	16
3 VALUE AT RISK.....	18
3.1 LIMITAÇÕES DO VAR	18
3.2 CÁLCULO DOS RETORNOS	19
3.3 FORMALIZAÇÃO DO VAR.....	19
3.4 ESCOLHA DO HORIZONTE TEMPORAL E NÍVEL DE CONFIANÇA	21
3.5 CÁLCULO DO VAR.....	22
3.5.1 VaR paramétrico.....	22
3.6 VAR DE UMA CARTEIRA.....	23
3.7 MODELOS DE ESTIMAÇÃO DO VALUE AT RISK.....	24
3.7.1 Média Móvel Exponencialmente Ponderada (EWMA)	24
3.7.2 Autorregressivo de heteroscedasticidade Condicional Generalizado (GARCH)	25
3.7.3 Simulação Histórica	28
3.7.4 Teoria dos Valores Extremos.....	29
3.8 VALIDAÇÃO DE MODELOS DE VAR.....	32
3.8.1 Backtesting	33
3.8.2 Teste de Kupiec.....	34
4 APLICAÇÃO	35
4.1 CARTEIRA	35
4.2 HORIZONTE TEMPORAL E NÍVEL DE CONFIANÇA	35
4.3 DESCRIÇÃO DOS DADOS.....	36
4.4 PERÍODO DE ANÁLISE E JANELA DE ESTIMAÇÃO	36
4.5 ANÁLISE EXPLORATÓRIA DOS DADOS	38
4.6 APLICAÇÃO UNIVARIADA	41
4.6.1 Simulação Histórica	41
4.6.2 EWMA	43
4.6.3 GARCH	44
4.7 APLICAÇÃO MULTIVARIADA	47
4.7.1 Simulação Histórica	47
4.7.2 EWMA	48

4.8 BACKTESTING	50
4.9 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS.....	51
4.9.1 Comparação das análises univariadas	51
4.9.2 Comparação das análises multivariadas	52
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERÊNCIAS.....	56
BIBLIOGRAFIAS	58
GLOSSÁRIO.....	59
APÊNDICES	61

1 INTRODUÇÃO

O risco é a probabilidade de ocorrência de um evento geralmente indesejável, e está presente nas mais diversas situações do cotidiano. Neste trabalho foi abordado o Risco de Mercado, que se trata da variação (volatilidade) no valor dos ativos financeiros que possam gerar perdas em uma carteira de investimentos (ou portfólio), devido a variação de parâmetros de mercado, como preços de ações, taxas de câmbio, taxas de juros e preços das commodities.

Segundo Jorion (2003), negociações financeiras estão em geral atreladas a um determinado risco de mercado, mesmo que alguns escolham incorrer os riscos de forma passiva, instituições que movimentam grandes montantes, estão interessadas na mensuração e monitoramento desses riscos, para se expor a eles de forma estratégica. Como no caso das instituições financeiras, a medição do risco ao qual o portfólio dos investidores está sujeito é de seu interesse e também de seus reguladores.

De acordo com o Comitê de Supervisão Bancária de Basileia (COMMITTEE, 2013), a medida padronizada definida para a mensuração do risco de mercado em instituições financeiras é o *Value at Risk (VaR)*, sendo sua implementação determinística para o requerimento mínimo de capital. Apesar de não ser imposto um modelo específico de *VaR*, com o intuito de que cada instituição calibre seu modelo de acordo com suas operações, necessidades e carteiras, é necessária aferição da acurácia dos modelos utilizados e o aperfeiçoamento desses.

Segundo Jorion (2003) o *VaR*, representa em um único valor, uma medida de perda máxima potencial de uma carteira de investimentos ou ativo, em um horizonte de tempo definido com determinado nível de confiança. Por exemplo, dizer que o *VaR* de uma determinada carteira para um dia com 95% de confiança, é de R\$100.000,00, significa que a probabilidade da carteira sofrer uma perda maior que R\$100.000,00 é de apenas 5%.

Este trabalho traz 4 diferentes metodologias de cálculo do *VaR*: Simulação Histórica (*Historical Simulation - HS*), Média Móvel Exponencialmente Ponderada (*Exponentially Weighted Moving Average - EWMA*), Autorregressivo de heteroscedasticidade Condicional Generalizado (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity - GARCH*) e Teoria dos Valores Extremos (*Extreme Value Theory - EVT*). Metodologias diferentes, conseqüentemente trazem resultados

distintos, assim os riscos potenciais estimados pelos modelos podem ser diferentes dos riscos reais a que a instituição está exposta, levando a adoção de diferentes decisões para um mesmo risco. Diante disso, através do *backtesting* (processo de testagem de modelos sistemáticos) foi avaliado se os modelos são capazes de fornecer boas previsões, e quais modelos produziram as estimativas de perda que melhor se adapte a curva de perdas reais.

Afim de construir uma carteira teórica representativa do mercado acionário brasileiro, foram selecionadas as quatro ações que possuem maior participação no Ibovespa (IBOV), que é o principal índice de referência do mercado acionário brasileiro, que reúne em uma carteira teórica cerca de 81 ativos que movimentam os maiores volumes de negociação, algo em torno de 80% do total diário, sendo reavaliada a cada 4 meses.

Foi escolhido para a análise um período referente a pandemia do coronavírus da síndrome respiratória aguda grave 2 (SARS-CoV-2), causador da doença respiratória aguda denominada Covid-19. Em 11 de março de 2020, a Organização Mundial de Saúde (OMS) declarou oficialmente o coronavírus como uma pandemia, e a partir daí começaram a surgir incertezas sobre as consequências econômicas no Brasil e no mundo. Com as orientações de isolamento social para conter a disseminação do vírus, diversos setores foram afetados, principalmente aqueles que envolviam contato humano, o que também alterou os hábitos dos consumidores. Com a vacinação iniciada apenas em janeiro de 2021, houve um agravamento da segunda onda e o surgimento de novas cepas, o que juntamente com a disputa política interna do país e a pressão sob setores que tiveram seus negócios paralisados durante a pandemia (levando a questionamentos estruturais sobre as empresas, podendo refletir no preço das ações), criou-se um cenário de incerteza em relação ao crescimento e as posições futuras do mercado econômico.

Neste contexto, sabendo que decisões financeiras são sistematicamente embasadas em posicionamentos futuros, torna-se imprescindível a utilização de métodos de estimação do *VaR* que se ajuste a esse cenário, que foi o foco do estudo.

2 GESTÃO DE RISCO

Duarte (1996), define três conceitos importantes para o mercado financeiro: retorno, incerteza e risco. O retorno é a valorização (ou desvalorização) do preço das ações ao fim de um horizonte de investimento. Existem incertezas associadas ao retorno que será obtido, a quantificação dessa incerteza em termos de probabilidade é definida como risco.

Segundo Jorion (2003), o risco financeiro pode ser dividido em 5 grandes grupos: risco de crédito, risco legal, risco de liquidez, risco de mercado e risco operacional. Neste trabalho foi abordado o risco de mercado.

2.1 Risco de Mercado

Se dá pela variação no valor dos ativos financeiros que possam gerar perdas em uma carteira, devido a variação de parâmetros de mercado, como preços de ações, taxas de câmbio, taxas de juros, preços das commodities e entre outros .

De acordo com Markowitz (1952), esse risco pode ser dividido em sistêmico e não sistêmico. O primeiro afeta a economia de forma geral, como inflações, taxas de juros, taxas de câmbio e entre outros, já o segundo é aquele que afeta apenas determinado setor ou empresa, podendo ser minimizados através da diversificação da carteira.

Segundo Danielsson (2011), na prática a tarefa de prever riscos financeiros não é algo trivial, devido ao fato de não poder ser medido diretamente, mas inferido através do comportamento dos preços de mercado observados, o que conseqüentemente requer modelagem estatística e inevitavelmente será necessário fazer algumas suposições dependendo do método utilizado.

2.2 Regulamentação da gestão de riscos financeiros

Fundado em 1974 na cidade de Basileia (Suíça), o Comitê de Supervisão Bancária de Basileia (*Basel Committee on Banking Supervision – BCBS*) é uma organização que congrega autoridades de supervisão bancária visando dar segurança e fortalecer a solidez do sistema bancário mundial. Os Acordos de Basileia são tratos

internacionais que estabelecem boas práticas e exigências mínimas para o funcionamento de uma instituição financeira.

- **Acordo de Basiléia I:** Firmado em 1988 o acordo inicial possuía três principais pilares: Índice mínimo de capital, Capital Regulatório e Avaliação de risco. Um banco deveria manter em caixa pelo menos 8% do valor dos seus empréstimos, manter uma quantia de capital regulatório depositado em caixa para cobrir possíveis perdas e avaliar o risco das suas operações de empréstimo e financiamento. Em 1995 foi anexada uma emenda, que passou a considerar também a avaliação do risco de mercado para o requerimento mínimo de capital (COMMITTEE, 2004).
- **Acordo de Basiléia II:** Publicado em 2004, teve como objetivo fortalecer os pilares do primeiro acordo. Define a técnica *Value at Risk* como medida padronizada para o risco de mercado. Não foi imposto um modelo específico de *VaR*, com o intuito de que cada instituição calibre seu modelo de acordo com suas operações, necessidades e carteiras. Recomenda o uso de nível de confiança de 99%, e de uma série histórica com período de pelo menos 1 ano (COMMITTEE, 2004).
- **Acordo de Basiléia III:** Apresentado em 2010 como resposta à crise financeira de 2008, aumentou a regulação sobre o sistema financeiro, impondo limites mais rígidos. As medidas mais importantes foram a ampliação do índice mínimo de capital para 10,5%, e a exigência de uma reserva entre 0% e 2,5% sobre o capital emprestado da instituição, variando de acordo com a situação financeira de cada país. Em relação ao *VaR*, foi definida não somente a necessidade do cálculo dos riscos, como também a aferição da acurácia dos modelos utilizados e a manutenção e aperfeiçoamento desses. Quanto as séries históricas, ficou definido que devem conter pelo menos 250 dias úteis (COMMITTEE, 2013).

3 VALUE AT RISK

Segundo Jorion (2003), o *VaR* representa em um único valor, uma medida de perda máxima potencial de uma carteira de investimentos ou ativo, em um horizonte de tempo definido com determinado nível de confiança.

Danielsson (2011) define o *VaR* como a perda em uma carteira de investimentos, de forma que haja uma probabilidade α de ocorrerem perdas iguais ou superiores ao *VaR* em um determinado período de negociação (horizonte temporal) e uma probabilidade $(1 - \alpha)$ das perdas serem inferiores ao *VaR*. O grau de aversão ao risco¹ da instituição é denominado nível de significância α e o nível de confiança será denotado $(1 - \alpha)\%$.

De forma prática, o *VaR* se trata da pior expectativa de perda, durante um período com um nível de confiança. Hull (2002), apresenta um exemplo que enfatiza a simplicidade da apresentação do resultado na fala de um fictício gerente de uma instituição: “Nós estamos X por cento certos que não iremos perder mais que Y dólares nos próximos N dias”.

3.1 Limitações do *VaR*

De acordo com Jorion (2003), o *VaR* deve ser considerado um procedimento necessário, mas não suficiente, para o controle de riscos. A principal crítica, se dá pelo fato de não se ter nenhuma informação sobre a perda esperada quando ela ultrapassar o valor o *VaR*, podendo ela ser de insignificamente maior até uma perda substancialmente maior, o que poderia causar problemas à instituição. Dessa forma, recomenda-se a utilização do método *Expected Shortfall – ES* ou Perda Média Esperada (também conhecido como *Conditional Value at Risk – CVaR*), proposto por Rockfellar e Uryasev (2000), como complemento do *VaR*, sendo ele capaz de fornecer uma esperança de perda quando essa ultrapassar o valor do *VaR*, bem como um intervalo de confiança (o que não é possível no caso do *VaR*).

Segundo Alexander (2009), outra limitação do *VaR* está no fato de o método apresentar uma estimativa baseada em condições normais de mercado, ou seja, o *VaR* não será capaz de prever eventos catastróficos atípicos de grandes proporções

¹ Grau de aversão ao risco é a preferência da instituição em assumir mais ou menos riscos.

que poderiam levar a perdas consideravelmente maiores. Para compensar essa deficiência recomenda-se a utilização do *Stress Test*, que é uma ferramenta capaz de avaliar a vulnerabilidade da carteira ou ativo a mudanças bruscas, por meio de simulações em diferentes cenários com as variáveis que poderiam impactar no preço dos ativos.

3.2 Cálculo dos retornos

Jorion (2003), recomenda o uso do logaritmo dos retornos (log-retornos) y_t ao invés dos preços do ativo P_t , devido ao fato de as séries de log-retornos possuírem propriedades estatísticas atrativas, como garantir a estacionariedade² da série e serem mais fáceis de manipular. Os logaritmos dos retornos serão calculados através da seguinte equação:

$$y_{t,i} = \ln\left(\frac{P_{t,i}}{P_{t-1,i}}\right) = \ln(P_{t,i}) - \ln(P_{t-1,i}) \quad (1)$$

onde $P_{t,i}$ é o preço do ativo i no tempo t e $P_{t-1,i}$ o preço do ativo i no tempo $t-1$ (tempo anterior a t).

Considerando uma carteira de C ativos, com n observações cada ($t = 1, \dots, n$), a matriz dos log-retornos é dada por $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_C\}$, onde $Y_i = \{y_{t,i}\}_{t=1}^n = \{y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}\}$ são os vetores dos log-retornos de cada ativo i , com ($i = 1, \dots, C$).

3.3 Formalização do VaR

A noção de risco de uma carteira, está associada ao fato de os retornos futuros não serem conhecidos, existindo um conjunto de possíveis retornos, cada um com uma probabilidade de ocorrência, que irão determinar o potencial de perda da carteira. Desta forma, para calcular a medida de risco da carteira, deve-se obter a função distribuição acumulada (F.D.A.) dos retornos que fornece os valores somados das

² Segundo Moretin e Tolo (2006), uma suposição comum em muitas técnicas de séries temporais, é de que os dados sejam estacionários, isto é, se desenvolvam em torno de uma média constante ao longo do tempo sem tendências lineares. A estacionariedade pode ser verificada por meio do teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF) proposto por Dickey e Fuller (1979), ou o teste Phillips-Perron (PP), proposto por Phillips e Perron (1988).

probabilidades até determinado ponto. Danielsson (2011) define, de forma genérica o *VaR* de uma carteira como a solução da equação:

$$P(Q \leq -\text{VaR}(\alpha)) = \alpha, \quad Q = P_t - P_{t-1} \quad (2)$$

ou

$$\alpha = \int_{-\infty}^{-\text{VaR}} f_q(x) dx \quad (3)$$

onde Q é a variação no valor da carteira (perdas ou lucros – P/L).

Danielsson (2011) define o *VaR* utilizando a função de perdas e lucros Q , segundo o autor pode-se definir o *VaR* para os logaritmos dos retornos escrevendo-os na forma de retorno linear:

$$y_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

$$e^{y_t} = P_t/P_{t-1}$$

$$P_{t-1} * e^{y_t} = P_t$$

Então:

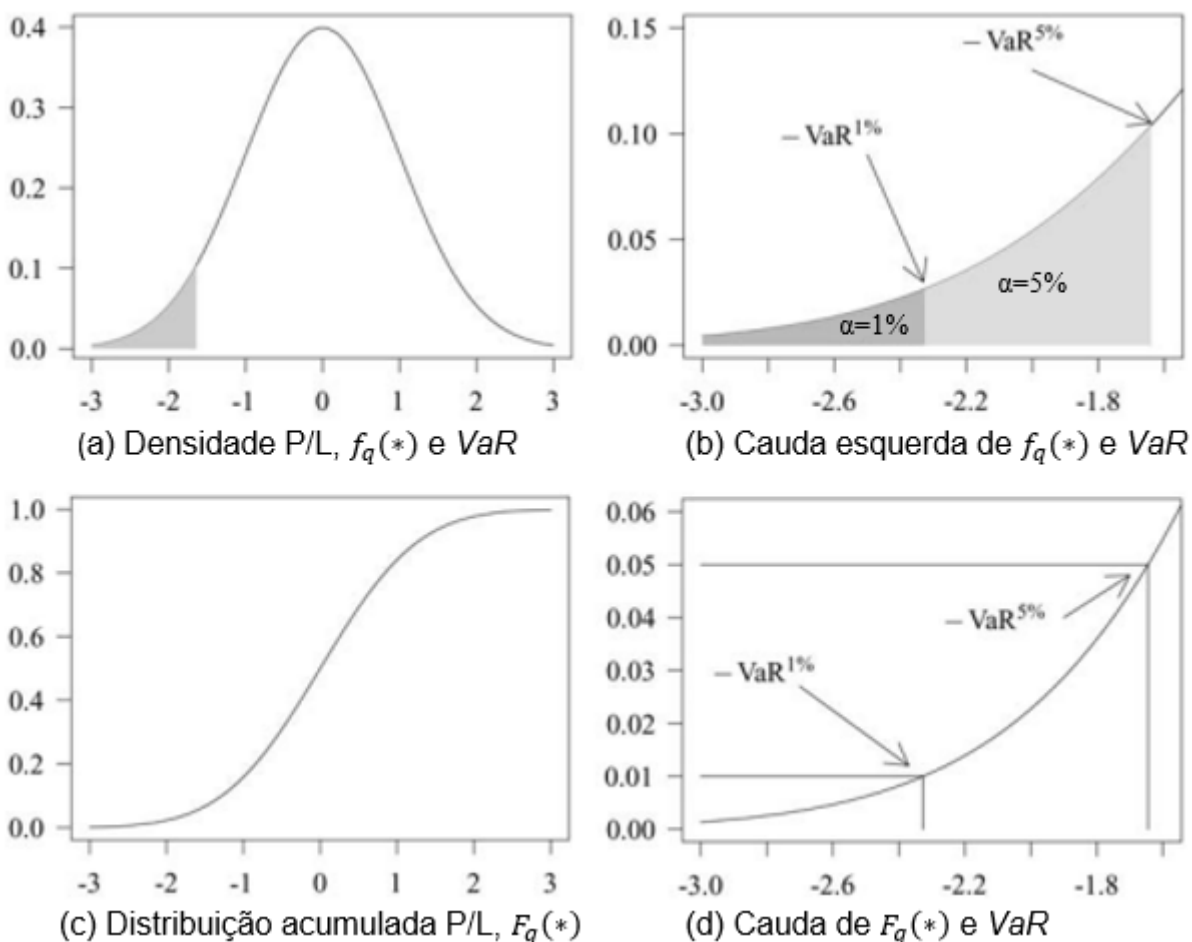
$$P(P_{t-1} * e^{y_t} - P_{t-1} \leq -\text{VaR}(\alpha)) = \alpha$$

$$P(P_{t-1}(e^{y_t} - 1) \leq -\text{VaR}(\alpha)) = \alpha \quad (4)$$

Para a execução do cálculo do *VaR* (no caso paramétrico), será necessária uma estimativa da volatilidade dos log-retornos dos ativos no horizonte de tempo de análise.

A figura 1 ilustra como o *VaR* é definido. O painel (a) mostra toda a densidade de lucros e perdas (P/L), o painel (b) é um *zoom* na cauda à esquerda, onde as áreas sombreadas representam as probabilidades de ocorrência α . O painel (c) mostra a distribuição acumulada dos lucros e perdas, e finalmente o painel (d) é um *zoom* na cauda à esquerda da distribuição acumulada.

Figura 1 – Value at Risk



Fonte: Danielsson (2011)

3.4 Escolha do horizonte temporal e nível de confiança

De acordo com Alexander (2009), o VaR possui dois parâmetros básicos, o nível de significância denotado por α (ou nível de confiança $(1 - \alpha)\%$) e o horizonte temporal (ou horizonte de risco), denotado por h , que se trata do período de tempo no qual o VaR é medido.

Alexander (2009) salienta que normalmente o nível de confiança é definido por um órgão regulador externo, como é o caso das instituições bancárias que utilizam modelos de VaR para avaliar a exigência de capital para o risco de mercado, que segundo o Acordo de Basiléia II devem utilizar um nível de confiança de 99%. Na ausência de reguladores externos, o nível de confiança deve ser escolhido de acordo com o grau de aversão ao risco do portador da carteira. Um nível de confiança alto, representa grande aversão ao risco, e exigirá uma maior reserva de capital.

Segundo Dowd (1998 apud Zappa, 2013), o horizonte temporal deve ser escolhido com base na natureza da carteira, devendo levar em consideração os seguintes aspectos:

- Liquidez dos ativos e o mercado em que a instituição opera, determinando o horizonte temporal de acordo com o tempo necessário para a liquidação da carteira.
- Horizonte de tempo curto para justificar aproximação normal ou para evitar maior exposição aos fatores de risco, o que pode ocorrer em horizontes de tempo mais longos.
- Necessidade de uma amostra grande para validação do *VaR*, que se torna mais propício através de um horizonte temporal curto.

3.5 Cálculo do *VaR*

Segundo Alexander (2009), existem 2 categorias de modelos de *VaR*, os métodos paramétricos e os não-paramétricos. Os modelos não-paramétricos não necessitam de uma distribuição de probabilidade, partindo da premissa de que a distribuição empírica dos dados é capaz de descrever o comportamento futuro dos retornos, fazendo o uso de simulação para obter as previsões. Já os paramétricos têm como objetivo estabelecer uma distribuição de probabilidade que seja capaz de descrever o comportamento dos retornos, sendo necessário portanto estimar os parâmetros da distribuição, e a variância (no caso univariado) ou a matriz de covariâncias (no caso multivariado) para obtenção das previsões. Alguns métodos utilizam a variância-covariância incondicional, os métodos paramétricos apresentados nesse trabalho consideram a variância condicional (volatilidade), dessa forma a notação utilizada será com as volatilidades condicionadas ao tempo t .

3.5.1 *VaR* paramétrico

De acordo com Danielsson (2011), assumindo que se tem um único ativo de valor P_t , e utilizando o log-retorno y_t . Então, pela definição de *VaR* da equação 4:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(P_{t-1}(e^{y_t} - 1) \leq -VaR(\alpha)) = \\ &= P\left(e^{y_t} \leq -\frac{VaR(\alpha)}{P_{t-1}} + 1\right) = \end{aligned}$$

$$= P\left(y_t \leq \ln\left(-\frac{VaR(\alpha)}{P_{t-1}} + 1\right)\right)$$

Incorporando o desvio padrão σ_t :

$$\alpha = P\left(\frac{y_t}{\sigma_t} \leq \ln\left(-\frac{VaR(\alpha)}{P_{t-1}} + 1\right) * \frac{1}{\sigma_t}\right)$$

uma vez que $VaR(\alpha)/P_{t-1} \leq 1$ (a condição sempre será verdadeira³). Denotando o desvio padrão como σ_t , a função distribuição acumulada (F.D.A.) dos log-retornos padronizados (y_t/σ_t) como $F_y(*)$ e o valor da variável em função do nível de significância pela F.D.A inversa⁴ por $F_y^{-1}(\alpha) = \gamma(\alpha)$, tem-se:

$$VaR(\alpha) = -\left(\exp(F_y^{-1}(\alpha) * \sigma_t - 1)\right) P_{t-1}$$

Para um $F_y^{-1}(\alpha) * \sigma_t$ pequeno, o VaR de um ativo no tempo t , é dado por:

$$VaR(\alpha) \approx -\sigma_t * \gamma(\alpha) * P_{t-1} \quad (5)$$

Alexander (2009) comenta que o VaR pode ser expresso em termos de valor de perda monetária do ativo como na equação 5 ou na forma de logaritmo de retorno:

$$VaRlnr(\alpha) \approx \sigma_t * \gamma(\alpha) \quad (6)$$

O VaR na forma da equação 6 será o utilizado na apresentação dos resultados deste trabalho, devido a vantagem de poder ser comparado diretamente com os log-retornos, facilitando as análises gráficas. É importante salientar que a utilização da equação 5 ou da equação 6 não terá influência sobre o cálculo do VaR , a única diferença estará na forma que o resultado será apresentado⁵.

3.6 VaR de uma carteira

Segundo Sain (2011 apud Mansur, 2012), para uma carteira composta por múltiplos ativos, não se pode simplesmente realizar a soma individual dos VaR 's, pois existem movimentos relativos entre os ativos que devem considerados.

As definições da seção anterior podem facilmente ser estendidas para uma carteira com múltiplos ativos (C ativos). Os movimentos relativos entre os ativos são

³ Considerando que o VaR é uma previsão de perda (desvalorização) máxima potencial de um ativo, então $0 < VaR \leq P_{t-1}$, pois não é possível o ativo ter uma desvalorização maior do que o seu próprio valor.

⁴ A F.D.A inversa fornece o valor da variável associado a uma determinada probabilidade acumulada.

⁵ A equação 5 apresentará um valor positivo em termos de perda monetária, enquanto a equação 6 apresentará um valor negativo em termos de log-retorno.

captados pela matriz de covariâncias Σ_t , e a volatilidade da carteira no tempo t é dada por:

$$\sigma_{t,carreira} = \sqrt{\mathbf{w} * \Sigma_t * \mathbf{w}'} = \sqrt{[w_1 \quad \dots \quad w_C] * \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_C \end{bmatrix}} \quad (7)$$

onde o vetor \mathbf{w} de dimensão $1 \times C$ representa os pesos dos ativos na carteira, e a matriz Σ_t de dimensão $C \times C$ representa as covariâncias dos ativos no tempo t . Considerando v como o valor da carteira, o VaR dessa carteira expresso em valor monetário pode ser dado por:

$$VaR_{carreira}(\alpha) = -\sigma_{t,carreira} * \gamma(\alpha) * v, \quad v = \sum_{i=1}^C P_{t-1,i} * Q_{t,i} \quad (8)$$

onde $\gamma(\alpha)$ é o nível de significância em função da probabilidade ou quantil⁶ da probabilidade e v é a soma dos produtos dos valores do ativo no tempo anterior e a respectiva quantidade (ou quantidade teórica) do ativo.

E em termos de logaritmo de retornos, tem-se:

$$VaRlnr_{carreira}(\alpha) = \sigma_{t,carreira} * \gamma(\alpha) \quad (9)$$

3.7 Modelos de estimação do *Value at Risk*

3.7.1 Média Móvel Exponencialmente Ponderada (*EWMA*)

Segundo Danielsson (2011), o modelo Médias Móveis Exponencialmente Ponderadas (*Exponentially Weighted Moving Average - EWMA*) ou Suavização Exponencial, proposto por J.P. Morgan (1963), atribui maior peso as observações mais recentes em detrimento das mais antigas, na proporção do fator de decaimento λ . A previsão de volatilidade para um ativo i (univariada) no tempo t , é dada por:

$$\hat{\sigma}_{t,i}^2 = (1 - \lambda) * \sum_{t=1}^{t-1} \lambda^t * y_{t-1,i}^2 \quad (10)$$

ou de forma recursiva, como:

$$\hat{\sigma}_{t,i}^2 = \lambda * \hat{\sigma}_{t-1,i}^2 + (1 - \lambda) * y_{t-1,i}^2 \quad (11)$$

onde $0 < \lambda < 1$ é o fator de decaimento, $\hat{\sigma}_{t-1,i}$ é a volatilidade estimada do ativo i no tempo anterior e $y_{t-1,i}$ o log-retorno do ativo i no tempo anterior. A previsão de

⁶ Um quantil é uma medida que marca a posição de separação de um conjunto de dados amostrais ordenados de uma distribuição. Por exemplo um quantil de 5%, será o valor que separa os 5% menores valores dos 95% maiores valores.

volatilidade no primeiro dia, é geralmente definida como a volatilidade incondicional dos dados.

De forma multivariada, a estimativa de volatilidade para a carteira é:

$$\widehat{\Sigma}_t = \lambda * \widehat{\Sigma}_{t-1} + (1 - \lambda) * Y'_{t-1} * Y_{t-1} \quad (12)$$

com um elemento individual dado por:

$$\widehat{\sigma}_{t,ij} = \lambda * \widehat{\sigma}_{t-1,ij} + (1 - \lambda) * y_{t-1,i} * y_{t-1,j} \quad (13)$$

onde Y_{t-1} é a matriz de log-retornos dos ativos da carteira no tempo anterior a t , $\widehat{\Sigma}_t$ é a matriz de covariâncias estimadas da carteira para o tempo t e $\widehat{\Sigma}_{t-1}$ a matriz de covariâncias estimada do tempo anterior a t . A matriz $\widehat{\Sigma}_t$ pode ser obtida aplicando a equação 13 separadamente a cada ativo ou par de ativos da carteira, com $i = (1, \dots, C)$ e $j = (1, \dots, C)$. Utilizando a equação 7, tem-se a estimativa de volatilidade *EWMA* da carteira:

$$\sigma_{t,carreira} = \sqrt{\mathbf{w} * \widehat{\Sigma}_t * \mathbf{w}'} \quad (14)$$

Pode-se notar que quanto maior o fator de decaimento, menor será o peso atribuído as últimas observações da série. Danielsson (2011) comenta que quando o modelo foi proposto por J.P. Morgan, foi sugerido definir $\lambda = 0,94$ para o horizonte temporal de 1 dia (*VaR* diário), de modo que sejam considerados na análise somente os últimos 30 dias, isto é, dias mais antigos que isso terão pesos muito baixos tornando-se irrelevantes na análise. Até hoje essa é a suposição mais comum.

3.7.2 Autorregressivo de heteroscedasticidade Condicional Generalizado (GARCH)

Segundo Morentin e Tolo (2004), partindo do pressuposto de que a série temporal de log-retornos possua variância condicional (volatilidade) no decorrer do tempo, que é evidenciado com a existência de conglomerados de volatilidade (onde grandes mudanças de preços de ativos são seguidas por outras grandes mudanças de preços), determinados modelos econométricos não são capazes de descrever o comportamento da variável, por considerar a variância constante.

Engle (1982) propõe o modelo não – linear (no que se refere a variância), denominado *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity – ARCH* com o objetivo de estimar a variância da inflação. Bollerslev (1986) propõe o modelo *GARCH* como uma generalização do modelo *ARCH*.

3.7.2.1 Modelo ARCH

Conforme Tsay (2005) a média e a variância condicional dos log-retornos y_t , é definida como:

$$\mu_t = E(y_t|F_{t-1}), \sigma_t^2 = Var(y_t|F_{t-1}) = E[(y_t - \mu_t)^2|F_{t-1}] \quad (15)$$

Onde F_{t-1} denota o conjunto de informações disponível no tempo $t-1$, geralmente consiste em todas as funções lineares dos log-retornos anteriores.

Tsay (2005) define um processo $ARCH(p)$, por:

$$y_t = \mu_t + \sqrt{\sigma_t^2} * \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p y_{t-p}^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j y_{t-j}^2 \quad (16)$$

onde $\{\varepsilon_t\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), denominada erro aleatório (ou resíduos), podendo seguir uma distribuição normal padrão (média 0 e variância 1), t de *Student* ou distribuição de erro generalizada. Os α_i 's devem satisfazer as condições de regularidade para garantir que a variância condicional σ_t^2 seja finita: $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_j \geq 0$, com $j = (1, \dots, p)$. Assume-se que $\mu_t = 0$, dessa forma tem-se $y_t = \sqrt{\sigma_t^2} * \varepsilon_t$.

Pode-se notar pela estrutura do modelo, que o quadrado de grandes log-retornos passados implica em uma grande variância condicional σ_t^2 .

3.7.2.2 Modelo GARCH

Moretin e Tolo (2006) comenta que uma grande desvantagem dos modelos $ARCH$ é que na maioria das vezes são necessários muitos parâmetros para descrever adequadamente o processo de volatilidade do log-retorno de um ativo. Bollerslev (1986) propõe uma generalização do modelo $ARCH$, conhecida como $GARCH$ ("*Generalized ARCH*"), que pode ser usado para descrever a volatilidade com menos parâmetros⁷.

Tsay (2005), define o modelo $GARCH(p,q)$ para uma série de logaritmos de retornos como:

$$\begin{aligned} y_t &= \sqrt{\sigma_t^2} * \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p y_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j y_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{t-k}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

⁷ Apesar dos modelos $ARCH$ possuírem $(p+1)$ parâmetros enquanto os $GARCH$ possuem $(p+q+1)$, os modelos $GARCH$ são capazes de descrever um processo com precisão utilizando uma pequena ordem (poucos parâmetros) enquanto o $ARCH$ necessita de ordens mais elevadas (mais parâmetros).

As condições de regularidade dos parâmetros, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geq 0$ com $(j = 1, \dots, p)$, $\beta_k \geq 0$ com $(k = 1, \dots, q)$ e $\sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$, garantem que a variância condicional seja positiva, estacionária e finita. Observa-se que o modelo considera não apenas o quadrado dos log-retornos passados, como também os valores passados da própria volatilidade. $\{\varepsilon_t\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias (i.i.d.), denominada erro aleatório (ou resíduos), que pode seguir distribuição normal padrão ($\varepsilon_t \sim N(0,1)$), t de *Student* ou distribuição de erro generalizada.

De acordo com Danielsson (2011), frequentemente os log-retornos observados possuem caudas mais longas (gordas) do que o pressuposto pelo modelo normal (muitas observações extremas), sugerindo que o modelo pode ser melhorado utilizando uma distribuição de caudas gordas como a t de *Student*, onde os graus de liberdade l indicam quão gorda é a cauda, quando $l = \infty$ a distribuição t de *Student* se aproxima à uma distribuição normal. Considerando que a distribuição dos log-retornos na maioria das vezes é assimétrica, pode-se utilizar uma distribuição condicional distorcida, como a t de *Student* distorcida (*Skewed Student-t*), onde o parâmetro de distorção e os graus de liberdade serão estimados junto com os parâmetros do modelo. Sendo assim, serão abordados neste trabalho os modelos *GARCH* com distribuição condicional dos resíduos normal (*GARCH Normal*) e t de *Student* distorcida (*Skew-t-GARCH*).

Tsay (2005) recomenda a utilização de baixa ordem (p,q) , como $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ ou $(2,2)$, pois os modelos *GARCH* são capazes de descrever adequadamente um processo utilizando poucos parâmetros. A escolha do modelo mais parcimonioso, isto é, que envolva o mínimo de parâmetros pode ser feita por meio do Critério de Informação de Akaike (*AIC*)⁸ e/ou critério Bayesiano de Schwarz (*BIC*)⁹. Os parâmetros do modelo podem ser estimados a partir do método de máxima verossimilhança através do pacote *fGarch* do *software R*, que também fornecem as estatísticas *AIC* e *BIC* para os respectivos modelos.

⁸ O *AIC* mensura a qualidade de um modelo estatístico visando a parcimônia. Partindo do pressuposto de que um modelo estatístico nunca irá representar um processo de forma exata, o *AIC* estima a quantidade relativa de informação perdida, fornecendo uma métrica para comparação de modelos onde os menores valores de *AIC* representam modelos mais parcimoniosos e de melhor ajuste (Akaike, 1974).

⁹ O *BIC* tem como pressuposto a existência de um “modelo verdadeiro” capaz de descrever com precisão um processo, e é definido como a estatística que maximiza a probabilidade de ser encontrar o “verdadeiro” modelo entre os avaliados, assim como no *AIC* a escolha se dá pelo menor valor (Schwarz, 1978).

3.7.3 Simulação Histórica

De acordo com Alexander (2009), o modelo de Simulação Histórica (*Historical Simulation – HS*) consiste na utilização da distribuição empírica dos log-retornos para prever o comportamento futuro, que implica na suposição de que a história se repete e cada um dos log-retornos passados observados possui a mesma probabilidade de ocorrência no próximo período, isto é, supõe que os log-retornos são independentes e identicamente distribuídos.

Dada uma janela de estimação de tamanho W_E ¹⁰, Danielsson (2011) define o $VaR_{lnr}(\alpha)$ HS para um ativo (univariado), como o $(W_E * \alpha)$ -ésimo valor negativo do vetor de log-retornos (ordenado de forma crescente). De forma semelhante, o $VaR(\alpha)$ para um determinado tempo t é obtido a partir do produto entre o $(W_E * \alpha)$ -ésimo valor do vetor de log-retornos e o valor do ativo no tempo anterior a t . Para o HS multivariado, deve-se levar em consideração os pesos dos múltiplos ativos da carteira:

$$y_{Carteira} = \sum_{i=1}^C w_i * y_i \quad (18)$$

onde C é o número de ativos da carteira, $y_i = \{y_{t,i}\}_{t=1}^{W_E}$ é o vetor de log-retornos do ativo i , w_i é o peso do ativo i , e $y_{Carteira}$ é o vetor histórico de log-retornos da carteira. Em notação matricial:

$$y_{Carteira} = \mathbf{w} * \mathbf{Y} \quad (19)$$

onde \mathbf{w} é o vetor de pesos e \mathbf{Y} é a matriz de log-retornos dos ativos da carteira.

Desse modo o $VaR_{lnr}(\alpha)$ é dado pelo $(W_E * \alpha)$ -ésimo valor do vetor $y_{Carteira}$ (em ordem crescente) e o $VaR(\alpha)$ pode ser obtido a partir do produto entre o $(W_E * \alpha)$ -ésimo valor do vetor $y_{Carteira}$ e o valor da carteira no dia anterior (multiplica-se o resultado por (-1) para obter um valor positivo como na equação (5)). Por exemplo, para uma janela de tamanho 1000, o $VaR_{lnr}(\alpha)$ com $\alpha = 0,05$, é dado pelo 50º log-retorno em ordem crescente.

Danielsson (2011) salienta que se deve utilizar um $(W_E * \alpha)$ inteiro, caso esse produto seja um número não inteiro, deve-se remover uma quantidade de observações iniciais, de forma que $(W_E * \alpha)$ seja um número inteiro. Por exemplo, considerando uma janela de estimação de tamanho 450 e $\alpha = 0,01$, $(W_E * \alpha) = 4,5$,

¹⁰ W_E representa o número de observações usadas na obtenção de cada estimativa de VaR , para cada nova predição de VaR , adiciona-se um dia mais recente na janela e remove-se o dia mais antigo, de forma que W_E permaneça constante.

que obviamente não existe, sendo assim remove-se as primeiras 50 observações, de modo que $(W_E * \alpha) = 4$. Como regra geral, o tamanho mínimo de amostra recomendado para o *HS* é $3 / \alpha$.

Dentre as vantagens do modelo, estão a simplicidade de implementação, e por não necessitar de tantas suposições quanto à distribuição dos dados, nenhuma suposição com relação a forma paramétrica da distribuição, isto é, não incorpora erros de estimativa como os métodos paramétricos. De acordo com Danielsson (2011) quando se trabalha com carteiras, o método possui a capacidade de capturar diretamente a dependência não linear de forma que os outros métodos não conseguem.

O modelo apresenta algumas desvantagens como a necessidade de uma amostra grande, e o fato de assumir os log-retornos como i.i.d. faz com que eventos ocorridos em um passado distante possuam a mesma probabilidade de ocorrência que os eventos mais recentes (Alexander, 2009).

Devido a sua simplicidade, pode ser facilmente implementado de forma computacional, utilizando a função de ordenação de vetores *Sort*, contida no pacote *Base* do software *R*.

3.7.4 Teoria dos Valores Extremos

Segundo Coles (2001), a Teoria dos Valores Extremos (*Extreme Value Theory – EVT*) integra um ramo da estatística que trata de eventos raros, com foco nos valores máximos e mínimos de um conjunto de dados.

Pela definição de *VaR*, boas estimativas de perdas máximas potenciais, necessitam de uma modelagem adequada das caudas da distribuição dos log-retornos, já que se baseia nos valores mais baixos de log-retorno. Diferentemente dos outros métodos de estimação de *VaR*, que utilizam a distribuição completa dos log-retornos, podendo trazer problemas na estimação das caudas, o método *EVT* supõe que os log-retornos mínimos convergem para uma distribuição de valores extremos, o que pode trazer maior precisão na estimativa.

3.7.4.1 A distribuição de máximos

Coles (2001) apresenta a formulação inicial do modelo como:

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \quad (20)$$

onde X_1, \dots, X_n , é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função distribuição acumulada (FDA) em comum, onde X_i representa os valores de um processo em uma escala de tempo, de modo que M_n represente o valor máximo de um processo em n unidades de tempo.

Teoricamente, a distribuição de M_n pode ser derivada para todos os valores n :

$$\begin{aligned} P\{M_n \leq z\} &= P\{X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z\} \\ &= P\{X_1 \leq z\} \dots P\{X_n \leq z\} \\ &= \prod_{i=1}^n F_i(z) \\ &= \{F(z)\}^n. \end{aligned} \quad (21)$$

Coles (2001) comenta que esse resultado não é imediatamente útil na prática, dado que a função F é desconhecida. Uma possibilidade poderia ser estimar F a partir dos dados observados e substituir na equação, entretanto pequenas imprecisões na estimativa podem levar a discrepâncias substanciais em F^n . Uma abordagem alternativa é aceitar F desconhecida, e buscar famílias de modelos que se aproximem de F^n , que podem ser estimadas com base nos dados extremos.

3.7.4.2 A distribuição de mínimos

Analogamente ao resultado anterior, a mesma teoria pode ser aplicada na previsão de valores mínimos:

$$M_m = \min\{X_1, \dots, X_n\} \quad (22)$$

onde M_m representa o valor mínimo do processo em n unidades de tempo.

Tsay (2002) demonstra essa teoria aplicada na previsão de mínimos relacionados a retornos de ativos financeiros. Seja y_t , com $t = 1, \dots, n$, o logaritmo do retorno de um ativo, medido em um período de tempo fixo, tem-se a coleção de log-retornos $\{y_1, \dots, y_n\}$. O log-retorno mínimo é y_1 , de menor estatística de ordem, enquanto o log-retorno máximo é y_n , de maior estatística de ordem. O interesse está no log-retorno mínimo y_1 , que possui propriedades relevantes para o cálculo do *VaR*. Supondo que os log-retornos y_t sejam independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), com $-\infty \leq y_t \leq \infty$ e função distribuição acumulada $F(x)$. Assim a FDA de y_1 , chamada de $F_{n,1}(x)$, é dada por:

$$\begin{aligned}
 F_{n,1}(x) &= P\{y_{(1)} \leq x\} = 1 - P\{y_{(1)} > x\} = \\
 &= 1 - P\{y_{(1)} > x, \dots, y_{(n)} > x\}
 \end{aligned}$$

considerando a suposição de que os log-retornos são independentes:

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \prod_{j=1}^n P\{y_j > x\} \\
 &= 1 - \prod_{j=1}^n [1 - P\{y_j \leq x\}]
 \end{aligned}$$

como os log-retornos seguem uma mesma distribuição de probabilidade:

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \prod_{j=1}^n [1 - F(x)] \\
 &= 1 - [1 - F(x)]^n.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Como citado anteriormente, na prática $F(x)$ é desconhecido, portanto $F_{n,1}(x)$ também é desconhecida. Entretanto, quando n tende ao infinito, $F_{n,1}(x)$ torna-se degenerada e não possui valores práticos. Para contornar esse problema, Coles (2001) apresenta um resultado de convergência fraca para mínimos centrados e normalizados, fornecidos pelo teorema de Fisher-Trippett (1928).

3.7.4.3 O Teorema de Fisher-Trippett

Seja y_t , com $t = 1, \dots, n$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. Se existem sequências de constantes $\{\alpha_n > 0\}$ e $\{b_n\}$, tais que:

$$P\left\{\frac{y_{(1)} - b_n}{\alpha_n} \leq x\right\} \rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty \tag{24}$$

onde G é uma função não degenerada, então G pertence a uma das seguintes famílias:

- Gumbel: $G(x) = \exp\{-\exp(-x)\}$, $-\infty \leq x \leq \infty$;

- Fréchet: $G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0 \end{cases}$ $\alpha > 0$

- Weibull: $G(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ $\alpha > 0$

Segundo o teorema, quando $y_{(1)}$ pode ser estabilizado com duas sequências $\{\alpha_n > 0\}$ e $\{b_n\}$, a variável normalizada correspondente $y_{(1^*)} = \frac{y_{(1)} - b_n}{\alpha_n}$ converge para uma distribuição não degenerada, dentro de uma das famílias de distribuições, Gumbel, Fréchet ou Weibull, quando n tende ao infinito.

De acordo com Coles (2001), nas primeiras aplicações da *EVT* era comum tomar uma das três famílias e estimar seus parâmetros, entretanto essa abordagem é falha dado que supõe que uma das famílias seja mais adequada que a outra, quando seriam necessárias técnicas para selecionar a família mais apropriada para os dados, e uma vez tomada a decisão, as inferências seguintes presumem que essa escolha esteja correta. A solução apresentada por Jenkinson (1955) foi utilizar uma família de distribuições que engloba essas 3 famílias, denominada Distribuição Generalizada dos Valores Extremos (DGVE), dada por:

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \exp\{-(1 + kx)^{1/k}\}, & k \neq 0 \\ 1 - \exp\{-\exp(x)\}, & k = 0 \end{cases} \quad (25)$$

onde k é o parâmetro de forma. Sendo $x < -1/k$ para $k < 0$, que corresponde à família Weibull e $x > -1/k$ para $k > 0$, que corresponde à família Fréchet. O caso $k = 0$ é tomado como limite quando $k \rightarrow 0$, levando à família Gumbel.

Os parâmetros k , α_n e β_n , podem ser estimados a partir do método de máxima verossimilhança, pela função *gevFit* do pacote *fExtremes* no *software R*.

Segundo Danielsson (2011), a *TVE* deve ser aplicada apenas nas caudas, à medida que se move para o centro da distribuição ela se torna cada vez mais imprecisa. Como regra geral o modelo exige uma amostra de no mínimo 1000 observações e níveis de significância inferiores a 0,4% ($\alpha \leq 0,004$).

3.8 Validação de modelos de VaR

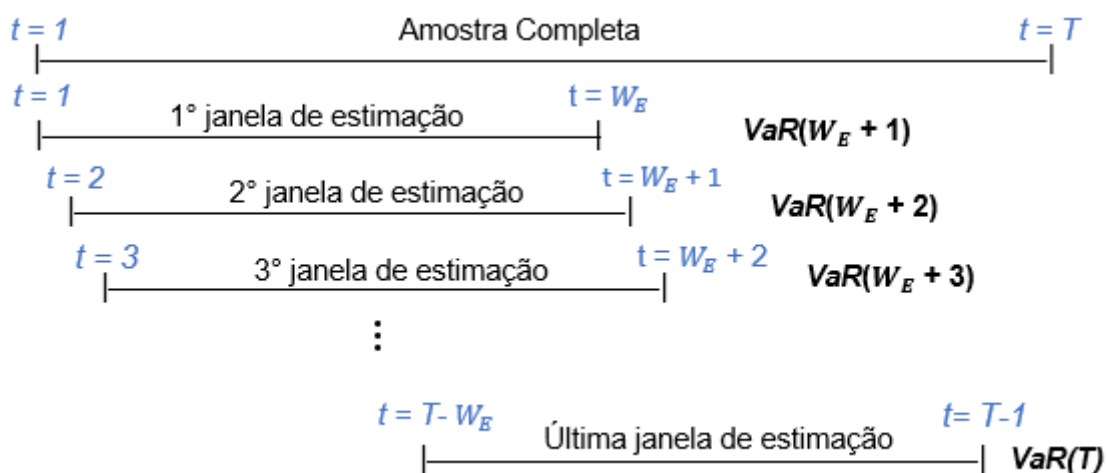
Pela própria definição do *VaR* os métodos fornecem uma estimativa de perda máxima com um nível $(1 - \alpha)\%$ de confiança, isto é, possui uma probabilidade α de ocorrerem perdas reais maiores que a estimada. Desse modo, é necessário que os modelos sejam submetidos a um processo de validação.

3.8.1 Backtesting

Segundo Alexander (2009), o *Backtesting* é um processo de testagem de modelos sistemáticos, amplamente utilizado na validação de modelos de risco, que consiste em verificar o desempenho de um modelo de *VaR* em um período passado, isto é, comparar as perdas máximas estimadas pelo modelo, com as perdas reais observadas nos dados históricos, afim de verificar quantas vezes as perdas observadas ultrapassam as estimadas. Utiliza-se o teste estatístico de Kupiec para determinar o número máximo de vezes em que o *VaR* estimado poderá ficar abaixo do *VaR* histórico (número de falhas ou violações). Caso o limite de falhas seja ultrapassado, o modelo não está cumprindo com seus objetivos e deverá ser revisto.

Conforme Danielsson (2011), para que o *Backtesting* possa ser aplicado, na construção do modelo deve ser definida uma janela de estimativa W_E , onde W_E representa o número de observações usadas na obtenção de cada estimativa de *VaR*, no horizonte temporal. Para que diferentes modelos possam ser comparados, deve-se utilizar janelas de tamanhos iguais, onde cada modelo necessita de um tamanho grande o suficiente para acomodar seus critérios específicos, portanto a janela de estimativa é definida para aquele que precisa do maior número de observações. As janelas a cada dia são alteradas, excluindo-se o dia mais antigo e incluindo o dia mais recente, mantendo o número de dias constante, como ilustrado na figura abaixo:

Figura 2 - Janela de estimação



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

As observações de log-retornos nos dias para os quais serão realizadas predições de *VaR*, serão denominados como janela de teste W_T . Compara-se a janela de teste com as estimativas de *VaR* para verificar a adequação do modelo através do teste de proporção de falhas de Kupiec (1995).

3.8.2 Teste de Kupiec

No teste de proporção de falhas de Kupiec (1995), será verificado se o número de vezes em que os valores observados ultrapassam os estimados é aceitável.

Dada uma série estimada de *VaR*, com nível de significância α , uma janela de teste W_T de tamanho n e considerando os log-retornos observados y_t , com $t = (1, \dots, n)$. Define-se como x o número de falhas do *VaR*:

$$x = \sum_{t=1}^n v_t, \text{ com } v_t = \begin{cases} 1, & \text{se } y_t \leq VaR_{lnr}(\alpha) \\ 0, & \text{se } y_t > VaR_{lnr}(\alpha) \end{cases} \quad (26)$$

De acordo com Kupiec (1995), assumindo que as observações sejam independentes, x segue uma distribuição binomial, com probabilidade de sucesso¹¹:

$$P(X = x|n, p) = \binom{n}{x} * (1 - p)^{n-x} * p^x \quad (27)$$

onde p é a probabilidade de falha em qualquer uma das tentativas independentes, que pode ser estimada por:

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad (28)$$

Kupiec (1955) propõe um teste de razão de máxima verossimilhança, com as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: p = \hat{p} \\ H_A: p \neq \hat{p} \end{cases}$$

onde a hipótese nula é que o número de perdas esperadas seja igual ao número de perdas observadas.

A estatística do teste é dada por:

$$LR = -2 \ln[(1 - p^*)^{n-x} * (p^*)^x] + 2 \ln[(1 - \hat{p})^{n-x} * (\hat{p})^x] \leq \chi_{1,\alpha}^2 \quad (29)$$

onde p^* é a probabilidade de falha sob a hipótese nula, nesse caso $p^* = \alpha$. A estatística LR possui distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Dessa forma rejeita-se H_0 em favor de H_A , se $LR > \chi_{1,\alpha}^2$.

¹¹ A probabilidade de sucesso é a probabilidade de ocorrência do evento de interesse, nesse caso é a probabilidade de o *VaR* falhar.

4 APLICAÇÃO

Para o estudo tem-se como objetivo realizar uma análise exploratória dos dados e aplicar as técnicas estatísticas dos modelos nas séries temporais de log-retornos de forma univariada e multivariada, para verificar como os diferentes modelos se comportam em cada um dos ativos.

4.1 Carteira

Afim de construir uma carteira teórica representativa do mercado acionário brasileiro, foram selecionadas quatro ações que possuem maior participação no Ibovespa (IBOV), que até a data presente eram: Itaú Unibanco (ITUB4), Bradesco (BBDC4), Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE3). A tabela 1 mostra a quantidade teórica de cada ativo e seu respectivo percentual de participação na carteira.

Tabela 1 - Carteira teórica

Ativo	Quantidade teórica (Qt_i)	Participação (%)
Y_1 : ITUB4	4.780.002.924	27,44262%
Y_2 : BBDC4	4.691.427.537	26,93409%
Y_3 : PETR4	4.566.511.125	26,21693%
Y_4 : VALE3	3.380.233.503	19,40636%
Total	17.418.175.089	100%

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Desse modo o vetor de pesos da carteira é:

$$w = [0,2744262 \quad 0,2693409 \quad 0,2621693 \quad 0,1940636]$$

4.2 Horizonte temporal e nível de confiança

Como recomendado nos Acordos de Basiléia, o VaR será calculado com um nível de confiança de 99%, isto é, significância de 1%. Desta forma, espera-se que em apenas 1% das situações a perda máxima real ultrapasse o valor estimado pelo VaR .

Dada a natureza das operações da carteira e por se tratar de um período com alta volatilidade, será adotada uma postura conservadora, calculando o VaR diário, ou seja, será utilizado o horizonte temporal de 1 dia, $h = 1$.

4.3 Descrição dos dados

Para a base de dados serão observadas as séries temporais de cotações diárias das ações escolhidas na composição da carteira teórica, no período de 01 de janeiro de 2020 (01/01/2020) até 30 de setembro de 2021 (30/09/2021), que serão obtidas diretamente do site da B3 (bolsa de valores oficial do Brasil).

Ações são negociadas em dias úteis, assim quando nos referimos a série temporal de cotações diárias de um ativo, nos referimos aos dias úteis de negociação compreendidos no período. De (01/01/2020) à (30/09/2021) tem-se 432 dias úteis de negociação, portanto 431 log-retornos.

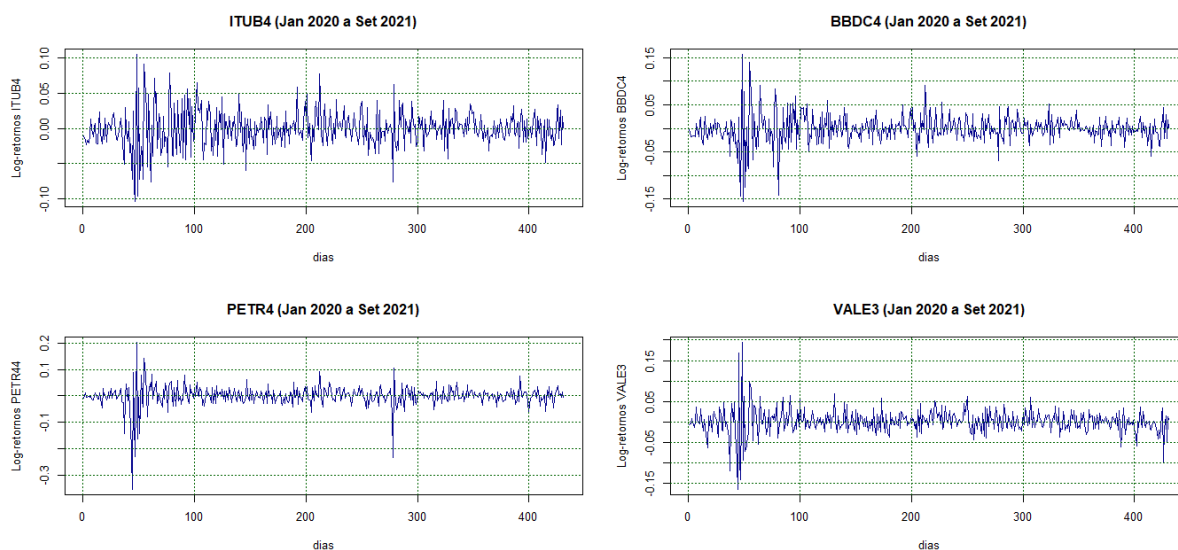
4.4 Período de análise e janela de estimação

Com base nos dados descritos na seção 4.3, serão apresentadas as estimativas de *VaR* diário para os 43 dias úteis de negociação que remetem aos meses de agosto e setembro de 2021. Os dados observados nos meses de agosto e setembro de 2021 serão a janela de teste W_T .

Conforme a seção 3.8.1, para que o *Backtesting* possa ser utilizado para comparar os modelos, as janelas de estimação devem ser de mesmo tamanho, e o tamanho é definido de acordo com o método que necessite da maior janela. O *EVT* exige no mínimo 1000 observações, sendo assim será possível realizar a análise somente para os métodos *HS*, *EWMA*, *GARCH* Normal e *Skew-t-GARCH*. O método de Simulação Histórica exigirá um mínimo de 300 observações ($3/(\alpha = 0,01) = 300$), ao mesmo tempo necessitamos que $(W_E * \alpha)$ seja um número inteiro, portanto utilizou-se janelas de tamanho $W_E = 300$.

A figura 3 apresenta os gráficos das séries temporais dos 431 log-retornos das ações do Itaú (ITUB4), Bradesco (BBDC4), Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE3), respectivamente.

Figura 3 - Séries temporais dos log-retornos dos ativos (janeiro 2020 a setembro 2021)



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

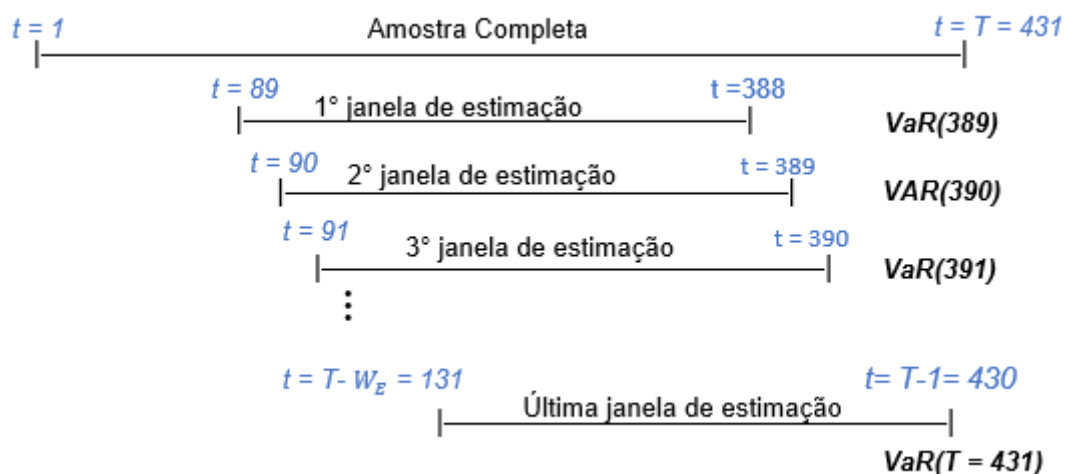
Podemos notar uma grande variação entre os dias 45 e 82, isso se dá pelo fato do dia 46 dos dados corresponder a data de 11 de março de 2020, quando a OMS declarou oficialmente a COVID-19 como uma pandemia, que impactou rapidamente a economia no país e no mundo, a variação diminui a partir do dia 82 que corresponde a data de 30 de abril de 2020. Segundo o site G1, o Ibovespa encerrou o mês de março de 2020 com o pior desempenho mensal em mais de 20 anos.

Descartando as 88 primeiras observações, consegue-se atender as exigências do modelo de Simulação Histórica, além de retirarmos o período que contém as maiores variações, onde as condições de mercado eram atípicas, o que poderia gerar problemas de superestimação¹² do *VaR*.

A figura 4 ilustra a janela de estimativa de tamanho $W_E = 300$, que será rolada a cada dia, onde as observações da posição 89 a 388 da amostra serão utilizadas para estimar o *VaR* no 389º dia (1º dia útil de agosto de 2021), 90º ao 389º para estimar o *VaR* no dia 390 e assim por diante, até finalmente utilizar do 131º ao 430º para estimar o *VaR* do dia 431 (último dia útil de setembro de 2021).

¹² A superestimação do *VaR* se dá quando as perdas estimadas são muito maiores que as perdas reais, isto é, o *VaR* em valor numérico é muito menor que o log-retorno.

Figura 4 - Janelas de estimação de tamanho 300



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

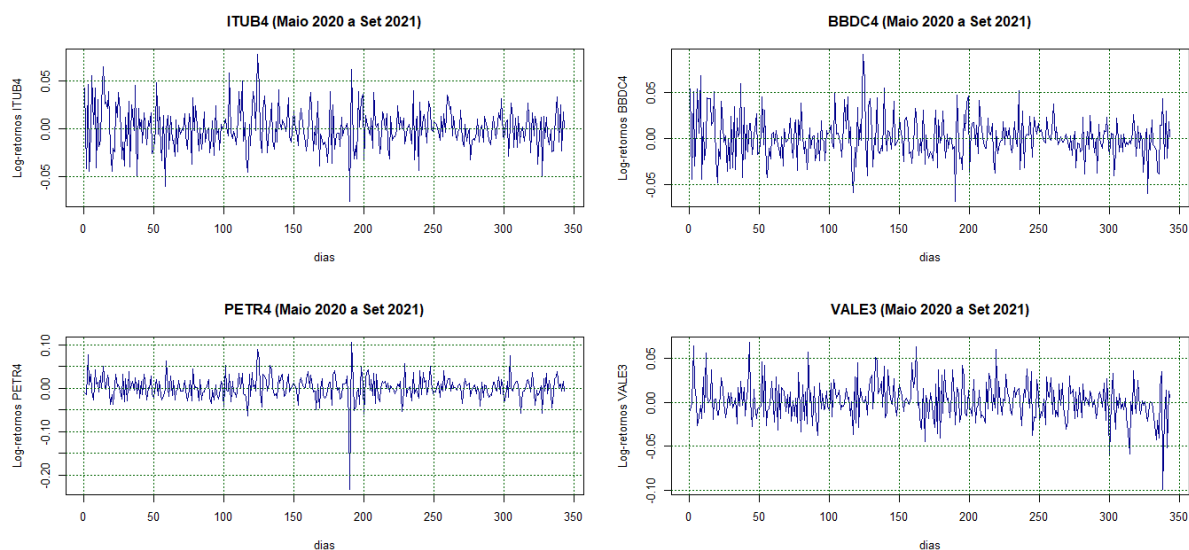
O número de observações utilizadas para a estimação até a última janela é $T - 88 = 431 - 88 = 343$.

4.5 Análise exploratória dos dados

Nesta seção serão apresentados os gráficos das séries temporais de cada ativo, no período de maio de 2020 a setembro de 2021 que será o utilizado para construção dos modelos, juntamente com os testes de estacionariedade e as respectivas estatísticas descritivas.

A figura 5 apresenta os gráficos das séries temporais de log-retornos das ações do Itaú (ITUB4), Bradesco (BBDC4), Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE3), no período de maio de 2020 a setembro de 2021.

Figura 5 - Séries temporais dos log-retornos dos ativos (maio de 2020 a setembro de 2021)



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Pode-se perceber em comparação com a série completa da figura 3, que os dados parecem ter um comportamento mais estável, onde parecem se desenvolver aleatoriamente em torno de uma média constante (que será verificado pelos testes de estacionariedade) sem muitos conglomerados de volatilidade.

A tabela 2 apresenta as estatísticas descritivas dos log-retornos dos ativos, e os p-valores¹³ para os testes de estacionariedade de Dickey-Fuller e Phillips-Perron sob hipótese alternativa de estacionariedade, onde para todos os ativos em ambos os testes obteve-se p-valor < 0,01, portanto rejeita-se a hipótese nula em favor da hipótese alternativa, e pode-se concluir com 99% de confiança estatística que as séries de log-retornos dos ativos são estacionárias.

Tabela 2 - Estatísticas descritivas dos log-retornos dos ativos

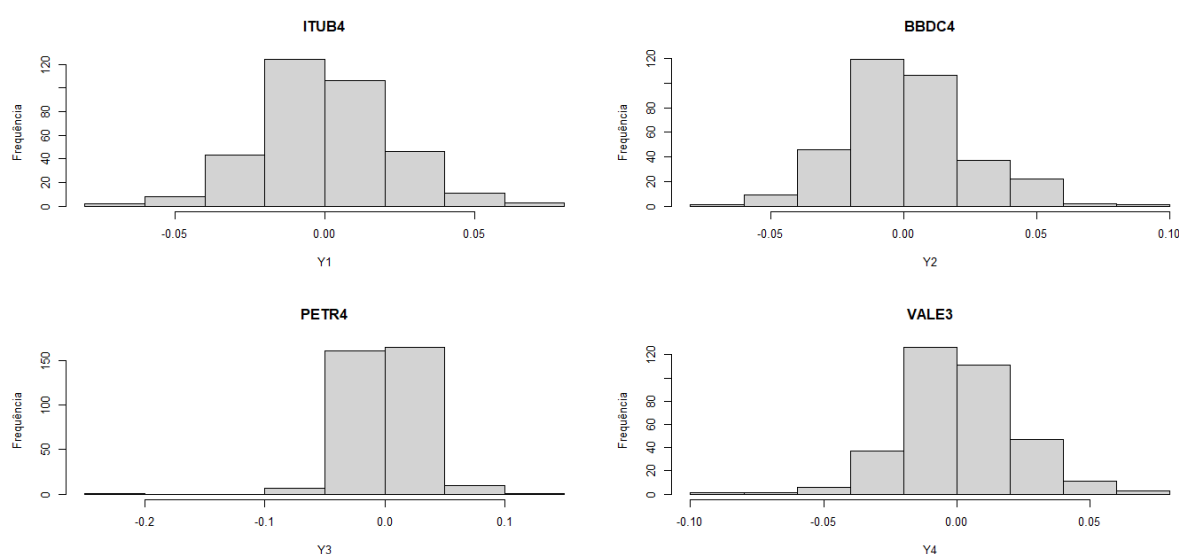
	ITUB4	BBDC4	PETR4	VALE3
Observações	343	343	343	343
Mínimo	-0,0755572	-0,0678368	-0,2320562	-0,0988637
1° quartil	-0,0132705	-0,0129719	-0,0128565	-0,0138984
Média	0,0008519	0,0008788	0,0012740	0,0013163
Mediana	-0,0003047	0,000000	0,0008768	0,0001798
3° quartil	0,0132474	0,0137853	0,0160454	0,0141066
Máximo	0,0778735	0,0907435	0,1046219	0,0678937
Desvio Padrão	0,02193101	0,02289646	0,02762633	0,02156206
ADF.test	p-valor<0,01	p-valor<0,01	p-valor<0,01	p-valor<0,01
PP.test	p-valor<0,01	p-valor<0,01	p-valor<0,01	p-valor<0,01

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

¹³ P-valor é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema que aquela observada em uma amostra, sob a hipótese nula.

A figura 6 apresenta os histogramas para cada ativo, que demonstra as distribuições de frequências dos log-retornos em um gráfico de barras, onde as bases de cada barra no eixo horizontal representam as classes (divididas de forma uniforme) e o eixo vertical mostra a frequência de observações por classe. Pode-se verificar que para Itaú e Bradesco as caudas são ligeiramente mais alongadas à direita, enquanto para Petrobrás e Vale são mais alongadas à esquerda.

Figura 6 – Histogramas dos log-retornos dos ativos



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

A assimetria das distribuições de log-retornos dos ativos pode ser verificada a partir do coeficiente de assimetria. A tabela 3 apresenta os coeficientes de assimetria calculados a partir do pacote *Pastecs* no software *R*. Onde coeficientes menores que (-1) caracterizam uma distribuição assimétrica negativa, maiores que 1 assimétrica positiva e valores entre (-1) e 1 caracterizam uma distribuição simétrica.

Tabela 3 - Coeficientes de assimetria para as distribuições dos log-retornos dos ativos

	Coeficiente de assimetria
ITUB4	0,68
BBDC4	1,37
PETR4	-5,56
VALE3	0,03

Elaborado pelo autor (2022)

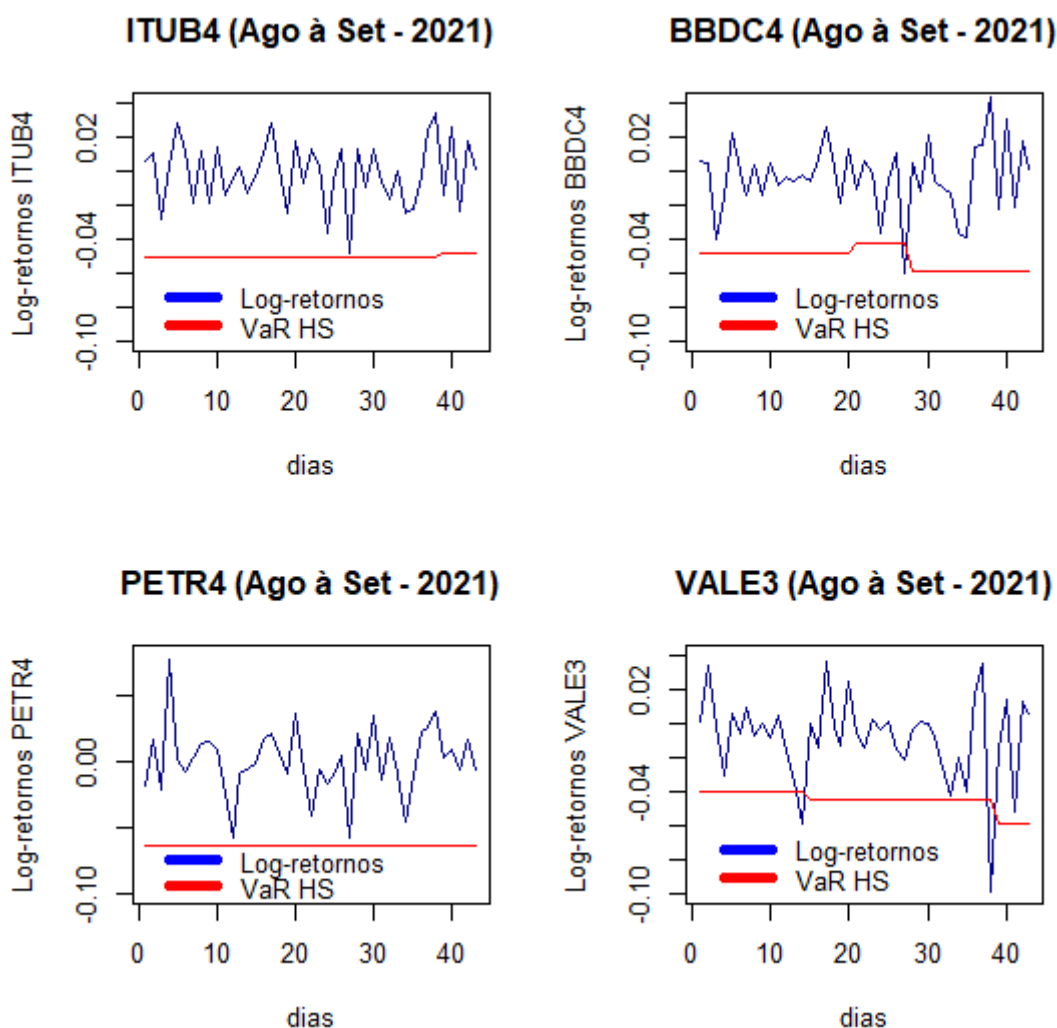
4.6 Aplicação univariada

Serão utilizados os métodos de Simulação Histórica (*HS*), *EWMA*, *GARCH* Normal e *Skew-t-GARCH*.

4.6.1 Simulação Histórica

Conforme a seção 3.7.3, o $VaR_{lnr}(\alpha)$ *HS* para um ativo (univariado) é dado pelo $(W_E * \alpha)$ -ésimo valor do vetor de log-retornos (ordenado de forma crescente). Temos que $300 * 0,01 = 3$, portanto o *VaR* de um ativo no dia t , será dado pelo 3º valor do seu respectivo vetor de log-retornos históricos ordenado.

A figura 7 apresenta o $VaR_{lnr}(1\%)$ para os 43 dias úteis de negociação dos meses de agosto e setembro de 2021, onde a série em azul são os log-retornos observados e em vermelho o *VaR*.

Figura 7 - Predições de *VaR HS* para os log-retornos dos ativos

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Pode-se observar que os log-retornos das ações do Itaú e da Petrobrás não superaram nenhuma vez o valor do *VaR*. Os log-retornos das ações do Bradesco ultrapassaram 1 vez o valor do *VaR*, enquanto para os log-retornos das ações da Vale o *VaR* falhou 2 vezes. O *VaR* para os log-retornos das ações da Petrobras são constantes, isso ocorre porque para as 43 janelas utilizadas o 3º log-retorno (em ordem crescente) foi o mesmo, isto é, nenhum desses 3 menores log-retornos saiu da amostra e nenhum menor entrou.

4.6.2 EWMA

Para o *EWMA* univariado, conforme a seção 3.7.1 utilizando a equação 11, temos que as estimativas de variância condicional *EWMA* univariadas para um dia t , para os 4 ativos da carteira, são dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{t,1}^2 &= \lambda * \hat{\sigma}_{t-1,1} + (1 - \lambda) * y_{t-1,1}^2 \\ \hat{\sigma}_{t,2}^2 &= \lambda * \hat{\sigma}_{t-1,2} + (1 - \lambda) * y_{t-1,2}^2 \\ \hat{\sigma}_{t,3}^2 &= \lambda * \hat{\sigma}_{t-1,3} + (1 - \lambda) * y_{t-1,3}^2 \\ \hat{\sigma}_{t,4}^2 &= \lambda * \hat{\sigma}_{t-1,4} + (1 - \lambda) * y_{t-1,4}^2\end{aligned}$$

onde o subscrito (1, 2, 3, 4), representa Itaú (ITUB4), Bradesco (BBDC4), Petrobrás (PETR4) e Vale (VALE3), respectivamente. Será utilizado $\lambda = 0,94$, conforme recomendado J.P. Morgan (1963).

O $VaRlnr(1\%)$ no tempo t , com $t = (389, \dots, 431)$ sendo os 43 dias úteis de negociação referentes aos meses de agosto e setembro de 2021, para cada ativo é então:

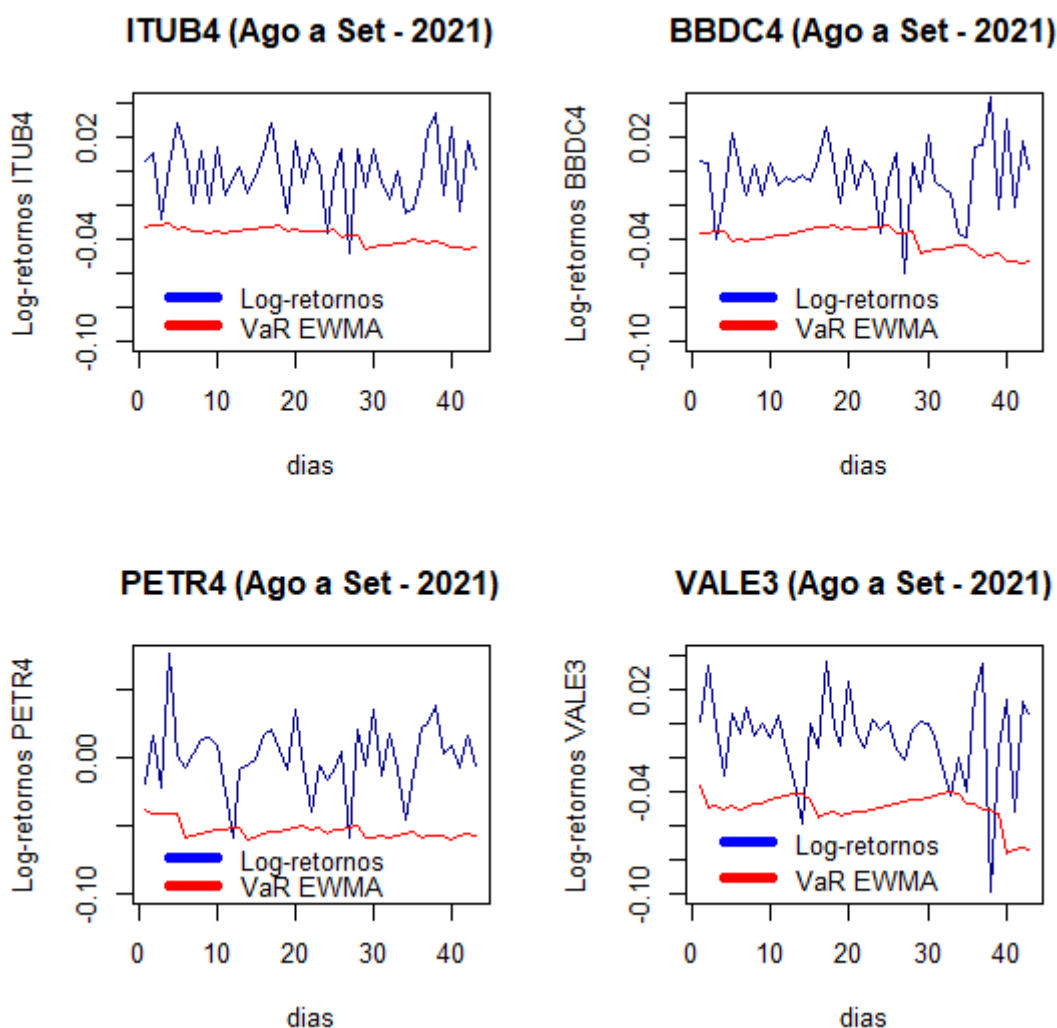
$$\begin{aligned}VaRlnr(1\%)_{t,1} &= \hat{\sigma}_{t,1}^2 * z(0,01) \\ VaRlnr(1\%)_{t,2} &= \hat{\sigma}_{t,2}^2 * z(0,01) \\ VaRlnr(1\%)_{t,3} &= \hat{\sigma}_{t,3}^2 * z(0,01) \\ VaRlnr(1\%)_{t,4} &= \hat{\sigma}_{t,4}^2 * z(0,01)\end{aligned}$$

onde $z(0,01)$ é o primeiro quantil de uma distribuição normal padrão.

A figura 8 apresenta o VaR *EWMA* diário ao nível de significância $\alpha = 1\%$, para os 43 dias úteis de negociação dos meses de agosto a setembro de 2021, em comparação com os log-retornos observados no período.

Os modelos *EWMA* apresentaram 2, 3, 2 e 3 falhas para os log-retornos das ações do Itaú, Bradesco, Petrobrás e Vale, respectivamente.

Figura 8 - Predições de VaR EWMA para os log-retornos dos ativos



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Como discutido na seção 3.7.1, a estimativa de volatilidade do método *EWMA* atribui um peso maior as observações mais recentes, fazendo com que o *VaR* responda mais rapidamente as variações dos log-retornos.

4.6.3 GARCH

Utilizando a equação 17 da seção 3.7.2.2, a estimativa de volatilidade *GARCH(1,1)* de um ativo (univariada) no tempo t é:

$$\sigma_{t,i}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1,i}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1,i}^2$$

E pela equação 6, o *VaR* na forma de log-retorno, ao nível de significância α , considerando os resíduos com distribuição Normal Padrão é:

$$VaRlnr(\alpha)_{t,i} = \sigma_{t,i}^2 * z(\alpha)$$

onde $z(\alpha)$ é o quantil da probabilidade α de uma distribuição Normal Padrão.

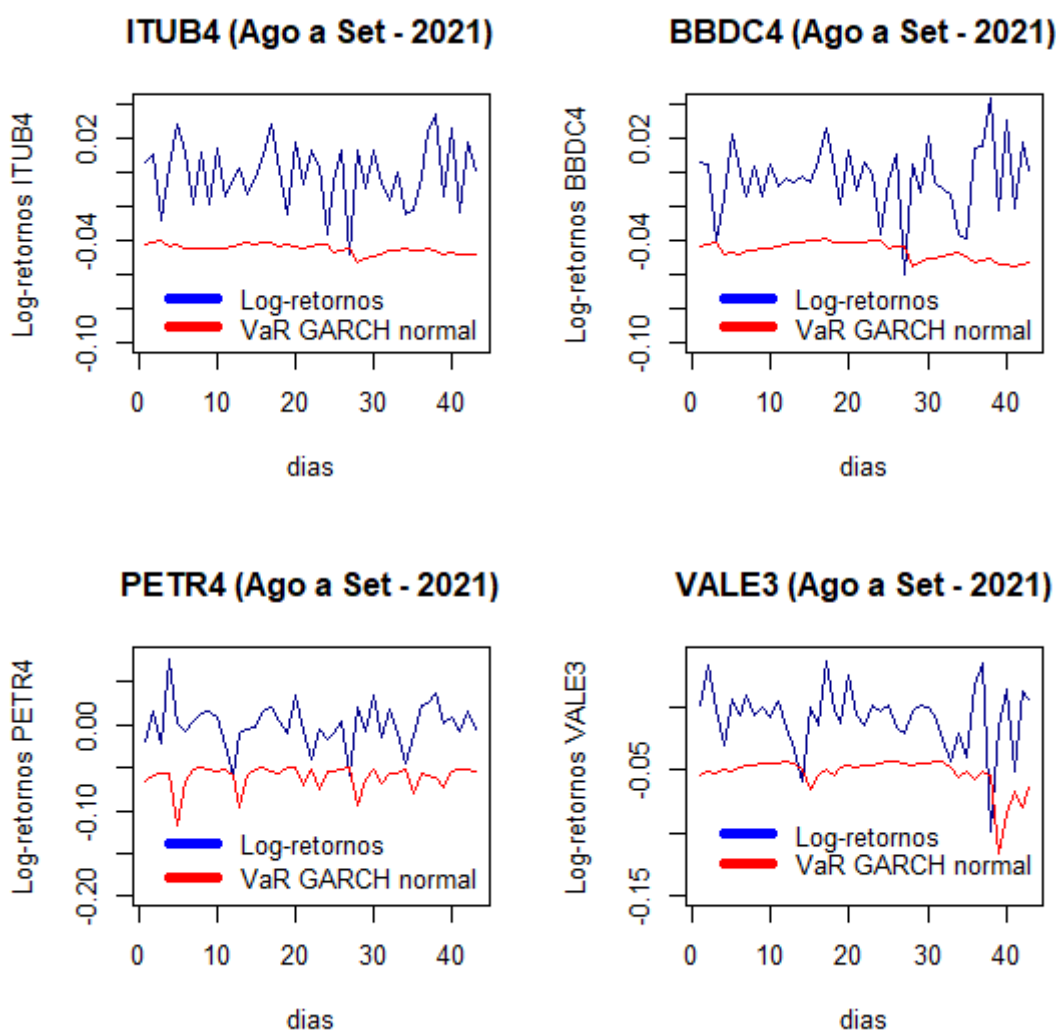
Assumindo que os resíduos sigam distribuição t de *Student* distorcida, o *VaR Skew-t-GARCH* é:

$$VaRlnr(\alpha)_{t,i} = \sigma_{t,i}^2 * \psi(\alpha, l, s)$$

onde $\psi(\alpha, l, s)$ é o quantil da probabilidade α de uma distribuição t de *Student* distorcida com l graus de liberdade e parâmetro de distorção s .

A figura 9 apresenta o *VaR GARCH* Normal diário, de ordem (1,1) ao nível de significância $\alpha = 1\%$, para os 43 dias úteis de negociação referentes aos meses de agosto e setembro de 2021, em comparação com os log-retornos observados no período.

Figura 9 - Predições de *VaR GARCH* Normal (1,1) para os log-retornos dos ativos

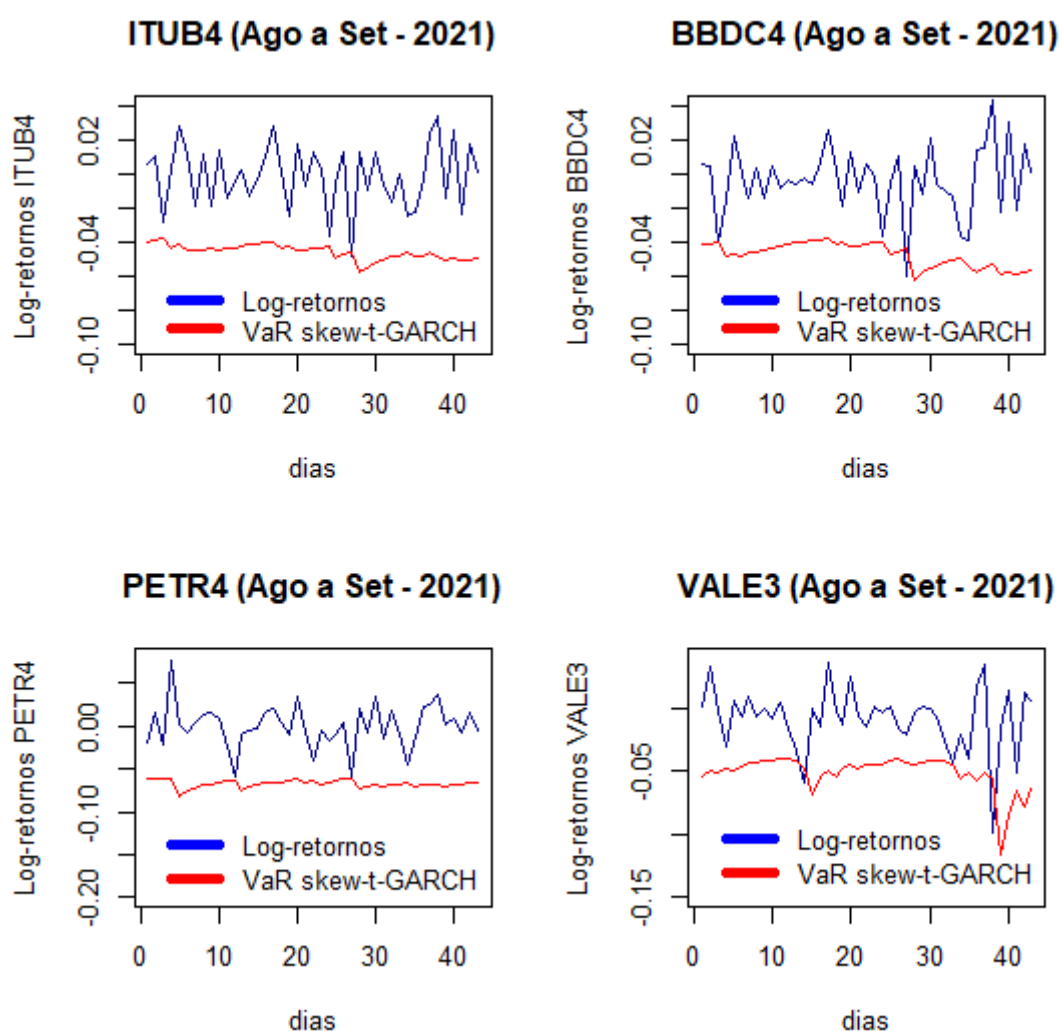


Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Observa-se que houve apenas 1 violação para os log-retornos das ações do Itaú e do Bradesco, enquanto para os log-retornos das ações da Vale ocorreram 2 falhas. Para os log-retornos da Petrobrás, além da ocorrência de 1 falha, pode-se identificar superestimacões do *VaR* em alguns pontos, podendo indicar uma relativa falta de ajuste.

A Figura 10 apresenta o *VaR Skew-t-GARCH* diário de ordem (1,1), ao nível de significância $\alpha = 1\%$, para os 43 dias úteis de negociação dos meses de agosto e setembro de 2021, em comparação com os log-retornos observados no período.

Figura 10 - Predições de *VaR Skew-t-GARCH* (1,1) para os log-retornos dos ativos



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Pode-se notar que as previsões de *VaR* para as ações do Itaú, Bradesco e Vale são bem semelhantes as apresentadas pelo *GARCH* Normal, entretanto para as

ações da Petrobras o método *Skew-t-GARCH* conseguiu obter estimativas mais próximas da realidade sem aparentes problemas de superestimação.

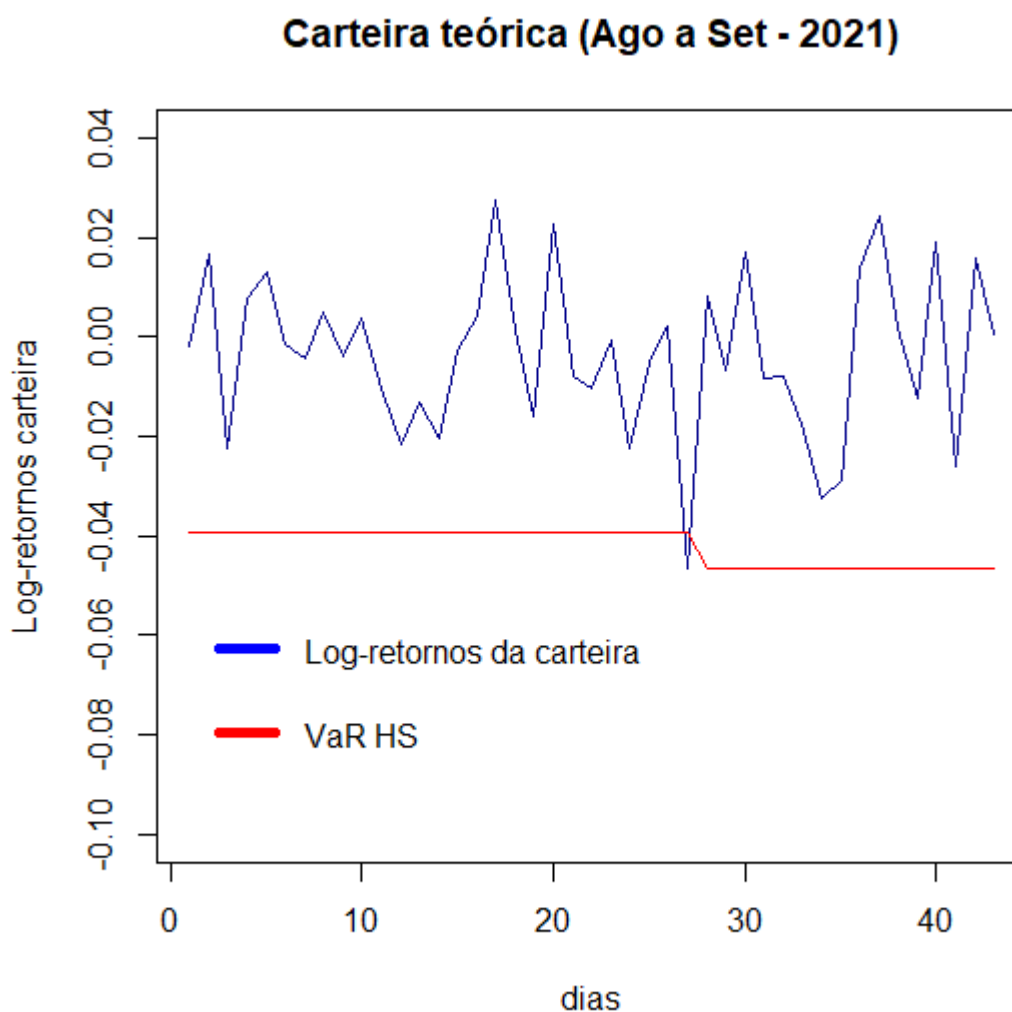
4.7 Aplicação multivariada

De acordo com Danielsson (2011), a extensão multivariada dos modelos *GARCH* apresentados é conceitualmente simples, todavia na prática é uma tarefa bastante desafiadora devido a uma série de problemas numéricos que surgem na estimativa, dadas as condições de estacionariedade de covariâncias mais complicadas em relação aos modelos univariados. Programar a função de verossimilhança é relativamente simples, enquanto abordar os problemas numéricos subsequentes não é, sendo necessários algoritmos numéricos para a resolução dos problemas, complicando consideravelmente o processo de programação. Segundo o autor, até a data da publicação do livro, não existiam implementações confiáveis de modelos *GARCH* multivariados em *R* ou *Matlab*. Sendo assim, serão utilizados apenas os métodos de Simulação Histórica (*HS*) e *EWMA*.

4.7.1 Simulação Histórica

Conforme a seção 3.7.3, o $VaR_{lnr}(\alpha)$ *HS* para uma carteira de ativos (multivariado) é dado pelo $(W_E * \alpha)$ -ésimo valor do vetor de log-retornos da carteira (descrito pela equação 19) ordenado de forma crescente. Temos que $300 * 0,01 = 3$, portanto o *VaR* de um ativo no dia t , será dado pelo 3º valor do seu respectivo vetor de log-retornos históricos ordenado.

A figura 11 apresenta o $VaR_{lnr}(1\%)$ para os 43 dias úteis de negociação dos meses de agosto e setembro de 2021, onde a série em azul são os log-retornos observados e em vermelho o *VaR*.

Figura 11 - Predições de *VaR HS* para os log-retornos da carteira teórica (agosto a setembro - 2022)

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Pode-se observar que os log-retornos observados da carteira superaram o *VaR* em apenas uma observação.

4.7.2 EWMA

Conforme a seção 3.6, o *VaRlnr(a)* paramétrico de uma carteira no tempo t é dado pela equação 9, sendo necessária uma estimativa de volatilidade da carteira que é calculada a partir da equação 7:

$$\sigma_{t, Carteira}^2 = \mathbf{w} * \boldsymbol{\Sigma}_t * \mathbf{w}' = [w_1 \quad \dots \quad w_C] * \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_C \end{bmatrix}$$

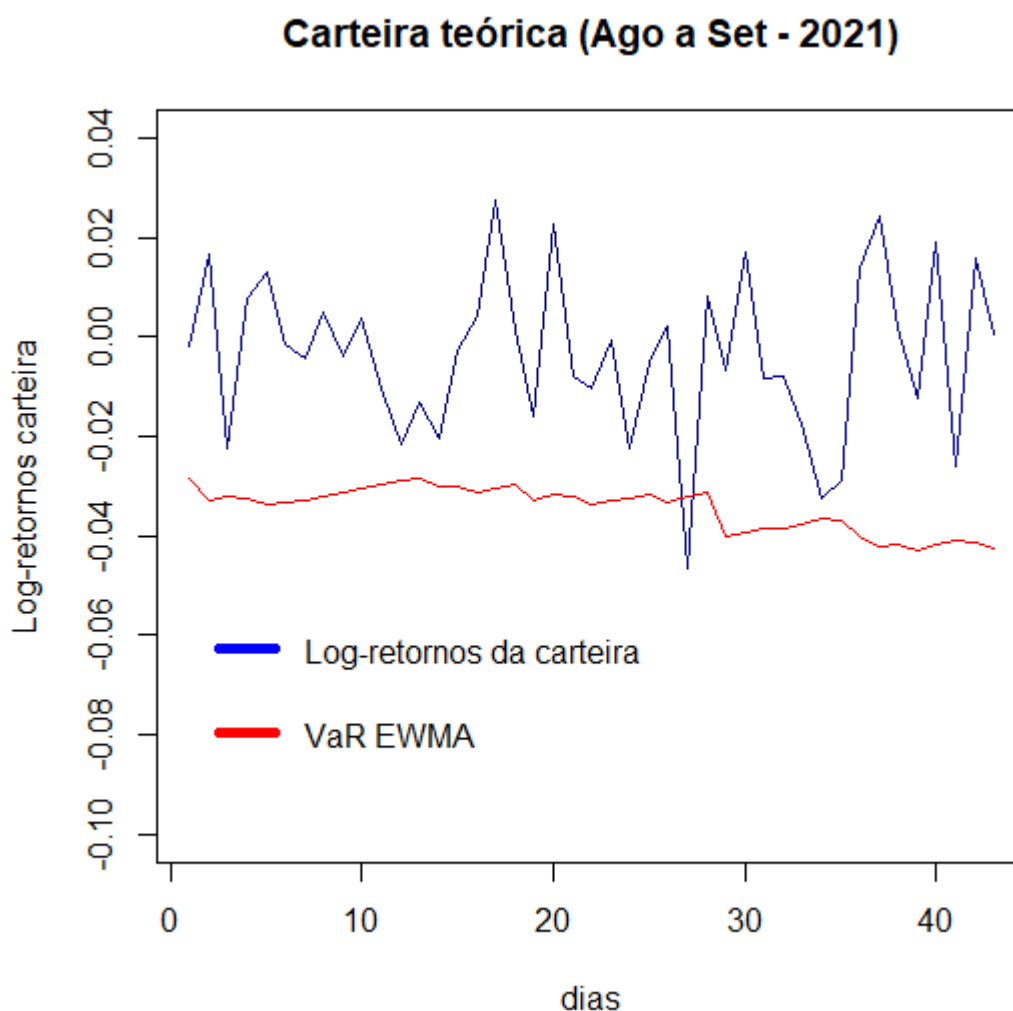
Como apresentado na seção 4.1, sabe-se que o vetor de pesos da carteira é:

$$\mathbf{w} = [0,2744262 \quad 0,2693409 \quad 0,2621693 \quad 0,1940636]$$

A matriz de covariâncias (volatilidades) Σ_t , será estimada pela equação 12 segundo o método *EWMA*, utilizando $\lambda = 0.94$ para que a análise seja baseada nos últimos 30 dias da janela.

A figura 12 apresenta o *VaRlnr(1%) EWMA* para os 43 dias úteis dos meses de agosto e setembro de 2021 em comparação com os log-retornos da carteira (calculados a partir da equação 19).

Figura 12 - Predições de *VaR EWMA* para os log-retornos da carteira



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Pode-se observar que os log-retornos da carteira ultrapassaram o valor do *VaR* em apenas uma observação.

4.8 Backtesting

Além da comparação gráfica do *VaR* estimado com o observado, deve-se verificar se o número de vezes que o *VaR* falhou é significativo ou não, com o teste de proporção de falhas de Kupiec.

De acordo com a seção 3.8.2, as hipóteses testadas são:

$$H_0: p = \hat{p}$$

$$H_A: p \neq \hat{p}$$

onde a hipótese nula (H_0) é de que a proporção de falhas esperada é igual a proporção de falhas observada. A estatística do teste da equação 29:

$$LR = -2 \ln[(1 - p^*)^{n-x} * (p^*)^x] + 2 \ln[(1 - \hat{p})^{n-x} * (\hat{p})^x] \leq \chi_{1,\alpha}^2$$

onde x é o número de vezes em que o *VaR* falhou, obteve-se para os modelos construídos no máximo 3 falhas, portanto calculamos LR para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Para os modelos que não tiveram nenhuma falha ($x = 0$), a estatística LR é:

$$\begin{aligned} LR &= -2 \ln[(1 - 0,01)^{43-0} * (0,01)^0] + 2 \ln \left[\left(1 - \left(\frac{0}{43}\right)\right)^{43-0} * \left(\frac{0}{43}\right)^0 \right] \leq 6,6349 \\ &= 0,8643289 \leq 6,6349. \end{aligned}$$

Os modelos com uma falha ($x = 1$):

$$\begin{aligned} LR &= -2 \ln[(1 - 0,01)^{43-1} * (0,01)^1] + 2 \ln[(1 - (1/43))^{43-1} * (1/43)^1] \leq \chi_{1, 0,01}^2 \\ &= 0,5556066 \leq 6,6349. \end{aligned}$$

Os modelos com duas falhas ($x = 2$):

$$\begin{aligned} LR &= -2 \ln[(1 - 0,01)^{43-2} * (0,01)^2] + 2 \ln[(1 - (2/43))^{43-2} * (2/43)^2] \leq \chi_{1, 0,01}^2 \\ &= 3,067097 \leq 6,6349. \end{aligned}$$

Os modelos com três falhas ($x = 3$):

$$\begin{aligned} LR &= -2 \ln[(1 - 0,01)^{43-3} * (0,01)^3] + 2 \ln[(1 - (3/43))^{43-3} * (3/43)^3] \leq \chi_{1, 0,01}^2 \\ &= 6,673868 > 6,6349. \end{aligned}$$

Dessa forma, rejeita-se a hipótese nula apenas para os modelos que apresentaram 3 falhas, ao nível de significância $\alpha = 1\%$, e podemos concluir com 99% de confiança estatística que a proporção de falhas esperada nesses modelos é diferente da proporção de falhas observada. Portanto, os modelos *EWMA* univariados para os log-retornos das ações do Bradesco e da Vale foram reprovados pelo *Backtesting* de acordo com o critério de Kupiec, o número de vezes em que o *VaR*

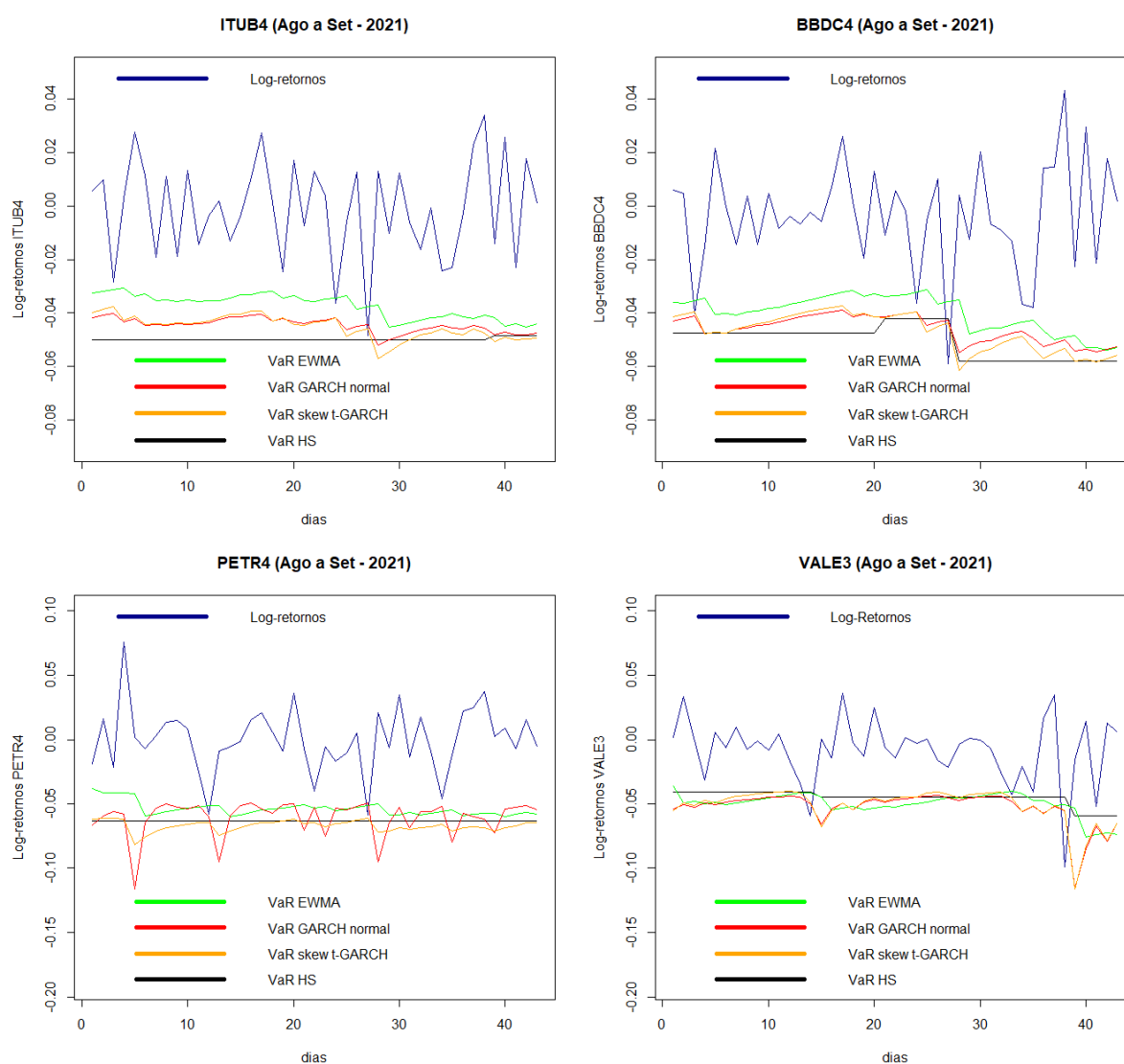
falhou foi estatisticamente significativa. Os demais modelos, que apresentaram até 2 falhas, foram validados.

4.9 Comparação dos resultados

4.9.1 Comparação das análises univariadas

Para comparação, a figura 13 apresenta as estimativas de *VaR* pelos 4 métodos para cada um dos ativos, junto com os log-retornos observados nos meses de agosto e setembro de 2021.

Figura 13 - *VaR* das 4 metodologias univariadas para os log-retornos de cada um dos ativos



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Pode-se notar que para os log-retornos das 4 ações o método *EWMA* obteve as menores previsões de perda, isto é, as maiores estimativas em valor numérico. Sendo reprovado para os log-retornos das ações do Bradesco e da Vale ao apresentar 3 falhas.

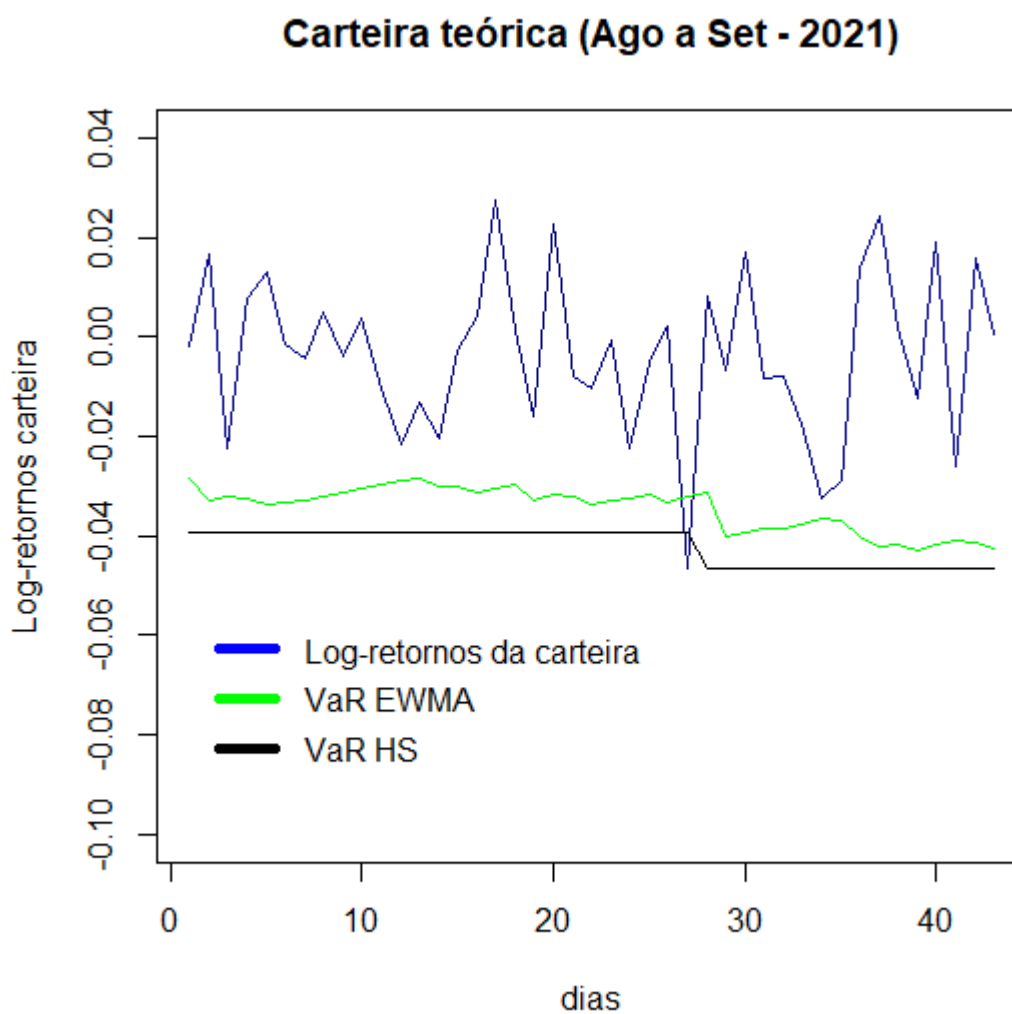
Os modelos *GARCH* Normal obtiveram boas previsões para as ações do Itaú, Bradesco e Vale, onde os modelos *Skew-t-GARCH* obtiveram resultados muito próximos, entretanto para as ações da Petrobras o modelo *Skew-t-GARCH* mostrou previsões mais próximas da realidade enquanto o *GARCH* Normal aparenta dificuldade de ajuste.

Pode-se notar em relação aos modelos de Simulação Histórica que eles não são capazes de responder rapidamente as variações da série diferentemente dos modelos *GARCH* e *EWMA*, o que é justamente a desvantagem do modelo apresentada na seção 4.6.1, por atribuir o mesmo peso a todas as observações da janela. Mesmo assim, as suas estimativas ainda são próximas as desses modelos.

4.9.2 Comparação das análises multivariadas

A figura 14 apresenta as estimativas de *VaR* da carteira pelos métodos *HS* e *EWMA*, juntamente com os log-retornos observados nos meses de agosto e setembro de 2021.

Figura 14 - VaR HS e EWMA para os log-retornos da carteira



Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Pode-se notar que assim como na análise univariada, o método *EWMA* obteve novamente as menores estimativas de perda (em valor numérico as maiores), entretanto os dois modelos obtiveram o mesmo número de falhas ($x = 1$).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foram expostos 5 métodos de estimação do *Value at Risk*: Simulação Histórica (*HS*), Média Móvel Exponencialmente Ponderada (*EWMA*), *GARCH* Normal, *Skew-t-GARCH* e Teoria dos Valores Extremos (*EVT*).

Não foi possível a aplicação do modelo *EVT* na base de dados, devido a exigência do modelo de uma amostra de no mínimo 1000 observações e a utilização de níveis de significância menores de 0,4% ($\alpha \leq 0,004$). Esta primeira exigência não seria possível, dado que se tem para o período de janeiro de 2020 a setembro de 2021 um total de 432 log-retornos, para uma amostra de 1000 log-retornos seria necessário um período de aproximadamente 4 anos, o que não condiz com o objetivo do trabalho de realizar estimativas no período referente à pandemia da COVID-19. Em relação ao nível de significância, utilizar um nível menor que 1% impossibilitaria a comparação com os outros métodos, além de $\alpha \leq 0,004$ para dados diários corresponder a uma única observação anual (dado que cada ano possui aproximadamente 250 dias úteis de negociação).

No estudo foram apresentadas estimativas univariadas para os log-retornos das ações segundo os métodos *HS*, *EWMA*, *GARCH* Normal e *Skew-t-GARCH*. E estimativas multivariadas foram fornecidas para os métodos *HS* e *EWMA*. Foram reprovados pelo *Backtesting* os modelos *EWMA* univariados para os log-retornos das ações do Bradesco e da Vale, os demais modelos foram validados.

Observou-se que os modelos *EWMA*, possuem a capacidade de se ajustar rapidamente às variações dos log-retornos por atribuir maior peso às observações mais recentes, apresentam no geral as menores estimativas de perda (as maiores em valor numérico). Dois modelos univariados foram reprovados devido produzirem resultados muito próximos dos observados, o que não é tão interessante em um período em que as volatilidades são muito altas, possuindo maior chance de falhar. Todavia pode ser uma boa alternativa em períodos com menor volatilidade, onde seria capaz de fornecer estimativas mais precisas que os outros métodos.

A partir das análises gráficas foi possível verificar que o método *Skew-t-GARCH* obteve um melhor ajuste em relação ao *GARCH* Normal. A suposição de normalidade dos resíduos não é muito adequada para esse caso, nos modelos *GARCH* os log-retornos positivos tem o mesmo efeito que os log-retornos negativos por incorporar a

sua forma quadrática, a utilização da t de *Student* distorcida ajuda a amenizar esse problema, tornando-o capaz de fornecer boas estimativas.

Os métodos de Simulação Histórica não são capazes de se ajustar rapidamente às variações da série de log-retornos, pela sua definição de atribuir o mesmo peso a todas as observações. Todavia obteve resultados próximos aos outros métodos, e possui a vantagem de não estar sujeito a erros de estimação, além de capturar diretamente a dependência não linear, que os métodos paramétricos não conseguem.

O *VaR* se mostrou capaz de realizar boas estimativas mesmo em um período de grande instabilidade do qual não se dispunha de muitos dados. Quando combinado com outras ferramentas, como o *Expected Shortfall* e o *Stress Test*, tornam-se uma metodologia muito eficiente na mitigação dos riscos de mercado.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. **A new look at the statistical model identification**. IEEE Transactions on Automatic Control, Boston, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- ALEXANDER, C. **Market Risk Analysis: Value at Risk Models**. John Wiley, v. 4, 2009.
- BOLLERSLEV, T. **Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity**. Journal of Econometrics, v.31, p.307-327, 1986.
- B3: A Bolsa do Brasil. **Cotações Históricas**. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/historico/mercado-a-vista/cotacoes-historicas. Acesso em: 3 Dez 2021.
- COLES, S. **An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values**. Springer, London, 2001.
- COMMITTEE, B. **Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework**. Bank of International Settlements, 2004. Disponível em: <http://www.bis.org/publ/bcbs107.htm>. Acesso em: 5 maio 2021.
- COMMITTEE, B. **International regulatory framework for banks (Basel III)**. Bank of International Settlements, 2010. Disponível em: <http://www.bis.org/bcbs/basel3.htm>. Acesso em: 5 maio 2021.
- DANIELSSON, J. **Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk, with Implementation in R and Matlab**. John Wiley & Sons, 2011.
- DICKEY, D.; FULLER, W. **Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root**. Journal of the American Statistical Association, v. 74, n. 366, p. 427-431, 1979.
- DUARTE, A. M. **Risco: Definições, tipos, mediação e recomendações para o gerenciamento**. Resenha BM&F, 114, p. 25-33, 1996.
- DOWD, K. **Beyond Value at Risk: The new science of Risk Management**. John Wiley & Sons, West Sussex, 1998.
- ENGLE, R. F. **Autoregressive Conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation**. Econometrica, n.50, p.987-1007, 1982.
- FISHER, R. A.; TIPPETT, L.H.C. **Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample**. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, n. 24, p. 180-190, 1928.
- HULL, J. C. **Value at Risk Subject: Opinions, Futures, and other derivatives**. 5. ed. Pearson, 2002.
- JENKINSON, A. F. **The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements**. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, v. 81, p. 158-171, 1955.
- JORION, P. **Financial Risk Manager Handbook**. 5. ed. John Wiley & Sons, 2003.
- J.P. MORGAN & REUTERS. **RiskMetrics: Technical Document**. New York, Fourth Edition, 1996. Disponível em: <https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ae2-3449d5c7e95a>. Acesso em: 5 maio 2021.
- KUPIEC, P. H. **Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models**. The Journal of Derivatives, v.3, n.2, p.73-84, 1995. Disponível em: <https://jod.pm-research.com/content/3/2/73>. Acesso em: 3 nov. 2020.
- MARKOWITZ, H. **Portfolio selection**. The Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952. Disponível em:

https://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf. Acesso em: 3 ago. 2021.

MANSUR, A. L.; BORDALO, E. **Estudo Comparativo entre Diferentes Modelos de Cálculo de Value at Risk para Medição dos Riscos Financeiros de uma Carteira de Opções**. 2012. TCC (Graduação em Engenharia de Produção) - UFRJ/Escola Politécnica, Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10004631.pdf>. Acesso em: 24 set. 2019.

MORETIN, P. A.; TOLOI, C. M. **Análise de Séries Temporais**. 2. ed. Edgard Blücher, 2006.

PHILLIPS, P; PERRON, P. **Testing for unit root in time series regression**. Biometrika, v. 75, n. 2, p. 335-346, 1988.

ROCKFELLAR, R. T.; URYASEV, S. **Optimization of conditional Value-at-Risk**. Journal of Risk, London, v. 2, n. 3, p. 21-41, 2000.

SAIN, P. **Estudo comparativo dos modelos de Value-at-Risk para instrumentos pré-fixados**. 2011. Dissertação (Mestrado em Administração) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/12/12139/tde-05112002-193028/pt-br.php>. Acesso em: 3 ago. 2021.

SCHWARZ, G. **Estimating the dimensional of a model**. Annals of Statistics, Hayward, v.6, n.2, p.461-464, 1978.

TSAY, R. S. **Analysis of Financial Time Series**. 2. ed. John Wiley & Sons, 2005.

ZAPPA, L. E. **Value at Risk: Aplicação de diferentes metodologias para mensurar o risco de mercado de uma carteira teórica de ações**. 2013. TCC (Graduação em Engenharia de Produção) – Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://pantheon.ufrj.br/bitstream/11422/11537/1/monopoli10009055.pdf>. Acesso em: 5 maio 2021.

BIBLIOGRAFIAS

- BERA, A. K.; JARQUE, C. M. **Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence.** *Economic Letters* 7, v. 4, p. 313-318, 1981.
- CAMPOS, A. B. **Gerenciamento de Risco de Mercado em fundos de investimento: A abordagem do Value-at-Risk.** 2009. TCC (Graduação em Administração) – Faculdade de Administração e Ciências Contábeis, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <https://pantheon.ufrj.br/handle/11422/4990?locale=es>. Acesso em: 5 maio 2021.
- CHUN, L. Y. **Comparativo de metodologias de mensuração de VaR para o mercado financeiro brasileiro.** 2008. Dissertação (Mestrado em Finanças e Economia) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/2089>. Acesso em: 5 maio 2021.
- CROUHY, M. **Gerenciamento de risco: abordagem conceitual e prática: uma visão integrada dos riscos de crédito, operacional e de mercado.** São Paulo: Qualitymark, 2004.
- ELTON, J.; EDWIN, A. **Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos.** São Paulo. Atlas, 2004.
- EPSTEIN, N. **O Value at Risk na Avaliação de Risco do Índice Bovespa.** 2009. TCC (Graduação em Administração) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/19157>. Acesso em: 27 mar. 2021.
- GAIO, L. E.; PIMENTA, T. **Value-at-Risk da Carteira do Ibovespa: uma análise com o uso de modelos de memória longa.** *Gest. Prod.*, São Carlos, v. 19, n. 4, p. 779-792, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/gp/v19n4/a09v19n4.pdf>. Acesso em: 09 dez. 2019.
- GALDI, F. C.; PEREIRA, L. M. **Valor em Risco (VaR) utilizando modelos de previsão de volatilidade: EWMA, GARCH e Volatilidade Estocástica.** *Brazilian Business Review*, v. 4, n. 1, p. 74-95, 2007.
- GOMES, P. **Utilização da metodologia Value at Risk para estimar o risco de uma carteira composta por bancos cotados na Euronext Lisbon.** 2017. Dissertação (Mestrado em Gestão das Organizações) – Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, 2017. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/153415528.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2021.
- GUJARATI, D. N. **Econometria Básica.** 5. ed. AMGH, 2011.
- HEAD, K. H. **Manual of Soil Laboratory Testing: Effective Stress Test.** 2. ed. v. 3. Inglaterra: West Sussex, 1986.
- JORION, P. **Value at Risk: The new benchmark for controlling Market Risk.** 2. ed. McGraw-Hill, 2000.
- MORETIN, P. A.; **Econometria Financeira: Um curso em séries temporais financeiras.** 3. ed. Edgard Blücher, 2017.
- SILVA, D. F. **Comparativo do poder preditivo de modelos VaR em mercados desenvolvidos e emergentes: Gestão de risco e clusters de volatilidade.** 2018. Dissertação (Mestrado em Ciências Contábeis e Mercado Financeiro) – Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/32581>. Acesso em: 8 maio 2021.
- SILVA, I. F. **O Acordo de Basileia II e o impacto na gestão de riscos da banca e no financiamento das empresas.** Universidade do Minho Escola de Economia e Gestão, 2008. Disponível em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/7940/2/Disserta%C3%A7%C3%A3o_Irm%C3%A9nio_Silva_24_Maio_08.pdf. Acesso em: 29 mar. 2021.

GLOSSÁRIO

Ativo financeiro: Parte do patrimônio de uma pessoa física ou jurídica, na forma de dinheiro ou títulos, que podem ser negociados.

Backtesting: Processo de testagem de modelos sistemáticos, que consiste em comparar as estimativas obtidas com os dados observados.

Carteira de investimentos (ou portfólio): Trata-se de um grupo de ativos que pertence a um investidor, pessoa física ou jurídica, estes ativos podem ser ações, fundos, títulos públicos, aplicações imobiliárias, entre outros.

Commodities: Corresponde aos produtos básicos globais não industrializados (em seu estado bruto), cujo preço pode ser determinado pela oferta e procura internacional, como por exemplo: açúcar, café, milho, ouro, petróleo, soja, trigo, etc.

Conglomerados de volatilidade: Quando grandes mudanças de preços de ativos são seguidas por outras grandes mudanças de preços.

Horizonte temporal: Intervalo de tempo entre as negociações e conseqüentemente entre as previsões.

Índice Mínimo de Capital (ou Índice de Basileia): Parcela de capital que a instituição deve manter em relação aos seus empréstimos, para fins de mitigação do risco de crédito.

Liquidez: Corresponde à velocidade e facilidade com a qual um ativo (ou bem) pode ser convertido em caixa (dinheiro).

Requerimento mínimo de capital (ou capital regulatório): Trata-se do valor mínimo de capital que a instituição deve manter, por exigência do órgão regulador, para que possa realizar suas operações legalmente, podendo absorver eventuais perdas decorrentes das flutuações de mercado ou eventos atípicos.

Retorno: É a valorização ou desvalorização de um ativo financeiro ao longo de um horizonte de negociação.

Risco de crédito: Probabilidade da outra contraparte não honrar com o pagamento de uma operação.

Risco de liquidez: Probabilidade de a instituição não ser capaz de honrar suas obrigações esperadas e inesperadas, devido à dificuldade de encontrar compradores e vendedores para uma determinada posição.

Risco de mercado: Probabilidade de as variações dos preços dos ativos gerarem perdas à instituição.

Risco legal: Probabilidade de a instituição não estar em conformidade com as normas obrigatórias estabelecidas para a sua atividade, ou quando uma transação não pode ser amparada por lei causando prejuízos a instituição.

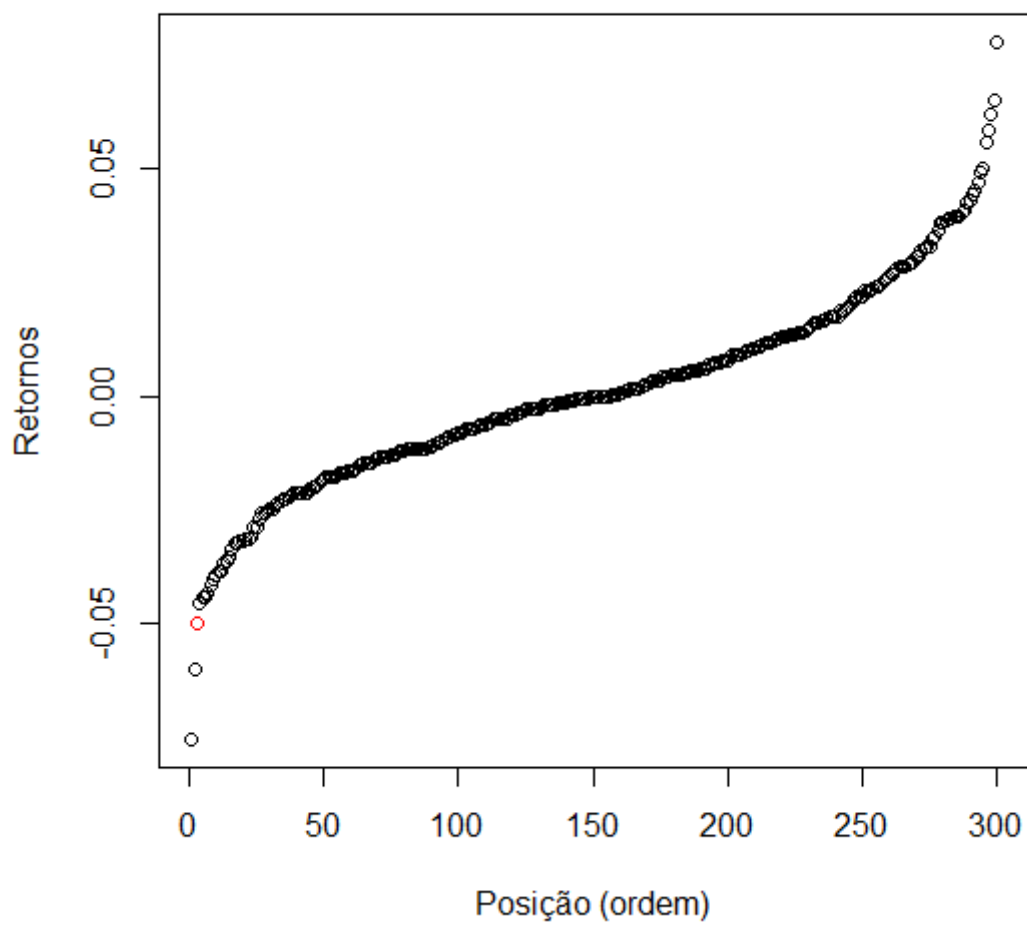
Risco operacional: Probabilidade de ocorrerem perdas resultantes de falhas em processos internos ou de eventos externos inesperados.

Série temporal (ou série histórica): Trata-se de uma coleção de observações de uma mesma variável feitas sequencialmente ao longo do tempo.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Vetor de log-retornos ordenado de uma janela de estimativa para o VaR de um dia

Vetor de retornos ordenado



APÊNDICE B – Saída do *Software R* para a previsão de volatilidade um passo à frente de uma janela de estimativa segundo modelo GARCH Normal

```

Title:
  GARCH Modelling

Call:
  garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = WEly1, cond.dist = "norm",
    include.mean = FALSE, trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
  data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x00000000067a7aa0>
 [data = WEly1]

Conditional Distribution:
  norm

Coefficient(s):
      omega      alphas      betas
2.8446e-05  6.7999e-02  8.7042e-01

Std. Errors:
  based on Hessian

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
omega  2.845e-05  2.356e-05   1.207   0.2274 *
alpha  6.800e-02  3.215e-02   2.115   0.0344 *
beta   8.704e-01  7.122e-02  12.222  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
  722.6425      normalized:  2.408808

Information Criterion Statistics:
      AIC      BIC      SIC      HQIC
-4.797617 -4.760579 -4.797814 -4.782794

```

APÊNDICE C - Saída do *Software R* para a previsão de volatilidade um passo à frente de uma janela de estimativa segundo modelo *Skew-t-GARCH*

```
GARCH Modelling

Call:
garchFit(formula = ~garch(1, 1), data = WEly1, cond.dist = "sstd",
         include.mean = FALSE, trace = FALSE)

Mean and Variance Equation:
data ~ garch(1, 1)
<environment: 0x000000000de7a990>
[data = WEly1]

Conditional Distribution:
sstd

Coefficient(s):
      omega      alphas      betas      skew      shape
2.9505e-05  7.9238e-02  8.6054e-01  1.1194e+00  8.9886e+00

Std. Errors:
based on Hessian

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
omega  2.951e-05  2.387e-05   1.236   0.2164 *
alpha  7.924e-02  3.976e-02   1.993   0.0463 *
beta   8.605e-01  7.234e-02  11.896  <2e-16 ***
skew   1.119e+00  8.676e-02  12.902  <2e-16 ***
shape  8.989e+00  4.347e+00   2.068   0.0387 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Log Likelihood:
721.1366    normalized: 2.403789

Information Criterion Statistics:
      AIC      BIC      SIC      HQIC
-4.774244 -4.712514 -4.774788 -4.749540
```