

LUIZ ANTONIO JACYNTHO

**IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA  
DE ORDEM FRACIONÁRIA UTILIZANDO COMO  
ENTRADA UM DEGRAU**

Ilha Solteira - SP  
2015



Luiz Antonio Jacyntho

**IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA  
DE ORDEM FRACIONÁRIA UTILIZANDO COMO  
ENTRADA UM DEGRAU**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.  
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Orientador (DEE-FEIS)

Ilha Solteira - SP  
2015

## FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação.

J12i	<p>Jacyntho, Luiz Antonio.</p> <p>Identificação de funções de transferência de ordem fracionária utilizando como entrada um degrau / Luiz Antonio Jacyntho. - Ilha Solteira : [s.n.], 2015 110 f.:il.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2015</p> <p>Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira</p> <p>Inclui bibliografia</p> <p>1. Identificação. 2. Entrada degrau. 3.Cálculo fracionário. 4. Função de transferência. 5. Integral fracionária. 6. Derivada fracionária.</p>
------	--

## CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

**TÍTULO:** Identificação de funções de transferência de ordem fracionária utilizando como entrada um degrau

**AUTOR:** LUIZ ANTONIO JACYNTHO

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Profa. Dra. GRACE SILVA DEAECTO  
Departamento de Mecânica Computacional / Universidade Estadual de Campinas

  
Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC  
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina

Data da realização: 26 de março de 2015.

## **DEDICATÓRIA**

*À minha família, em especial a minha esposa Sueide, minha filha Gabriela e ao meu orientador Marcelo.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus em primeiro lugar, pois sem a sua vontade eu não estaria aqui hoje. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- À minha esposa, Sueide, pelo apoio, incentivo e carinho sempre presente. Se não fosse por ela não teria conseguido forças para chegar até a reta final;
- Ao meu orientador, Professor Marcelo C. M. Teixeira, pela amizade, pela sua firmeza de caráter, pela dedicação, pela orientação segura em todos os momentos de minha jornada, por sua determinação e humildade;
- Ao Professor Rodrigo Cardim, meu segundo orientador que me acolheu na parte técnica, auxiliando nos problemas com o Matlab e Latex;
- Ao Professor Roberto Kawakami Harrop Galvão, pela parceria que propiciou grandes ensinamentos e frutos que ajudaram a me tornar um pesquisador mais lapidado;
- Ao Professor Edvaldo Assunção, que também sempre esteve presente em todos os momentos do meu estudo;
- Aos meus amigos e colegas do laboratório que de forma direta sempre me ajudaram, nunca negando um ensinamento que foi pedido.

## **EPÍGRAFE**

*“Ninguém pode voltar atrás e fazer um novo começo.*

*Mas qualquer um pode recomeçar*

*e fazer um novo fim.”*

***Francisco Cândido Xavier***



## RESUMO

São propostos nesta tese novos métodos de identificação de sistemas lineares invariantes no tempo, descritos através de Funções de Transferência (FT), estáveis ou instáveis, de ordem fracionária, utilizando como entrada um degrau. A primeira contribuição aprimora o desempenho de um método de identificação conhecido, para FT de ordem inteira, com a otimização de um parâmetro durante a identificação. Posteriormente, é proposto um novo método, que utiliza integradores de ordem fracionária, para a identificação de FT estáveis. Em seguida, propõe-se outro método que, além de utilizar integradores de ordem fracionária, faz uso de uma função exponencial convergente e também de um filtro, que combinados possibilitam a identificação de FT de ordem fracionária instáveis. Adicionalmente, um método ainda mais eficiente é proposto e o seu mecanismo de funcionamento baseia-se na resposta do sistema a uma entrada degrau, que multiplicada por diferentes exponenciais convergentes, gera um conjunto de sinais auxiliares para a obtenção do sinal final, necessário para identificar a FT, estável ou instável. Para comprovar a eficiência dos métodos propostos, foram realizadas várias identificações, com simulações numéricas, incluindo exemplos teóricos desenvolvidos no Matlab e experimentos práticos que foram realizados em laboratório, descritos a seguir: (i) função de transferência de um sistema de controle da posição de um carrinho acionado por um motor de corrente contínua; (ii) função de transferência relacionando a posição dos membros inferiores de pacientes hemiplégicos e paraplégicos sujeitos a uma estimulação elétrica funcional. Finalmente, é apresentada a identificação da função de transferência de uma rede RC tridimensional, que pode modelar circuitos para obter a resposta dielétrica de materiais compósitos contendo partículas isolantes e condutoras.

**Palavras-chave:** Identificação com entrada degrau. Cálculo fracionário. Sistemas lineares. Sistemas de ordem fracionária. Função de transferência. Integral fracionária. Derivada fracionária.

## ABSTRACT

This thesis proposes new methods for the identification of fractional order stable and unstable Transfer Functions (TF), based on the time response resulting from a single step excitation. Initially, the improvement of a known identification method for TF of integer order, considering the optimization of a parameter in the identification process, is presented. Then, a new method based on fractional order integrators, is proposed for the identification of stable TF. Moreover, another method for stable and unstable fractional order TF, also with fractional order integrators, that is based on the multiplication in the time domain of the plant output by a convergent exponential function and a suitable filter is proposed. Furthermore, a more efficient method is proposed, based on the multiplication in the time domain of the plant output by different convergent exponential functions and a suitable filter. Numerical examples using the Matlab software illustrate the theoretical results and are used for comparisons, including the following cases with experimental data: (i) TF of a control system for the position of a car using a DC motor; (ii) TF for of the leg position of paraplegic and hemiplegic patients subject to a functional electrical stimulation. Finally, the identification of a three-dimensional RC network, which can be used as circuit models for the dielectric response of composite materials containing insulating and conducting particles, is presented.

**Keywords:** Identification with step response. Fractional calculus. Linear systems. Fractional order systems. Transfer function. Fractional integral. Fractional derivative.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Cálculo do valor de $\Gamma(3/2)$ . (No eixo vertical $e^{-t}t^{1/2}$ e no eixo horizontal $t$ ). . . . .	25
Figura 2	Valores do fatorial de $z$ entre 0 e 5,5. . . . .	26
Figura 3	Método de identificação $FT's$ apresentado em (SILVA, 2008). . . . .	36
Figura 4	Resposta da função experimental para uma entrada degrau, e também das três funções de transferência de ordem inteira. . . . .	41
Figura 5	Respostas a uma entrada degrau, da função teórica, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com os aprimoramentos que apresentou o menor $EQM$ , aproximadas por um <i>zoom</i> . . . . .	42
Figura 6	Respostas a uma entrada degrau da função original, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com os aprimoramentos. . . . .	43
Figura 7	Respostas a uma entrada degrau, da função teórica, dos modelos obtidos em (SILVA, 2008) e dos modelos obtidos com os aprimoramentos que apresentaram o menor $EQM$ . . . . .	44
Figura 8	Resposta da função original para uma entrada degrau, acrescida de ruído branco com potência de $10^{-2}$ . . . . .	45
Figura 9	Resposta da função original para uma entrada degrau, acrescida de ruído branco com potência de $10^{-2}$ e multiplicada por $e^{-4t}$ após passar pelo filtro $(s+4)/(s)$ . . . . .	46
Figura 10	Respostas a uma entrada degrau da função original, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com os aprimoramentos. . . . .	47
Figura 11	Respostas a uma entrada degrau da função original, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com os aprimoramentos. . . . .	48
Figura 12	Método para obtenção do Sinal $Y_2(s)$ . . . . .	50
Figura 13	Método para obtenção do sinal $Y_3(s)$ . . . . .	54
Figura 14	Diagrama do método para $G(s) = G(0)/(a_{2\alpha}s^{2\alpha} + a_{\alpha}s^{\alpha} + 1)$ . . . . .	56

Figura 15	Generalização do método proposto. . . . .	59
Figura 16	Representação do critério de aplicação do método através de diagrama de blocos.	60
Figura 17	Respostas a uma entrada degrau, da $FT$ escolhida e da $FT$ obtida utilizando o método proposto. . . . .	64
Figura 18	Arranjo dos equipamentos para o controle de posição do carro de massa $M$ . . . . .	65
Figura 19	Diagrama de blocos do sistema controlado (carrinho) com um modelo matemático de ordem inteira $\alpha = 2$ , de segunda ordem. . . . .	65
Figura 20	Resposta de todos os modelos calculados a uma entrada degrau para a planta Carro-Motor dada em (95). . . . .	66
Figura 21	Resposta de todos os modelos calculados a uma entrada degrau para a planta Carro-Motor dada em (95). . . . .	67
Figura 22	Resposta da função experimental para uma entrada degrau, e também das duas $FT's$ , de ordem inteira igual a 1 e ordem fracionária, obtidas na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes. . . . .	68
Figura 23	Resposta da função experimental para uma entrada degrau, e também das duas $FT's$ , de ordem inteira igual a dois e de ordem fracionária, obtidas na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes. . . . .	69
Figura 24	Método para obtenção do sinal $Y_3(s)$ . . . . .	71
Figura 25	Método para obtenção do sinal $Y_5(s)$ . . . . .	73
Figura 26	Generalização do método proposto . . . . .	75
Figura 27	Respostas ao degrau da $FT$ teórica $G(s+14,7)$ e da $FT$ $G_m(s+14,7)$ obtidas através do método. . . . .	76
Figura 28	Respostas ao degrau da $FT$ experimental $G(s+5,1)$ de ordem 1 e da $FT$ $G_m(s+5,1)$ de ordem 1 obtidas através do método. . . . .	78
Figura 29	Respostas ao degrau da $FT$ experimental $G(s+0,1195)$ de ordem fracionária e da $FT$ $G_m(s+0,1195)$ de ordem fracionária obtidas através do método. . . . .	79

Figura 30	Respostas ao degrau da $FT$ experimental $G(s + 11, 5)$ de ordem 2 e da $FT$ $G_m(s + 11, 5)$ de ordem 1 obtidas através do método. . . . .	80
Figura 31	Respostas ao degrau da $FT$ experimental $G(s + 4, 6017)$ de ordem fracionária e da $FT$ $G_m(s + 4, 6017)$ de ordem fracionária obtidas através do método. . . . .	81
Figura 32	Método para obtenção do sinal $z_i(t)$ . . . . .	83
Figura 33	Respostas a uma entrada degrau, da $FT$ teórica e da $FT$ obtida utilizando o método proposto. . . . .	89
Figura 34	Arranjo dos equipamentos para o controle de posição do carro de massa $M$ . . . . .	90
Figura 35	Diagrama de blocos do sistema controlado. . . . .	90
Figura 36	Resposta de todos os modelos calculados a uma entrada degrau. . . . .	91
Figura 37	Resposta de todos os modelos calculados a uma entrada degrau. . . . .	92
Figura 38	Resposta a uma entrada degrau da função experimental e dos modelos obtidos através do método. . . . .	93
Figura 39	Diagrama de uma rede RC tridimensional com distribuição aleatória dos elementos $R$ e $C$ . As placas cinzentas indicam os elétrodos utilizados para a ligação a uma fonte de tensão com a resistência de saída $R_S$ ((GALVÃO et al., 2013)). . . . .	94
Figura 40	(a) Admitância e (b) Resposta a uma entrada degrau da rede RC utilizada neste estudo de caso. . . . .	96
Figura 41	Resultados a uma resposta ao degrau com o método proposto: Modelos de ordem inteira e fracionária. . . . .	98
Figura 42	Resultados da resposta ao degrau (Modelo de ordem fracionária com $n = 2$ ): Comparação entre o método de identificação proposto e o método relatado em (GALVÃO et al., 2013), ambos no domínio da frequência. . . . .	99
Figura 43	Resultados obtidos pela resposta em frequência: Modelos de ordem inteira e fracionária. . . . .	100

Figura 44	Resultados no domínio da frequência (Modelos de ordem fracionária): Comparação da resposta em frequência como o método proposto em (GALVÃO et al., 2013). . . . .	101
-----------	---	-----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Pares de Transformadas de Laplace considerando $t > 0$ , $\alpha > 0$ , $\beta > 0$ e $a \in \mathbb{R}^+$ . . . . .	28
Tabela 3	$FT's G(s)$ determinadas em (SILVA, 2008) pelo método proposto sem utilizar a função <i>fminsearch</i> , bem como a ordem dos modelos, os valores da constante “ $\sigma$ ” e também o <i>EQM</i> calculado. . . . .	40
Tabela 2	$FT's G(s)$ determinadas pelo método proposto bem como os valores da constante “ $\sigma$ ” calculadas com o auxílio da função <i>fminsearch</i> , a ordem dos modelos e também o <i>EQM</i> calculado. . . . .	40
Tabela 4	$FT's$ obtidas em (SILVA, 2008) e com os aprimoramentos propostos, bem como o valor de $\sigma$ utilizado e também o <i>EQM</i> de cada uma delas. . . . .	43
Tabela 5	$FT's$ obtidas em (SILVA, 2008) e com os aprimoramentos propostos, bem como o valor de $\sigma$ utilizado e também o <i>EQM</i> de cada uma delas. . . . .	44
Tabela 6	$FT's$ obtidas em (SILVA, 2008) e com os aprimoramentos propostos, bem como o valor de $\sigma$ utilizado e também o <i>EQM</i> de cada uma delas. . . . .	46
Tabela 7	$FT's$ obtidas em (SILVA, 2008) e com os aprimoramentos propostos, bem como o valor de $\sigma$ utilizado e também o <i>EQM</i> de cada uma delas. . . . .	47
Tabela 8	$FTs$ de ordem fracionária e inteira igual a 2 determinadas pelo método proposto para a planta Carro-Motor dada em (95). . . . .	66
Tabela 9	$FTs$ de ordem fracionária e inteira igual a 1 determinadas pelo método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes. . . . .	68
Tabela 10	$FT's$ ordem fracionária e inteira igual a dois determinadas pelo método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes. . . . .	69
Tabela 11	$FT's$ de ordem fracionária e inteira igual a 1 determinadas pelo método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes. . . . .	77

Tabela 12	$FT's$ de ordem fracionária e inteira igual a dois determinadas pelo método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes. . . . .	79
Tabela 13	$FT's$ de ordem fracionária e inteira igual a 2 determinadas pelo método proposto para a planta Carro-Motor dada em (139). . . . .	91
Tabela 14	$FT's$ ordem fracionária e inteira igual a 3 determinadas pelo método proposto para a planta Carro-Motor dada em (139). . . . .	92
Tabela 15	Resumo dos resultados . . . . .	98



## LISTA DE ABREVIACES E SIGLAS

<i>CF</i>	Cculo fracionário
<i>EQM</i>	Erro quadrático médio
<i>FT</i>	Funo de transferência
<i>FT's</i>	Funes de transferência
<i>PSO</i>	Particle Optimization Swarm
<i>TF</i>	Transfer functions
<i>TVF</i>	Teorema do valor final

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS MATEMÁTICOS E DEFINIÇÕES DO CÁLCULO FRACIONÁRIO</b>	<b>24</b>
2.1	CONCEITOS MATEMÁTICOS BÁSICOS APLICADOS NO CÁLCULO FRACIONÁRIO	24
2.1.1	<i>Função Gama</i>	24
2.1.2	<i>Função Beta</i>	26
2.1.3	<i>Função Mittag-Leffler</i>	26
2.1.4	<i>Transformadas de laplace aplicadas ao Cálculo fracionário</i>	27
2.2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO	28
2.2.1	<i>Definição de integral fracionária</i>	28
2.3	A DERIVADA FRACIONÁRIA	31
2.3.1	<i>Definição de Riemann-Liouville</i>	32
2.3.2	<i>Definição de Caputo</i>	33
2.3.3	<i>Definição de Grünwald-Letnikov</i>	34
<b>3</b>	<b>APRIMORAMENTOS NO MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE <math>FT</math>'S ESTÁVEIS E INSTÁVEIS DE ORDEM INTEIRA PROPOSTO EM (SILVA, 2008)</b>	<b>35</b>
3.1	MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE $FT$ 's ESTÁVEIS E INSTÁVEIS	35
3.2	APRIMORAMENTOS EM UM MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE $FT$ 's	37
3.3	RESULTADOS OBTIDOS COM OS APRIMORAMENTOS PROPOSTOS	39
3.3.1	<i>Primeiro exemplo contendo os aprimoramentos</i>	39
3.3.2	<i>Segundo exemplo contendo os aprimoramentos</i>	42
3.3.3	<i>Terceiro exemplo contendo os aprimoramentos</i>	44

3.3.4	<i>Quarto exemplo contendo os aprimoramentos</i>	45
4	<b>MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE <math>FT's</math> ESTÁVEIS DE ORDEM FRACIONÁRIA UTILIZANDO INTEGRADORES</b>	49
4.1	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT's$ ESTÁVEIS DE ORDEM $\alpha$ ( $0 < \alpha \leq 1$ )	49
4.2	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT's$ ESTÁVEIS DE ORDEM $2\alpha$ ( $0 < \alpha \leq 1$ )	56
4.3	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT's$ ESTÁVEIS DE ORDEM $n\alpha$ ( $0 < \alpha \leq 1$ )	58
4.3.1	<i>Critério para a aplicação do método</i>	59
4.3.2	<i>Método para identificação de <math>FT's</math> de ordem fracionária</i>	61
4.4	IDENTIFICAÇÕES REALIZADAS POR INTERMÉDIO DO MATLAB	63
4.4.1	<i>Primeira identificação: Exemplo teórico</i>	63
4.4.2	<i>Segunda identificação: Motor de corrente contínua</i>	64
4.4.3	<i>Terceira identificação: Redes RC Tridimensionais com grande número de componentes</i>	67
5	<b>MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE <math>FT's</math> DE ORDEM FRACIONÁRIA BASEADO NO MÉTODO PROPOSTO EM (SILVA, 2008)</b>	71
5.1	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT'S$ DE ORDEM $\alpha$ , $0 < \alpha \leq 1$	71
5.2	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT'S$ DE ORDEM $2\alpha$ , $0 < \alpha \leq 1$	73
5.3	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT'S$ DE ORDEM $n\alpha$ , $0 < \alpha \leq 1$	74
5.4	VALIDAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO	76
5.4.1	<i>Primeira identificação: Exemplo Teórico</i>	76
5.4.2	<i>Segunda identificação: Redes RC tridimensionais com grande número de componentes</i>	77
6	<b>MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE <math>FT'S</math> DE ORDEM FRACIONÁRIA UTILIZANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS</b>	82
6.1	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT'S$ ESTÁVEIS DE ORDEM $\alpha_1$ , $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+$	82
6.2	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT'S$ ESTÁVEIS DE ORDEM $\alpha_2$ , $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$	85
6.3	IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT'S$ ESTÁVEIS DE ORDEM $\alpha_n$ , $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$	86

6.4	VALIDAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO	88
6.5	PRIMEIRA <i>FT</i> A SER IDENTIFICADA	88
6.6	SEGUNDA <i>FT</i> A SER IDENTIFICADA	89
6.7	TERCEIRA <i>FT</i> A SER IDENTIFICADA	92
6.8	QUARTA <i>FT</i> A SER IDENTIFICADA	94
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>102</b>
7.1	CONCLUSÕES GERAIS	102
7.1.1	<i>Perspectivas futuras</i>	<b>103</b>
7.1.2	<i>Publicações</i>	<b>103</b>
7.1.2.1	ARTIGOS COMPLETOS PUBLICADOS EM ANAIS DE CONGRESSOS	103
7.1.2.2	ARTIGOS COMPLETOS ACEITOS EM PERIÓDICOS	104
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>105</b>
	<b>APÊNDICE A</b>	<b>109</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade, o ser humano tem procurado descrever matematicamente sistemas reais para tentar compreendê-los e, a partir daí, conseguir encontrar soluções para os diversos tipos de problemas relacionados a eles.

De lá para cá, muitas mudanças ocorreram ao longo do tempo, métodos e técnicas foram desenvolvidas, mas o antigo desafio de representar um sistema real usando um análogo matemático parece permanecer inalterado (AGUIRRE, 2000).

De tudo o que foi conquistado e que existe atualmente, um método muito usado pelos pesquisadores é a modelagem pela física ou natureza do processo, que necessita de um profundo conhecimento das leis físicas que regem o sistema a ser modelado, mas que, infelizmente, devido a esse "conhecimento" e ao tempo que é preciso para modelar um sistema partindo do equacionamento dos fenômenos envolvidos, nem sempre é viável seguir por este caminho.

Nos meados dos anos 90, com a modernização da ciência, e com a facilidade em simular experimentos, surgiu uma necessidade crescente de obtenção de modelos a partir de dados observados e não exclusivamente partindo das equações que descrevem a física do processo. Existem várias causas para estas mudanças, mas parece instrutivo citar, em primeiro lugar, o aumento de complexidade dos sistemas estudados que inviabilizam, em muitos casos, escrever as suas equações básicas e em segundo lugar a maior acessibilidade a computadores que são capazes de processar dados coletados diretamente dos sistemas (AGUIRRE, 2000).

Assim, uma alternativa que pode ser viável e até mesmo necessária, em vários casos para estas implementações, é utilizar a identificação de sistemas, que é uma área de conhecimento que estuda técnicas e alternativas de modelagem que necessitam pouca ou nenhuma informação prévia do sistema em questão e também não exige muito tempo para desenvolver um modelo desejado.

Os métodos desenvolvidos para a identificação de sistemas podem ser divididos em três grupos (LJUNG, 1999):

- métodos paramétricos;
- métodos não-paramétricos;
- métodos do domínio da frequência.

Os métodos ditos paramétricos utilizam estruturas matemáticas parametrizadas para descrever o

comportamento dinâmico original no domínio do tempo. Os parâmetros destas estruturas matemáticas são ajustados por algoritmos de estimação a partir dos dados medidos (LJUNG, 1999). Os métodos não-paramétricos também geram modelos no domínio do tempo, mas o comportamento dinâmico do sistema é determinado através de funções de correlação obtidas através dos dados disponíveis. Os métodos do domínio da frequência geram modelos representados neste domínio. Estes métodos utilizam a transformada de Fourier (HOUGEN, 1990) para calcular a resposta em frequência dos sistemas analisados.

Realizada esta etapa, outro problema que surge após todo este processo é saber se o modelo determinado é realmente a melhor aproximação da realidade estudada, pois é possível encontrar, quase sempre uma "família" de modelos com características e desempenhos variados. Assim, torna-se necessária a aplicação prática desses modelos dinâmicos oriundos de dados experimentais para selecionar qual será o que melhor representa o sistema estudado.

Sendo todos eles uma aproximação experimental para a determinação da dinâmica do sistema, uma identificação completa é constituída por quatro estágios (LANDAU, 1990):

1. Aquisição da informação referente à entrada/saída do sistema sob um protocolo experimental;
2. Escolha da estrutura do modelo;
3. Estimação dos parâmetros do modelo;
4. Validação do modelo identificado.

O primeiro estágio diz respeito basicamente ao tipo de entrada que será utilizada na identificação. O segundo estágio por exemplo, trata da ordem da função de transferência e essa escolha depende de fatores como o tipo de sistema que está sendo identificado, por exemplo, sistema mecânico, sistema pneumático, etc. O terceiro estágio refere-se ao procedimento que será empregado (algoritmo) e o quarto é feita a verificação para saber se o modelo identificado corresponde ao comportamento dinâmico do modelo real.

De muitas maneiras diferentes é possível satisfazer estes estágios de uma identificação completa e, além dos mecanismos tradicionais que estão sendo empregados, uma proposta de nossa parte é incorporar uma ferramenta que vem surgindo mais frequentemente com o passar dos anos para ajudar na implementação de modelos mais eficientes, que se chama Cálculo Fracionário (CF) ou cálculo diferencial e integral de ordem não inteira. Esta necessidade decorre de sua capacidade em descrever fenômenos em várias áreas do conhecimento que não podem ser descritos de forma adequada por um outro tipo de modelo, por exemplo, utilizando derivadas de ordem inteira.

Das duas últimas décadas até os dias de hoje, o CF, vem se tornando uma ferramenta muito importante no auxílio da modelagem e também resolução dos mais variados problemas em diversas áreas, como engenharia, ciências e matemática.

Apesar de suas aplicações aparecerem somente agora com mais intensidade, sua idade é tão antiga quanto a do cálculo diferencial e integral clássico, cujos primeiros registros datam de 30 de setembro de 1695, numa carta que L'Hopital escreveu a Leibniz, na qual faz referência a uma notação particular que ele havia usado em uma de suas publicações, a respeito de uma derivada de ordem  $n$ ,  $d^n/dx^n$ , da função linear  $f(x) = x$ . L'Hopital então colocou a seguinte questão, "Qual é o resultado se  $n = 1/2$ ?". Leibniz, respondeu: "É um aparente paradoxo, do qual um dia consequências úteis serão traçadas" (JESUS, 2007).

Iniciava-se, assim uma nova teoria que mais tarde, somada às contribuições de vários matemáticos como Euler em 1730, Lagrange em 1812, Laplace em 1812, Fourier em 1822, Abel em 1823, Liouville entre 1822 - 1837, Riemann em 1847, Grünwald em 1867, Letnikov entre 1868 - 1872, entre outros, levaram às primeiras definições de derivadas e integrais de ordens não inteiras (JESUS, 2007).

Durante aproximadamente três séculos, a teoria do CF foi desenvolvida principalmente no campo teórico, sendo útil quase que exclusivamente para os matemáticos. Apenas em 1974 é que surgiu um estudo bem estruturado no campo prático, com o livro escrito por K. B. Oldham e J. Spanier (OLDHAM; SPANIER, 1974). Este livro desempenhou um papel de destaque no desenvolvimento do CF no ponto de vista de suas aplicações em física, química e em engenharia, sendo a primeira obra inteiramente dedicada a uma apresentação sistemática das ideias, métodos e aplicações do CF (PODLUBNY, 1999).

Atualmente, em quase todas as áreas científicas, existem publicações recentes de artigos que lidam com aplicações do CF sobre os mais variados assuntos. Alguns exemplos incluem a propagação de ondas acústicas e eletromagnéticas (ENGHETA, 2000). Com a incorporação de processos e fenômenos não-locais, em uma estrutura matemática com o advento do CF, torna-se possível estender a aplicação da teoria dos sistemas para uma gama muito maior de problemas entre as ciências físicas.

As contribuições desta tese abordam alguns métodos de identificação de sistemas complexos com comportamentos emergentes, quando estes são submetidos a uma entrada de grau. Os métodos propostos visam complementar a literatura existente sobre o tema. As aplicações incluem filtragem (CARLSON; HALIJAK, 1964), (SAMADI; AHMAD; SWAMY, 2004), (BARBOSA; MACHADO; SILVA, 2006), (OUSTALOUP et al., 2000), (TSENG, 2001), (DAM, 2014), (JOHANSSON, 2012), (MAIONE, 2013), (CHEN; CHEN; XUE, 2011), análises de circuitos dielétricos, (BOUAMRANE; ALMOND, 2003), (MCCULLEN et al., 2009), (Galvão et al., 2013), e controle (PODLUBNY et al., 2002), (VINAGRE et al., 2001), (CHEN et al., 2012) e (HUA; LIU; GUAN, 2014).

De acordo com as consultas realizadas até o início de 2015, ficou constatado que nos estudos de possíveis artigos sobre identificação de sistemas que utilizam o CF, não foi descoberto nenhum trabalho que se assemelha com os métodos de identificação que estão sendo propostos.

Em virtude disso, para familiarizar-se com o tema, foram estudados os artigos (DEEPYAMAN; MITHUN; AMIT, 2009), (NARANG; SHAH; CHEN, 2010) e (GALVÃO et al., 2013) que tratam deste assunto mas com outros métodos e técnicas.

Fazendo um breve relato do que foi visto, em (DEEPYAMAN; MITHUN; AMIT, 2009), os autores elaboraram um método de identificação que aplica o CF para encontrar equações que relacionam os parâmetros que serão estimados para em seguida solucionar equações simultâneas que geram os parâmetros estimados do processo. As referidas equações simultâneas são determinadas e atualizadas usando a técnica de otimização por enxame de partículas (*Particle Optimization Swarm* (PSO)).

Em (NARANG; SHAH; CHEN, 2010) é proposto um método que simultaneamente estima atrasos de tempo em conjunto com outros parâmetros de um modelo de tempo contínuo que possui ordem fracionária, de uma maneira iterativa, resolvendo equações de regressão linear simples. Para os casos em que a ordem fracionária é desconhecida, também é elaborado um método de otimização de *loop* alinhado onde o tempo de atraso, juntamente com outros parâmetros do modelo, são estimados iterativamente no laço interno e a ordem fracionária é estimada no *loop* externo.

Por último, (GALVÃO et al., 2013) trata de um método usado para elaborar modelos de ordem fracionária para aproximação de redes RC tridimensionais que são representadas por uma matriz de incidência que possui elementos resistivos e capacitivos distribuídos em várias camadas interconectadas. Este trabalho foi deixado por último porque a rede citada foi objeto de identificação dos métodos propostos nesta pesquisa e por este motivo foi feita uma análise mais detalhada dos resultados obtidos em (GALVÃO et al., 2013) e nos procedimentos nele adotados.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 2, são apresentadas as definições e conceitos matemáticos essenciais para a compreensão do CF e uma introdução básica de sua teoria, que inclui a definição de integral fracionária, as principais definições de derivada fracionária e alguns exemplos para o melhor entendimento destes conceitos.
- No Capítulo 3, são propostos alguns aprimoramentos em um método de identificação de  $FT's$  de ordem inteira apresentado em (SILVA, 2008) e também são feitas algumas simulações para comprovar a melhora significativa de seu desempenho.
- No Capítulo 4, generalizou-se um método de identificação de  $FT's$  exposto em (KOSAKA et al., 2005), de tal forma que com as novas implementações, é possível fazer a



identificação de sistemas lineares por intermédio de  $FT's$  de ordem fracionária. Também é feita a sua validação por intermédio de alguns experimentos.

- No Capítulo 5, é proposta a generalização do método exibido em (SILVA, 2008) de tal forma que possibilita a identificação de sistemas lineares através de  $FT's$  instáveis e estáveis e que possuem ordem fracionária. Depois são feitos alguns exemplos.
- No Capítulo 6, é proposto um novo método de identificação de sistemas que baseia-se na resposta a um degrau do sistema para gerar um conjunto de sinais auxiliares, e a partir destes sinais auxiliares obter uma saída final que é utilizada para a determinação de  $FT's$  estáveis ou instáveis de ordem fracionária ou inteira. Também é feita a sua validação com a apresentação de alguns exemplos. Por último é realizada uma comparação do método proposto com o método apresentado em (GALVÃO et al., 2013), baseado na resposta em frequência.
- No Capítulo 7 está a conclusão geral deste estudo, são realizados alguns comentários a respeito de todos os métodos de identificação propostos neste trabalho e também é feita uma análise individual de cada um.
- Em seguida, são estabelecidas as conclusões e perspectivas futuras. Então, uma lista com as publicações oriundas desta tese é exibida.

## 2 CONCEITOS MATEMÁTICOS E DEFINIÇÕES DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Este capítulo abrange alguns conceitos matemáticos que formam uma base teórica necessária para uma mínima compreensão do Cálculo Fracionário (CF) e também de suas principais definições. Nesta ordem, serão expostas as definições da função Gama e propriedades, função Beta e propriedades, função Mittag Leffler contendo um ou dois parâmetros e logo após uma tabela contendo alguns pares de transformadas de Laplace que são usados com mais frequência no CF. Por último serão apresentadas as principais definições do CF, iniciando com a integral fracionária segundo Riemann-Liouville e finalizando com as definições de derivada fracionária elaboradas por Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov.

Cabe ressaltar que a finalidade deste capítulo é aplicar as definições de derivada e de integral fracionária na resolução de problemas relacionados aos métodos elaborados neste trabalho. Portanto caso exista a necessidade de uma análise mais detalhada sobre o CF, o aprofundamento do assunto pode ser obtido com a leitura das seguintes referências (PODLUBNY, 1999), (DOTCAK; KOSTIAL, 1994), (OLDHAM; SPANIER, 1974), (MILLER; ROSS, 1993) e (MILLER; J., 2009).

### 2.1 CONCEITOS MATEMÁTICOS BÁSICOS APLICADOS NO CÁLCULO FRACIONÁRIO

#### 2.1.1 Função Gama

A Função Gama foi mais uma, das várias contribuições que Euler fez à matemática e desempenha um papel fundamental no CF, pois possibilita em muitos casos o cálculo do fatorial de um número  $z$ , quando este é não inteiro. Sua definição usual é determinada através da integral imprópria:

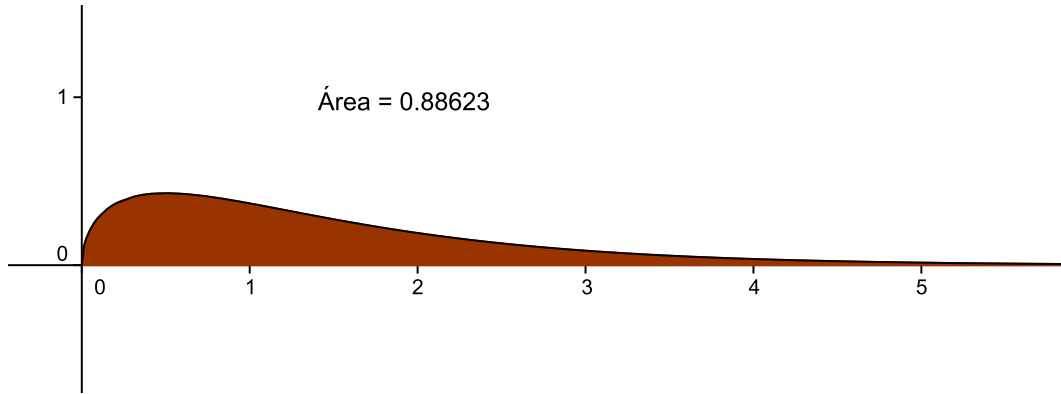
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \text{Re}(z) > 0. \quad (1)$$

Quando o valor  $z$  escolhido for um número complexo, então para que a integral acima seja convergente, é necessário que  $\text{Re}(z) > 0$  e esta demonstração pode ser verificada em (PODLUBNY, 1999). Para melhor entendimento deste conceito, será feito o cálculo da função Gama para  $z = 3/2$ . Assim, de (1) tem-se que:

$$\Gamma(3/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(3/2-1)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(1/2)} dt. \quad (2)$$

Para calcular o valor da integral obtida em (2), foi utilizado o GEOGEBRA, que é um *software* de geometria dinâmica, de código livre, que está disponível em (HOHENWARTER, 2001) e o resultado pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 - Cálculo do valor de  $\Gamma(3/2)$ . (No eixo vertical  $e^{-t}t^{1/2}$  e no eixo horizontal  $t$ .)



Fonte: O próprio autor

A obtenção da função Gama para um valor específico qualquer, na maioria dos casos não é uma tarefa simples, pois sua definição contém uma integral imprópria. Por este motivo é viável conhecer algumas propriedades que facilitam o cálculo de alguns valores específicos. A primeira propriedade é a seguinte:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z), \quad (3)$$

cuja demonstração pode ser encontrada em (PODLUBNY, 1999).

A sua grande utilidade é que calculando o valor de  $\Gamma(1)$  através da definição, que é igual a 1 e usando-a repetidamente, para valores inteiros, tem-se:

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6 = 3!$$

$$\dots = \dots = \dots = \dots$$

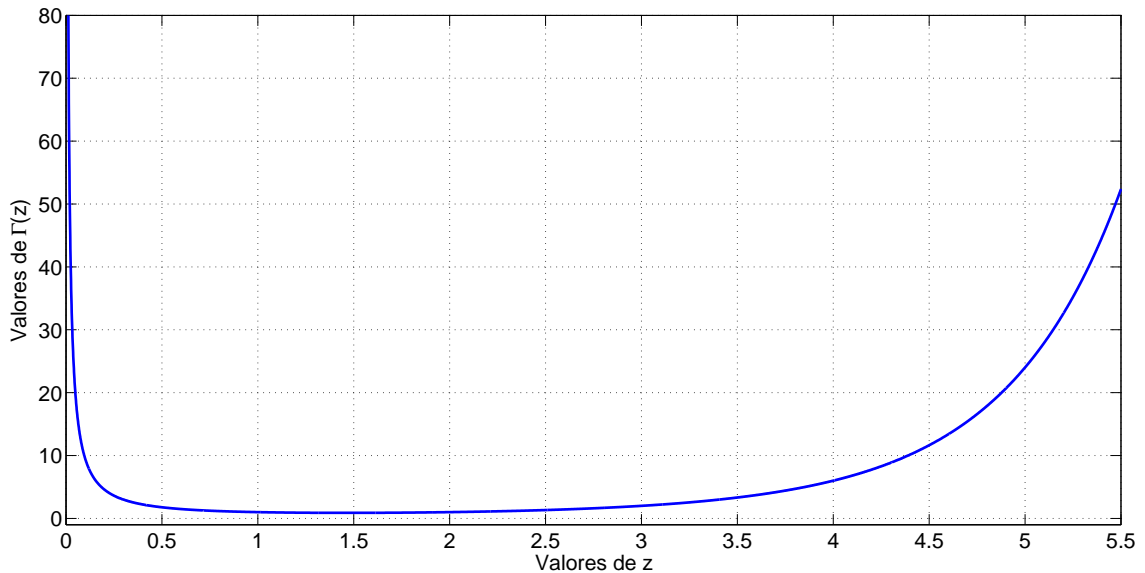
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!. \quad (4)$$

Daí, uma consequência óbvia é que a definição usual de fatorial pode ser substituída pela definição da função Gama, com a vantagem de poder utilizá-la para valores de  $z$  não inteiros. Por este motivo a função Gama é uma generalização do conceito de fatorial para valores do conjunto dos números reais.

Para ter uma visão geral do comportamento da função Gama, a Figura 2 representa o valor

de  $\Gamma(z)$  para valores de  $z$  compreendidos entre 0 e 5,5.

Figura 2 - Valores do fatorial de  $z$  entre 0 e 5,5.



Fonte: O próprio autor

### 2.1.2 Função Beta

A função Beta é outro conceito muito importante para o CF e tem grande utilidade quando é necessário simplificar combinações de valores da função Gama que frequentemente aparecem quando são calculadas derivadas e integrais fracionárias, e ela é definida por:

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-u)^{(q-1)} u^{(p-1)} du, \quad (5)$$

com  $Re(p) > 0$  e  $Re(q) > 0$ .

Obs: A necessidade das exigências  $Re(p) > 0$  e  $Re(q) > 0$  podem ser verificadas em (PODLUBNY, 1999).

Existe uma relação entre a função Gama e a função Beta muito utilizada no CF, que é a seguinte:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (6)$$

### 2.1.3 Função Mittag-Leffler

A função Mittag-Leffler foi uma grande descoberta para o CF e possui este nome em homenagem a seu criador, Magnus Gösta Mittag-Leffler; pode ser interpretada como uma possível

generalização da função exponencial e surge naturalmente como solução de equações diferenciais de ordem não inteira.

A sua definição considerando apenas um parâmetro,  $\alpha$ , sendo este um número real ou complexo, é a seguinte:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0, z \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Observação: Se  $\alpha = 1$ , então o resultado fica:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1k + 1)} \\ &= 1 + \frac{z}{\Gamma(2)} + \frac{z^2}{\Gamma(3)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} + \cdots \\ &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{K!} + \cdots \\ &= e^z. \end{aligned} \quad (8)$$

Dependendo do tipo de equação diferencial que precisa ser solucionada, é preciso acrescentar um outro parâmetro na função Mittag-Leffler. Desse modo, sua definição considerando dois parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  (com  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ ) fica descrita como:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Observação: Em (PODLUBNY, 1999), é possível verificar mais detalhadamente as definições (7) e (9) e a demonstração de (8).

#### 2.1.4 Transformadas de laplace aplicadas ao Cálculo fracionário

Quando um sistema linear de ordem fracionária é utilizado para a resolução de alguns problemas, é necessário algum conhecimento acerca das transformadas de Laplace de uma dada função  $f(t)$ , para evitar a dedução destas fórmulas cada vez que houver necessidade. Por este motivo, a Tabela 1 apresenta as transformadas de Laplace de funções temporais que frequentemente serão utilizadas para obter a solução de sistemas lineares relacionados com o CF.

Tabela 1 - Pares de Transformadas de Laplace considerando  $t > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $a \in \mathbb{R}^+$ .

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(s+a)^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{1}{s^\alpha + a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s(s^\alpha + a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{a}{s(s^\alpha + a)}$	$1 - E_\alpha(-at^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^\alpha E_{1,1+\alpha}(at)$
$\frac{1}{s^\alpha(s-a)}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(at)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$

Fonte: (JESUS, 2007), (PODLUBNY, 1999) e (MILLER; ROSS, 1993)

## 2.2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO FRACIONÁRIO

Durante o desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária, dependendo da aplicação desejada, diferentes definições de derivada e de integral de ordem fracionária foram elaboradas ao longo da história. Em (JESUS, 2007), a autora para abordar somente as definições mais importantes, primeiro partiu da fórmula que Cauchy desenvolveu para integrar uma função  $n$  vezes ( $n$  sendo um número inteiro), em um intervalo definido, para em seguida, calcular a integral de ordem fracionária. A partir daí, fundamentado neste conceito, abordou as principais definições de derivada de ordem fracionária. Nesta seção será seguido este mesmo caminho e primeiro será apresentada a definição de integral fracionária de acordo com Riemann-Liouville, que é uma consequência natural da fórmula que Cauchy desenvolveu. Posteriormente serão expostas as definições mais usuais de derivada de ordem fracionária, que foram desenvolvidas por Riemann-Liouville, Grünwald e Caputo.

### 2.2.1 Definição de integral fracionária

Antes de abordar a definição de integral fracionária, é conveniente determinar a expressão resultante do cálculo de integrar por  $n$  vezes uma função  $f$ , quando  $n$  é um número natural maior que zero. Em (VALÉRIO, 2001) é possível verificar mais detalhes dos conceitos que serão apresentados. Seja  $f(x)$  uma função contínua,  $x \in [c, b]$  e  $n$  um número natural qualquer.

Considere agora o operador funcional  ${}_c I_x^n$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$  (conjunto dos números naturais maiores do que zero) tal que:

$${}_c I_x^n f(x) = \int_c^x \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} \cdots \int_c^{x_{n-1}} f(t) dt \cdots dx_3 dx_2 dx_1. \quad (10)$$

Com o auxílio de (10), é possível calcular a expressão que representa a integração de uma dada função  $n$  vezes. Considerando  $n = 2$  a expressão fica:

$${}_c I_x^2 f(x) = \int_c^x \int_c^{x_1} f(t) dt dx_1. \quad (11)$$

Por um outro lado para solucionar (11), levando em consideração o teorema de Fubini, que pode ser verificado em (MAGALHÃES, 1993), tem-se que:

$$\int_c^x \int_c^{x_1} G(x_1, t) dt dx_1 = \int_c^x \int_t^x G(x_1, t) dx_1 dt. \quad (12)$$

Em particular, se  $G$  for uma função apenas de  $t$ , tem-se que  $G(x_1, t) \equiv f(t)$  e assim:

$$\begin{aligned} \int_c^x \int_c^{x_1} f(t) dt dx_1 &= \int_c^x \left( \int_t^x f(t) dx_1 \right) dt \\ &= \int_c^x f(t) \left( \int_t^x dx_1 \right) dt = \int_c^x f(t) [x_1]_t^x dt = \int_c^x (x-t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Fazendo agora  $n = 3$  em (10), e depois utilizando (12) e (13), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_c^x \int_c^{x_1} \int_c^{x_2} f(t) dt dx_2 dx_1 &= \int_c^x \left( \int_c^{x_1} \int_t^{x_1} f(t) dx_2 dt \right) dx_1 = \int_c^x \int_c^{x_1} (x_1 - t) f(t) dt dx_1 \\ &= \int_c^x f(t) \left( \int_t^x (x_1 - t) dx_1 \right) dt = \int_c^x f(t) \left[ \frac{(x_1 - t)^2}{2} \right]_t^x dt = \int_c^x \frac{(x-t)^2}{2} f(t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Seguindo este mesmo raciocínio, para um valor arbitrário de  $n$ , a expressão que pode ser obtida pelo princípio de indução finita e é conhecida pela fórmula de Cauchy, como está descrita a seguir:

$${}_c I_x^n f(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(t) dt. \quad (15)$$

Considere agora um valor  $\alpha \in \mathfrak{R}$  e a propriedade obtida em (4), assim pode-se generalizar (15) e definir a integral de ordem fracionária  $\alpha$  de Riemann-Liouville:

$${}_c J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Par melhor compreensão destas definições, serão resolvidos alguns exemplos envolvendo as fórmulas deduzidas em (15) e (16) e também será realizado o cálculo sem utilizá-las para

efeito de comparação.

Exemplo 1: Seja  $f(x) = x^5$ , atribuindo  $n = 3$  e  $c = 0$  na fórmula de Cauchy, o resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned} {}_0I_x^3 f(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{(3-1)}}{(3-1)!} t^5 dt = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} t^5 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x (x^2 t^5 - 2xt^6 + t^7) dt = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{x^2 t^6}{6} \right]_0^x - \left[ \frac{2xt^7}{7} \right]_0^x + \left[ \frac{t^8}{8} \right]_0^x \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^8}{6} - \frac{2x^8}{7} + \frac{t^8}{8} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{28x^8 - 48x^8 + 21x^8}{168} \right\} = \frac{x^8}{336}. \quad (17) \end{aligned}$$

Realizando o cálculo do Exemplo 1 sem empregar a fórmula de Cauchy, o resultado fica:

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} t^5 dt dx_2 dx_1 &= \int_0^x \int_0^{x_1} \left[ \frac{x^6}{6} \right]_0^{x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{x_2^6}{6} dx_2 dx_1 = \int_0^x \left[ \frac{x_2^7}{42} \right]_0^{x_1} dx_1 = \int_0^x \frac{x_1^7}{42} dx_1 = \left[ \frac{x_1^8}{336} \right]_0^x = \frac{x^8}{336}. \quad (18) \end{aligned}$$

Exemplo 2: Seja  $f(x) = e^x$ , atribuindo  $n = 3$  e  $c = 0$  na fórmula de Cauchy, o resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned} {}_0I_x^3 f(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{(3-1)}}{(3-1)!} e^t dt = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x (x^2 e^t - 2xt e^t + t^2 e^t) dt = \frac{1}{2} \left\{ [x^2 e^t]_0^x - 2x \int_0^x t e^t dt + \int_0^x t^2 e^t dt \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Utilizando agora a regra de integral por partes para determinar o resultado final de (19), tem-se:

Para a integral  $\int_0^x t^2 e^t dt$ , fazendo  $u = t^2$  e  $dv = e^t dt$ , obtem-se  $du = 2t dt$  e  $v = e^t$ . Para a integral  $\int_0^x t e^t dt$ , fazendo  $u = t$  e  $dv = e^t dt$ , obtem-se  $du = dt$  e  $v = e^t$  e a partir daí calculando os resultados, chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^t dt &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x. \\ \int_0^x t e^t dt &= x e^x - e^x. \end{aligned} \quad (20)$$

Substituindo (20) em (19), obtem-se:

$${}_0I_x^3 f(x) = \frac{1}{2} \{ x^2 e^x - 2x(x e^x - e^x) + x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \} = \frac{1}{2} 2e^x = e^x. \quad (21)$$

Se for realizado o cálculo do Exemplo 2 diretamente, para esta função será mais vantajoso



pois:

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} e^t dt dx_2 dx_1 &= \int_0^x \int_0^{x_1} [e^t]_0^{x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^x \int_0^{x_1} e^{x_2} dx_2 dx_1 = \int_0^x [e^{x_2}]_0^{x_1} dx_1 = \int_0^x e^{x_1} dx_1 = [e^{x_1}]_0^x = e^x. \end{aligned} \quad (22)$$

Exemplo 3: Seja  $f(x) = x^2$  e  $v = 1/4$ . Neste caso, será utilizada a definição de integral fracionária segundo a definição de Riemann-Liouville, descrita em (16).

Considerando a definição de integral fracionária já citada, tem-se que:

$$J^v f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x \left[ x \left( 1 - \frac{t}{x} \right) \right]^{v-1} f(t) dt. \quad (23)$$

Considerando  $f(t) = t^\mu$  e a mudança de variável  $u = t/x$ , a equação fica:

$$J^v [(xu)^\mu] = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^1 (1-u)^{v-1} x^{v+\mu} u^\mu du. \quad (24)$$

Através da definição de função Beta que encontra-se em (5) e a propriedade em (6), conclui-se:

$$J^v [(x)^\mu] = \frac{x^{v+\mu}}{\Gamma(v)} B(\mu+1, v) = \frac{\Gamma(\mu+1) x^{v+\mu}}{\Gamma(\mu+v+1)}. \quad (25)$$

Fazendo agora  $\mu = 2$  e  $v = 1/4$ , o resultado fica:

$$J^{1/4} [x^2] = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(1/4+2+1)} x^{(1/4+2)} = 0,7845 x^{9/4}.$$

portanto,  $J^{1/4} [x^3] = 0,7845 x^{9/4}$ .

## 2.3 A DERIVADA FRACIONÁRIA

Diferente do caso da integral fracionária, a derivada fracionária possui diferentes definições que são muito utilizadas por pesquisadores de todas as áreas. Em (JESUS, 2007), a autora faz uma análise sobre todas estas definições, sobre as particularidades de cada uma delas e comenta que, dependendo do problema a ser estudado, para a sua resolução, determinado conceito pode ser empregado com maior facilidade que o outro, por exemplo, se a pesquisa necessita de resolução de equações diferenciais com condições iniciais, a definição de Caputo que será descrita na Seção 2.3.2 é a melhor escolha, mas se o estudo abordado envolve problemas numéricos que contém várias iterações, então a melhor escolha é a definição de Grünwald-Letnikov que será definida na Seção 2.3.3. Este trabalho contém as definições formuladas por Riemann-Liouville,

Grünwald e Caputo e serão apresentadas de acordo com a ordem citada.

### 2.3.1 Definição de Riemann-Liouville

Esta definição de derivada baseia-se principalmente no resultado de que a derivação é a operação inversa da integração e que é possível determinar a derivada de ordem fracionária do modo descrito a seguir: Seja  $f$  uma função derivável em um intervalo qualquer,  $\beta > 0$ , um número real,  $m$  o menor número inteiro maior que  $\beta$  e  $\nu = m - \beta$ . Então a derivada fracionária de  $f$ , de ordem  $\beta$  denotada por  $D^\beta$ , conforme (JESUS, 2007), é definida por:

$$D^\beta f(t) = D^m [J^\nu f(t)], \quad t > 0. \quad (26)$$

Observação:  $D^m$  é a derivada de ordem inteira  $m$  e  $J^\nu$  é a integral de Riemann-Liouville de ordem  $\nu$ . É conveniente notar ainda que de acordo com esta definição, a derivada fracionária é obtida através da derivada de uma ordem inteira de uma integral de ordem fracionária.

A seguir será ilustrado um exemplo do cálculo da derivada fracionária de ordem  $1/2$  e constante  $c = 0$  para a função  $f(x) = x^3$ . Para iniciar o cálculo, como  $\beta = 1/2 > 0$ , logo  $m = 1$  e assim  $\nu = 1 - 1/2 = 1/2$ . A partir daí, de (26) e (16), tem-se que:

$$J^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x \left[ x \left( 1 - \frac{t}{x} \right) \right]^{\nu-1} f(t) dt. \quad (27)$$

Considerando  $f(t) = t^\mu$  e a mudança de variável  $u = t/x$ , a equação fica:

$$J^\nu [(xu)^\mu] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} x^{\nu+\mu} u^\mu du. \quad (28)$$

Utilizando agora a definição de função Beta que encontra-se em (5) e a propriedade em (6), conclui-se:

$$J^\nu [(x)^\mu] = \frac{x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)} B(\mu+1, \nu) = \frac{\Gamma(\mu+1) x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\mu+\nu+1)}. \quad (29)$$

Finalizando, considerando  $\mu = 3$ , o resultado fica:

$$D^{(1/2)} [x^3] = D^{(1)} \left[ \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(1/2+3+1)} x^{(1/2+3)} \right] = D^{(1)} \left[ 0,5158 x^{(7/2)} \right] = 1,0853 x^{(5/2)}.$$

Portanto,  $D^{(1/2)} [x^3] = 1,8053 x^{(5/2)}$ .

### 2.3.2 Definição de Caputo

Neste caso, a definição de derivada fracionária é parecida com a definição anterior, a diferença está na disposição da derivação e da integração que são realizadas de um outro modo. Sejam  $\beta > 0$ ,  $m$  o menor inteiro maior que  $\beta$  e  $\nu = m - \beta$ , com  $0 < \nu \leq 1$ .

Em (JESUS, 2007), a derivada fracionária de ordem  $\beta$  de  $f$  denotada por  $D_*^\beta$  é calculada da seguinte maneira:

$$D_*^\beta f(x) = {}_c J^\nu [D^m f(x)], \quad x > 0. \quad (30)$$

Para englobar o caso em que  $\beta = m$ , a definição pode ser escrita como:

$$D_*^\beta f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^x \frac{f^{(m)}(\tau)}{(x-\tau)^{(\alpha+1-m)}} d\tau, & m-1 < \beta < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(\tau), & \beta = m. \end{cases} \quad (31)$$

Observação: Esta definição é mais restritiva do que a anterior por exigir a integrabilidade da derivada de ordem inteira  $m$  e ela só existirá se esta condição for satisfeita.

Para fazer uma comparação com a definição de Riemann-Liouville, calcular-se-á agora o exemplo anterior pela definição de Caputo. Assim, considerando  $f(x) = x^3$ ,  $\beta = 1/2$  e  $m=1$ , ( $0 < \beta < 1$ ), tem-se:

$$D_*^\beta f(x) = J^\nu [D^m f(x)] = J^\nu \left[ \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-m+1)} x^{(v-m)} \right] = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-m+\nu+1)} x^{(u+\nu-m)}. \quad (32)$$

Mas  $\nu = m - \beta$ , logo fazendo a substituição na fórmula acima, o resultado fica:

$$D_*^{1/2} x^3 = J^{(1/2)} [D^{(1)} x^3] = J^{1/2} [3x^2]. \quad (33)$$

Utilizando (29) em (33), tem-se:  $D_*^{1/2} x^3 = 3 (\Gamma(2+1)/\Gamma(2+1/2+1)) x^{1/2+2} = 1,8053 x^{5/2}$ . Note que, o cálculo feito tanto pela definição de Riemann-Liouville, quanto pela definição de Caputo chegaram no mesmo valor, a diferença é que na fórmula de Caputo, primeiro calcula-se a derivada de ordem  $\beta$ , depois a integral de ordem  $\nu$  e na definição de Riemann-Liouville faz-se o contrário.

### 2.3.3 Definição de Grünwald-Letnikov

Sejam  $f$  uma função definida em um intervalo qualquer e  $x_0$  um ponto fixo no interior deste intervalo, daí pela definição de derivada, é possível afirmar que:

$$D^1 f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}. \quad (34)$$

Tem-se também que:

$$\begin{aligned} D^2 f(x_0) &= D^1 [D^1 f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D^1 [f(x_0)] - D^1 [f(x_0 - h)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} - \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h)}{h}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - 2f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Observando os resultados anteriores e a definição do triângulo de Pascal reescrito com a utilização do binômio de Newton, conforme pode ser verificado em (VALÉRIO, 2001), é possível provar por indução o seguinte resultado para um dado valor  $n \in \mathbb{Z}^+$ :

$$D^n f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \cdot f(x_0 - mh)}{h^n}. \quad (36)$$

Estendendo agora essa definição para o Cálculo fracionário, seja  $\alpha$  um número real qualquer,  $f$  uma função definida em um intervalo qualquer e  $x_0$  um ponto fixo no interior deste intervalo. A derivada fracionária de ordem  $\alpha$  de uma função  $f$  calculada em um ponto  $x_0$  segundo Grünwald-Letnikov é definida por:

$$D^\alpha f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Gamma(\alpha + 1) f(x_0 - mh)}{\Gamma(\alpha - m + 1) h^\alpha}. \quad (37)$$

Conforme uma análise feita em (VALÉRIO, 2001), vale a pena notar que, nesta definição, fica bem claro que, para calcular o valor da derivada fracionária em um dado ponto  $x_0$ , é levado em conta o valor da função em uma quantidade de pontos muito maior que a da respectiva derivada de ordem inteira e em consequência disso, ela é capaz de oferecer uma descrição mais fina dos fenômenos estudados.

### 3 APRIMORAMENTOS NO MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE $FT's$ ESTÁVEIS E INSTÁVEIS DE ORDEM INTEIRA PROPOSTO EM (SILVA, 2008)

Neste capítulo, serão propostos alguns aprimoramentos em um método de identificação de  $FT's$  apresentado em (SILVA, 2008) e também serão realizados novas aplicações com a finalidade de verificar a eficiência do método em outros tipos de casos não explorados. Primeiro na Seção 3.1 tratar-se-á do mecanismo de funcionamento do método, na Seção 3.2 serão apresentadas algumas contribuições para tornar o método mais eficiente e posteriormente, na Seção 3.3, serão feitas as validações do método com os aprimoramentos, utilizando as simulações que foram realizadas em (SILVA, 2008) para comprovar a melhoria dos resultados.

#### 3.1 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE $FT's$ ESTÁVEIS E INSTÁVEIS DE ORDEM ARBITRÁRIA $n$ PROPOSTO EM (SILVA, 2008)

Considere o método de identificação que foi desenvolvido em (SILVA, 2008) que está exposto na Figura 3, sujeito a uma entrada igual a um degrau que será representada por  $U(s) = 1/s$ ;  $Y(s)/U(s) = G(s) = (b_ms^m + b_{(m-1)}s^{(m-1)} + \dots + b_1s^1 + b_0)/(a_ns^n + a_{(n-1)}s^{(n-1)} + \dots + a_1s^1 + a_0)$ , a  $FT$  estável ou instável, com  $n \geq m$ ,  $m(s) = b_ms^m + b_{(m-1)}s^{(m-1)} + \dots + b_1s^1 + b_0$ ,  $n(s) = a_ns^n + a_{(n-1)}s^{(n-1)} + \dots + a_1s^1 + a_0$ ,  $G(s + \sigma) = m(s + \sigma)/n(s + \sigma)$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  e as seguintes hipóteses para a aplicação do método:

- H1)  $G(s + \sigma)$  é uma  $FT$  estável (possui todos os polos com parte real negativa);
- H2) A entrada  $u(t)$  é um degrau unitário, ou seja,  $U(s) = (1/s)$ ;
- H3)  $m(s + \sigma)$  e  $n(s + \sigma)$  são coprimos, isto é não possuem raízes em comum.

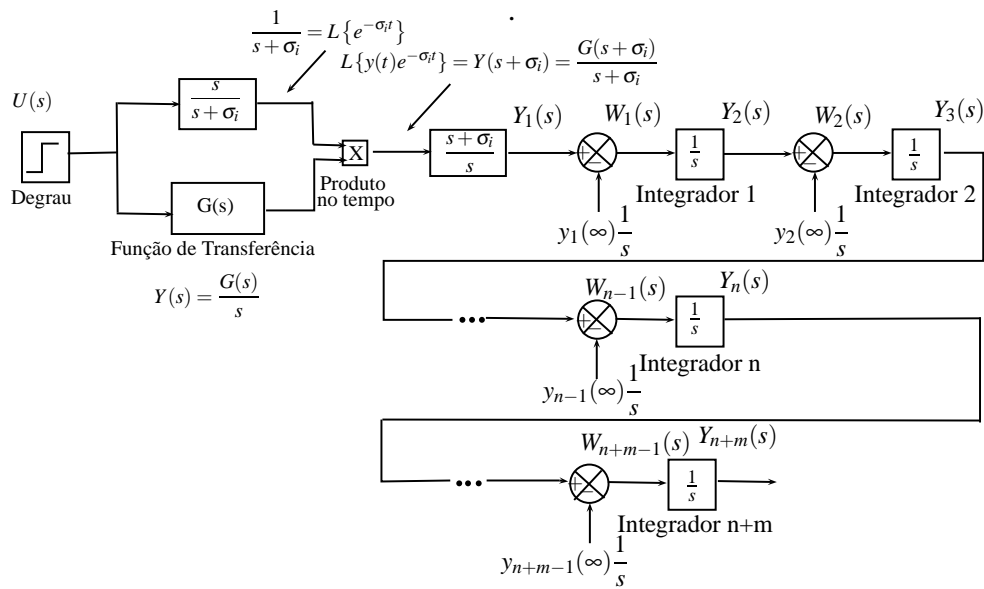
Conforme foi demonstrado em (SILVA, 2008) e com base no diagrama da Figura 3, satisfeitas essas condições, é possível elaborar um sistema linear de equações do tipo  $Ax = b$ , sendo:

$$A = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & -y_1(\infty) & 0 & \dots & 0 \\ & -y_2(\infty) & -y_1(\infty) & \ddots & \vdots \\ & -y_3(\infty) & -y_2(\infty) & \ddots & 0 \\ 0_{n \times m} & \vdots & -y_3(\infty) & \ddots & -y_1(\infty) \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -y_{n+m}(\infty) & -y_{n+m-1}(\infty) & \dots & -y_{m+1}(\infty) \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \\ a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} e \quad b = \begin{bmatrix} y_2(\infty) \\ y_3(\infty) \\ \vdots \\ y_{n+m+1}(\infty) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Também foi demonstrado que se  $\det(A) \neq 0$ , então existe uma solução correspondente à seguinte estimação dos parâmetros da planta:  $x = A^{-1} b$ . Logo um modelo é obtido para representar a FT  $G(s)$  inicial.

Figura 3 - Método de identificação FT's apresentado em (SILVA, 2008).



Fonte: (Silva, 2008).

Fazendo uma análise do método apresentado na Figura 3 e também levando em consideração a conclusão geral contida em (SILVA, 2008), fica evidente que o parâmetro  $\sigma$  tem um papel fundamental para que esse método de identificação apresente um erro adequadamente pequeno. Por este motivo torna-se necessário estabelecer um critério na escolha deste parâmetro, pois se for atribuído um valor  $\sigma > \sigma_0$ , mas próximo de  $\sigma_0$ , supondo  $G(s)$  instável,  $G(s+\sigma)$  estável para  $\sigma > \sigma_0$  e instável para  $\sigma < \sigma_0$ , então  $p(\infty) = 0$  (sendo que  $P(s) = G(s+\sigma)/(s+\sigma)$ ) conforme a Figura 3, mas ocorrerá um longo tempo de observação do sinal  $y(t)$ , para obter resultados satisfatórios na identificação. Por outro lado, se for adotado um valor para  $\sigma$  muito maior do que  $\sigma_0$  citado acima, haverá uma perda de informações da planta, pois o sinal tenderá a zero muito rapidamente e com isso a identificação pode ficar comprometida, especialmente na presença de ruídos de medição. Outro fator que merece atenção nesta análise, diz respeito sobre a facilidade

na execução do método e na obtenção de resultados consistentes, de tal forma que este processo deixe de ser manual e se torne o mais automatizado possível. Assim, com a intenção de contribuir para a melhoria da execução do método, sugerem-se alguns aprimoramentos para que este objetivo seja alcançado.

### 3.2 APRIMORAMENTOS EM UM MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE FT's ESTÁVEIS E INSTÁVEIS

Observando o modo que foi executado o método, o principal aprimoramento sugerido é desenvolver um programa no Matlab, (que encontra-se no Apêndice A deste trabalho), que represente o mecanismo de funcionamento do método proposto em (SILVA, 2008) e utilizar a função *fminsearch* disponível em seu *toolbox* de otimização para obter o  $\sigma$  que apresente a melhor identificação possível. Este procedimento evita a operação no ambiente do Simulink, que foi utilizada em (SILVA, 2008), na qual toda vez que foi realizado um cálculo para obter um modelo, o usuário precisava calcular cada saída necessária para a realização do método, manualmente e também para o resultado final, o que torna o processo de trabalho muito lento e praticamente inviabiliza a procura do parâmetro  $\sigma$  que apresentará o melhor resultado de identificação.

Para o melhor entendimento do aprimoramento proposto, a seguir será especificado o mecanismo de funcionamento da função *fminsearch* e também será apresentada uma sequência de passos que representa o que foi feito para obter o melhor parâmetro  $\sigma$ . A função *fminsearch* é a implementação do algoritmo do poliedro flexível proposto em (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) no Matlab e o seu mecanismo de funcionamento consiste em gerar um poliedro a partir de atribuição de dados iniciais, de tal maneira que os seus vértices serão os valores da função que deseja-se minimizar.

Supondo que a função tem apenas uma variável, serão necessários dois pontos para o seu funcionamento e a figura geométrica utilizada é um segmento de reta, para funções bi-dimensionais, será usado um triângulo, funções tri-dimensionais um tetraedro e generalizando, para funções n-dimensionais, uma figura geométrica contendo  $n + 1$  vértices. O método funciona da seguinte maneira: No caso em que a função possui três variáveis, são necessários quatro pontos, (sempre é preciso tomar um ponto além da dimensão da função) e assim o poliedro formado é um tetraedro. Os seus vértices são os valores da função que deve ser minimizada, calcula-se o pior ponto, em seguida calcula-se o centróide da face oposta a esse pior ponto e há um rebatimento desse ponto, fazendo uma reflexão baseada nesse centróide. A partir daí, é gerado um novo tetraedro, novamente é determinado o pior ponto e repete-se a operação para obter um novo tetraedro, até que este processo não seja mais possível.

Outras operações também podem ser realizadas para a obtenção de um novo poliedro, além

da reflexão, que são a expansão, a redução e a contração, que também deformam o poliedro em cada iteração.

Esse processo é repetido até que seja atingido o seu critério de parada. Para o caso específico do programa elaborado neste trabalho, levando em conta o método de identificação proposto em (SILVA, 2008), a sequência de passos para a otimização do parâmetro  $\sigma$ , é a seguinte:

1. Para começar, é preciso especificar o número de zeros ( $m$ ) e de polos ( $n$ ) do modelo que representará a  $FT$  que deseja-se identificar;
2. Escolha a entrada  $u(t) = 1, t \geq 0$  (degrau unitário) e obtenha a resposta  $y(t)$  do sistema linear em questão para um intervalo de tempo de 0 a  $t_f$  segundos, período de amostragem  $T$  e adote um valor aleatório  $\sigma = \sigma(0) > 0$ ;
3. No Matlab, entre com o comando  $fminsearch('costnomedoprograma', [\sigma(0)])$ , assim o programa descrito no Apêndice A será executado e realizará a identificação do sistema linear conforme descrito em (SILVA, 2008), seguindo a estrutura da Figura 3 e com isso obtendo uma estimacão dos parâmetros utilizando (38) e  $x = A^{-1} b$ ;
4. No programa descrito no Apêndice A, com o vetor  $x$  determinado, é aplicado um degrau unitário na entrada da planta identificada, e denominando  $\hat{y}(t)$  a saída obtida, realize o cálculo de  $J(x, \sigma)$  do modo que foi definido em (39), com  $t_f = NT$ , para calcular um valor EQM inicial, EQM(0);
5. Neste ponto a função do *Matlab*  $fminsearch$ , formará um poliedro, que neste caso será um segmento de reta, com início em EQM(0) e término em um EQM denominado por EQM(1), calculados conforme (39);
6. Daí conforme já explicado acima, além da reflexão, que são a expansão, a redução e a contração, o poliedro será deformado e manterá do procedimento anterior o menor EQM;  
|
7. Novamente será construído outro poliedro (segmento de reta), com início no EQM que foi mantido e término em um novo EQM(novo), e repita o passo (6);
8. Quando não for possível encontrar um novo poliedro (segmento de reta) com início no EQM que foi mantido e término em um EQM(novo) de tal forma que  $EQM(novo) < EQM$ , então pare e a identificação está concluída.

Dado um valor  $\sigma$  escolhido inicialmente, seja  $x = [b_1 \dots b'_m a'_1 \dots a_n]^T$  o vetor dos coeficientes do modelo obtido pelo método utilizando  $\sigma$  e  $\hat{y}(t)$  a sua resposta a uma entrada degrau unitário. A seguinte função de custo de  $J(x, \sigma)$  pode, então, ser calculada como o erro quadrático médio (EQM) entre a resposta  $y(t)$  a uma entrada degrau unitário da  $FT$  que deseja-se



identificar e a resposta  $\hat{y}(t)$  ao degrau unitário, do modelo obtido pelo método da seguinte maneira:

$$J(x, \sigma) \triangleq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(kT) - \hat{y}(kT)]^2} \quad (39)$$

no qual  $T$  é o período de amostragem utilizado na aquisição da resposta ao degrau e  $N$  é o número de amostras adquiridas. Portanto, o critério para selecionar os valores adequados de  $\sigma$  e  $x$  será escolher aqueles que minimizam a função  $J(x, \sigma)$ , que podem ser obtidos usando técnicas numéricas de otimização. No presente trabalho, o pacote *Control System Toolbox* será utilizado para avaliar a resposta ao degrau  $\hat{y}(t)$  do modelo obtido pelo método, e o algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981), implementado no *Optimization Toolbox Matlab*, será adotado para a obtenção de  $x$  e  $\sigma$  através da minimização de  $J(x, \sigma)$ .

### 3.3 RESULTADOS OBTIDOS COM OS APRIMORAMENTOS PROPOSTOS

Nesta seção o objetivo foi verificar a validade do método proposto para  $FT'$ s instáveis realizando algumas simulações que foram utilizadas em (SILVA, 2008). Neste caso tudo foi feito com o auxílio do Matlab, inclusive a minimização do  $EQM$ , calculada entre a resposta ao degrau do modelo  $\hat{y}(t)$  e a resposta ao degrau  $y(t)$  da  $FT$  que deseja-se identificar. Na primeira identificação não foi utilizada a informação referente à ordem da  $FT$  instável da planta ( $G_p(s)$ ) a partir da qual é determinada uma nova  $FT$  estável  $G(s + \sigma)$  para um conjunto de modelos de ordem reduzida, sendo que, a partir desses modelos reduzidos identifica-se os modelos reduzidos da planta instável. A segunda identificação é realizada a partir de um experimento real sujeito a ruídos externos; também não considerou-se a informação referente à ordem da planta e foi usado um modelo matemático genérico para determiná-la. Na última identificação, foram feitas simulações com a soma de ruído branco na saída da planta e novamente sem considerar informações referentes à ordem da planta.

#### 3.3.1 Primeiro exemplo contendo os aprimoramentos

Nesta primeira identificação foi escolhida a simulação 3 que encontra-se em (SILVA, 2008). Nela foi utilizada uma  $FT$  polinomial instável  $G(s) = (3s + 5)/(2s^2 + 3s)$  que atende as condições exigidas para o funcionamento do método, o tempo de simulação foi de 10 segundos e período de amostragem igual a 0,01 segundo. O conhecimento prévio da  $FT$  foi desconsiderado e por causa disso, foram testados modelos de primeira e segunda ordem para realizar a identificação. Para cada um deles, utilizou-se a função de otimização *fminsearch* que está disponível no *Optimization Toolbox* do Matlab para determinar os valores  $\sigma$  e  $x$  convenientes.

Na Tabela 2 seguinte estão dispostas as  $FT'$ s determinadas pelo método com os aprimora-

Tabela 3 -  $FT's G(s)$  determinadas em (SILVA, 2008) pelo método proposto sem utilizar a função *fminsearch*, bem como a ordem dos modelos, os valores da constante “ $\sigma$ ” e também o *EQM* calculado.

$\sigma$	(m,n)	Modelo determinado	<i>EQM</i>
1	(1,1)	$G(s) = (-0,02439s + 1,6243)/(1,015s - 0,01)$	$4,4 \times 10^{-4}$
1	(0,2)	$G(s) = (1,6)/(0,01563s^2 + 0,9938s - 0,0094)$	$5,2 \times 10^{-4}$
1	(1,2)	$G(s) = (0,625s + 0,975)/(0,4164s^2 + 0,5836s)$	$1,7 \times 10^{-4}$

mentos, bem como os valores da constante  $\sigma$  calculadas com o auxílio da função *fminsearch* para cada modelo utilizado e também o *EQM* calculado entre a resposta ao degrau unitário da função determinada pelo método e a resposta ao degrau da *FT*, utilizando (38) que deseja-se identificar.

Tabela 2 -  $FT's G(s)$  determinadas pelo método proposto bem como os valores da constante “ $\sigma$ ” calculadas com o auxílio da função *fminsearch*, a ordem dos modelos e também o *EQM* calculado.

$\sigma$	(m,n)	Modelo determinado	<i>EQM</i>
0,494	(1,1)	$G(s) = (-0,101s + 3,34)/(2,028s - 0,002)$	$1,7 \times 10^{-4}$
0,498	(0,2)	$G(s) = (3,266)/(0,06739s^2 + 1,98s - 0,002)$	$1,7 \times 10^{-4}$
1,184	(1,2)	$G(s) = (0,472s + 0,787)/(0,315s^2 + 0,472s)$	$2,2 \times 10^{-8}$

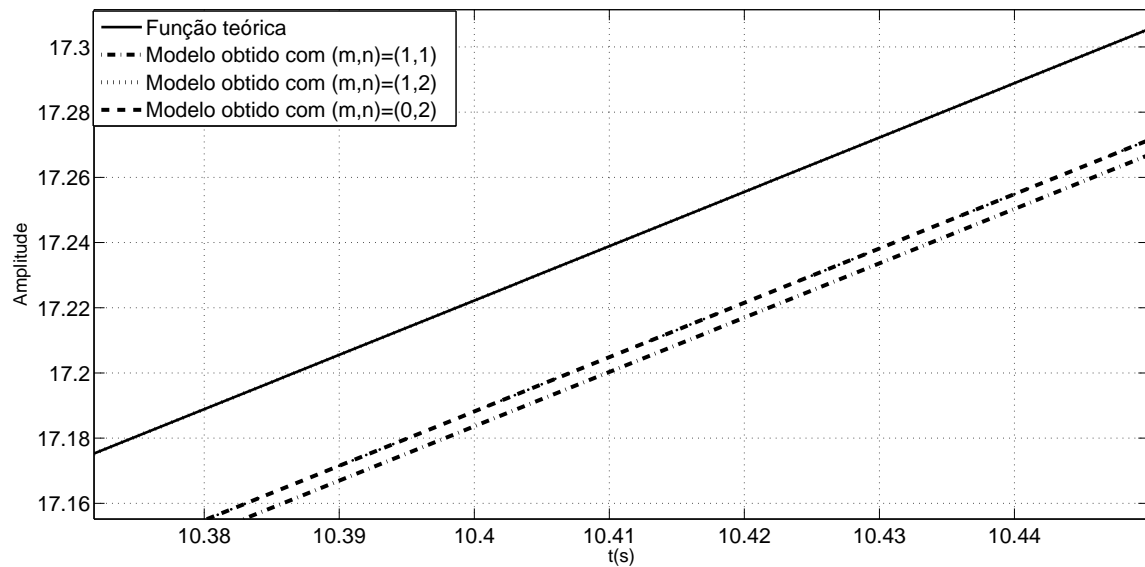
Os resultados reportados de (SILVA, 2008) da mesma identificação, mas sem usar as melhorias propostas estão descritos a seguir.

Repare que de acordo com os resultados obtidos pelo método proposto, contidos na Tabela 2 e os obtidos em (SILVA, 2008) que estão na Tabela 3, ficou evidente para ambos, que no caso (1,2), foi obtido o *EQM* mínimo, igual a  $2,2 \times 10^{-8}$  e  $1,7 \times 10^{-4}$  respectivamente. Também é possível perceber que o melhor caso obtido em (SILVA, 2008) apresentou *EQM* igual aos piores casos contidos na Tabela 2 que foram obtidos com os aprimoramentos propostos.

Na Figura 4 estão representados os gráficos da resposta ao degrau da função teórica que deseja-se identificar e as respostas ao degrau dos modelos contidos na Tabela 2, que foram os que apresentaram menor *EQM*.

Observação: Para perceber melhor a diferença entre os modelos foi dado um *zoom* no gráfico, descrito na Figura 5.

Figura 4 - Resposta da função experimental para uma entrada degrau, e também das três funções de transferência de ordem inteira.

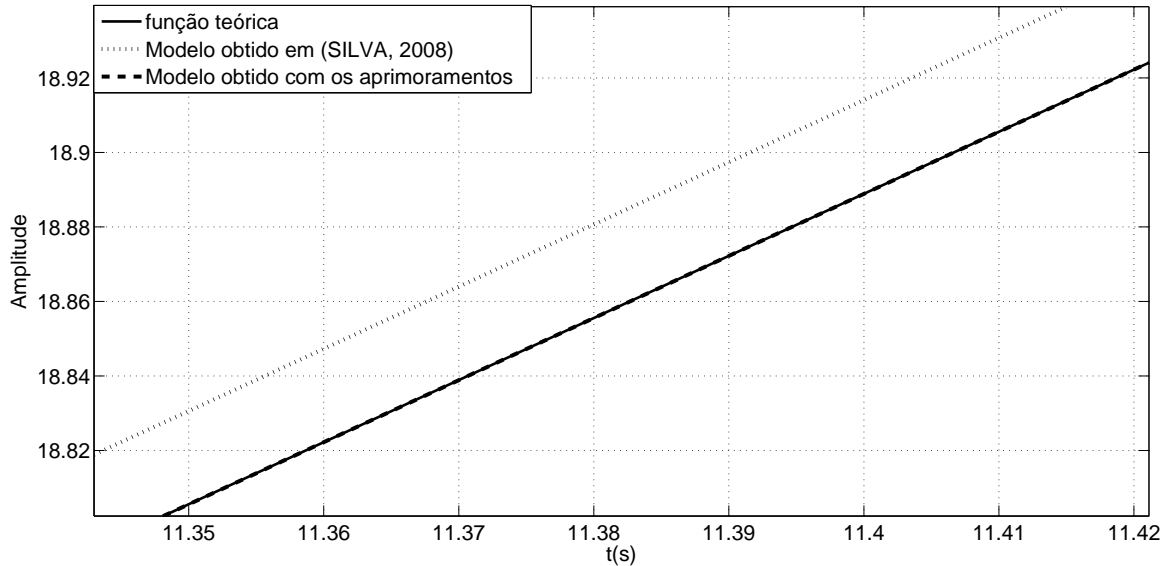


Fonte: O próprio autor

Na Figura 5 estão representados os gráficos da resposta ao degrau da função teórica que deseja-se identificar, as respostas ao degrau do modelo obtido em (SILVA, 2008) e dos modelos obtidos com a otimização de  $\sigma$ .

Observação: Para perceber melhor a diferença entre os dois modelos foi dado um *zoom* no gráfico, descrito na Figura 5.

Figura 5 - Respostas a uma entrada degrau, da função teórica, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com os aprimoramentos que apresentou o menor  $EQM$ , aproximadas por um *zoom*.



Fonte: O próprio autor

Note que com o auxílio do *zoom*, fica evidente a diferença entre os modelos obtidos em (SILVA, 2008) e dos modelos obtidos com os aprimoramentos propostos. Outro detalhe que fica nítido é que a resposta ao degrau unitário da função teórica é praticamente igual a resposta ao degrau unitário do modelo obtido com os aprimoramentos.

### 3.3.2 Segundo exemplo contendo os aprimoramentos

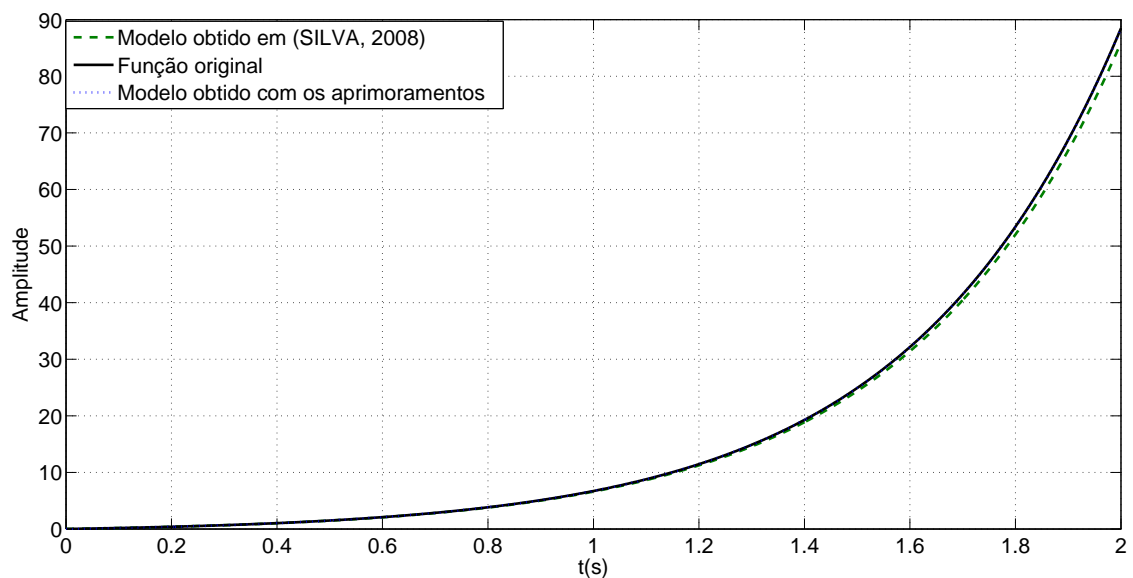
Na segunda identificação considerou-se a simulação 4 de (SILVA, 2008), que utilizou para realizar a identificação uma  $FT$  polinomial instável  $G(s) = (3)/(2s - 5)$ . Para a execução do método, o seu conhecimento foi considerado, que o tempo escolhido para realizar a simulação é de 10 segundos, com passo igual a 0,01 segundo. Novamente, foram utilizados os aprimoramentos propostos para a otimização de  $\sigma$  e  $x$  e os resultados são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 -  $FT's$  obtidas em (SILVA, 2008) e com os aprimoramentos propostos, bem como o valor de  $\sigma$  utilizado e também o  $EQM$  de cada uma delas.

$\sigma$	Modelo determinado em (SILVA, 2008)	$EQM$
4	$G(s) = (3,003)/(2,0139s - 5,0055)$	$7,08 \times 10^{-6}$
$\sigma$	Modelo determinado com as implementações	$EQM$
4,6005	$G(s) = (0,7141)/(0,4761s - 1,19)$	$4,87 \times 10^{-9}$

Na Figura 6, estão ilustradas as respostas a uma entrada degrau da função original, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com o método concebido que apresentaram o menor  $EQM$ .

Figura 6 - Respostas a uma entrada degrau da função original, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com os aprimoramentos.



Fonte: O próprio autor

Observe que neste exemplo, nem foi necessário aplicar um *zoom* no gráfico para notar a diferença existente entre o modelo obtido em (SILVA, 2008) e o modelo obtido com os aprimoramentos.

### 3.3.3 Terceiro exemplo contendo os aprimoramentos

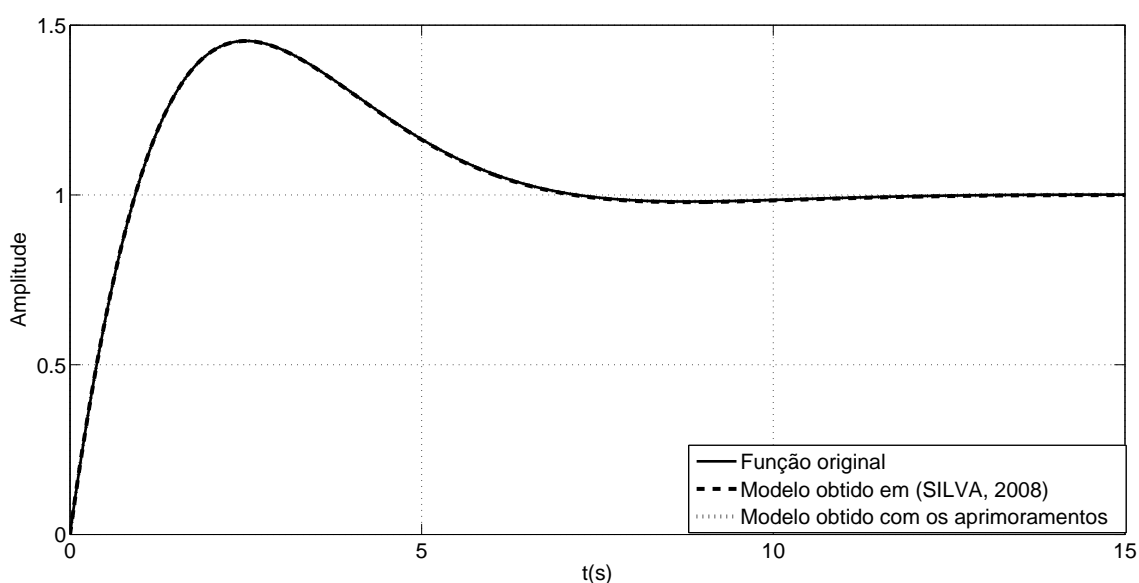
Neste terceiro exemplo estudado, foi considerada a simulação 6 apresentada em (SILVA, 2008) que utilizou para ser identificada a *FT* estável  $G(s) = (3s + 1)/(2s^2 + 2s + 1)$ . O tempo de simulação utilizado foi de  $t = 15$  segundos e o passo igual a 0,01 segundo. Os resultados obtidos, executando o método proposto com os aprimoramentos, estão descritos na Tabela 5:

Tabela 5 -  $FT's$  obtidas em (SILVA, 2008) e com os aprimoramentos propostos, bem como o valor de  $\sigma$  utilizado e também o  $EQM$  de cada uma delas.

$\sigma$	Modelo determinado em (SILVA, 2008)	$EQM$
1	$G(s) = (0,6002s + 0,1998)/(0,4001s^2 + 0,3998s + 0,2001)$	$2,61 \times 10^{-5}$
$\sigma$	Modelo determinado com os aprimoramentos	$EQM$
0,0114	$G(s) = (2,932s + 0,9774)/(1,955s^2 + 1,955s + 0,9774)$	$7,48 \times 10^{-9}$

Na Figura 7 estão ilustradas as respostas a uma entrada degrau da função original, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com o método proposto que apresentaram o menor  $EQM$ .

Figura 7 - Respostas a uma entrada degrau, da função teórica, dos modelos obtidos em (SILVA, 2008) e dos modelos obtidos com os aprimoramentos que apresentaram o menor  $EQM$ .

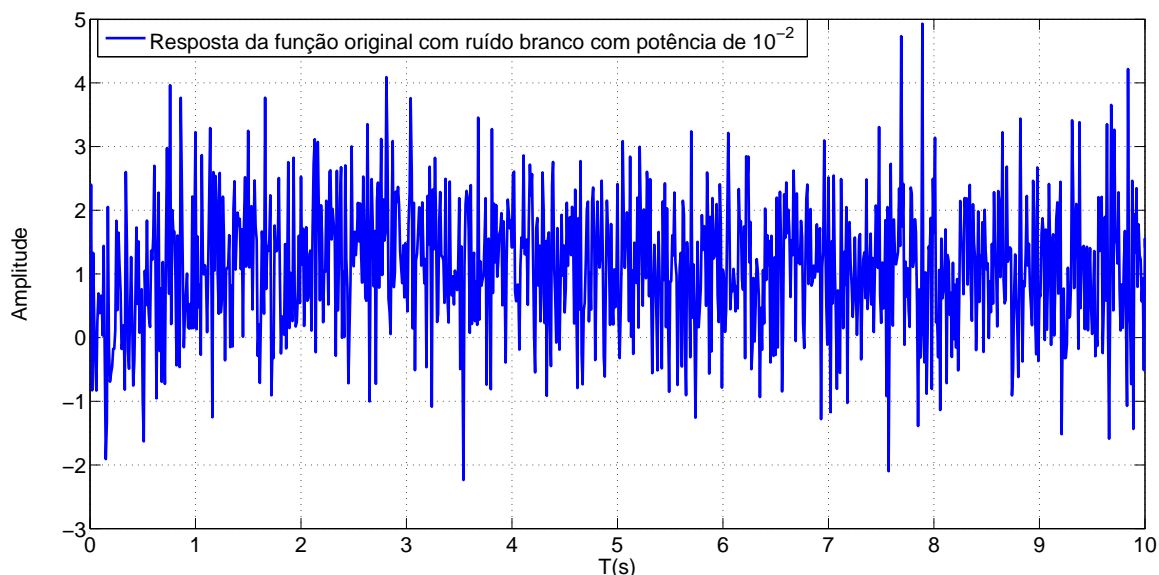


Fonte: O próprio autor

### 3.3.4 Quarto exemplo contendo os aprimoramentos

Neste último exemplo estudado, será considerada a simulação 8 apresentada em (SILVA, 2008). Para este caso, a  $FT$  usada foi  $G(s) = (3s + 1)/(2s^2 + 2s + 1)$ , que é a mesma da simulação 6, mas a diferença é que foi acrescido ruído branco na saída da planta, primeiro com potência configurada para  $10^{-3}$  e depois com potência  $10^{-2}$ . O tempo de simulação foi de 15 segundos e o passo igual a 0,01 segundo. Neste caso será utilizado somente o resultado obtido em (SILVA, 2008) que apresentou o menor  $EQM$  dentre todos os outros calculados. Na Figura 8 está ilustrada a resposta da  $FT$  original a uma entrada degrau que deseja-se identificar, acrescida de ruído branco configurado com uma potência de  $10^{-2}$ .

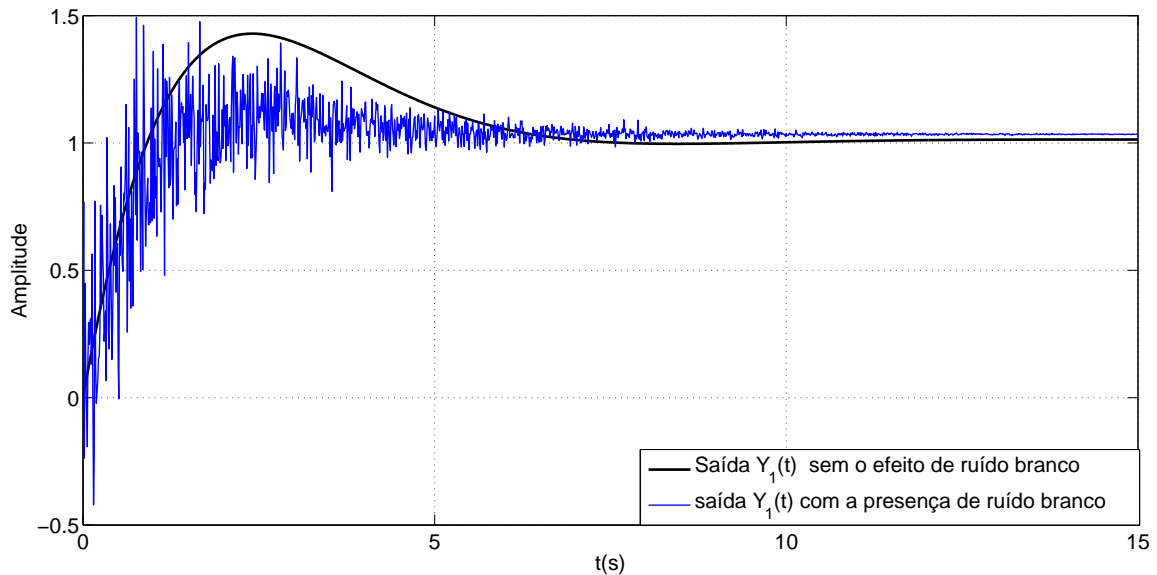
Figura 8 - Resposta da função original para uma entrada degrau, acrescida de ruído branco com potência de  $10^{-2}$ .



Fonte: O próprio autor

Antes de realizar a identificação em questão, vale a pena observar o efeito do método proposto em (SILVA, 2008) na resposta ao degrau da  $FT$  original acrescida de ruído branco com potência igual a  $10^{-3}$ , quando esta saída é multiplicada pela função exponencial  $e^{-\sigma t}$  e depois e passa pelo filtro  $(s+\sigma)/(s)$ . Assim na Figura 9 estão representadas as saídas  $Y_1(s)$  (que pode ser vista na Figura 3) para  $\sigma = 4$  com ruído branco com potência igual a  $10^{-2}$  e também sem ruído branco.

Figura 9 - Resposta da função original para uma entrada degrau, acrescida de ruído branco com potência de  $10^{-2}$  multiplicada por  $e^{-4t}$  após passar pelo filtro  $(s+4)/(s)$ .



Fonte: O próprio autor

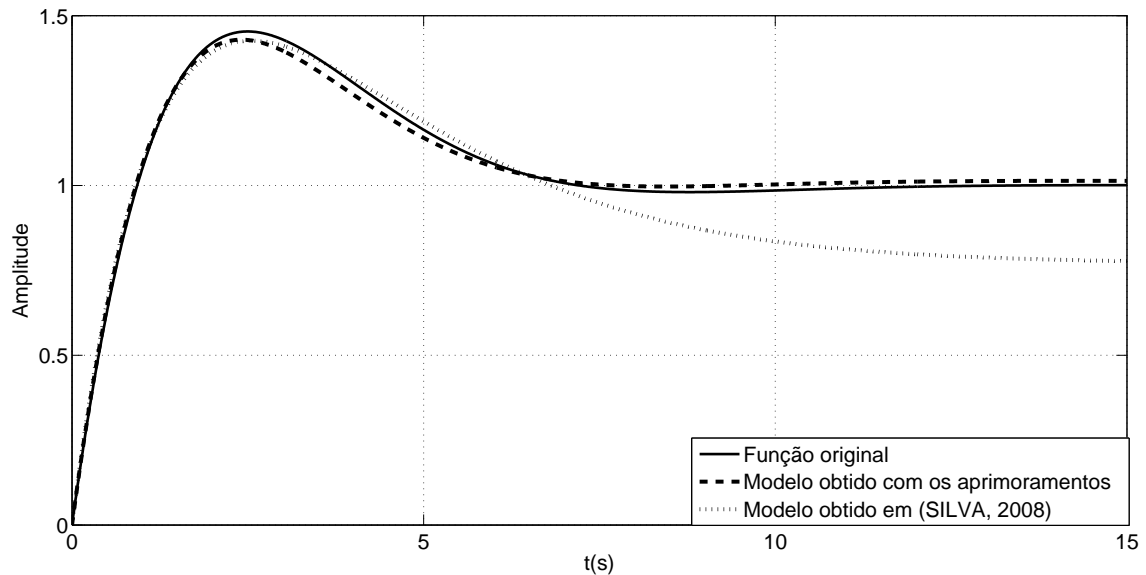
Note que de acordo com a Figura 9, a função exponencial  $e^{-\sigma t}$  tem um papel muito importante na identificação, pois pelo fato de atenuar o ruído, acarreta a convergência da saída  $y_1(t)$  para um valor constante, o que possibilita a obtenção de um modelo para representar a  $FT$  original. Continuando com o processo de identificação de  $G(s) = (3s + 1)/(2s^2 + 2s + 1)$  acrescentando ruído branco na saída da planta com potência igual a  $10^{-3}$ , os resultados obtidos estão descritos na Tabela 7:

Tabela 6 -  $FT's$  obtidas em (SILVA, 2008) e com os aprimoramentos propostos, bem como o valor de  $\sigma$  utilizado e também o  $EQM$  de cada uma delas.

$\sigma$	Modelo determinado em (SILVA, 2008)	$EQM$
1	$G(s) = (0,7185s + 0,09)/(0,4368s^2 + 0,4464s + 0,1168)$	0,01
$\sigma$	Modelo determinado com os aprimoramentos	$EQM$
0,3940	$G(s) = (1,362s + 0,4976)/(0,8791s^2 + 0,9448s + 0,492)$	0,00574



Figura 10 - Respostas a uma entrada degrau da função original, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com os aprimoramentos.



Fonte: O próprio autor

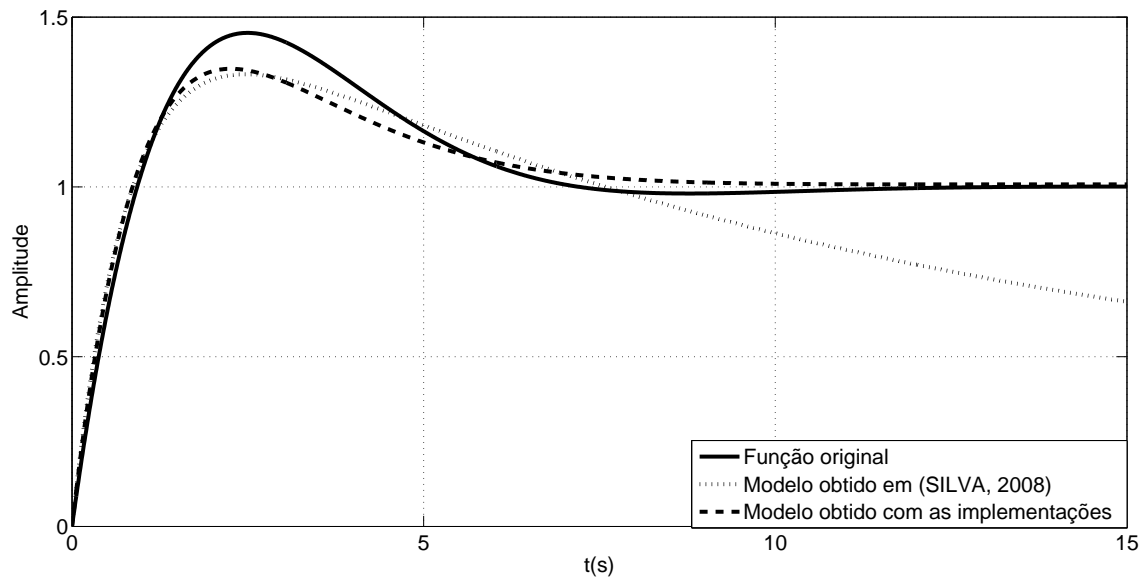
Analisando o gráfico contido na Figura 10, fica bem claro o ganho obtido neste exemplo utilizando os aprimoramentos sugeridos, pois além de determinar um modelo estável para representar a  $FT$  original, o resultado foi bem satisfatório.

Finalizando, foi realizada a identificação de  $G(s) = (3s + 1)/(2s^2 + 2s + 1)$  acrescentando ruído branco na saída da planta com potência de  $10^{-2}$  e os resultados estão dispostos a seguir:

Tabela 7 -  $FT's$  obtidas em (SILVA, 2008) e com os aprimoramentos propostos, bem como o valor de  $\sigma$  utilizado e também o  $EQM$  de cada uma delas.

$\sigma$	Modelo determinado em (SILVA, 2008)	$EQM$
1	$G(s) = (0,8009s + 0,0151)/(0,4001s^2 + 0,5412s + 0,0469)$	0,0104
$\sigma$	Modelo determinado com os aprimoramentos	$EQM$
0,5234	$G(s) = (1,179s + 0,362)/(0,6513s^2 + 0,8827s + 0,3593)$	0,009

Figura 11 - Respostas a uma entrada degrau da função original, do modelo obtido em (SILVA, 2008) e do modelo obtido com os aprimoramentos.



Fonte: O próprio autor

Repare que de acordo com o gráfico exposto na Figura 11, novamente o modelo obtido com os aprimoramentos propostos apresentou um resultado bem mais eficiente que o obtido sem os aprimoramentos.

#### 4 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE $FT's$ ESTÁVEIS DE ORDEM FRACIONÁRIA UTILIZANDO INTEGRADORES

Neste capítulo, será apresentado um método de identificação de  $FT's$  semelhante ao apresentado em (KOSAKA et al., 2005). A principal diferença entre ambos é que a ordem dos integradores neste trabalho é fracionária. Primeiro, na Seção 4.1 trata-se do método para alguns casos particulares nos quais as identificações são realizadas utilizando  $FT's$  estáveis de ordem fracionária  $\alpha$ , considerando  $(0 < \alpha \leq 1)$ . Posteriormente na Seção 4.2 será apresentado um outro caso particular de identificação de sistemas lineares com o auxílio de  $FT's$  estáveis de ordem fracionária  $2\alpha$ , com  $(0 < \alpha \leq 1)$ . Na Seção 4.3 é proposta uma generalização do método proposto que possibilita a identificação por intermédio de  $FT's$  que possuem uma ordem fracionária arbitrária  $n\alpha$ , considerando  $(0 < \alpha \leq 1)$  e  $n$  um número inteiro positivo.

##### 4.1 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT's$ ESTÁVEIS DE ORDEM $\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$

Seja um sistema linear invariante no tempo sujeito a entrada degrau unitário representada por  $U(s) = 1/s$  e considere  $G(s) = b_0 / (a_\alpha s^\alpha + a_0)$ , uma  $FT$  estável, com  $0 < \alpha \leq 1$ . Por outro lado, note que a estabilidade de  $G(s)$  assegura que  $a_0$  é diferente de zero e em função disso, é possível escrever  $G(s) = G(0) / (a'_\alpha s^\alpha + 1)$ , com  $a'_\alpha = a_\alpha / a_0$  e  $G(0) = b_0 / a_0$ .

Considere agora o método de identificação descrito na Figura 12 e leve em conta a saída  $Y_1(s)$ . Logo é possível concluir que:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{G(0)}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \quad (40)$$

Utilizando o Teorema do Valor final (TVF), que também é válido para o CF e pode ser verificado em (LI; DENG; XU, 2005), tem-se:

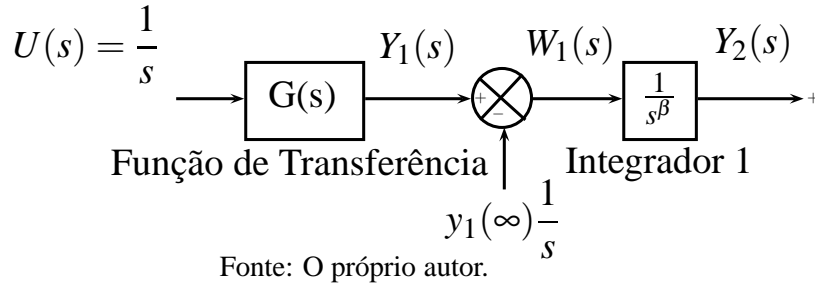
$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) = G(0). \quad (41)$$

Acrescentando um integrador fracionário  $H(s) = 1/s^\beta$ , com  $0 < \beta \leq 1$  na saída  $W_1(s)$  de

acordo com a Figura 12, calculando a saída  $Y_2(s)$ , o resultado fica:

$$\begin{aligned}
 Y_2(s) &= \frac{1}{s^\beta} \left[ Y_1(s) - y_1(\infty) \frac{1}{s} \right] \\
 &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{s^\beta} \left[ \frac{y_1(\infty) - y_1(\infty) (a'_\alpha s^\alpha + 1)}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty) a'_\alpha s^{\alpha-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right].
 \end{aligned} \tag{42}$$

Figura 12 - Método para obtenção do Sinal  $Y_2(s)$ .



Analisando (42), existem três possibilidades distintas para o resultado final:

- Primeira possibilidade:  $\alpha < \beta$ .

Se isto ocorrer, então  $\alpha - \beta < 0$  e daí substituindo em (42), vem que:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty) a'_\alpha s^{\alpha-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \tag{43}$$

Note que como neste caso o denominador de  $s \cdot Y_2(s)$  se anula para  $s = 0$ , o TVF não pode ser usado para obter  $y_2(\infty)$ , pois  $s = 0$  não está no domínio desta função. Assim, para determinar este resultado, observe que de (43),  $Y_2(s)$  pode ser decomposto utilizando o processo de decomposição por frações parciais da seguinte forma:

$$Y_2(s) = \frac{-y_1(\infty) a'_\alpha}{s^{1-\alpha+\beta} (a'_\alpha s^\alpha + 1)} = \frac{A_1}{s^{1-\alpha+\beta}} + \frac{A_2}{a'_\alpha s^\alpha + 1} = \frac{A_1 a'_\alpha s^\alpha + A_1 + A_2 s^{1-\alpha+\beta}}{s^{1-\alpha+\beta} (a'_\alpha s^\alpha + 1)}. \tag{44}$$

Solucionando (44), tem-se  $A_1 = -y_1(\infty) a'_\alpha$  e  $A_2 = y_1(\infty) a'^2_\alpha s^{2\alpha-1-\beta}$  e fazendo a substitui-

ção, o resultado é o seguinte:

$$Y_2(s) = \frac{-y_1(\infty)a'_\alpha}{s^{1-\alpha+\beta}} + \frac{y_1(\infty)a'_\alpha{}^2s^{2\alpha-1-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1}. \quad (45)$$

Assim, de (45), existem três casos que podem ocorrer:

- Caso 1:  $2\alpha - 1 - \beta > 0$ .

Neste caso o processo de decomposição por frações parciais está concluído, pois note que de (45), seja  $G_1(s) = \frac{-y_1(\infty)a'_\alpha}{s^{1-\alpha+\beta}}$  e  $G_2(s) = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha{}^2s^{2\alpha-1-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1}$ . Analisando  $G_2(s)$ , se for aplicado o TVF, o resultado fica:

$$g_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_2(s) = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha{}^2s^{2\alpha-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} = 0, \quad (46)$$

pois como  $2\alpha - 1 - \beta > 0$ , então  $2\alpha - \beta > 0$ .

Observando agora  $G_1(s)$ , como  $1 - \alpha + \beta > 0$ , pois  $\alpha < \beta$ , conforme a Tabela 1:

$$L^{-1}[G_1(s)] = L^{-1}\left[\frac{y_1(\infty)a'_\alpha}{s^{1+\beta-\alpha}}\right] = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha t^{(1+\beta-\alpha-1)}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} u(t) = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} u(t), \quad (47)$$

sendo  $\Gamma(1+\beta-\alpha)$  a função Gama definida em (1) e  $u(t)$ , a função degrau unitário. Assim, como  $\alpha < \beta$ , tem-se que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $|y_1(\infty)a'_\alpha t^{\beta-\alpha}/\Gamma(1+\beta-\alpha)|$  tende ao infinito, e neste caso,  $|y_2(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

- Caso 2:  $2\alpha - 1 - \beta < 0$ .

Se isso acontecer, será necessário fazer a decomposição por frações parciais em  $G_2(s)$  e a partir de (45), tem-se que:

$$G_2(s) = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha{}^2s^{2\alpha-1-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} = \frac{B_1}{s^{1+\beta-2\alpha}} + \frac{B_2}{a'_\alpha s^\alpha + 1} = \frac{B_1a'_\alpha s^\alpha + B_1 + B_2s^{1+\beta-2\alpha}}{s^{2\alpha-1-\beta}(a'_\alpha s^\alpha + 1)}. \quad (48)$$

Solucionando (48), tem-se  $B_1 = y_1(\infty)a'_\alpha{}^2$  e  $B_2 = -y_1(\infty)a'_\alpha{}^3s^{3\alpha-1-\beta}$  e a partir destes resultados, fazendo a substituição em (48), a equação fica:

$$G_2(s) = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha{}^2}{s^{1+\beta-2\alpha}} - \frac{y_1(\infty)a'_\alpha{}^3s^{3\alpha-1-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1}. \quad (49)$$

Para determinar  $g_2(\infty)$ , partindo de (49), considere  $H_1(s) = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha{}^2}{s^{1+\beta-2\alpha}}$  e

$H_2(s) = \frac{-y_1(\infty)a'_\alpha{}^3s^{3\alpha-1-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1}$ . Analisando  $H_2(s)$ , para o expoente  $3\alpha - 1 - \beta > 0$ , utilizando o

TVF, vem que:

$$h_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_2(s) = \frac{-y_1(\infty) a'_\alpha s^{3\alpha-1-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} = 0. \quad (50)$$

Observando agora  $H_1(s)$ , como  $-2\alpha + 1 + \beta > 0$ , (pois neste caso está sendo suposto que  $2\alpha - 1 - \beta < 0$ ), conforme a Tabela 1:

$$L^{-1}[H_1(s)] = L^{-1}\left[\frac{y_1(\infty) a'_\alpha s^{2\alpha}}{s^{1+\beta-2\alpha}}\right] = \frac{y_1(\infty) a'_\alpha t^{(1+\beta-2\alpha-1)}}{\Gamma(1+\beta-2\alpha)} u(t) = \frac{y_1(\infty) a'_\alpha t^{\beta-2\alpha}}{\Gamma(1+\beta-2\alpha)} u(t), \quad (51)$$

sendo  $\Gamma(1+\beta-2\alpha)$  a função Gama definida em (1) e  $u(t)$ , a função degrau unitário.

Assim, como  $-2\alpha + 1 + \beta > 0$ , é possível afirmar que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $|y_1(\infty) a'_\alpha t^{(\beta-2\alpha)} / \Gamma(1+\beta-2\alpha)|$  tende ao infinito, e neste caso,  $|g_2(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Por um outro lado, se  $3\alpha - 1 - \beta > 0$  será necessário realizar novamente o processo de decomposição por frações parciais, analogamente aos casos anteriores. Como o expoente  $\alpha$  é um número positivo, irá existir uma determinada etapa  $n$ , na qual ao ser realizada a decomposição por frações parciais, o expoente analisado  $n\alpha - 1 - \beta$  será positivo e neste momento o processo de decomposição por frações parciais estará encerrado e  $Y_2(s)$  poderá ser decomposto utilizando frações parciais da forma,

$$Y_2(s) = \frac{A_n}{s^{(c+1)}} + R_2(s), \quad c > 0. \quad (52)$$

Como  $G(s)$  é estável (supõe-se este fato por hipótese), então  $L^{-1}(R_2(s)) = r_2(t) = 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Adicionalmente, como  $c > 0$ , conforme (PODLUBNY, 1999):

$$L^{-1}\left[\frac{A_n}{s^{(c+1)}}\right] = \frac{A_n t^{(c+1-1)}}{\Gamma(c+1)} u(t) = \frac{A_n t^c}{\Gamma(c+1)} u(t). \quad (53)$$

sendo  $\Gamma(c+1)$  a função Gama definida em (1) e  $u(t)$  a função degrau unitário. Assim de (52), de  $c > 0$  e de (53) tem-se que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $|A_n t^c / \Gamma(c+1)|$  tende ao infinito. Assim, neste caso  $|y_2(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

- Caso 3:  $2\alpha - 1 - \beta = 0$ .

Se isso acontecer, substituindo  $2\alpha - 1 - \beta = 0$  em  $G_2(s)$  e a partir de (45), tem-se que:

$$Y_2(s) = \frac{-y_1(\infty) a'_\alpha}{s^{1-\alpha+\beta}} + \frac{y_1(\infty) a'_\alpha s^{2\alpha}}{a'_\alpha s^\alpha + 1}. \quad (54)$$

Neste caso o processo de decomposição por frações parciais está encerrado, pois a partir de (54), seja  $G_1(s) = \frac{-y_1(\infty) a'_\alpha}{s^{1-\alpha+\beta}}$  e  $G_2(s) = \frac{y_1(\infty) a'_\alpha s^{2\alpha}}{a'_\alpha s^\alpha + 1}$ . Analisando apenas  $G_2(s)$  e aplicando o TVF, vem que:

$$g_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_2(s) = \frac{y_1(\infty) a'_\alpha s^{2\alpha}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} = 0, \quad (55)$$

Observando agora  $G_1(s)$ , como  $1 - \alpha + \beta > 0$ , pois  $\alpha < \beta$ , conforme (PODLUBNY, 1999):

$$L^{-1}[G_1(s)] = L^{-1}\left[\frac{y_1(\infty)a'_\alpha}{s^{1+\beta-\alpha}}\right] = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha t^{(1+\beta-\alpha-1)}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} u(t) = \frac{y_1(\infty)a'_\alpha t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} u(t), \quad (56)$$

sendo  $\Gamma(1+\beta-\alpha)$  a função Gama definida em (1) e  $u(t)$ , a função degrau unitário. Assim, como  $\alpha < \beta$ , tem-se que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\left|y_1(\infty) a'_\alpha t^{\beta-\alpha} / \Gamma(1+\beta-\alpha)\right|$  tende ao infinito, e neste caso,  $|y_2(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

- Segunda possibilidade:  $\alpha = \beta$ .

Se este fato ocorrer, substituindo  $\alpha = \beta$  em (43), o resultado fica:

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty)a'_\alpha s^{\alpha-\alpha}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty)a'_\alpha}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Utilizando o resultado do TVF:

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = -y_1(\infty)a'_\alpha. \quad (58)$$

Finalizando, de (41) e de (58) é possível determinar o valor de  $a'_\alpha$ , que fica :  $a'_\alpha = \frac{-y_2(\infty)}{y_1(\infty)}$  e através desta igualdade identificar o sistema linear em questão.

- Terceira possibilidade:  $\alpha > \beta$ .

Acontecendo este caso, é possível afirmar que  $\alpha - \beta > 0$ , daí seja  $c = \alpha - \beta$ . Então substituindo em (43), tem-se que:

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty)a'_\alpha s^{\alpha-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty)a'_\alpha s^c}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Aplicando agora o TVF, vem que:

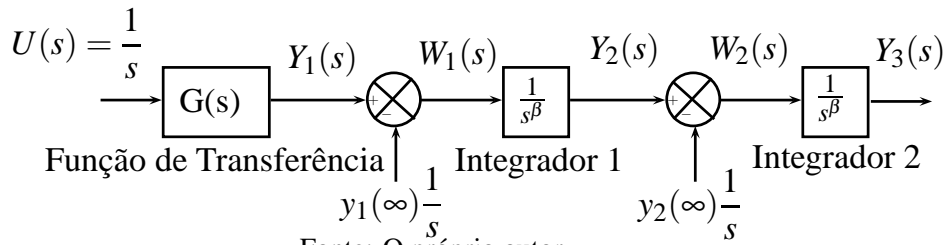
$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-y_1(\infty)a'_\alpha s^c}{a'_\alpha s^\alpha + 1} = 0. \quad (60)$$

Concluindo, é possível estabelecer um critério para a escolha do grau que será utilizado no

integrador que é o seguinte: atribua para  $\beta$  um valor positivo próximo de zero e realize o método descrito na Figura 12 obtendo  $y_2(\infty)$ . Se o resultado for  $y_2(\infty) = 0$ , conforme (60) incremente o valor de  $\beta$  e refaça o método até que  $y_2(\infty)$  assuma um valor que tende ao infinito, como anunciado na primeira possibilidade ( $\alpha - \beta < 0$ ). Quando este fato ocorre, significa que o grau  $\beta$  é maior do que o grau  $\alpha$  de  $G(s)$ ; logo é necessário decrementar  $\beta$  até que  $y_2(\infty)$  obedeça (58), condição que quando verificada indica que  $\beta$  será igual ao grau  $\alpha$  de  $G(s)$ , finalizando o critério.

Considere agora  $G(s) = (b_\alpha s^\alpha + b_0) / (a_\alpha s^\alpha + a_0)$ , uma FT estável, sujeita a uma entrada degrau,  $U(s) = 1/s$  e o diagrama de blocos descrito na Figura 13. Novamente é possível notar

Figura 13 - Método para obtenção do sinal  $Y_3(s)$ .



que devido à estabilidade de  $G(s)$ ,  $a_0 \neq 0$ , daí, fazendo  $G(0) = b_0/a_0$ ,  $b'_\alpha = b_\alpha/a_0$  e  $a'_\alpha = a_\alpha/a_0$ , obtém-se  $G(s) = (b'_\alpha s^\alpha + G(0)) / (a'_\alpha s^\alpha + 1)$ .

Utilizando a Figura 13 para o cálculo de  $Y_1(s)$ , vem que:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_\alpha s^\alpha + G(0)}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \quad (61)$$

Aplicando o TVF, tem-se que:

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) = G(0). \quad (62)$$

Examinando outra vez a Figura 13 para determinar  $Y_2(s)$ , tem-se que :

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= \frac{1}{s^\beta} \left[ Y_1(s) - y_1(\infty) \cdot \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{s^\beta} \left[ \frac{b'_\alpha s^\alpha + y_1(\infty) - y_1(\infty)(a'_\alpha s^\alpha + 1)}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{(b'_\alpha - y_1(\infty)a'_\alpha) s^{\alpha-\beta}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Analogamente ao caso anterior para determinar  $Y_2(s)$ , existem três possibilidades que podem acontecer e os resultados são respectivamente:



- Primeira possibilidade:  $\alpha < \beta$ .

Neste caso o resultado é o mesmo que foi obtido anteriormente nesta seção é  $|y_2(\infty)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

- Segunda possibilidade:  $\alpha = \beta$ .

Nesta possibilidade, substituindo  $\alpha = \beta$  em (63), tem-se:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{(b'_\alpha - G(0)a'_\alpha)s^{\alpha-\alpha}}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] = \frac{b'_\alpha - G(0)a'_\alpha}{a'_\alpha s^\alpha + 1}. \quad (64)$$

Aplicando agora o TVF, vem que:

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b'_\alpha - G(0)a'_\alpha}{a'_\alpha s^\alpha + 1} = b'_\alpha - G(0)a'_\alpha. \quad (65)$$

Assim, neste caso  $y_2(\infty) = b'_\alpha - G(0)a'_\alpha$ .

- Terceira possibilidade:  $\alpha > \beta$ .

Neste caso, também análogo ao caso que foi estudado anteriormente nesta seção, o resultado final é que  $y_2(\infty) = 0$ . Concluindo, será utilizado o critério estabelecido anteriormente, que seleciona a segunda possibilidade, na qual  $\alpha = \beta$ . Continuando a execução do método de acordo com a Figura 13, para determinar a saída  $Y_3(s)$ , vem que:

$$\begin{aligned} Y_3(s) &= \frac{1}{s^\alpha} \cdot [Y_2(s) - y_2(\infty)] \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} \left[ \frac{b'_\alpha - y_1(\infty)a'_\alpha - y_2(\infty)(a'_\alpha s^\alpha + 1)}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_2(\infty)a'_\alpha}{a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Utilizando outra vez o TVF, conclui-se que :

$$y_3(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_3(s) = -y_2(\infty)a'_\alpha. \quad (67)$$

Dessa forma, de (62) e (67) é possível formar um sistema linear de equações do tipo  $Ax = b$ , sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -y_1(\infty) \\ 0 & -y_2(\infty) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} b'_\alpha \\ a'_\alpha \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} y_2(\infty) \\ y_3(\infty) \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Supondo que  $\det(A) \neq 0$ , tem-se a solução para  $x = A^{-1} b$ . Observe que  $\det(A) = -y_2(\infty) = -(b'_\alpha - y_1(\infty)a'_\alpha) \neq 0$ , e isto só irá ocorrer se e somente se o polo de  $G(s)$ , não for igual ao zero de  $G(s)$ , conforme a demonstração a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Planta } G(s) &= (b'_\alpha s^\alpha + y_1(\infty))/(a'_\alpha s^\alpha + 1) \\ \text{Zero de } G(s) : \text{ igual a } s \text{ tal que } b'_\alpha s^\alpha + y_1(\infty) &= 0 \longrightarrow s^\alpha = -y_1(\infty)/b'_\alpha. \\ \text{Polo de } G(s) : \text{ igual a } s \text{ tal que } a'_\alpha s^\alpha + 1 &= 0 \longrightarrow s^\alpha = -1/a'_\alpha. \\ \text{Zero de } G(s) = \text{Polo de } G(s) &\longrightarrow -y_1(\infty)/b'_\alpha = -1/a'_\alpha. \end{aligned} \quad (69)$$

$$\text{Portanto, } (b'_\alpha - a'_\alpha \cdot y_1(\infty)) = 0. \quad (70)$$

#### 4.2 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO FT's ESTÁVEIS DE ORDEM $2\alpha$ ( $0 < \alpha \leq 1$ )

Seja  $G(s) = b_0 / (a_{2\alpha}s^{2\alpha} + a_\alpha s^\alpha + a_0)$ , uma FT estável, com  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $U(s) = 1/s$  uma entrada degrau e considere o diagrama de blocos descrito na Figura 14. Lembrando novamente que  $a_0 \neq 0$  devido à estabilidade de  $G(s)$  e fazendo  $G(0) = b_0/a_0$ ;  $a'_i = a_i/a_0$ ,  $i = 1, 2$ , resulta em  $G(s) = G(0) / (a'_{2\alpha}s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1)$ .

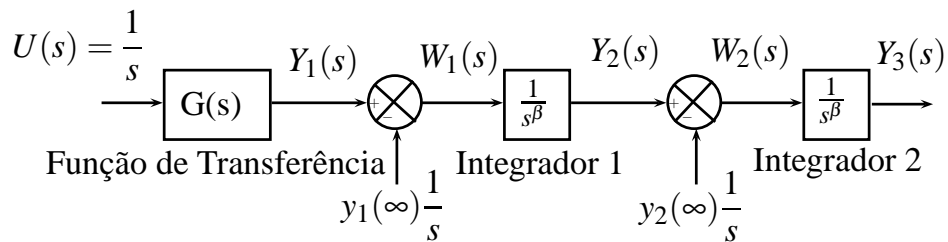
A partir daí calculando  $Y_1(s)$ , de acordo com a Figura 14:

$$Y_1(s) = U(s) G(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{G(0)}{a'_{2\alpha}s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right). \quad (71)$$

Aplicando o TVF, o resultado fica:

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{G(0)}{a'_{2\alpha}s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right) = G(0). \quad (72)$$

Figura 14 - Diagrama do método para  $G(s) = G(0)/(a_{2\alpha}s^{2\alpha} + a_\alpha s^\alpha + 1)$ .



Fonte: O próprio autor.

Observando novamente a Figura 14 para determinar  $Y_2(s)$ , tem-se que :

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= \frac{1}{s^\beta} \left[ Y_1(s) - y_1(\infty) \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{s^\beta} \left[ \frac{y_1(\infty) - y_1(\infty) (a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1)}{a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty) (a'_{2\alpha} s^\alpha + a'_\alpha) s^{\alpha-\beta}}{a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Note que novamente existem três possibilidades que podem acontecer e analogamente aos casos anteriores e utilizando o critério do primeiro caso estudado, a possibilidade selecionada será a que considera  $\alpha = \beta$ .

Substituindo  $\alpha = \beta$  em (73), o resultado fica:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty) (a'_{2\alpha} s^\alpha + a'_\alpha) s^{\alpha-\alpha}}{a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] = \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_1(\infty) (a'_{2\alpha} s^\alpha + a'_\alpha)}{a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \quad (74)$$

Utilizando o TVF, tem-se que:

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = -y_1(\infty) a'_\alpha. \quad (75)$$

Calculando agora a saída  $Y_3(s)$ , de acordo com a Figura 14, vem que:

$$\begin{aligned} Y_3(s) &= \frac{1}{s^\alpha} \left[ Y_2(s) - y_2(\infty) \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} \left[ \frac{-y_1(\infty) a'_{2\alpha} s^\alpha - y_1(\infty) a'_\alpha - y_2(\infty) (a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1)}{a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} \left[ \frac{y_1(\infty) a'_{2\alpha} s^\alpha + y_2(\infty) - y_2(\infty) (a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1)}{a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{-y_2(\infty) a'_{2\alpha} s^\alpha - y_2(\infty) a'_\alpha - y_1(\infty) a'_{2\alpha}}{a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

Aplicando o TVF, tem-se que:

$$y_3(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s} Y_3(s) \right) = -y_2(\infty) a'_\alpha - y_1(\infty) a'_{2\alpha}. \quad (77)$$

Dessa forma de (75) e de (77), é possível elaborar um sistema linear de equações do tipo

$Ax = b$ , sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -y_1(\infty) \\ -y_1(\infty) & -y_2(\infty) \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} a'_{2\alpha} \\ a'_\alpha \end{bmatrix} e b = \begin{bmatrix} y_2(\infty) \\ y_3(\infty) \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Supondo  $\det(A) \neq 0$ , tem-se a solução para  $x = A^{-1} b$ . Observe que  $\det(A) = -(y_1(\infty))^2$  e por (72) tem-se que  $\det(A) = -(y_1(\infty))^2 = -(G(0))^2$ . Então como  $y(\infty) = G(0) = \frac{a_0}{b_0}$  e por hipótese  $FT$  é estável, logo sempre existirá solução para o sistema linear descrito em (78).

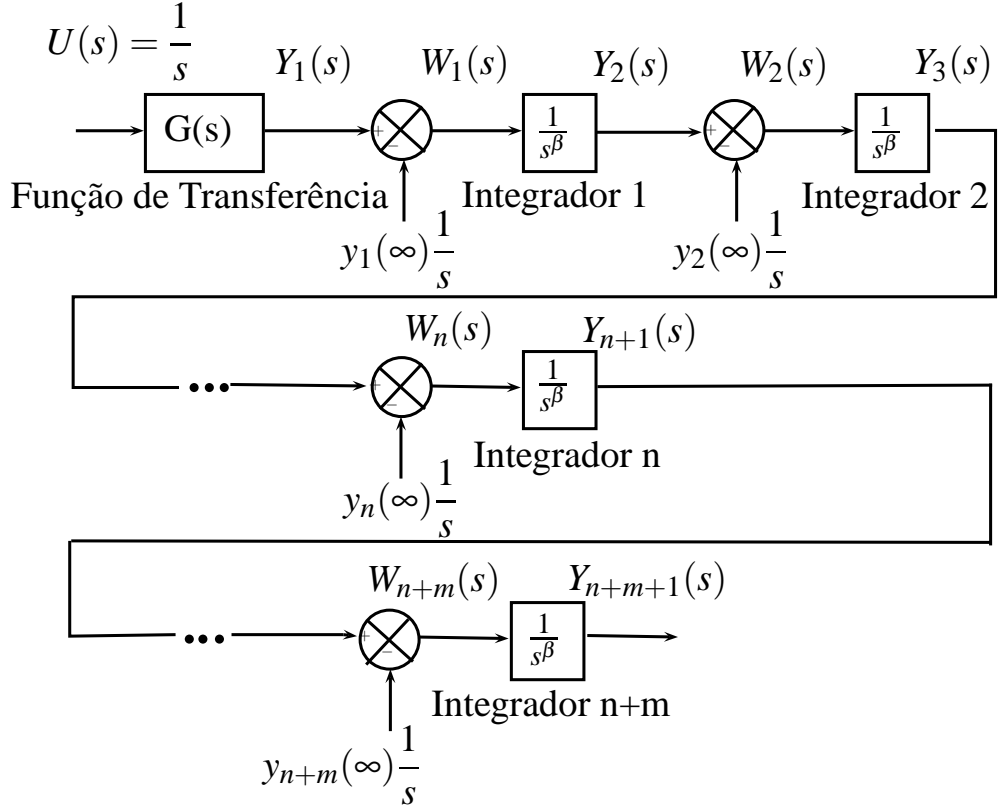
#### 4.3 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT's$ ESTÁVEIS DE ORDEM $n\alpha$ ( $0 < \alpha \leq 1$ )

Considere o método apresentado na Figura 15 com uma entrada igual a um degrau representada por  $U(s) = 1/s$  e seja  $G(s) = (b_{m\alpha}s^{m\alpha} + b_{(m-1)\alpha}s^{(m-1)\alpha} + \dots + b_\alpha s^\alpha + b_0) / (a_{n\alpha}s^{n\alpha} + a_{(n-1)\alpha}s^{(n-1)\alpha} + \dots + a_\alpha s^\alpha + a_0)$ , uma função transferência de ordem fracionária estável, com  $n \geq m$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $G(s) = m(s)/n(s)$ , sendo que  $m(s) = b_{m\alpha}s^{m\alpha} + b_{(m-1)\alpha}s^{(m-1)\alpha} + \dots + b_\alpha s^\alpha + b_0$ ,  $n(s) = a_{n\alpha}s^{n\alpha} + a_{(n-1)\alpha}s^{(n-1)\alpha} + \dots + a_\alpha s^\alpha + a_0$  e as seguintes hipóteses para a aplicação do método:

- H1)  $G(s)$  é uma  $FT$  estável (possui todos os polos com parte real negativa);
- H2)  $U(s) = (1/s)$  é uma entrada degrau;
- H3)  $m(s)$  e  $n(s)$  são coprimos, isto é não possuem raízes em comum.

Por outro lado, note que a estabilidade de  $G(s)$ , garantida por H1 assegura que  $a_0$  é diferente de zero. Assim, é possível reescrever o modelo inicial por:  $G(s) = (b'_{m\alpha}s^{m\alpha} + b'_{(m-1)\alpha}s^{(m-1)\alpha} + \dots + b'_\alpha s^\alpha + G(0)) / (a'_{n\alpha}s^{n\alpha} + a'_{(n-1)\alpha}s^{(n-1)\alpha} + \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1)$ , sendo que  $b'_{i\alpha} = b_{i\alpha}/a_0$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $a'_{j\alpha} = a_{j\alpha}/a_0$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$  e  $G(0) = b_0/a_0$ .

Figura 15 - Generalização do método proposto.



Observando novamente a Figura 15 tem-se que:

$$Y_1(s) = U(s) G(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{m\alpha} + b'_{(m-1)\alpha} s^{(m-1)\alpha} + \dots + b'_{\alpha} s^{\alpha} + G(0)}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + a'_{(n-1)\alpha} s^{(n-1)\alpha} + \dots + a'_{\alpha} s^{\alpha} + 1} \right]. \quad (79)$$

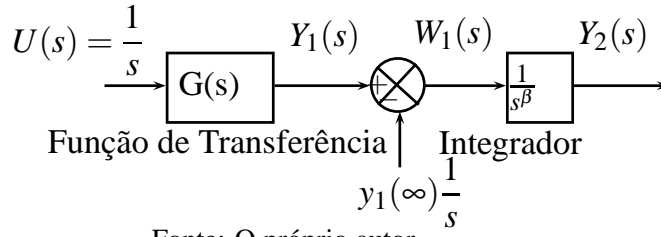
Daí por  $H1$  e utilizando o resultado do TVF, em (79), o resultado fica:

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) = G(0). \quad (80)$$

### 4.3.1 Critério para a aplicação do método

Considere agora apenas a primeira parte do método que está representada no diagrama de blocos na Figura 16:

Figura 16 - Representação do critério de aplicação do método através de diagrama de blocos.



Utilizando (79) e (80) para calcular  $W_1$ , o resultado fica:

$$\begin{aligned}
 W_1(s) &= Y_1(s) - \frac{y_1(\infty)}{s} \\
 &= \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{m\alpha} + \dots + b'_{\alpha} s^{\alpha} + y_1(\infty)}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + a'_{\alpha} s^{\alpha} + 1} - y_1(\infty) \right] \\
 &= \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{m\alpha} + \dots + (b_{n\alpha} - y_1(\infty) a'_{n\alpha}) s^{n\alpha} + \dots + (b'_{\alpha} - y_1(\infty) a'_{\alpha}) s^{\alpha}}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + a'_{\alpha} s^{\alpha} + 1} \right].
 \end{aligned} \tag{81}$$

Agora por (81) para determinar  $Y_2(s)$ , tem-se:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{(m\alpha-\beta)} + \dots + (b_{n\alpha} - y_1(\infty) a'_{n\alpha}) s^{n\alpha-\beta} - y_1(\infty) a'_{n\alpha} s^{(n\alpha-\beta)} + \dots + (b'_{\alpha} - y_1(\infty) a'_{\alpha}) s^{(\alpha-\beta)}}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + a'_{\alpha} s^{\alpha} + 1} \right]. \tag{82}$$

Analisando (82) existem três possibilidades distintas para o resultado final, que são:

- Primeira possibilidade:  $\alpha < \beta$ .

Se isto ocorrer, então  $\alpha - \beta = c_1 < 0$  e daí substituindo em (4), vem que:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{(m-1)\alpha+c_1} - y_1(\infty) a'_{n\alpha} s^{(n-1)\alpha+c_1} + \dots + (b'_{\alpha} - y_1(\infty) a'_{\alpha}) s^{c_1}}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + a'_{\alpha} s^{\alpha} + 1} \right]. \tag{83}$$

Note que como neste caso o denominador de  $s Y_2(s)$  se anula para  $s = 0$  e o TVF não pode ser usado para obter  $y_2(\infty)$ . Agora, observe que de (83),  $Y_2(s)$  pode ser decomposto utilizando frações parciais da forma,

$$Y_2(s) = \frac{A}{s^{(-c_1+1)}} + R_2(s), \quad A = b'_{\alpha} - y_1(\infty) a'_{\alpha}. \tag{84}$$

sendo que de  $H1$ ,  $L^{-1}(R_2(s)) = r_2(t) = 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Adicionalmente, como  $-c_1 > 0$ , conforme a Tabela 1:

$$L^{-1} \left[ \frac{A}{s^{(-c_1+1)}} \right] = \frac{A t^{(-c_1+1-1)}}{\Gamma(-c_1+1)} u(t) = \frac{A t^{-c_1}}{\Gamma(-c_1+1)} u(t), \tag{85}$$

sendo  $\Gamma(-c_1+1)$  a função Gama dada em (1) e  $u(t)$ , a função degrau unitário. Assim de (83), de  $c_1 < 0$

e de (85) tem-se que quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $|At^{-c_1}/\Gamma(-c_1 + 1)|$  tende ao infinito. Assim, neste caso  $|y_2(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

- Segunda possibilidade:  $\alpha = \beta$ .

Daí substituindo em (82), tem-se pelo TVF:

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = \frac{b'_{m\alpha} s^{(m-1)\alpha} - y_1(\infty) a'_{n\alpha} s^{(n-1)\alpha} \dots + (b'_\alpha - y_1(\infty) a'_\alpha)}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1} = b'_\alpha - y_1(\infty) a'_\alpha. \quad (86)$$

- Terceira possibilidade  $\alpha > \beta$ .

Se isto ocorrer, então  $\alpha - \beta = c_1 > 0$  e daí substituindo em (4), vem pelo TVF que:

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = \frac{b'_{m\alpha} s^{(m-1)\alpha + c_1} - y_1(\infty) a'_{n\alpha} s^{(n-1)\alpha + c_1} \dots + (b'_\alpha - y_1(\infty) a'_\alpha) s^{c_1}}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1} = 0. \quad (87)$$

Concluindo, é possível estabelecer um critério para a escolha do grau que será utilizado na aplicação do método descrito na Figura 15 que é o seguinte: atribua para  $\beta$  um valor positivo próximo de zero e aplique o método da Figura 17 obtendo  $y_2(\infty)$ . Se o resultado for  $y_2(\infty) = 0$ , conforme (87) incremente o valor de  $\beta$  e refaça o método até que  $y_2(\infty)$  assuma um valor que tende ao infinito, como anunciado na primeira possibilidade ( $\alpha - \beta = c_1 < 0$ ). Quando este fato ocorre, significa que o grau  $\beta$  é maior do que o grau  $\alpha$  de  $G(s)$ . Logo é necessário decrementar  $\beta$  até que  $y_2(\infty)$  obedeça (86), condição que quando verificada indica que  $\beta$  terá o mesmo grau  $\alpha$  de  $G(s)$ , finalizando o critério.

### 4.3.2 Método para identificação de $FT's$ de ordem fracionária

Considere o resultado obtido em (82) no qual é possível a aplicação do método, observando o diagrama de blocos disposto na Figura 15, daí vem que:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{m\alpha} + \dots + b'_\alpha s^\alpha + G(0)}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \quad (88)$$

Aplicando agora o TVF, o resultado fica:

$$y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{m\alpha} + \dots + b'_\alpha s^\alpha + G(0)}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] = G(0). \quad (89)$$

Calculando agora  $W_1(s)$ , vem que:

$$\begin{aligned} W_1(s) &= Y_1(s) - \frac{y_1(\infty)}{s} \\ &= \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{m\alpha} + \dots + b'_\alpha s^\alpha + y_1(\infty)}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right] - \frac{y_1(\infty)}{s} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{m\alpha} + \dots + (b_{n\alpha} - y_1(\infty) a'_{n\alpha}) s^{n\alpha} - y_1(\infty) a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + (b'_\alpha - y_1(\infty) a'_\alpha) s^\alpha}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} + \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \quad (90)$$

Observando novamente a Figura 15 e continuando com a execução do método, vem que:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} \left[ \frac{b'_{m\alpha} s^{(m\alpha-\beta)} + \dots + (b_{n\alpha} - y_1(\infty) a'_{n\alpha}) s^{n\alpha} - y_1(\infty) a'_{n\alpha} s^{(n\alpha-\beta)} \dots + (b'_\alpha - y_1(\infty) a'_\alpha) s^{(\alpha-\beta)}}{a'_{n\alpha} s^{n\alpha} \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1} \right]. \quad (91)$$

Aplicando novamente o TVF, para o caso em que  $\alpha = \beta$ , seguindo o critério já discutido neste trabalho, tem-se conforme (86) que:

$$y_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) = b'_\alpha - y_1(\infty) a'_\alpha. \quad (92)$$

Realizando sempre o procedimento observando o método disposto na Figura 15 para obter  $W_3(s)$ ,  $Y_4(s)$ ,  $\dots$ ,  $W_{n-1}(s)$ ,  $Y_n(s)$ ,  $\dots$ ,  $W_{n+m-1}(s)$ ,  $Y_{n+m}(s)$  basta realizar um procedimento similar ao feito em (KOSAKA et al., 2005). Dessa forma, é possível formar um sistema linear de equações do tipo  $Ax = b$ , sendo:

$$A = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & -y_1(\infty) & 0 & \dots & 0 \\ & -y_2(\infty) & -y_1(\infty) & \ddots & \vdots \\ & -y_3(\infty) & -y_2(\infty) & \ddots & 0 \\ 0_{n \times m} & \vdots & -y_3(\infty) & \ddots & -y_1(\infty) \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -y_{n+m}(\infty) & -y_{n+m-1}(\infty) & \dots & -y_{m+1}(\infty) \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} b'_\alpha \\ b'_{2\alpha} \\ \vdots \\ b'_{m\alpha} \\ a'_\alpha \\ a'_{2\alpha} \\ \vdots \\ a'_{n\alpha} \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} y_2(\infty) \\ y_3(\infty) \\ \vdots \\ y_{n+m+1}(\infty) \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Considerando todos os casos em que  $\det(A) \neq 0$ , tem-se a solução para  $x = A^{-1}b$  e para o valor de  $\alpha$  positivo escolhido inicialmente, as incógnitas são determinadas e consequentemente um modelo é gerado para representar a função de transferência de ordem fracionária  $G(s)$  inicial. A partir daí é calculado erro médio quadrático  $EQM$  da saída de cada modelo  $y_\alpha(t)$  com a saída da função transferência que



desejamos identificar  $y(t)$ , ambas em resposta a uma entrada degrau cuja a fórmula é a seguinte:

$$EQM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y(iT) - y_{\alpha}(iT))^2}, \quad (94)$$

em que  $T$  é o período de amostragem que foi usado para a aquisição da resposta ao degrau e  $N$  é o tamanho da amostra obtida.

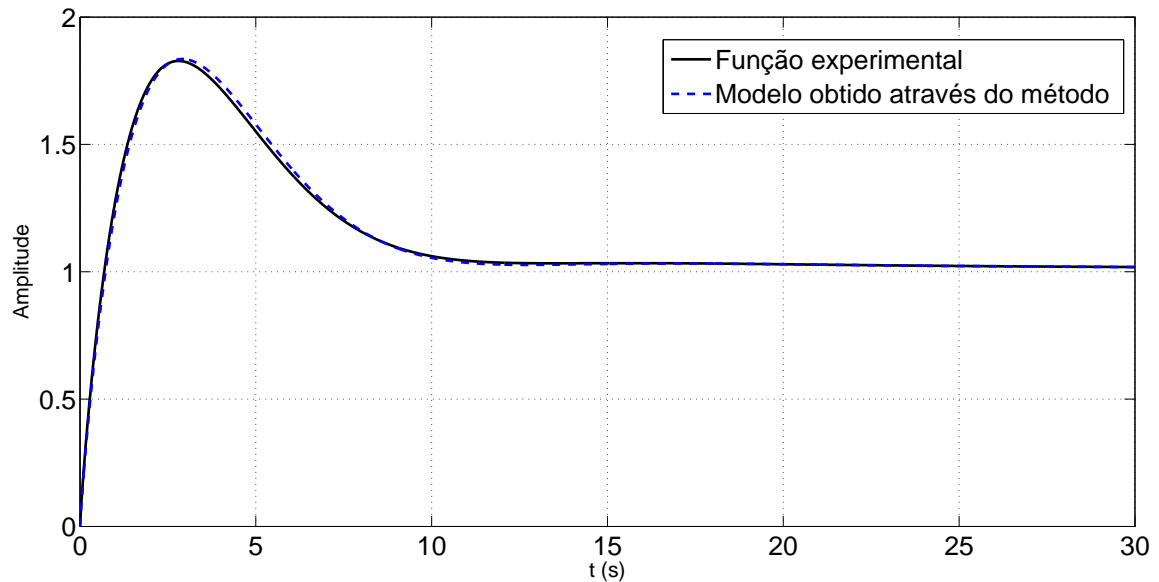
#### 4.4 IDENTIFICAÇÕES REALIZADAS POR INTERMÉDIO DO MATLAB

Nesta seção, será exposta a validação do método com o auxílio de três exemplos estudados nos quais foram feitas as identificações utilizando a função *fminsearch* disponível no Matlab.

##### 4.4.1 Primeira identificação: Exemplo teórico

Nesta primeira identificação, foi escolhida uma  $FT$  polinomial qualquer que satisfaz as condições exigidas para o funcionamento do método e também não foi levado em conta o seu conhecimento. Assim a função adotada foi  $G(s) = (5s^{0,9} + 1)/(3s^{1,8} + 2s^{0,9} + 1)$  e a partir daí para facilitar a execução do método utilizou-se a função de otimização *fminsearch* que está disponível no Matlab, para determinar o valor mínimo do ( $EQM$ ). A função *fminsearch* pode ser classificada como um algoritmo de busca direta e para o seu uso basta fornecer um ponto inicial, que a partir dele, vários métodos são aplicados e após um número necessário de iterações, um mínimo local é determinado. Em nosso caso o objetivo é encontrar o menor valor do ( $EQM$ ) definido em (94), depois de realizar este procedimento a partir de várias condições iniciais para  $\alpha \in (0, 1)$ , visando obter o mínimo global. A função de transferência obtida pelo método de identificação proposto foi  $G(s) = (4,9333s^{0,8999} + 1)/(3,0333s^{1,8} + 1,9333s^{0,8999} + 1)$ . Na Figura 17 estão representadas as respostas a uma entrada degrau, da  $FT$  escolhida e da  $FT$  que foi obtida utilizando o método proposto.

Figura 17 - Respostas a uma entrada degrau, da  $FT$  escolhida e da  $FT$  obtida utilizando o método proposto.



Fonte: O próprio autor

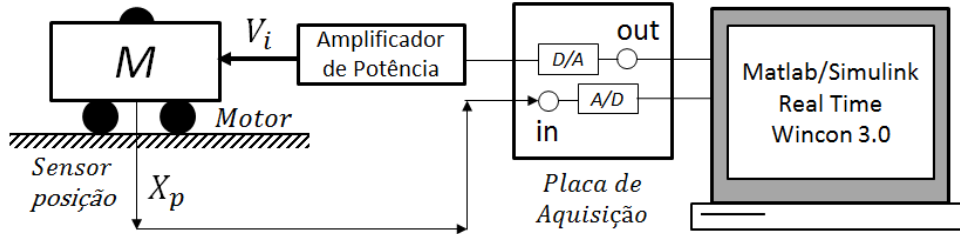
Repare que de acordo com a Figura 17, é possível concluir que a identificação realizada pelo método proposto foi eficiente, sendo que o  $EQM$  obtido, com  $T = 0,01$ segundo e  $N = 100001$ , foi igual a  $8,0549 \times 10^{-6}$ .

#### 4.4.2 Segunda identificação: Motor de corrente contínua

Na segunda identificação foram utilizados os dados provenientes de um experimento realizado no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (DEE/FEIS/UNESP).

Como parte do desenvolvimento das pesquisas do controle de um sistema pêndulo invertido, foi realizado o controle de um carrinho acionado por motor de corrente contínua com a finalidade de obter a  $FT$  entre a posição do carro  $X_p$  e a tensão enviada ao motor  $V_i$ . A Figura 18 ilustra o arranjo utilizado em bancada para a aquisição do sinal da posição ( $X_p$ ) e o sinal de controle ( $V_i$ ) proveniente do controlador.

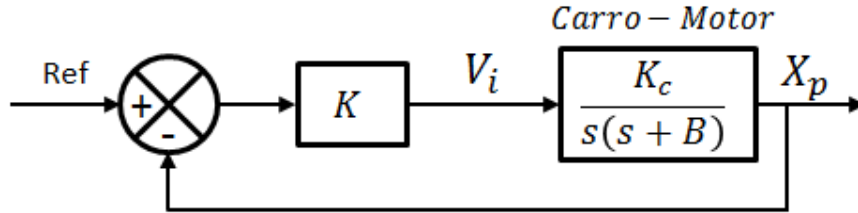
Figura 18 - Arranjo dos equipamentos para o controle de posição do carro de massa M.



Fonte: (RIBEIRO et al., 2014)

Foi proposta a utilização de um controlador de ganho proporcional com  $K = 75$ , e o sistema de controle e planta são descritos na Figura 19. A modelagem matemática da planta Carro-Motor pode ser obtida em (RIBEIRO et al., 2014).

Figura 19 - Diagrama de blocos do sistema controlado (carrinho) com um modelo matemático de ordem inteira  $\alpha = 2$ , de segunda ordem.



Fonte: (RIBEIRO et al., 2014)

O objetivo inicial foi identificar o sistema, com aplicação de um degrau na referência, em malha fechada e, através da identificação, determinar os parâmetros que envolvem a planta Carro-Motor, ou seja, os parâmetros  $K_c$  e  $B$ , descritos em (95).

A  $FT$  de ordem fracionária em malha fechada considerada neste caso possui dois polos e é da forma:

$$\frac{X_p(s)}{REF(s)} = \frac{K K_c}{s^{2\alpha} + B s^\alpha + K K_c}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (95)$$

A aquisição da resposta da posição do carro, para uma entrada degrau de  $10\text{cm}$ , é descrita na Figura 20, juntamente com a resposta do sistema identificado, considerando 2 polos.

Assim, executou-se o método proposto e as  $FT$ 's de ordem fracionária e de ordem inteira igual a 2 que apresentaram o menor  $EQM$  estão dispostas na Tabela 8.

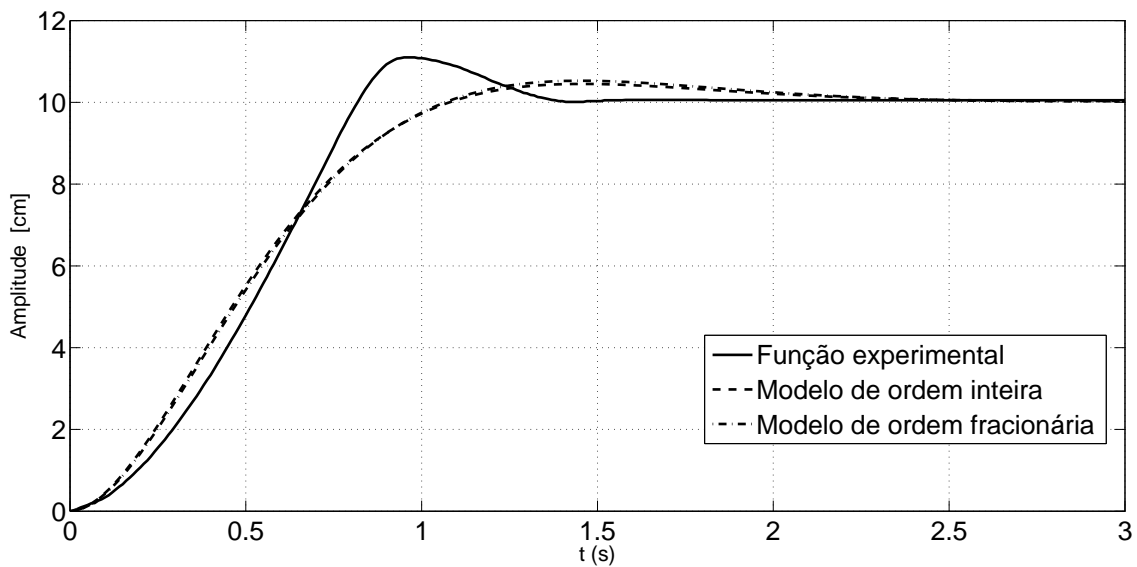
Na Figura 20 estão representadas a resposta a uma entrada degrau da  $FT$  da função experimental

Tabela 8 -  $FTs$  de ordem fracionária e inteira igual a 2 determinadas pelo método proposto para a planta Carro-Motor dada em (95).

$FTs$ geradas pelo método proposto	$EQM$
$G(s) = (10,05)/(0,001s^2 + 0,045s + 1)$	0,00325
$G(s) = (10,05)/(0,0011s^{1,99} + 0,046s^{0,99} + 1)$	0,00312

para uma entrada degrau e das  $FTs$  de ordem inteira igual a 2 e de ordem fracionária obtidas através do método proposto para a planta Carro-Motor dada em (95).

Figura 20 - Resposta de todos os modelos calculados a uma entrada degrau para a planta Carro-Motor dada em (95).



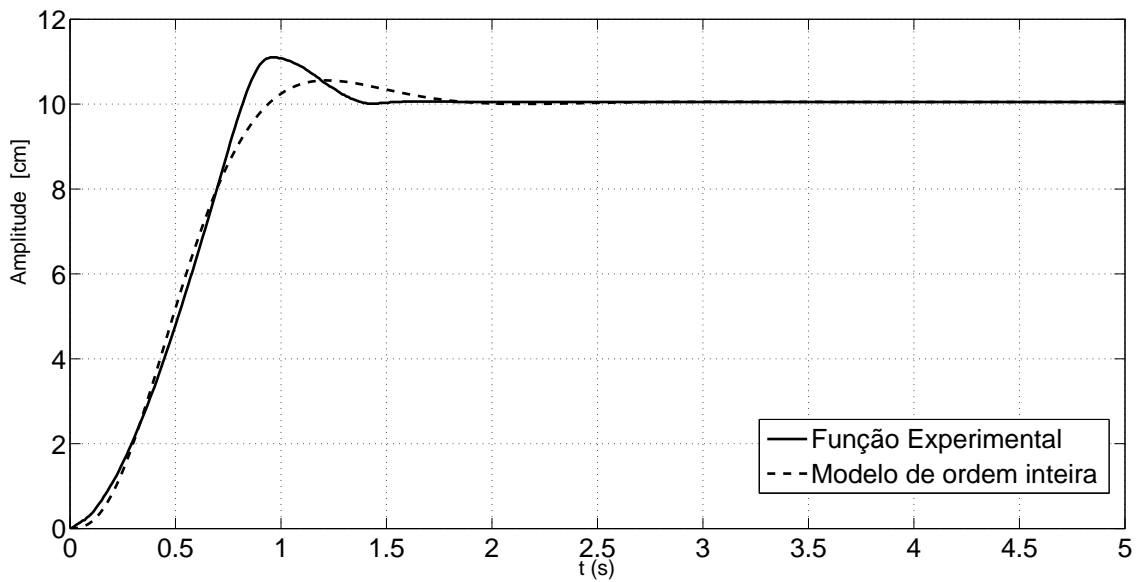
Fonte: O próprio autor

A melhor identificação foi obtida para  $\alpha = 0,99$  que resultou em um  $EQM = 0,00312$ , e em  $G(s) = (10,05)/(0,109s^{1,99} + 0,455s^{0,99} + 1)$ . Nota-se pela Figura 20, que a identificação com  $\alpha = 1$ , que possui  $EQM = 0,00325$ , apresentou uma resposta ao degrau praticamente igual à obtida para o caso ótimo  $\alpha = 0,99$ . Observe que o modelo matemático com dois polos considerando  $\alpha = 1$  descrito em (95) é uma forma simplificada para representar este experimento, por desprezar o polo devido à indutância e à resistência do motor, conforme (OGATA, 2011). Assim, conforme (93), que possibilita a identificação para um número arbitrário de polos e zeros, foi também identificada uma função de transferência com três polos, dada por:

$$\frac{X_p(s)}{REF(s)} = G(s) = \frac{G(0)}{a'_{3\alpha}s^{3\alpha} + a'_{2\alpha}s^{2\alpha} + a'_{\alpha}s^{\alpha} + 1}. \quad (96)$$

Neste caso, o modelo ótimo foi obtido para  $\alpha = 1$  e a função de transferência determinada pelo método proposto foi  $G(s) = (10,05)/(1,7515e-5s^3 + 0,0010287s^2 + 0,045493s + 1)$  e o seu gráfico e o da função experimental, ambos obtidos em uma resposta a uma entrada degrau encontram-se na Figura 21. Repare que melhor identificação obtida neste caso foi para  $\alpha = 1$ , que resultou em um  $EQM = 0,0003$  e é possível verificar que houve uma melhora significativa em comparação com o caso anterior.

Figura 21 - Resposta de todos os modelos calculados a uma entrada degrau para a planta Carro-Motor dada em (95).



Fonte: O próprio autor

#### 4.4.3 Terceira identificação: Redes RC Tridimensionais com grande número de componentes

Neste último caso, para validar o método de identificação proposto, foram utilizados os dados do artigo (GALVÃO et al., 2013) referentes à modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes, no qual os autores realizaram uma simulação em um programa desenvolvido no Matlab, que resultou em um sistema com um modelo de espaço de estados de ordem igual a 75 e que depois de retirados os modos não observáveis e/ou não controláveis, foi representado por uma  $FT$  de ordem inteira igual a 73.

De posse dessa simulação, o próximo passo foi encontrar uma fórmula para representar a  $FT$  de ordem fracionária com um modelo reduzido de termos que possua um  $EQM$  adequadamente pequeno em relação à função teórica e optou-se em utilizar os casos do método proposto em que  $(m,n)$  sejam iguais a  $(1,1)$  e  $(2,2)$  no resultado obtido em (93), cujos modelos são:  $G(s) = (b'_\alpha s^\alpha + G(0))/(a'_\alpha s^\alpha + 1)$  e  $G(s) = (b'_{2\alpha} s^{2\alpha} + b'_\alpha s^\alpha + G(0))/(a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1)$  respectivamente.

Tabela 9 -  $FT$ s de ordem fracionária e inteira igual a 1 determinadas pelo método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes.

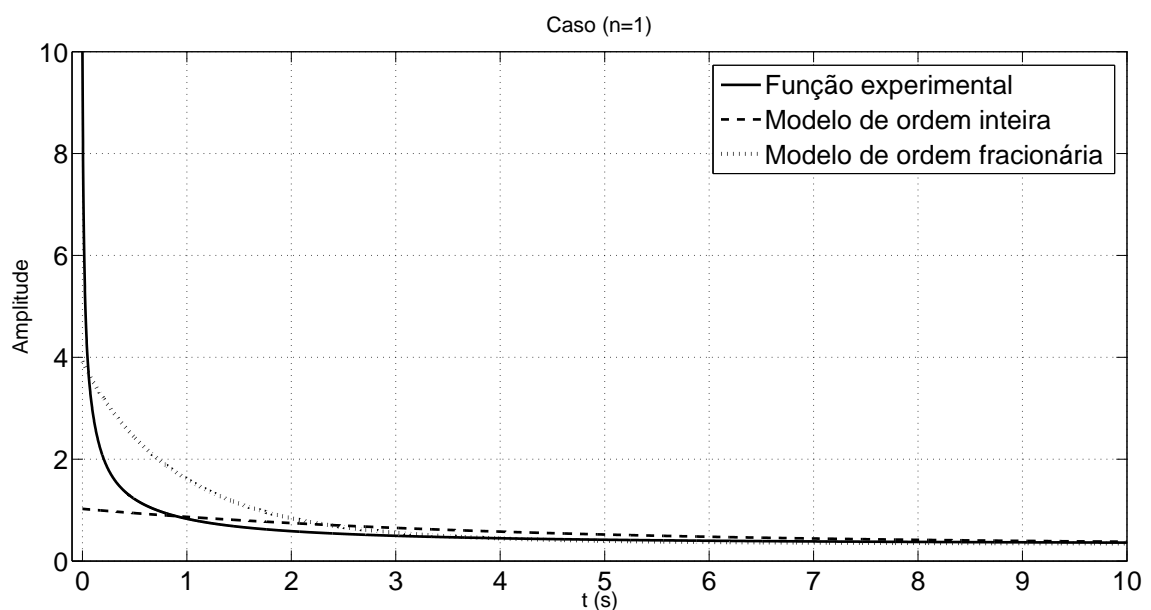
$FT$ s geradas pelo método proposto	$EQM$
$G(s) = (4,02s + 0,325)/(3,922s + 1)$	0,0006
$G(s) = (2,458s^{0,9601} + 0,325)/(0,627s^{0,9601} + 1)$	0,0003

Adotados estes modelos, o próximo passo foi aplicar no sistema desenvolvido em (GALVÃO et al., 2013), uma entrada degrau unitário durante 120 segundos, com passo igual a 0,01 segundo e a partir daí, foi desenvolvido um programa no Matlab e executou-se o método proposto com o auxílio da função *fminsearch* que determinou a  $FT$  de ordem fracionária que apresentou o menor  $EQM$  conforme (94). Por último foi calculada a  $FT$  de ordem inteira que apresentou o menor  $EQM$  também utilizando o método proposto.

$FT$ 's de ordem fracionária e inteira igual a 1 determinadas pelo método proposto que apresentaram o menor  $EQM$ .

Na Figura 22 estão representadas as respostas da  $FT$  da função experimental para uma entrada degrau e das  $FT$ 's de ordem inteira igual a 1 e ordem fracionária obtidas através do método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes.

Figura 22 - Resposta da função experimental para uma entrada degrau, e também das duas  $FT$ 's, de ordem inteira igual a 1 e ordem fracionária, obtidas na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes.



Fonte: O próprio autor

Tabela 10 -  $FT's$  ordem fracionária e inteira igual a dois determinadas pelo método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes.

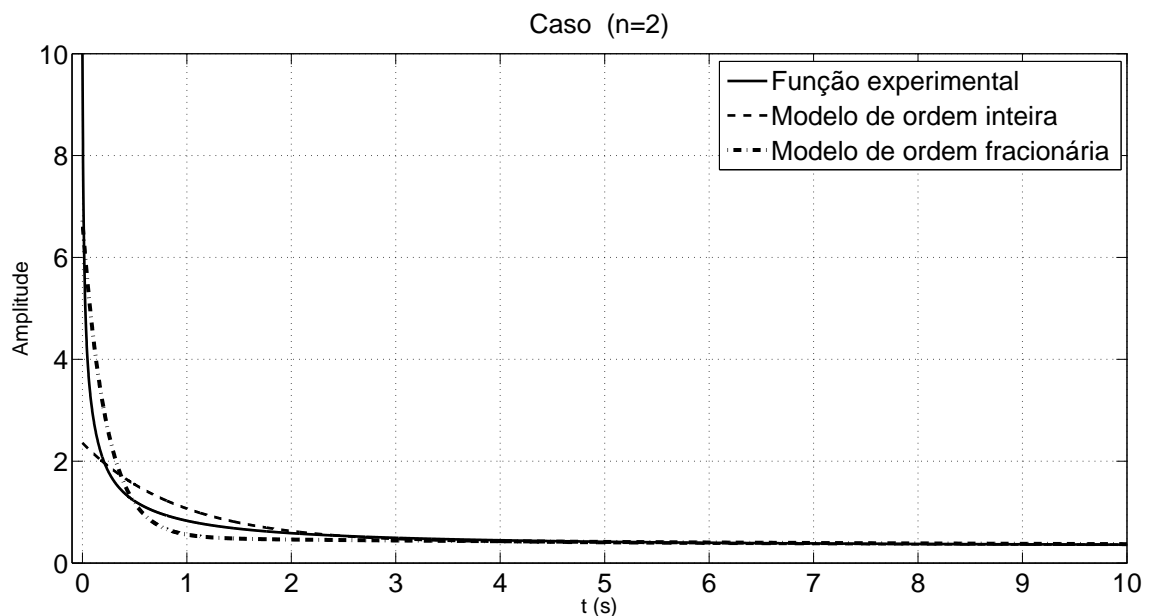
$FT's$ geradas pelo método proposto	$EQM$
$G(s) = (20,51s^2 + 6,11s + 0,325)/(8,69s^2 + 10,37s + 1)$	0,0004
$G(s) = (11,41s^{1,99} + 5,22s^{0,997} + 0,325)/$ $/(1,7s^{1,99} + 7,71s^{0,997} + 1)$	0,0002

Analisando o gráfico que está disposto na Figura 22, percebe-se que a melhor identificação realizada para este caso, obtida para  $\alpha = 0,9601$  e que resultou em um  $EQM = 0,0003$ , apresentou uma resposta ao degrau com um desempenho superior ao caso em que  $\alpha = 1$ , no qual  $EQM = 0,0006$ .

A Tabela 10 contém as funções de transferência de ordem fracionária e inteira igual a 2 determinadas pelo método proposto que apresentaram o menor  $EQM$ .

Na Figura 23 estão representadas a resposta da  $FT$  da função experimental para uma entrada degrau e das  $FT's$  de ordem inteira igual a 2 e ordem fracionária obtidas através do método proposto.

Figura 23 - Resposta da função experimental para uma entrada degrau, e também das duas  $FT's$ , de ordem inteira igual a dois e de ordem fracionária, obtidas na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes.



Fonte: O próprio autor

Neste último caso, a melhor identificação que foi obtida para  $\alpha = 0,997$  e que resultou em um  $EQM = 0,0002$ . Nota-se que pela Figura 23, que a identificação com  $\alpha = 1$ , que tem  $EQM = 0,0004$ ,

apresentou uma resposta ao degrau inferior à obtida para o caso ótimo  $\alpha = 0,997$ , embora os valores de  $\alpha$  para estes dois casos sejam praticamente iguais.



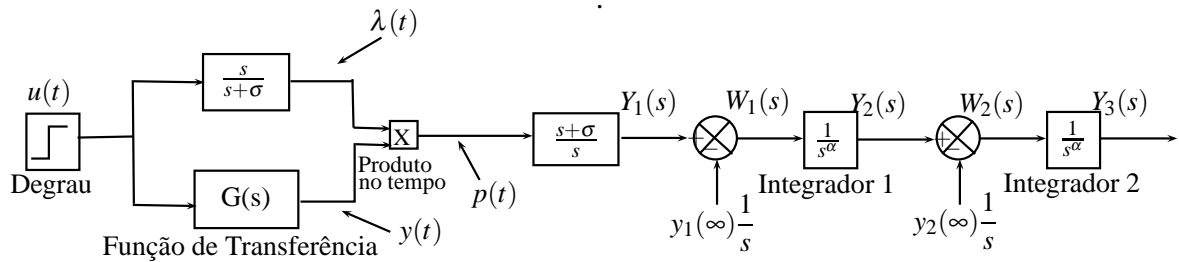
## 5 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE $FT$ 'S DE ORDEM FRACIONÁRIA BASEADO NO MÉTODO PROPOSTO EM (SILVA, 2008)

Neste capítulo será proposta uma generalização de um método de identificação de sistemas lineares e invariantes no tempo apresentado em (SILVA, 2008) e que neste trabalho, no Capítulo 3 foi objeto de alguns aprimoramentos para melhorar a sua eficiência. A principal diferença entre ambos é que os integradores neste caso podem apresentar ordem fracionária. O seu mecanismo de funcionamento será explicado na Seção 5.1. A Seção 5.2 abrange um caso particular de identificação de sistemas lineares utilizando modelos de  $FT$ 's de ordem fracionária  $\alpha$ , com  $0 < \alpha \leq 1$ . Na Seção 5.3 será realizado um estudo de identificação de sistemas lineares utilizando modelos de  $FT$ 's de ordem fracionária  $2\alpha$ , com  $0 < \alpha \leq 1$  e na Seção 5.4 será feita uma generalização dos casos anteriores, que possibilita uma identificação de sistemas lineares através de um modelo de  $FT$  de ordem fracionária  $n\alpha$ , com  $0 < \alpha \leq 1$ . Na Seção 5.5 serão feitas algumas considerações com o auxílio de alguns exemplos práticos.

### 5.1 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT$ 'S DE ORDEM $\alpha$ , $0 < \alpha \leq 1$

Suponha um sistema linear e invariante no tempo que pode ser descrito por uma  $FT$  estável ou instável  $G(s) = (b_\alpha s^\alpha + b_0) / (a_\alpha s^\alpha + a_0)$  de ordem  $\alpha$ , com  $0 < \alpha \leq 1$ . Considere agora uma entrada degrau representada por  $U(s) = 1/s$  e o seguinte método de identificação que está representado na Figura 24, na qual  $y(t)$  representa a resposta do sistema a uma entrada degrau  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , tal que:

Figura 24 - Método para obtenção do sinal  $Y_3(s)$ .



Fonte: O próprio autor.

$$U(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = G(s) U(s) = \frac{G(s)}{s}. \quad (97)$$

Além disso,  $\lambda(t)$  é a resposta do filtro a uma entrada degrau  $u(t)$ , que possui  $FT$  igual a  $s/(s + \sigma)$ , ou seja:

$$\lambda(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s + \sigma} U(s) \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \sigma} \right] = e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0, \quad (98)$$

sendo que  $\sigma > 0$  é um parâmetro de filtragem que será fornecido. O sinal  $p(t)$  é obtido através do produto de  $y(t)$  por  $\lambda(t)$ , isto é,

$$p(t) \triangleq y(t)\lambda(t) = y(t) e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0, \quad (99)$$

que corresponde a seguinte transformada de Laplace:

$$P(s) = \mathcal{L}[y(t) e^{-\sigma t}] = Y(s + \sigma). \quad (100)$$

De (97) e de (100), segue que:

$$P(s) = \frac{G(s + \sigma)}{s + \sigma}. \quad (101)$$

Finalmente,  $y_1(t)$ ,  $t \geq 0$ , é a resposta a entrada  $p(t)$  acrescida da FT  $(s + \sigma)/s$ , isto é:

$$Y_1(s) \triangleq \frac{s + \sigma}{s} P(s) = \frac{G(s + \sigma)}{s}. \quad (102)$$

Atribuindo um valor inicial para o parâmetro  $\sigma$  de tal forma que  $G(s + \sigma)$  se transforme em uma FT estável e  $G(s + \sigma) = G'(s)$ , suponha inicialmente que  $G'(s) = (b_\alpha s^\alpha + b_0) / (a_\alpha s^\alpha + a_0)$ . Conforme já foi feito neste trabalho na Seção 4.1, sem perda de generalidade é possível reescrever  $G'(s)$  da seguinte forma:

$$G'(s) = \frac{b'_\alpha s^\alpha + G'(0)}{a'_\alpha s^\alpha + 1}, \quad (103)$$

sendo que  $G'(0) = b_0/a_0$ ,  $b'_\alpha = b_\alpha/a_0$  e  $a'_\alpha = a_\alpha/a_0$ . Partindo de (103) e considerando  $\alpha = \beta$ , verifica-se que este caso é o mesmo descrito na Figura 13, que se encontra na Seção 4.1 do Capítulo 4 e que já foi demonstrado. Assim, é possível formar um sistema linear de equações do tipo  $Ax = b$ , conforme (65), de tal forma que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -y_1(\infty) \\ 0 & -y_2(\infty) \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} b'_\alpha \\ a'_\alpha \end{bmatrix}, e \quad b = \begin{bmatrix} y_2(\infty) \\ y_3(\infty) \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Considerando (69) que tratou este caso quando  $\det(A) \neq 0$ , a solução  $x = A^{-1}b$  irá existir e conseqüentemente as incógnitas  $a'_\alpha$  e  $b'_\alpha$  serão determinadas e será possível obter um modelo matemático para representar a FT  $G(s + \sigma)$  que deseja-se identificar. Observe que para a eficiência do método proposto, resta a questão da escolha de valores apropriados para o parâmetro de filtragem  $\sigma$ , empregado no processo de identificação e para o expoente  $\alpha$  da FT a ser identificada.

Conseqüentemente, para cada par valores de  $\sigma$  e  $\alpha$ , o procedimento de identificação pode ser realizado de modo a obter o vetor dos parâmetros da FT  $G(s + \sigma)$ . A seguinte função custo  $J(\sigma, \alpha)$  pode, então, ser calculada como o EQM entre a resposta ao degrau  $y(t)$  da FT que deseja-se identificar e a saída  $\hat{y}(t)$  do modelo resultante :

$$J(\sigma, \alpha) \triangleq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(kT) - \hat{y}(kT)]^2}, \quad (105)$$

sendo que  $T$  é o período de amostragem utilizado na aquisição da resposta a uma entrada degrau e  $N$  é o número de amostras adquiridas. Portanto, os valores adequados de  $\sigma$  e  $\alpha$  podem ser obtidos usando

técnicas numéricas de otimização para minimizar  $J(\sigma, \alpha)$ .

Nesta tese, a função *FOTF Matlab Toolbox* (CHEN; PETRAS; XUE, 2009) foi utilizada para avaliar a resposta ao degrau  $\hat{y}(t)$  do modelo de ordem fracionária, e o algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) implementado no *Optimization Toolbox Matlab* foi adotado para a obtenção de  $\sigma$  e  $\alpha$  através da minimização de  $J(\sigma, \alpha)$ .

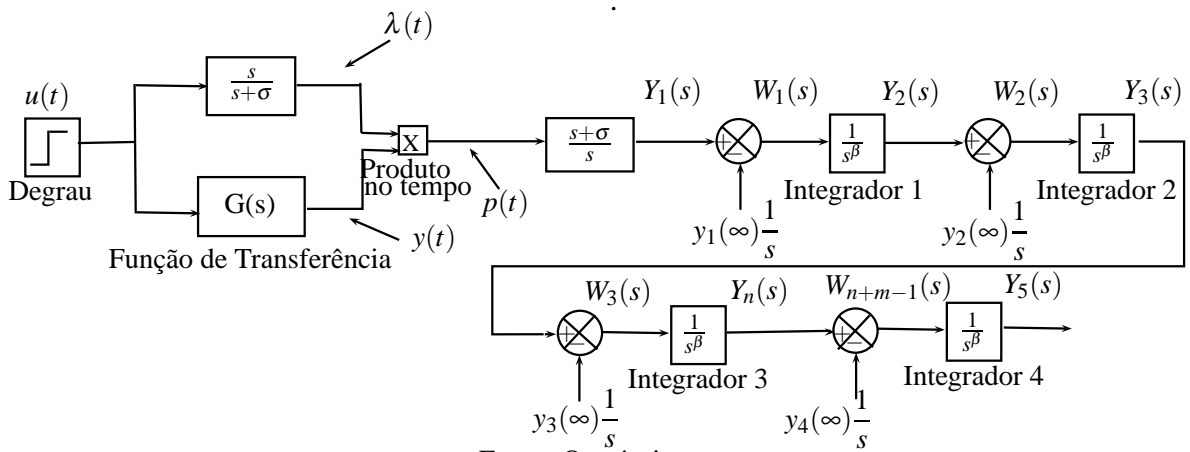
## 5.2 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO FT'S DE ORDEM $2\alpha$ , $0 < \alpha \leq 1$

Suponha um sistema linear e invariante no tempo descrito por uma FT estável ou instável  $G(s)$  de ordem  $2\alpha$ , com  $0 < \alpha \leq 1$  descrito em (103). Considere agora uma entrada degrau representada por  $U(s) = 1/s$  e o seguinte método de identificação que está representado na Figura 25. Atribuindo um valor inicial para o parâmetro  $\sigma$  de tal forma que  $G(s + \sigma)$  se transforme em uma FT estável e  $G(s + \sigma) = G'(s)$  tal que  $G'(s) = (b_0 + b_{2\alpha}s^{2\alpha} + b_\alpha s^\alpha)/(a_0 + a_\alpha s^\alpha + a_{2\alpha}s^{2\alpha})$ . De maneira análoga à que já foi feita neste trabalho na Seção 4.2, sem perda de generalidade é possível reescrever  $G'(s)$  da seguinte forma:

$$G'(s) = \frac{b'_{2\alpha}s^{2\alpha} + b'_\alpha s^\alpha + G'(0)}{a'_{2\alpha}s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1}. \quad (106)$$

Considere agora uma entrada igual a um degrau unitário representada por  $U(s) = 1/s$  e o seguinte método de identificação que está representado na Figura 25:

Figura 25 - Método para obtenção do sinal  $Y_5(s)$ .



Utilizando o resultado demonstrado na Seção 4.3.2 para  $n = m = 2$  em (90), é possível elaborar um sistema linear do tipo  $Ax = b$ , sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1(\infty) & 0 \\ 0 & 1 & -y_2(\infty) & -y_1(\infty) \\ 0 & 0 & -y_3(\infty) & -y_2(\infty) \\ 0 & 0 & -y_4(\infty) & -y_3(\infty) \end{bmatrix}, \quad (107)$$

$$x = \begin{bmatrix} b'_\alpha \\ b'_{2\alpha} \\ a'_\alpha \\ a'_{2\alpha} \end{bmatrix} e \quad b = \begin{bmatrix} y_2(\infty) \\ y_3(\infty) \\ y_4(\infty) \\ y_5(\infty) \end{bmatrix}.$$

Para todos os casos em que  $\det(A) \neq 0$ , a solução  $x = A^{-1} b$  irá existir e conforme a seção anterior, para cada par valores de  $\sigma$  e  $\alpha$ , o procedimento de identificação pode ser realizado de modo a obter o vetor dos parâmetros da  $FT$   $G(s + \sigma)$ , definindo a função custo  $J(\sigma, x)$  como sendo o  $EQM$  entre a resposta ao degrau  $y(t)$  da  $FT$  que deseja-se identificar e a saída  $\hat{y}(t)$  do modelo resultante conforme descrito abaixo:

$$J(\sigma, \alpha) \triangleq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(kT) - \hat{y}(kT)]^2}, \quad (108)$$

sendo que  $T$  é o período de amostragem utilizado na aquisição da resposta a uma entrada degrau e  $N$  é o número de amostras adquiridas. Portanto, os valores adequados de  $\sigma$  e  $\alpha$  podem ser obtidos usando técnicas numéricas de otimização para minimizar  $J(\sigma, \alpha)$ .

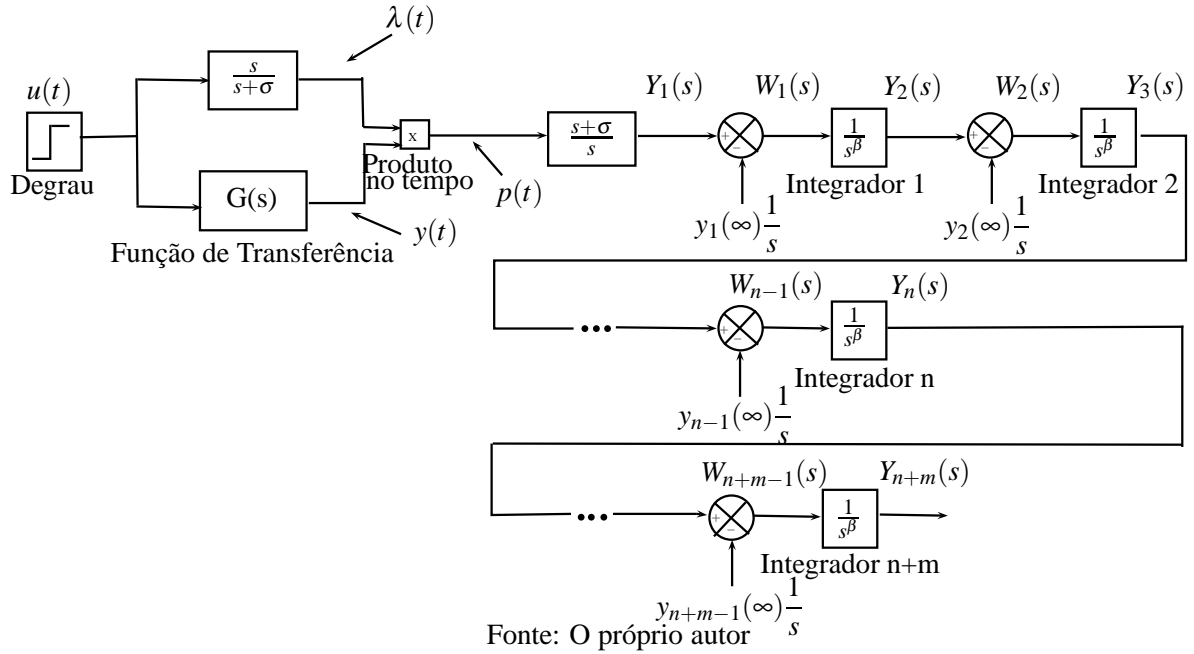
Nesta tese, a função *FOTF Matlab Toolbox* (CHEN; PETRAS; XUE, 2009) foi utilizada para avaliar a resposta ao degrau  $\hat{y}(t)$  do modelo de ordem fracionária, e o algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) implementado no *Optimization Toolbox Matlab* foi adotado para a obtenção de  $\sigma$  e  $\alpha$  através da minimização de  $J(\sigma, \alpha)$ .

### 5.3 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT'S$ DE ORDEM $n\alpha$ , $0 < \alpha \leq 1$

Suponha um sistema linear e invariante no tempo que pode ser descrito por uma  $FT$  estável ou instável  $G(s)$  de ordem  $n\alpha$ , com  $0 < \alpha \leq 1$ , descrito em (106). Considere agora uma entrada degrau representada por  $U(s) = 1/s$  e o seguinte método de identificação que está representado na Figura 26. Atribuindo um valor inicial para o parâmetro  $\sigma$  de tal forma que  $G(s + \sigma)$  se transforme em uma  $FT$  estável e  $G(s + \sigma) = G'(s)$  tal que  $G'(s) = (b_0 + b_{2\alpha}s^{2\alpha} + b_\alpha s^\alpha)/(a_0 + a_\alpha s^\alpha + a_{2\alpha}s^{2\alpha})$ . De maneira análoga à que já foi feita neste trabalho na Seção 4.2, sem perda de generalidade é possível reescrever  $G'(s)$  da seguinte forma:

$$G'(s) = (b'_{m\alpha}s^{m\alpha} + \dots + b'_\alpha s^\alpha + G(0))/(a'_{n\alpha}s^{n\alpha} + \dots + a'_\alpha s^\alpha + 1). \quad (109)$$

Figura 26 - Generalização do método proposto



Utilizando o resultado demonstrado na Seção 4.3.2 que resulta em (90), é possível elaborar um sistema linear do tipo  $Ax = b$ , de tal forma que:

$$A = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & -y_1(\infty) & 0 & \dots & 0 \\ & -y_2(\infty) & -y_1(\infty) & \ddots & \vdots \\ & -y_3(\infty) & -y_2(\infty) & \ddots & 0 \\ 0_{n \times m} & \vdots & -y_3(\infty) & \ddots & -y_1(\infty) \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & -y_{n+m}(\infty) & -y_{n+m-1}(\infty) & \dots & -y_{n+1}(\infty) \end{bmatrix},$$

$$x = [a'_\alpha \dots a_{n\alpha} b'_\alpha \dots b'_{m\alpha}]^T, b = \begin{bmatrix} -y_2(\infty) \\ -y_3(\infty) \\ \vdots \\ -y_{n+m+1}(\infty) \end{bmatrix}. \quad (110)$$

Portanto, se  $\det(A) \neq 0$ , os coeficientes de  $G'(s)$  podem ser obtidos calculando  $x$  da seguinte maneira:

$$x = A^{-1}b. \quad (111)$$

Para concluir a apresentação do método proposto, para escolher o valor apropriado para o parâmetro de

filtragem  $\sigma$  empregado no procedimento de identificação e determinação dos expoente  $\alpha$  da *FT* a ser identificada, será adotado o mesmo procedimento das seções anteriores, que utilizaram a função custo  $J(\sigma, \alpha)$  definida em (105). Nesta tese, a função *FOTF Matlab Toolbox* (CHEN; PETRAS; XUE, 2009) foi utilizada para avaliar a resposta ao degrau  $\hat{y}(t)$  do modelo de ordem fracionária, e o algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) implementado no *Optimization Toolbox Matlab* foi adotado para a obtenção de  $\sigma$  e  $\alpha$  através da minimização de  $J(\sigma, \alpha)$ .

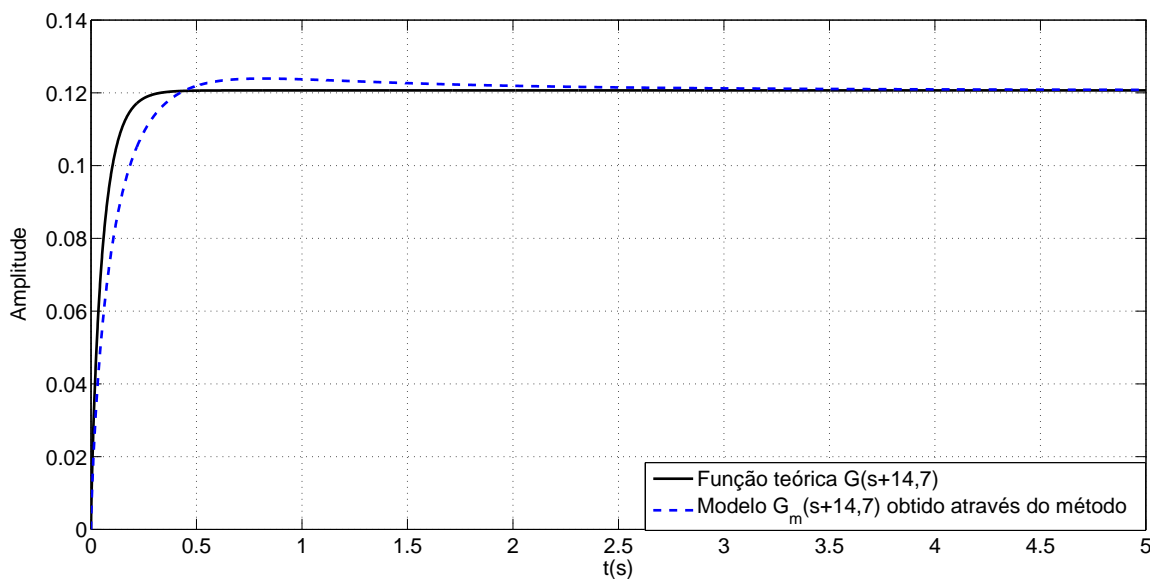
#### 5.4 VALIDAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Com a finalidade de avaliar o método proposto, foram feitas 2 identificações em experimentos para que os modelos obtidos fossem validados.

##### 5.4.1 Primeira identificação: Exemplo Teórico

Neste exemplo, será estudada a *FT* instável  $G(s) = (3s^{0,8} + 2)/(3s^{1,6} + s^{0,8})$  sem considerar o seu conhecimento prévio. O tempo de simulação foi de 20 segundos, com período de amostragem igual a 0,001 segundo. Utilizando o *Optimization Toolbox Matlab* para encontrar os valores de  $\alpha$  e de  $\sigma$ , a *FT* determinada foi  $G_m(s + 14,7) = (0,082151(s + 14,7)^{0,799} + 0,12065)/(0,11584(s + 14,7)^{1,598} + 0,70378(s + 14,7)^{0,799} + 1)$ ,  $\sigma = 14,7$  e o  $EQM = 7,3312 \cdot 10^{-06}$ . Na Figura 27 estão ilustradas as respostas a uma entrada degrau da *FT* teórica  $G(s + 14,7)$  e da *FT* obtida através do método  $G_m(s + 14,7)$ .

Figura 27 - Respostas ao degrau da *FT* teórica  $G(s + 14,7)$  e da *FT*  $G_m(s + 14,7)$  obtidas através do método.



Fonte: O próprio autor

Tabela 11 -  $FT$ 's de ordem fracionária e inteira igual a 1 determinadas pelo método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes.

$\sigma$	Modelo determinado	$EQM$
5,1	$G(s) = (0,463s + 3,024)/(0,071s + 1)$	$1,37 \times 10^{-4}$
0,1195	$G(s) = (1,774s^{0,986} + 0,571)/(0,388s^{0,986} + 1)$	$3,6 \times 10^{-4}$

Observe que de acordo com a Figura 27, a  $FT$   $G_m(s + 14, 7)$  estimada pelo método proposto para funções instáveis apresenta um comportamento em regime próximo ao comportamento em regime da  $FT$  teórica  $G(s+14,7)$ .

#### 5.4.2 Segunda identificação: Redes RC tridimensionais com grande número de componentes

Nesta segunda identificação, foram considerados os dados do artigo (GALVÃO et al., 2013), que já foi objeto de estudo no Capítulo 4 com outro método de identificação proposto nesta tese. No referido artigo, referentes à modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes, os autores realizaram uma simulação em um programa desenvolvido no Matlab, que resultou em um sistema com um modelo de espaço de estados de ordem igual a 75 e que depois de retirados os modos não observáveis e/ou não controláveis, foi representado por uma  $FT$  de ordem inteira igual a 73.

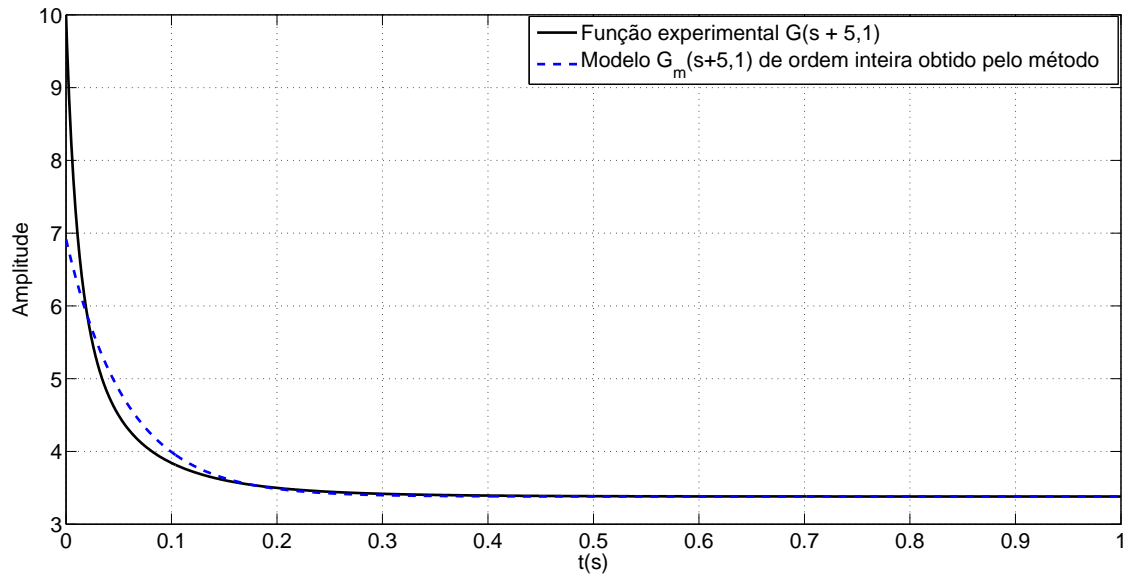
De posse dessa simulação, o próximo passo foi encontrar uma fórmula para representar a  $FT$  de ordem fracionária com um modelo reduzido de termos que possua um  $EQM$  adequadamente pequeno em relação à função teórica e optou-se em utilizar os casos do método proposto em que  $(m, n)$  sejam iguais a  $(1, 1)$  e  $(2, 2)$  no resultado obtido em (109), cujos modelos são:  $G(s) = (b'_\alpha s^\alpha + G(0))/(a'_\alpha s^\alpha + 1)$  e  $G(s) = (b'_{2\alpha} s^{2\alpha} + b'_\alpha s^\alpha + G(0))/(a'_{2\alpha} s^{2\alpha} + a'_\alpha s^\alpha + 1)$  respectivamente.

Adotados estes modelos, o próximo passo foi aplicar no sistema desenvolvido em (GALVÃO et al., 2013), uma entrada degrau unitário durante 60 segundos, com passo igual a 0,001 segundo. A partir daí, executou-se o método proposto com o auxílio da função *fminsearch* que determinou a  $FT$  de ordem fracionária que apresentou o menor  $EQM$  conforme (94). Por último foi calculada a  $FT$  de ordem inteira que apresentou o menor  $EQM$  também utilizando o método proposto.

A Tabela 11 contém as  $FT$ s de ordem fracionária e inteira igual a 1 determinadas pelo método proposto que apresentaram o menor  $EQM$ .

Na Figura 28 estão ilustradas as respostas a uma entrada degrau  $FT$  experimental de ordem 1  $G(s + 5, 1)$  e da  $FT$  de ordem 1  $G_m(s + 5, 1)$ , obtidas através do método .

Figura 28 - Respostas ao degrau da  $FT$  experimental  $G(s+5,1)$  de ordem 1 e da  $FT$   $G_m(s+5,1)$  de ordem 1 obtidas através do método.



Fonte: O próprio autor

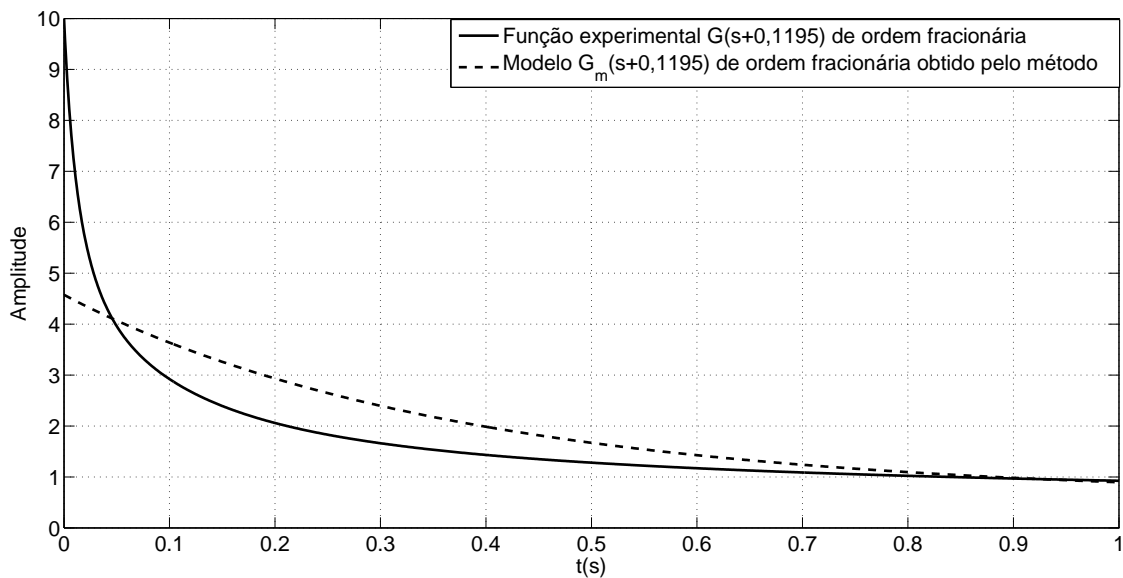
Na Figura 29 estão ilustradas as respostas a uma entrada degrau  $FT$  experimental de ordem fracionária  $G(s+0,1195)$  e da  $FT$  de ordem fracionária  $G_m(s+0,1195)$ , obtidas através do método .



Tabela 12 -  $FT's$  de ordem fracionária e inteira igual a dois determinadas pelo método proposto na modelagem de redes RC tridimensionais com grande número de componentes.

$\sigma$	Modelo determinado	$EQM$
11,5	$G'(s) = (0,01s^2 + 0,4593s + 4,153)/(0,001s^2 + 0,08s + 1)$	$3,84 \times 10^{-5}$
4,6017	$G'(s) = (24,96s + 17,96s^{0,957} + 0,325)/$ $/(8.5443s + 5,41s^{0,957} + 1)$	$3,53 \times 10^{-5}$

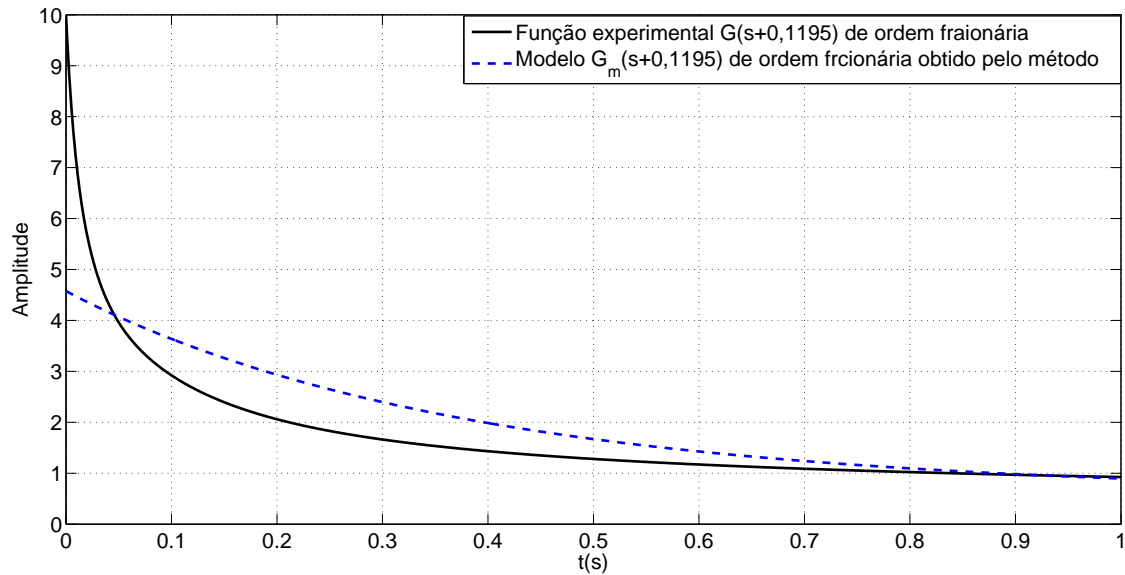
Figura 29 - Respostas ao degrau da  $FT$  experimental  $G(s+0,1195)$  de ordem fracionária e da  $FT$   $G_m(s+0,1195)$  de ordem fracionária obtidas através do método.



Fonte: O próprio autor

Na Figura 30 estão ilustradas as respostas a uma entrada degrau  $FT$  experimental de segunda ordem  $G(s+11,5)$  e da  $FT$  de segunda ordem  $G_m(s+11,5)$ , obtidas através do método.

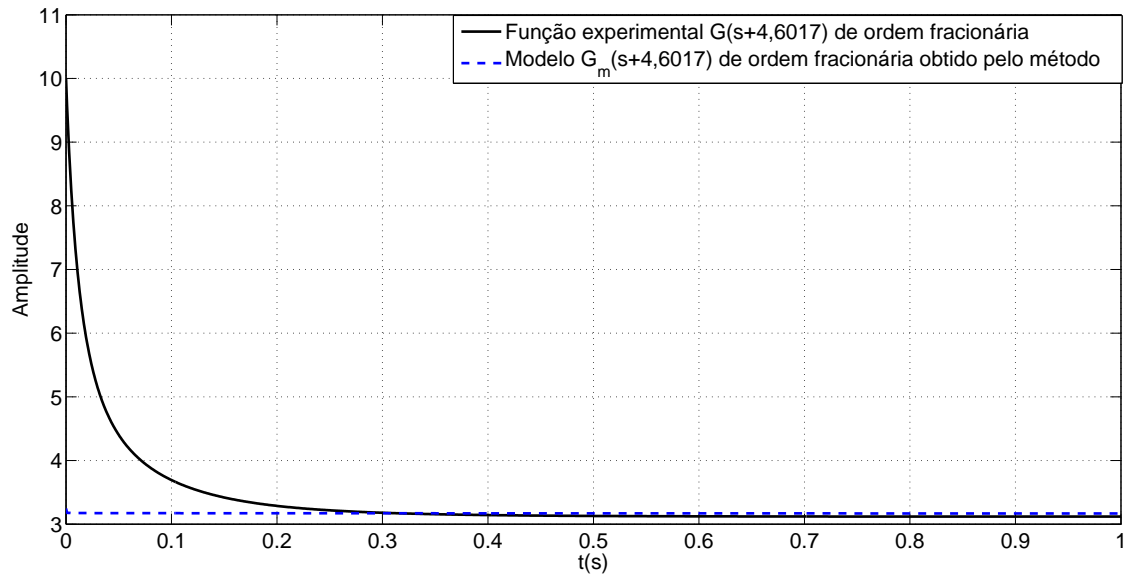
Figura 30 - Respostas ao degrau da  $FT$  experimental  $G(s+11,5)$  de ordem 1 e da  $FT$   $G_m(s+11,5)$  de ordem 2 obtidas através do método.



Fonte: O próprio autor

Na Figura 31 estão ilustradas as respostas a uma entrada degrau  $FT$  experimental de ordem fracionária  $G(s+4,6017)$  e da  $FT$  de ordem fracionária  $G_m(s+4,6017)$ , obtidas através do método .

Figura 31 - Respostas ao degrau da  $FT$  experimental  $G(s+4,6017)$  de ordem fracionária e da  $FT$   $G_m(s+4,6017)$  de ordem fracionária obtidas através do método.



Fonte: O próprio autor

## 6 MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO DE $FT$ 'S DE ORDEM FRACIONÁRIA UTILIZANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Neste capítulo, será proposto um método de identificação de sistemas lineares e invariantes no tempo, que podem ser descritos por uma  $FT$  estável que possui ordem fracionária. O seu mecanismo de funcionamento baseia-se na resposta do sistema a uma entrada degrau, que é utilizada para gerar um conjunto de sinais auxiliares para a obtenção do sinal final, necessário para determinar modelos matemáticos para representar adequadamente a  $FT$  em questão. A grande diferença existente deste método em relação aos métodos propostos nos capítulos anteriores, é que nele, não é feita a utilização de integradores de ordem fracionária. Por este motivo, não é necessário a adoção de um critério específico para o seu funcionamento e pode ser adotado qualquer valor real positivo  $\alpha >$  para representar a ordem da  $FT$ .

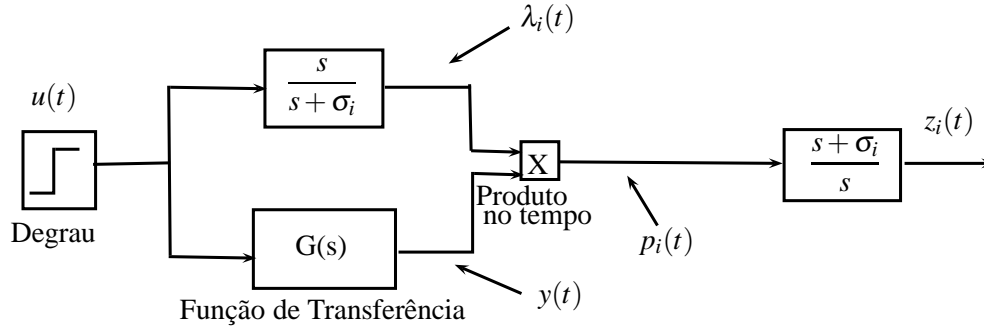
Primeiro, serão deduzidos alguns casos particulares que possuem ordem reduzida e depois será apresentada uma generalização do método que determina uma  $FT$  de ordem arbitrária  $\alpha_n$ . Na seção final do capítulo, serão utilizados alguns exemplos para realizar a validação do método proposto, sendo que será dado um tratamento especial para o exemplo que descreve a pesquisa contida em (GALVÃO et al., 2013), que aborda a representação de materiais compósitos através de redes RC tridimensionais para a obtenção da resposta dielétrica.

### 6.1 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO $FT$ 'S ESTÁVEIS DE ORDEM $\alpha_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}^+$

Suponha um sistema linear e invariante no tempo descrito por uma  $FT$  estável  $G(s) = (b_0 + b_{\beta_1} s^{\beta_1}) / (a_0 + a_{\alpha_1} s^{\alpha_1})$ , que possui ordem fracionária  $\alpha_1$  com  $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+$ . Devido à sua estabilidade,  $a_0$  é diferente de zero, daí fazendo  $b_1 = b_{\beta_1} / a_0$ ,  $a_1 = a_{\alpha_1} / a_0$  e  $G(0) = b_0 / a_0$ , tem-se:

$$G(s) = \frac{G(0) + b_1 s^{\beta_1}}{1 + a_1 s^{\alpha_1}}, \quad (112)$$

sendo que  $G(0)$ ,  $b_1$ ,  $a_1$  são coeficientes a serem determinados e  $\beta_1$ ,  $\alpha_1$ , expoentes que são valores reais positivos e que inicialmente serão considerados conhecidos. Considere agora uma entrada igual a um degrau representada por  $U(s) = 1/s$  e o seguinte método de identificação que está representado na Figura 32:

Figura 32 - Método para obtenção do sinal  $z_i(t)$ .

Fonte: O próprio autor.

Na Figura 32,  $y(t)$  representa a resposta do sistema a uma entrada degrau  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , tal que:

$$U(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s}. \quad (113)$$

Além disso, como pode ser visto na Figura 32,  $\lambda_i(t)$  é a resposta do filtro a uma entrada degrau  $u(t)$ , que possui FT igual a  $s/(s + \sigma_i)$ , ou seja:

$$\lambda_i(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s + \sigma_i} U(s) \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \sigma_i} \right] = e^{-\sigma_i t}, \quad t \geq 0 \quad (114)$$

sendo que  $\sigma_i > 0$  é um parâmetro de filtragem que será fornecido. O sinal  $p_i(t)$  é obtido através do produto de  $y(t)$  por  $\lambda_i(t)$ , isto é,

$$p_i(t) \triangleq y(t)\lambda_i(t) = y(t)e^{-\sigma_i t}, \quad t \geq 0, \quad (115)$$

que conforme pode ser verificado em (FRANKLIN; POWELL; E.NAEINI, 2006), corresponde à seguinte transformada de Laplace:

$$P_i(s) = \mathcal{L}[y(t)e^{-\sigma_i t}] = Y(s + \sigma_i). \quad (116)$$

De (113) e de (116), segue que:

$$P_i(s) = \frac{G(s + \sigma_i)}{s + \sigma_i}. \quad (117)$$

Finalmente,  $z_i(t)$ ,  $t \geq 0$ , é a resposta a uma entrada  $p_i(t)$  multiplicada pela FT  $(s + \sigma_i)/s$ , isto é:

$$Z_i(s) \triangleq \frac{s + \sigma_i}{s} P_i(s) = \frac{G(s + \sigma_i)}{s}. \quad (118)$$

Utilizando o resultado do TVF, que é válido para o CF (LI; DENG; XU, 2005) e (118),  $z_i(\infty)$  pode ser descrito como:

$$z_i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sZ_i(s). \quad (119)$$

Desse modo, de (112), (118) e (119) conclui-se que:

$$z_i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s + \sigma_i) = \frac{G(0) + b_1 \sigma_i^{\beta_1}}{1 + a_1 \sigma_i^{\alpha_1}} \quad (120)$$

e que pode ser reescrito como:

$$z_i(\infty) \cdot (1 + a_1 \sigma_i^{\alpha_1}) = G(0) + b_1 \sigma_i^{\beta_1} \Rightarrow z_i(\infty) a_1 \sigma_i^{\alpha_1} - b_1 \sigma_i^{\beta_1} - G(0) = -z_i(\infty). \quad (121)$$

Levando em conta (121) com  $i = 1, 2, 3$ , e  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ , com  $\sigma_i > 0$ , é possível formar um sistema linear do tipo  $A \theta = c$ , sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} z_1(\infty) \sigma_1^{\alpha_1} & -\sigma_1^{\beta_1} & -1 \\ z_2(\infty) \sigma_2^{\alpha_1} & -\sigma_2^{\beta_1} & -1 \\ z_3(\infty) \sigma_3^{\alpha_1} & -\sigma_3^{\beta_1} & -1 \end{bmatrix}, \quad (122)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ G(0) \end{bmatrix} \quad e \quad c = \begin{bmatrix} -z_1(\infty) \\ -z_2(\infty) \\ -z_3(\infty) \end{bmatrix}.$$

Para todos os casos em que  $\det(A) \neq 0$ , a solução  $\theta = A^{-1}c$  irá existir e conseqüentemente as incógnitas  $G(0)$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  serão determinadas e será possível obter um modelo matemático para representar a  $FT G(s)$  que deseja-se identificar. Observe que para a eficiência do método proposto, restam as questões de escolha de valores apropriados para os parâmetros de filtragem  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  empregados no processo de identificação e a escolha dos expoentes  $\beta_1$ ,  $\alpha_1$  da  $FT$  a ser identificada. Uma regra que tem como objetivo simplificar o ajuste destes parâmetros é a seguinte:

$$\sigma_2 = \rho \sigma_1, \quad \sigma_3 = \rho \sigma_2, \quad (123)$$

sendo que  $\rho$  é uma constante no intervalo  $0 < \rho < 1$  e  $\sigma_1$ , o parâmetro que corresponde à função exponencial  $e^{-\sigma_1 t}$  com taxa de decaimento mais rápida. Uma regra adicional pode ser proposta para a escolha de  $\sigma_1$  ou simplesmente pode-se determiná-lo através de sua otimização. Considerando uma destas possibilidades para  $\sigma_1$ , seja  $\gamma \triangleq [\beta_1 \quad \alpha_1]^T$ . Para cada par de valores de  $\gamma$  e  $\rho$  escolhidos, o procedimento de identificação pode ser realizado de modo a obter o vetor dos parâmetros  $\theta$  do mesmo modo que em (122). A seguinte função custo  $J(\gamma, \rho)$  pode, então, ser calculada como o  $EQM$  entre a resposta ao degrau  $y(t)$  e a saída  $\hat{y}(t)$  do modelo resultante:

$$J(\gamma, \rho) \triangleq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(kT) - \hat{y}(kT)]^2}. \quad (124)$$

sendo que  $T$  é o período de amostragem utilizado na aquisição da resposta a uma entrada degrau e  $N$

é o número de amostras adquiridas. Assim, os valores adequados de  $\gamma$  e  $\rho$  podem ser obtidos usando técnicas numéricas de otimização para minimizar  $J(\gamma, \rho)$ .

No presente trabalho, a função *FOTF Matlab Toolbox* (CHEN; PETRAS; XUE, 2009) foi utilizada para avaliar a resposta ao degrau  $\hat{y}(t)$  do modelo de ordem fracionária, e o algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) implementado no *Optimization Toolbox Matlab* foi adotado para a obtenção de  $\gamma$  e  $\rho$  através da minimização de  $J(\gamma, \rho)$ .

## 6.2 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO FT'S ESTÁVEIS DE ORDEM $\alpha_2$ , $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$

Suponha um sistema linear e invariante no tempo descrito por uma FT estável  $G(s) = (b_0 + b_{\beta_1}s^{\beta_1} + b_{\beta_2}s^{\beta_2})/(a_0 + a_{\alpha_1}s^{\alpha_1} + a_{\alpha_2}s^{\alpha_2})$  que possui ordem fracionária  $\alpha_2$ , com  $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ . Novamente é possível rescrevê-la da mesma forma que na seção anterior fazendo  $b_i = b_{\beta_i}/a_0$ , para  $i = 1, 2$ ,  $a_j = a_{\alpha_j}/a_0$ , para  $j = 1, 2$  e  $G(0) = b_0/a_0$  e assim tem-se:

$$G(s) = \frac{G(0) + b_1s^{\beta_1} + b_2s^{\beta_2}}{1 + a_1s^{\alpha_1} + a_2s^{\alpha_2}}, \quad (125)$$

sendo que  $G(0)$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  são coeficientes a serem determinados e  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  expoentes que são valores reais positivos e que inicialmente serão considerados conhecidos. Considere agora uma entrada igual a um degrau representada por  $U(s) = 1/s$  e o seguinte método de identificação que está representado na Figura 32.

Do mesmo modo que foi feito anteriormente, de (125), (118) e (119) conclui-se que:

$$z_i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Z_i(s) = \frac{G(0) + b_1(\sigma_i)^{\beta_1} + b_2(\sigma_i)^{\beta_2}}{1 + a_1(\sigma_i)^{\alpha_1} + a_2(\sigma_i)^{\alpha_2}} \quad (126)$$

e que pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} z_i(\infty) \cdot [1 + a_1(\sigma_i)^{\alpha_1} + a_2(\sigma_i)^{\alpha_2}] &= G(0) + b_1(\sigma_i)^{\beta_1} + b_2(\sigma_i)^{\beta_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow z_i(\infty)a_1\sigma_i^{\alpha_1} + z_i(\infty)a_2(\sigma_i)^{\alpha_2} - b_2\sigma_i^{\beta_2} - b_1\sigma_i^{\beta_1} - G(0) &= -z_i(\infty). \end{aligned} \quad (127)$$

Logo, utilizando o mesmo procedimento realizado na seção anterior, mas agora com o acréscimo de mais dois parâmetros, pois neste caso existem cinco indeterminações, considere (127) com  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq \sigma_4 \neq \sigma_5$ , com  $\sigma_i > 0$ , consequentemente é possível elaborar um sistema linear do tipo  $A\theta = c$ , sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} z_1(\infty)\sigma_1^{\alpha_1} & z_1(\infty)\sigma_1^{\alpha_2} & -\sigma_1^{\beta_1} & -\sigma_1^{\beta_2} & -1 \\ z_2(\infty)\sigma_2^{\alpha_1} & z_2(\infty)\sigma_2^{\alpha_2} & -\sigma_2^{\beta_1} & -\sigma_2^{\beta_2} & -1 \\ z_3(\infty)\sigma_3^{\alpha_1} & z_3(\infty)\sigma_3^{\alpha_2} & -\sigma_3^{\beta_1} & -\sigma_3^{\beta_2} & -1 \\ z_4(\infty)\sigma_4^{\alpha_1} & z_4(\infty)\sigma_4^{\alpha_2} & -\sigma_4^{\beta_1} & -\sigma_4^{\beta_2} & -1 \\ z_5(\infty)\sigma_5^{\alpha_1} & z_5(\infty)\sigma_5^{\alpha_2} & -\sigma_5^{\beta_1} & -\sigma_5^{\beta_2} & -1 \end{bmatrix}, \quad (128)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ G(0) \end{bmatrix} \quad e \quad c = \begin{bmatrix} -z_1(\infty) \\ -z_2(\infty) \\ -z_3(\infty) \\ -z_4(\infty) \\ -z_5(\infty) \end{bmatrix}.$$

Para todos os casos em que  $\det(A) \neq 0$ , a solução  $\theta = A^{-1}c$  irá existir e consequentemente as incógnitas  $G(0)$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  serão determinadas e um modelo matemático é gerado para representar a FT  $G(s)$  que deseja-se identificar. Observe que para a eficiência do método proposto, restam as questões de escolha de valores apropriados para os parâmetros de filtragem  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$ ,  $\sigma_5$  empregados no processo de identificação e a determinação dos expoentes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  da FT a ser identificada. Uma regra que tem como objetivo simplificar o ajuste destes parâmetros é a seguinte:

$$\sigma_2 = \rho \sigma_1, \quad \sigma_3 = \rho \sigma_2, \quad \sigma_4 = \rho \sigma_3, \quad \sigma_5 = \rho \sigma_4, \quad (129)$$

sendo que  $\rho$  é uma constante no intervalo  $0 < \rho < 1$  e  $\sigma_1$ , o parâmetro que corresponde a função exponencial  $e^{-\sigma_1 t}$  com taxa de decaimento mais rápida. Uma regra adicional pode ser proposta para a escolha de  $\sigma_1$  ou simplesmente pode-se determiná-lo através de sua otimização. Considerando uma destas possibilidades para escolher  $\sigma_1$ , seja  $\gamma \triangleq [\beta_1 \ \beta_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2]^T$ . Para cada par valores de  $\gamma$  e  $\rho$  escolhidos, o procedimento de identificação pode ser realizado de modo a obter o vetor dos parâmetros  $\theta$  do mesmo modo que em (128). A seguinte função custo  $J(\gamma, \rho)$  pode, então, ser calculada como o EQM entre a resposta ao degrau  $y(t)$  e a saída  $\hat{y}(t)$  do modelo resultante:

$$J(\gamma, \rho) \triangleq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(kT) - \hat{y}(kT)]^2}. \quad (130)$$

sendo que  $T$  é o período de amostragem utilizado na aquisição da resposta a uma entrada degrau e  $N$  é o número de amostras adquiridas. Portanto, os valores adequados de  $\gamma$  e  $\rho$  podem ser obtidos usando técnicas numéricas de otimização para minimizar  $J(\gamma, \rho)$ .

Nesta tese, a função *FOTF Matlab Toolbox* (CHEN; PETRAS; XUE, 2009) foi utilizada para avaliar a resposta ao degrau  $\hat{y}(t)$  do modelo de ordem fracionária, e o algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) implementado no *Optimization Toolbox Matlab* foi adotado para a obtenção de  $\gamma$  e  $\rho$  através da minimização de  $J(\gamma, \rho)$ .

### 6.3 IDENTIFICAÇÃO UTILIZANDO FT'S ESTÁVEIS DE ORDEM $\alpha_n$ , $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$

Considere um sistema linear e invariante no tempo  $G(s)$  sujeito a uma entrada degrau representada por  $U(s) = 1/s$ , descrito por uma FT estável  $G(s)$  de ordem  $\alpha_n$ , com  $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$  e reescrita, conforme os



dois casos anteriores, da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{G(0) + b_1 s^{\beta_1} + \dots + b_m s^{\beta_m}}{1 + a_1 s^{\alpha_1} + \dots + a_n s^{\alpha_n}}, \quad (131)$$

com  $b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n$  coeficientes a serem identificados e  $\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , expoentes que são valores reais positivos e inicialmente serão considerados conhecidos. Levando em conta o método apresentado na Figura 32, (131), (118) e (119) conclui-se que:

$$z_i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s + \sigma_i) = \frac{G(0) + b_1 \sigma_i^{\beta_1} + \dots + b_m \sigma_i^{\beta_m}}{1 + a_1 \sigma_i^{\alpha_1} + \dots + a_n \sigma_i^{\alpha_n}} \quad (132)$$

a qual pode ser reescrita como descrito abaixo:

$$z_i(\infty) \cdot [1 + a_1 (\sigma_i)^{\alpha_1} + \dots + a_n (\sigma_i)^{\alpha_n}] = G(0) + b_1 \sigma_i^{\beta_1} + \dots + b_m \sigma_i^{\beta_m} \Rightarrow \quad (133)$$

$$\Rightarrow z_i(\infty) a_1 \sigma_i^{\alpha_1} + \dots + z_i(\infty) a_n \sigma_i^{\alpha_n} - b_1 \sigma_i^{\beta_1} - \dots - b_m \sigma_i^{\beta_m} - G(0) = -z_i(\infty). \quad (134)$$

Considerando  $z_i(\infty)$  com  $n+m+1$  valores diferentes de  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+m+1$ ), todas as equações podem ser utilizados para obter um sistema linear da forma  $A\theta = c$ , com:

$$A = \begin{bmatrix} z_1(\infty) \sigma_1^{\alpha_1} & z_1(\infty) \sigma_1^{\alpha_2} & \dots & z_1(\infty) \sigma_1^{\alpha_n} & -\sigma_1^{\beta_1} & \dots & -\sigma_1^{\beta_m} & -1 \\ z_2(\infty) \sigma_2^{\alpha_1} & z_2(\infty) \sigma_2^{\alpha_2} & \dots & z_2(\infty) \sigma_2^{\alpha_n} & -\sigma_2^{\beta_1} & \dots & -\sigma_2^{\beta_m} & -1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ z_{n+m+1}(\infty) \sigma_{n+m+1}^{\alpha_1} & z_{n+m+1}(\infty) \sigma_{n+m+1}^{\alpha_2} & \dots & z_{n+m+1}(\infty) \sigma_{n+m+1}^{\alpha_n} & -\sigma_{n+m+1}^{\beta_1} & \dots & -\sigma_{n+m+1}^{\beta_m} & -1 \end{bmatrix},$$

$$\theta = [a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m G(0)]^T, \quad c = \begin{bmatrix} -z_1(\infty) \\ -z_2(\infty) \\ \vdots \\ -z_{n+m+1}(\infty) \end{bmatrix}. \quad (135)$$

Se  $\det(A) \neq 0$ , os coeficientes de  $G(s)$  podem ser obtidos calculando  $\theta$  como:

$$\theta = A^{-1}c. \quad (136)$$

Para concluir a apresentação do método proposto, restam as questões de escolha de valores apropriados para os parâmetros de filtragem  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+m+1}$  empregados no procedimento de identificação e determinação dos expoentes  $\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  da FT a ser identificada.

Com o propósito de simplificar o ajuste dos parâmetros de filtragem, a regra a seguir pode ser adotada:

$$\sigma_2 = \rho \sigma_1, \quad \sigma_3 = \rho \sigma_2, \quad \dots, \quad \sigma_{n+m+1} = \rho \sigma_{n+m}, \quad (137)$$

sendo que  $\rho$  é uma constante no intervalo  $0 < \rho < 1$ . Vale a pena notar que o maior parâmetro  $\sigma_1$  corresponde à função exponencial  $e^{-\sigma_1 t}$  com taxa de decaimento mais rápida. Uma regra adicional pode ser proposta para a escolha de  $\sigma_1$  ou simplesmente pode-se determiná-lo através de sua otimização.

Finalmente, considere  $\gamma \triangleq [\beta_1 \cdots \beta_m \alpha_1 \cdots \alpha_n]^T$  o vetor dos parâmetros que serão determinados. Para cada par valores de  $\gamma$  e  $\rho$ , o procedimento de identificação pode ser realizado de modo a obter o vetor dos coeficientes da *FT*  $\theta$  do mesmo modo que em (136). A função custo  $J(\gamma, \rho)$  definida a seguir pode, então, ser calculada como o *EQM* entre a resposta a uma entrada degrau  $y(t)$  e a saída  $\hat{y}(t)$  do modelo resultante:

$$J(\gamma, \rho) \triangleq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(kT) - \hat{y}(kT)]^2} \quad (138)$$

sendo que  $T$  é o período de amostragem utilizado na aquisição da resposta a entrada degrau e  $N$  é o número de amostras adquiridas. Portanto, os valores adequados de  $\gamma$  e  $\rho$  podem ser obtidos usando técnicas numéricas de otimização para minimizar  $J(\gamma, \rho)$ .

Nesta tese, a função FOTF Matlab Toolbox (CHEN; PETRAS; XUE, 2009) foi utilizada para avaliar a resposta ao degrau  $\hat{y}(t)$  do modelo de ordem fracionária, e o algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) implementado no *Optimization Toolbox Matlab* foi adotado para a obtenção de  $\gamma$  e  $\rho$  através da minimização de  $J(\gamma, \rho)$ .

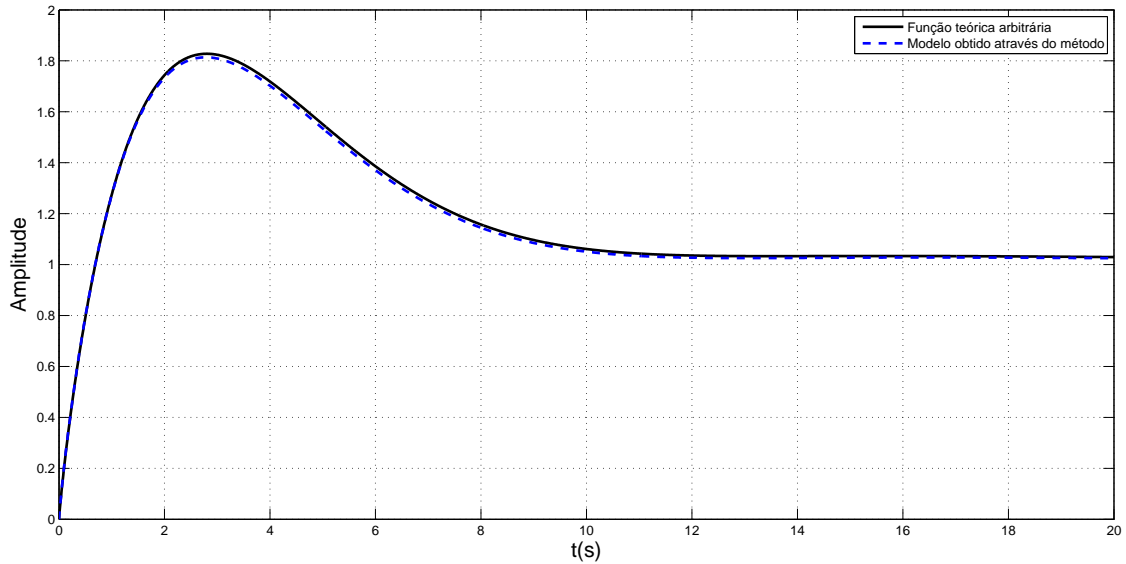
## 6.4 VALIDAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Com a finalidade de avaliar o método proposto, foram feitas 4 identificações em experimentos para que o procedimento seja validado.

### 6.5 PRIMEIRA *FT* A SER IDENTIFICADA

Nesta primeira identificação foi escolhida uma *FT* polinomial arbitrária que satisfaz as condições exigidas para o funcionamento do método e também não foi levado em conta o seu conhecimento. Assim a função adotada foi  $G(s) = (5s^{0,9} + 1)/(3s^{1,8} + 2s^{0,9} + 1)$  e a partir daí, para facilitar a execução do método utilizou-se a função de otimização *fminsearch* que está disponível no Matlab para determinar o valor mínimo do *EQM*. A função *fminsearch* pode ser classificada como um algoritmo de busca direta e para o seu uso basta fornecer um ponto inicial, que a partir dele, vários métodos são aplicados e após um número necessário de iterações, um mínimo local é determinado. Em nosso caso o objetivo é encontrar o menor valor do *EQM* definido em (138) depois de realizar este procedimento a partir de várias condições iniciais, selecionadas a partir de um *grid* formado pela variação de  $\alpha$  de 0,1 até 2,0 e  $\rho$  de 0,1 to 0,9, visando obter o mínimo global. A função de transferência obtida pelo método de identificação proposto foi  $G(s) = (5,002s^{0,913} + 1)/(2,981s^{1,81} + 2,052s^{0,912} + 1)$ . Na Figura 33 estão representadas as respostas a uma entrada degrau unitário, da *FT* escolhida e da *FT* que foi obtida utilizando o método proposto.

Figura 33 - Respostas a uma entrada degrau, da *FT* teórica e da *FT* obtida utilizando o método proposto.



Fonte: O próprio autor

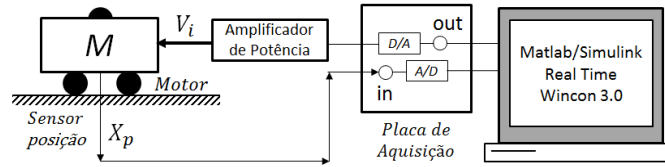
Repare que de acordo com a Figura 33, é possível concluir que a identificação realizada pelo método proposto foi eficiente, sendo que o *EQM* obtido, com  $T = 0,01$ segundo e  $q = 100001$  foi igual a  $8,0549 \times 10^{-6}$ .

## 6.6 SEGUNDA *FT* A SER IDENTIFICADA

Na segunda identificação foram utilizados os dados provenientes de um experimento que foi executado no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), do Departamento de Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (DEE/FEIS/UNESP).

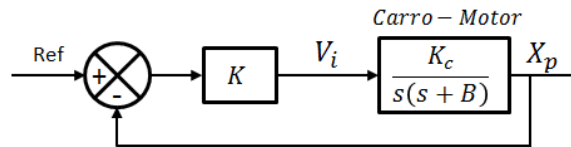
Como parte do desenvolvimento das pesquisas do controle de um sistema pêndulo invertido, foi realizado o controle de um carrinho acionado por motor de corrente contínua com a finalidade de obter a *FT* entre a posição do carro  $X_p$  e a tensão enviada ao motor  $V_i$ . A Figura 34 ilustra o arranjo utilizado em bancada para a aquisição do sinal da posição ( $X_p$ ) e o sinal de controle ( $V_i$ ) proveniente do controlador.

Figura 34 - Arranjo dos equipamentos para o controle de posição do carro de massa M.



Fonte: O próprio autor

Foi proposta a utilização de um controlador de ganho proporcional com  $K = 75$ , e o sistema de controle e planta estão descritos na Figura 35. A modelagem matemática da planta Carro-Motor pode ser obtida em (RIBEIRO et al., 2014).

Figura 35 - Diagrama de blocos do sistema controlado (carrinho) com um modelo matemático de ordem inteira  $\alpha = 1$  de segunda ordem.

Fonte: O próprio autor

O objetivo inicial foi identificar o sistema, com aplicação de um degrau na referência, em malha fechada e, através da identificação, determinar os parâmetros que envolvem a planta Carro-Motor, ou seja, os parâmetros  $K_c$  e  $B$ , descritos em (139).

A *FT* de ordem fracionária em malha fechada considerada neste caso é da forma:

$$\frac{X_p(s)}{REF(s)} = \frac{K \cdot K_c}{s^{2\alpha} + B \cdot s^\alpha + K \cdot K_c}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (139)$$

A aquisição da resposta da posição do carro, para uma entrada degrau de  $10\text{cm}$ , é descrita na Figura 36, juntamente com a resposta do sistema identificado, considerando 2 polos.

Assim, executou-se o método proposto e as *FT* de ordem fracionária e de ordem inteira igual a 2 determinadas que apresentaram o menor *EQM* estão dispostas na Tabela 13.

Na Figura 36 estão representadas a resposta da *FT* da função experimental para uma entrada degrau e das funções de transferência de ordem inteira igual a 2 e de ordem fracionária obtidas através do método proposto para a planta Carro-Motor dada em (139).

Tabela 13 -  $FT's$  de ordem fracionária e inteira igual a 2 determinadas pelo método proposto para a planta Carro-Motor dada em (139).

$FT's$ geradas pelo método proposto	$EQM$
$G(s) = (10,053)/(0,001078s^2 + 0,04171s + 1)$	0,00121
$G(s) = (10,05)/(0,015936s^{1,3531} + 0,033961s^{0,67182} + 1)$	$9,76 \times 10^{-4}$

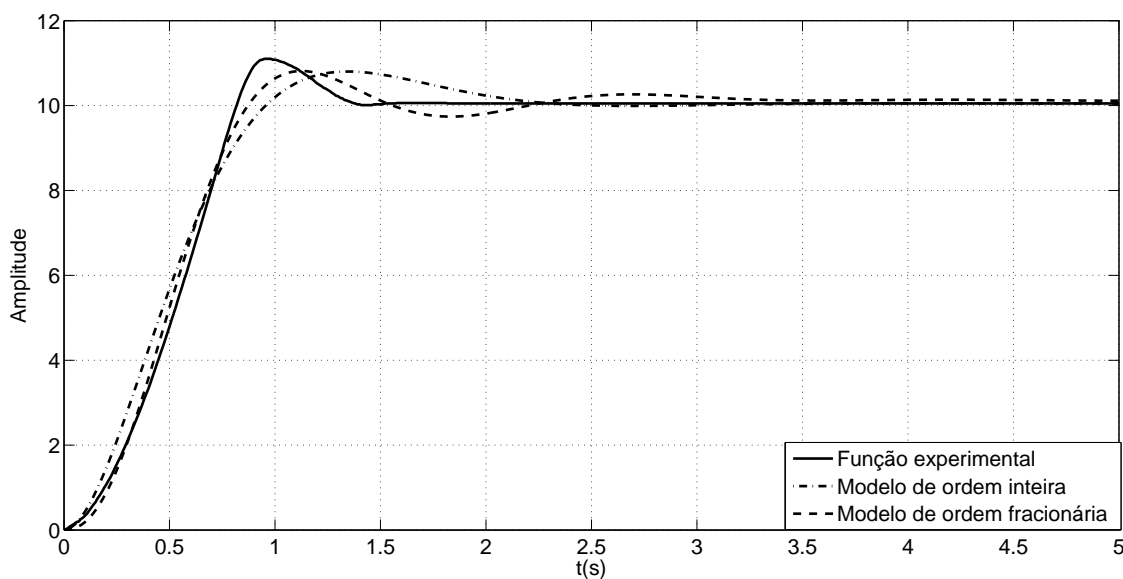


Figura 36 - Resposta de todos os modelos calculados a uma entrada degrau para a planta Carro-Motor dada em (139).

Fonte: O próprio autor

A melhor identificação foi obtida para  $\alpha = 1,3531$  e que resultou em um  $EQM = 9,76 \times 10^{-4}$ . Observe que o modelo matemático com dois polos considerando  $\alpha = 1$  descrito em (139) é uma forma simplificada para representar este experimento, por desprezar o polo devido à indutância e à resistência do motor, conforme (OGATA, 2011). Assim, conforme (135), que possibilita a identificação para um número arbitrário de polos e zeros, foi também considerada uma  $FT$  com três polos, dada por:

$$\frac{X_p(s)}{REF(s)} = G(s) = \frac{G(0)}{a'_{3\alpha}s^{3\alpha} + a'_{2\alpha}s^{2\alpha} + a'_{\alpha}s^{\alpha} + 1}. \quad (140)$$

Executou-se o método proposto e as  $FT's$  de ordem fracionária e de ordem inteira igual a 3 determinadas que apresentaram o menor  $EQM$  estão dispostas na Tabela 14.

Tabela 14 -  $FT$ 's ordem fracionária e inteira igual a 3 determinadas pelo método proposto para a planta Carro-Motor dada em (139).

$FT$ 's geradas pelo método proposto	$EQM$
$G(s) = (10,05)/(9,327 \times 10^{-6}s^3 + 0,001s^2 + 0,046s + 1)$	$3,91 \times 10^{-4}$
$G(s) = (10,05)/(1,31 \times 10^{-5}s^{3,002} + 9,36 \times 10^{-4}s^{2,001} + 0,046s^{1,001} + 1)$	$3,083 \times 10^{-4}$

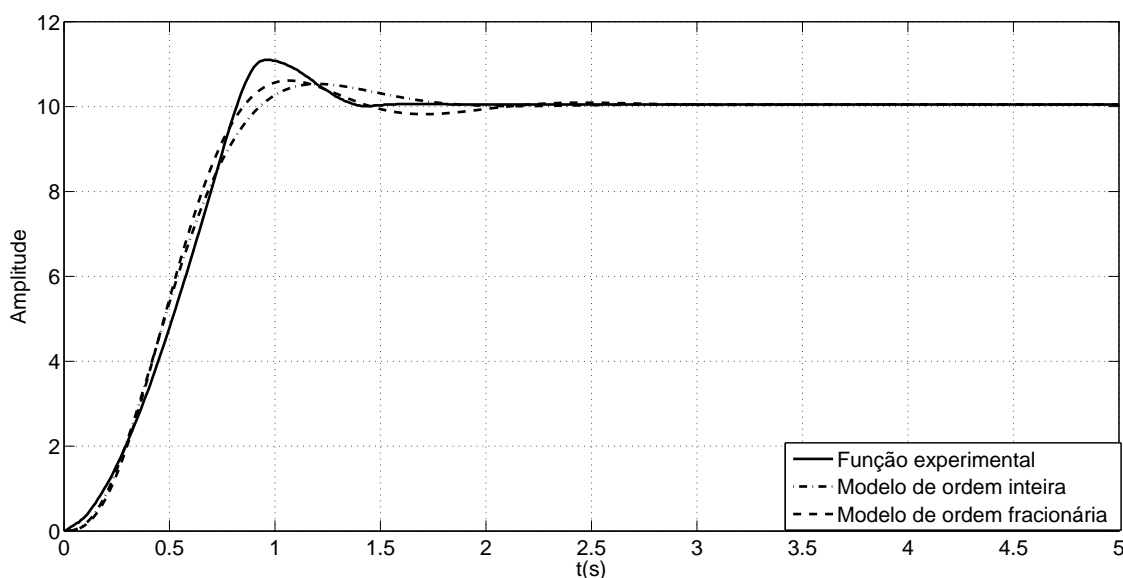


Figura 37 - Resposta de todos os modelos calculados a uma entrada degrau para a planta Carro-Motor dada em (139).

Fonte: O próprio autor

A melhor identificação para este caso foi obtida para  $\alpha = 1,0006$  e que resultou em um  $EQM = 3,08264 \times 10^{-4}$ . Observe que a ordem fracionária da  $FT$  determinada é praticamente igual a um.

## 6.7 TERCEIRA $FT$ A SER IDENTIFICADA

Nesta identificação foi levado em consideração um projeto que está sendo desenvolvido no Laboratório de Instrumentação e Engenharia Biomédica do Departamento de Engenharia Elétrica do Campus da UNESP de Ilha Solteira, que realiza Estimulação Elétrica Funcional (FES - *Functional Electrical Stimulation*) nos membros inferiores de voluntários hemiplégicos e paraplégicos com o objetivo de melhorar a sua qualidade de vida. Neste experimento, estudam-se padrões de estímulos que proporcionem o melhor resultado possível e diante disso é necessário um modelo matemático eficiente para prever o comportamento do músculo.

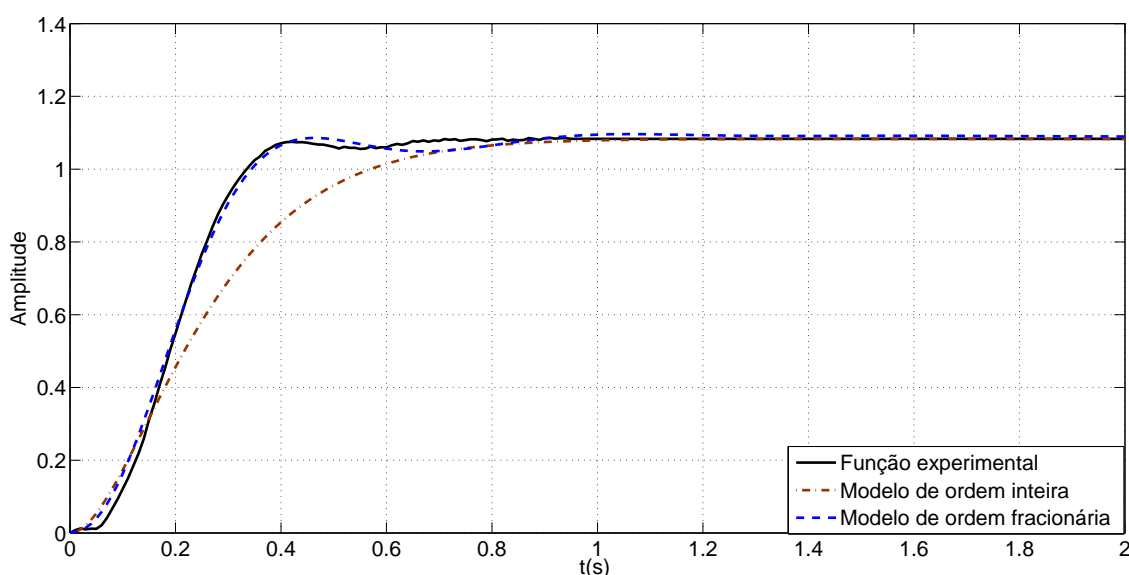
Por este motivo, conforme (KOZAN, 2012), foram realizadas simulações com três tipos de modelos

e a equipe executora do projeto concluiu que o modelo desenvolvido por (LAW; SHIELDS, 2006) foi o mais adequado para representar a *FT* dos dados coletados de cada paciente, relacionando uma eletro estimulação do tipo degrau (entrada) com a posição da perna do voluntário (saída), que tem a fórmula  $G(s) = b_0 / (a_{2\alpha}s^{2\alpha} + a_\alpha s^\alpha + a_0)$ , com  $\alpha = 1$ .

Para o caso em que o modelo desejado apresente ordem fracionária, na aplicação do método proposto foi utilizada a fórmula  $G(s) = b_0 / (a_{2\alpha}s^{2\alpha} + a_\beta s^\beta + a_0)$ , com  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . A partir daí, na otimização os valores iniciais de  $\alpha$  e  $\beta$  foram selecionados a partir de um *grid* formado pela variação de  $\alpha$  e de  $\beta$  compreendidos entre 0,1 até 2,0, ambos com período de amostragem igual a 0,1; para os valores iniciais de  $\rho$  a variação foi de 0,1 to 0,99, com período de amostragem igual a 0,1 e o intervalo de tempo adotado foi de 0 – 75s e período de amostragem  $T = 0,01s$ .

O resultado final obtido pelo método proposto após realizada a otimização foi  $G(s) = (1,0826)/(0,0059208s^{2,4806} + 0,20782s^{1,0594} + 1)$ , que apresentou  $EQM = 3,16814 \times 10^{-5}$ . Para o caso de ordem inteira, foi realizada apenas a variação de  $\rho$  atribuindo valores iniciais compreendidos entre 0,1 até 0,9, com passo igual a 0,1. O resultado final obtido após a otimização foi  $G(s) = (1,083)/(0,02001s^2 + 0,2736s + 1)$  com  $EQM = 1,51069 \times 10^{-4}$ . Na Figura 38 estão dipostas as respostas a uma entrada degrau da função que deseja-se identificar, bem com as respostas ao degrau dos modelos de ordem fracionária e inteira obtidos através do método proposto.

Figura 38 - Resposta a uma entrada degrau da função experimental e dos modelos obtidos através do método.



Fonte: O próprio autor

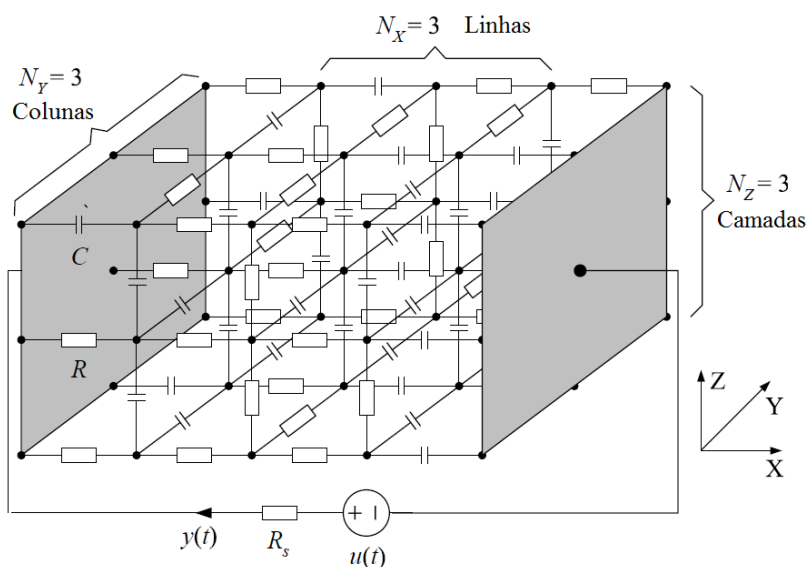
Analisando a Figura 38, observa-se que a resposta do modelo de ordem fracionária ficou muito próxima da resposta obtida experimentalmente. Desta forma, o método proposto proporcionou uma modelagem matemática melhor do que a tradicional de ordem inteira, introduzida em (LAW; SHIELDS,

2006).

## 6.8 QUARTA FT A SER IDENTIFICADA

Nesta identificação, foi considerada uma rede tridimensional RC contendo capacitores e resistores. Na Figura 39 é apresentado um exemplo de rede RC tridimensional em consideração, que pode ser usada como modelo de circuitos para a resposta dielétrica de materiais compósitos contendo isolamento e partículas condutoras (MCCULLEN et al., 2009). A topologia de rede compreende  $N_Z$  camadas, cada uma composta por uma matriz de nós com  $N_X$  linhas e  $N_Y$  colunas. Uma fonte de resistência  $R_S$  está incluída para modelar a resistência interna da fonte. Os números de resistores (não incluindo a resistência da fonte) e capacitores são denotados por  $N_R$  e  $N_C$ , respectivamente, de modo que  $N_R + N_C = N_Z[N_Y(N_X + 1) + N_X(N_Y - 1)] + (N_Z - 1)N_XN_Y$  (GALVÃO et al., 2013). A fração de condensadores na rede é definida como  $f_C = N_C/(N_R + N_C)$ .

Figura 39 - Diagrama de uma rede RC tridimensional com distribuição aleatória dos elementos  $R$  e  $C$ . As placas cinzentas indicam os elétrodos utilizados para a ligação a uma fonte de tensão com a resistência de saída  $R_S$  ((GALVÃO et al., 2013)).



Fonte: (GALVÃO et al., 2013)

Conforme apresentado em (GALVÃO et al., 2013), um modelo dinâmico pode ser obtido a partir das leis de Kirchoff, relacionando a tensão de entrada  $u(t)$  com a saída  $y(t)$  que entra na rede. A matriz de incidência ao acaso pode ser empregada de forma a dispor os componentes  $R, C$  em posições aleatórias. O modelo resultante pode ser convertido para um número inteiro, a fim de obter uma FT  $G(s)$ , o que facilita a avaliação da resposta da rede no domínio do tempo, bem como o cálculo da admitância no domínio da frequência. Vale a pena notar que a ordem do modelo pode ser muito alta, mesmo depois de levar em conta as restrições algébricas associadas aos caminhos fechados de capacitores e eliminando os modos não-controláveis e ou não observáveis. Por exemplo, a rede utilizada em (GALVÃO et al.,



2013), com 100 resistores e 100 capacitores, resultou em uma FT de ordem 73. No entanto, verificou-se que uma representação mais compactada pode ser obtida através da utilização de uma FT de ordem fracionária da forma:

$$G_{frac}(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1} + b_ns^\beta}{1 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^\alpha}, \quad (141)$$

sendo que  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $\beta \in \mathbb{R}^+$ .

O procedimento de identificação adotado em (GALVÃO et al., 2013) utilizou a variável complexa  $G(j\omega)$  da rede e a aproximação de ordem fracionária  $G_{frac}(j\omega)$  ao longo de uma determinada faixa de frequências  $\omega$ . Nesta identificação, serão estabelecidos os seguintes critérios para a melhor eficiência do método proposto:

- No procedimento de otimização que envolve a determinação dos expoentes da FT, será adotada a seguinte particularização feita em (GALVÃO et al., 2013):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1, \dots, \beta_{m-1} = (m-1), \beta_m = \beta \\ \alpha_1 &= 1, \dots, \alpha_{n-1} = (n-1), \alpha_n = \alpha \end{aligned} \quad (142)$$

sendo que  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $\beta \in \mathbb{R}^+$  serão os únicos expoentes com valores reais a serem determinados;

- Também será considerado o mesmo expoente fracionário para o numerador e denominador, ou seja  $\beta = \alpha$ ;
- O valor de  $\sigma_1$  será ajustado para coincidir com o tempo de retardo da função exponencial  $e^{-\sigma_1 t}$  e a resposta ao degrau  $y(t)$ . Neste contexto, o tempo de retardo  $T_r$  é definido como sendo o tempo necessário para uma função chegar no ponto médio entre os seus valores inicial e final, isto é,  $y(T_r) = [y(\infty) + y(0^+)]/2$ . Portanto,  $\sigma_1$  pode ser calculado como  $\sigma_1 = (\ln 2)/T_r$ .

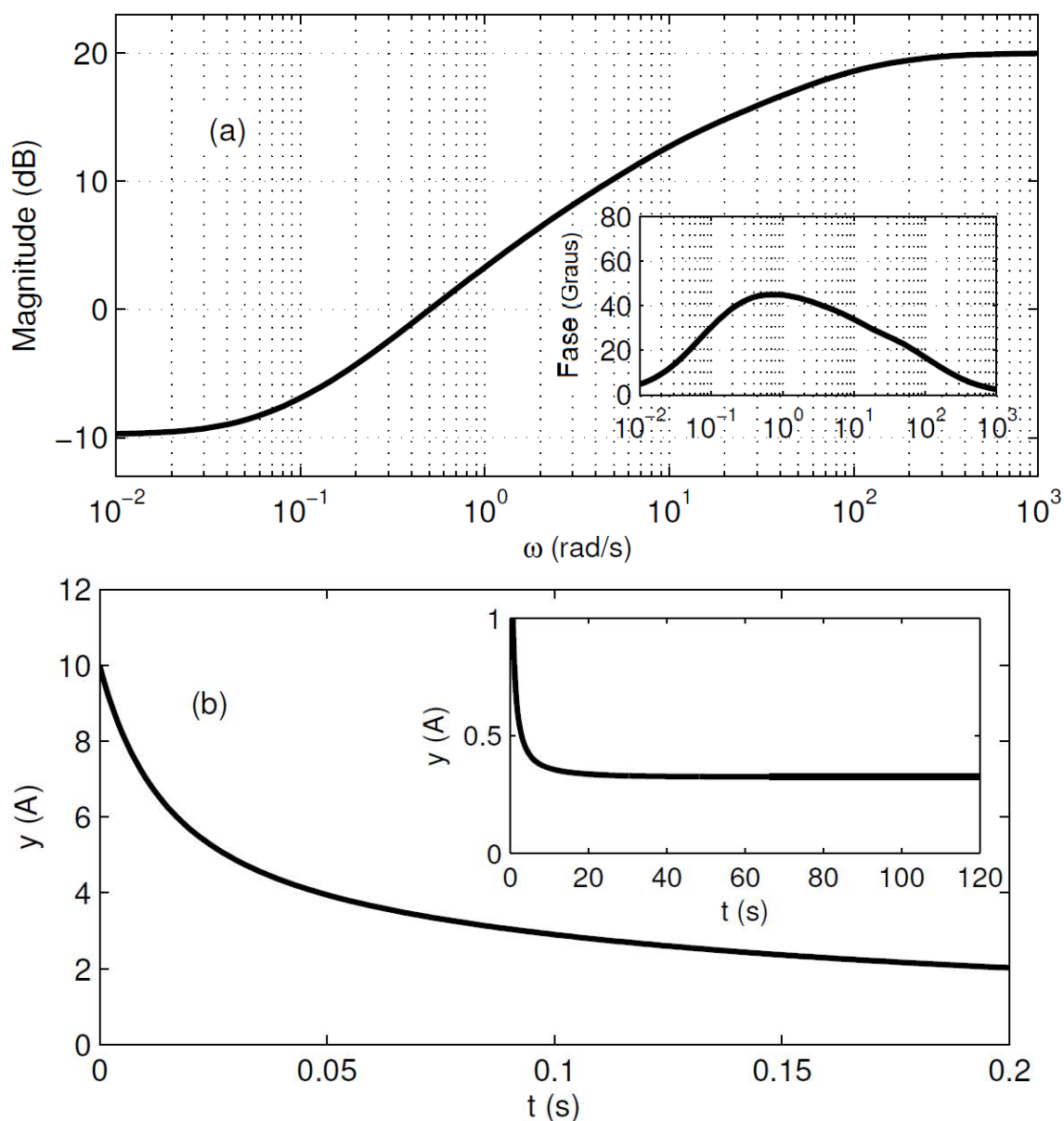
Adotados estes critérios, os coeficientes  $b_0, b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n$  e os expoentes fracionários  $\alpha, \beta$  foram ajustados de forma a minimizar a seguinte função custo:

$$J = \sum_{k=1}^N w_k |G(j\omega_k) - G_{frac}(j\omega_k)|^2, \quad (143)$$

sendo que  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  são as frequências de interesse escolhidas pelo projeto e os pesos  $w_1, w_2, \dots, w_N > 0$  são dependentes da frequência. O algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) foi empregado para a minimização  $J$  em relação aos coeficientes e expoentes fracionários. Como resultado, uma função de transferência  $G_{frac}(s)$ , com  $n = 2$ , envolvendo apenas sete parâmetros ( $b_0, b_1, b_2, a_1, a_2, \beta, \alpha$ ), foi suficiente para proporcionar uma boa aproximação da admissão sobre uma ampla gama de frequências. A seguir, os resultados obtidos no presente trabalho serão comparados com os relatados em (GALVÃO et al., 2013). Para este efeito, a mesma rede será empregada, com parâmetros  $R_S = 0,1 \Omega$ ,  $R = 1 \Omega$ ,  $C = 0,5 F$ ,  $N_Z = 3$ ,  $N_X = N_Y = 5$  e  $f_C = 0,5$ . Finalmente para a execução do método proposto os pares iniciais  $(\alpha, \rho)$  utilizados na otimização foram selecionados a partir de um grid formado pela variação de  $\alpha$  de 0,1 até 2,0 e  $\rho$  de 0,1 to 0,9, ambos com período de amostragem 0,1 e com intervalo de tempo de

0 – 80s e período de amostragem  $T = 0,001s$ . As Figuras 40(a) e 40(b) apresentam a admitância e a resposta ao degrau unitário da rede RC em questão, incluindo a resistência da fonte  $R_S$ . Como pode ser visto na Figura 40(a), a admitância converge para  $-10$  dB em baixas frequências, o que equivale a uma resistência de  $3,16\Omega$ . Este valor corresponde à associação em série de  $R_S$  com a resistência equivalente de rede RC, uma vez que os capacitores se comportam como circuitos abertos em baixas frequências. Como resultado, o valor de estado estacionário da corrente de entrada, seguida de uma entrada degrau 1 V é igual a  $V/3,16\Omega = 0,32$  A, que é consistente com o valor limite da curva mostrada na inserção da Figura 40(b).

Figura 40 - (a) Admitância e (b) Resposta a uma entrada degrau da rede RC utilizada neste estudo de caso.



Fonte: O próprio autor

É mostrado também que na Figura 40(a), que a admitância converge a 20 dB em frequências altas, o que pode ser atribuído à presença de um caminho de capacitores entre os terminais de rede. Com efeito, uma vez que os capacitores se comportam como circuitos em curto em altas frequências, a admitância geral se torna  $20\log_{10}(1/R_S) = 20\log_{10}(1/0,1) = 20$  dB. Esta é também a razão pela qual a corrente de entrada atinge um valor inicial de 10 A na Figura 40(b). Os capacitores impõem que a voltagem através da rede permaneça igual a zero imediatamente após a aplicação de uma entrada degrau de 1 V e assim, a corrente inicial é igual a  $1V, R_S = 1V/0,1 \Omega = 10A$ .

O método de identificação proposto foi inicialmente executado com uma FT de ordem fracionária da seguinte forma:

$$G_{frac}^{n=1}(s) = \frac{b_0 + b_1 s^\alpha}{1 + a_1 s^\alpha}, \quad (144)$$

que é um caso particular de (141), no qual o mesmo expoente fracionário  $\alpha$  é utilizado para o numerador e o denominador. Os pares iniciais  $(\alpha, \rho)$  utilizados na otimização foram selecionados a partir de um grid formado pela variação de  $\alpha$  de 0,1 até 2,0 e  $\rho$  de 0,1 to 0,9, ambos com período de amostragem igual a 0,1.

Para efeitos de comparação, as seguintes funções de transferência de ordem inteira e fracionária também foram identificadas:

$$G_{int}^{n=1}(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{1 + a_1 s}, \quad G_{int}^{n=2}(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2}. \quad (145)$$

Neste caso, a função custo, (138) torna-se uma função de um único parâmetro,  $\rho$ . Este parâmetro foi otimizado usando valores iniciais variando de 0,1 até 0,9, com período de amostragem igual a 0,1.

Em todos os casos, a identificação foi baseada na resposta ao degrau unitário da rede tridimensional RC, com intervalo de tempo de 0 – 80s e período de amostragem  $T = 0,001s$ .

A Tabela 15 apresenta as FT's de ordem inteira e de ordem fracionária determinadas, juntamente com os resultados relatados em (GALVÃO et al., 2013), que foram obtidos através da minimização da função custo (143) para frequências  $\omega$  variando de  $10^{-2}$  a  $10^3$  rad / s. (a) Método proposto (ordem inteira), (b) Método proposto (ordem fracionária), (c) Resultados obtidos em (GALVÃO et al., 2013) (ordem fracionária).

Na Figura 41 são comparadas as respostas a uma entrada degrau, dos modelos de ordem inteira e de ordem fracionária obtidos com o método de identificação proposto. Como pode ser visto, os modelos de ordem fracionária proporcionam uma correspondência muito melhor com a resposta a uma entrada degrau da rede real. Para  $n = 2$ , a resposta do modelo de ordem fracionária é quase indistinguível daquela obtida com a rede tridimensional a ser identificada.

Tabela 15 - Resumo dos resultados

	$n = 1$	$n = 2$
(a)	$\frac{1,449s + 0,358}{0,229s + 1}$	$\frac{0,875s^2 + 2,73s + 0,339}{0,116s^2 + 1,614s + 1}$
(b)	$\frac{1,348s^{0,682} + 0,287}{0,145s^{0,682} + 1}$	$\frac{5,311s + 0,792s^{0,439} + 0,333}{0,481s + 2,994s^{0,439} + 1}$
(c)	$\frac{1,395s^{0,698} + 0,281}{0,181s^{0,651} + 1}$	$\frac{0,067s + 3,015s^{0,852} + 0,346}{0,088s + 1,288s^{0,472} + 1}$

Figura 41 - Resultados a uma resposta ao degrau com o método proposto: Modelos de ordem inteira e fracionária.

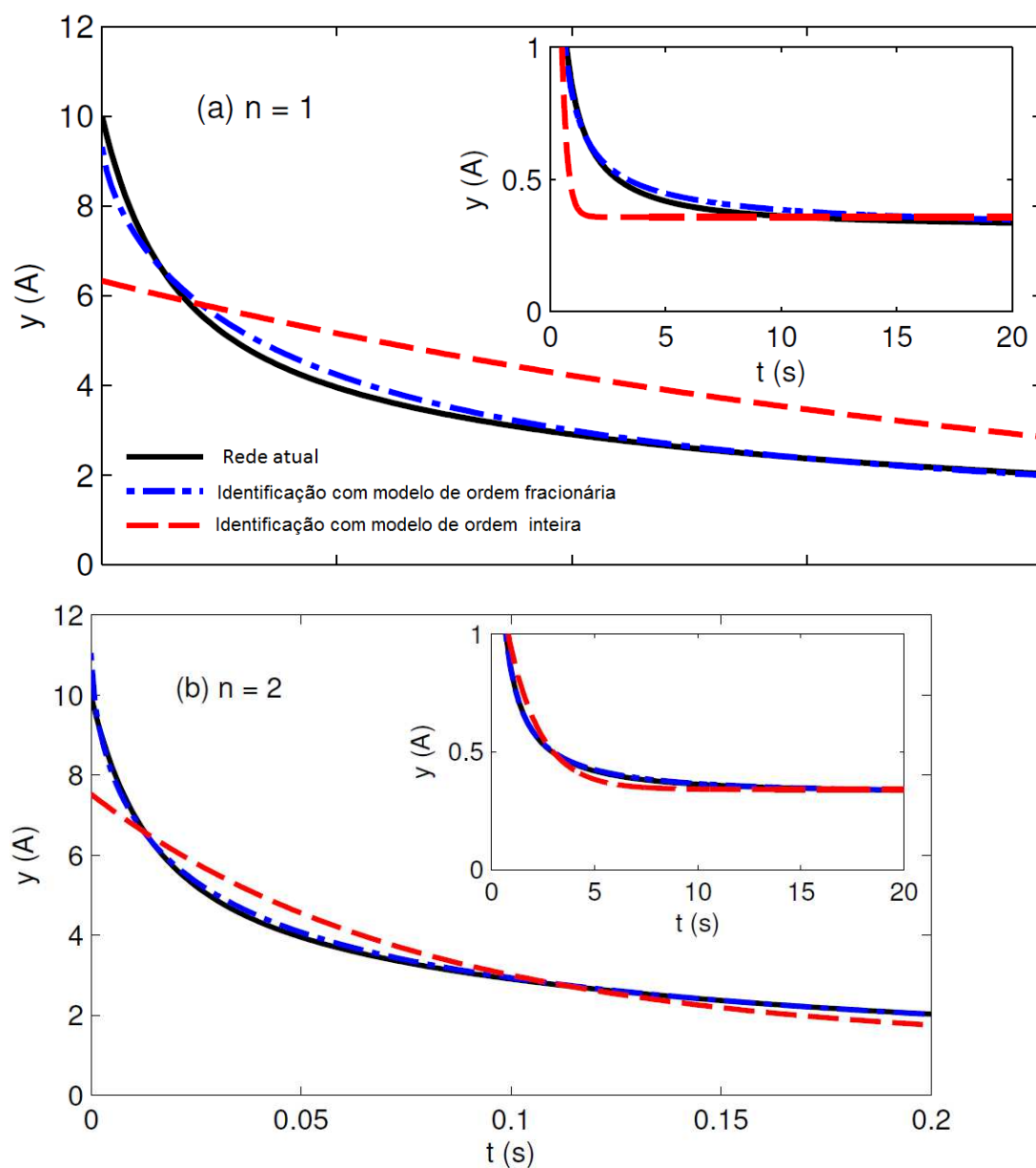
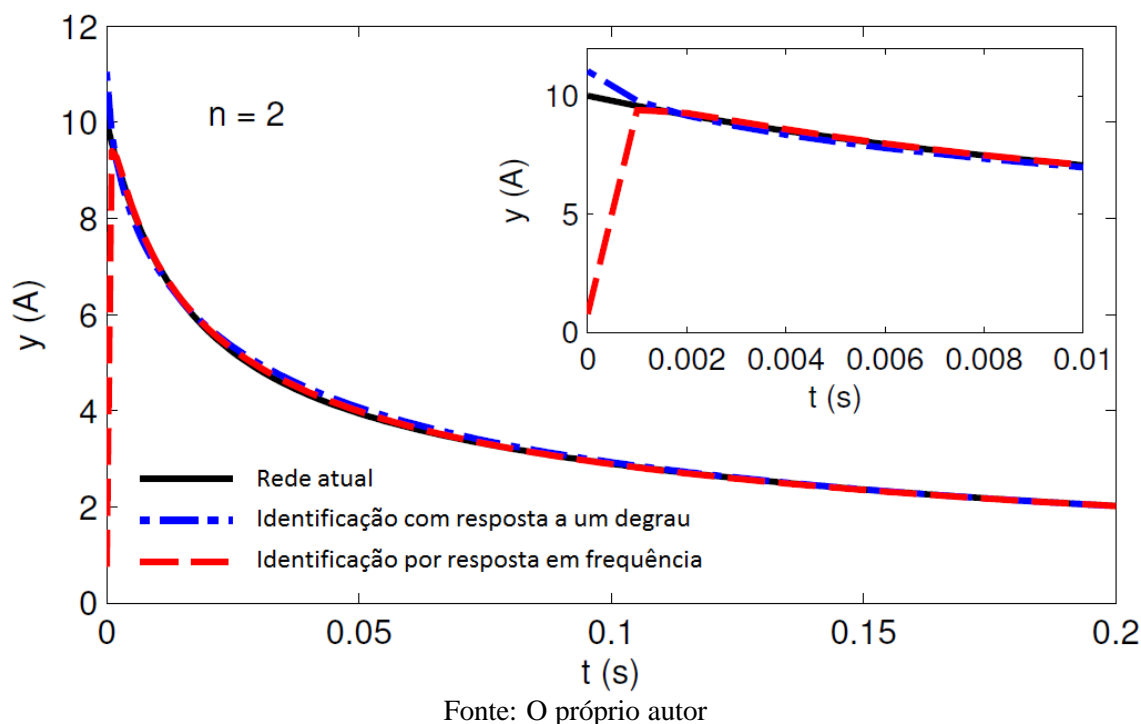


Figura 42 - Resultados da resposta ao degrau (Modelo de ordem fracionária com  $n = 2$ ): Comparação entre o método de identificação proposto e o método relatado em (GALVÃO et al., 2013), ambos no domínio da frequência.



Na Figura 42 são comparadas as respostas a uma entrada degrau do modelo de ordem fracionária obtido no presente trabalho com o relatado em (GALVÃO et al., 2013), que são rotulados como identificação a resposta ao degrau e identificação a resposta em frequência, respectivamente. A comparação é restrita ao caso  $n = 2$ , pois a função de transferência obtida em (GALVÃO et al., 2013) para  $n = 1$  é imprópria (isto é, o termo dominante no numerador tem um expoente maior em comparação com o denominador), como pode ser visto na Tabela 15.

Assim, a resposta ao degrau correspondente não está bem definida nesse caso. Na verdade, a parametrização adotada em (GALVÃO et al., 2013) não impôs que os expoentes fracionários devem ser iguais no numerador e denominador. Desde a identificação foi destinado a conjugar a rede dentro de uma faixa de frequência limitada, não houve necessidade de impor um *a priori* relação entre esses expoentes. No que se refere a  $n = 2$ , caso representado na Figura 42, pode-se notar que ambos os modelos proporcionam uma boa correspondência de resposta da rede real.

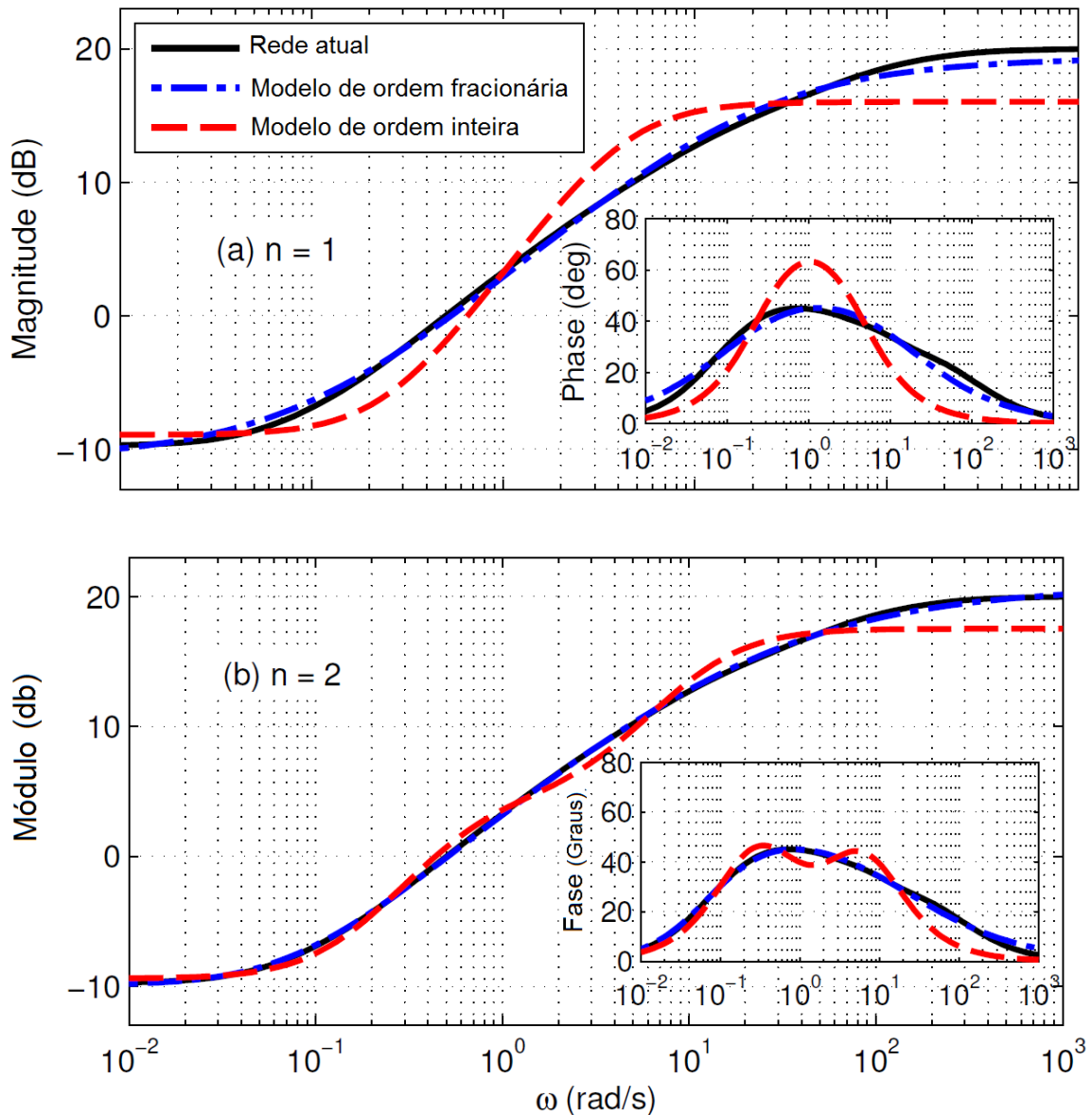
No entanto, o modelo relatado em (GALVÃO et al., 2013) produz uma discrepância maior na parte inicial da resposta transitória, tal como representada na inserção. Esta descoberta pode ser atribuída a uma incompatibilidade entre a admitância da rede e do modelo identificado em frequências mais altas do que aquelas empregadas na função de custo (143). Como o método proposto no presente trabalho está diretamente destinado a conjugar a resposta ao degrau, o

modelo resultante fornece um conjunto muito melhor dos valores iniciais da resposta.

A melhora significativa na identificação dinâmica da rede usando o modelo de ordem fracionária quando comparado com o modelo de ordem inteira é mostrada na Figura 43. Os resultados corroboram com os achados no domínio do tempo.

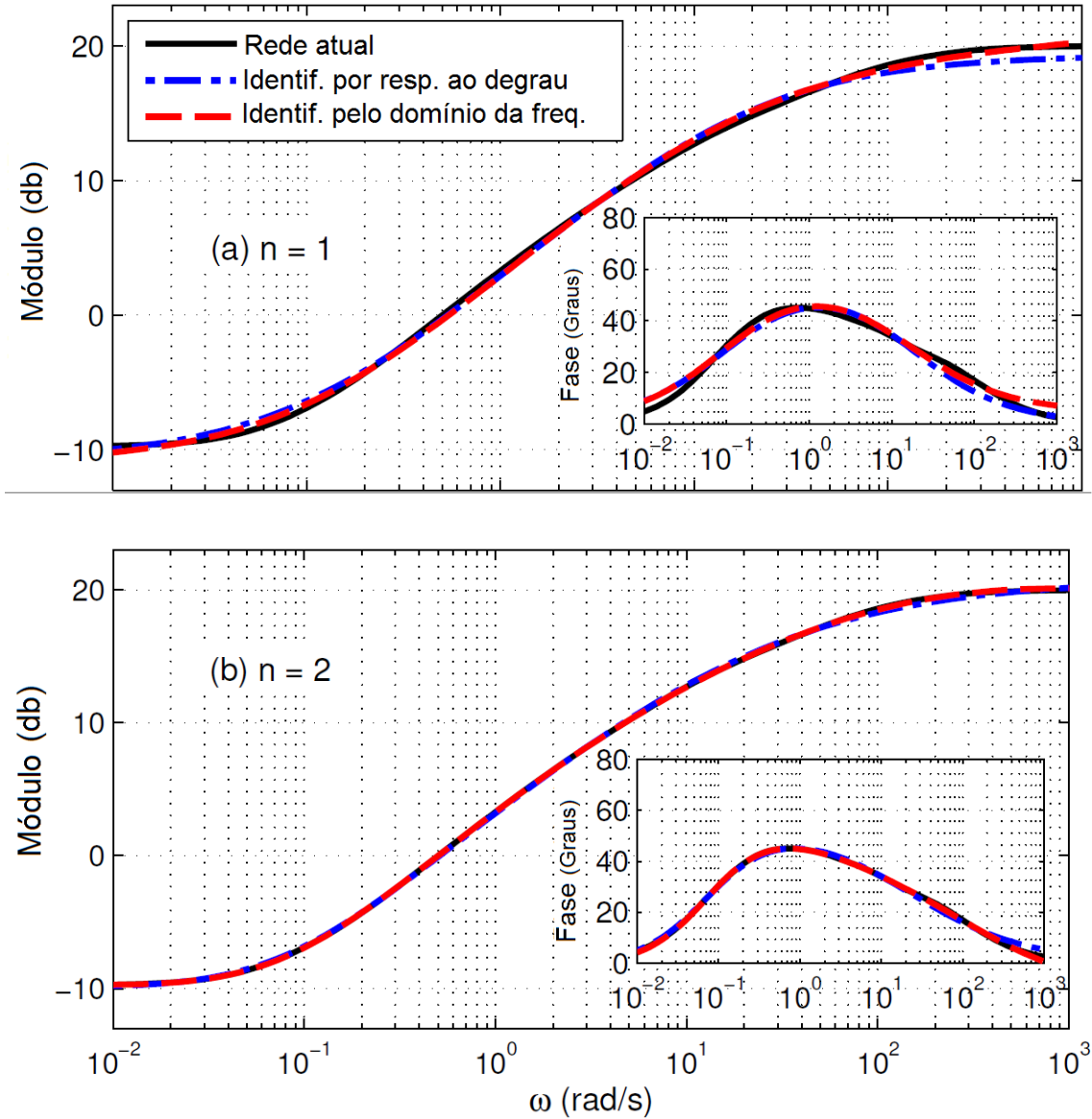
Finalmente, a Figura 44 compara as respostas em frequência dos modelos em frequência de ordem fracionária obtidos no presente trabalho com os relatados em (GALVÃO et al., 2013). Para  $n = 2$  os resultados mostram uma excelente concordância com a resposta em frequência da rede e são consistentes com aqueles relatados em (GALVÃO et al., 2013). O método proposto, adaptado para adequar a resposta a uma entrada degrau da rede tridimensional no domínio do tempo, também fornece uma excelente representação no domínio da frequência.

Figura 43 - Resultados obtidos pela resposta em frequência: Modelos de ordem inteira e fracionária.



Fonte: O próprio autor

Figura 44 - Resultados no domínio da frequência (Modelos de ordem fracionária): Comparação da resposta em frequência como o método proposto em (GALVÃO et al., 2013).



Fonte: O próprio autor

Conforme pode ser visto, o procedimento de identificação proposto no domínio do tempo em resposta a uma entrada degrau, tem uma formulação muito parcimoniosa, corresponde muito bem com a resposta da rede tridimensional *RC* a uma entrada degrau, é consistente com as formulações no domínio da frequência obtidas em (GALVÃO et al., 2013) e proporciona uma excelente resposta no domínio da frequência, em termos do módulo e da fase, correspondente à rede. Por último pode-se destacar que a sua implementação algorítmica é muito simples e utiliza apenas caixas de ferramentas computacionais já existentes.

## 7 CONCLUSÕES

### 7.1 CONCLUSÕES GERAIS

Nesta tese foram propostos novos métodos de identificação de sistemas lineares e invariantes no tempo que utilizam o CF como ferramenta principal. O mecanismo de funcionamento de todos eles baseia-se na resposta do sistema a uma entrada degrau.

Inicialmente, no Capítulo 3, foram propostos alguns aperfeiçoamentos para tornar o método desenvolvido em (SILVA, 2008) mais eficiente. Com a utilização do algoritmo do poliedro flexível (GILL; MURRAY; WRIGHT, 1981) implementado no *OptimizationToolboxMatlab*, a identificação realizada nos casos estudados apresentou um erro bem menor do que o obtido com o método original proposto em (SILVA, 2008). Outro fator que merece ser destacado foi a substituição do *Simulink* por programas desenvolvidos no *Matlab*, pois esta mudança tornou o processo mais automatizado e possibilitou um enorme ganho de tempo, propiciando a exploração de mais resultados.

Logo após, no Capítulo 4, foi proposto um método de identificação semelhante ao apresentado em (KOSAKA et al., 2005), sendo que a principal diferença entre ambos é que neste caso a ordem dos integradores é fracionária. Por este motivo é possível realizar a identificação com uma opção de escolha bem maior do que nos casos em que a ordem dos modelos é inteira. Este método apresentou um bom desempenho mas possui uma grande limitação pelo fato de identificar sistemas através  $FT's$  com expoentes múltiplos e ser muito sensível a ruídos.

No Capítulo 5, é proposto um novo método de identificação que se assemelha ao método elaborado em (SILVA, 2008). Este novo método pode ser considerado uma generalização de (SILVA, 2008) por possibilitar a escolha de trabalhar com integradores de ordem inteira ou fracionária, o que aumenta muito o número de modelos que podem ser escolhidos. Apesar de também estar limitado a trabalhar com modelos que apresentam expoentes múltiplos, possui duas grandes vantagens em relação ao anterior. A primeira é oferecer a opção de identificar sistemas instáveis devido ao fato de adotar procedimento que consiste na multiplicação, no domínio do tempo, da função de transferência instável por uma função exponencial do tipo  $e^{-\sigma t}$ ,  $\sigma > 0$  para levar este produto para zero, quando o tempo tende ao infinito, e assim possibilitar a identificação. A segunda é que este método de identificação, pelos resultados obtidos, é menos sensível aos ruídos de medição, provavelmente devido à multiplicação pela função exponencial citada, que possibilita a convergência de todos os sinais utilizados na identificação, para valores constantes finitos.



Por último, no Capítulo 6, um outro método de identificação foi proposto e mostrou-se mais completo do que os anteriores. Em seu mecanismo de funcionamento utiliza um conjunto de parâmetros  $\sigma_i$  que serão usados na multiplicação, no domínio do tempo, da  $FT$  por uma função exponencial do tipo  $e^{-\sigma_i t}$  e assim obter equações necessárias para a identificação. O referido método funciona com qualquer modelo de ordem fracionária ou inteira, apresentou pouca sensibilidade a ruídos e os resultados obtidos foram mais eficientes do que os conseguidos com os outros métodos desenvolvidos nesta tese.

### 7.1.1 Perspectivas futuras

Embora os métodos aqui desenvolvidos tenham-se mostrado eficientes, muitas possibilidades de pesquisas futuras podem ser realizadas e, com o intuito de buscar novos resultados, algumas linhas de trabalho podem ser traçadas e a seguir estão listadas:

- Estabelecer os mesmos resultados do Capítulo 5, com a substituição da função exponencial pela função Mittag-Leffler;
- Estabelecer os mesmos resultados do Capítulo 6, com a substituição da função exponencial pela função Mittag-Leffler;
- Estabelecer os mesmos resultados do Capítulo 4, Capítulo 5 e Capítulo 6, com a substituição da inversa da matriz  $A$  determinada pela matriz pseudo-inversa da  $A$ ;
- Estabelecer os mesmos resultados do Capítulo 5 e Capítulo 6, com a substituição da inversa da matriz  $A$  determinada pela matriz pseudo-inversa da  $A$  e a substituição da função exponencial pela função Mittag-Leffler;
- Estabelecer os mesmos resultados do Capítulo 6, com a modificação da maneira do cálculo do  $EQM$  não pela resposta ao degrau mas pela resposta em frequência.

### 7.1.2 Publicações

#### 7.1.2.1 ARTIGOS COMPLETOS PUBLICADOS EM ANAIS DE CONGRESSOS

- Jacyntho, L. A.; Teixeira, M. C. M.; Assunção, E.; Cardim, R.; Garcia, J. P. F.; Ribeiro, J. M. de S.; Lazarini, A. Z. N.; Galvão, R. K. H.. Sobre a identificação de funções de transferência de ordem fracionária utilizando uma entrada degrau. In: IEEE/IAS International Conference on Industry Applications, 2014, Juiz de Fora - MG. IEEE INDUSCON 2014, 2014. v.1.

- Jacyntho, L. A.; Teixeira, M. C. M.; Assunção, E.; Cardim, R.; Kozan, R. F.; Sanches, M. A. A.; Junqueira, M.. Identificação de Funções de Transferência de Ordem Fracionária Utilizando como Entrada um Degrau. In: Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - XI SBAI, 2013, Fortaleza CE. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - XI SBAI, 2013. v.1.

#### 7.1.2.2 ARTIGOS COMPLETOS ACEITOS EM PERIÓDICOS

- Jacyntho, L. A.; Teixeira, M. C. M.; Assunção, E.; Cardim, R.; Galvão, R. K. H.; HADJILOUCAS, S.. Identification of fractional-order transfer functions using a step excitation. IEEE Transactions on Circuits and Systems. II, Express Briefs, 2015.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução a identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais**. 2. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2000. 554 p.
- BARBOSA, R. S.; MACHADO, J. A. T.; SILVA, M. F. Time domain design of fractional differintegrators using least-squares. **Signal Process.**, Amsterdam, v. 86, p. 2567–2581, 2006.
- BOUAMRANE, R.; ALMOND, D. P. The emergent scaling phenomenon and the dielectric properties of random resistor-capacitor networks. **Journal of Physics: Condensed Matter**, New York, v. 15, p. 4089–4100, 2003.
- CARLSON, G.; HALIJAK, C. Approximation of fractional capacitors  $(1/s)^{1/n}$  by a regular Newton process. **IEEE Trans. Circuit Theory**, New York, v. 11, p. 210–213, June 1964.
- CHEN, D.; CHEN, Y. Q.; XUE, D. Digital fractional order savitzky-golay differentiator. **IEEE Trans. Circuits and Systems II: Express Briefs**, New York, v. 58, p. 758–762, Nov. 2011.
- CHEN, L.; CHAI, Y.; WU, R.; YANG, J. Stability and stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems with caputo derivative. **IEEE Trans. Circuits and Systems II: Express Briefs**, New York, v. 59, p. 602–606, Sept. 2012.
- CHEN, Y. Q.; PETRAS, I.; XUE, D. Fractional order control - A tutorial. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 9., St. Louis. **Proceedings of the...** St. Louis, 2009. p. 1397–1411. Acesso em: 12 mar. 2014. Disponível em: <<http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/acc09/data/papers/1371.pdf>>.
- DAM, H. H. Variable fractional delay FIR filter design with a bicriteria and coefficient relationship. **IEEE Trans. Circuits and Systems II: Express Briefs**, New York, v. 61, p. 36–40, 2014.
- DEEPYAMAN, M.; MITHUN, C.; AMIT, K. A novel approach for complete identification of dynamic fractional order systems using stochastic optimization algorithms and fractional calculus. In: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING, 5., Dahka. **Proceedings of the...** Dahka, 2009. p. 867–872. Acesso em: 5 jun. 2014. Disponível em: <<http://www.cse.wustl.edu>>.
- DOTCAK, L.; KOSTIAL, I. Investigation of the properties of fractional-order dynamical systems. In: PROCEEDINGS OF THE 11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON PROCESS CONTROL AND SIMULATION. **Proceedings of the...** [S.l.]: Kosice-Zlata Idka, 1994. p. 58–66.
- ENGHETA, N. Fractional paradigm in electromagnetic theory. In: WERNER, D. H.; MITTRA, R. (Ed.). **Frontiers in Electromagnetics**. New York:

- IEEE Press, 2000. p. 867–872. Acesso em: 5 jun. 2014. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/ebooks/bookPdfWithBanner.jsp?fileName=5265437.pdf>>.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; E.NAEINI, A. **Feedback Control of Dynamic Systems**. 5. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2006. 910 p.
- Galvão, R. K. H.; KIENITZ, K. H.; HADJILOUCAS, S.; WALKER, G. C.; BOWEN, J. W.; SOARES, S. F. C.; Araújo, M. C. U. Multivariate analysis of random three-dimensional RC networks in the time and frequency domains. **IEEE Trans. Dielectrics and Electrical Insulation**, Piscataway, v. 20, p. 995–1008, 2013.
- GALVÃO, R. K. H.; HADJILOUCAS, S.; KIENITZ, K. H.; PAIVA, H. M.; AFONSO, R. J. M. Fractional order modeling of large three-dimensional RC networks. **IEEE Trans. Circuits and Systems - I: Regular Papers**, New York, v. 60, p. 624–637, 2013.
- GALVÃO, R. K. H.; HADJILOUCAS, S.; KIENITZ, K. H.; PAIVA, H. M.; AFONSO, R. J. M. Fractional order modeling of large three-dimensional rc networks. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, Piscataway, v. 60, p. 624–637, 2013.
- GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. **Practical Optimization**. New York: Academic Press, 1981. 401 p.
- HOHENWARTER, M. *Geogebra*. [S.l.], 2001. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 05 Mar. 2015.
- HOUGEN, J. O. **Measurements and Control Applications for Practicing Engineers**. Boston: Cahnners Books, 1990. 339 p.
- HUA, C.; LIU, D.; GUAN, X. Necessary and sufficient stability criteria for a class of fractional-order delayed systems. **IEEE Trans. Circuits and Systems II: Express Briefs**, New York, v. 61, p. 59–63, 2014.
- JESUS, I. M. d. S. **Sistemas dinâmicos de ordem fraccionária**. Tese (Doutorado) — Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Porto, 2007.
- JOHANSSON, H. Fractional-delay and supersymmetric Mth-band linear-phase FIR filters utilizing partially symmetric and antisymmetric impulse responses. **IEEE Transactions Circuits and Systems II: Express Briefs**, New York, v. 59, p. 366–370, 2012.
- KOSAKA, M.; UDA, H.; BAMBA, E.; SHIBATA, H. Dynamic system identification using a step input. **Journal of low frequency noyse vibration and active control**, Essex, v. 24, n. 2, p. 125 – 134, 2005.
- KOZAN, R. F. **Controle de posição da perna de pessoas hípidas utilizando um controlador PID**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012. Acesso em: 07 fev. 2014. Disponível em: <[http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/87042/kozan\\$\\_\\$rf\\$\\_\\$me\\$\\_\\$ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/87042/kozan$_$rf$_$me$_$ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y)>.
- LANDAU, I. D. **System identification and control design using Pim + software cilffs**. São Paulo: Prentice Hall, 1990. 253 p.

LAW, L. A. F.; SHIELDS, R. K. Predicting human chronically paralyzed muscle force. **Journal of Applied Physiology**, Bethesda, v. 100, n. 3, p. 1027–1036, 2006.

LI, C. P.; DENG, W. H.; XU, D. Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order. **Physica A Statistical Mechanics and its Applications**, Amsterdam, v. 353, p. 61–72, 2005. Acesso em: 23 mai. 2014. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437105000555>>.

LJUNG, L. **System Identification**. New Jersey: Prentice-Hall, 1999. 607 p.

MAGALHÃES, L. T. **Integrais múltiplos**. Lisboa: Texto, 1993. 122 p.

MAIONE, G. Closed-form rational approximations of fractional, analog and digital differentiators/integrators. **IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems**, New York, v. 3, p. 322–329, 2013.

MCCULLEN, N. J.; ALMOND, D. P.; BUDD, C. J.; HUNT, G. W. The robustness of the emergent scaling property of random RC network models of complex materials. **Journal of Physics D: Applied Physics**, Bristol, v. 42, p. 64001.1–64001.8, 2009.

MILLER, D. A.; J., S. S. Insight into the fractional calculus via spreadsheets. **Spreadsheets in Education**, Queensland, v. 3, n. 2, 2009.

MILLER, K.; ROSS, B. **An introduction of the fractional calculus and fractional differential equations**. New York: John Wiley and Sons, 1993. 384 p.

NARANG, A.; SHAH, S. L.; CHEN, T. Continuous-time model identification of fractional-order models with time delays. **IET Control Theory and Applications**, Stevenage, v. 5, n. 9, p. 900–912, 2010.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. New York-London: Pearson, 2011. 809 p.

OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. **The fractional calculus**. 1. ed. New York - London: Academic Press, 1974. 256 p.

OUSTALOUP, A.; LEVRON, F.; MATHIEU, B.; NANOT, F. M. Frequency-band complex noninteger differentiator: Characterization and synthesis. **IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundamental Theory Applications**, New York, v. 47, p. 25–39, 2000.

PODLUBNY, I. **Fractional differential equations, some methods of their solution and some of their applications**. San Diego: Academic Press, 1999. 340 p.

PODLUBNY, I.; Petrás, I.; VINAGRE, B. M.; O'LEARY, P.; Dorcák, L. Analogue realizations of fractional-order controllers. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 29, p. 281–296, 2002.

RIBEIRO, J. M. S.; SILVA, E. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; GARCIA, J. P. F.; SOUZA, W. A.; BUZETTI, A. S. Construção, modelagem e controle, através de clp, de uma planta didática do sistema pêndulo invertido, com utilização de software scada. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING AND TECHNOLOGY EDUCATION INTERTECH 2014. **Proceedingsofthe...** Guimarães, Portugal, 2014. Acesso em: 21 mai. 2014. Disponível em: <<http://proceedings.copec.org.br/index.php/intertech/article/view/1818/1735>>.

SAMADI, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M. N. S. Results on maximally flat fractional delay systems. **IEEE Trans. Circuits Syst. I: Reg. Papers**, New York, v. 51, p. 2271–2286, 2004.

SILVA, D. S. **Identificação de funções de transferência utilizando como entrada um degrau**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2008. Acesso em: 21 mai. 2014. Disponível em: <[http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/87217/silva\\$\\_ds\\$\\_me\\$\\_ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/87217/silva$_ds$_me$_ilha.pdf?sequence=1&isAllowed=y)>.

TSENG, C. Design of fractional order digital FIR differentiators. **IEEE Signal Process. Lett.**, New York, v. 8, p. 77–79, 2001.

VALÉRIO, D. P. d. O. **Controlo robusto de ordem não inteira: síntese em frequência**. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA, Lisboa, 2001.

VINAGRE, B. M.; PODLUBNY, I.; HERNANDEZ, A.; FELIU, V. Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. **Journal Fractional Calculus Applied Analysis**, v. 4, p. 47–66, 2001.

## APÊNDICE A

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%% PROGRAMA PARA OTIMIZAR A VARIÁVEL SIGMA %%%%
%%%%%%%%CASO PARTICULAR PARA G(S)= b1s+b0/a2s^2+a1s+ao %%
%%%%%%%% AUTOR: Luiz Antonio Jacyntho%%%%%%%%
%%%%%%%% DATA:23/04/15 %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [J] = cost_sigma(theta) % comando para minimizar si (sigma);
clear all;
clc;
load dados;%Arquivo que contem o sinal Yt e o tempo de simulação t;
si = theta(1);%Definindo a variável sigma que será otimizada;
E = exp(-si*t);%Função e-(si*t) que multiplicará no tempo o sinal G(s)/s;
Y = Yt.*E';%Produto no tempo do sinal G(s)/s por e-(si*t);
Ysi = tf([1 si],[1 0]);% Sistema s+si/s para a obtenção de G(s+si)/s;
[Y1] = lsim(Y,Ysi,t); % Obtenção de Y1(s)=G(s+si)/s;
yf1 = Y1(length(Y1));% Obtenção de $y_1(\infty)$;
%%%%%%%%Primeira iteração%%%%%%%%
W1=Y1-yf1;%Obtenção de W1(s);
Gint=tf([0 1],[1 0]);%Definindo o integrador 1/s;
[Y2] = lsim(Gint,W1,t);%Integral para obter Y2(s);
yf2=Y2(length(Y2));%Valor de regime da 1a. iteração;
%%%%%%%%Segunda iteração%%%%%%%%
W2=Y2-yf2;%Obtenção de W2(s);
[Y3]=lsim(Gint,W2,t);%Integral para obter Y3(s);
yf3=Y3(length(Y3));%Valor de regime da 2a. iteração;
%%%%%%%%Terceira iteração%%%%%%%%
W3=Y3-yf3;%Obtenção de W3(s);
[Y4]=lsim(Gint,W3,t);%Integral para obter Y4(s);
yf4=Y4(length(Y4));%Valor de regime da 3a. iteração;
%%%%%%%%Determinação de G(s+si)%%%%%%%%
b=[yf2;yf3;yf4];
A=[1 -yf1 0; 0 -yf2 -yf1;0 -yf3 -yf2];
x= A\b;%Obtenção dos coeficientes de G(s+si);

```

```
g=tf([x(1) yf1],[x(3) x(2) a]);% Obtenção da função de transferência G(s+si);
%%Determinação de G(s)%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
b0=yf1 -x(1)*a;%Obtenção de b0;
a1=x(2)-2*x(3)*a;%Obtenção de a1;
a0=x(3)*a*a -x(2)*a +1;%Obtenção de a0;
gor=tf([x(1) b0],[x(3) a1 a0]);%Obtenção da função de transferência G(S);
G = step(gor,t);
Z = (G - Yt)'*(G - Yt)/12001;
J= sqrt(Z);%Obtenção do EQM de G(s) em relação ao sinal original;
```