

**Marcos André de Jesus Delgado**

# **Controle de Ondas Bidimensionais**





1910001276



Universidade Estadual Paulista  
Câmpus de São José do Rio Preto  
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

## Controle de Ondas Bidimensionais

Dedicatória

Marcos André de Jesus Delgado

Orientador  
Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática/IBILCE/UNESP  
como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto - SP  
Fevereiro - 2004



L.1.276/04



## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo.

Agradeço ao Professor Doutor Waldemar Donizete Bastos pela paciência, amizade e aprendizado.

Agradeço todos os demais Professores do IBILCE-UNESP, que me ajudaram a subir mais um degrau.

Agradeço ao Professor Toninho e a Professora Gorete pelos conselhos e aprendizado.

Agradeço à FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, que possibilitou a realização deste trabalho.

Agradeço todos os que de alguma forma contribuíram.

## Resumo

Neste trabalho estudamos controlabilidade na fronteira para a equação da onda homogênea num retângulo. Utilizamos o método de Russell de controlabilidade via estabilidade. Os dados iniciais estão em  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , o controle obtido está em  $L^2(\partial\Omega \times [0, T])$  e é do tipo Dirichlet.

**Palavras Chave:** Equação da Onda, Controlabilidade Exata na Fronteira

## Sumário

### Introdução

### 1 Preliminares

#### 1.1 Notação

#### 1.2 Equações Lineares de Segunda Ordem

#### 1.3 Energia

## Abstract

In this work we study exact boundary controllability for the homogeneous wave equation in a rectangle. We use Russell's method of controllability via stabilizability. The initial state is in  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , the control is of Dirichlet type and is in  $L^2(\partial\Omega \times [0, T])$ .

**Keywords:** Wave Equation, Exact boundary Controllability

#### 2.1 O Problema de Controle Exato

#### 2.2 O Método de Russell

#### 2.3 Solução com Energia Finita e Estabilidade

#### 2.4 Propriedades da Solução com Energia Finita

### 3 Decaimento Local de Energia

#### 3.1 Introdução

#### 3.2 O Decaimento Local de Energia para Soluções Clássicas

#### 3.3 Decaimento Local de Energia para Soluções com Energia Finita

### 4 O Problema de Controle

#### 4.1 Introdução

# Sumário

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                         | <b>3</b>  |
| <b>1 Preliminares</b>                                                     | <b>5</b>  |
| 1.1 Introdução . . . . .                                                  | 5         |
| 1.2 Transformações Lineares e o Teorema de<br>Neumann . . . . .           | 5         |
| 1.3 Distribuições e os Espaços $L^p$ 's. . . . .                          | 6         |
| 1.4 Espaços de Sobolev . . . . .                                          | 9         |
| 1.5 Extensões e Traços em Espaços de Sobolev . . . . .                    | 12        |
| <b>2 Estudo da Equação da Onda no Plano</b>                               | <b>17</b> |
| 2.1 Introdução . . . . .                                                  | 17        |
| 2.2 O Problema de Cauchy Clássico . . . . .                               | 17        |
| 2.3 Conservação de Energia . . . . .                                      | 20        |
| 2.4 Solução com Energia Finita: Existência e Unicidade . . . . .          | 23        |
| 2.5 Propriedades da Solução com Energia Finita . . . . .                  | 29        |
| <b>3 Decaimento Local de Energia</b>                                      | <b>38</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .                                                  | 38        |
| 3.2 O Decaimento Local de Energia para Soluções Clássicas. . . . .        | 38        |
| 3.3 Decaimento Local de Energia para Soluções com Energia Finita. . . . . | 45        |
| <b>4 O Problema de Controle</b>                                           | <b>49</b> |
| 4.1 Introdução . . . . .                                                  | 49        |



|                                      |                                                   |    |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------|----|
| 4.2                                  | O Problema de Valor Inicial e Fronteira . . . . . | 49 |
| 4.3                                  | O Teorema Principal . . . . .                     | 52 |
| 4.4                                  | Considerações Finais . . . . .                    | 58 |
| Referências Bibliográficas . . . . . |                                                   | 60 |

## Introdução

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto limitado, aberto e conexo com fronteira denotada por  $\partial\Omega$ . Seja  $\square$  o D'Alembertiano, isto é,

$$\square w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$$

onde  $w = w(x, t)$  com  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $t \in \mathbb{R}$ .

Sejam  $u$  e  $v$  funções definidas em  $\Omega$ . O problema de controle exato na fronteira para a equação de onda no domínio  $\Omega$  consiste em encontrar um instante  $T > 0$  e uma função controle  $h$ , definida em  $\partial\Omega \times [0, T]$ , tais que a solução  $w$  do problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \square w &= 0, & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ w(x, 0) &= u(x), & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) &= v(x), & \text{em } \Omega \\ w(x, t) &= h(x, t), & \text{em } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

satisfaça a condição final

$$w(x, T) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, T) = 0$$

para todo  $x \in \Omega$ .

Podemos interpretar  $\Omega$  como uma membrana que está vibrando e que no instante inicial  $t = 0$  tem sua posição  $u$  e sua velocidade  $v$  conhecidas. O problema consiste em encontrar um mecanismo, representado pela função  $h$ , que atue na fronteira da membrana durante o intervalo de tempo  $[0, T]$  fazendo a vibração desaparecer por completo no instante  $T$ .

No que segue denotaremos por  $H^m(\Omega)$  o espaço de Sobolev das funções de  $L^2(\Omega)$  com derivadas distribucionais até ordem  $m$  em  $L^2(\Omega)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , [1].

No trabalho de David L. Russell [11], o problema de controle acima foi resolvido para domínios com fronteira suave e dados iniciais  $u \in H^m(\Omega)$ ,  $v \in H^{m-1}(\Omega)$  com  $m \geq 2$ . Nesta dissertação nós usamos o método apresentado em [11] para



resolver o problema de controle num retângulo  $\Omega$ , com dados iniciais  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $v \in L^2(\Omega)$ . O caso em que  $\Omega$  é um polígono qualquer foi estudado por Pierre Grisvard em [7], onde foi assumido que uma parte da fronteira da membrana permanecia fixa.

O teorema principal desta dissertação está na seção 4.3 do capítulo 4. O ponto chave da sua demonstração reside numa estimativa de decaimento de energia da solução de um problema de Cauchy para a equação da onda. Essa estimativa é o objeto de estudo do capítulo 3. Lá obtemos uma estimativa pontual para a solução quando os dados iniciais são suaves e então derivamos a estimativa de decaimento de energia para o caso em que os dados iniciais estão em espaços de Sobolev. A restrição no formato de  $\Omega$  (retângulo) se deve aos teoremas de extensão e de traço que apresentamos no capítulo 1, onde os pré-requisitos para os demais capítulos são discutidos ([1], [2], [3], [5], [10], [12], [15], [16]).

Como o método apresentado em [11] baseia-se fortemente nas propriedades da solução do problema de Cauchy para a equação da onda decidimos dedicar todo o capítulo 2 ao estudo dessas propriedades ([5], [6], [8], [9], [10], [12], [13], [14]).

Por último ressaltamos que os resultados obtidos aqui podem ser estendidos à sistema de equações diferenciais parciais que podem ser transformados em sistemas de equações de ondas desacopladas. Um exemplo de sistema deste tipo é o sistema de Lamé da elastodinâmica clássica que pode ser visto em [4].



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estabelecer a notação e os principais resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes

### 1.2 Transformações Lineares e o Teorema de Neumann

Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Sejam  $\|\cdot\|_U$  e  $\|\cdot\|_V$  normas em  $U$  e  $V$  respectivamente. Uma transformação linear  $T : U \rightarrow V$  é limitada se e somente se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|Tu\|_V \leq C\|u\|_U,$$

para todo  $u \in U$ .

Prova-se sem dificuldade que  $T$  é limitada se e somente se  $T$  é contínua. Se  $T$  é limitada a norma de  $T$  é definida como

$$\|T\| = \inf\{C > 0; \|Tu\|_V \leq C\|u\|_U, u \in U\}$$

e prova-se ( veja [15], página 43) a seguinte igualdade

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\|_V = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U}. \quad (1.2.1)$$

Um espaço vetorial normado é chamado espaço de Banach se for um espaço completo. Se a norma for proveniente de algum produto interno então ele é chamado espaço de Hilbert.

Seja  $T : U \longrightarrow U$  uma transformação linear e  $n = 1, 2, \dots$ . Denotamos  $T^n$  à composição com  $n$  fatores  $T \circ T \circ \dots \circ T$ . Se  $T$  é limitado então  $T^n$  é limitado e vale

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n.$$

Seja  $I : U \longrightarrow U$  o operador identidade. O teorema abaixo, devido à C. Neumann [15], estabelece uma condição para a invertibilidade de  $I - T$ .

**Teorema 1.2.1.** *Sejam  $U$  um espaço de Banach e  $T : U \longrightarrow U$  uma transformação linear limitada com*

$$\|T\| < 1.$$

*Então  $I - T$  admite inversa e vale*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \quad T^0 = I.$$

**Demonstração:** Basta trocar  $I - T$  por  $T$  no teorema 2, página 69 de [15]. ■

### 1.3 Distribuições e os Espaços $L^p$ 's.

Seja  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais e  $n \in \mathbb{N}$  um natural não nulo. Uma  $n$ -upla de naturais

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

é um multi-índice.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e  $u$  uma função definida em  $\Omega$ . Dado um multi-índice  $\alpha$ , denotamos por  $\partial^\alpha u$  a derivada parcial

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  e  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Dada uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  denota-se  $\text{supp} u$  ao fecho na topologia de  $\mathbb{R}^n$ , do conjunto de pontos de  $\Omega$  onde  $u$  não se anula, isto é,

$$\text{supp} u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

O conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  é composto por todas as funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que são indefinidamente diferenciáveis e possuem suporte compacto em  $\Omega$ . Com as operações usuais de função,  $C_0^\infty(\Omega)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

Seja  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência em  $C_0^\infty(\Omega)$  e  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  uma função dada. Dizemos que  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  se forem satisfeitas as seguintes condições.

- (i) todas as  $\varphi_n$  possuem suportes contidos em um compacto fixo  $K$  de  $\Omega$
- (ii) para todo multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  a sequência  $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n=1}^\infty$  converge uniformemente em  $K$  para  $\partial^\alpha \varphi$ .

Uma distribuição em  $\Omega$  é uma transformação linear

$$T : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

contínua, isto é, se  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  então  $(T\varphi_n)_{n=1}^\infty$  converge para  $T\varphi$  em  $\mathbb{R}$ . O valor de uma distribuição  $T$  numa função  $\varphi$  será denotado por  $\langle T, \varphi \rangle$ .

O espaço de todas as distribuições sobre  $\Omega$  é denotado  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Neste espaço, diz-se que uma sequência  $(T_n)_{n=1}^\infty$  converge para uma distribuição  $T$  se  $(\langle T, \varphi_n \rangle)_{n=1}^\infty$  converge em  $\mathbb{R}$  para  $\langle T, \varphi \rangle$ , para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto mensurável à Lebesgue e  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $p \geq 1$ . Define-se o conjunto  $L^p(\Omega)$  como o conjunto das funções mensuráveis (classes de equivalência) à Lebesgue em  $\Omega$ , tais que  $|f|^p$  tem integral de Lebesgue em  $\Omega$  finita. Munidos das operações usuais com função, os conjuntos  $L^p(\Omega)$  são espaços de Banach com a norma definida por

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

( Ver [1], [2], [3], [5], [12], [15], [16] ).

O espaço  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Seja  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável. Dizemos que  $f$  é localmente integrável em  $\Omega$  se

$$\int_K |f(x)|dx < \infty$$

para todo compacto  $K$  de  $\Omega$ . O espaço dessas funções é denotado por  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

Para todo  $p \geq 1$  vale

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$

Cada função  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  define uma distribuição  $T_f$  em  $\Omega$  por

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A proposição seguinte afirma que a correspondência

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \longmapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

é injetiva.

**Proposição 1.3.1.** (*Du Bois Raymond*) Dado  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  então

$$f = 0 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

**Demonstração:** Veja [10], página 8, ou [1] página 59. ■

A proposição acima permite identificar  $L^p(\Omega)$  com um subespaço de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

A partir deste ponto usaremos a mesma notação para  $f \in L^p(\Omega)$  e para a distribuição  $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , isto é,  $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$  para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Uma consequência da desigualdade de Holder é a seguinte: se  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset L^p(\Omega)$  converge para  $f$  em  $L^p(\Omega)$  então a convergência ocorrerá também em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . O teorema abaixo, conhecido como teorema da continuidade em  $L^p$ , será de grande utilidade no próximo capítulo.

**Teorema 1.3.2.** *Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , então*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0,$$

onde  $|h|$  denota a norma euclidiana de  $h \in \mathbb{R}^n$ .

**Demonstração:** Veja [16], página 134. ■

Terminamos esta seção observando que  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$  (veja [1], página 31) e destacando a proposição abaixo, que será muito útil para fazer localizações.

**Proposição 1.3.3.** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto e  $V$  um aberto tal que  $K \subset V$ . Então existe uma função  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que*

$$\begin{aligned} \theta &\equiv 1 && \text{em } K \\ 0 \leq \theta &\leq 1 && \text{em } \mathbb{R}^n \\ \text{supp } \theta &\subset V \end{aligned}$$

**Demonstração:** Veja [6], página 19. ■

## 1.4 Espaços de Sobolev

Seja  $T$  uma distribuição num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  um multi-índice. Facilmente verifica-se que

$$C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \longmapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

define uma distribuição em  $\Omega$ . Tal distribuição é a  $\alpha$ -ésima derivada de  $T$ , denotada por  $\partial^\alpha T$ . Assim, a distribuição  $T$  tem derivada  $\partial^\alpha T$  definida por

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Se  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  então, para todo  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , a derivada usual  $\partial^\alpha f$  coincide com a respectiva derivada distribucional de  $f$ , isto é:

$$T_{\partial^\alpha f} = \partial^\alpha T_f.$$

Isto é consequência de integração por partes.

Vejam agora um exemplo motivador da próxima definição. Sejam  $\Omega = ]-1, 1[ \subset \mathbb{R}$  e  $H \in L^2(\Omega)$  a função definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in ]-1, 0[ \\ 1 & \text{se } x \in [0, 1[. \end{cases}$$

A função  $H$  está em  $L^2(\Omega)$ , mas sua derivada distribucional  $H'$  não está em  $L^2(\Omega)$ .

De fato:

$$\langle H', \varphi \rangle = - \int_0^1 \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

A distribuição  $\delta$  definida por

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

não provém de função localmente integrável. Logo  $H' \notin L^2(\Omega)$ .

**Definição 1.4.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e  $m$  um inteiro positivo. O espaço de Sobolev  $H^m(\Omega)$  é definido por*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

$$H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

Munido das operações usuais com funções o espaço  $H^m(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx,$$

( veja [1], página 45 ). A norma de  $H^m(\Omega)$  é denotada  $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ .

Seja

$$S = \{\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \partial^\alpha \phi \text{ é contínua para todo } |\alpha| \leq m \text{ e } \|\phi\|_{H^m(\Omega)} < \infty\}.$$

O teorema de Meyers e Serrin ( veja [1], página 52 ) afirma que  $S$  é denso em  $H^m(\Omega)$ .

Se  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$  o conjunto  $C_0^\infty(\Omega)$  não é denso em  $H^m(\Omega)$ . Neste caso define o subespaço  $H_0^m(\Omega)$  de  $H^m(\Omega)$  como sendo o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $H^m(\Omega)$ , isto é,

$$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)}.$$

Se  $\Omega = \mathbb{R}^n$  tem-se  $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$ . Em geral, se  $u \in H^m(\Omega)$  tem suporte compacto em  $\Omega$  então  $u \in H_0^m(\Omega)$ .

Seja  $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ . Para cada  $u \in H^1(\Omega)$  podemos definir  $\theta u$  por

$$(\theta u)(x) = \theta(x)u(x)$$

em todo  $x$  onde  $u$  estiver definida. A função  $\theta u$ , assim definida, está em  $L^2(\Omega)$  e portanto define uma distribuição em  $\Omega$ . Sua derivada distribucional é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \theta u = \frac{\partial \theta}{\partial x_j} u + \theta \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

onde  $\frac{\partial u}{\partial x_j}$  é a derivada distribucional de  $u$  em relação a  $x_j$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial x_j}$  a derivada usual de  $\theta$  ( Veja [15], página 51). Segue então

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (\theta u) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_j \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.4.2)$$

onde  $C_j$  depende apenas de  $\theta$ . Como a última desigualdade vale para todo

$j = 1, 2, \dots, n$  concluímos que  $\theta u \in H^1(\Omega)$ .

Como  $\theta$  se anula numa vizinhança da fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , o mesmo ocorre com  $\theta u$  e suas derivadas. Assim  $\theta u \in H_0^1(\Omega)$ .

**Proposição 1.4.1.** *Dado  $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ , seja  $\theta$  o operador*

$$\begin{aligned} \theta : H^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto \theta(u) = \theta u. \end{aligned}$$

*Então  $\theta$  é linear e limitada.*

**Demonstração:** Que  $\theta$  é bem definida e linear está claro da discussão acima. A limitação segue das desigualdades 1.4.2 juntamente com

$$\|\theta u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

que verifica-se facilmente. ■

## 1.5 Extensões e Traços em Espaços de Sobolev

Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $F(\Omega)$  um espaço vetorial normado cujos elementos são funções reais definidas em  $\Omega$ . Um operador extensão para  $F(\Omega)$  é uma transformação linear limitada

$$E : F(\Omega) \longrightarrow F(\mathbb{R}^n)$$

tal que  $(Ef)|_\Omega = f$  para toda  $f \in F(\Omega)$ . A limitação é expressa pela desigualdade

$$\|Ef\|_{F(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{F(\Omega)},$$

para toda  $f \in F(\Omega)$  e alguma constante  $C > 0$ .

Um simples exemplo de operador extensão é aquele que estende as funções de  $L^p(\Omega)$  para  $\mathbb{R}^n$  como sendo nulas no complementar de  $\Omega$ . Neste caso

$$\|Ef\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

para toda  $f \in L^p(\Omega)$ .

**Lema 1.5.1.** *Seja  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo em  $\mathbb{R}^2$  e  $u \in H^1(\Omega)$  uma função. Seja  $u^*$  definida em  $\tilde{\Omega} = [a, b] \times [2c - d, d]$  por*

$$u^*(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } c < y < d \\ u(x, 2c - y) & \text{se } 2c - d < y < c \end{cases}$$

Então  $u^* \in H^1(\tilde{\Omega})$  e

$$\|u^*\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Demonstração:** Veja [3], Lema IX.2. ■

Observe que  $\tilde{\Omega}$  é obtido refletindo  $\Omega$  em torno do eixo  $y = c$ . O lema acima permite estender por reflexão, funções definidas em retângulos.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto qualquer. Usaremos a notação  $\Omega_\varepsilon$  para designar a vizinhança aberta de  $\Omega$  definida por

$$\Omega_\varepsilon = \Omega + B(0, \varepsilon)$$

onde  $B(0, \varepsilon)$  é a bola aberta de centro na origem e raio  $\varepsilon > 0$ .

O próximo teorema estabelece a existência de extensão para as funções de  $H^1(\Omega)$  com  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ .

**Teorema 1.5.2.** *Seja  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$  e  $\varepsilon > 0$ . Existe um operador extensão  $E$  para  $H^1(\Omega)$  tal que*

$$\text{supp} Eu \subset \Omega_\varepsilon$$

para toda  $u \in H^1(\Omega)$ .

**Demonstração:** Primeiro refletimos o retângulo em torno de  $y = c$  e usando o lema 1.5.1 estende-se funções de  $H^1(\Omega)$  para  $[a, b] \times [2c - d, d]$ . Usando o mesmo lema e reflexões consecutivas em torno dos demais lados de  $\Omega$  obtemos extensão de funções de  $H^1(\Omega)$  para o retângulo  $\tilde{\Omega} = [2a - b, 3b - 2a] \times [2c - d, 3d - 2c]$ . Dessa forma constrói-se uma transformação linear limitada

$$e : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\tilde{\Omega})$$

tal que

$$eu|_{\Omega} = u$$

$$\|eu\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para todo  $u \in H^1(\Omega)$  e alguma constante  $C > 0$ .

Agora tome  $\delta > 0$  tal que  $\Omega_{\delta} \subset \tilde{\Omega}$  e  $\Omega_{\delta} \subset \Omega_{\varepsilon}$ . A proposição 1.3.3 fornece uma função  $\theta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\theta = 1$  em  $\Omega$  e  $\text{supp}\theta \subset \Omega_{\delta}$ .

Para cada  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\theta eu \in H^1(\mathbb{R}^2)$  e

$$\text{supp}\theta eu \subset \Omega_{\varepsilon}.$$

Definindo  $E$  como sendo a composição

$$E = \theta e$$

obtemos a extensão desejada. ■

Sejam  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$  e  $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$ .

O conjunto  $\Gamma$  será identificado com  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Seja

$$C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}_+^n}) = \{u|_{\overline{\mathbb{R}_+^n}}; u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Prova-se que  $C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  é denso em  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$  ( veja [3], corolário IX.8 ).

Passaremos a usar a notação

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n).$$

Seja  $v \in C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ . Tem-se

$$\begin{aligned} v(x', 0)^2 &= - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_n} [v(x', x_n)]^2 dx_n \\ &\leq 2 \int_0^{\infty} |v(x', x_n)| \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) \right| dx_n \\ &\leq 2 \left( \int_0^{\infty} |v(x', x_n)|^2 dx_n \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^{\infty} |v(x', x_n)|^2 dx_n + \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n. \end{aligned}$$

Integrando no  $\mathbb{R}^{n-1}$ , obtem-se

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x', 0)^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^2 dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right|^2 dx,$$

de onde segue

$$\int_{\Gamma} |v|_{\Gamma}|^2 dx' \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}^2. \quad (1.5.3)$$

Agora seja  $\gamma$  o operador linear

$$\begin{aligned} \gamma : C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) &\longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \\ v &\longmapsto \gamma v = v|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Se  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  for munido da norma de  $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$  e  $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  da norma de  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$  segue da desigualdade 1.5.3 que  $\gamma$  é limitado. Isto permite demonstrar o seguinte

**Teorema 1.5.3.** *Existe um operador linear limitado*

$$\gamma : H^1(\mathbb{R}_+^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

tal que  $\gamma v = v|_{\Gamma}$  para toda  $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  e

$$\|\gamma u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)},$$

para toda  $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ .

**Demonstração:** Defina  $\gamma$  em  $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  por (1.5.4). Como já foi observado,  $\gamma$  é linear e limitado e vale a desigualdade (1.5.3). Como  $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$  é denso em  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$  segue que  $\gamma$  possui uma única extensão a  $H^1(\mathbb{R}_+^n)$  satisfazendo (1.5.3). Denotando por  $\gamma$  a extensão assim obtida temos o teorema provado. ■

O operador  $\gamma$  do teorema 1.5.3 é denominado traço. Assim, para cada  $v \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $\gamma v$  representa a restrição de  $v$  à fronteira de  $\mathbb{R}_+^n$  e é obtido como o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n|_{\mathbb{R}^{n-1}} = \gamma v \text{ em } L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

onde  $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$  é qualquer sequência em  $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = v \text{ em } H^1(\mathbb{R}_+^n).$$

Por último destacamos a seguinte definição:

**Definição 1.5.1.** Uma função  $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  está em  $H_{loc}^m(\Omega)$ , se para todo compacto  $K \subset \Omega$  a restrição de  $u$  ao conjunto  $K$  é tal que  $u|_K$  é função de  $H^m(K)$ , isto é,

$$u|_K \in H^m(K).$$

## Capítulo 2

# Estudo da Equação da Onda no Plano

## 2.1 Introdução

O estudo da equação da onda no plano é um dos tópicos mais importantes da análise matemática. A equação da onda descreve a propagação de ondas em meios homogêneos e isotrópicos. A equação da onda no plano é dada por

$$\Delta u = f(x, y),$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace,  $u$  é a função desconhecida e  $f$  é a função dada. A equação da onda no plano é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. A equação da onda no plano é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. A equação da onda no plano é uma equação diferencial parcial de segunda ordem.

A equação da onda no plano é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. A equação da onda no plano é uma equação diferencial parcial de segunda ordem.

## 2.2 O Problema de Cauchy Clássico

A equação da onda no plano é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. A equação da onda no plano é uma equação diferencial parcial de segunda ordem.

$$\Delta u = f(x, y)$$

## Capítulo 2

# Estudo da Equação da Onda no Plano

### 2.1 Introdução

O método usado para resolver o problema de controle estudado nessa dissertação faz uso de muitas das propriedades da solução do problema de Cauchy para a equação da onda. Este capítulo é todo dedicado ao estudo de tais propriedades. Em particular, provamos a existência e unicidade de solução quando os dados iniciais estão em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  e  $L^2(\mathbb{R}^2)$  e possuem suportes compactos. A noção de solução com energia finita que introduzimos aqui coincide com aquela introduzida por Sobolev [13] e é mais apropriada para tratar o problema de controle segundo o método de Russell [11].

As propriedades estudadas aqui podem ser obtidas por outros métodos. Veja por exemplo [5] [10] e [12].

### 2.2 O Problema de Cauchy Clássico

A equação da onda, a ser estudada aqui, é a equação diferencial parcial linear homogênea

$$w_{tt} - c^2 \Delta w = 0$$



onde  $c$  é uma constante positiva,  $w = w(x, t)$  é uma função definida para todo  $(x, t) = (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $w_{tt} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  e  $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$  é o operador Laplaciano nas variáveis espaciais  $x_1$  e  $x_2$ . A variável  $t$  representa o tempo.

Assumiremos que  $c = 1$  e adotaremos a notação

$$\square w = w_{tt} - \Delta w.$$

O operador  $\square$  é denominado *D'Alembertiano*.

Uma *solução clássica* da equação  $\square w = 0$  é uma função  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , pelo menos duas vezes diferenciável em cada uma das variáveis  $x_1, x_2$  e  $t$ , e satisfazendo a igualdade

$$(\square w)(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Sejam  $t_0 \in \mathbb{R}$  um número real arbitrário e  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções dadas.

*O Problema de Cauchy Clássico*

$$\begin{cases} \square w &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, t_0) &= u(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, t_0) &= v(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

consiste em encontrar uma solução clássica de  $\square w = 0$  satisfazendo as *condições iniciais*  $w(x, t_0) = u(x)$ ,  $w_t(x, t_0) = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  dadas no instante  $t_0$ .

**Proposição 2.2.1.** *Sejam  $t_0 = 0$ ,  $u \in C^3(\mathbb{R}^2)$  e  $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Então o problema de Cauchy (2.2.1) possui solução clássica  $w \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  dada por*

$$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{t}{2\pi} \int_{B(0,1)} \frac{u(x + t\xi)}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} d\xi \right] + \frac{t}{2\pi} \int_{B(0,1)} \frac{v(x + t\xi)}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} d\xi,$$

onde  $B(0, 1)$  é a bola aberta de centro na origem e raio 1 e  $|\xi|$  denota a norma euclidiana do vetor  $\xi$ .

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista em [5], [6], [8], [9], [14]. ■

Utilizando-se da fórmula explícita da solução do problema (2.2.1) pode-se provar que se  $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  então  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ . Mais ainda, se  $u$  e  $v$  possuem suporte compacto contidos num domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  então a solução  $w$  terá suporte na região

$$\Xi_0 = \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; |\xi - x| \leq |t|, x \in \Omega\}$$

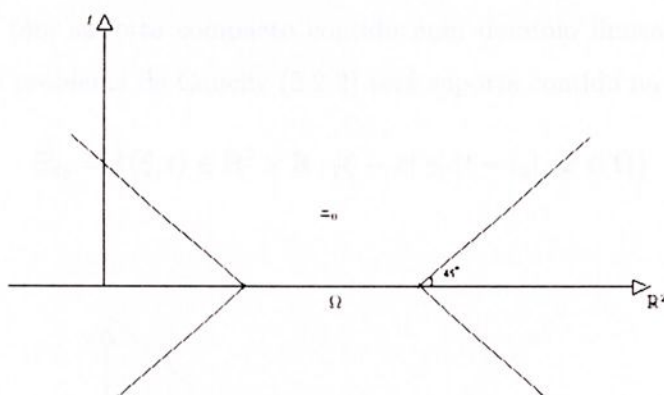


Figura 2.1:

Vejamos agora como resolver o problema de Cauchy (2.2.1) com dados iniciais em  $t_0 \neq 0$ .

Sejam  $u$  e  $v$  nas condições da proposição 2.2.1. Resolva inicialmente o problema

$$\begin{cases} \square W &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ W(x, 0) &= u(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ W_t(x, 0) &= v(x) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Agora defina  $w(x, t) = W(x, t - t_0)$ . Temos

$$w_t(x, t) = W_t(x, t - t_0) \text{ e } \square w = \square W.$$

Logo

$$\square w = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},$$

$$w(x, t_0) = W(x, t_0 - t_0) = W(x, 0) = u(x)$$

e

$$w_t(x, t_0) = W_t(x, t_0 - t_0) = W_t(x, 0) = v(x) \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

isto é,  $w$  resolve o problema de Cauchy (2.2.1).

Ainda no caso  $t_0 \neq 0$ , se  $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  então  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ .

Se  $u$  e  $v$  têm suporte compacto contido num domínio limitado  $\Omega$ , então a solução  $w$  do problema de Cauchy (2.2.2) terá suporte contido na região

$$\Xi_{t_0} = \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; |\xi - x| \leq |t - t_0|, x \in \Omega\}$$

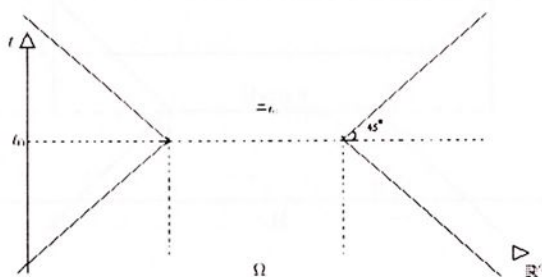


Figura 2.2:

## 2.3 Conservação de Energia

Seja  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  uma função tal que  $\square w = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .

Defina  $\vec{F} = (-w_t \cdot w_{x_1}, -w_t \cdot w_{x_2}, \frac{1}{2}w_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2)$ . Seja  $\text{div} \vec{F}$  o divergente do campo  $\vec{F}$  em relação às variáveis  $x_1, x_2$  e  $t$ . Então  $\text{div} \vec{F} = w_t w_{tt} - w_t \Delta w$ .

Assim  $w$  satisfaz

$$\text{div} \vec{F} = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \quad (2.3.3)$$

de onde segue

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_{|t-t_0|}} \{w_t(x, t)^2 + |\nabla w(x, t)|^2\} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{w_t(x, t_0)^2 + |\nabla w(x, t_0)|^2\} dx. \quad (2.3.4)$$

Para cada  $t \in \mathbb{R}$  definimos a *energia total* da solução  $w$  de  $\square w = 0$ , no instante  $t$  como sendo

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [w_t(x, t)^2 + |\nabla w(x, t)|^2] dx.$$

A discussão acima pode ser resumida no seguinte;

**Teorema 2.3.1. (Conservação de Energia)** *Seja  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  uma solução de  $\square w = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . Seja  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\text{supp} w_t(\cdot, t_0), \text{supp} w(\cdot, t_0) \subset \Omega$$

*para algum domínio limitado  $\Omega$ . Então para todo  $t$ ,  $w_t(\cdot, t)$  e  $w(\cdot, t)$  têm suporte compacto e  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0)$ .*

**Demonstração:** Para cada  $t$ ,  $\text{supp} w_t(\cdot, t)$  e  $\text{supp} w(\cdot, t)$  são compactos e as integrais em (2.3.4) podem ser tomadas em todo o  $\mathbb{R}^2$ . Isto segue de  $\text{supp} w \subset \Xi_{t_0}$ , como observado na seção anterior.

A igualdade  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0)$  é exatamente a identidade (2.3.4). ■

**Corolário 2.3.2.** *Dados  $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , o problema de Cauchy (2.2.1) possui uma única solução  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que existam duas soluções  $w_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ ,  $w_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  de (2.2.1).

Então  $W = w_1 - w_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  e satisfaz

$$\begin{cases} \square W &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ W(x, t_0) &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ W_t(x, t_0) &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Seja  $\mathcal{E}(t)$  a energia total de  $W$  no instante  $t \neq t_0$ . Do teorema (2.3.1) temos  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t_0) = 0$ .

Assim  $W_t(x, t) = W_{x_1}(x, t) = W_{x_2}(x, t) = 0$  para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo,  $W$  é constante. Como  $W(x, t_0) = 0$  segue que  $W = 0$ . Assim  $w_1 = w_2$ . ■

## 2.4 Solução com Energia Finita: Existência e Unicidade

Seja  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  uma solução de  $\square w = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  tal que para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$  as funções  $w(\cdot, t_0)$  e  $w_t(\cdot, t_0)$  têm suporte no domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Neste caso,  $w$  tem suporte no conjunto  $\Xi_{t_0}$ . Usaremos este fato para demonstrar o seguinte

**Lema 2.4.1.** *Nas condições acima, para cada  $T > 0$  vale*

$$\int_{\Omega_{|t-t_0|}} |w(x, t)|^2 dx \leq C(T) \int_{\Omega_{|t-t_0|}} |\nabla w(x, t)|^2 dx, \quad (2.4.5)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $|t - t_0| < T$ , onde  $C(T) = (\text{diam}\Omega + 2T)^2$ .

**Demonstração:** Seja  $\Omega_T$  a vizinhança de  $\Omega$  com raio  $T$ . Então  $\text{diam}\Omega_T = \text{diam}\Omega + 2T$ . Escolha  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\Omega_T \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2],$$

tomando  $b_1 = a_1 + \text{diam}\Omega_T$ .

Observe que  $\Omega_{|t-t_0|} \subset \Omega_T$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $|t - t_0| < T$ . Logo,

$$w(x_1, x_2, t) = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}(s, x_2, t) ds, \quad |t - t_0| < T.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |w(x_1, x_2, t)| &\leq \int_{a_1}^{x_1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(s, x_2, t) \right| ds \\ &\leq \left( \int_{a_1}^{x_1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(s, x_2, t) \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{a_1}^{x_1} ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |w(x_1, x_2, t)|^2 &\leq (x_1 - a_1) \int_{a_1}^{x_1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(s, x_2, t) \right|^2 ds \\ &\leq (b_1 - a_1) \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(s, x_2, t) \right|^2 ds \end{aligned}$$

Integrando uma vez mais em relação à  $x_1$  obtemos

$$\int_{a_1}^{b_1} |w(x_1, x_2, t)|^2 dx_1 \leq (b_1 - a_1)^2 \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) \right|^2 dx_1,$$

e então

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |w(x, t)|^2 dx &\leq (b_1 - a_1)^2 \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(x, t) \right|^2 dx \\ &\leq (b_1 - a_1)^2 \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} |\nabla w(x, t)|^2 dx \end{aligned}$$

Agora, lembrando que  $\text{supp} w(\cdot, t) \subset \Omega_{|t-t_0|} \subset \Omega_T \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  e observando que  $(b_1 - a_1)^2 = \mathcal{C}(T)$ , da última desigualdade segue (2.4.5). ■

**Proposição 2.4.2.** *Seja  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  uma solução de  $\square w = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  tal que  $\text{supp} w(\cdot, t_0), \text{supp} w_t(\cdot, t_0) \subset \Omega$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$  e algum domínio limitado  $\Omega$ . Então para cada  $T > 0$  vale*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{|t-t_0|}} [w(x, t)^2 + w_t(x, t)^2 + |\nabla w(x, t)|^2] dx &\leq \\ &\leq [(\text{diam} \Omega + 2T)^2 + 1] \int_{\Omega} [u(x, t_0)^2 + u_t(x, t_0)^2 + |\nabla w(x, t_0)|^2] dx \quad (2.4.6) \end{aligned}$$

para todo  $t$  tal que  $|t - t_0| < T$ .

**Demonstração:** Do Lema (2.4.1), temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{|t-t_0|}} [w(x, t)^2 + w_t(x, t)^2 + |\nabla w(x, t)|^2] &\leq \int_{\Omega_{|t-t_0|}} [w_t(x, t)^2 + (1 + \mathcal{C}(T)) |\nabla w(x, t)|^2] dx \leq \\ &\leq (1 + \mathcal{C}(T)) \int_{\Omega_{|t-t_0|}} [w_t(x, t)^2 + |\nabla w(x, t)|^2] dx, \end{aligned}$$



para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t - t_0| < T$ .

Observando que  $\text{supp} w_t(\cdot, t), \text{supp} |\nabla w(\cdot, t)| \subset \Omega_{|t-t_0|}$  e usando (2.3.4) obtemos

$$\begin{aligned} (1 - \mathcal{C}(T)) \int_{\Omega_{|t-t_0|}} [w_t(x, t)^2 + |\nabla w(x, t)|^2] dx &= \\ &= (1 + \mathcal{C}(T)) \int_{\Omega} [w_t(x, t_0)^2 + |\nabla w(x, t_0)|^2] dx \leq \\ &\leq (1 + \mathcal{C}(T)) \int_{\Omega} [w(x, t_0)^2 + w_t(x, t_0)^2 + |\nabla w(x, t_0)|^2] dx. \end{aligned}$$

Combinando as duas últimas desigualdades obtemos (2.4.6). ■

Usando as normas dos espaços de Sobolev introduzidas no capítulo 1, podemos reescrever a desigualdade (2.4.6) como

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_{|t-t_0|})}^2 + \|w_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{|t-t_0|})}^2 &\leq \\ &\leq [1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2] \left[ \|w(\cdot, t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|w_t(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Observando mais uma vez os suportes de  $w(\cdot, t)$  e  $w_t(\cdot, t)$  podemos escrever (2.4.7) como

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 + \|w_t(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \\ &\leq [1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2] \left[ \|w(\cdot, t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|w_t(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

As desigualdades (2.4.7) e (2.4.8) valem para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t - t_0| < T$ .

Agora, integrando (2.4.8) em relação à  $t$  no intervalo  $[t_0 - T, t_0 + T]$  obtemos

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])}^2 &\leq \\ &\leq 2T [1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2] \left[ \|w(\cdot, t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|w_t(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Dado  $K \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , compacto, escolha  $T > 0$  tal que  $K \subset \mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T]$ .

Temos

$$\|w\|_{H^1(K)}^2 \leq \|w\|_{H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])}^2,$$

logo podemos afirmar: dado um compacto  $K \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  existe uma constante  $C = C(K, \Omega)$  tal que

$$\|w\|_{H^1(K)}^2 \leq C(K, \Omega) \left\{ \|w(\cdot, t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|w_t(\cdot, t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \quad (2.4.10)$$

Uma vez estabelecido a desigualdade (2.4.10), estamos em condições de definir a noção de **solução com energia finita**.

**Definição 2.4.1.** *Sejam  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  e  $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Uma função*

*$w \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  é solução com energia finita do problema de Cauchy generalizado*

$$\begin{cases} \square w &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, t_0) &= u(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, t_0) &= v(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

*se existir uma seqüência  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  tal que*

*(i) Para todo compacto  $K \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  se tem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w \text{ em } H^1(K),$$

*(ii)  $\square w_n = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , para todo  $n = 1, 2, \dots$ ,*

*(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\cdot, t_0) = u$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ,*

*(iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t_0) = v$  em  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .*

Agora provaremos a existência e unicidade de solução com energia finita quando os dados iniciais possuem suportes compactos.

**Teorema 2.4.3.** *Dados  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  e  $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , ambos com suporte compacto, o problema de Cauchy generalizado*

$$\begin{cases} \square w &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, t_0) &= u(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, t_0) &= v(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

*admite uma única solução com energia finita  $w \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ .*



**Demonstração:** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado tal que  $\text{supp} u, \text{supp} v \subset \Omega$ . Então  $u \in H_0^1(\Omega)$  e  $v \in L^2(\Omega)$ .

Como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $H_0^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$ , então existem seqüências

$$(u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega), (v_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{em } H^1(\Omega), \quad (2.4.11)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (2.4.12)$$

Para cada  $n$  podemos olhar  $u_n$  e  $v_n$  definidas para todo  $\mathbb{R}^2$  (nulas fora de  $\Omega$ ). Portanto, para cada  $n$  temos  $u_n, v_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , ambas com suporte no domínio limitado  $\Omega$ .

Seja  $w_n$  a solução clássica do problema de Cauchy

$$(n) \quad \begin{cases} \square w_n &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w_n(x, t_0) &= u_n(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t_0) &= v_n(x) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Para  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , a função  $w_m - w_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  satisfaz o problema de Cauchy

$$(m-n) \quad \begin{cases} \square(w_m - w_n) &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ (w_m - w_n)(x, t_0) &= (u_m - u_n)(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t}(w_m - w_n)(x, t_0) &= (v_m - v_n)(x) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Fixemos  $T > 0$ .

A desigualdade (2.4.9) aplicada a  $w_m - w_n$  nos fornece

$$\begin{aligned} \|w_m - w_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])}^2 &\leq \\ &\leq 2T [1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2] \left[ \|u_m - u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_m - v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Combinando esta última desigualdade com as igualdades (2.4.11) e (2.4.12) concluímos que  $(w_n)_{n=1}^\infty$  é uma seqüência de Cauchy em  $H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])$ .

Assim, podemos afirmar:

(i) Existe  $w^T \in H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])$  e seqüência  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  tal que

(ii)  $\square w_n = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w^T$  em  $H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])$

(iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\cdot, t_0) = u$  em  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\text{supp} w_n(\cdot, t_0) \subset \Omega$

(v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t_0) = v$  em  $L^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $\text{supp} \frac{\partial}{\partial t} w_n(\cdot, t_0) \subset \Omega$ .

Agora provemos que  $w^T$  é a única função de  $H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])$  satisfazendo (i) – (v).

Suponhamos que existam  $\tilde{w}^T \in H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])$  e  $(\tilde{w}_n) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  satisfazendo (i) – (v). Aplicando (2.4.9) em  $w_n - \tilde{w}_n$  obtemos

$$\begin{aligned} \|w_n - \tilde{w}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])} &\leq \\ &\leq 2T [1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2] \cdot \\ &\cdot \left[ \|w_n(\cdot, t_0) - \tilde{w}_n(\cdot, t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t_0) - \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial t}(\cdot, t_0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \end{aligned}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando (iii) – (v) obtemos

$$\begin{aligned} \|w^T - \tilde{w}^T\|_{H^1(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])} &\leq \\ &\leq 2T [1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2] \left[ \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

isto é,  $w^T = \tilde{w}^T$ .

Agora faça  $T = N \in \mathbb{N}^*$  e considere as funções  $w^N$  e  $w^{N+1}$ . A restrição de  $w^{N+1}$  à faixa  $\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T]$  coincide com  $w^N$  pois ambas satisfazem (i) – (v). Assim  $w^{N+1}$  é extensão de  $w^N$ .

Fazendo  $N$  variar em  $\mathbb{N}^*$  construímos uma função  $w \in H^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  satisfazendo as condições (i) – (iv) da definição 2.4.1, de solução com energia finita com dados iniciais  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  e  $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Agora provemos a unicidade de  $w$ . Suponhamos que  $w^1, w^2 \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  são duas soluções com energia finita do problema considerado.

Sejam  $(w_n^1)_{n=1}^\infty, (w_n^2)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  seqüências tais como na definição.

Aplicando a desigualdade (2.4.10) a  $w_n^1 - w_n^2$  obtemos

$$\|w_n^1 - w_n^2\|_{H^1(K)} \leq \mathcal{C}(K, \Omega) \left\{ \|w_n^1(\cdot, t_0) - w_n^2(\cdot, t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} w_n^1(\cdot, t_0) - \frac{\partial}{\partial t} w_n^2(\cdot, t_0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo compacto  $K \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  obtemos

$$\|w^1 - w^2\|_{H^1(K)} \leq \mathcal{C}(K, \Omega) \left\{ \|u - u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} = 0.$$

Assim  $w^1 = w^2$  em todo compacto  $K \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .

Logo,  $w^1 = w^2$  em  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ . ■

Ficou claro na demonstração do teorema acima que a solução não depende das seqüências  $(u_n)$  e  $(v_n)$  que aproximam os dados iniciais.

## 2.5 Propriedades da Solução com Energia Finita

Nesta seção discutiremos algumas propriedades da solução com energia finita que serão utilizados nos capítulos seguintes.

**Proposição 2.5.1.** *Sejam  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  e  $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , ambas com suporte compacto num domínio limitado  $\Omega$ .*

*Então a solução  $w \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \square w &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, t_0) &= u(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, t_0) &= v(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

*tem suporte no conjunto*

$$\Xi_{t_0} = \{(\xi, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; |\xi - x| \leq |t - t_0|, x \in \Omega\}.$$

**Demonstração:** Mostraremos que  $w$  é nula quase sempre no complementar de  $\Xi_{t_0}$ . Sejam  $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ ,  $(v_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_n = u \text{ em } H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_n = v \text{ em } L^2(\Omega),$$

e  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a sequência de soluções dos problemas de Cauchy

$$\begin{cases} \square w_n &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w_n(x, t_0) &= u_n(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_n(x, t_0) &= v_n(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Seja  $K \subset \Xi_{t_0}^c$  um compacto. Da definição 2.4.1 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w \quad \text{em } H^1(K).$$

Por outro lado,  $\text{supp } w_n \subset \Xi_{t_0}$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . Logo  $w_n \equiv 0$  em  $K$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . Assim  $w$  é nula quase sempre em  $K$ .

Como isto é válido para todo  $K \subset \Xi_{t_0}^c$ , o mesmo vale para  $\Xi_{t_0}^c$ . ■

A próxima proposição expressa a dependência contínua da solução do problema de Cauchy em relação aos dados iniciais.

**Proposição 2.5.2.** *Sejam  $u_1, u_2 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $v_1, v_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , todos com suporte no domínio limitado  $\Omega$ . Seja  $w_i \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$  a solução de*

$$\begin{cases} \square w_i &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w_i(x, t_0) &= u_i(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_i(x, t_0) &= v_i(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Dado  $K \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  compacto, existe  $C = C(K, \Omega) > 0$  tal que

$$\|w_1 - w_2\|_{H^1(K)}^2 \leq C \left( \|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_1 - v_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

**Demonstração:** Segue da linearidade do problema e da desigualdade (2.4.10). ■

**Proposição 2.5.3.** Nas mesmas condições da proposição 2.5.1, a solução

$w \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  do problema de Cauchy tem traço

$$w(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^2),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** A existência do traço  $w(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  é consequência do Teorema do Traço, teorema (1.5.3) do capítulo 1. Resta mostrar que  $w(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Seja  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  como na demonstração da proposição 2.5.1. Da definição de traço segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\cdot, t) = w(\cdot, t) \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Fixe  $T > 0$  e considere a desigualdade (2.4.7). Aplicando (2.4.7) à diferença  $w_m - w_n$  e eliminando um termo do lado esquerdo, segue:

$$\begin{aligned} & \|w_m(\cdot, t) - w_n(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \\ & \leq [1 + (\text{diam}\Omega + 2T)^2] \left[ \|u_m - u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_m - v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right], \end{aligned}$$

para todos  $m, n \in \mathbb{N}^*$  e  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t - t_0| < T$ .

Logo, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t - t_0| < T$ , existe  $g_t \in H^1(\mathbb{R}^2)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\cdot, t) = g_t \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\cdot, t) = g_t \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2).$$

A unicidade de limite em  $L^2(\mathbb{R}^2)$  implica  $g_t = w(\cdot, t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tal que  $|t - t_0| < T$ .

Como  $T$  é arbitrário então  $w(\cdot, t) = g_t \in H^1(\mathbb{R}^2)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . ■

Nosso objetivo agora é dar um sentido para  $\frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Sejam

$$w \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) \text{ e } (w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$$

como na proposição 2.5.1.

Fixe  $T > 0$ . A desigualdade (2.4.8) aplicada em  $w_m - w_n$  fornece

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} w_m(\cdot, t) - \frac{\partial}{\partial t} w_n(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \\ & \leq [1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2] \left\{ \|u_m - u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_m - v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t - t_0| < T$ .

Assim, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , com  $|t - t_0| < T$  existe  $h_t \in L^2(\mathbb{R}^2)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t) = h_t \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Seja  $h : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$  definida por  $h(t) = h_t$ .

Provemos que  $h$  é contínua, isto é,

$$h \in C([t_0 - T, t_0 + T], L^2(\mathbb{R}^2)).$$

Fixemos  $t_1$  tal que  $|t_1 - t_0| \leq T$  e  $k \in \mathbb{R}$  com  $|k|$  pequeno. Definamos

$$W_n(x, t) = w_n(x, t + k) - w_n(x, t),$$

em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Esta função satisfaz

$$\begin{cases} \square W_n & = & 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ W_n(x, t_1) & = & w_n(x, t_1 + k) - w_n(x, t_1) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} W_n(x, t_1) & = & \frac{\partial}{\partial t} w_n(x, t_1 + k) - \frac{\partial}{\partial t} w_n(x, t_1) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Observe que os dados iniciais deste último problema de Cauchy tem suporte compacto. Logo, do teorema de Conservação de Energia temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} W_n(x, t_1) \right|^2 + |\nabla W_n(x, t_1)|^2 \right\} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} W_n(x, t) \right|^2 + |\nabla W_n(x, t)|^2 \right\} dx,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Integrando esta igualdade em relação à  $t$  no intervalo  $[t_0 - T, t_0 + T]$  e desprezando um termo positivo da primeira delas obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} W_n(x, t_1) \right|^2 dx dt \leq \frac{1}{2T} \int_{t_0 - T}^{t_0 + T} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} W_n(x, t) \right|^2 + |\nabla W_n(x, t)|^2 \right\} dx dt.$$

Agora observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial W_n}{\partial t}(\cdot, t_1) = h_{t_1+k} - h_{t_1} \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial W_n}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, \cdot + k) + \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla W_n = \nabla w(\cdot, \cdot + k) - \nabla w \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T])^2.$$

Logo, fazendo  $n \rightarrow +\infty$  na última desigualdade obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} |h_{t_1+k}(x) - h_{t_1}(x)|^2 dx \leq \\ & \leq \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x, t+k) - \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w(x, t+k) - \nabla w(x, t)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Agora, usando o Teorema da Continuidade em  $L^2$  (teorema (1.3.2) do capítulo 1), temos

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x, t+k) - \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx dt = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_{t_0-T}^{t_0+T} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w(x, t+k) - \nabla w(x, t)|^2 dx dt = 0.$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \|h_{t_1+k} - h_{t_1}\|_{L^2} = 0, \quad \text{isto é,} \quad \lim_{k \rightarrow 0} h_{t_1+k} = h_{t_1}.$$

Assim  $h$  é contínua em  $[t_0 - T, t_0 + T]$ . Como  $T$  foi tomado arbitrariamente podemos definir  $h$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esta função é contínua em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $h \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))$ .

Agora seja  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Temos  $h \in C([a, b], L^2(\mathbb{R}^2))$ . Como

$$C([a, b], L^2(\mathbb{R}^2)) \subset L^2([a, b], L^2(\mathbb{R}^2))$$

e

$$L^2([a, b], L^2(\mathbb{R}^2)) = L^2([a, b] \times \mathbb{R}^2),$$

podemos redefinir a função  $h$  como função das variáveis  $x$  e  $t$  como segue

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto h(x, t) = h_t(x). \end{aligned}$$

Observe que  $h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ . Mais ainda, para todo  $t \in \mathbb{R}$  se tem

$$\begin{aligned} h(\cdot, t) &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x, t) \end{aligned}$$

em  $L^2(\mathbb{R}^2)$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t) = h(\cdot, t) \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Em particular  $h(\cdot, t_0) = v$ .

Esta discussão prova parte da proposição seguinte.

**Proposição 2.5.4.** *Sejam  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$  com suportes contidos num domínio limitado  $\Omega$ . Seja  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a sequência que satisfaz as condições (i)–(iv) da definição 2.4.1 de solução com energia finita do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \square w &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, t_0) &= u(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, t_0) &= v(x) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

*Então existe uma função  $h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ , tal que*

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto h(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

*é contínua e para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t) = h(\cdot, t) \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2).$$

*Mais ainda,  $\frac{\partial w}{\partial t} = h$  quase sempre em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Resta apenas mostrar que  $\frac{\partial w}{\partial t} = h$  a.e. em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .

Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\cdot, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t) = h(\cdot, t) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} h(x, t) \varphi(x, t) dt, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Seja  $\Phi_n(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx$ . Da desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$|\Phi_n(t)| \leq \left\| \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (2.5.13)$$

Da desigualdade (2.4.8) obtemos

$$\left\| \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq [1 + (\text{diam}\Omega + 2T)^2] \left[ \|w_n(\cdot, t_0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} w_n(\cdot, t_0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Como  $(w_n(\cdot, t_0))_{n=1}^\infty$  e  $\left(\frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t_0)\right)_{n=1}^\infty$  são convergentes em  $H^1(\Omega)$  e  $L^2(\Omega)$  respectivamente segue que

$$\left( \left\| \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right)_{n=1}^\infty$$

é limitada uniformemente em  $t$ ,  $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ .

Seja  $T > 0$  tal que  $\text{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^2 \times [t_0 - T, t_0 + T]$ . Então  $\|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$  é limitada em  $[t_0 - T, t_0 + T]$ .

Voltando em (2.5.13) concluímos que  $(\Phi_n)_{n=1}^\infty$  é limitada em  $[t_0 - T, t_0 + T]$ .

Observando que  $\varphi(\cdot, t) = 0$  se  $|t - t_0| > T$  concluímos que  $(\Phi_n)_{n=1}^\infty$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . Assim  $(\Phi_n)_{n=1}^\infty$  é uma sequência limitada de funções definidas em  $\mathbb{R}$ , cada  $\Phi_n$  é integrável em compactos de  $\mathbb{R}$  e converge, em todo  $t \in \mathbb{R}$ , para

$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x, t) \varphi(x, t) dt.$$

Logo  $\Phi$  é integrável em cada intervalo limitado e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx dt = \int_I \int_{\mathbb{R}^2} h(x, t) \varphi(x, t) dx dt.$$

Mas a sequência  $\left(\frac{\partial w_n}{\partial t}\right)_{n=1}^\infty$  converge para  $\frac{\partial w}{\partial t}$  em  $L^2(K)$ , para qualquer compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $K = \text{supp}\varphi$  e  $I$  tal que  $K \subset \mathbb{R}^2 \times I$ . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx dt = \int_I \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx dt.$$

Assim

$$\int_{\mathbb{R}^3} h(x, t) \varphi(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) dx dt,$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ .

Logo da proposição 1.3.1 do capítulo 1 segue que  $h = \frac{\partial w}{\partial t}$  quase sempre em  $\mathbb{R}^3$ . ■

A função  $w_t$  está em  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  e portanto não teria sentido restringí-la ao hiperplano  $t = \text{constante}$ . Todavia, como

$$\frac{\partial w}{\partial t} = h \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^3 \text{ e } h \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2)),$$

é natural definir  $\frac{\partial w}{\partial t}$  no instante  $t \in \mathbb{R}$  por

$$\frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, t) \equiv h(\cdot, t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (2.5.14)$$

Assim a solução  $w \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square w &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, t_0) &= u & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, t_0) &= v & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

com  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$  com suportes em  $\Omega$  é tal que

$$(w(\cdot, t), w_t(\cdot, t)) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Agora introduziremos uma família de operadores  $S_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  que serão utilizados na demonstração do teorema 4.3.1, que é o principal resultado dessa dissertação. Sejam  $t_0, t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq t_0$  e  $S_t$  o operador

$$S_t : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$$

definido por

$$S_t(u, v) \equiv (w(\cdot, t), w_t(\cdot, t)), \quad (2.5.15)$$

onde  $w \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  é a única solução do problema de Cauchy acima. Então  $S_t$  é um operador linear limitado. Aqui estamos adotando a norma

$$\|(\alpha, \beta)\|_{H^1 \times L^2} = \sqrt{\|\alpha\|_{H^1}^2 + \|\beta\|_{L^2}^2},$$

para os produtos cartesianos envolvidos.

A linearidade de  $S_t$  é imediata. Vejamos a limitação de  $S_t$ .

Seja  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  uma sequência satisfazendo as condições da definição de solução com energia finita.

A desigualdade (2.4.8) aplicada a  $w_n$  fornece

$$\begin{aligned} & \left\| \left( w_n(\cdot, t), \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t) \right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \\ & \leq \sqrt{1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2} \left\| \left( w_n(\cdot, t_0), \frac{\partial w_n}{\partial t}(\cdot, t_0) \right) \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;  $|t - t_0| < T$ .

fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando as proposições 2.5.3 e 2.5.4 obtemos

$$\|w(\cdot, t), w_t(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2} \|(u, v)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)},$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t - t_0| \leq T$ .

Fixando  $T \geq |t - t_0|$  e fazendo  $\mathcal{C}(T) = \sqrt{1 + (\text{diam} \Omega + 2T)^2}$  obtemos

$$\|S_t(u, v)\|_{H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \mathcal{C}(T) \|(u, v)\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}, \quad (2.5.16)$$

para todos  $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . A desigualdade (2.5.16) expressa a limitação do operador  $S_t$ .

Por último observamos que  $S_{t_0}$  é o operador que estende os dados ao plano como sendo nulos fora de  $\Omega$ . Assim,  $S_{t_0}$  também é linear e limitado. Portanto,  $S_t$  é linear e limitado, para todos  $t \in \mathbb{R}$ .

## Capítulo 3

# Decaimento Local de Energia

### 3.1 Introdução

Este capítulo, é dedicado ao estudo do decaimento local da energia da solução do problema de Cauchy generalizado. O principal resultado é o teorema 3.2.1, devido a D.L. Russell [11], que fornece como consequência o teorema 3.3.1, que é de suma importância para resolver o problema de controle.

Na secção 3.2 estudamos o decaimento para as soluções clássicas da equação da onda. Na secção 3.3 provamos o decaimento local para soluções com energia finita para o problema de Cauchy usual e também para o problema de Cauchy com tempo reverso.

### 3.2 O Decaimento Local de Energia para Soluções Clássicas.

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e  $\delta > 0$  um número real positivo. Denotaremos por  $\Omega_\delta$  o conjunto

$$\Omega_\delta = \Omega + B(0, \delta),$$

onde  $B(0, \delta)$  é a bola aberta de  $\mathbb{R}^2$  com centro na origem e raio  $\delta > 0$ . Assim  $\Omega_\delta$  é uma vizinhança aberta de  $\Omega$ . Denotaremos  $|\Omega_\delta|$  a medida de Lebesgue de  $\Omega_\delta$ .



**Teorema 3.2.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e  $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  funções tais que*

$$\text{supp} u, \text{supp} v \subset \Omega_\delta$$

*para algum  $\delta > 0$ . Seja  $T_0 > \text{diam} \Omega_\delta$  e  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a solução clássica do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \square w &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, 0) &= u(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, 0) &= v(x), & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

*Então, existe uma constante  $K > 0$  independente de  $u, v$  e  $w$  tal que:*

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x,t)^\alpha} w(x, t) \right|^2 \leq \frac{K^2 |\Omega_\delta|}{2\pi^2 t^2} \left\{ \|u\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right\} \quad (3.2.1)$$

*para todo multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$  com  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 1$  e todos  $x \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$ .*

**Demonstração:** De acordo com a proposição 2.2.1 podemos escrever

$$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{t}{2\pi} \int_{B(0,1)} \varphi(\xi) u(x + t\xi) d\xi \right] + \frac{t}{2\pi} \int_{B(0,1)} \varphi(\xi) v(x + t\xi) d\xi \quad (3.2.2)$$

$$\text{onde } \varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}, \quad |\xi| < 1.$$

Observe que  $\varphi \in C^\infty(\overline{B}(0, \lambda))$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  com  $0 < \lambda < 1$ .

Tomando  $t > 0$  e efetuando a mudança de variável  $\eta = x + t\xi$  na integral acima obtemos

$$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x,t)} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) u(\eta) d\eta \right] + \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x,t)} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) v(\eta) d\eta,$$

onde  $B(x, t)$  é a bola aberta de centro  $x$  e raio  $t$ .

Para cada  $t > T_0$  e cada  $x \in \Omega_\delta$  tem-se

$$\Omega_\delta \subset B(x, t).$$



Como  $\text{supp} u \subset \Omega_\delta$  e  $\text{supp} v \subset \Omega_\delta$  podemos escrever

$$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2\pi t} \int_{\Omega_\delta} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) u(\eta) d\eta \right] + \frac{1}{2\pi t} \int_{\Omega_\delta} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) v(\eta) d\eta. \quad (3.2.3)$$

Agora, dado  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  tal que  $|\alpha| \leq 1$ , da regra de Leibnitz obtemos

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x, t)^\alpha} w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial^{|\alpha|+1}}{\partial t \partial(x, t)^\alpha} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] u(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x, t)^\alpha} \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) v(\eta) d\eta. \quad (3.2.4)$$

Agora consideraremos todos os multi-índices  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq 1$ .

Para  $\alpha = (0, 0, 0)$  temos

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\delta} \left[ -\frac{1}{t^2} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) - \frac{1}{t^2} \nabla \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \cdot \frac{\eta - x}{t} \right] u(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) v(\eta) d\eta.$$

Ou ainda

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \left[ \int_{\Omega_\delta} \phi_1(\eta, x, t) u(\eta) d\eta + \int_{\Omega_\delta} \phi_2(\eta, x, t) v(\eta) d\eta \right], \quad (3.2.5)$$

onde

$$\phi_1(\eta, x, t) = -\frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) - \frac{1}{t} \nabla \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \cdot \frac{\eta - x}{t}$$

e

$$\phi_2(\eta, x, t) = \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right).$$

Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  escolhido de tal forma que

$$\frac{\text{diam}(\Omega_\delta)}{T_0} < \lambda < 1.$$

Isto é possível devido a hipótese  $T_0 > \text{diam}(\Omega_\delta)$ .

Para todos  $x, \eta \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$  temos

$$\left| \frac{\eta - x}{t} \right| \leq \frac{\text{diam}(\Omega_\delta)}{|t|} < \frac{\text{diam}(\Omega_\delta)}{T_0} < \lambda < 1.$$

Como  $\varphi$  e suas derivadas são limitadas em  $\overline{B}(0, \lambda)$  então existem  $K_1 > 0$   $K_2 > 0$  tais que

$$|\phi_1(\eta, x, t)| < K_1, \quad |\phi_2(\eta, x, t)| < K_2 \quad (3.2.6)$$

para todos  $x, \eta \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$ .

A representação (3.2.5) de  $w$  e as estimativas em (3.2.6) são suficientes para obter (3.2.1) com  $\alpha = (0, 0, 0)$ . Todavia, calcularemos primeiramente todas as estimativas análogas a (3.2.6) para os demais multi-índices  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq 1$  e então concluiremos a demonstração.

Vejamos agora o caso em que  $\alpha = (1, 0, 0)$ .

Neste caso, (3.2.4) se torna

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_1} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] u(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] v(\eta) d\eta. \quad (3.2.7)$$

Observemos inicialmente que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] = -\frac{1}{t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\left(\frac{\eta - x}{t}\right).$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_1} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{1}{t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] \\ &= \frac{2}{t^3} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\left(\frac{\eta - x}{t}\right) + \frac{1}{t^2} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \cdot \frac{\eta - x}{t}. \end{aligned}$$

Definindo

$$\phi_3(\eta, x, t) = \frac{2}{t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\left(\frac{\eta - x}{t}\right) + \frac{1}{t} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \cdot \frac{\eta - x}{t},$$

$$\phi_4(\eta, x, t) = -\frac{1}{t} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}\left(\frac{\eta - x}{t}\right),$$

observamos que existem constantes  $K_3 > 0$ ,  $K_4 > 0$  tais que

$$|\phi_3(\eta, x, t)| < K_3, \quad |\phi_4(\eta, x, t)| < K_4 \quad (3.2.8)$$

para todos  $x, \eta \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$ .

Mais ainda, vale a fórmula

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \left[ \int_{\Omega_\delta} \phi_3(\eta, x, t) u(\eta) d\eta + \int_{\Omega_\delta} \phi_4(\eta, x, t) v(\eta) d\eta \right], \quad (3.2.9)$$

para todos  $x \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$ .

Para  $\alpha = (0, 1, 0)$ , trocando-se os papéis de  $x_1$  por  $x_2$  obtém-se, como no caso anterior, funções  $\phi_5$  e  $\phi_6$  e constantes  $K_5$  e  $K_6$  tais que

$$|\phi_5(\eta, x, t)| < K_5, \quad |\phi_6(\eta, x, t)| < K_6 \quad (3.2.10)$$

para todos  $x, \eta \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$ .

Neste caso vale também uma fórmula análoga à (3.2.9) onde  $\phi_3$  é substituído por  $\phi_5$  e  $\phi_4$  por  $\phi_6$ .

Por último, vejamos o caso em que  $\alpha = (0, 0, 1)$ .

Neste caso (3.2.4) se torna

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] u(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_\delta} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] v(\eta) d\eta.$$

Agora observe que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] = -\frac{1}{t^2} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) - \frac{1}{t^3} \nabla \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \cdot (\eta - x).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{1}{t^2} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) - \frac{1}{t^3} \nabla \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \cdot (\eta - x) \right] \\ &= \frac{2}{t^3} \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) + \frac{4}{t^4} \nabla \varphi\left(\frac{\eta - x}{t}\right) \cdot (\eta - x) + \\ &+ \frac{1}{t^5} \left[ (\eta_1 - x_1) \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \left( \frac{\eta - x}{t} \right) \cdot (\eta - x) + (\eta_2 - x_2) \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \left( \frac{\eta - x}{t} \right) \cdot (\eta - x) \right]. \end{aligned}$$

Agora definindo

$$\phi_7(\eta, x, t) = t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{t} \varphi \left( \frac{\eta - x}{t} \right) \right],$$

$$\phi_8(\eta, x, t) = t \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{t} \varphi \left( \frac{\eta - x}{t} \right) \right],$$

vemos que existem  $K_7 > 0$  e  $K_8 > 0$  tais que

$$|\phi_7(\eta, x, t)| < K_7, \quad |\phi_8(\eta, x, t)| < K_8 \quad (3.2.11)$$

para todos  $\eta, x \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$  e vale

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \left[ \int_{\Omega_\delta} \phi_7(\eta, x, t) u(\eta) d\eta + \int_{\Omega_\delta} \phi_8(\eta, x, t) v(\eta) d\eta \right], \quad (3.2.12)$$

para todos  $x \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$ .

Seja  $K = \max\{K_1, \dots, K_8\}$ . Logo de (3.2.6), (3.2.8), (3.2.10) e (3.2.11) segue

$$|\phi_i(\eta, x, t)| < K \quad i = 1, \dots, 8$$

para todos  $x, \eta \in \Omega_\delta$ ,  $t > T_0$ .

Das representações (3.2.5), (3.2.9) e (3.2.12) temos

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial(x, t)^\alpha}(x, t) \right| \leq \frac{K}{2\pi t} \int_{\Omega_\delta} (|u(\eta)| + |v(\eta)|) d\eta, \quad (3.2.13)$$

para todos  $x \in \Omega_\delta$ ,  $t > T_0$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  com  $|\alpha| \leq 1$ .

Agora usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$\int_{\Omega_\delta} (|u(\eta)| + |v(\eta)|) d\eta \leq \sqrt{|\Omega_\delta|} (||u||_{L^2(\Omega_\delta)} + ||v||_{L^2(\Omega_\delta)})$$

$$\leq \sqrt{|\Omega_\delta|} (||u||_{H^1(\Omega_\delta)} + ||v||_{L^2(\Omega_\delta)}).$$

Voltando em (3.2.13) obtemos

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial(x, t)^\alpha}(x, t) \right| \leq \frac{K}{2\pi t} \sqrt{|\Omega_\delta|} (||u||_{H^1(\Omega_\delta)} + ||v||_{L^2(\Omega_\delta)})$$

de onde segue

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial (x, t)^\alpha} (x, t) \right|^2 &\leq \frac{K^2 |\Omega_\delta|}{4\pi^2 t^2} (\|u\|_{H^1(\Omega_\delta)} + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)})^2 \\ &\leq \frac{K^2 |\Omega_\delta|}{2\pi^2 t^2} (\|u\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \Omega_\delta$  e  $t > T_0$ , como queríamos demonstrar. ■

Vale observar que a constante  $K$ , escolhida como o máximo de  $K_1, \dots, K_8$  depende dos valores máximos de  $\varphi$  e suas derivadas de primeira ordem na bola fechada  $\overline{B}(0, \lambda)$ , onde  $\lambda$  é escolhido satisfazendo  $\frac{\text{diam}(\Omega_\delta)}{T_0} < \lambda < 1$ . Assim,  $K$  depende de todos elementos mencionados no enunciado do teorema exceto  $u, v$  e  $w$ . Todavia, conhecido o domínio  $\Omega$  e escolhido  $\delta > 0$ , pode-se fixar  $T_0$ , escolher  $\lambda$  e determinar precisamente o valor de  $K$  calculando-se os valores máximos de  $\varphi$  e suas derivadas primeiras em  $\overline{B}(0, \lambda)$ .

**Corolário 3.2.2.** *Nas mesmas hipóteses do teorema 3.2.1 vale a seguinte estimativa*

$$\|w(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|w_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{2K^2 |\Omega_\delta|^2}{\pi^2 t^2} [\|u\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2] \quad (3.2.14)$$

para todo  $t > T_0$ .

**Demonstração:** Escrevendo-se as quatro desigualdades obtidas de (3.2.1) para todos os multi-índices  $\alpha \in \mathbb{N}^3$  com  $|\alpha| \leq 1$  e em seguida somando-as e integrando tal soma com relação à  $x$  em  $\Omega_\delta$  obtem-se (3.2.14). ■

### 3.3 Decaimento Local de Energia para Soluções com Energia Finita.

Nesta Seção vamos mostrar que a estimativa (3.2.14) também é válida para as soluções do problema de Cauchy para a equação de ondas com os dados iniciais em  $H^1(\mathbb{R}^2)$  e  $L^2(\mathbb{R}^2)$  com suporte contido em alguma região limitada.

**Teorema 3.3.1.** *Sejam  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$  e  $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$  funções tais que  $\text{supp } u, \text{supp } v \subset \Omega_\delta$  para alguma vizinhança  $\Omega_\delta$  de um domínio limitado  $\Omega$ . Seja  $w \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a solução do problema de Cauchy generalizado*

$$\begin{cases} \square w &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, 0) &= u(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, 0) &= v(x), & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

*Então existe  $K > 0$ , independente de  $u$  e  $v$  tal que*

$$\|w(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|w_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 t^2} \left[ \|u\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right] \quad (3.3.15)$$

*para todo  $t > T_0 > \text{diam}(\Omega_\delta)$ .*

**Demonstração:** Procederemos como na demonstração do teorema 2.4.3.

Sejam

$$(u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_\delta), \quad (v_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_\delta)$$

tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{em } H^1(\Omega_\delta) \quad (3.3.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \quad \text{em } L^2(\Omega_\delta). \quad (3.3.17)$$

Da demonstração do teorema(2.4.3) sabemos que a sequência  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  de soluções dos problemas de Cauchy

$$\begin{cases} \square w_n &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w_n(x, 0) &= u_n(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_n(x, 0) &= v_n(x), & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

onde  $u_n$  e  $v_n$  são nulos fora de  $\Omega_\delta$ , converge para a solução  $w$  do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square w &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, 0) &= u(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, 0) &= v(x), & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

em  $H^1(\Sigma)$  para todo compacto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .

Mais ainda, das proposições 2.5.3 e 2.5.4 temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(., t) = w(., t) \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2) \quad (3.3.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} w_n(., t) = w_t(., t) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^2), \quad (3.3.19)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Agora, aplicando o corolário 3.2.2 à  $w_n$  temos

$$\|w_n(., t)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} w_n(., t) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 t^2} \left[ \|u_n\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v_n\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right]$$

para todo  $n = 1, 2, \dots$ , e todo  $t > T_0 > \text{diam}\Omega_\delta$ .

Passando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  nesta última desigualdade e usando (3.3.16), (3.3.17), (3.3.18) e (3.3.19) obtemos a estimativa (3.3.15). ■

Para resolver o problema controle precisaremos de uma estimativa de decaimento local de energia, como a estimativa (3.3.15), para o problema de Cauchy com tempo reverso e dados iniciais em algum  $t = T > 0$ .

**Proposição 3.3.2.** *Sejam  $u \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$ ,  $v \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$  onde  $\Omega_\delta$  é uma vizinhança do domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \square w &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, T) &= u(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, T) &= v(x), & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

onde  $T > T_0 > \text{diam}\Omega_\delta$ . Então existe  $K > 0$  independente de  $u$  e  $v$  tal que

$$\|w(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|w_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 T^2} \left[ \|u\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right]. \quad (3.3.20)$$

**Demonstração:** Seja  $W \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square W &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ W(x, 0) &= u(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ W_t(x, 0) &= -v(x), & \text{em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

A estimativa (3.2.14) do corolário(3.2.2) aplicada a  $W$  fornece

$$\|W(\cdot, \tau)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|W_\tau(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 \tau^2} \left[ \|u\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right]. \quad (3.3.21)$$

para todo  $\tau > T_0 > \text{diam}\Omega_\delta$ .

Fazendo  $\tau = T - t$  e observando que

$$W(\cdot, T - t) = w(\cdot, t),$$

$$W_\tau(\cdot, T - t) = -w_t(\cdot, t)$$

obtemos de 3.3.21 a seguinte estimativa

$$\|w(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|w_t(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 (T - t)^2} \left[ \|u\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right],$$

sempre que  $T - t > T_0 > \text{diam}\Omega_\delta$ .

Agora fazendo  $t = 0$  na última desigualdade e lembrando que  $T > T_0$  segue (3.3.20). ■

Por último observamos que usando a proposição 3.3.2 podemos provar o teorema abaixo, cuja demonstração omitiremos por ser completamente análoga à demonstração do teorema 3.3.1

**Teorema 3.3.3.** *Sejam  $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$  funções tais que  $\text{supp}u$ ,  $\text{supp}v \subset \Omega_\delta$  para alguma vizinhança  $\Omega_\delta$  de um domínio limitado  $\Omega$ . Seja  $T > T_0 > \text{diam}\Omega_\delta$ .*

*Seja  $w \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a solução do problema de Cauchy generalizado*

$$\begin{cases} \square w &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w(x, T) &= u(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ w_t(x, T) &= v(x), & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

*Então existe  $K > 0$ , independente de  $u$  e  $v$  tal que*

$$\|w(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|w_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 T^2} \left[ \|u\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right]. \quad (3.3.22)$$

■

## Capítulo 4

# O Problema de Controle

### 4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo, é estudar o problema de controle exato na fronteira para a equação de onda num retângulo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Nesse estudo usaremos toda a teoria exposta nos capítulos anteriores para exibir todos os detalhes da demonstração do principal teorema deste trabalho.

### 4.2 O Problema de Valor Inicial e Fronteira

Seja  $\Sigma$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Denotaremos por  $C^\infty(\bar{\Sigma})$  o conjunto das restrições das funções de  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $n = 2$  ou  $3$ , ao fecho  $\bar{\Sigma}$  do domínio  $\Sigma$ .

**Definição 4.2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado com fronteira  $\partial\Omega$  e  $T > 0$  um número real. Sejam  $h \in L^2(\partial\Omega \times [0, T])$ ,  $u \in H^1(\Omega)$  e  $v \in L^2(\Omega)$ . Uma função  $w \in H^1(\Omega \times [0, T])$  é solução do problema de valor inicial e fronteira*

$$\begin{cases} \square w &= 0, & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ w(x, 0) &= u(x), & \text{em } \Omega \\ w_t(x, 0) &= v(x), & \text{em } \Omega \\ w(x, t) &= h(x, t), & \text{em } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

se existir uma seqüência  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T])$  satisfazendo as seguintes condições

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$  em  $H^1(\Omega \times [0, T])$
- (ii)  $\square w_n = 0$  em  $\Omega \times [0, T]$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(\cdot, 0) = u$  em  $H^1(\Omega)$
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} w_n(\cdot, 0) = v$  em  $L^2(\Omega)$ ,
- (v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = h$  em  $L^2(\partial\Omega \times [0, T])$  ■

Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um retângulo então  $\Omega \times [0, T]$  é um paralelepípedo cuja base é  $\Omega$  e cuja superfície lateral é  $\partial\Omega \times [0, T]$ . Cada face de  $\partial\Omega \times [0, T]$  pode ser identificada com um retângulo e portanto um domínio de  $\mathbb{R}^2$ . Uma função  $h$  está em  $L^2(\partial\Omega \times [0, T])$  se  $h$  restrita a cada uma das faces de  $\partial\Omega \times [0, T]$  é função de quadrado integrável no correspondente retângulo.

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um retângulo e sejam  $f \in H^1(\Omega)$  e  $g \in L^2(\Omega)$  funções dadas. Seja  $w_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \square w_\delta &= 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w_\delta(x, 0) &= f_\delta(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(x, 0) &= g_\delta(x), & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

onde  $f_\delta \in H^1(\mathbb{R}^2)$  e  $g_\delta \in L^2(\mathbb{R}^2)$  são extensões de  $f$  e  $g$  respectivamente, com suportes em alguma vizinhança  $\Omega_\delta$  de  $\Omega$ .

Seja  $W_\delta$  a restrição de  $w_\delta$  ao paralelepípedo  $\Omega \times [0, T]$  onde  $T \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$ . Então:

- (i)  $W_\delta$  tem traço de quadrado integrável em  $\partial\Omega \times [0, T]$ .



(ii) Denotando por  $h_\delta$  o traço de  $W_\delta$  em  $\partial\Omega \times [0, T]$ , então,  $W_\delta$  satisfaz o problema de valor inicial e fronteira

$$\begin{cases} \square W_\delta &= 0 & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ W_\delta(., 0) &= f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial t} W_\delta(., 0) &= g & \text{em } \Omega \\ W_\delta(x, t) &= h_\delta & \text{em } \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

**Demonstração:** (i) Seja  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  uma função tal que  $\varphi \equiv 1$  em alguma vizinhança aberta de  $\overline{\Omega} \times [0, T]$ . Em particular,

$$\varphi \equiv 1 \text{ numa vizinhança aberta de } \partial\Omega \times [0, T].$$

A função  $\varphi w_\delta$  está em  $H^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  e coincide com  $W_\delta$  em  $\overline{\Omega} \times [0, T]$ . Assim, o traço de  $\varphi w_\delta$  em  $\partial\Omega \times [0, T]$  será o traço de  $W_\delta$  aí. Para ver que  $\varphi w_\delta$  tem traço de quadrado integrável em  $\partial\Omega \times [0, T]$  fixemos uma face  $\Gamma_0$  de  $\partial\Omega \times [0, T]$  e provemos que  $\varphi w_\delta$  tem tal traço em  $\Gamma_0$ . Seja  $\Gamma$  o plano que contém  $\Gamma_0$  e seja  $\Sigma$  o semi espaço que contém  $\Omega \times [0, T]$ . Podemos identificar  $\Sigma$  com  $\mathbb{R}_+^3$ . A restrição de  $\varphi w_\delta$  à  $\Sigma$  é vista como uma função de  $H^1(\mathbb{R}_+^3)$ . Logo, do teorema de traço ( capítulo1, teorema 1.5.3 ) segue que  $\varphi w_\delta$  tem traço de quadrado integrável em  $\Gamma$ , e portanto o mesmo vale em  $\Gamma_0$ , uma vez que  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ .

Como isto pode ser feito para cada uma das quatro faces segue que  $\varphi w_\delta$  tem traço em  $L^2(\partial\Omega \times [0, T])$ . Assim  $W_\delta$  tem traço em  $L^2(\partial\Omega \times [0, T])$ .

Seja  $h_\delta$  o traço de  $W_\delta$  em  $\partial\Omega \times [0, T]$ . Então, para toda sequência  $(\psi_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, T])$  com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = W_\delta, \text{ em } H^1(\Omega \times [0, T])$$

se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n|_{\partial\Omega \times [0, T]} = h_\delta, \text{ em } L^2(\partial\Omega \times [0, T]).$$

(ii) Seja  $(w_n)_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  uma sequência satisfazendo a definição 2.4.1 de solução do problema de Cauchy, para o problema de Cauchy 4.2.1. Fazendo  $K = \overline{\Omega} \times [0, T]$ , a condição (i) da definição 2.4.1 fornece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_\delta, \text{ em } H^1(K).$$



Como  $W_\delta$  é a restrição de  $w_\delta$  à  $\Omega \times [0, T]$  temos então a condição (i) da definição 4.2.1 satisfeita.

Como  $\square w_n = 0$  em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  para todo  $n$  então o mesmo valerá em  $\Omega \times [0, T]$ . Portanto vale a condição (ii) da definição 4.2.1. As condições (iii) e (iv) de 4.2.1 seguem imediatamente das respectivas condições na definição 2.4.1. tomando-se  $t_0 = 0$  e  $f$  e  $g$  em vez de  $u$  e  $v$ .

Seja agora  $\psi_n = \varphi w_n$ . Como  $\varphi \equiv 1$  em  $\overline{\Omega} \times [0, T]$  temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_\delta = W_\delta \text{ em } H^1(\Omega \times [0, T]).$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi w_n|_{\partial\Omega \times [0, T]} = h_\delta, \text{ em } L^2(\partial\Omega \times [0, T]).$$

Mas  $\varphi \equiv 1$  numa vizinhança aberta de  $\partial\Omega \times [0, T]$ , logo o último limite pode ser escrito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n|_{\partial\Omega \times [0, T]} = h_\delta, \text{ em } L^2(\partial\Omega \times [0, T]).$$

Assim a condição (v) da definição 4.2.1 está satisfeita.

Portanto  $W_\delta = w_\delta|_{\Omega \times [0, T]}$  é solução do problema de valor inicial e fronteira 4.2.2 no sentido da definição 4.2.1 ■

## 4.3 O Teorema Principal

Esta seção é dedicada à demonstração do teorema central deste trabalho.

**Teorema 4.3.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um retângulo com fronteira denotada  $\partial\Omega$ . Dados  $u \in H^1(\Omega)$  e  $v \in L^2(\Omega)$ , existe  $T > 0$  e  $h \in L^2(\partial\Omega \times [0, T])$  tal que a solução do problema de valor inicial e fronteira*

$$\begin{cases} \square w &= 0, & \text{em } \Omega \times [0, T] \\ w(x, 0) &= u(x), & \text{em } \Omega \\ w_t(x, 0) &= v(x), & \text{em } \Omega \\ w(x, t) &= h(x, t), & \text{em } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \quad (4.3.3)$$

*satisfaz a condição*

$$w(., T) \equiv w_t(., T) \equiv 0 \text{ em } \Omega.$$

**Demonstração:** Sejam  $\delta > 0$  e  $\Omega_\delta = \Omega + B(0, \delta)$ . Suponhamos que existam extensões  $u_\delta$  e  $v_\delta$  de  $u$  e  $v$  respectivamente tais que

$$u_\delta \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad v_\delta \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

$$\text{supp} u_\delta, \text{supp} v_\delta \subset \Omega_\delta,$$

e que a solução  $y$  do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square y &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ y(., 0) &= u_\delta & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ y_t(., 0) &= v_\delta & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (4.3.4)$$

satisfaça a condição

$$y(., T) = y_t(., T) = 0 \text{ em } \Omega. \quad (4.3.5)$$

Agora, chamando  $w$  a restrição de  $y$  ao paralelepípedo  $\Omega \times [0, T]$ , segue da proposição 4.2.1 que  $w$  tem traço  $h$  sobre  $\partial\Omega \times [0, T]$  com  $h \in L^2(\partial\Omega \times [0, T])$  e satisfaz todas as condições do teorema. Assim, a demonstração do teorema se reduz a provar que existe  $T > 0$  tal que cada par de dados iniciais  $(u, v) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  possui uma extensão especial  $(u_\delta, v_\delta) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2)$  com a propriedade de que a solução  $y$  do problema de Cauchy 4.3.4 tenha seus dados de Cauchy identicamente nulos no instante  $T$ .

Do exposto no capítulo 1 segue que existe um operador extensão

$$\begin{aligned} E: H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2) \\ (f, g) &\longmapsto (f_\delta, g_\delta) \end{aligned}$$

que é linear, satisfaz

$$\text{supp} f_\delta, \text{supp} g_\delta \subset \Omega_\delta$$



e

$$\begin{aligned}\|f_\delta\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 &= \|f_\delta\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}^2, \\ \|g_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \|g_\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 = \|g\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ . Assim, o operador  $E$  é linear e limitado. Sejam  $(f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  e  $(f_\delta, g_\delta) = E(f, g)$ . Seja  $w_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a única solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square w_\delta &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ w_\delta(x, 0) &= f_\delta(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(x, 0) &= g_\delta(x) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Agora, para  $T > 0$  a ser escolhido posteriormente considere o operador linear

$$\begin{aligned}S_T: H_0^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta) &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2) \\ (f_\delta, g_\delta) &\longmapsto \left( w_\delta(\cdot, T), \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(\cdot, T) \right)\end{aligned}$$

onde  $w_\delta$  é a solução do problema de Cauchy (4.3.6). Vimos no capítulo 2 que  $S_T$  é limitado. Observe que

$$\left( w_\delta(\cdot, T), \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(\cdot, T) \right) = S_T(f_\delta, g_\delta) = S_T E(f, g). \quad (4.3.7)$$

Seja  $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  com  $\theta \equiv 1$  em  $\Omega$  e  $\text{supp } \theta \subset \Omega_\delta$ . Considere agora o problema de Cauchy retrógrado

$$\begin{cases} \square z &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ z(x, T) &= \theta(x) w_\delta(x, T) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ z_t(x, T) &= \theta(x) \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(x, T) & \text{em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (4.3.8)$$

cujas solução  $z$  está em  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ . Segue das proposições 2.5.3 e 2.5.4 que

$$z(\cdot, 0) \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

e possuem suportes compactos.

Seja  $y \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a única solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \square y &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ y(x, 0) &= f_\delta(x) - z(x, 0) & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ y_t(x, 0) &= g_\delta(x) - \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

É fácil verificar que  $w_\delta - z$  satisfaz (4.3.9). Logo  $y = w_\delta - z$

Agora observe que

$$y(x, T) = w_\delta(x, T) - z(x, T) = (1 - \theta(x))w_\delta(x, T)$$

e como  $\theta \equiv 1$  em  $\Omega$  tem-se

$$y(., T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Analogamente verifica-se que

$$y_t(., T) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Assim, de acordo com o que observamos no início da demonstração, a restrição de  $y$  ao paralelepípedo  $\Omega \times [0, T]$  resolverá o problema de controle se  $T, f$  e  $g$  forem escolhidos de tal forma que

$$\begin{aligned} f_\delta - z(., 0) & \text{ estende } u, \\ g_\delta - \frac{\partial z}{\partial t}(., 0) & \text{ estende } v \end{aligned}$$

ao plano, ou seja,  $f - z(., 0) \Big|_\Omega = u$  e  $g - \frac{\partial z}{\partial t}(., 0) \Big|_\Omega = v$  em  $\Omega$

Seja  $S_T^-$  o operador linear definido por

$$\begin{aligned} S_T^- : H_0^1(\Omega_\delta) \times L^2(\Omega_\delta) & \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \times L^2(\mathbb{R}^2) \\ (J(., T), J_t(., T)) & \longmapsto (J(., 0), J_t(., 0)) \end{aligned}$$

onde  $J \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  é a única solução de

$$\begin{cases} \square J = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ J(., T) \in H^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) \\ J_t(., T) \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp} J(., T), \text{supp} J_t(., T) \subset \Omega_\delta. \end{cases} \quad (4.3.10)$$

Claramente  $S_T^-$  é limitado. Agora observe que se  $z$  satisfaz o problema (4.3.8) então

$$\begin{aligned} \left( z(., 0), \frac{\partial z}{\partial t}(., 0) \right) &= S_T^- (z(., T), z_t(., T)) \\ &= S_T^- \left( \theta(.)w_\delta(., T), \theta(.)\frac{\partial}{\partial t}w_\delta(., T) \right) \\ &= S_T^- \left[ \theta(.) \left( w_\delta(., T), \frac{\partial}{\partial t}w_\delta(., T) \right) \right] \\ &= S_T^- [\theta(.) (S_T E(f, g))] \\ &= (S_T^- \theta S_T E) (f, g). \end{aligned}$$



Denotando por  $R$  a restrição à  $\Omega$ , a condição

$$f - z(., 0) \Big|_{\Omega} = u \text{ e } g - \frac{\partial z}{\partial t}(., 0) \Big|_{\Omega} = v$$

pode ser reescrita na forma

$$[I - (RS_T^{-1} \theta S_T E)](f, g) = (u, v)$$

onde  $I$  denota o operador identidade.

Seja  $K_T = RS_T^{-1} \theta S_T E$ . Do exposto acima vemos que

$$K_T : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

é um operador linear limitado e

$$\left( z(., 0), \frac{\partial z}{\partial t}(., 0) \right) = K_T(f, g) \text{ em } \Omega.$$

Assim, para concluirmos a demonstração do teorema devemos provar que existe  $T > 0$  tal que para todo  $(u, v) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  a equação

$$(I - K_T)(f, g) = (u, v) \quad (4.3.11)$$

possui solução  $(f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Para tanto, provaremos que para  $T > 0$ , suficientemente grande, o operador  $K_T$  é uma contração (capítulo 1 teorema 1.2.1).

Agora utilizaremos as estimativas de decaimento local de energia obtidas no capítulo 3.

Seja  $T > \text{diam}(\Omega_\delta)$  e  $w_\delta \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a solução do problema de Cauchy (4.3.6). Do teorema 3.3.1 segue

$$\begin{aligned} \|w_\delta(., T)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t} w_\delta(., T) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 &\leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 T^2} \left[ \|f_\delta\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|g_\delta\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right] \\ &\leq (C+1) \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 T^2} \left[ \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Seja  $J \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$  a solução do problema de Cauchy (4.3.10). Do teorema 3.3.3 segue

$$\|J(., 0)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|J_t(., 0)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 T^2} \left[ \|J(., T)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|J_t(., T)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right]. \quad (4.3.13)$$

Como  $\|K_T(f, g)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 = \|z(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|z_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2$ , usando (4.3.13) para a solução  $z$  do problema (4.3.8) segue

$$\begin{aligned} \|K_T(f, g)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 &\leq \|z(\cdot, 0)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|z_t(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \\ &\leq \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 T^2} \left[ \|z(\cdot, T)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|z_t(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right] \\ &= \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 T^2} \left[ \|\theta(\cdot)w_\delta(\cdot, T)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \|\theta(\cdot)\frac{\partial}{\partial t}w_\delta(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right] \\ &\leq \frac{\Gamma(\theta)2K^2|\Omega_\delta|^2}{\pi^2 T^2} \left[ \|w_\delta(\cdot, T)\|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial t}w_\delta(\cdot, T) \right\|_{L^2(\Omega_\delta)}^2 \right]. \end{aligned}$$

onde  $\Gamma(\theta)$  é uma constante que depende dos valores máximos de  $\theta$  e suas derivadas em  $\Omega_\delta$ .

Agora usando a desigualdade (4.3.12) concluímos

$$\|K_T(f, g)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(1+C)\Gamma(\theta)4K^4|\Omega_\delta|^4}{\pi^4 T^4} \left[ \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

ou seja, vale:

$$\|K_T(f, g)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\lambda^2}{T^4} \|(f, g)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2. \quad (4.3.14)$$

para todo  $(f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , onde  $\lambda = \frac{2K^2|\Omega_\delta|^2\sqrt{(1+C)\Gamma(\theta)}}{\pi^2}$ .

De (4.3.14) segue

$$\begin{aligned} \|K_T\| &= \sup_{\substack{(f, g) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ f \neq 0, g \neq 0}} \frac{\|K_T(f, g)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}}{\|(f, g)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}} \leq \frac{\lambda}{T^2}. \end{aligned}$$

Logo, para  $T > \sqrt{\lambda}$  tem-se  $\|K_T\| < 1$ , como queríamos demonstrar. ■

## 4.4 Considerações Finais

O método utilizado para resolver o problema de controle estudado aqui utiliza fortemente alguns atributos da equação considerada, que são:

- linearidade
- reversibilidade no tempo
- decaimento de energia
- regularidade da solução.

A linearidade e a reversibilidade no tempo permitiu a construção do operador linear  $K_T$ , o decaimento de energia permitiu provar que para  $T$  grande  $K_T$  é contração e a regularidade da solução do problema de Cauchy considerado permitiu utilizar o teorema de traço para obter o controle.

Para qualquer equação, ou sistema de equações que possua os quatro atributos acima pode-se aplicar o método e estudar a controlabilidade exata.

Um exemplo onde o método pode ser aplicado é o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - c \Delta u_i = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u_i(., 0) = u_i^0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(., 0) = u_i^1 & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.4.15)$$

$i = 1, 2, \dots, k$ , onde  $c \in \mathbb{R}$  é constante.

Este sistema é formado por  $n$  equações de ondas totalmente independentes uma das outras; isto é, trata-se de um sistema de equações desacopladas.

Outro sistema importante na física matemática é o sistema de Lamé, da elasticidade clássica [4]. Tal sistema em  $\mathbb{R}^3$  tem a forma

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u \quad (4.4.16)$$

onde  $\rho, \lambda$  e  $\mu$  são constantes satisfazendo

$$\rho > 0, \quad \mu > 0, \quad \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0$$

e  $u = (u_1, u_2, u_3)$  é função vetorial dependendo de  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$  e  $t \in \mathbb{R}$ .

De acordo com [4], o sistema (4.4.16) pode ser estudado através de um argumento que o reduz à

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - c_1 \Delta \Phi = 0 \quad (4.4.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi - c_2 \Delta \Psi = 0 \quad (4.4.18)$$

onde  $\Phi$  é função escalar,  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  é função vetorial e

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

As igualdades (4.4.17) e (4.4.18) formam um sistema de equações de ondas desacopladas. A redução de (4.4.16) em (4.4.17) e (4.4.18) é válida para funções regulares, isto é, suficientemente diferenciáveis.

Estudar controle para o sistema (4.4.16), como estudamos nesta dissertação para a equação de onda, depende de garantirmos a validade do processo de redução mencionado acima, para os dados iniciais em  $H^1(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3$ .

Esta é uma questão interessante, que não foi tratada aqui porém será objeto de nossos estudos futuramente.

[4] Polland, G. *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, 1976.

[7] Grimaldi, P. *Controlability and Observability of Systems with singularities*, J. Math. Phys. et Appliq. Vol. 1981, pp. 1-10.

[8] John, F. *Partial Differential Equations*, Macmillan, New York, 1966.

[9] Medeiros, L.A.J. e N. Amorim. *Equações de Ondas e Integrais de Poisson*, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1978.

[10] Kato, T. *Elementary Introduction to the Theory of Partial Differential Equations*, CRC PRESS, Inc., Boca Raton, Florida, 1984.



## Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R.A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, Inc. Orlando-Flórida, 1975.
- [2] Bartle, R.G. *The Elements of Intregation and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.
- [3] Brezis, H. *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.
- [4] Budaev, B. *Diffraction by wedges*, Longman Scientific & Technical, UK, 1995.
- [5] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2000.
- [6] Folland, G. *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, 1976.
- [7] Grisvard, P. *Controlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités* J. Math. Pures et Appliq., 68, 1989, pp 215-259.
- [8] John, F. *Partial Differential Equations*, Fourth Edition, Spring-Verlag, N.Y. 1986.
- [9] Medeiros, L.A.J. e N. Andrade *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1978.
- [10] Raymond, X.S. *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, CRC PRESS, Inc. , Boca Raton, Flórida, 1991



- [11] Russell, D.L. *Unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies in Applied Mathematics, vol. II, 1973, pp 189-211.
- [12] Shatah, J. and M. Struwe *Geometric Wave Equations*, AMS - Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2000.
- [13] Sobolev, S.L. *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, AMS, Providence, 1963.
- [14] Thoe, D. W. and E.C. Zachmanoglow, *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover, 1986.
- [15] Yoshida, J., *Functional Analysis*, sixth edition, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [16] Zygmund, A. and R.L. Wheeden *Measure and integral - An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1977



