

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

GUSTAVO ANDRÉS DIAZ

Estabilidade radial no regime de caos confinado: separação da componente radial do expoente de Lyapunov em três dimensões.

Guaratinguetá
2019

Gustavo Andrés Diaz

Estabilidade radial no regime de caos confinado: separação da componente radial do expoente de Lyapunov em três dimensões.

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física.

Orientador: Prof^a Dr^a. Daniela Cardozo Mourão

Coorientador: Prof^o Dr. Othon Cabo Winter

Guaratinguetá

2019

Diaz, Gustavo Andrés
D542e Estabilidade radial no regime de caos confinado : separação da componente radial do expoente de Lyapunov em três dimensões / Gustavo Andrés Diaz – Guaratinguetá, 2019.
40 f : il.
Bibliografia: f. 30

Trabalho de Graduação em Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019.
Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Daniela Cardozo Mourão
Coorientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

1. Mecânica celeste. 2. Caos quântico. 3. Estabilidade I. Título.

CDU 521.1

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

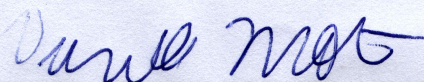
GUSTAVO ANDRÉS DIAZ

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA"

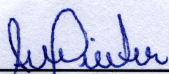
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Profº Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

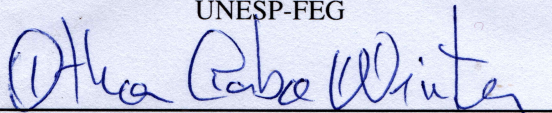
BANCA EXAMINADORA:



Profª Drª. Daniela Cardozo Mourão
Orientador/UNESP-FEG



Profª Drª. Silvia Maria Giuliatti Winter
UNESP-FEG



Profº Dr. Othon Cabo Winter
UNESP-FEG

Dezembro, 2019

DADOS CURRICULARES

GUSTAVO ANDRÉS DIAZ

NASCIMENTO 20/05/1996 - Buenos Aires/Argentina

FILIAÇÃO Leonardo Andrés Diaz
Ângela Cristina Quirino Lins Diaz

2010 / 2011 Ensino Médio
Escola Estadual Gabriel Prestes

2012 / 2013 Ensino Médio

Colégio Técnico de Lorena "Prof. Nelson Pesciotta"

Dedico este trabalho ao meu avô que se foi muito cedo, mas deixou sua risada ecoando forte em mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que passaram pela minha graduação, seja aluno ou professor, de alguma forma ou de outra aprendi algo com eles. Agradeço a meus pais por me darem todo o suporte que conseguiram. E por fim, mas não menos importante, meus amigos próximos que me aguentaram (e aguentam) meus surtos até agora.

Este trabalho contou com o apoio das seguintes entidades:

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo processo 2016/24561-0

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

“Neste mundo, existem muitas coisas estranhas. Entretanto, não importa o quão estranha ou bizarra seja uma visão, se não há ninguém lá, se não há ninguém para ver, se não há pessoas envolvidas, não passa de um mero fenômeno. Apenas algo que aconteceu. Isso porque, neste mundo, as pessoas são os seres mais misteriosos que existem.”
(Yuuko Ichihara)

RESUMO

O Expoente característico de Lyapunov é uma ferramenta utilizada na dinâmica orbital de forma a identificar quando um sistema possui caos confinado. Identificar então o comportamento das órbitas, garante a nós qual será a natureza dos corpos que o compõe. Em outras palavras, buscamos saber a estabilidade do sistema. Como o Expoente de Lyapunov traz a informação de como será a progressão da órbita ao longo do tempo, faz-se o inverso do expoente, denominado tempo de Lyapunov, que nos fornece a divergência entre órbitas próximas. Tendo isso em vista, há casos onde o Tempo de Lyapunov não coincide com o comportamento observado das órbitas. Casos onde o Tempo de Lyapunov é curto mostram que há instabilidade na órbita, porém ao longo do tempo o comportamento caótico não é visto, denotando o caos confinado. Por isso, neste trabalho estudamos a progressão do expoente de Lyapunov das componentes do movimento, separando a componente radial da trajetória de Atlas sendo perturbado por outros satélites, e comparamos ao comportamento do Expoente de Lyapunov geral do sistema a fim de identificar qual delas é a contribuinte para o regime de caos confinado em um sistema tridimensional.

PALAVRAS-CHAVE: Caos. Mecânica celeste. Planetas e satélites: evolução dinâmica e estabilidade.

ABSTRACT

The characteristic Lyapunov Exponent is a tool used in orbital dynamics to identify when a system has confined chaos. Identifying then the behavior of the orbits, assures us what will be the nature of the bodies that compose it. In other words, we seek to know the stability of the system. Since the Lyapunov Exponent provides information on how the orbit will progress over time, the inverse of the exponent, called Lyapunov Time, gives us the divergence between nearby orbits. In view of this, there are cases where Lyapunov Time does not coincide with the observed behavior of the orbits. Cases where Lyapunov Time is short show that there is instability in the orbit, but over time chaotic behavior is not seen, denoting confined chaos. Therefore, in this work we study the progression of the Lyapunov exponent from the motion components, separating the radial component from the Atlas trajectory being disturbed by other satellites, and compare the behavior of the general Lyapunov exponent of the system in order to identify which one is contributor to the confined chaos regime to a three-dimensional system.

KEYWORDS: Chaos. Celestial mechanics. Planets and satellites: dynamical evolution and stability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Cálculo do expoente característico de Lyapunov. (a) Método do cálculo direto. Feito a partir das separações iniciais e finais no espaço de fase. (b) Método da renormalização. O deslocamento da trajetória da partícula muda de acordo com a distância original	16
Figura 2	Gráfico contendo os Expoentes de Lyapunov de Atlas e valores artificiais das contribuições na região de $\log \gamma = -100$	24
Figura 3	Gráfico das órbitas do sistema contendo Atlas. A distância radial está normalizada para o semi-eixo maior de Prometeu.	25
Figura 4	Gráfico do Expoente de Lyapunov e suas contribuições a partir da perspectiva A . Equivale a um <i>zoom</i> da Figura 2 que abrange os valores de -8 a 0 para os logaritmos, ou seja, os valores artificiais obtidos na região de $\log \gamma = -100$ foram desconsiderados.	26
Figura 5	Gráfico do Expoente de Lyapunov e suas contribuições a partir da perspectiva B	27
Figura 6	Distância radial das órbitas do sistema contendo Atlas.	28

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Condições iniciais de Atlas, Prometeu, Pandora, Jano e Epimeteu utilizadas para as simulações. Tabela retirada de Cooper et al. (2014, Tabela 6)	19
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

T_L	Tempo de Lyapunov
-------	-------------------

LISTA DE SÍMBOLOS

γ	Expoente de Lyapunov Geral
γ_{rad}	Expoente de Lyapunov relativo à componente radial do movimento
γ_*	Expoente de Lyapunov relativo ao resto das componentes do movimento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	DESENVOLVIMENTO	18
2.1	METODOLOGIA	18
2.1.1	Análise do Expoente de Lyapunov de Atlas	18
2.1.1.1	Simulações em 2D de Atlas	20
2.1.1.2	Simulações em 3D de Atlas	21
2.1.1.3	Perspectiva A	23
2.1.1.4	Perspectiva B	24
2.2	RESULTADOS	25
2.2.1	Movimento 2D de Atlas	25
2.2.2	Movimento 3D de Atlas	26
3	CONCLUSÃO	29
	REFERÊNCIAS	30
	ANEXO A – CÓDIGO UTILIZADO PARA A INTEGRAÇÃO DA PERSPECTIVA A	31
	ANEXO B – CÓDIGO UTILIZADO PARA A INTEGRAÇÃO DA PERSPECTIVA B	40

1 INTRODUÇÃO

Em sistemas dinâmicos sabemos que pequenas variações nas condições iniciais podem acarretar em grandes mudanças na trajetória de um corpo, isso indica que o sistema é caótico. Quando isso acontece, uma ferramenta útil para a compreensão, e até mesmo previsão, da estabilidade de um sistema caótico é o Expoente (característico) de Lyapunov (γ).

O método consiste em acompanhar a órbita do objeto de interesse e ver o quanto diverge de uma partícula fantasma (sem massa) com as condições iniciais com uma pequena diferença δ nos valores ($\sim 10^{-8}$ neste trabalho). Órbitas regulares terão uma certa variação na separação entre elas conforme o tempo evolui, porém não tão repentina como as caóticas. Quando ocorre a divergência entre as trajetórias, o cálculo do Expoente de Lyapunov fornece uma medida quantitativa da taxa de divergência de duas trajetórias próximas.

Dada uma condição inicial arbitrária, duas órbitas separadas no espaço de fase por uma distância d_i no tempo t_i e d a separação no tempo t , a órbita será considerada caótica se d for relacionada a d_i por:

$$d = d_i \exp \gamma(t - t_i)$$

$$\therefore \gamma = \frac{\ln(d/d_i)}{t - t_i}$$

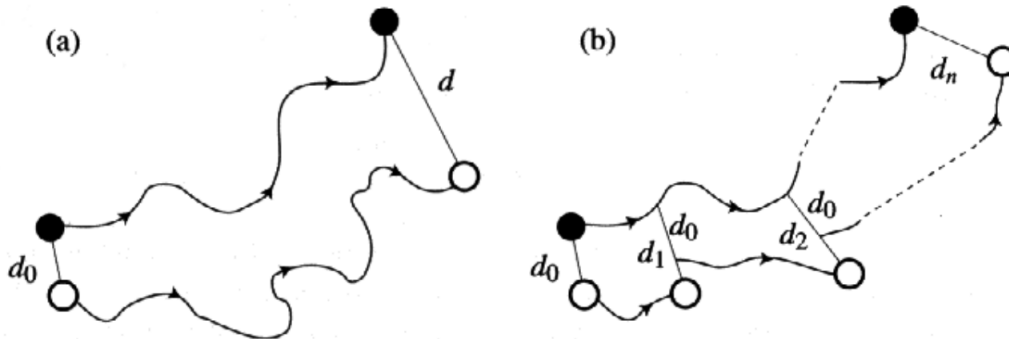
onde γ é o Expoente de Lyapunov, que, para valores positivos, teremos uma instabilidade exponencial; valores negativos implicam em um caso estável.

Em Benettin et al. (1980) vemos que para identificar essa taxa de divergência podemos realizar uma integração numérica de forma que temos:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{f=1}^n \frac{\ln(d_f/d_i)}{n\Delta t} \quad (1)$$

d_i é a distância inicial das órbitas no espaço de fase e d_f a distância das órbitas após um intervalo fixo de tempo (Δt). Se a trajetória deslocada está muito longe da original, γ deixa de ser uma divergência local. Portanto, é ideal uma normalização na separação das trajetórias (Figura 1) em intervalos fixos de tempo. Neste trabalho renormalizaremos a separação a cada $\Delta t = 10$ períodos orbitais de Prometeu.

Figura 1 – Cálculo do expoente característico de Lyapunov. (a) Método do cálculo direto. Feito a partir das separações iniciais e finais no espaço de fase. (b) Método da renormalização. O deslocamento da trajetória da partícula muda de acordo com a distância original



Fonte: Murray e Dermott (1999)

Tendo as forças que regem o movimento dos corpos de interesse, podemos integrar numericamente tais perturbações e analisar o comportamento destes ao longo do tempo. Portanto, se analisarmos o comportamento caótico utilizando a evolução do Expoente de Lyapunov, conforme o tempo de integração corre, buscamos a distância d_f das trajetórias no espaço de fase em intervalos fixos de tempo assim como visto também em Winter, O. C., Mourão, D. C. e Giuliatti Winter, S. M. (2010). Para tal, calculamos a distância inicial entre as órbitas no espaço de fase e, após uma iteração da integração, as posições e velocidades são renormalizadas e a distância recalculada.

$$d_i = \sqrt{(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2 + (v_{C_x} - v_{F_x})^2 + (v_{C_y} - v_{F_y})^2} \quad (2)$$

$$d_f = \sqrt{(x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2 + (v_{C_x} - v_{F_x})^2 + (v_{C_y} - v_{F_y})^2} \quad (3)$$

x_C e y_C são as posições do corpo, x_F e y_F as posições da partícula fantasma. v_{C_x} , v_{C_y} , v_{F_x} e v_{F_y} , as componentes X e Y das velocidades do corpo de interesse e a partícula fantasma.

O método também permite calcular o Tempo de Lyapunov (T_L), que é o inverso do Expoente de Lyapunov. Tal tempo "prevê" o tempo que um sistema caótico levaria para que duas órbitas divergissem de um fator e . Em outras palavras, conhecer como é a progressão do Expoente permite entender também a evolução do corpo no sistema em que estamos interessados em estudar.

Tendo isso em vista, existem corpos menores do sistema solar como asteroides, pequenos satélites, *moonlets* e partículas que possuem comportamento caótico tal como apontado por artigos como Soper, Franklin e Lecar (1990), Lecar, Franklin e Murison (1992), Levison e Duncan (1993), Franklin, Lecar e Murison (1993) e Whipple (1995); em Muñoz-Gutiérrez, Reyes-Ruiz e Pichardo (2015) também temos, por exemplo, o caso do cometa Halley que possui natureza caótica.

Portanto, haverá corpos que possuem tempo de Lyapunov curto e variações muito grandes em suas trajetórias, então acabam cruzando ou escapando do corpo que orbitam, ou seja, ocorrem variações radiais significativas em suas órbitas. Porém, há também casos onde o T_L é pequeno e não possuem

uma variação muito grande, como é o caso de Milani e Nobili (1992), que aponta essa atipicidade para 522 Helga, asteroide orbitando o Sol e perturbado por Júpiter.

Esta é a situação analisada em Winter, O. C., Mourão, D. C. e Giuliatti Winter, S. M. (2010), além do caso de uma *moonlet* no anel F de Saturno perturbada por Prometeu e Pandora. Tais corpos possuem tempos de Lyapunov baixos, mas não apresentam grandes variações radiais. Tais casos são de órbitas que apresentam o que se denomina *caos confinado*.

No mesmo artigo realizam a separação da componente radial do movimento desses dois corpos e analisam sua contribuição para o Expoente de Lyapunov sob uma perspectiva planar. Sendo assim, neste trabalho também vamos separar a componente radial e analisar sua contribuição para o Expoente de Lyapunov, porém do ponto de vista tridimensional e o satélite Atlas sendo o corpo de interesse.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 METODOLOGIA

2.1.1 Análise do Expoente de Lyapunov de Atlas

Para obter os resultados que serão apresentados, fez-se uso da linguagem de programação Fortran de maneira que as integrações fossem compatíveis com o integrador Radau (códigos apresentados no Anexo A e Anexo B).

O caso analisado é o sistema contendo o satélite Atlas orbitando Saturno e sendo perturbado por Prometeu, Pandora, Jano e Epimeteu, que também estão em órbita ao redor de Saturno e interagindo consigo mesmos. As condições iniciais para cada um dos corpos foi retirada de Cooper et al. (2014, Tabela 6) de forma a construir:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_G + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^6 \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_G + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^6 \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_G + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^6 \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_G + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^6 \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_5 = \vec{F}_G + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 5}}^6 \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_6 = \vec{F}_G + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 6}}^6 \vec{F}_i$$

As expressões acima $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$, $\vec{F}_6$ são as forças atuando sobre cada corpo sendo eles, respectivamente, Prometeu (1), Pandora (2), Atlas (3), a partícula fantasma (4), Jano (5) e Epimeteu (6); e a força gravitacional de Saturno contendo as contribuições do achatamento ($\vec{F}_G$).

Pelo método utilizado, criamos uma partícula fantasma que possui a mesma posição e velocidade de Atlas com uma pequena variação $\delta = 10^{-8}$. E o tempo de integração realizada pelo integrador é de 10^7 períodos orbitais de Prometeu e, assim como já mencionado, a normalização das distâncias a cada 10 períodos orbitais do mesmo.

Atlas		Unidades
x	$0.211131940542735\text{E}+05 \pm 1.4635592526$	km
y	$0.135369294031375\text{E}+06 \pm 0.3073324691$	km
z	$-0.117994571363612\text{E}+05 \pm 0.8603172593$	km
$\dot{x}$	$-0.163985169014096\text{E}+02 \pm 0.0001739128$	km s^{-1}
$\dot{y}$	$0.265851621781565\text{E}+01 \pm 0.0000060008$	km s^{-1}
$\dot{z}$	$0.121515798698684\text{E}+01 \pm 0.0000933200$	km s^{-1}
Prometeu		Unidades
x	$-0.139075476234052\text{E}+06 \pm 0.6523101432$	km
y	$-0.299630283368139\text{E}+04 \pm 0.1379426749$	km
z	$0.121750245927928\text{E}+05 \pm 0.5254326536$	km
$\dot{x}$	$0.437822964122312\text{E}+00 \pm 0.0000727584$	km s^{-1}
$\dot{y}$	$-0.164562743532697\text{E}+02 \pm 0.0000041728$	km s^{-1}
$\dot{z}$	$0.117690166176359\text{E}+01 \pm 0.0000627568$	km s^{-1}
Pandora		Unidades
x	$0.882713818598140\text{E}+05 \pm 1.0113932949$	km
y	$0.110230473398456\text{E}+06 \pm 0.8085330496$	km
z	$-0.158256977509867\text{E}+05 \pm 0.7225425073$	km
$\dot{x}$	$-0.127680928599784\text{E}+02 \pm 0.0001101016$	km s^{-1}
$\dot{y}$	$0.102096992841201\text{E}+02 \pm 0.0000603615$	km s^{-1}
$\dot{z}$	$0.353489290599632\text{E}+00 \pm 0.0000797166$	km s^{-1}
Jano		Unidades
x	$0.117969400691064\text{E}+06 \pm 1.1338663430$	km
y	$0.925426967020695\text{E}+05 \pm 0.7704515369$	km
z	$-0.173829056177225\text{E}+05 \pm 0.6284654451$	km
$\dot{x}$	$-0.990085822183523\text{E}+01 \pm 0.0001120748$	km s^{-1}
$\dot{y}$	$0.124533083800756\text{E}+02 \pm 0.0000386836$	km s^{-1}
$\dot{z}$	$-0.803656578358153\text{E}-01 \pm 0.0000722691$	km s^{-1}
Epimeteu		Unidades
x	$0.188797545005757\text{E}+05 \pm 1.6617867438$	km
y	$-0.149365181703202\text{E}+06 \pm 0.1356577159$	km
z	$0.103158087510301\text{E}+05 \pm 0.8851737386$	km
$\dot{x}$	$0.157497527566054\text{E}+02 \pm 0.0001515017$	km s^{-1}
$\dot{y}$	$0.174499934532077\text{E}+01 \pm 0.0000416942$	km s^{-1}
$\dot{z}$	$-0.148701850883106\text{E}+01 \pm 0.0000860619$	km s^{-1}

Tabela 1 – Condições iniciais de Atlas, Prometeu, Pandora, Jano e Epimeteu utilizadas para as simulações. Tabela retirada de Cooper et al. (2014, Tabela 6)

2.1.1.1 Simulações em 2D de Atlas

Para a separação da componente radial do expoente de Lyapunov no plano, utilizou-se um referencial girante ($OX'Y'$), como visto em Winter, O. C., Mourão, D. C. e Giuliatti Winter, S. M. (2010), onde o eixo X' está sempre na direção radial de Atlas, que é o corpo que estamos analisando a estabilidade. Desta forma, as tranformações das novas coordenadas são:

$$\theta_A = \arctan\left(\frac{y_A}{x_A}\right) \quad (1)$$

$$x'_A = x_A \cos \theta_A + y_A \sin \theta_A \quad (2)$$

$$y'_A = -x_A \sin \theta_A + y_A \cos \theta_A \quad (3)$$

$$v'_{Ax} = v_{Ax} \cos \theta_A + v_{Ay} \sin \theta_A \quad (4)$$

$$v'_{Ay} = -v_{Ax} \sin \theta_A + v_{Ay} \cos \theta_A \quad (5)$$

$$\theta_F = \arctan\left(\frac{y_F}{x_F}\right) \quad (6)$$

$$x'_F = x_F \cos \theta_F + y_F \sin \theta_F \quad (7)$$

$$y'_F = -x_F \sin \theta_F + y_F \cos \theta_F \quad (8)$$

$$v'_{Fx} = v_{Fx} \cos \theta_F + v_{Fy} \sin \theta_F \quad (9)$$

$$v'_{Fy} = -v_{Fx} \sin \theta_F + v_{Fy} \cos \theta_F \quad (10)$$

onde θ_A e θ_F são os ângulos entre os dois sistemas de referência, x'_A , y'_A , x'_F e y'_F os valores as novas posições de Atlas e da partícula fantasma, e v'_{Ax} , v'_{Ay} , v'_{Fx} , v'_{Fy} os valores das novas velocidades do satélite e da partícula. Com as novas coordenadas agora calcula-se a distância da componente radial entre as órbitas no espaço de fase:

$$d_{rad} = |x'_A - x'_F|$$

Usando essa nova distância faz-se novamente a razão com relação a d_i de forma que podemos calcular o Expoente de Lyapunov relativo à componente. Portanto, temos a contribuição da componente radial como sendo:

$$\gamma_{rad} = \sum_{f=1}^n \frac{\ln(d_{rad}/d_i)}{n\Delta t} \quad (11)$$

E o resto da contribuição:

$$\gamma_* = \sum_{f=1}^n \frac{\ln(\sqrt{(y'_A - y'_F)^2 + (v'_{Ax} - v'_{Fx})^2 + (v'_{Ay} - v'_{Fy})^2}/d_i)}{n\Delta t} \quad (12)$$

Note que neste trabalho o que definiremos como resto das contribuições não é necessariamente o que seria o resto do que seria a subtração de γ e γ_{rad} e sim as outras componentes que contribuem para o movimento no espaço de fase nos novos sistemas de coordenadas fora a componente radial.

2.1.1.2 Simulações em 3D de Atlas

Para a análise em 3D do movimento de Atlas utilizou-se como base o conceito de cosseno diretor de um vetor para a separação da componente radial. Além disso, utilizou-se duas perspectivas (**A** e **B**) para observar a contribuição radial do Expoente de Lyapunov. A primeira (**A**) já vista do caso planar mas aplicada ao sistema em 3 dimensões onde compara-se as distâncias das componentes dos corpos no espaço de fase num dado instante com a distância inicial (d_i) entre os corpos. Enquanto na segunda (**B**), para a contribuição radial de γ , é feita a razão da distância radial num dado instante pela distância radial inicial; e para γ_* é feita a razão do resto das contribuições do Expoente de Lyapunov no mesmo instante pelo valor inicial desta.

Portanto, usamos o vetor posição de Atlas e a partícula fantasma para encontrar o ângulo entre eles:

$$\cos \theta_r = \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{r}_F}{|\vec{r}_A| \cdot |\vec{r}_F|} \quad (13)$$

$$\therefore \sin \theta_r = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_r} \quad (14)$$

E para as velocidades:

$$\cos \theta_{v_A} = \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{r}_A}{|\vec{v}_A| \cdot |\vec{r}_A|} \quad (15)$$

$$\therefore \sin \theta_{v_A} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{v_A}} \quad (16)$$

e

$$\cos \theta_{v_F} = \frac{\vec{v}_F \cdot \vec{r}_A}{|\vec{v}_F| \cdot |\vec{r}_A|} \quad (17)$$

$$\therefore \sin \theta_{v_F} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{v_F}} \quad (18)$$

Portanto, temos como construir as componentes dos vetores posição e assim calcular a distância entre os dois corpos no espaço de fase:

$$d_{rad} = |r_A - r_F \cos \theta_r| \quad (19)$$

$$d_{\perp} = |r_F \sin \theta_r| \quad (20)$$

onde d_{rad} é a componente radial e $d_{\perp}$ a componente que está sempre no plano ortogonal ao plano da componente radial do vetor posição de Atlas no novo sistema de coordenadas. É preciso ressaltar também que iremos utilizar as velocidades do referencial cartesiano visto que a componente angular das velocidades tem direções diferentes em 3D.

2.1.1.3 Perspectiva A

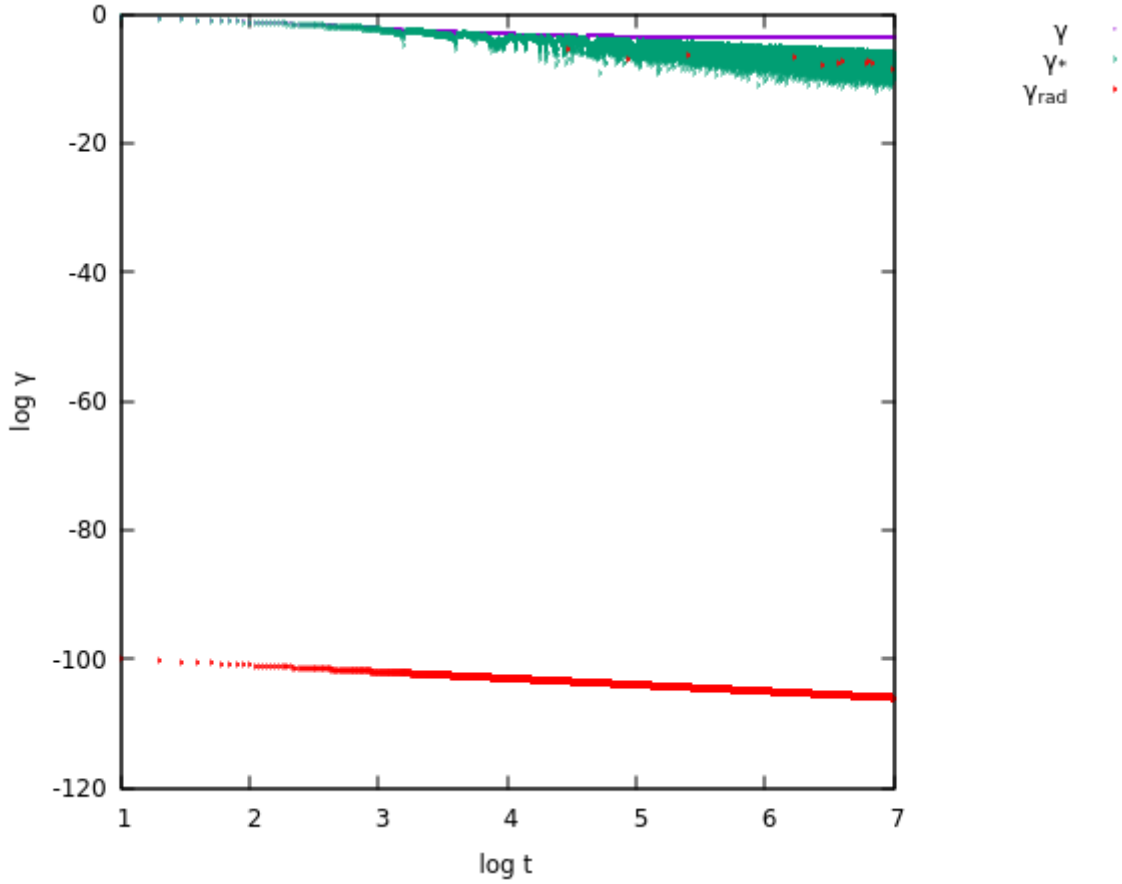
Como anteriormente, a contribuição da componente radial usa a razão de d_{rad} por d_i . Consequentemente, obtem-se:

$$\gamma_{rad} = \sum_{f=1}^n \frac{\ln(d_{rad}/d_i)}{n\Delta t} \quad (21)$$

$$\gamma_* = \sum_{f=1}^n \frac{\ln(\sqrt{d_{\perp}^2 + (v_{Ax} - v_{Fx})^2 + (v_{Ay} - v_{Fy})^2 + (v_{Az} - v_{Fz})^2}/d_i)}{n\Delta t} \quad (22)$$

É preciso ressaltar que nessa perspectiva conforme a divergência das distâncias aumenta (dispersão pequena), o valor da razão presente nos logaritmos das fórmulas de γ_{rad} e γ_* tendem a valores menores que 1 de forma que foi feita uma previsão de erro no código e na execução da simulação. A excessão feita é devido ao fato de ser utilizado um acumulador para o cálculo da dispersão que, conforme a integração prossegue, se o valor acumulado for negativo o logaritmo não possui valor definido. Portanto, quando o valor obtido é menor que 1, lançamos mão de ajustar o valor para 1×10^{-99} o que gera os valores (artificiais) da Figura 2.

Figura 2 – Gráfico contendo os Expoentes de Lyapunov de Atlas e valores artificiais das contribuições na região de $\log \gamma = -100$.



2.1.1.4 Perspectiva B

Agora, para o ponto de vista **B** do movimento de Atlas utilizaremos o valor inicial de d_{rad} , que definiremos como $d_{i_{rad}}$ para o cálculo da contribuição radial, e utilizaremos também:

$$d_{i_{resto}} = \sqrt{d_{\perp}^2 + (v_{Ax} - v_{Fx})^2 + (v_{Ay} - v_{Fy})^2 + (v_{Az} - v_{Fz})^2} \quad (23)$$

para compararmos o resto da contribuição do Expoente de Lyapunov para o movimento em 3D de Atlas. Ou seja, veremos quanto a parte radial e as outras contribuições divergem com relação aos seus valores iniciais. Portanto temos:

$$\gamma_{rad} = \sum_{f=1}^n \frac{\ln(d_{rad}/d_{i_{rad}})}{n\Delta t} \quad (24)$$

$$\gamma_* = \sum_{f=1}^n \frac{\ln(\sqrt{d_{\perp}^2 + (v_{Ax} - v_{Fx})^2 + (v_{Ay} - v_{Fy})^2 + (v_{Az} - v_{Fz})^2}/d_{i_{resto}})}{n\Delta t} \quad (25)$$

Note que, neste ponto de vista, relacionamos as distâncias das componentes com seus valores iniciais,

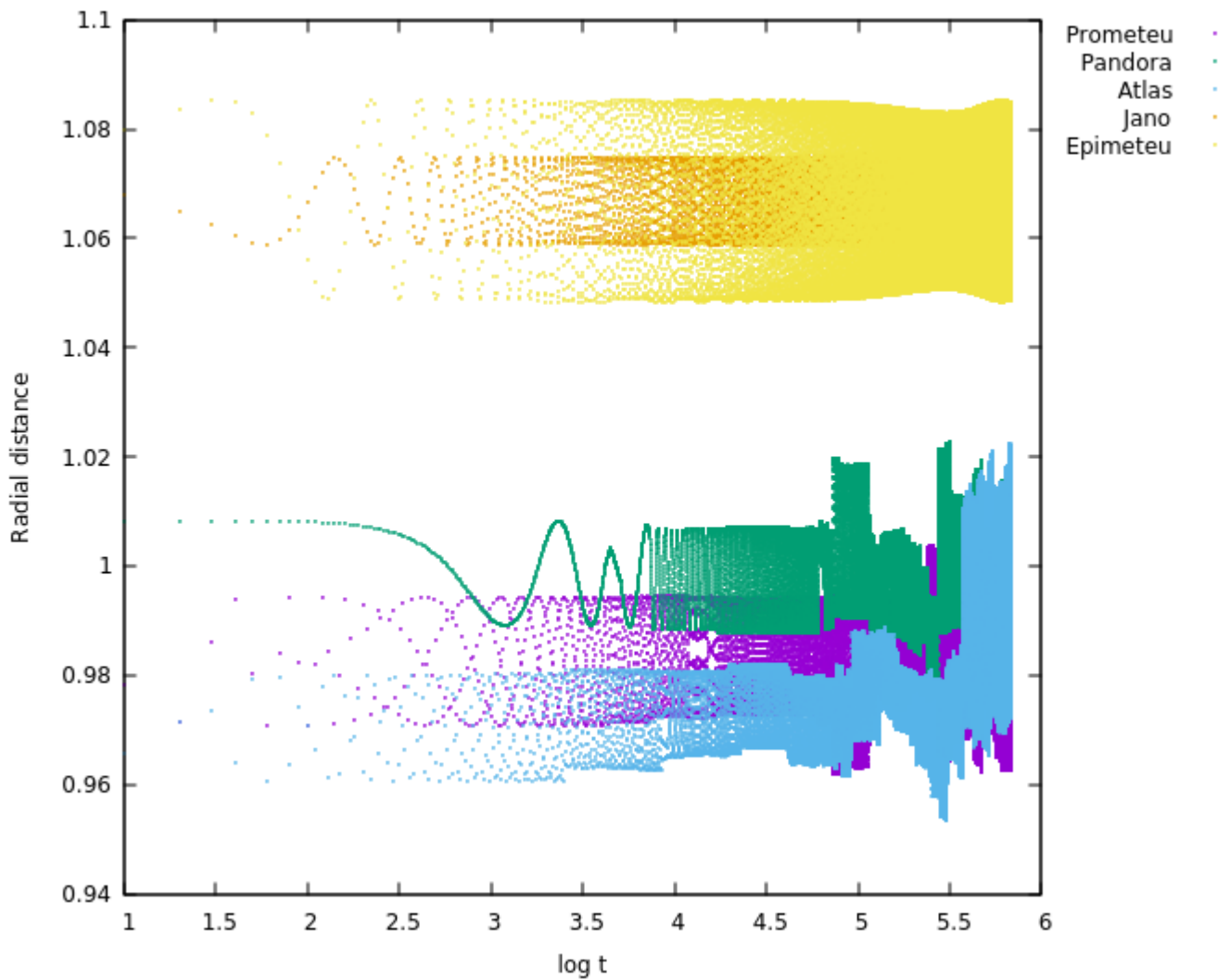
o que implica na possibilidade de surgirem valores para $\log \gamma_{rad}$ e $\log \gamma_*$ que sejam maiores do que os obtidos para $\log \gamma$.

2.2 RESULTADOS

2.2.1 Movimento 2D de Atlas

As simulações para o caso planar de Atlas nos forneceram os dados para a construção dos gráficos a seguir. Durante a simulação, a partir de determinado tempo, o comportamento radial das órbitas de Prometeu, Pandora e Atlas indica (Figura 3) que há grandes variações nas órbitas, o que geraria um encontro entre os corpos. E de fato isto não deveria ocorrer, as órbitas deveriam ser estáveis, o que nos leva então a analisar o caso tridimensional do sistema.

Figura 3 – Gráfico das órbitas do sistema contendo Atlas. A distância radial está normalizada para o semi-eixo maior de Prometeu.



2.2.2 Movimento 3D de Atlas

Com a discordância vista no caso 2D do sistema, a integração numérica incluindo a componente Z fez-se necessária de forma que temos os gráficos da Figura 4 e da Figura 5 para as duas abordagens **A** e **B** do Expoente de Lyapunov.

Na perspectiva **A** (Figura 4) temos, assim como visto anteriormente, a componente radial apresentando estabilidade e o resto das componentes contribuindo mais fortemente para o Expoente de Lyapunov geral. É visível também que o padrão de γ_* se assemelha ao de γ indicando novamente que uma análise mais profunda para descobrir onde se encontra o principal motivo do Expoente indicar a existência de caos mas não ocorrer grandes alterações visíveis na órbita do corpo.

Figura 4 – Gráfico do Expoente de Lyapunov e suas contribuições a partir da perspectiva **A**. Equivale a um *zoom* da Figura 2 que abrange os valores de -8 a 0 para os logaritmos, ou seja, os valores artificiais obtidos na região de $\log \gamma = -100$ foram desconsiderados.

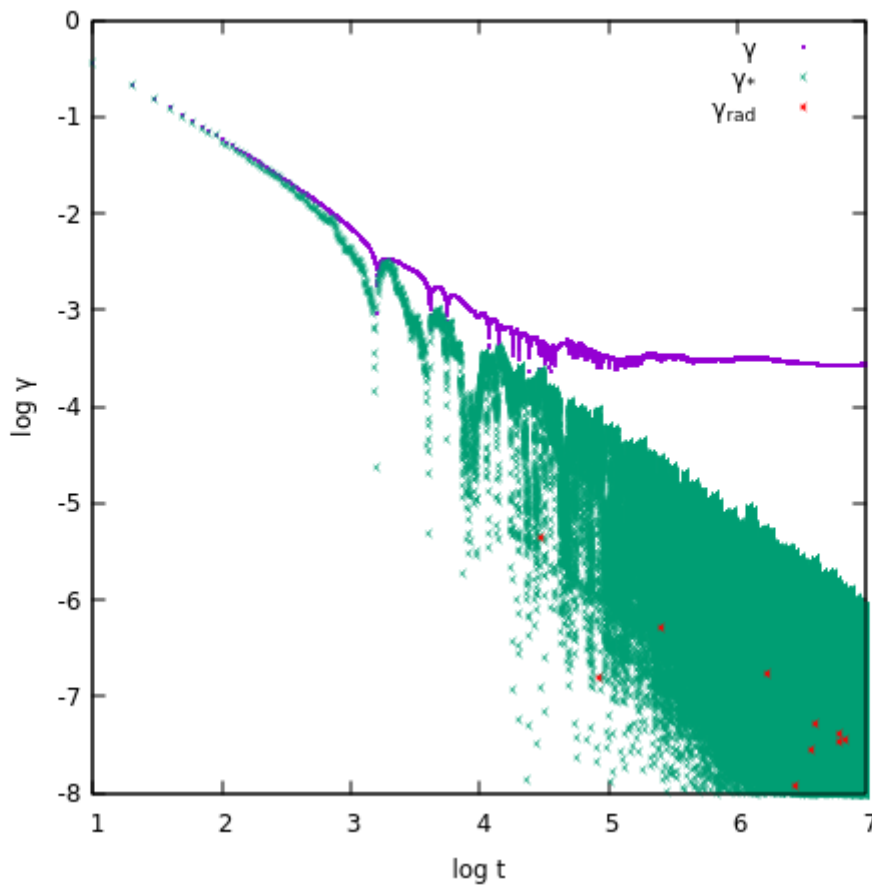
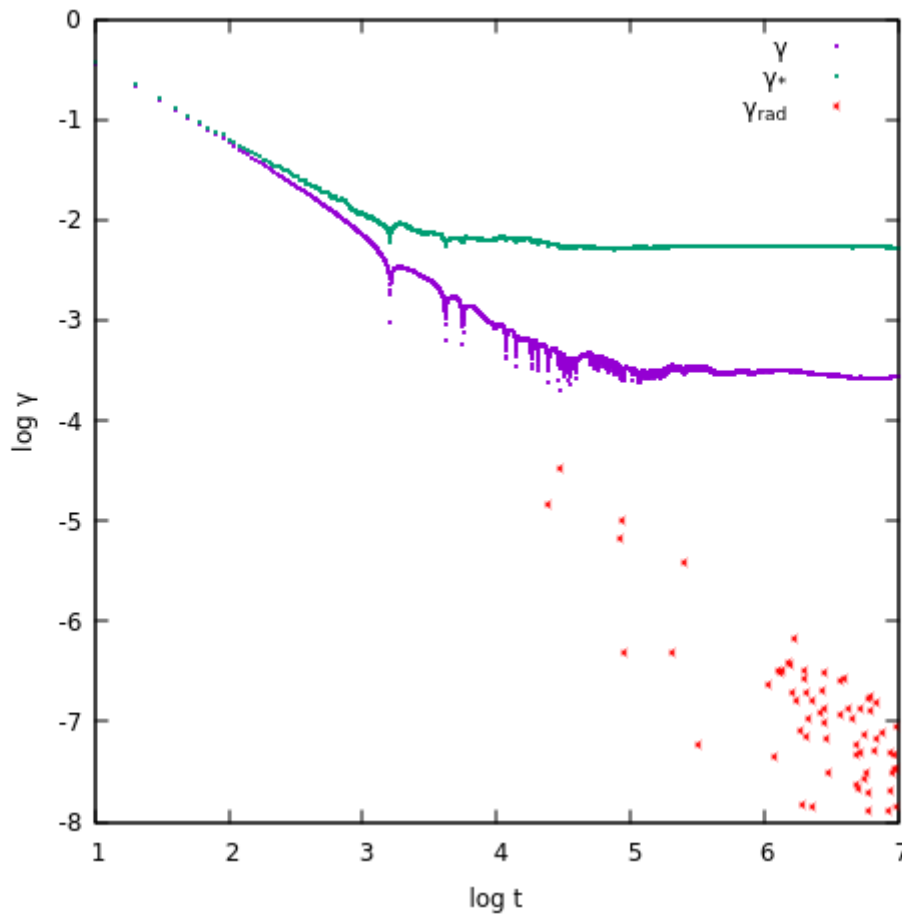


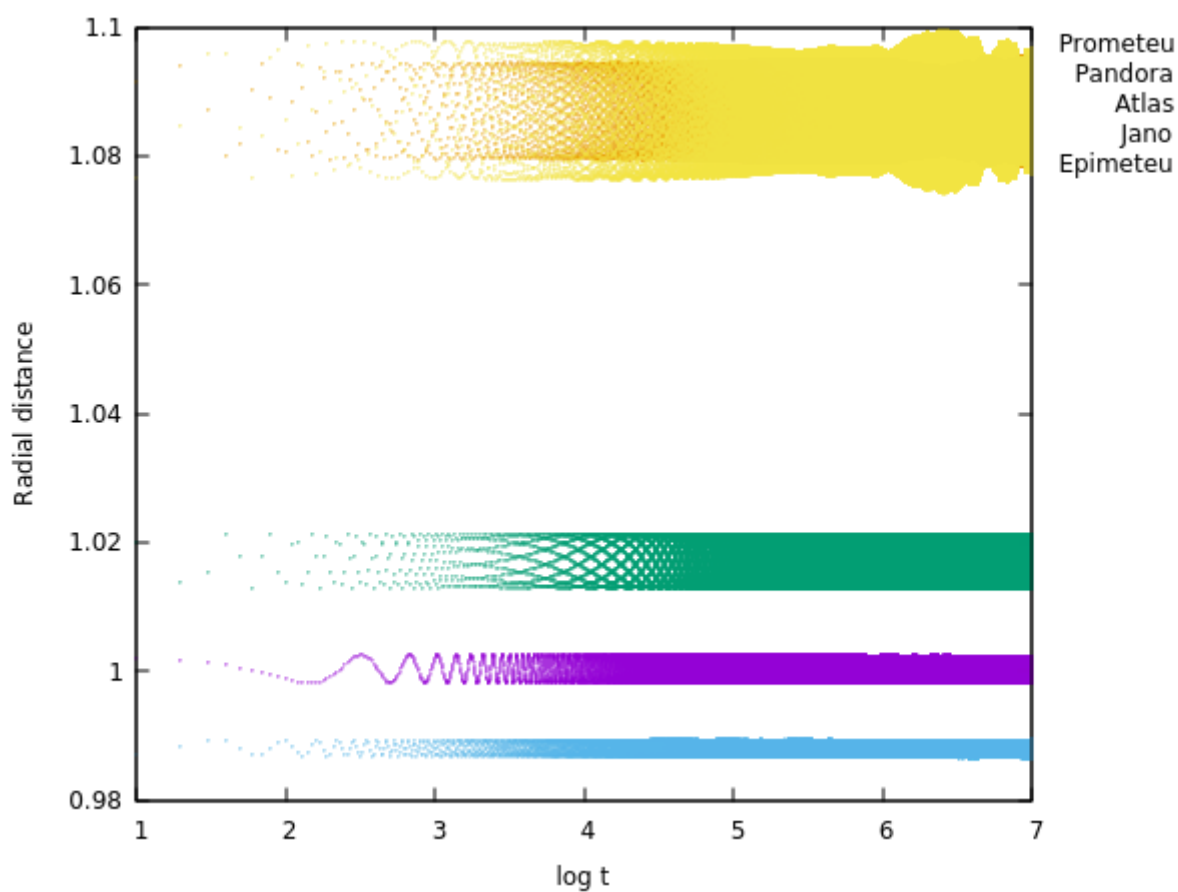
Figura 5 – Gráfico do Expoente de Lyapunov e suas contribuições a partir da perspectiva **B**.



Já o segundo ponto de vista **B** (Figura 5) é apenas uma outra maneira de comparar e visualizar o comportamento dos expoentes das contribuições. Para γ_{rad} a divergência com relação ao primeiro valor obtido para a distância das componentes radiais no espaço de fase é pequena, de forma que vemos nesse caso também o que seria o regime de caos confinado. Enquanto que para γ_* ocorre divergência no espaço de fase. Note que, como já comentado, os valores de $\log \gamma_*$ são maiores que os obtidos para o $\log \gamma$. Também observamos semelhança com o padrão de γ ao longo do tempo como visto também na perspectiva **A**.

Diferentemente do caso 2D de Atlas, o gráfico das órbitas na Figura 6 mostra a estabilidade radial que os corpos deveriam ter no sistema.

Figura 6 – Distância radial das órbitas do sistema contendo Atlas.



3 CONCLUSÃO

Vimos que o Expoente de Lyapunov é uma ferramenta utilizada para identificar e estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos que tem natureza caótica, já que utilizando o seu inverso, o Tempo de Lyapunov, temos uma previsão de quando o corpo analisado irá começar a ter grandes variações na trajetória. Tais variações no curso nem sempre são observadas mesmo apresentando um T_L pequeno, o que indica a presença de caos confinado e direcionando estudos que analisem como a componente radial do movimento contribui para o Expoente de Lyapunov.

Dito isto, visto que é possível realizar a separação da componente radial em casos planares, fez-se o mesmo para Atlas num sistema perturbado por Prometeu, Pandora, Jano e Epimeteu, entretanto os resultados indicavam colisão entre as órbitas. Isso levou ao conceito geral deste trabalho: estudar a componente radial de Atlas em três dimensões.

Ao realizar a análise do comportamento de γ_{rad} e γ_* apresentamos as abordagens **A** e **B** que, igualmente mostram a estabilidade na componente radial da trajetória de Atlas. Portanto, isto indica que algo além contribui para que tais objetos estejam em regime caótico e não apresentar grandes variações em suas órbitas.

Assim sendo, é de interesse trabalhos futuros que apliquem o método apresentado e analisem a contribuição da componente radial de corpos que estão em regime caótico e possuem um T_L muito curto e, também, explorar quais seriam as outras componentes que contribuem para os valores de γ_* .

REFERÊNCIAS

- BENETTIN G. GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems - a method for computing all of them. I - theory. II - numerical application. **Meccanica**, v. 15, p. 9–30, Mar 1980.
- COOPER, S. R. N. J.; MURRAY, C. D.; EVANS, M. W. Saturn's inner satellites : orbits, masses and the chaotic motion of atlas from new cassini imaging observations. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 149, n. 1, p. 27, dec 2014.
- FRANKLIN, F.; LECAR, M.; MURISON, M. Chaotic orbits and long term stability: an example from asteroids of the Hilda group. **The Astronomical Journal**, v. 105, p. 2336, Jun 1993.
- LECAR, M.; FRANKLIN, F.; MURISON, M. On predicting long-term orbital instability: a relation between the Lyapunov time and sudden orbital transitions. **The Astronomical Journal**, v. 104, p. 1230, Sep 1992.
- LEVISON, H. F.; DUNCAN, M. J. The gravitational sculpting of the Kuiper belt. **The Astrophysical Journal, Letters**, v. 406, p. L35, Mar 1993.
- MILANI, A.; NOBILI, A. M. An example of stable chaos in the solar system. **Nature**, v. 357, n. 6379, p. 569–571, Jun 1992.
- MUÑOZ-GUTIÉRREZ, M. A.; REYES-RUIZ, M.; PICHARDO, B. Chaotic dynamics of Comet 1P/Halley: Lyapunov exponent and survival time expectancy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 447, n. 4, p. 3775–3784, 01 2015.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.
- SOPER, P.; FRANKLIN, F.; LECAR, M. On the original distribution of the asteroids III. Orbits between Jupiter and Saturn. **Icarus**, v. 87, n. 2, p. 265–284, Oct 1990.
- WHIPPLE, A. L. Lyapunov times of the inner asteroids. **Icarus**, v. 115, n. 2, p. 347–353, Jun 1995.
- WINTER, O. C.; MOURÃO, D. C.; GIULIATTI WINTER, S. M. Short lyapunov time: a method for identifying confined chaos. **A&A**, v. 523, p. A67, 2010.

ANEXO A – CÓDIGO UTILIZADO PARA A INTEGRAÇÃO DA PERSPECTIVA A

Aqui temos as principais passagens do código utilizado. Começando pela distância inicial no espaço de fase e a separação da componente radial:

```

c Distância inicial da partícula e a partícula fantasma
c (em 3D)
      DINIT= DSQRT( (X(7)-X(10))**2.d0+(X(8)-X(11))**2.d0+(X(9)-X(12))
      $**2.d0+
      $(V(7)-V(10))**2.d0+(V(8)-V(11))**2.d0+(V(9)-V(12))**2.d0)

c Separação radial do vetor posição da PARTÍCULA (ATLAS) e PFANTASMA
c Produto escalar do vetor posição
      rparrf= (X(7)*X(10)+X(8)*X(11)+X(9)*X(12))

c Produto escalar dos módulos do vetor posição
      rparrfmod= DSQRT(X(7)**2.d0+X(8)**2.d0+X(9)**2.d0)
      $*DSQRT(X(10)**2.d0+X(11)**2.d0+X(12)**2.d0)

c Cosseno diretor entre os vetores posição
      rparrfcos= rparrf/rparrfmod
      if (rparrfcos.gt.1.d0) then
          rparrfcos= 1.d0
          rparrfsin=0.d0
      else
          rparrfsin=dsqrt(1.d0-(rparrfcos*rparrfcos))
      endif

c Ângulo entre os vetores posição
C      rtheta= DACOS(rparrfcos)

c Distância radial final entre os vetores posição PARTÍCULA e PFANTASMA
c (Projeção de um vetor no outro)
      rpar = DSQRT(X(7)*X(7)+X(8)*X(8)+X(9)*X(9))
      rf = DSQRT(X(10)*X(10)+X(11)*X(11)+X(12)*X(12))
      rdistfinal= (rpar-rf*rparrfcos)

c Componente perpendicular do vetor posição da PFANTASMA
      rseno= (rf*rparrfsin)

```

c Separação radial do vetor velocidade da PARTÍCULA (ATLAS) e PFANTASMA

c Produto escalar do vetor velocidade

```
vparR= (V(7)*X(7)+V(8)*X(8)+V(9)*X(9))
```

```
vfR=(V(10)*X(7)+V(11)*X(8)+V(12)*X(9))
```

c Produto escalar dos módulos do vetor velocidade

```
vparRmod= DSQRT(V(7)**2.d0+V(8)**2.d0+V(9)**2.d0)
```

```
$*DSQRT(X(7)**2.d0+X(8)**2.d0+X(9)**2.d0)
```

```
vfRmod= DSQRT(V(10)**2.d0+V(11)**2.d0+V(12)**2.d0)
```

```
$*DSQRT(X(7)**2.d0+X(8)**2.d0+X(9)**2.d0)
```

c Cosseno diretor entre os vetores velocidade

```
vparRcos= vparR/vparRmod
```

```
vfRcos= vfR/vfRmod
```

```
if (vparRcos.gt.1.d0) then
```

```
    vparRcos= 1.d0
```

```
    vparRsin=0.d0
```

```
else
```

```
    vparRsin=dsqrt(1.d0-(vparRcos*vparRcos))
```

```
endif
```

```
if (vfRcos.gt.1.d0) then
```

```
    vfRcos= 1.d0
```

```
    vfRsin=0.d0
```

```
else
```

```
    vfRsin=dsqrt(1.d0-(vfRcos*vfRcos))
```

```
endif
```

c Distância radial final entre os vetores velocidade PARTÍCULA e PFANTASMA

```
vpar= DSQRT(V(7)**2.d0+V(8)**2.d0+V(9)**2.d0)
```

```
vf= DSQRT(V(10)**2.d0+V(11)**2.d0+V(12)**2.d0)
```

```
vrfinal= dabs(vpar*vparRcos - vf*vfRcos)
```

c Componente perpendicular do vetor velocidade da PFANTASMA

```
vseno= dabs(vpar*vparRsin - vf*vfRsin)
```

c RESTO (sem componente radial)

```
C      resto= DSQRT(rseno**2.d0+vrfinal**2.d0+vseno**2.d0)
```

```

      resto= DSQRT(rseno**2.d0+
$ (V(7)-V(10))**2.d0+(V(8)-V(11))**2.d0+(V(9)-V(12))**2.d0)

      DINITResto=resto
      DINITR=rdistfinal

```

Para o cálculo do Exponente de Lyapunov, recalculamos as distâncias e utilizamos o a razão das componentes com relação a DINIT:

```

c Primeira chamada
      CALL RA15 (X,V,TFINAL,PASSO,LL,NV,NCLASS,NOR,OUTPUT_STEP,fixed)

      DF= DSQRT((X(7)-X(10))**2.d0+(X(8)-X(11))**2.d0+(X(9)-X(12))
$**2.d0+
$ (V(7)-V(10))**2.d0+(V(8)-V(11))**2.d0+(V(9)-V(12))**2.d0)

C CALCULAR DE NOVO AS COMPONENTES!!
c Separação radial do vetor posição da PARTÍCULA (ATLAS) e PFANTASMA
c Produto escalar do vetor posição
      rparrf= (X(7)*X(10)+X(8)*X(11)+X(9)*X(12))

c Produto escalar dos módulos do vetor posição
      rparrfmod= DSQRT(X(7)**2.d0+X(8)**2.d0+X(9)**2.d0)
$*DSQRT(X(10)**2.d0+X(11)**2.d0+X(12)**2.d0)

c Cosseno diretor entre os vetores posição
      rparrfcos= rparrf/rparrfmod
      if (rparrfcos.gt.1.d0) then
        rparrfcos= 1.d0
        rparrfsin=0.d0
      else
        rparrfsin=dsqrt(1.d0-(rparrfcos*rparrfcos))
      endif

c Ângulo entre os vetores posição
      rtheta= DACOS(rparrfcos)

c Distância radial final entre os vetores posição PARTÍCULA e PFANTASMA
      rpar = DSQRT(X(7)*X(7)+X(8)*X(8)+X(9)*X(9))
      rf = DSQRT(X(10)*X(10)+X(11)*X(11)+X(12)*X(12))
      rdistfinal= (rpar-rf*rparrfcos)

```

c Componente perpendicular do vetor posição da PFANTASMA

```
rseno= (rf*rparrfsin)
```

c Separação radial do vetor velocidade da PARTÍCULA (ATLAS) e PFANTASMA

c Produto escalar do vetor velocidade

```
vparR= (V(7)*X(7)+V(8)*X(8)+V(9)*X(9))
```

```
vfR=(V(10)*X(7)+V(11)*X(8)+V(12)*X(9))
```

c Produto escalar dos módulos do vetor velocidade

```
vparRmod= DSQRT(V(7)**2.d0+V(8)**2.d0+V(9)**2.d0)
```

```
$*DSQRT(X(7)**2.d0+X(8)**2.d0+X(9)**2.d0)
```

```
vfRmod= DSQRT(V(10)**2.d0+V(11)**2.d0+V(12)**2.d0)
```

```
$*DSQRT(X(7)**2.d0+X(8)**2.d0+X(9)**2.d0)
```

c Cosseno diretor entre os vetores velocidade

```
vparRcos= vparR/vparRmod
```

```
vfRcos= vfR/vfRmod
```

```
if (vparRcos.gt.1.d0) then
```

```
    vparRcos= 1.d0
```

```
    vparRsin=0.d0
```

```
else
```

```
    vparRsin=dsqrt(1.d0-(vparRcos*vparRcos))
```

```
endif
```

```
if (vfRcos.gt.1.d0) then
```

```
    vfRcos= 1.d0
```

```
    vfRsin=0.d0
```

```
else
```

```
    vfRsin=dsqrt(1.d0-(vfRcos*vfRcos))
```

```
endif
```

c Distância radial final entre os vetores velocidade PARTÍCULA e PFANTASMA

```
vpar= DSQRT(V(7)**2.d0+V(8)**2.d0+V(9)**2.d0)
```

```
vf= DSQRT(V(10)**2.d0+V(11)**2.d0+V(12)**2.d0)
```

```
vrfinal= dabs(vpar*vparRcos - vf*vfRcos)
```

```
c Componente perpendicular do vetor velocidade da PFANTASMA
```

```
vseno= dabs(vpar*vparRsin - vf*vfRsin)
```

```
c RESTO (sem componente radial)
```

```
resto= DSQRT(rseno**2.d0+  
$(V(7)-V(10))**2.d0+(V(8)-V(11))**2.d0+(V(9)-V(12))**2.d0)
```

```
c razão entre as distâncias
```

```
R= dabs(DF/DINIT)
```

```
C RazãoDistRad AS RAZÕES DAS COMPONENTES SÃO DIVIDIDAS POR DINIT
```

```
RDR= dabs(rdistfinal/DINIT)
```

```
C RazãoDistAng
```

```
RDA= dabs(rseno/DINIT)
```

```
C RazãoVelRad
```

```
RVR= dabs(vrfinal/DINIT)
```

```
C RazãoVelAng
```

```
RVA= dabs(vseno/DINIT)
```

```
C RazãoResto
```

```
RR= dabs(resto/DINIT)
```

```
C CÁLCULO DO EXPOENTE
```

```
JA= DLOG(R)
```

```
NUM= JA
```

```
JADR= DLOG(RDR)
```

```
JADA= DLOG(RDA)
```

```
JAVR= DLOG(RVR)
```

```
JAVA= DLOG(RVA)
```

```
JAR= DLOG(RR)
```

```
NUMDR= JADR
```

```

NUMDA= JADA
NUMVR= JAVR
NUMVA= JAVA
NUMR=  JAR

```

```

if (NUM.lt.0.d0) NUM=1.d-99
if (NUMDR.lt.0.d0) NUMDR=1.d-99
if (NUMDA.lt.0.d0) NUMDA=1.d-99
if (NUMVR.lt.0.d0) NUMVR=1.d-99
if (NUMVA.lt.0.d0) NUMVA=1.d-99
if (NUMR.lt.0.d0) NUMR=1.d-99

```

```

TEMP= tfinal*1/(2.d0*PI)
GAMA= DLOG10(NUM/TEMP)
GAMADR= DLOG10(NUMDR/TEMP)
GAMADA= DLOG10(NUMDA/TEMP)
GMAVR= DLOG10(NUMVR/TEMP)
GMAVA= DLOG10(NUMVA/TEMP)
GAMAR= DLOG10(NUMR/TEMP)
TEMPsaida= DLOG10(TEMP)

```

```

i=1

```

```

NUMOLD=NUM
NUMOLDDR=NUMDR
NUMOLDDA=NUMDA
NUMOLDVR=NUMVR
NUMOLDVA=NUMVA
NUMOLDR=NUMR

```

```

if (NUM.lt.0.d0) NUM=1.d-99
if (NUMDR.lt.0.d0) NUMDR=1.d-99
if (NUMDA.lt.0.d0) NUMDA=NUMOLDDA
if (NUMVR.lt.0.d0) NUMVR=NUMOLDVR
if (NUMVA.lt.0.d0) NUMVA=NUMOLDVA
if (NUMR.lt.0.d0) NUMR=1.d-99

```

c RENORMALIZAÇÃO

c SEM RENORMALIZAÇÃO NAS COMPONENTES

```

MGX= (X(10)-X(7))/R
MGY= (X(11)-X(8))/R
MGZ= (X(12)-X(9))/R

```

```

MVX= (V(10)-V(7))/R
MVY= (V(11)-V(8))/R
MVZ= (V(12)-V(9))/R

```

```

X(10)= X(7)+MGX
X(11)= X(8)+MGY
X(12)= X(9)+MGZ
V(10)= V(7)+MVX
V(11)= V(8)+MVY
V(12)= V(9)+MVZ

```

```

CALL RA15 (X,V,TFINAL,PASSO,LL,NV,NCLASS,NOR,OUTPUT_STEP,fixed)

```

```

DF= DSQRT((X(7)-X(10))**2.d0+(X(8)-X(11))**2.d0+(X(9)-X(12))
$**2.d0+
$(V(7)-V(10))**2.d0+(V(8)-V(11))**2.d0+(V(9)-V(12))**2.d0)

```

c Separação radial do vetor posição da PARTÍCULA (ATLAS) e PFANTASMA

c Produto escalar do vetor posição

```

rparrf= (X(7)*X(10)+X(8)*X(11)+X(9)*X(12))

```

c Produto escalar dos módulos do vetor posição

```

rparrfmod= DSQRT((X(7)*X(7)+X(8)*X(8)+X(9)*X(9))
$*(X(10)*X(10)+X(11)*X(11)+X(12)*X(12)))

```

c Cosseno diretor entre os vetores posição

```

rparrfcos= rparrf/rparrfmod
if (rparrfcos.gt.1.d0) then
    rparrfcos= 1.d0
    rparrfsin=0.d0
else
    rparrfsin=dsqrt(1.d0-(rparrfcos*rparrfcos))
endif

```

```

c Distância radial final entre os vetores posição PARTÍCULA e PFANTASMA
  rpar = DSQRT(X(7)*X(7)+X(8)*X(8)+X(9)*X(9))
  rf = DSQRT(X(10)*X(10)+X(11)*X(11)+X(12)*X(12))
  rdistfinal= DABS(rpar-rf*rparrfcos)

c Componente perpendicular do vetor posição da PFANTASMA
  rseno= DABS(rf*rparrfsin)

c razão entre as distâncias

  R= dabs(DF/DINIT)

C RazãoDistRad AS RAZÕES DAS COMPONENTES SÃO DIVIDIDAS POR DINIT
  RDR= dabs(rdistfinal/DINIT)

C RazãoDistAng
  RDA= dabs(rseno/DINIT)

C RazãoVelRad
  RVR= dabs(vrfinal/DINIT)

C RazãoVelAng
  RVA= dabs(vseno/DINIT)

C RazãoResto
  RR= dabs(resto/DINIT)

c Cálculo do expoente

  JA= DLOG(R)
  NUM= JA+NUMOLD

  JADR= (DLOG(RDR))
  JADA= (DLOG(RDA))
  JAVR= (DLOG(RVR))
  JAVA= (DLOG(RVA))
  JAR= (DLOG(RR))
  NUMDR= JADR+NUMOLDDR
  NUMDA= JADA+NUMOLDDA
  NUMVR= JAVR+NUMOLDVR

```

```
NUMVA= JAVA+NUMOLDVA
```

```
NUMR= JAR+NUMOLDR
```

```
TEMP= tfinal*i/(2.d0*PI)
```

```
if (NUM.lt.0.d0) NUM=1.d-99
```

```
if (NUMDR.lt.0.d0) NUMDR=1.d-99
```

```
if (NUMDA.lt.0.d0) NUMDA=1.d-99
```

```
if (NUMVR.lt.0.d0) NUMVR=1.d-99
```

```
if (NUMVA.lt.0.d0) NUMVA=1.d-99
```

```
if (NUMR.lt.0.d0) NUMR=1.d-99
```

```
GAMA= DLOG10(NUM/TEMP)
```

```
GAMADR= DLOG10((NUMDR)/TEMP)
```

```
GAMADA= DLOG10(NUMDA/TEMP)
```

```
GMAVR= DLOG10(NUMVR/TEMP)
```

```
GMAVA= DLOG10(NUMVA/TEMP)
```

```
GAMAR= DLOG10((NUMR)/TEMP)
```

```
NUMOLD=NUM
```

```
NUMOLDDR=NUMDR
```

```
NUMOLDDA=NUMDA
```

```
NUMOLDVR=NUMVR
```

```
NUMOLDVA=NUMVA
```

```
NUMOLDR=NUMR
```

```
end do
```

ANEXO B – CÓDIGO UTILIZADO PARA A INTEGRAÇÃO DA PERSPECTIVA B

O código para a perspectiva **B** diferencia-se do anterior apenas nas razões feitas para o cálculo do Expoente de Lyapunov:

c razão entre as distâncias

R= dabs (DF/DINIT)

C RazãoDistRad AS RAZÕES DAS COMPONENTES SÃO DIVIDIDAS POR DINIT

RDR= dabs (rdistfinal/DINITR)

C RazãoDistAng

RDA= dabs (rseno/DINIT)

C RazãoVelRad

RVR= dabs (vrfinal/DINIT)

C RazãoVelAng

RVA= dabs (vseno/DINIT)

C RazãoResto

RR= dabs (resto/DINITResto)