



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Implementação em computador de um circuito
caótico usando modelos *fuzzy* baseados em LMI
com aplicação em sistemas de comunicação.**

Patricia Elaine Domingues

Ilha Solteira - SP

1210001299



1299

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Implementação em computador de um circuito
caótico usando modelos *fuzzy* baseados em LMI com
aplicação em sistemas de comunicação.**

1210001299



Dissertação apresentada à Comissão de Pós-Graduação
da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, como
requisito para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia Elétrica

Autor: Patrícia Elaine Domingues

Orientador: Nobuo Oki

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
19.09.02	30.09.02
REGISTRO POR	TOMBO
Ailza	Te. 1299
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
hloayã Autor R\$ 10,00	W671 i

Proc. 071/2002 - UNESP/ILH

Ilha Solteira, 24 de maio de 2002

3040 0007

ENGENHARIA ELÉTRICA

Sup - 183380

Sup - 54651

Implementação em Computador de um Circuito Caótico Usando Modelos FUZZY Baseados em LMI com Aplicação em Sistemas de Comunicação

PATRÍCIA ELAINE DOMINGUES

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA -
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).**



Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Vice-Coordenador em Exercício

COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Nobuo Oki – orientador



Prof. Dr. Luis Antonio Aguirre



Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Ilha Solteira, maio de 2002

BCpIS - FEIS - UNESP



*À minha família,
por seu apoio e carinho.*



Agradecimentos

Agradeço a todos os que, durante a elaboração desta dissertação, contribuíram de alguma forma para sua realização. Em especial:

Professor Dr. Nobuo Oki pela orientação.

Professor Edison Righeto pela orientação nos conceitos matemáticos.

Professor Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela orientação nos conceitos de sistemas não-lineares, lógica *fuzzy* e LMI's.

Professores do curso de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, pela contribuição em minha formação acadêmica.

Funcionários da FEIS-UNESP. Em especial, funcionários da Secretaria de Pós-graduação e funcionários do Laboratório de Computação pelo suporte técnico.

Colegas do curso Pós-graduação pelo companheirismo.

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pelo apoio financeiro.



Resumo

Este trabalho foi dividido em três partes: estudo matemático sobre sincronização caótica e sistemas não-lineares, estudo sobre o enfoque unificado de controle do caos através do sistema de controle *fuzzy* baseado em Desigualdade Lineares Matriciais para projetar um controlador que sincronize o sistema transmissão/recepção permitindo que o sinal seja perfeitamente recuperado e o estudo dos modos de transmissão do sinal de informação. O projeto consiste na simulação do sistema caótico de Lorenz (transmissor/receptor) a partir de componentes discretos, usando o modelo máscara caótica com um controlador *fuzzy* para a sincronização do sistema. Foram transmitidos diferentes tipos de sinais de informação e observado as suas respectivas recuperações no receptor.



Abstract

This work was divided in three parts: mathematical study about chaotic synchronization and nonlinear systems, study about the unified approach to chaos control via *fuzzy* control system based in Linear Matrix Inequality to design a controller which synchronizes the transmission/reception system allowing the signal to be perfectly recovered, and the study about transmission modes of the information signal. The project consists of a Lorenz chaotic system (transmission/reception) from discrete components with the Lorenz chaotic circuit using a chaotic mask model and a *fuzzy* controller for its synchronization. Different types of information signals were transmitted and observed in the receptor.



ÍNDICE

<u>CAPÍTULO 1</u>	6
<u>1. INTRODUÇÃO</u>	6
<u>CAPÍTULO 2</u>	11
<u>2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS SOBRE SINCRONIZAÇÃO</u>	11
<u>2.1 EXPOENTES DE LYAPUNOV</u>	11
<u>2.2 SISTEMAS NÃO-LINEARES</u>	13
<u>2.3 EXPOENTES DE LYAPUNOV PARA FLUXOS</u>	17
<u>2.4 SINCRONIZAÇÃO DE ÓRBITAS</u>	21
<u>2.5 CONCLUSÃO</u>	26
<u>CAPÍTULO 3</u>	27
<u>3. CONTROLE DE SISTEMAS CAÓTICOS ATRAVÉS DE CONTROLADORES</u> <u>FUZZY BASEADOS EM LMI'S</u>	27
<u>3.1 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS</u> ^[58-59]	27
<u>3.2 MODELO E CONTROLE FUZZY DE TAKAGI-SUGENO</u> ^[17]	28
<u>3.3 COMPENSAÇÃO PARALELA DISTRIBUÍDA</u> ^[53]	30
<u>3.4 MODELOS BASEADOS EM LMI</u>	32
<u>3.5 MODELOS FUZZY DE SISTEMAS CAÓTICOS</u> ^[53]	35
<u>3.5.1 Estabilização</u>	37
<u>3.5.2 Linearização exata</u>	39
<u>3.5.3 Sincronização</u>	41
<u>3.6 RESULTADOS</u>	43
<u>3.6.1 Estabilização</u>	44
<u>3.6.2 Taxa de decaimento</u>	45
<u>3.6.3 Linearização exata</u>	46
<u>3.6.4 Sincronização</u>	48
<u>3.7 CONCLUSÃO</u>	50
<u>CAPÍTULO 4</u>	51
<u>4. MODOS DE TRANSMISSÃO DO SINAL DE INFORMAÇÃO</u>	51
<u>4.1 MASCARANDO O SINAL DE INFORMAÇÃO</u> ^[11]	51
<u>4.1.1 O circuito transmissor</u>	52
<u>4.1.2 O circuito receptor</u>	54
<u>4.1.3 Sinal caótico mascarado</u>	55



<u>4.2 UTILIZAÇÃO DE UM PARÂMETRO DO SISTEMA PARA A TRANSMISSÃO DO SINAL^[16]</u>	55
<u>4.3 CONCLUSÃO</u>	58
<u>CAPÍTULO 5</u>	59
<u>5. IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA DE COMUNICAÇÃO UTILIZANDO SISTEMAS CAÓTICOS COM UM CONTROLADOR FUZZY BASEADO EM LMIS.</u>	59
<u>5.1 RESULTADOS</u>	61
<u>5.2 CONCLUSÃO</u>	70
<u>CAPÍTULO 6</u>	72
<u>6. CONCLUSÃO</u>	72
<u>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	74



ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1: A DESIGUALDADE DE GRONWALL ^[13]	15
FIGURA 2.2: DIFERENÇA DAS TRAJETÓRIAS DEVIDO AO ACOPLAMENTO ^[13]	23
A) ACOPLAMENTO FRACO:	23
B) ACOPLAMENTO FORTE:	23
FIGURA 3.1: DIAGRAMA DE BLOCOS DA SINCRONIZAÇÃO	43
FIGURA 3.2: RESULTADOS DO PROJETO DO CONTROLADOR FUZZY ESTÁVEL	45
FIGURA 3.3: RESULTADOS DO PROJETO DO CONTROLADOR FUZZY ESTÁVEL COM TAXA DE DECAIMENTO	46
FIGURA 3.4: RESULTADOS DO PROJETO DO CONTROLADOR FUZZY ESTÁVEL PARA LINEARIZAÇÃO EXATA COM TAXA DE DECAIMENTO:	47
FIGURA 3.5: RESULTADOS DO PROJETO DO CONTROLADOR FUZZY ESTÁVEL PARA LINEARIZAÇÃO EXATA COM TAXA DE DECAIMENTO E RESTRIÇÃO DE ENTRADA:	48
FIGURA 3.6: SISTEMA TRANSMISSOR SEM ENTRADA DE CONTROLE	49
FIGURA 3.7: SISTEMA RECEPTOR SEM ENTRADA DE CONTROLE	49
FIGURA 3.8: SINCRONIZAÇÃO ENTRE SISTEMA TRANSMISSOR E RECEPTOR	50
FIGURA 4.1: CIRCUITO CAÓTICO BASEADO EM LORENZ	53
FIGURA 4.2: CIRCUITO RECEPTOR CAÓTICO	54
FIGURA 4.3: SISTEMA CAÓTICO COM SINAL MASCARADO	55
FIGURA 4.4: DIAGRAMA DE BLOCOS DO SISTEMA DE COMUNICAÇÃO INCORPORANDO O PARÂMETRO DE MODULAÇÃO DO OSCILADOR CAÓTICO. A DEMODULAÇÃO É FEITA COM UM FILTRO NÃO-LINEAR:	56
FIGURA 5.1: CIRCUITO TRANSMISSOR	60
FIGURA 5.2: CIRCUITO RECEPTOR	60
FIGURA 5.3: CIRCUITO DO SUBCONTROLADOR	60
FIGURA 5.4: DIAGRAMA DE BLOCOS DO SISTEMA DE COMUNICAÇÃO COMPLETO	61
FIGURA 5.5: SINAL DE INFORMAÇÃO $M(t)$ A SER TRANSMITIDO	62
FIGURA 5.6: SINAL DE INFORMAÇÃO $\hat{m}(t)$ RECUPERADO	62
FIGURA 5.7: SINAL TRANSMITIDO $M(t)$ SOBREPOSTO SOBRE O SINAL RECUPERADO $\hat{m}(t)$	62
FIGURA 5.8: ERRO DO SINAL RECUPERADO, ISTO É, ERRO = $M(t) - \hat{m}(t)$	63
FIGURA 5.9: SINCRONIZAÇÃO DE x_2 COM x_{2p} SEM O SINAL DE INFORMAÇÃO	63
FIGURA 5.10: SINCRONIZAÇÃO DE x_2 COM x_{2p} COM O SINAL DE INFORMAÇÃO	63
FIGURA 5.11: SINAL DE INFORMAÇÃO $M(t)$ TRANSMITIDO	64
FIGURA 5.12: SINAL DE INFORMAÇÃO $\hat{m}(t)$ RECUPERADO	64
FIGURA 5.13: SOBREPOSIÇÃO DO SINAL TRANSMITIDO $M(t)$ COM O SINAL RECUPERADO $\hat{m}(t)$	65
FIGURA 5.14: ERRO DO SINAL RECUPERADO	65
FIGURA 5.15: SINAL $M(t)$ TRANSMITIDO – ONDA TRIANGULAR	65
FIGURA 5.16: SINAL DE INFORMAÇÃO RECUPERADO $\hat{m}(t)$	66
FIGURA 5.17: SOBREPOSIÇÃO DE $M(t)$ COM $\hat{m}(t)$	66



<u>FIGURA 5.18: ERRO DO SINAL RECUPERADO PARA UMA ONDA TRIANGULAR.</u>	66
<u>FIGURA 5.19: SINAL TRANSMITIDO $M(t)$ – ONDA TRIANGULAR.</u>	67
<u>FIGURA 5.20: SINAL RECUPERADO $\hat{m}(t)$.</u>	67
<u>FIGURA 5.21: SOBREPOSIÇÃO DOS SINAIS $M(t)$ COM $\hat{m}(t)$.</u>	67
<u>FIGURA 5.22: ERRO DO SINAL RECUPERADO.</u>	68
<u>FIGURA 5.23: SINAL TRANSMITIDO $M(t)$ – ONDA QUADRADA.</u>	68
<u>FIGURA 5.24: SINAL RECUPERADO $\hat{m}(t)$.</u>	68
<u>FIGURA 5.25: SOBREPOSIÇÃO DO SINAL TRANSMITIDO COM O RECUPERADO.</u>	69
<u>FIGURA 5.26: ERRO DO SINAL RECUPERADO.</u>	69
<u>FIGURA 5.27: SINAL TRANSMITIDO $M(t)$ – ONDA QUADRADA.</u>	69
<u>FIGURA 5.28: SINAL RECUPERADO $\hat{m}(t)$.</u>	70
<u>FIGURA 5.29: SOBREPOSIÇÃO DOS DOIS SINAIS, $M(t)$ E $\hat{m}(t)$.</u>	70
<u>FIGURA 5.30: ERRO DO SINAL RECUPERADO.</u>	70



LISTA DE SIGLAS E ABREVIações

Desigualdades Matriciais Lineares - LMI's.

Takagi-Sugeno – TS.

Compensação Paralela Distribuída – PDC.

Sistema *Fuzzy* Contínuo – CFS.

Linearização Exata - EL.

Ott, Grebogy and Yorke – OGY.



CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Na dinâmica caótica analisam-se objetos sujeito a comportamento imprevisível, embora não-randômico. No entanto, o fenômeno do caos apesar de ser imprevisível, ele é determinístico^[01].

Planetas no sistema solar, moléculas na atmosfera, partículas de água num fluxo, impulsos elétricos no coração e no cérebro todos podem exibir caoticidade.

Até cem anos atrás pensava-se que o movimento dos planetas seria completamente entendido se as equações fossem cuidadosamente montadas. De fato, Kepler (século XVII) usou os cálculos de Tycho Brahe para convencer-se que os planetas em nosso sistema solar se movem em órbitas elípticas em torno do sol. Isaac Newton provou que todo planeta sob a influência única do sol move-se em órbita elíptica. Assim Newton resolveu "o problema dos dois corpos". Entretanto, o movimento da terra é afetado significativamente pelas forças gravitacionais do Sol, Lua e outros planetas, Júpiter principalmente. Igualmente, a órbita da Lua é influenciada pela Terra e pelo sol. Assim, o resultado de Newton é apenas uma aproximação do que de fato acontece. Uma boa aproximação, mas uma aproximação.

Durante o ano 1890 o francês Henri Poincaré também estudou aspectos matemáticos do movimento planetário. Ele enfocou o problema dos três corpos, no qual o movimento de um corpo é dependente de dois outros. Surgia, aí a Topologia. Poincaré provou que em geral é impossível dar prescrição para a órbita de um corpo sob a influência de dois outros.

Poincaré também constatou que, ao tomar duas leituras diferentes da posição de um planeta, então, não importa quão próxima sejam essas leituras, após um longo tempo as órbitas correspondentes se afastam severamente. Assim, obter uma predição exata da órbita da Lua é praticamente impossível para um futuro remoto. Este é um dos aspectos básicos do comportamento caótico. Na virada do século essa idéia não foi bem recebida porque



contrariava a intuição da regularidade da natureza e também não existiam ferramentas adequadas para analisar movimento imprevisível.

O advento do computador colocou clareza e vida nas questões levantadas por Poincaré que até então não despertava entusiasmo.

Durante a década de 1960, o meteorologista Edward Lorenz estava tentando modelar matematicamente o tempo atmosférico^[02]. Naturalmente, para conseguir uma predição razoável precisa-se usar inúmeras variáveis (por exemplo temperatura, umidade, velocidade do vento - dados adquiridos em centenas de pontos na terra como na atmosfera) por isso seria inevitável manipular um grande número de equações diferenciais. Para tornar os cálculos aceitáveis, Lorenz fez severas simplificações nas equações de Navier-Stokes e obteve um sistema de três equações diferenciais ordinárias modelando a convecção e fez tratamento numérico usando um computador McBee LGP-30 preparado para oferecer precisão com seis casas decimais. Lorenz repetia os cálculos alterando as condições iniciais de maneira mínima e ficava espantado com as previsões severamente discrepantes. Foram feitos e refeitos muitos cálculos até se afastar a hipótese de erro no equipamento. A análise desenvolvida por Lorenz sugeriu que pequenas alterações nas condições iniciais poderiam levar a enormes diferenças em seus resultados. Assim, a previsão do tempo exibia uma espécie de comportamento caótico, denominado de "efeito borboleta". Como resultado, as previsões de tempo só são confiáveis em curtos períodos e são temíveis em períodos mais longos.

Trinta anos após as idéias de Lorenz, a dinâmica caótica é utilizada sem causar polêmica em várias áreas^{[03]-[05]}. Elas incluem reações químicas, previsão de terremotos, atividade solar, na economia, música, em telecomunicação, sincronismo^{[06]-[12]}, etc.

Inicialmente os engenheiros procuraram fazer com que o fenômeno da caoticidade não ocorresse nos sistemas. Posteriores investigações demonstram que o fenômeno do caos pode ser controlado e explorado.

Um fato notável sobre osciladores caóticos é sua susceptibilidade para sincronização. Isto se refere à possibilidade de dois ou mais sistemas que são acoplados apresentarem movimentos próximos mesmo quando tais movimentos são caóticos.



O capítulo dois desta dissertação irá detalhar o sincronismo de sistemas idênticos^[13]. A sincronização desses sistemas pode ser local, significando que o estado sincronizado é estável, e que uma vez sincronizado, pequenas perturbações não dessincronizarão o sistema; ou global, significando que não importa onde os sistemas são iniciados, eles se sincronizarão rapidamente. Ainda neste capítulo, será descrita a interconexão de dois sistemas caóticos com um sinal comum. Nota-se que quando os expoentes de Lyapunov do subsistema (receptor) são todos negativos, o sistema pode ser sincronizado. Esta afirmação é uma condição necessária para o sincronismo, mas não suficiente, pois depende também das condições iniciais^[08]. Sincronismo significa que a trajetória de um dos sistemas convergirá para a trajetória do outro e assim elas permanecerão próximas a cada passo^[13].

Sistemas caóticos proporcionam um rico mecanismo para projetar e gerar sinal com aplicações em comunicação e processamento, pois sinais caóticos são tipicamente de banda larga e difíceis de se prever^[11].

Uma classe particular de sistemas caóticos é aquele que possui a propriedade de auto-sincronização^{[08]-[09]}. Um sistema caótico é auto-sincronizado se ele pode ser decomposto em dois subsistemas menores: um sistema de controle (transmissor) e um subsistema de resposta estável (receptor) que sincroniza quando acoplado com um sinal comum. Para alguns sistemas caóticos a possibilidade de sincronização é robusta. Por exemplo, no sistema de Lorenz, a sincronização é altamente robusta a perturbações no sinal de controle^[11]. Esta propriedade proporciona algumas aplicações interessantes em comunicação como a técnica de mascarar a informação através do sinal caótico^{[14]-[15]}. Este enfoque usa um sistema síncrono no receptor para identificar a parte caótica do sinal, que então é subtraída para revelar a informação. Outra técnica pesquisada usa um parâmetro de modulação do oscilador caótico para transmitir um sinal de informação e um subsistema síncrono associado com um filtro não-linear para detectar e recuperar a informação transmitida^[16].

A diferença entre as técnicas apresentadas acima está em como os sinais de informação são injetados no transmissor e recuperados no receptor.



Visando a sincronização do transmissor com o receptor, foi estudada uma nova técnica de controle, o sistema de controle *fuzzy* baseado em LMI's proposta por Takagi-Sugeno^[17].

Desde o método de OGY^{[18]-[19]}, o método de controle do caos proposto por Ott, Grebogi e Yorke, muitos métodos de controle do caos tem sido introduzido na área de controle de sistemas lineares e não-lineares^{[20]-[26]}.

Recentemente, sistemas de controle *fuzzy* foram aplicados para o controle de sistemas não-lineares^{[27]-[39]}. Uma representação *fuzzy* de sistemas não-lineares pode ser descrita por regras SE-ENTÃO. De acordo com o problema de controle em questão, essas regras permitem o estudo e projeto de compensadores lineares/não-lineares locais (para cada regra) para alcançar o objetivo desejado. Muitas pesquisas neste assunto são baseadas no modelo *fuzzy* de Takagi-Sugeno^[17]. Em particular, propõe-se o modelo de um sistema de controle *fuzzy* baseado em LMI's proposta por Takagi-Sugeno^[17]. A idéia básica destes modelos consiste na descrição aproximada de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos locais, lineares e invariantes no tempo, que descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. O modelo global do sistema é obtido através da combinação *fuzzy* destes modelos lineares locais^[40]. O projeto do controlador foi procedido usando o conceito de compensação paralela distribuída (PDC): para cada modelo local linear existe um respectivo controlador linear. Assim, a estabilidade do sistema global está relacionada a encontrar uma matriz definida positiva simétrica a partir de desigualdades matriciais lineares (LMI's).

O capítulo 3 desta tese apresenta uma abordagem unificada para o controle do caos.

O objetivo deste trabalho foi fazer um estudo aprofundado sobre sistemas caóticos e suas condições para auto-sincronização de sistemas idênticos. Dentre os circuitos e sistemas caóticos estudados em outras pesquisas^{[41]-[51]}, foi escolhido o sistema de Lorenz, visto a possibilidade de transformá-lo em um circuito através de um computador analógico^[52]. Ao inserir uma informação no sistema de comunicação (transmissor/receptor) observou-se a perda da sincronização e conseqüentemente, o sinal recuperado no receptor apresentava um erro muito grande com relação ao



signal transmitido. Necessitava-se aplicar um sistema de controle que mantivesse o sistema de comunicação sincronizado. Surgiu a idéia de aplicar um sistema de controle *fuzzy* através de LMI's para projetar um controlador^[53], de modo que o sistema de interesse, no caso, o sistema de Lorenz, quando usado em um sistema de comunicação pudesse permanecer sincronizado, e assim o sinal de informação fosse recuperado obtendo uma forma de onda semelhante a forma de onda transmitida.

Este trabalho foi dividido em três fases de estudo para chegar a implementação final: estudo matemático sobre sincronização de sistemas não-lineares idênticos^[13], estudo sobre o enfoque unificado de controle do caos através do sistema de controle *fuzzy* baseado em LMI's^{[53][54]} e no estudo dos modos de transmissão do sinal de informação^{[11],[16],[52]}.



CAPÍTULO 2

Este capítulo apresenta os conceitos necessários para a compreensão de sistemas caóticos (expoentes de Lyapunov e outros) e conseqüentemente a sincronização de dois sistemas não-lineares idênticos que podem ou não ser caóticos. Foi feito um estudo mais aprofundado no assunto^[55], mas este capítulo reportará apenas os conceitos mais relevantes.

2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS SOBRE SINCRONIZAÇÃO

2.1 Expoentes de Lyapunov

Definição 2.1- Uma função, cujo domínio e a imagem são os mesmos, será denominado de mapa. Seja x um ponto e f um mapa, a órbita de x por f é o conjunto dos pontos $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ onde $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f^2(x))$,... chamado o valor inicial da órbita. Um ponto p é um ponto fixo do mapa f se $f(p)=p$.

Definição 2.2- Seja f um mapa em R . Chama-se de p um ponto periódico de período K se $f^K(p)=p$ e se K for o menor inteiro positivo nessas condições. A órbita com ponto inicial p , a qual consiste de K pontos é chamada uma órbita periódica de período K .

Para pontos fixos dos sistemas dinâmicos discretos, a estabilidade é fortemente influenciada por derivadas do mapa. Para um ponto periódico de período k (isto é, $f^k(x)=x$), tem-se que buscar a derivada de f^k que, pela regra da cadeia, é o produto da derivada de f nos k pontos da órbita.

O número de Lyapunov quantifica a taxa multiplicativa média de separação de pontos x muito próximos de x_1 (o expoente de Lyapunov será simplesmente o logaritmo natural do número de Lyapunov).

Nota-se que, se o número de Lyapunov for menor que 1, então o processo aproxima os pontos a cada iteração e não os separa.

A importância do número de Lyapunov é sua aplicação em órbitas não periódicas. Tais órbitas são caracterizadas pela sensível dependência das condições iniciais, isto é, pequeníssimas alterações nas condições iniciais



podem produzir órbitas que se separam acentuadamente. Órbita caótica é aquela que não tende para uma órbita periódica e cujo número de Lyapunov seja maior do que 1.

Definição 2.3: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um mapa unidimensional diferenciável. O número de Lyapunov $L(x_1)$ da órbita $\{x_1, f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \dots\}$ é definido como

$$L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(x_1)| \dots |f'(x_n)|)^{1/n}$$

Se este limite existe, o expoente de Lyapunov $h(x_1)$ é definido como

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) [\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_n)|]$$

Nota-se que h existe, se e somente se, L existe.

Observação: Números e expoentes de Lyapunov não são definidos para algumas órbitas. Uma órbita contendo um ponto x_i com $f'(x_i) = 0$ não tem o seu expoente de Lyapunov definido.

Se x_1 é um ponto periódico de período k , seu expoente de Lyapunov será:

$$h(x_1) = \frac{\ln |f'(x_1)| + \dots + \ln |f'(x_k)|}{k}$$

Para uma órbita periódica, o número de Lyapunov $e^{h(x_1)}$ descreve a deformação média local, a cada iteração, próximo a um ponto da órbita.

O conceito de números e expoentes de Lyapunov pode ser estendido para mapas no $\mathbb{R}^m$ para $m \geq 1$. No caso unidimensional, a idéia é medir taxas de separação de pontos próximos ao longo da reta real. Em outras dimensões, o comportamento local da dinâmica pode variar com a direção. Pontos próximos podem mover-se se afastando ao longo de uma direção, e aproximando-se ao longo de outra.

Para um mapa no $\mathbb{R}^m$, cada órbita tem m números de Lyapunov, que medem as taxas de separação dos pontos da órbita nas m direções ortogonais. Estas direções são determinadas pela dinâmica do mapa. A primeira será a direção onde a separação entre pontos vizinhos é maior (ou é



a menor contração, se o mapa é contraído em todas as direções). A segunda será a direção de maior separação, escolhida entre todas as direções perpendiculares a primeira. A terceira será a direção de maior alongamento entre todas as direções perpendiculares as duas primeiras, e assim por diante. Os fatores de deformação em cada uma destas direções escolhidas são os números de Lyapunov da órbita.

Definição 2.4: Seja f um mapa de R^m , $m \geq 1$, e seja $\{v_0, v_1=f(v_0), v_2=f(v_1), \dots\}$ uma órbita limitada de f . A órbita é caótica se:

Não é assintoticamente periódico,

O número de Lyapunov é diferente de um, e

$L_1(v_0) > 1$.

Em termos de expoente de Lyapunov, o item 3 é equivalente para $h_1(v_0) > 0$.

2.2 Sistemas não-lineares

Para fazer um estudo de equações diferenciais utiliza-se a mesma técnica de mapas na modelagem de processos físicos determinísticos.

Em equações diferenciais, existem alguns aspectos que devem ser levados em consideração.

Soluções para problemas de valor inicial podem ter fortes divergências em pouco espaço de tempo e, portanto, soluções podem não estar definidas para todo o tempo. Ao contrário, para mapas contínuos pode-se apresentar órbitas de determinados pontos que marcham para o infinito, mas não em tempo finito.

Sem nenhuma restrição nas equações, um problema de valor inicial pode ter mais que uma solução. Isto vai contra o princípio do determinismo. Um bom modelo deve determinar resultados futuros sem ambigüidade, dadas as equações e o estado presente. Por exemplo, dado o problema de valor inicial:

$$\dot{x} = \sqrt{x}$$

$$x(0) = 0$$



tem-se duas soluções, $x(t)=0$ e $x(t) = t^2/4$, provando que este não é um bom modelo de um processo dinâmico, pois não tem unicidade de solução na vizinhança do ponto inicial.

A utilidade de um modelo em dar informações sobre um processo dinâmico é maior se a solução do problema de valor inicial não depende sensivelmente das condições iniciais, pelo menos em um curto intervalo de tempo. Em particular, para uma dada equação diferencial e duas condições iniciais distintas, necessita-se saber que, quanto mais próximas são as condições iniciais, as soluções do problema para um pequeno intervalo de tempo estão mais próximas. Esta situação é chamada de dependência contínua das condições iniciais. Para um grande intervalo de tempo, não se pode garantir que elas ficarão próximas, pois elas podem tomar um rumo não esperado dentro de um espaço de fase. Sensibilidade em um pequeno intervalo de tempo é denominado dependência sensível as condições iniciais.

Considerando o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Denota-se este sistema n -dimensional de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem por:

$$\dot{v} = f(v)\tag{2.2}$$

sendo que $v = (x_1, \dots, x_n)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1^[13]: Existência e unicidade. Considerando a equação diferenciável de primeira ordem (2.2), sendo que f e sua primeira derivada parcial com respeito a v são contínuas em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então para qualquer número real t_0 e um vetor real v_0 , há um intervalo aberto contendo t_0 , no qual existe uma solução que satisfaz a condição inicial $v(t_0)=v_0$, e esta solução é única.

Definição 2.5: Seja U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. Uma função $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser de Lipschitz em U se existe uma constante L tal que

$$|f(v) - f(w)| \leq L |v - w|$$



para todo v, w em U . A constante L é chamada de constante de Lipschitz para f .

Se f tem derivadas primeiras parciais limitadas em U , então f é Lipschitz. Por exemplo, para o caso unidimensional, $f(x) = \sin(x)$, a constante de Lipschitz de $f(x)$ é $L=1$. Este resultado vem do teorema do valor médio e pelo fato de que $f'(x)$ é igual a $\cos x$.

Duas soluções próximas para a mesma equação diferencial podem se separar uma da outra numa taxa não maior que e^{Lt} , onde L é a constante de Lipschitz da equação diferencial. A desigualdade de Gronwall, ilustrada na Figura 2.1, é a base da continuidade do fluxo como função das condições iniciais.

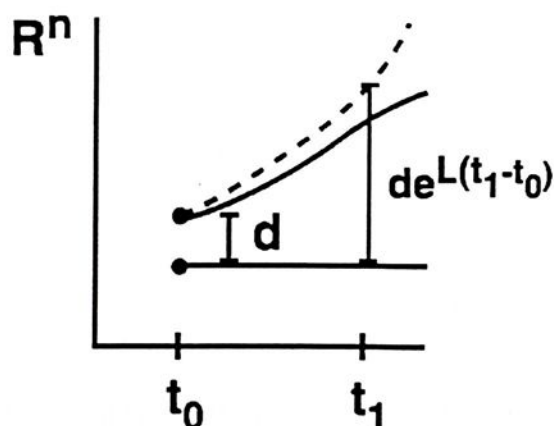


Figura 2.1: A desigualdade de Gronwall^[13]

Teorema 2.2^[13]: Dependência contínua das soluções em relação as condições iniciais. Seja f definida num conjunto aberto U em $\mathbb{R}^n$ e assume-se que f tem constante de Lipschitz L . Sejam $v(t)$ e $w(t)$ soluções de (2.2), e seja $[t_0, t_1]$ um subconjunto comum aos domínios das duas soluções. Então

$$|v(t) - w(t)| \leq |v(t_0) - w(t_0)| e^{L(t-t_0)}$$

para todo t em $[t_0, t_1]$.

Equações de ordem mais alta podem ser rescritas em um conjunto de equações de primeira ordem da forma (2.1). Ilustrando o processo com a equação diferencial de n -ésima ordem

$$\dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

sendo que $x^{(n)}$ denota a n -ésima derivada da função $x(t)$ com respeito a t .
Definindo um novo conjunto de variáveis por

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= \dot{x} \\x_3 &= \ddot{x} \\&\vdots \\x_n &= x^{(n-1)}\end{aligned}$$

Estas novas variáveis satisfazem o sistema autônomo de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

que é da forma (2.1).

Ao contrário dos sistemas lineares, a maioria dos sistemas não-lineares com equações diferenciais não podem ser resolvidos explicitamente, significando que as soluções não podem ser encontradas através de cálculos analíticos. Felizmente, muitas das análises de estabilidade para sistemas lineares se adaptam ao estudo de pontos de equilíbrio de sistemas não-lineares.

Lembrando que um ponto de equilíbrio de (2.2) é um vetor $\bar{v}$ em U , tal que, $f_i(\bar{v}) = 0$ para $i = 1, \dots, n$ para qualquer tempo t . Novamente, para um dado valor inicial v_0 , denota-se por $F(t, v_0)$ a solução de (2.2) no tempo t , partindo da condição inicial v_0 . Enquanto um sistema linear tem somente um ponto de equilíbrio ($\bar{v} = 0$) ou tem todo um subespaço de pontos de equilíbrio (não isolados), um sistema não-linear pode ter muitos pontos de equilíbrio isolados, isto pode ocorrer em sistemas não autônomos.

Afim de determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio $\bar{v}$ de (2.2), usa-se a aplicação linear que melhor aproxima f em $\bar{v}$, isto é, a matriz Jacobiana $Df(\bar{v})$ que pode aproximar f apenas em uma vizinhança de $\bar{v}$, desde que $f(\bar{v})=0$ e a aproximação $f(\bar{v}+\epsilon) \approx Df(\bar{v})\epsilon$ vale para um vetor pequeno ϵ . Tomando uma solução $w(t) = F(t, \bar{v} + \epsilon)$ de valor inicial $\bar{v} + \epsilon$ próximo do ponto de equilíbrio. Então $u(t) = w(t) - \bar{v}$ satisfaz

$$\dot{u} = \dot{w} = f(w(t)) = f(\bar{v} + u(t)) \approx Df(\bar{v})u(t)$$

pelo menos para tempos pequenos. As soluções de (2.2) próximas de $\bar{v}$ se movem em direção ao ponto de equilíbrio ou se afastam dele como acontece com as soluções de $\dot{u} = Df(\bar{v})u$. O comportamento da última equação, que é linear, depende dos autovalores e autovetores de $Df(\bar{v})$.

Definição 2.6: Um ponto de equilíbrio $\bar{v}$ de $\dot{v} = f(v)$ é chamado hiperbólico se nenhum dos autovalores de $Df(\bar{v})$ tem parte real 0.

Quando $\bar{v}$ é hiperbólico, a parte linear $Df(\bar{v})$ determina completamente a estabilidade de $\bar{v}$. Quando todos os autovalores de $Df(\bar{v})$ tem parte real não positiva e existe pelo menos um autovalor com parte real zero, então termos de ordem mais altas devem ser considerados para determinar a estabilidade; não é suficiente conhecer apenas $Df(\bar{v})$. Hiperbólico ou não, $\bar{v}$ é instável se a parte real de pelo menos um autovalor de $Df(\bar{v})$ é estritamente positivo.

Teorema 2.3^[13]: Seja $\bar{v}$ um ponto de equilíbrio de $\dot{v} = f(v)$. Se a parte real de cada autovalor de $Df(\bar{v})$ é estritamente negativo, então $\bar{v}$ é assintoticamente estável. Se a parte real de pelo menos um autovalor é estritamente positiva, então $\bar{v}$ é instável.

2.3 Expoentes de Lyapunov para fluxos

Uma órbita caótica pode ser definida como uma órbita não periódica limitada que tem pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.



Para fluxos, o conceito de expoente de Lyapunov é o mesmo que para mapas onde se troca a iteração discreta pelo fluxo contínuo da equação diferencial.

Os expoentes de Lyapunov fornecem uma medida da dependência sensível às condições iniciais. Seja a evolução temporal de um sistema dinâmico a partir de duas condições iniciais muito próximas, v_0 e $v_0 + \varepsilon$. Decorrido um intervalo de tempo t , tem-se:

$$\varepsilon(t) \approx \varepsilon e^{ht}$$

e o expoente de Lyapunov h fornece a taxa média de divergência das trajetórias. Diz-se "média", pois em geral, para um tempo t finito, o valor de h depende da condição inicial $v^{[56]}$.

Define-se o fluxo $F_t(v)$ como sendo o local em que a órbita, com condições iniciais v_0 em $t=0$, atinge depois de t unidades de tempo.

Seja

$$\dot{v} = F(v) \quad (2.3)$$

um sistema de n equações diferenciais autônomas em $v = (v_1, \dots, v_n)$, com solução $v(t) = f(v_0, t)$, isto é, $F(v) = \partial f(v_0, t) / \partial t$, sendo v_0 a condição inicial e dF/dv a matriz Jacobiaba associada^[56]. Definem-se os expoentes de Lyapunov de um fluxo como sendo os expoentes de Lyapunov de seu mapa tempo t , para $t=1$.

Definição 2.7: Os números de Lyapunov (respectivamente, expoentes) do fluxo $F_t(v)$ são definidos como sendo os números de Lyapunov (respectivamente, expoentes) do mapa tempo 1^[13].

Definindo o mapa tempo t , por F_t , e para definir os números e expoentes de Lyapunov do fluxo simplesmente recorre-se a definições precedentes de mapas. Inicia-se com uma minúscula esfera de condições iniciais ao redor de algum v_0 e observa-se sua evolução com o fluxo da equação diferencial. Para, de fato, determinar os números e expoentes de Lyapunov, necessita-se conhecer $DF_1(v)$, a derivada do mapa tempo 1 com respeito ao valor inicial v_0 .

Fixando t por um instante, $DF_t(v)$ é um mapa linear no $\mathbb{R}^n$, representado por uma matriz $n \times n$. Intuitivamente, o vetor $DF_t(v)(\varepsilon)$ é uma pequena variação



de (2.3) no tempo t causado por uma pequena mudança no valor inicial em $t=0$ de v_0 para $v+\varepsilon$.

Embora não haja uma forma explícita para a matriz $DF_t(v)$, pode-se achar uma equação diferencial associada com (2.3). Desde que $\{F_t(v): t \text{ em } \mathbb{R}\}$ seja a solução de (2.3) com valor inicial v_0 , tem-se por definição

$$\frac{d}{dt} F_t(v_0) = f(F_t(v_0)) \quad (2.4)$$

Esta equação tem duas variáveis, tempo t real e valor inicial v_0 em $\mathbb{R}^n$. Diferenciando com respeito a v , a regra da cadeia produz

$$\frac{d}{dt} DF_t(v_0) = Df(F_t(v_0)) \cdot DF_t(v_0) \quad (2.5)$$

que é conhecida como a equação variacional associada. O nome vem do fato que, se fosse possível resolver a equação para $DF_t(v_0)$, a matriz derivada de F_t seria conhecida, e então saber-se-ia como F_t atua sobre pequenas variações no valor inicial v_0 .

Para ter-se uma simplificação da equação variacional, define-se:

$$J_t = DF_t(v_0)$$

como sendo a Jacobiana do mapa tempo t calculada no valor inicial v_0 , e

$$A(t) = Df(F_t(v_0))$$

como a matriz das derivadas parciais do lado direito da equação diferencial (2.3) calculada ao longo da solução. Note que $A(t)$ pode ser computada explicitamente a partir do conhecimento da equação diferencial original. Então, pode-se reescrever a equação variacional (2.5) como

$$\dot{J}_t = A(t)J_t \quad (2.6)$$

Escrevendo (2.5) deste modo, tem-se fixado v_0 , observa-se que o valor inicial da órbita sob consideração não aparece explicitamente em (2.6). Para



definir J_t a partir de (2.6), necessita-se acrescentar uma condição inicial $J_0=I$, a matriz identidade. Isto segue do fato de que o fluxo satisfaz $F_0(v_0)=v_0$, por definição. A equação variacional (2.6) é uma equação diferencial linear, mesmo quando a equação diferencial original é não-linear. Ao contrário da equação original (2.3), ela não é invariante, visto que $A(t)$, em geral, depende do tempo.

Um importante fato a respeito da matriz Jacobiana $J_t=DF_t(v_0)$ do mapa tempo t calculada em v_0 é que ela aplica pequenas variações tangentes a órbita no tempo $t=0$ em pequenas variações tangentes a mesma órbita no tempo $t=t$. Mais precisamente:

$$DF_t(v_0).f(v) = f(F_t(v_0)) \quad (2.7)$$

Como usual, v_0 denota o valor inicial do fluxo no tempo $t=0$ e $F_t(v)$ o valor no tempo $t=t$. Como f está no lado direito da equação diferencial (2.7), ela define a direção da órbita em cada tempo.

A origem deste fato segue da aplicação da equação variacional (2.5) para o vetor $f(v_0)$:

$$\frac{d}{dt} DF_t(v_0)f(v_0) = Df(F_t(v_0)).DF_t(v_0)f(v_0)$$

Definindo $w(t) = DF_t(v_0)f(v_0)$, vê-se que $w(t)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Df(F_t(v_0))w \\ w(0) &= f(v_0) \end{aligned}$$

Por outro lado, diferenciando a equação original (2.4) com respeito a t , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} F_t(v_0) &= Df(F_t(v_0)) \frac{d}{dt} F_t(v_0) \\ \frac{d}{dt} f(F_t(v_0)) &= Df(F_t(v_0))f(F_t(v_0)) \end{aligned}$$



e $f(F_t(v_0))$ é igual a $f(v_0)$ no tempo $t=0$. Como $w(t)$ e $f(F_t(v_0))$ satisfazem o mesmo problema de valor inicial, eles são iguais devido o teorema da unicidade.

Uma consequência importante de (2.7) é que uma órbita limitada de uma equação diferencial ordinária autônoma (2.3) ou tem um expoente de Lyapunov igual a zero, ou então ela tem um ponto de equilíbrio no seu conjunto ω -limite, pois se esta última afirmativa não ocorrer, então existirão constantes positivas b e B para $0 < b < |f(F_t(v))| < B$ em todo t . Se $r(n)$ é a expansão na direção de $f(v)$ após n unidades de tempo (n passos do mapa tempo-1), então

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln b \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln r(n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(B) \leq 0$$

Assim, o expoente de Lyapunov na direção tangente à órbita é zero.

Definição 2.8: Seja $F_t(v_0)$ uma solução de $\dot{v} = f(v)$, onde $v_0 \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que a órbita $F_t(v_0)$ é caótica se as seguintes condições são satisfeitas:

$F_t(v_0)$, $t \geq 0$, é limitada;

$F_t(v_0)$ tem pelo menos um expoente de Lyapunov positivo;

$\omega(v_0)$ não é periódica e não consiste somente de pontos de equilíbrio, ou somente de pontos de equilíbrio e arcos conectantes.

O conceito de $\omega(v_0)$ é descrito na definição 2.9.

Definição 2.9: Um ponto z em $\mathbb{R}^n$ está no conjunto ω -limite $\omega(v_0)$ da curva solução $F_t(v_0)$ se existe uma seqüência monótona de pontos ao longo da órbita (isto é, $t \rightarrow \infty$) que converge para z . Especificamente, z está no $\omega(v_0)$ se existe uma seqüência $\{t_n\}$ crescente ilimitada de números reais com $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n, v_0) = z$.

2.4 Sincronização de órbitas

A sincronização local de sistemas não-lineares com acoplamento em dois sentidos estabelece que, se o acoplamento é suficientemente forte, então sistemas idênticos, que começam próximos, permanecerão próximos.

A sincronização global com acoplamento em apenas um sentido é observada através da análise de dois sistemas idênticos, iniciados com



condições iniciais diferentes e arbitrárias. Dizer que estes sistemas idênticos estão sincronizados significa que seus estados (x,y,z) são assintoticamente iguais em função do tempo. Estes comportamentos são diferentes do comportamento de um sistema não-linear idêntico não acoplado (isto é, independente). Se tais sistemas desacoplados começam com condições iniciais próximas, sabe-se que eles eventualmente poderão se afastar, fato conhecido como dependência sensível das condições iniciais.

Considerando o sistema abaixo com acoplamento em dois sentidos da equação diferencial autônoma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + c(y - x) \\ \dot{y} &= ay + c(x - y)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Assume-se que $a > 0$. Considerando o sistema original como sendo $\dot{x} = ax$ e $\dot{y} = ay$. O coeficiente de acoplamento c mede quanto x compartilha com y na equação x , e o inverso na equação y . Primeiro, nota-se que se o acoplamento é desligado, não há sincronização. As soluções para $c=0$ (sem acoplamento) são $x(t)=x_0e^{at}$ e $y(t)=y_0e^{at}$. A diferença entre eles é $|x(t) - y(t)| = |x_0 - y_0|e^{at}$. A diferença aumentará exponencialmente em função do tempo mesmo quando a diferença entre x_0 e y_0 for muito pequena (perturbações pequenas), pois a é maior que 0.

Quando se liga o acoplamento, inicialmente vê-se poucas diferenças do caso não acoplado. A Figura 2.2a mostra gráficos de $x(t)$ e $y(t)$ para $a=0,1$ e o parâmetro de acoplamento $c=0,03$. A diferença entre as duas trajetórias, iniciadas em dois valores iniciais diferentes, novamente cresce exponencialmente. A Figura 2.2b é o resultado de um acoplamento mais forte, $c=0,07$. As trajetórias se movem em direção uma da outra quando t aumenta. Este é um exemplo de sincronização global. A primeira tarefa é achar o mecanismo que explica a diferença entre os dois casos.



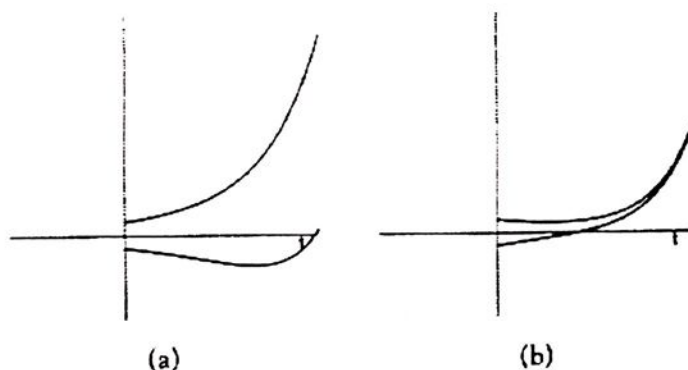


Figura 2.2: Diferença das trajetórias devido ao acoplamento^[13].

- a) acoplamento fraco;
b) acoplamento forte .

Para se determinar a sincronização de dois sistemas, tem que observar os seguintes passos:

Passo1: Escreve-se (2.8) como um sistema linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ sendo que } A = \begin{pmatrix} a-c & c \\ c & a-c \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Encontra-se os autovalores e autovetores de A . Definindo $u = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sendo que S é a matriz cujas colunas são autovetores de A , monta-se e resolve-se a correspondente equação diferencial para u .

Passo2: Usando o passo 1, determina-se a solução do sistema (2.8) mostrando que $|x(t) - y(t)| = |x_0 - y_0|e^{(a-2c)t}$.

O passo dois explica a diferença entre um acoplamento fraco na Figura 2.2a e um acoplamento mais forte na Figura 2.2b. O parâmetro de acoplamento deve ser maior que $a/2$ para provocar a sincronização das duas soluções.

Seja A uma matriz $n \times n$, define-se o sistema linear

$$\dot{v} = Av \quad (2.10)$$

e o par acoplado de sistemas lineares

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= Av_1 + c(v_2 - v_1) \\ \dot{v}_2 &= Av_2 + c(v_1 - v_2)\end{aligned}$$

que podem ser rescritos como

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - cI & cI \\ cI & A - cI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Passo3: Se v é um autovetor de A , então $(v_1, v_2)^T = (v, v)^T$ e $(v, -v)^T$ são autovetores da matriz em (2.11). Denotam-se os autovalores de A por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e nota-se que os autovalores da matriz em (2.11) são $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1 - 2c, \dots, \lambda_n - 2c$ [13],[60].

Passo4: Definindo o vetor diferença $u = v_1 - v_2$, observa-se que u satisfaz a equação diferencial

$$\dot{u} = (A - 2cI)u \quad (2.12)$$

Passo5: Nota-se que todos os autovalores de A tem parte real menor que $2c$, então a origem em (2.12) é globalmente assintoticamente estável. Conclui-se que para acoplamento suficientemente acentuado, as soluções $v_1(t)$ e $v_2(t)$ de (2.10) experimentam sincronização global, ou em outras palavras, que para quaisquer valores iniciais $v_1(0)$ e $v_2(0)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v_1(t) - v_2(t)| = 0$$

Quando o ponto de equilíbrio $u = v_1 - v_2 = 0$ é globalmente assintoticamente estável, diz-se que o sistema experimenta a sincronização global. Se em vez disso $u=0$ é somente estável, usa-se o termo sincronização local.

Considerando um sistema autônomo geral

$$\dot{v} = f(v) \quad (2.13)$$

e o par de sistemas acoplados

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= f(v_1) + c(v_2 - v_1) \\ \dot{v}_2 &= f(v_2) + c(v_1 - v_2)\end{aligned} \quad (2.14)$$

As equações variacionais para a trajetória sincronizada de (2.14) são:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) - cI & cI \\ cI & A(t) - cI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

sendo que $A(t) = D_v f(v_1(t))$ é a matriz das derivadas parciais de f calculadas ao longo da trajetória sincronizada $v_1(t) = v_2(t)$. Para determinar se esta trajetória é estável, será investigado se $u = v_1 - v_2$ com $J(t)$ sendo a matriz Jacobiana do mapa tempo t do fluxo de v de (2.13) e $K(t)$ a matriz Jacobiana do mapa tempo t do fluxo de u .

Passo6: Observa-se que $J'(t) = A(t)J(t)$ e $K'(t) = (A(t) - 2cI)K(t)$. Usando condições iniciais $J(0) = K(0) = I$, nota-se que $K(t) = J(t)e^{-2ct}$.

O passo 6 mostra a relação entre a matriz $J(1)$, a derivada Jacobiana do mapa tempo-1 para o sistema original; e a matriz $K(1)$, a derivada do mapa tempo-1 do vetor diferença u .

Passo7:

Teorema 2.4: Seja λ_1 o maior expoente de Lyapunov do sistema (2.13). Assume-se acoplamento nos dois sentidos como em (2.14). Se $c > \lambda_1/2$, então o sistema acoplado satisfaz a sincronização local. Isto é, o estado sincronizado $u(t) = v_1(t) - v_2(t) = 0$ é um ponto de equilíbrio estável.

Passo8: Assume-se que todos os parâmetros do sistema sejam positivos e observa-se que a função $E(u(v_1), u(v_2)) = u(v_1)^2 + u(v_2)^2$ é uma função de Lyapunov estrita para o estado sincronizado $u=0$. Conclui-se que a trajetória do receptor sincroniza globalmente com a trajetória enviada do transmissor.

Definição 2.10: Seja $\bar{v}$ um ponto de equilíbrio de (2.13). Uma função $E: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função de Lyapunov para $\bar{v}$ se para alguma vizinhança W de $\bar{v}$, as seguintes condições são satisfeitas:

$$E(\bar{v}) = 0, \text{ e } E(v) > 0 \text{ para todo } v \neq \bar{v} \text{ em } W, \text{ e}$$

$$\dot{E}(v) \leq 0 \text{ para todo } v \text{ em } W.$$

Se a desigualdade mais forte $\dot{E}(v) < 0$ para todo $v \neq \bar{v}$ em W for válida, então E é chamada de função de Lyapunov estrita.

2.5 Conclusão

Este capítulo forneceu o conceito teórico sobre expoentes de Lyapunov e sincronização de sistemas não-lineares idênticos. Com estes conceitos sabe-se quais são as condições de auto-sincronização de sistemas não-lineares idênticos e as condições para que o sistema não-linear seja um sistema caótico, pois acredita-se que quando o sistema não-linear tem comportamento caótico, o sistema de comunicação se torna mais seguro devido a dificuldade em determinar o comportamento dos sinais.



CAPÍTULO 3

3. CONTROLE DE SISTEMAS CAÓTICOS ATRAVÉS DE CONTROLADORES FUZZY BASEADOS EM LMI'S.

De acordo com o capítulo 2, dois sistemas não-lineares idênticos podem ser auto-sincronizados. Mas ao utilizar estes sistemas em um sistema de comunicação, ao inserir um sinal de informação faz com que ele perca a auto-sincronização, impedindo uma boa recuperação do sinal. Surge a necessidade de um controlador que mantenha o sistema de comunicação sincronizado.

Escolheu-se o projeto de um controlador *fuzzy* baseado em LMI's devido a trabalhos bem sucedidos desenvolvidos no Departamento de Engenharia Elétrica^{[40][57]}, facilitando a compreensão desses conceitos.

3.1 Fundamentos Matemáticos^[58-59]

Matriz positiva definida

$$M = M^T = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} > 0$$

M é uma matriz positiva definida se e somente se:

Todos os autovalores de M são positivos;

Todos os menores principais são positivos:

$$m_{11} > 0, \quad \det \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det(M) > 0;$$

Existe $N \in R^{n \times n}$, com posto n, tal que, $M = N^T N$.

$$X^T M X \neq 0, \quad \forall x = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T \neq [0 \quad \cdots \quad 0]^T.$$

Propriedades:

$$M = M^T > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M^{-1} > 0 \\ WMW > 0, \forall W = W^T > 0 \end{array} \right\}$$

Desigualdades Matriciais Lineares

Forma geral:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0.$$

$$X = [x_1 \quad \dots \quad x_m]^T = \text{vetor de incógnitas}$$

$$F_i = F_i \in R^{n \times n}, i = 0, \dots, m \text{ são dadas}$$

Observações:

$$F(x) = \sum (\text{matrizes constantes}) \cdot (\text{matrizes variáveis})$$

$$F^k(x) > 0, k = 1, \dots, r \Leftrightarrow \text{diag}[F^1(x), \dots, F^r(x)] > 0;$$

Forma usual: $P = P^T = \text{incógnita}$ A dada:

$$PA + A^T P < 0 \equiv -PA - A^T P > 0$$

$$P > 0;$$

Matriz negativa definida: $M < 0 \Leftrightarrow -M > 0$

Função de Lyapunov : $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ definida positiva.

Nesta dissertação, M^T é a transposta da matriz M , $S > 0$ ($S \geq 0$) significa que é uma matriz positiva definida (semidefinida), $S > T$ significa que $S - T > 0$ ($S - T \geq 0$), e $W = 0$ significa que W é uma matriz nula, isto é, seus elementos são todos iguais a zero. É utilizada a seguinte notação: $\sum_{i < j}^r$, que significa, para $r = 3$

$$\sum_{i < j}^3 a_{ij} \Leftrightarrow a_{12} + a_{13} + a_{23}.$$

3.2 Modelo e Controle Fuzzy de Takagi-Sugeno^[17]

Este método de modelagem fuzzy é direto. As dinâmicas do sistema são capturadas por um conjunto de implicações fuzzy que caracterizam relações locais no espaço de estado. A principal característica de um modelo de TS é a descrição das dinâmicas locais de cada implicação fuzzy (regra) por um modelo de sistema linear. O modelo fuzzy global do sistema é obtido pela combinação fuzzy dos modelos lineares locais.

Especificamente, o sistema fuzzy de TS é descrito pelas regras fuzzy SE-ENTÃO que representam localmente relações lineares entre a entrada e saída de um sistema.

Sistema Fuzzy Contínuo (CFS):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t).\end{aligned}$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$ (r é o número de modelos lineares).

A informação acima é então fundida com as regras SE-ENTÃO disponíveis, onde a i -ésima regra pode ter a forma:

Regra Planta i :

Se $z_1(t)$ é M_{i1} e ... e $z_p(t)$ é M_{ip}

$$\text{Então } \begin{aligned} \dot{s}x(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t) \end{aligned}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.1)$$

sendo que M_{ij} ($j = 1, 2, \dots, p$) é o conjunto fuzzy j da regra i , $x(t)$ é o vetor de estado, $u(t) \in R^m$ é o vetor de entrada, $A_i \in R^{n \times n}$ e $B_i \in R^{n \times m}$, $z_1(t) \approx z_p(t)$ são as variáveis premissas e $sx(t)$ denota $\dot{x}(t)$ para sistemas contínuos e $x(t+T)$ para sistemas discretos. Cada equação linear conseqüente representada por $A_i x(t) + B_i u(t)$ é chamada de subsistema.

Nesta dissertação, as variáveis premissas são assumidas independentes da variável de entrada $u(t)$. De qualquer forma, deve-se notar que todas as condições de estabilidade neste caso podem ser aplicadas mesmo no caso em que as variáveis premissas dependem das variáveis de entrada $u(t)$. Esta hipótese é empregada para evitar um processo de defuzzificação complicado do controlador fuzzy.

Dado um par de $[x(t), u(t)]$, a saída final do modelo fuzzy de TS é deduzida como segue:

$$sx(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}, \quad (3.2)$$

sendo que $z(t) = [z_1(t) z_2(t) \dots z_p(t)]$,

$$\omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^r M_{ij}(z_j(t)), \quad (3.3)$$

para todo t . $M_{ij}(z_j(t))$ é o grau de pertinência de $z_j(t)$ em M_{ij} . Os graus satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) &> 0 \\ \omega_i(z(t)) &\geq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, r, \end{aligned}$$

introduzindo $h_i(z(t)) = \omega_i(z(t)) / \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))$. A equação (3.2) é rescrita como

$$\dot{s}x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}. \quad (3.4)$$

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) &= 1 \\ h_i(z(t)) &\geq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para todo t . $h_i(z(t))$ pode ser considerado como o peso normalizado da regra SE-ENTÃO.

3.3 Compensação paralela distribuída^[53]

O conceito de compensação paralela distribuída (PDC) pode ser empregado para determinar a estrutura de um controlador fuzzy a partir de um modelo fuzzy de TS. Cada regra de controle é construída a partir da correspondente regra no modelo fuzzy de TS no PDC. O controlador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos fuzzy com o modelo fuzzy nas partes premissas. O PDC proporciona a estrutura da regra de controle fuzzy do modelo fuzzy.

Regra de controle i :

Se $z_1(t)$ é M_{i1} e ... e $z_p(t)$ é M_{ip}

$$\text{Então } u(t) = -F_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.6)$$

A regra de controle fuzzy tem critério de realimentação de estado linear nas partes conseqüentes. O controlador fuzzy completo é representado por:

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t). \quad (3.7)$$

O projeto do controlador fuzzy objetiva determinar os ganhos de realimentação local F_i nas partes conseqüentes. Os ganhos de realimentação são determinados usando modelos baseados em LMI propostos neste item. Os detalhes do modelo baseado em LMI serão discutidos no próximo item.

Como mostrado em (3.6), o PDC é direto. Outras técnicas de controle não-lineares requerem conhecimentos mais elaborados.

Substituindo (3.7) em (3.4), obtém-se

$$\dot{s}x(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t). \quad (3.8)$$

A equação (3.8) pode ser rescrita como:

$$\dot{s}x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_i(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t), \quad (3.9)$$

sendo $G_{ij} = A_i - B_i F_j$. As condições de estabilidade para o sistema de controle fuzzy (3.9) podem ser obtidas usando função de Lyapunov (visto no item anterior).

Teorema 3.1 CFS^[53]: O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo (3.9) é globalmente assintoticamente estável se existe uma matriz positiva definida P tal que

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad (3.10)$$

para todo i e

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad (3.11)$$

para $i < j$, exceto os pares (i, j) tal que $h_i(z(t)) h_j(z(t)) = 0, \forall t$.

O projeto de controlador fuzzy visa determinar $F_j (j = 1, 2, \dots, r)$ satisfazendo as condições do teorema 3.1 para uma matriz positiva definida P .

Ao verificar a estabilidade do sistema de controle fuzzy, pode-se encontrar dificuldades em determinar uma matriz positiva definida P que satisfaça as condições do teorema 3.1. Para controlar as condições de

estabilidade do teorema 3.1, necessita-se encontrar P de modo que satisfaça as LMI's:

$$P > 0, \quad G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0,$$

para todo i e

$$\left(\frac{G_{ii} + G_{jj}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ii} + G_{jj}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j,$$

para $i < j$ exceto os pares (i, j) tal que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$ ou a constatação de que nenhum P existe.

3.4 Modelos Baseados em LMI.

Para o CFS, define-se o problema de projeto do controlador fuzzy estável determinando os ganhos de realimentação F_i a partir das condições de estabilidade do Teorema 3.1. As condições (3.10) e (3.11) não são juntamente convexa para F_i e P . Então, pré e pós multiplicando as desigualdades por P^{-1} e definindo $X = P^{-1}$, reescrevemos as equações (3.10) e (3.11), como segue:

$$-XA_i^T - A_iX + XF_i^T B_i^T + B_i F_i X > 0$$

$$-XA_i^T - A_iX - XA_j^T - A_jX + XF_j^T B_i^T + B_i F_j X + XF_i^T B_j^T + B_j F_i X \geq 0.$$

Define-se $M_i = F_i X$ de modo que para $X > 0$ tem-se $F_i = M_i X^{-1}$.

Substituindo nas desigualdades anteriores obtém-se:

$$-XA_i^T - A_iX + M_i^T B_i^T + B_i M_i > 0$$

$$-XA_i^T - A_iX - XA_j^T - A_jX + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i \geq 0.$$

Usando estas condições de LMI, define-se o problema de projeto do controlador fuzzy estável.

Projeto do controlador fuzzy estável-CFS:

Achar $X > 0$ e $M_i (i=1, \dots, r)$ satisfazendo

$$-XA_i^T - A_iX + M_i^T B_i^T + B_i M_i > 0, \quad (3.12)$$

para todo i e

$$-XA_i^T - A_iX - XA_j^T - A_jX + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i \geq 0, \quad (3.13)$$

para $i < j$ exceto os pares (i, j) tal que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0$ para $\forall t$, sendo

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X. \quad (3.14)$$

As condições acima são LMI's com respeito as variáveis X e M_i . Pode-se encontrar matrizes positivas definidas X e M_i satisfazendo as LMI's ou determinar que tais não existem. Este é um problema factível convexo. Numericamente, este problema factível pode ser resolvido muito eficientemente por meio de ferramentas acessíveis na literatura de programação matemática (por exemplo: MatLab). Os ganhos de realimentação F_i e P comum podem ser obtidos assim:

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i X^{-1} \quad (3.15)$$

a partir das soluções, X e M_i .

É importante não somente a estabilidade, mas também as outras performances de controle, tais como: velocidade de resposta, restrições no controle de entrada e saída e outros. A velocidade de resposta é relatada para a taxa de decaimento, isto é, o maior expoente de Lyapunov.

Projeto do controlador de taxa de decaimento CFS:

A condição de que $\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t))$ para toda trajetória é equivalente a

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + 2\alpha P < 0, \quad (3.16)$$

para todo i e

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + 2\alpha P \leq 0, \quad (3.17)$$

para $i < j$, exceto os pares (i, j) tal que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$, sendo $\alpha > 0$.

Conseqüentemente, o ínfimo (o maior limite inferior) na taxa de decaimento pode ser encontrado usando a função de Lyapunov quadrática que pode ser resolvida pelo GEVP (problema de minimização do autovalor generalizado) em P e α .

Maximizar α

$X, M_1, \dots, M_r$

Sujeito a $X > 0$

$$-XA_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i - 2\alpha X > 0, \quad (3.18)$$

para todo i e

$$-XA_i^T - A_iX - XA_j^T - A_jX + M_i^T B_i^T + B_i M_i + M_j^T B_j + B_j M_j - 4\alpha X \geq 0, (3.19)$$

para $i < j$ exceto os pares (i, j) tal que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$, sendo

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X. (3.20)$$

Observação 3.1: Os projetos dos controladores fuzzy com taxa de decaimento estão reduzidos aos projetos de controladores fuzzy estáveis quando $\alpha = 0$. Conseqüentemente, um controlador fuzzy que satisfaça as condições de LMI de (3.18)-(3.19) é um controlador fuzzy estável. Em outras palavras, as condições de LMI de (3.12)-(3.13) são casos especiais dos (3.18)-(3.19), respectivamente.

Restrições no controle de entrada e saída para o sistema de controle fuzzy podem ser representadas também em termos de LMI's.

Restrições no controle de entrada CFS:

Assuma que a condição inicial $x(0)$ é conhecida. A restrição $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ é garantida em todos os tempos $t \geq 0$ se as LMI's

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0, (3.22)$$

são satisfeitas, sendo $X = P^{-1}$ e $M_i = F_i X$. Um problema de projeto de controladores fuzzy estáveis que satisfaça as restrições de entrada pode ser definido como segue:

Encontrar $X > 0$ e M_i ($i = 1, \dots, r$) satisfazendo (3.12), (3.13), (3.21) e (3.22).

Restrições na saída CFS: Assuma que a condição inicial $x(0)$ é conhecida. A restrição $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$ é reforçada em todos os tempos $t \geq 0$ se as LMI's

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} X & XC_i^T \\ C_i X & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0 (3.23)$$

são satisfeitas, sendo $X = P^{-1}$. As LMI's são disponíveis para ambos, o CFS e o DFS. Um problema de projeto de controladores fuzzy estáveis que satisfaça a restrições de saída pode ser definido como segue:

Encontrar $X > 0$ e M_i ($i = 1, \dots, r$) satisfazendo (3.12), (3.13) e (3.23).

3.5 Modelos fuzzy de sistemas caóticos^[53]

Para realizar um projeto de sistema fuzzy baseado em LMI's, os sistemas caóticos devem estar representados através de modelos fuzzy de TS^[17]. Um modelo fuzzy exato^[61] é empregado para construir modelos fuzzy para sistemas caóticos. Ele utiliza o conceito do setor de não-linearidade^{[37],[38],[62]}.

Abaixo, tem-se um sinal de entrada $u(t)$ adicionado à primeira equação do sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -ax_1(t) + ax_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= cx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - bx_3(t),\end{aligned}$$

sendo que a , b e c constantes, $u(t)$ é o termo de entrada. Assuma que $x_1(t) \in [-d \ d]$ e $d > 0$. Então, pode-se ter o seguinte modelo fuzzy que representa exatamente a equação não-linear sujeito a $x_1(t) \in [-d \ d]$:

Regra 1: Se $x_1(t)$ é M_1 , então $\dot{x}(t) = A_1x(t) + Bu(t)$.

Regra 2: Se $x_1(t)$ é M_2 , então $\dot{x}(t) = A_2x(t) + Bu(t)$.

sendo, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -d \\ 0 & d & -b \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & d \\ 0 & -d & -b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1(t)}{d} \right)$$

$$M_2(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1(t)}{d} \right).$$

O modelo fuzzy das equações de Lorenz representa exatamente sua dinâmica não-linear sob a hipótese limitada da variável de estado $x_1(t) \in [-d \ d]$, sendo $d > 0$. De qualquer forma, esta hipótese não é restritiva

por duas razões. Primeiro, as variáveis de estado do sistema caótico são limitadas. Segundo, d pode ser ajustado para qualquer valor. Mesmo que as equações não-lineares do sistema caótico sejam desconhecidas, técnicas de modelagem fuzzy, recentemente desenvolvidas^{[17],[63],[64]}, usando a observação de dados podem ser utilizados para obter modelos fuzzy.

Os modelos fuzzy citados acima tem B comum nas partes consequentes e $x_1(t)$ nas partes premissas. Agora, o modelo fuzzy de Lorenz é assumido ser o caso da matriz B comum, isto é, o seguinte modelo fuzzy será considerado:

Se $z_1(t)$ é M_{i1} e ... e $z_p(t)$ é M_{ip} ,

$$\text{Então } sx(t) = A_i x(t) + Bu(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.24)$$

sendo $p = 1$ e $z_1(t) = x_1(t)$. Note que todas as condições, isto é, teoremas e todos os processos de projetos mostrados aqui podem ser aplicados não somente para o caso de B comum e $z_1(t) = x_1(t)$ descrito em (3.24), mas também para o caso geral (3.2). O processo de defuzzificação de (3.24) é representado como

$$sx(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) \{A_i x(t) + Bu(t)\}}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} \quad (3.25)$$

$$sx(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + Bu(t)\},$$

sendo $z(t) = z_1(t) = x_1(t)$.

Observação 3.2: O modelo fuzzy acima tem uma única entrada. Pode-se considerar também o caso de múltiplas entradas, ou seja, o sistema de Lorenz pode ser considerado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -ax_1(t) + ax_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= cx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) + u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - bx_3(t) + u_3(t). \end{aligned}$$

Do mesmo modo que o exemplos acima, pode-se ter o seguinte modelo fuzzy representando exatamente a equação não-linear sob $x_1(t) \in [-d \quad d]$.

Regra 1: Se $x_1(t)$ é M_1 , então $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + Bu(t)$.

Regra 2: Se $x_1(t)$ é M_2 , então $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + Bu(t)$.

sendo $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^T$ e $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & -d \\ 0 & d & -b \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & d \\ 0 & -d & -b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1(t)}{d} \right)$$

$$M_2(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1(t)}{d} \right)$$

Será considerado para as simulações, o sistema de Lorenz com apenas uma entrada.

3.5.1 Estabilização

Estabilização através de Compensação de distribuição paralela:

Usando o conceito de PDC, controladores fuzzy podem ser construídos a partir de modelos fuzzy dado no item anterior.

Regra 1: Se $x_1(t)$ é M_1 , então $u(t) = -F_1 x(t)$.

Regra 2: Se $x_1(t)$ é M_2 , então $u(t) = -F_2 x(t)$. (3.26)

Então, o controlador fuzzy é representado como

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^2 \omega_i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^2 \omega_i(z(t))} = - \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) F_i x(t), \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.25), tem-se

$$\dot{s}x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i - BF_i) x(t), \quad (3.28)$$

sendo $r = 2$. O Teorema 3.1 pode ser simplificado para o caso B comum:

Teorema 3.2 CFS: O equilíbrio do sistema de controle fuzzy (3.28) é globalmente assintoticamente estável se existe uma matriz P positiva definida tal que

$$(A_i - BF_i)^T P + P(A_i - BF_i) < 0. \quad (3.29)$$

Prova: Demonstra-se que a condição (3.11) está satisfeita se a condição (3.10) [ou (3.29)] está satisfeita para o caso B comum.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{G_{ii} + G_{jj}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ii} + G_{jj}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ (A_i - BF_i + A_j - BF_j)^T P \\ &+ P(A_i - BF_i + A_j - BF_j) \}. \end{aligned}$$

Definindo novas matrizes $G_{ii} = A_i - BF_i$ e $G_{jj} = A_j - BF_j$, reescrevendo as equações como

$$\frac{1}{2} \{ (G_{ii} + G_{jj})^T P + P(G_{ii} + G_{jj}) \} = \frac{1}{2} \{ G_{ii}^T P + PG_{ii} + G_{jj}^T P + PG_{jj} \}.$$

Então, a condição (3.11) está satisfeita se a (3.10) [ou (3.29)] está satisfeita.

Projeto do controlador fuzzy estável CFS:

Achar $X > 0$ e $M_i (i = 1 \dots r)$ satisfazendo

$$-XA_i^T - A_iX + M_i^T B^T + BM_i > 0,$$

sendo $X = P^{-1}$ e $M_i = F_iX$.

Projeto do controlador fuzzy de taxa de decaimento CFS:

Maximizar α

$$X, M_1, \dots, M_r,$$

Sujeito a $X > 0$,

$$-XA_i^T - A_iX + M_i^T B^T + BM_i - 2\alpha X > 0,$$

sendo $X = P^{-1}$ e $M_i = F_iX$.

Observação 3.3: No caso C comum, as condições de LMI para as restrições de saída podem ser simplificadas. Assume-se que a condição inicial $x(0)$ é conhecida. A restrição $\|y(t)\| \leq \lambda$ é satisfeita para todo tempo $t \geq 0$ se as LMI's

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X & XC \\ CX & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

são satisfeitas, sendo $X = P^{-1}$.

3.5.2 Linearização Exata

A técnica EL objetiva o cancelamento da não-linearidade de sistemas caóticos via o PDC.

Teorema 3.3: Sistemas caóticos representados pelo sistema fuzzy (3.25) são linearizados exatamente através do controlador fuzzy (3.27) se existem ganhos de realimentação F_i tais que

$$\{(A_1 - BF_1) - (A_i - BF_i)\}^T \cdot \{(A_1 - BF_1) - (A_i - BF_i)\} = 0, \quad (3.30)$$

$$i = 2, 3, \dots, r.$$

Então, o sistema de controle é linearizado como $sx(t) = Gx(t)$, sendo $G = A_1 - BF_1 = A_i - BF_i$.

Prova: Note que $G = A_1 - BF_1 = A_i - BF_i$ se a condição (3.30) é satisfeita.

As condições acima estão disponíveis para ambos, o CFS e DFS. Se B é uma matriz não-singular, o sistema é linearizado exatamente usando $F_i = B^{-1}(G - A_i)$. De qualquer forma, a hipótese de que B é uma matriz não-singular é muito estrita. Por outro lado, se B não é uma matriz não-singular, o Teorema 3.3 pode ser utilizado. A condição do Teorema 3.3 pode ser convertida em

$$X\{(A_1 - BF_1) - (A_i - BF_i)\}^T \cdot \{(A_1 - BF_1) - (A_i - BF_i)\}X < \beta S,$$

$$i = 2, 3, \dots, r.$$

sendo que X é uma matriz definida positiva e S é uma matriz definida positiva tal que $S^T S < I$. A condição (3.30) é satisfeita se todos os elementos em $\beta \cdot S$ são próximos de zero, isto é, $\beta \cdot S \approx 0$, na desigualdade anterior. Usando complemento de Schur, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \beta S & X\{(A_1 - BF_1) - (A_i - BF_i)\}^T \\ \{(A_1 - BF_1) - (A_i - BF_i)\}X & I \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 2, 3, \dots, r.$$

Define-se $M_i = F_i X$ assim como para $X > 0$ tem-se $F_i = M_i X^{-1}$.

Substituindo nas desigualdades acima produzimos

$$\begin{bmatrix} \beta S & \{(A_1 X - BM_1) - (A_i X - BM_i)\}^T \\ \{(A_1 X - BM_1) - (A_i X - BM_i)\} & I \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 2, 3, \dots, r.$$

Note que G não é sempre uma matriz estável mesmo que a condição do Teorema 3.5 seja satisfeita. Do Teorema 3.3 e das condições de estabilidade descritas em 3.1.6, define-se o seguinte problema de projeto para o EL.

Projeto do controlador fuzzy estável para o EL-CFS:

Minimizar β

$$X, S, M_1, M_2, \dots, M_r$$

Sujeito a $X > 0$, $\beta > 0$, $S > 0$

$$\begin{bmatrix} I & S \\ S & I \end{bmatrix} > 0$$

$$-A_i X + B M_i - X A_i^T + M_i^T B^T > 0$$

$$i = 1, 2, \dots, r.$$

$$\begin{bmatrix} \beta S & \{(A_i X - B M_i) - (A_i X - B M_i)\}^T \\ \{(A_i X - B M_i) - (A_i X - B M_i)\} & I \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 2, 3, \dots, r.$$

sendo $X = P^{-1}$ e $M_i = F_i X$.

Nas LMI's, se todos os elementos em $\beta \cdot S$ são próximos de zero, isto é, $\beta \cdot S \approx 0$, os problemas de EL acima, para os projetos de controladores fuzzy estáveis, são factíveis. Neste caso, $G = A_i - B F_i$ para todo i e G é uma matriz estável.

Projeto do controlador fuzzy da taxa de decaimento para o EL-CFS:

Maximizar α

$$X, S, M_1, M_2, \dots, M_r$$

Minimizar β

$$X, S, M_1, M_2, \dots, M_r$$

Sujeito a $X > 0$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $S > 0$

$$\begin{bmatrix} I & S \\ S & I \end{bmatrix} > 0$$

$$-A_i X + B M_i - X A_i^T + M_i^T B^T - 2\alpha X > 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, r.$$

$$\begin{bmatrix} \beta S & \{(A_i X - BM_i) - (A_i X - BM_i)\}^T \\ \{(A_i X - BM_i) - (A_i X - BM_i)\} & I \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 2, 3, \dots, r.$$

sendo $X = P^{-1}$ e $M_i = F_i X$.

Observação 3.4: Os problemas de projeto da taxa de decaimento tem dois parâmetros, α e β , para ser maximizado ou minimizado.

Estes problemas podem ser resolvidos como segue:

Fixando α em zero, minimiza-se β .

Em seguida, fixa-se β com o valor obtido no item anterior e então α é ajustado para obter o melhor resultado possível, seja minimizando-o ou maximizando-o.

Este procedimento pode ser repetido para obter uma solução mais apurada.

Vale ressaltar que as restrições no controle de entrada e saída podem ser adicionadas nos problemas do projeto acima.

3.5.3 Sincronização

Esta parte introduzirá o item mais importante para o trabalho: "A sincronização de sistemas caóticos". Métodos de projeto baseado em LMI's usando a técnica EL serão propostos. Existem dois casos, mas aqui será considerado apenas o caso 1.

Caso 1: O problema de EL é factível, isto é, todos os elementos em $\beta \cdot S$ são próximos de zero.

Caso 2: O problema EL é infactível, isto é, todos os elementos em $\beta \cdot S$ não são próximos de zero.

Este trabalho enfocou apenas o caso 1 de acordo com a descrição abaixo.

Caso 1

Considere um modelo fuzzy de referência que representa um receptor de um sistema caótico.

Referência regra i:

Se $z_{R1}(t)$ é M_{i1} e ... e $z_{Rp}(t)$ é M_{ip}



$$\text{Então } s\dot{x}_R(t) = A_i x_R(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.31)$$

sendo $z_R(t) = [z_{R1}(t) \quad z_{R2}(t) \quad \dots \quad z_{Rp}(t)]^T$. O processo de defuzzificação é dado como

$$s\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z_R(t)) A_i x_R(t) \quad (3.32)$$

Assuma que $e(t) = x(t) - x_R(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado do transmissor. Então, a partir de (3.25) e (3.32), tem-se:

$$se(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z_R(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z_R(t)) A_i x_R(t) + Bu(t). \quad (3.33)$$

Projeta-se dois subcontroladores fuzzy para realizar a sincronização.

Subcontrolador A:

Regra de controle i:

Se $z_1(t)$ é M_{i1} e ... e $z_p(t)$ é M_{ip}

$$\text{Então } u_A(t) = -F_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.34)$$

Subcontrolador B:

Regra de controle i:

Se $z_{R1}(t)$ é M_{i1} e ... e $z_{Rp}(t)$ é M_{ip}

$$\text{Então } u_B(t) = F_i x_R(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.35)$$

O controlador fuzzy é construído pela conexão paralela, isto é:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_A(t) + u_B(t) \\ &= -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z_R(t)) F_i x_R(t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

O projeto visa determinar os ganhos de realimentação F_i . Substituindo (3.36) em (3.33), obtém-se:

$$se(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i - BF_i) x(t) - \sum_{i=1}^r h_i(z_R(t)) (A_i - BF_i) x_R(t). \quad (3.37)$$

Então, se a condição do Teorema 3.3 é satisfeita, o sistema de erro é linearizado usando a lei de controle fuzzy (3.36). O sistema de erro linearizado é $se(t) = Ge(t)$, sendo que $G = A_i - BF_i$. O G não é sempre uma matriz estável mesmo que a condição do Teorema 3.3 seja satisfeita. Então, se for possível encontrar ganhos de realimentação F_i tal que G seja uma matriz estável, o

Regra do controlador 2: Se $x_1(t)$ é M_2 , então $u(t) = -F_2 x(t)$.

sendo, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -20d \\ 0 & 5d & -b \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 20d \\ 0 & -5d & -b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1(t)}{d} \right)$$

$$M_2(x_1(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1(t)}{d} \right).$$

O modelo fuzzy das equações de Lorenz representa exatamente sua dinâmica não-linear sob a hipótese limitada da variável de estado $x_1(t) \in [-d \ d]$, sendo $d > 0$. Neste caso $d = 6$.

3.6.1 Estabilização

Para a simulação do controlador fuzzy estável, projetou-se as LMI's e observou-se que o sistema de Lorenz é factível obtendo os resultados abaixo:

$$P = \begin{bmatrix} 0,8115 & -0,0024 & -0,0000 \\ -0,0024 & 1,4007 & -0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & 5,6037 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = [-15,6370 \ 94,6972 \ 0,3607]$$

$$F_1 = [-15,6370 \ 94,6972 \ -0,3607]$$

Ligando-se o controle $u(t)$ em $t > 10s$ (segundos), tem-se:

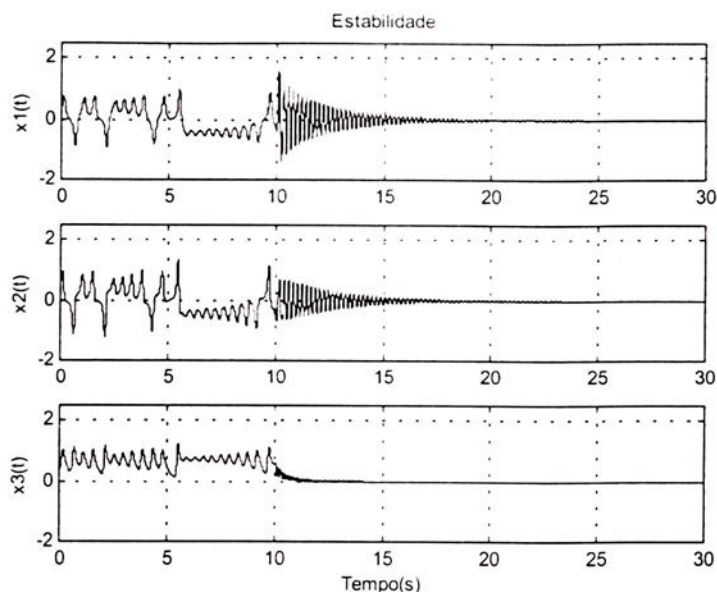


Figura 3.2: Resultados do projeto do controlador fuzzy estável.

Analisando a Figura 3.2, nota-se que o controlador fuzzy estável simulado estabiliza o sistema caótico, isto é, $x_1(t) \rightarrow 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$ e $x_3(t) \rightarrow 0$, mas em um período de tempo muito extenso.

3.6.2 Taxa de decaimento

Para a simulação do controlador fuzzy estável com taxa de decaimento, projetou-se as LMI's e observou-se que o sistema de Lorenz é factível obtendo os resultados abaixo:

$$P = \begin{bmatrix} 0,9162 & 0,0663 & 0,0000 \\ 0,0663 & 0,7308 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 2,90037 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = [-8,2957 \quad 52,4341 \quad -8,6794]$$

$$F_2 = [-8,2957 \quad 52,4341 \quad 8,6794]$$

$$\alpha = 3,9$$

Quando $u(t)$ atua em $t > 10$ s(segundos), tem-se:

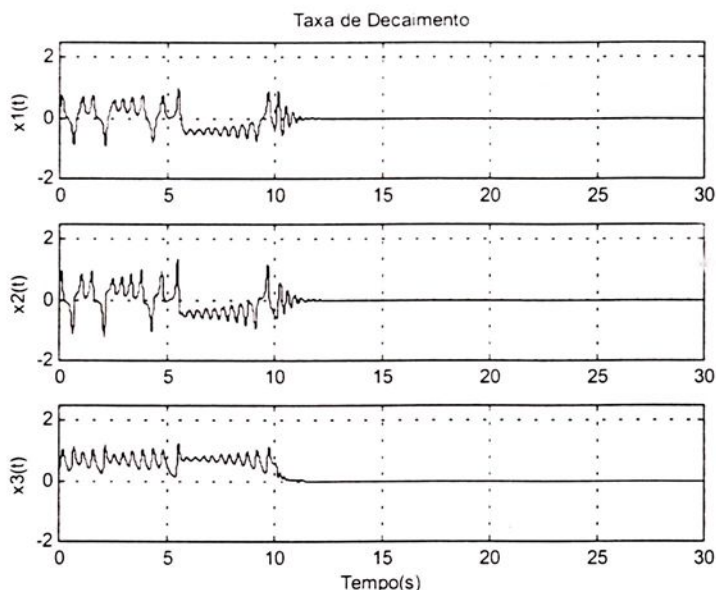


Figura 3.3: Resultados do projeto do controlador fuzzy estável com taxa de decaimento.

Nota-se que o controlador fuzzy estável com taxa de decaimento simulado estabiliza o sistema caótico com uma maior velocidade de resposta, isto é, $x_1(t) \rightarrow 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$ e $x_3(t) \rightarrow 0$, rapidamente.

3.6.3 Linearização exata

Simulando o controlador fuzzy estável a partir da técnica de linearização exata com taxa de decaimento, projetou-se as LMI's e observou-se que o sistema de Lorenz é factível obtendo os seguintes resultados:

$$P = 1,0 \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,5280 & -0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & 2,1069 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = 1,0 \times 10^5 \times [0,0006 \quad 4,6467 \quad -0,0012]$$

$$F_2 = 1,0 \times 10^5 \times [0,0006 \quad 4,6467 \quad 0,0012]$$

$$\alpha = 3,9$$

$$\beta = 0,1$$

Na atuação de $u(t)$ em $t > 10$ s(segundos), obtém-se:

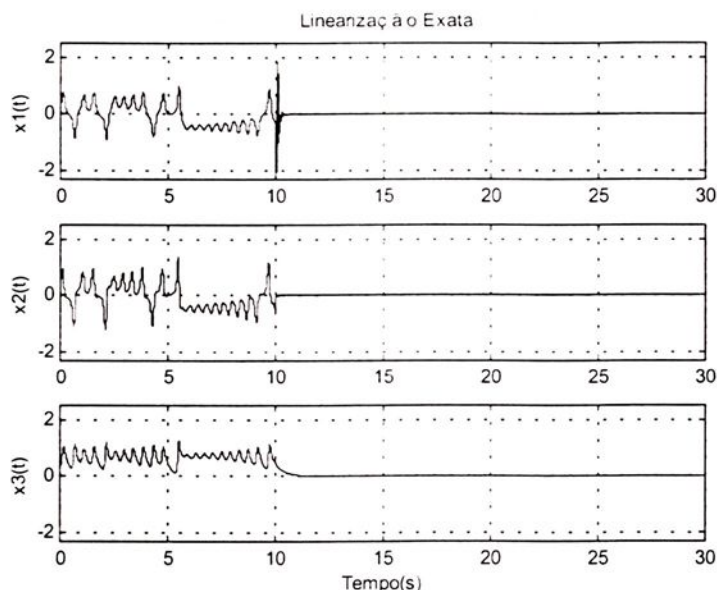


Figura 3.4: Resultados do projeto do controlador fuzzy estável para linearização exata com taxa de decaimento.

Nota-se que o controlador fuzzy estável para linearização exata com taxa de decaimento simulado estabiliza, isto é, $x_1(t) \rightarrow 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$ e $x_3(t) \rightarrow 0$, mas pode-se observar que para isso foi exigida uma tensão muito alta no período de transição (valores elevados dos elementos de F_1 e F_2) conseqüentemente exigindo uma tensão de alimentação muito alta impossibilitando a implementação do controlador com componentes discretos.

Para solucionar o problema introduziu-se uma restrição de entrada no projeto das LMI's, obtendo-se os seguintes resultados:

$$P = 1,0 \times 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0765 & 0,0436 & -0,0000 \\ 0,0436 & 0,2769 & -0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & 1,0102 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$F_1 = [61,9220 \quad 129,7186 \quad -67,3125] \quad (3.39)$$

$$F_2 = [61,9163 \quad 129,7238 \quad 67,3258] \quad (3.40)$$

$$\alpha = 3,9 \quad (3.41)$$

$$\beta = 0,1 \quad (3.42)$$

$$\mu = 10 \quad (3.43)$$

Quando $u(t)$ atua em $t > 10$ s(segundos), obtém-se:

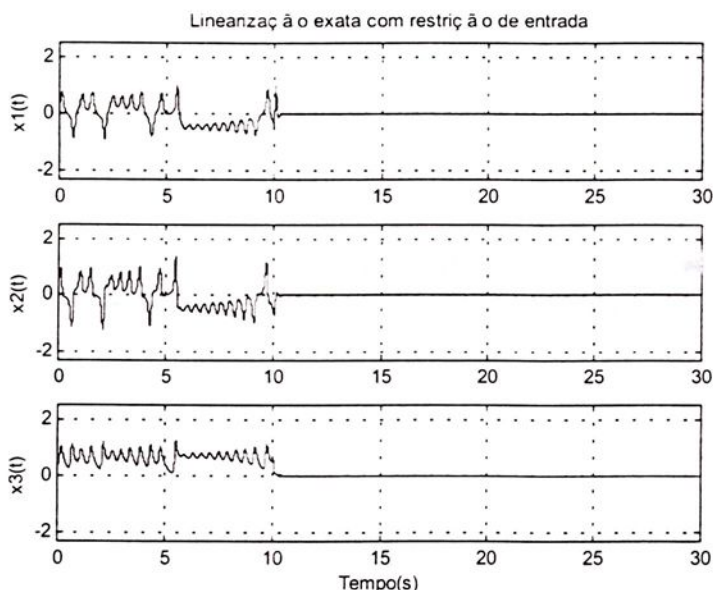


Figura 3.5: Resultados do projeto do controlador fuzzy estável para linearização exata com taxa de decaimento e restrição de entrada.

Nota-se que o controlador fuzzy estável para linearização exata com taxa de decaimento e restrição de entrada simulado estabiliza o sistema com valores de ganhos de realimentação possíveis para implementação e com baixa tensão no período de transição.

3.6.4 Sincronização

Neste item será considerado um sistema transmissor sem entrada de controle com condições iniciais $x_1(0) = 0,3$, $x_2(0) = 0,4$ e $x_3(0) = 0,4$. A Figura 3.6 mostra a simulação do transmissor.

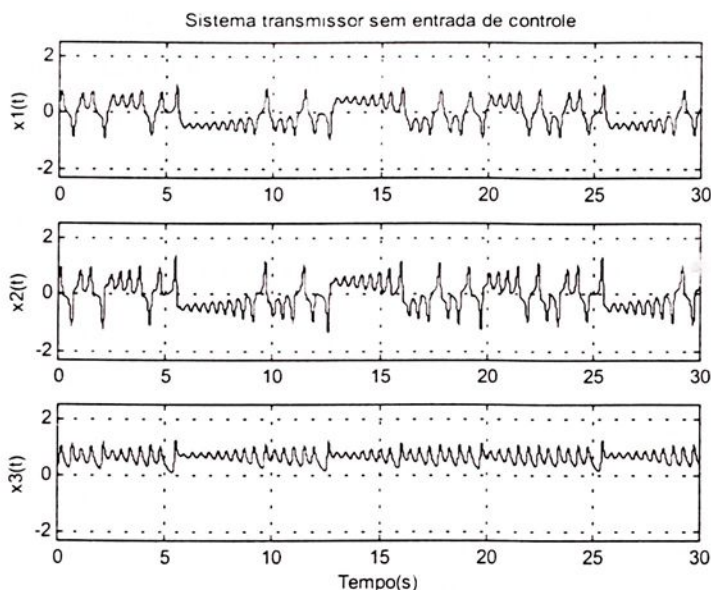


Figura 3.6: Sistema transmissor sem entrada de controle

Devido à sensibilidade do sistema caótico em relação às condições iniciais, simulou-se o sistema receptor com pequenas variações nas mesmas, de acordo com a Figura 3.7, para que posteriormente o controlador atue sincronizando no sistema. As condições iniciais no receptor são: $x_{1R}(0) = 0,4$, $x_{2R}(0) = 0,5$ e $x_{3R}(0) = 0,5$.

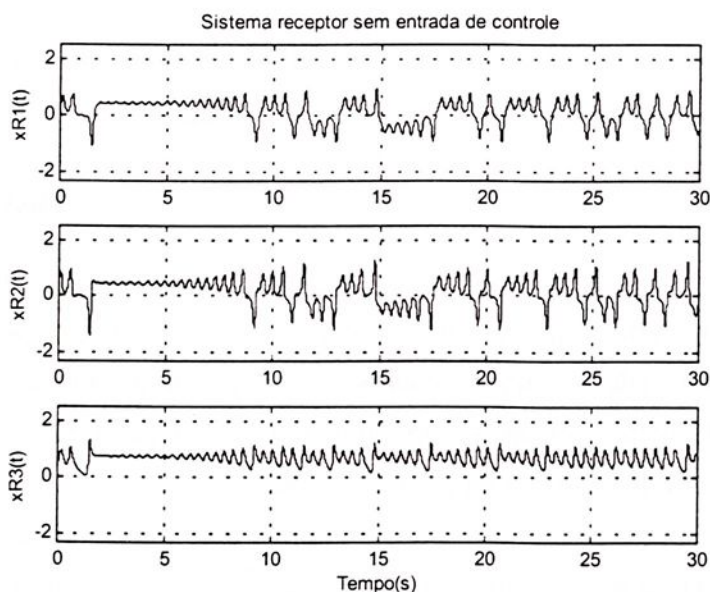


Figura 3.7: Sistema receptor sem entrada de controle

Para a sincronização do sistema transmissor com o receptor, simulou-se dois subcontroladores projetados com as LMI's do item anterior. A sincronização acontece quando o erro entre transmissor/receptor tende a zero, como mostrado na Figura 3.8. Atuando os subcontroladores em $t > 20$ s (segundos) tem-se:

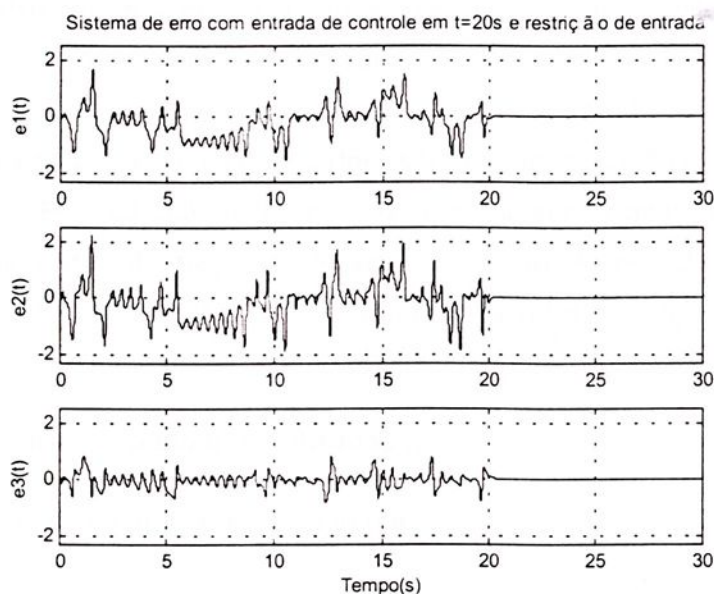


Figura 3.8: Sincronização entre sistema transmissor e receptor

Observa-se que quando os subcontroladores atuam, o erro de sincronização é estabilizado, isto é, $e_1(t) \rightarrow 0$, $e_2(t) \rightarrow 0$ e $e_3(t) \rightarrow 0$.

3.7 Conclusão

Este capítulo proporcionou conhecimentos teóricos para a implementação de um controlador fuzzy baseado em LMI's e conseqüentemente apresentou resultados significativos utilizando o sistema de Lorenz, o sistema proposto para implementação. Foi possível observar nas Figuras (3.6), (3.7) e (3.8) obtidas através do programa MatLab que, apesar de não ser uma simulação com componentes discretos, ao ligar o controlador no sistema de comunicação, depois de um tempo mínimo de transição, o sistema se estabiliza, permitindo a sincronização entre o sistema transmissor e receptor.

CAPÍTULO 4

4. MODOS DE TRANSMISSÃO DO SINAL DE INFORMAÇÃO

O capítulo 2 forneceu fundamentos matemáticos para a compreensão de um sistema não-linear e as condições para que este sistema seja caótico. Também forneceu como sincronizar dois sistemas idênticos. Devido a perda de sincronismo ao inserir uma informação no sistema de comunicação, surgiu a necessidade de um controlador, sendo que o capítulo 3 supriu a este problema. Este capítulo está enfocado em apresentar diferentes maneiras em que o sinal de informação pode ser transmitido. Apesar de existirem outras maneiras de transmissão^{[11],[14],[15]}, foram estudados dois tipos de transmissão do sinal de informação: máscara caótica e modulação caótica.

4.1 Mascarando o sinal de informação^[11]

O sistema de Lorenz é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{4.1}$$

sendo σ , r e b parâmetros do sistema. Como mostrado por Pecora e Carroll^[08], o sistema de Lorenz é decomposto em dois subsistemas estáveis. Especificamente, um subsistema de resposta estável (x_1 , z_1) definido por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(y - x_1) \\ \dot{z}_1 &= x_1 y - bz_1\end{aligned}\tag{4.2}$$

e o segundo subsistema estável (y_2 , z_2) definido por

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 &= rx - y_2 - xz_2 \\ \dot{z}_2 &= xy_2 - bz_2\end{aligned}\tag{4.3}$$

A equação (4.1) pode ser interpretada como o sistema transmissor, desde que sua dinâmica seja independente dos subsistemas de resposta. As

equações (4.2) e (4.3) representam sistemas de respostas dinâmicas que são acionados pelos sinais $y(t)$ e $x(t)$ respectivamente.

Os autovalores da matriz Jacobiana do subsistema (x_1, z_1) são todos negativos, implicando que $|x_1 - x|$ e $|z_1 - z| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Também se pode averiguar que os expoentes de Lyapunov do subsistema (y_2, z_2) são todos negativos, assim $|y_2 - y|$ e $|z_2 - z| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Dois subsistemas de resposta podem ser combinados para regenerar o sistema dinâmico completo, o sistema de transmissão. Especificamente, se o sinal de entrada do subsistema (y_2, z_2) é $x(t)$, então a saída $y_2(t)$ pode ser usada para acionar o subsistema (x_1, z_1) e subseqüentemente gerar um novo $x(t)$ além de ter obtido $y(t)$ e $z(t)$ através da sincronização. É importante reconhecer que os dois subsistemas de respostas dados por (4.2) e (4.3) podem ser combinados tendo um único sistema de resposta tridimensional. Isto produz um sistema de resposta de dimensão completa que é estruturalmente similar ao sistema de transmissão (4.1).

4.1.1 O circuito transmissor

Uma implementação de (4.1) através de um circuito eletrônico apresenta as seguintes dificuldades: as variáveis de estado em (4.1) assumem valores que excedem limites razoáveis da fonte de alimentação. De qualquer forma esta dificuldade pode ser eliminada por uma simples transformação de variáveis. Especificamente, para os coeficientes σ , r e b usados aqui, uma transformação apropriada é $u=x/10$, $v=y/10$ e $w=z/20$ ^[11]. Com este fator de correção de escala, as equações de Lorenz são transformadas para:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \sigma(v - u) \\ \dot{v} &= ru - v - 20uw \\ \dot{w} &= 5uv - bw\end{aligned}\tag{4.4}$$

Este sistema que foi usado como o transmissor pode ser facilmente implementado com um circuito eletrônico, pois todas as variáveis de estado têm escalas dinâmicas similares e a tensão de alimentação fica dentro dos limites típicos para os amplificadores.

A Figura 4.1 mostra a implementação de um circuito analógico a partir das equações em (4.4).



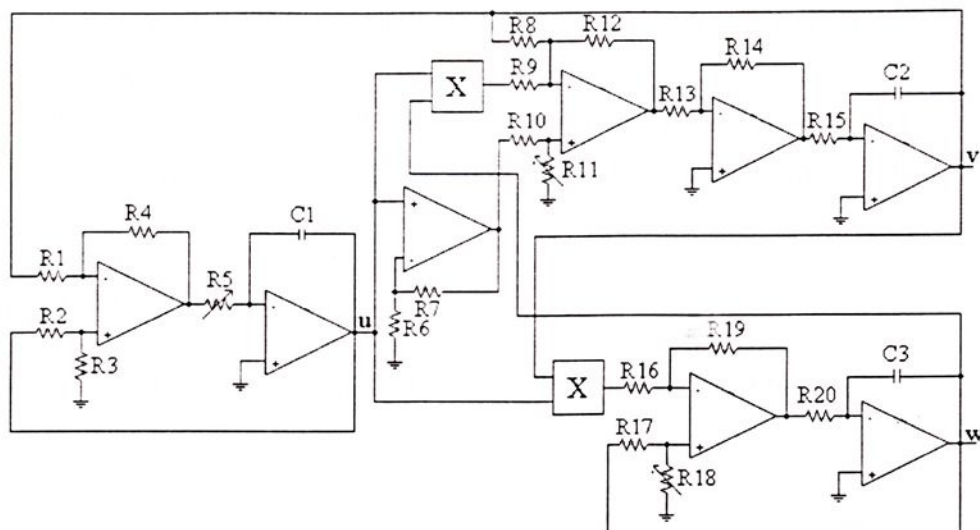


Figura 4.1: Circuito caótico baseado em Lorenz

Nela existem os amplificadores operacionais e outros componentes associados que desempenham as funções de adição, subtração e integração. Também tem-se a implementação de multiplicadores analógicos para os termos não-lineares do circuito de equações. Aplicando a técnica padrão de análise nodal para o circuito da Figura 4.1, um conjunto de equações de estado que governam o comportamento dinâmico do circuito pode ser obtido através das equações:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{R_5 C_1} \left[\frac{R_4}{R_1} v - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \left(1 + \frac{R_4}{R_1} \right) u \right] \\ \dot{v} &= \frac{1}{R_{15} C_2} \left[\frac{R_{11}}{R_{10} + R_{11}} \left(1 + \frac{R_{12}}{R_8} + \frac{R_{12}}{R_9} \right) \left(1 + \frac{R_7}{R_6} \right) u - \frac{R_{12}}{R_8} v - \frac{R_{12}}{R_9} uv \right] \\ \dot{w} &= \frac{1}{R_{20} C_3} \left[\frac{R_{19}}{R_{16}} uv - \frac{R_{18}}{R_{17} + R_{18}} \left(1 + \frac{R_{19}}{R_{16}} \right) w \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Examinando as equações (4.5) pode-se verificar que a escala temporal pode ser facilmente ajustada mudando os valores dos três capacitores C_1 , C_2 e C_3 por um fator comum. Os coeficientes σ , r e b podem ser independentemente variados pelo ajuste dos resistores correspondentes R_5 ,

R_{11} e R_{18} . Esta propriedade é uma maneira simples de se variar os coeficientes do circuito de equações.

Para determinados valores de componentes escolhidos (resistores) e reescalando o tempo com um fator de 2505^[11], os coeficientes são $\sigma=16$, $r=45,6$ e $b=4$.

4.1.2 O circuito receptor

Um sistema de resposta com dimensão completa que sincroniza o sinal caótico no transmissor (4.4) é dado por

$$\begin{aligned}\dot{u}_r &= \sigma(v_r - u_r) \\ \dot{v}_r &= ru - v_r - 20uw_r \\ \dot{w}_r &= 5uv_r - bw_r\end{aligned}\quad (4.6)$$

Este sistema é obtido das equações do transmissor renomeando as variáveis (u, v, w) para (u_r, v_r, w_r) e então substituindo $u(t)$ por $u_r(t)$ na segunda e na terceira equação. Este sistema é denominado receptor sob o aspecto de aplicações em comunicação.

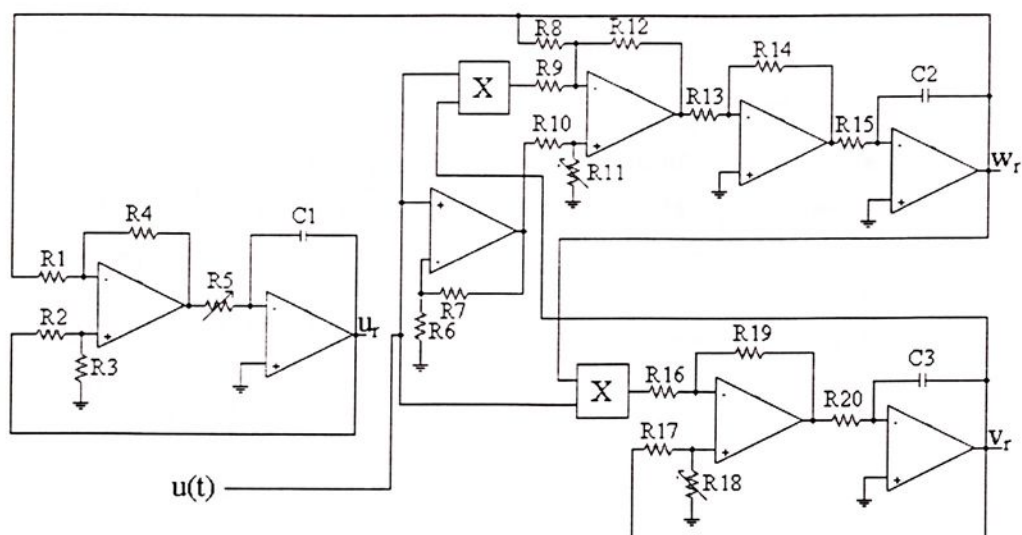


Figura 4.2: Circuito receptor caótico

4.1.3 Sinal caótico mascarado

Um enfoque potencial para aplicação em comunicações é baseado no sinal caótico mascarado e restabelecido^[14]. Neste enfoque, um sinal é somado no transmissor, o sinal portador de informação $m(t)$. Conseqüentemente, o receptor retira a máscara através da subtração do sinal. Isto pode ser feito com a sincronização no circuito receptor, depois verifica-se experimentalmente a robustez da sincronização.

Embora existam muitas possibilidades de variações, foi considerado um sinal transmitido da forma $s(t) = u(t) + m(t)$. Para utilizar a máscara caótica, assume-se que o nível de potência de $m(t)$ é bem menor do que $u(t)$. O sistema dinâmico implementado no receptor é

$$\begin{aligned}\dot{u}_r &= 16(v_r - u_r) \\ \dot{v}_r &= 45.6s(t) - v_r - 20s(t)w_r \\ \dot{w}_r &= 5s(t)v_r - 4w_r\end{aligned}$$

Se o receptor foi sincronizado com $s(t)$ no transmissor, então $u_r(t) \equiv u(t)$, e conseqüentemente $m(t)$ é recuperado como $\hat{m}(t) = s(t) - u_r(t)$. A Figura 4.3 ilustra este enfoque.

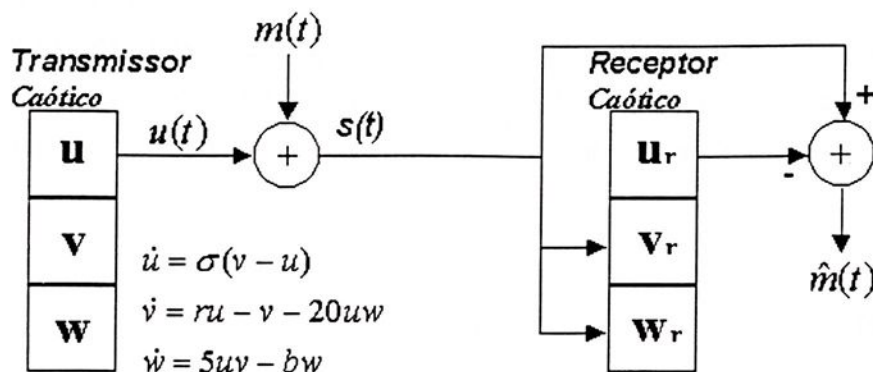


Figura 4.3: Sistema caótico com sinal mascarado

4.2 Utilização de um Parâmetro do Sistema para a Transmissão do Sinal^[16]

O formato geral desta técnica é mostrado na Figura 4.4.

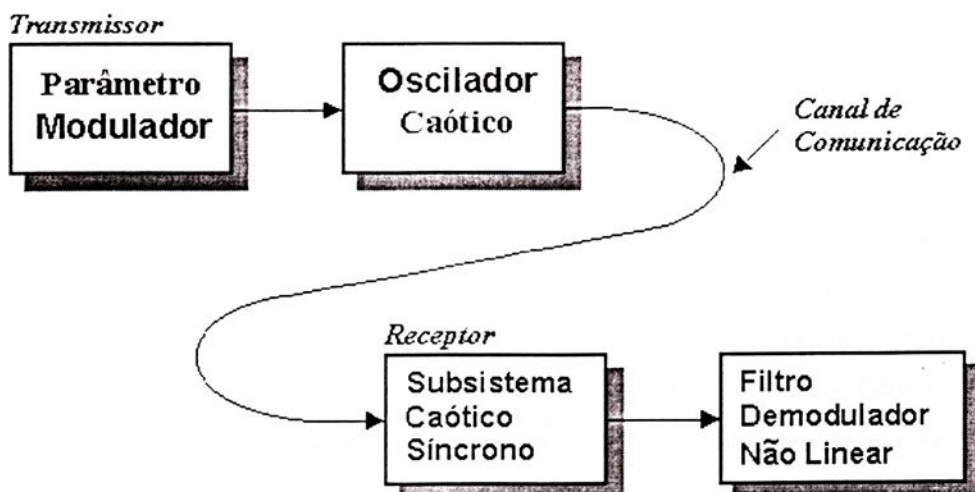


Figura 4.4: Diagrama de blocos do sistema de comunicação incorporando o parâmetro de modulação do oscilador caótico, a demodulação é feita com um filtro não-linear.

No transmissor, um sinal de informação analógico é codificado na portadora de informação usando um parâmetro de modulação no oscilador caótico. No receptor, um subsistema caótico síncrono é ampliado com um filtro designado especificamente para extrair continuamente o sinal da onda modulada. A escolha apropriada da variável de estado que irá transmitir o sinal de informação e o parâmetro de modulação assegura a sincronização no receptor, independente da modulação.

A teoria geral básica é descrita matematicamente. Certamente a teoria é apresentada para osciladores de terceira ordem, embora possa ser generalizada para osciladores de qualquer ordem. Considerando um oscilador da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z, \lambda) \\ \dot{y} &= g(x, y, z) \\ \dot{z} &= h(x, y, z)\end{aligned}\tag{4.7}$$

sendo x, y e z os estados do sistema. λ é um parâmetro no sistema, e a variável independente é o tempo t . O oscilador em (4.7) pode ou não ser caótico, entretanto, é aconselhável assumir que o oscilador é caótico e que o comportamento do sistema muda facilmente com λ em alguma região dos valores do parâmetro. O sistema (4.7) engloba o transmissor da Figura 4.4.

Um subsistema síncrono para (4.7) pode ser construído da forma:

$$\begin{aligned}\dot{y}_r &= g(x, y_r, z_r) \\ \dot{z}_r &= h(x, y_r, z_r)\end{aligned}\tag{4.8}$$

sendo o estado x oriundo do sistema de transmissão (4.7). Este x é transmitido para o sistema receptor (4.8). Pecora e Carroll tem mostrado que os estados y_r e z_r em (4.8) podem se aproximar dos estados originais y e z em (4.7). Quando isto acontece é dito que o subsistema receptor (4.8) sincroniza com o sistema de controle não-linear (4.7). Depois, os autores Pecora e Carroll determinam as condições necessárias para a sincronização baseado nas condições sobre expoente de Lyapunov. O subsistema (4.8) está contido no receptor como mostrado na Figura 4.4.

O transmissor (4.7) e o subsistema síncrono (4.8) exibem uma forma especial a respeito do parâmetro λ , isto é, o subsistema (4.8) é propositadamente escolhido independente do parâmetro λ . Esta forma especial é um elemento essencial para nosso enfoque, no qual o parâmetro é idealmente adaptado para modular a onda caótica que é transmitida de (4.7) para (4.8). Portanto, seja:

$$\lambda = \lambda(t)\tag{4.9}$$

é uma função prescrita no tempo, que representa a informação a ser transmitida. O sinal em (4.9) pode ser representado como o sinal de modulação do parâmetro de entrada mostrado na Figura 4.4.

A suposição de que λ é ideal para modulação do parâmetro é sustentada por duas observações. Visto que o subsistema (4.8) é independente de λ , o receptor pode ser perfeitamente sintonizado para transmitir em (4.7) sem levar em consideração a modulação. Em contradição, se λ estivesse presente no sistema receptor (4.8), um parâmetro de descasamento seria inevitável quando o sinal é modulado. Este descasamento comprometeria a habilidade de sincronização do receptor com o transmissor, e a capacidade para comunicação poderia ser reduzida.

A equação x em (4.7), a qual não é apresentada no subsistema (4.8), pode ser utilizada no receptor para demodular o sinal.



Devido à primeira observação, a demodulação pode ser feita como:

$$\lambda = f^{-1}(x, y_r, z_r, \dot{x}) \quad (4.10)$$

sendo que f^{-1} representa a função inversa obtida resolvendo a equação x para o parâmetro λ . A princípio, tudo do lado direito de (4.10) é conhecido e λ pode ser estimado. Na prática, este enfoque é prejudicado por duas razões: $\dot{x}$ deve ser estimado de x no receptor, e a diferenciação amplia erros devido aos ruídos no sistema.

A função inversa em (4.10) pode conter singularidades que impactam adversamente estimativas do parâmetro.

4.3 Conclusão

Dentre as duas formas de transmissão apresentada neste capítulo, a máscara caótica é considerado uma das implementações menos segura para a transmissão do sinal de informação^[65], mas infelizmente a segunda implementação, a que utiliza um dos parâmetros do sistema para transmitir o sinal de informação não foi possível aplicar o modelo *fuzzy* de Takagi-Sugeno^[17] baseado em LMI's, pois ao projetar as LMI's no sistema, o resultado do problema foi infactível, isto é, não existe uma matriz definida positiva P que satisfaça o problema.



Figura 5.1: Circuito transmissor

Conseqüentemente tem-se o circuito receptor:

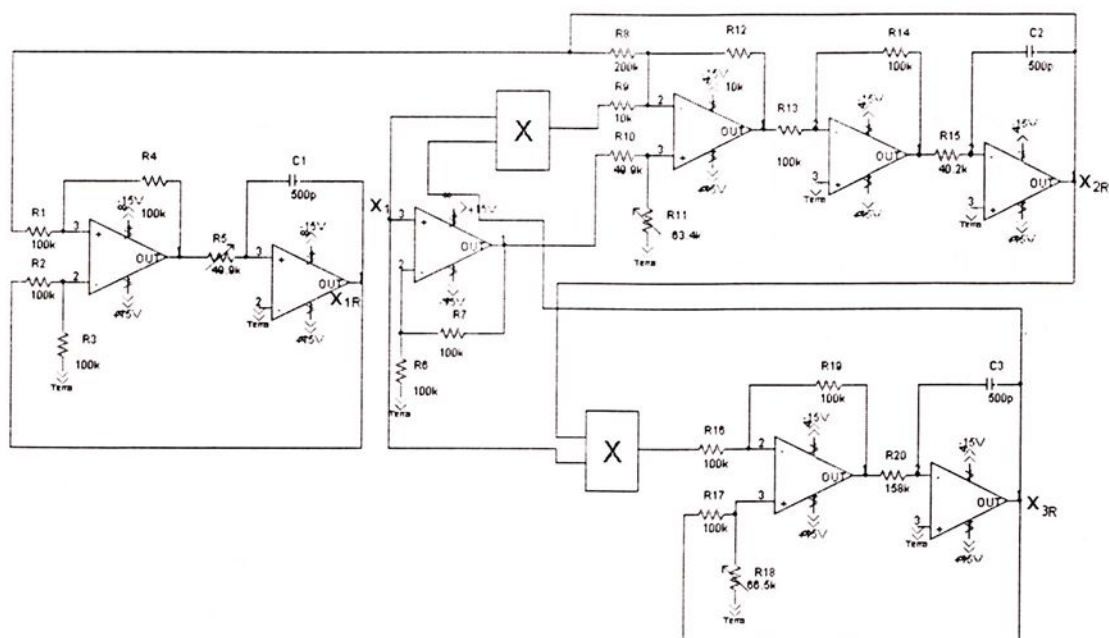


Figura 5.2: Circuito Receptor

Projitou-se o circuito do subcontrolador $u_A(t)$ e o circuito do subcontrolador $u_B(t)$ que é o mesmo que $-u_A(t)$, levando em consideração o sistema receptor, isto é, x_{1R} , x_{2R} e x_{3R} de acordo com as equações 3.34 e 3.35.

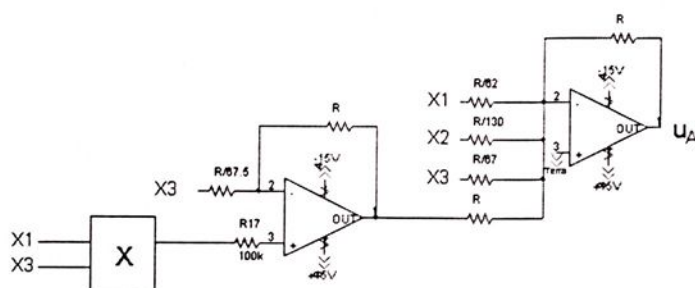


Figura 5.3: Circuito do subcontrolador

Utilizou-se o programa OrCAD 9.1 para a simulação do sistema de comunicação com o controlador, de acordo com a Figura 5.4, sendo que $m(t)$ é o sinal a ser transmitido, $u_A(t)$ e $u_B(t)$ os controladores projetados a partir das

equações do transmissor e receptor respectivamente e o transmissor/receptor oriundos do sistema de Lorenz.

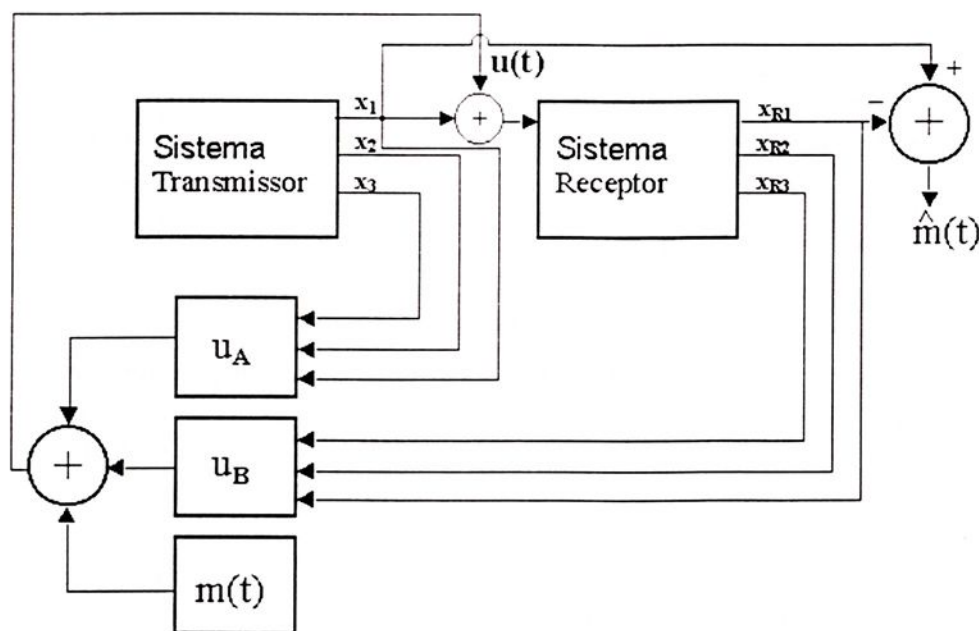


Figura 5.4: Diagrama de blocos do sistema de comunicação completo

5.1 Resultados

Nesta seção serão apresentados sinais de informação inseridos no transmissor e recuperados no receptor. Os resultados serão quantificados a partir do erro de recuperação do sinal. Foram analisados dois sistemas de comunicação, um sem a atuação do controlador e outro com a atuação do controlador *fuzzy* baseado em LMI's.

Todas as formas de onda apresentadas nesta seção possuem frequência de 1KHz e 50mVp.

A Figura 5.5 mostra o sinal senoidal $m(t)$ que será transmitido sem a atuação do controlador.

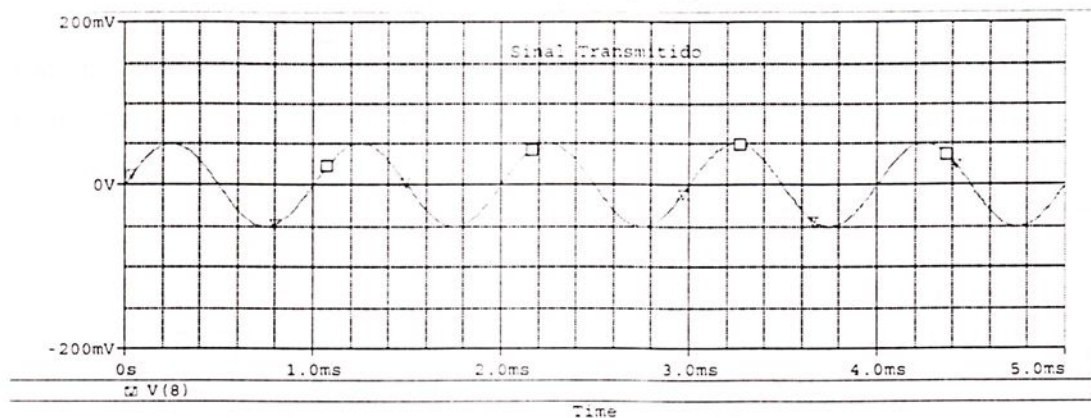


Figura 5.5: Sinal de informação $m(t)$ a ser transmitido

A Figura 5.6 mostra o sinal recuperado pelo receptor.

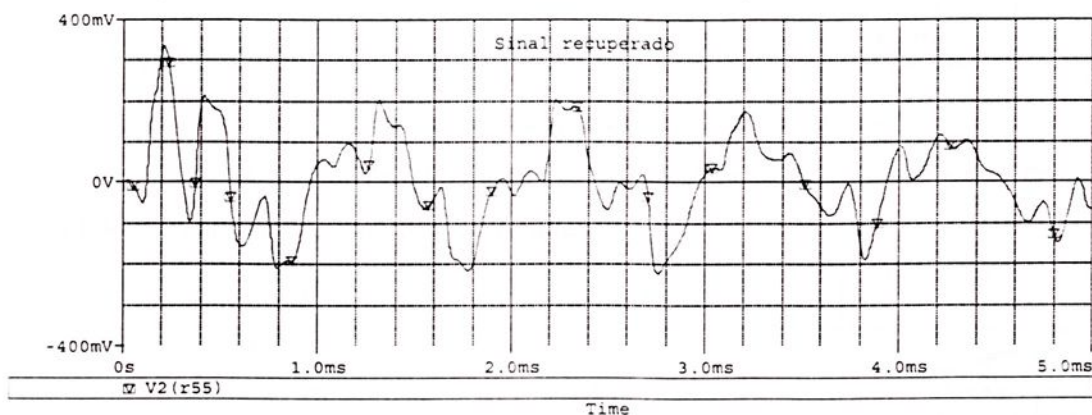


Figura 5.6: Sinal de informação $\hat{m}(t)$ recuperado

Para uma melhor visualização, a Figura 5.7 mostra a sobreposição do sinal transmitido com o sinal recuperado. Visualmente observa-se uma péssima recuperação do sinal transmitido.

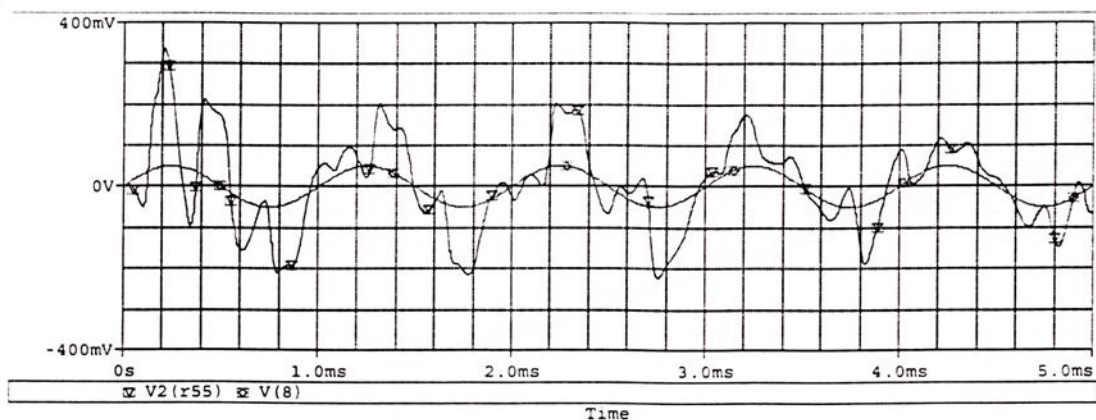


Figura 5.7: Sinal transmitido $m(t)$ sobreposto sobre o sinal recuperado $\hat{m}(t)$.

Fazendo uma análise quantitativa, a Figura 5.8 mostra o erro do sinal transmitido com o sinal recuperado. Pode-se observar que a maior tensão de erro obtida é de aproximadamente 100mVp, o dobro do valor da tensão transmitida.

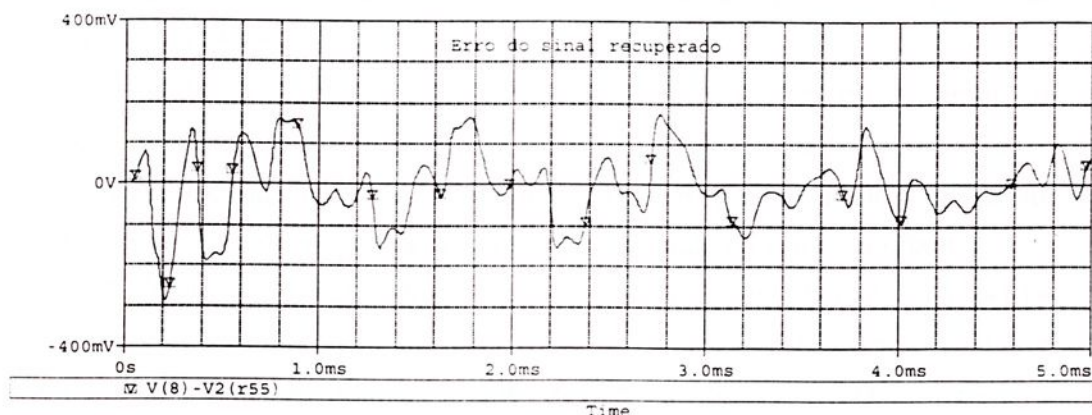


Figura 5.8: Erro do sinal recuperado, isto é, $\text{erro} = m(t) - \hat{m}(t)$

As Figuras 5.9 e 5.10 mostram a sincronização do sistema de comunicação sem a atuação do controlador.

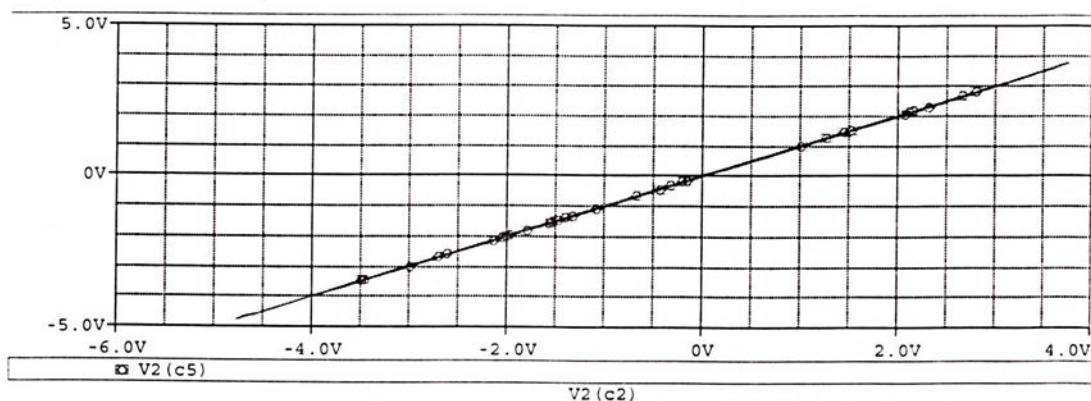


Figura 5.9: Sincronização de x_2 com x_{2R} sem o sinal de informação

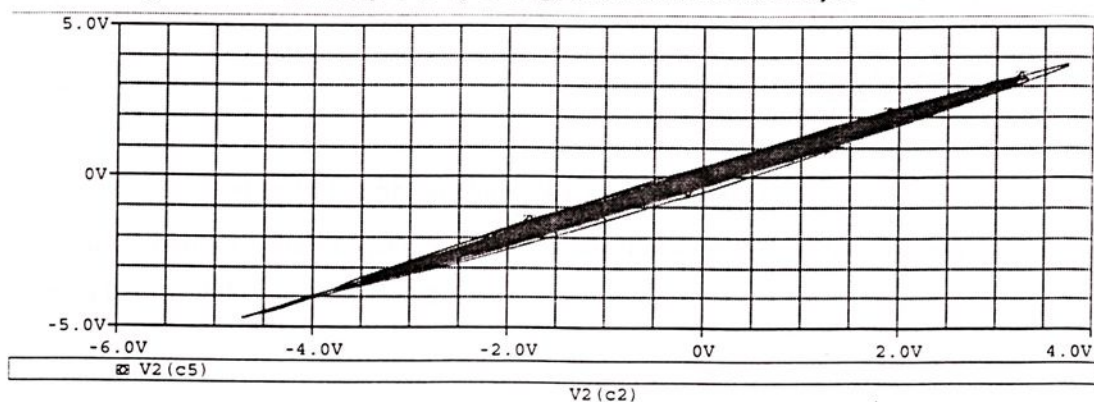


Figura 5.10: Sincronização de x_2 com x_{2R} com o sinal de informação

Analisando essas Figuras, nota-se que o sistema de transmissão perdeu a sincronização ao injetar o sinal de informação, pois ao inserir o sinal de informação o sistema perde o fator denominado auto-sincronização, isto é, o subsistema de resposta contido no receptor já não possui expoentes de Lyapunov negativos.

Quando o controlador fuzzy estável é inserido no sistema de comunicação, o erro entre os sinais do transmissor e receptor tende a zero, como mostrado na Figura 3.8, portanto a recuperação do sinal passa a ser melhor, mas o sinal recuperado contém um desajuste de ganho e offset.

A Figura 5.11 mostra o sinal de informação transmitido no sistema de comunicação com a atuação do controlador. A Figura está mostrando seu eixo temporal a partir do tempo 0.4ms devido ao tempo transição para a estabilização do sistema, como foi visto na seção de resultados do capítulo 3.

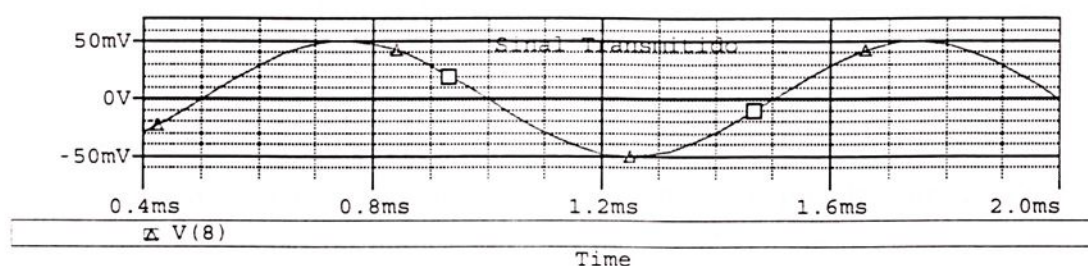


Figura 5.11: Sinal de informação $m(t)$ transmitido

A Figura 5.12 mostra o sinal recuperado no receptor.

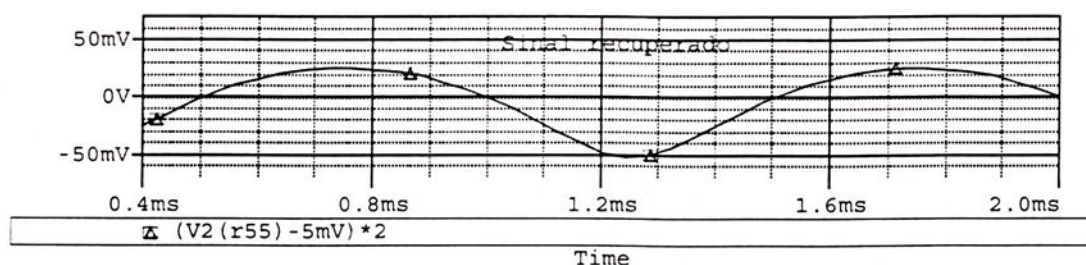


Figura 5.12: Sinal de informação $\hat{m}(t)$ recuperado

Para uma melhor visualização, a Figura 5.13 mostra a sobreposição dos dois sinais, o transmitido e o recuperado.

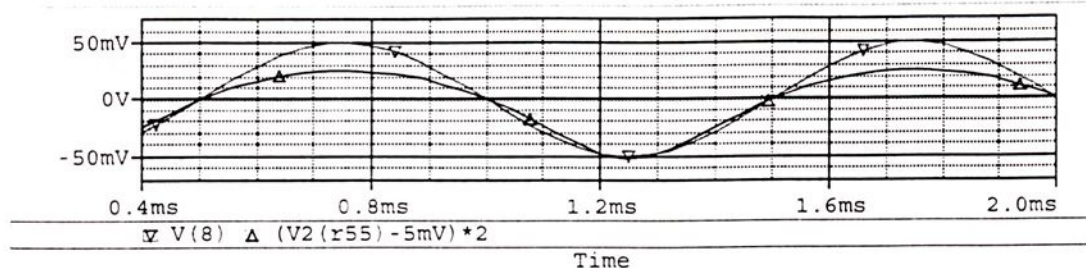


Figura 5.13: Sobreposição do sinal transmitido $m(t)$ com o sinal recuperado $\hat{m}(t)$.

A Figura 5.14 mostra o erro do sinal recuperado.

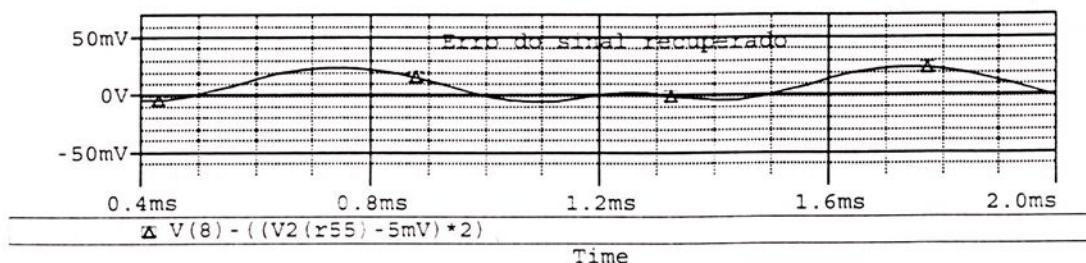


Figura 5.14: Erro do sinal recuperado.

Analisando de uma maneira quantitativa, pode-se notar que a maior tensão de erro é aproximadamente 25mVp, o que comparado com o valor obtido sem a atuação do controle fornece uma melhora na recuperação do sinal de aproximadamente 75%.

Para ilustrar melhor o sistema de comunicação, seguem abaixo outros tipos de sinais que foram transmitidos e recuperados no sistema de comunicação.

A Figura 5.15 mostra uma forma de onda triangular a ser transmitida sem a atuação do controle.

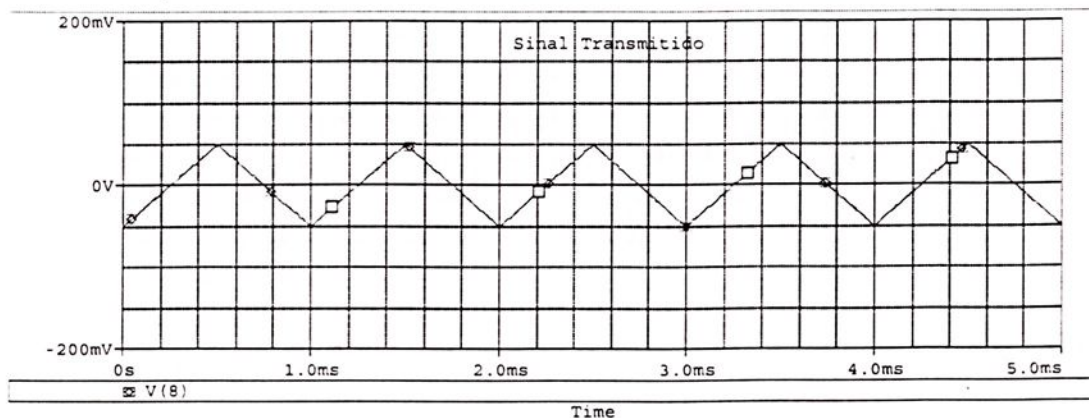


Figura 5.15: Sinal $m(t)$ transmitido – onda triangular

A Figura 5.16 mostra a recuperação do sinal sem a atuação do controlador.

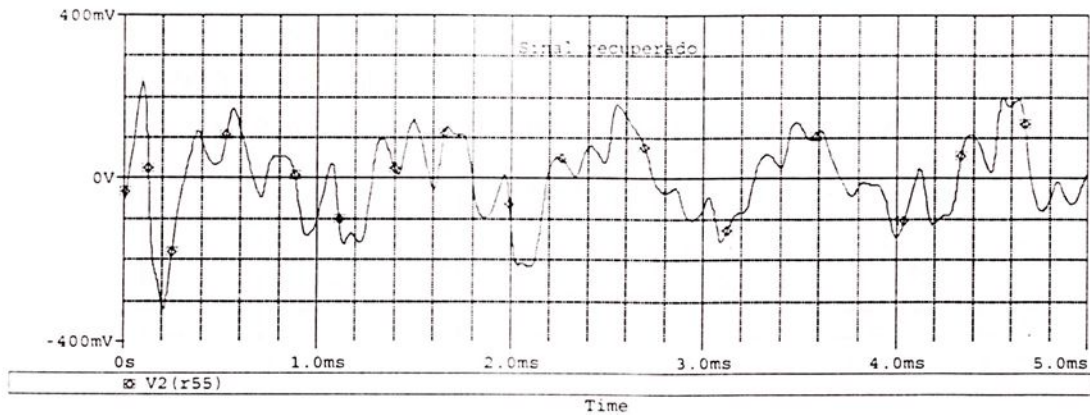


Figura 5.16: Sinal de informação recuperado $\hat{m}(t)$.

A Figura 5.17 mostra a sobreposição dos sinais transmitido e recuperado.

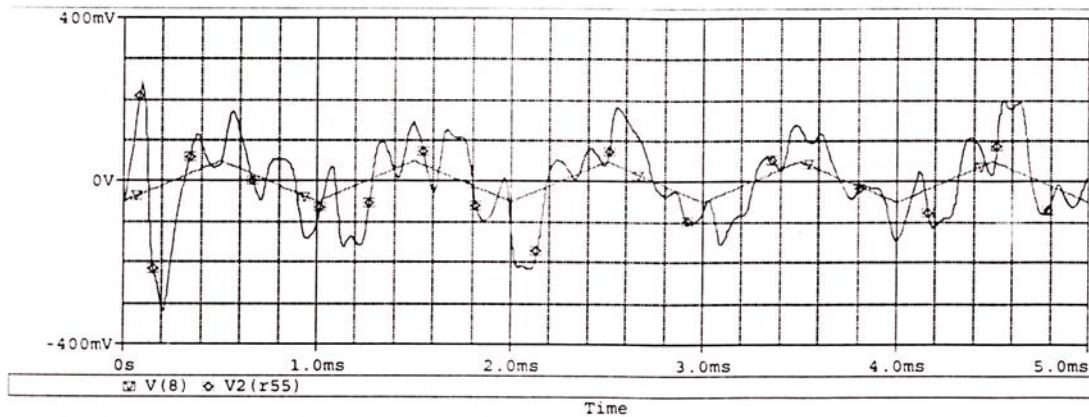


Figura 5.17: Sobreposição de $m(t)$ com $\hat{m}(t)$.

O erro do sinal recuperado é mostrado na Figura 5.18.

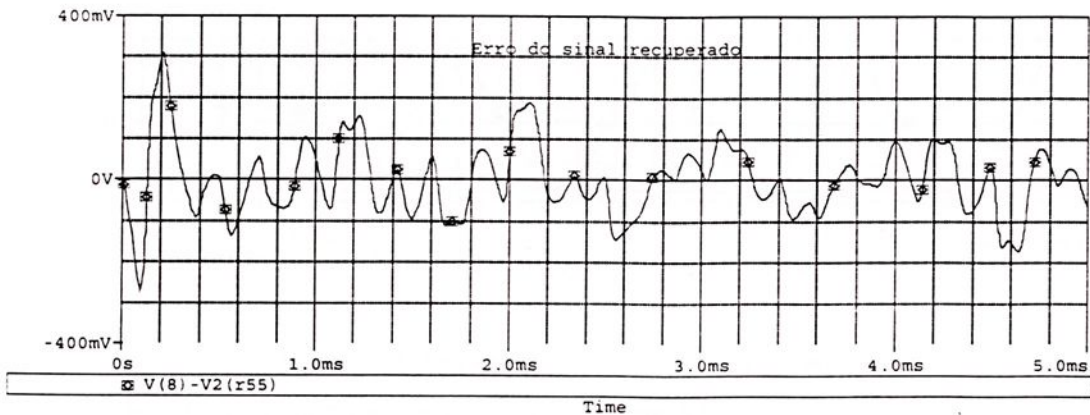


Figura 5.18: Erro do sinal recuperado para uma onda triangular.

Fazendo uma análise quantitativa, observa-se que a tensão máxima do erro é de 300mVp.

As formas de onda apresentadas nas Figuras 5.19 a 5.22 são resultados obtidos com a atuação do controlador.

A figura 5.19 mostra uma forma de onda triangular transmitida.

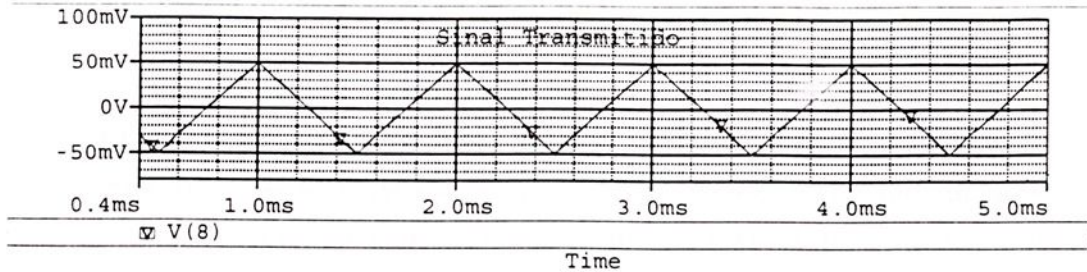


Figura 5.19: Sinal transmitido $m(t)$ – onda triangular.

A Figura 5.20 mostra o sinal recuperado.

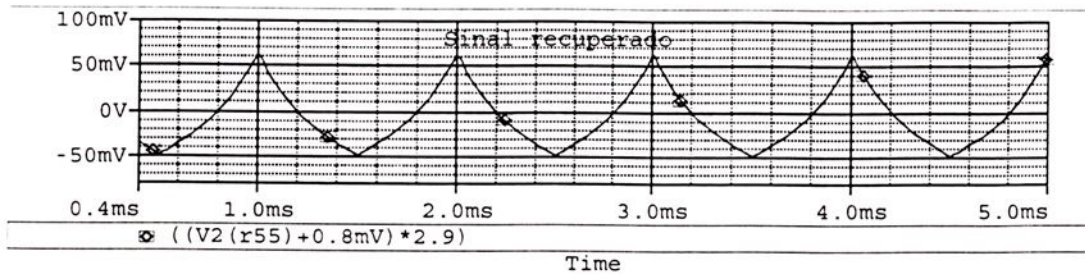


Figura 5.20: Sinal recuperado $\hat{m}(t)$.

Observando o sinal recuperado, nota-se que este sinal possui um ganho de 2.9 e uma tensão de offset de 0.8mV.

Para melhor visualização, a Figura 5.21 mostra a sobreposição dos sinais.

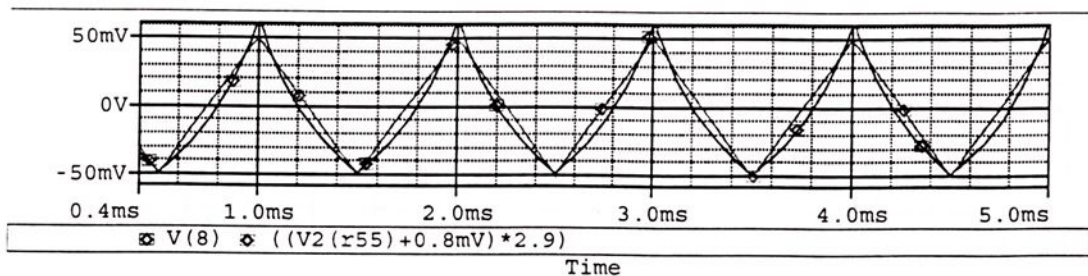


Figura 5.21: Sobreposição dos sinais $m(t)$ com $\hat{m}(t)$.

A Figura 5.22 mostra o erro do sinal recuperado.

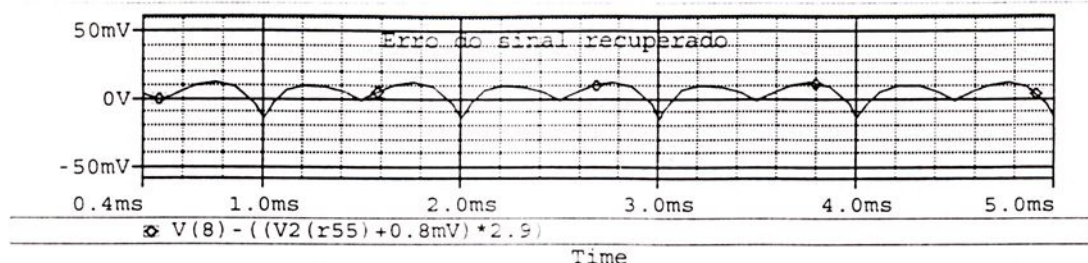


Figura 5.22: Erro do sinal recuperado.

Comparando os resultados obtidos com e sem a atuação do controlador, observa-se através da Figura 5.22 que a máxima tensão obtida no erro do sinal recuperado é de 10mVp, o que representa uma melhora de aproximadamente 96% na recuperação do sinal.

Observando mais um tipo de sinal, no caso uma onda quadrada, a Figura 5.23 mostra o sinal transmitido sem a atuação do controlador.

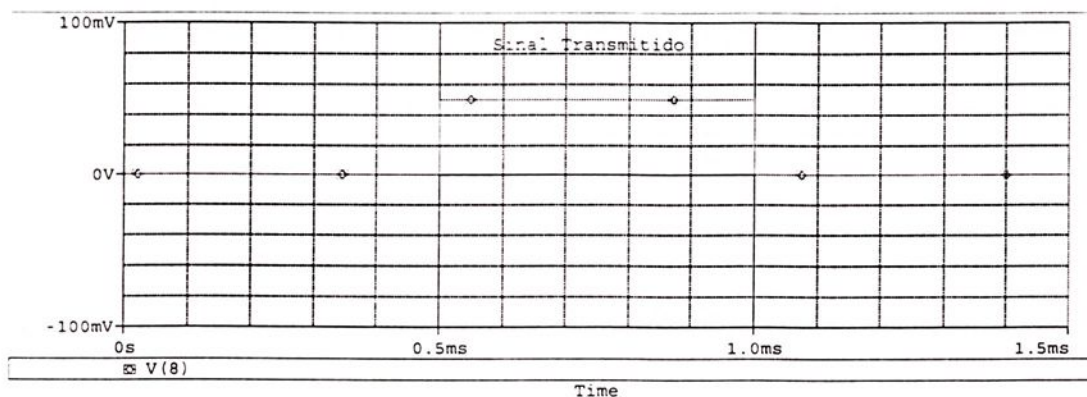


Figura 5.23: Sinal transmitido $m(t)$ – onda quadrada.

A Figura 5.24 mostra o sinal recuperado

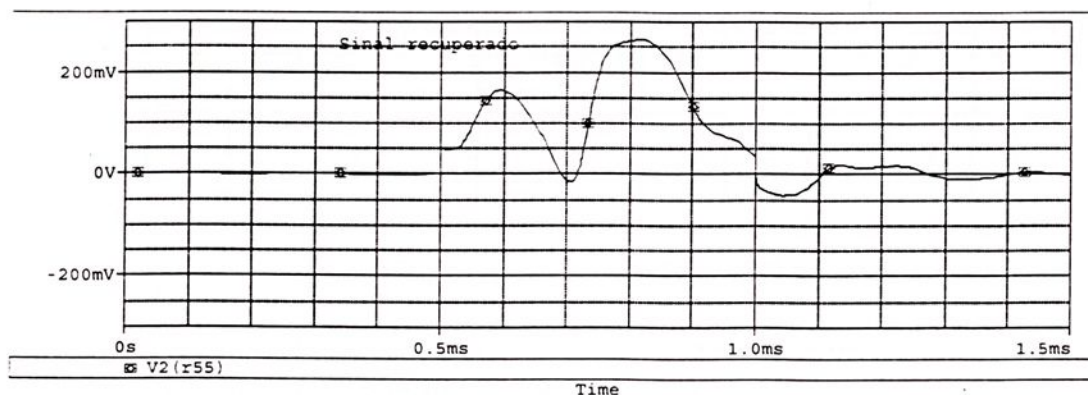


Figura 5.24: Sinal recuperado $\hat{m}(t)$.

A Figura 5.25 mostra os sinais sobrepostos.

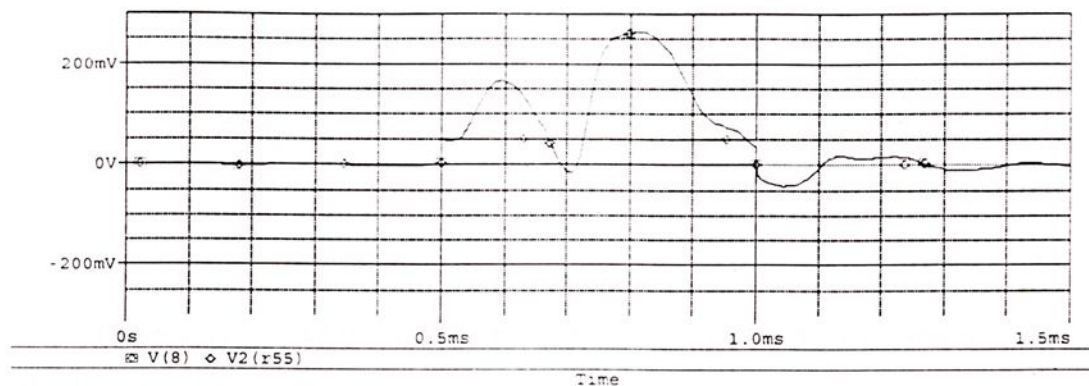


Figura 5.25: Sobreposição do sinal transmitido com o recuperado.

Enfim, a Figura 5.26 mostra o erro do sinal recuperado.

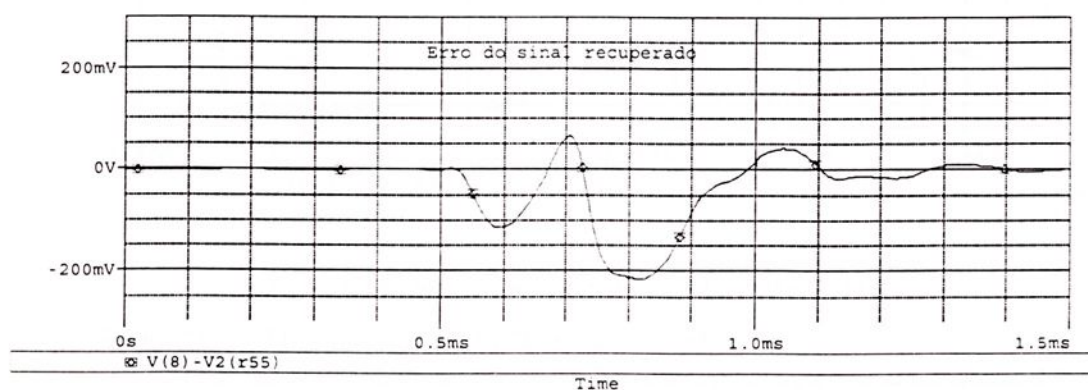


Figura 5.26: Erro do sinal recuperado.

Analisando este resultado, observa-se uma tensão máxima de aproximadamente 210mVp.

A Figura 5.27 mostra uma forma de onda quadrada transmitida com a atuação do controlador.

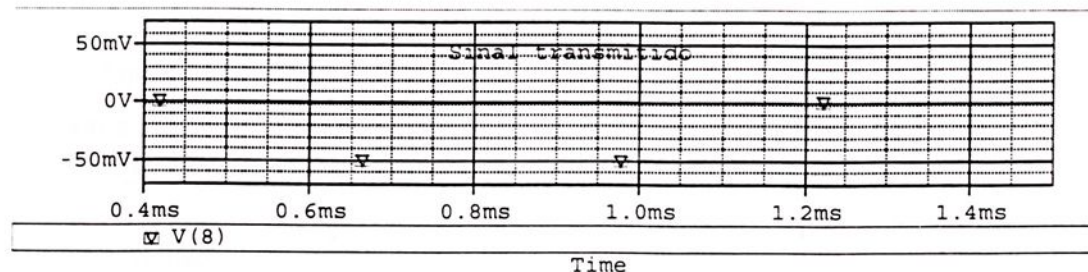


Figura 5.27: Sinal transmitido $m(t)$ – onda quadrada.

O sinal recuperado é mostrado na Figura 5.28.

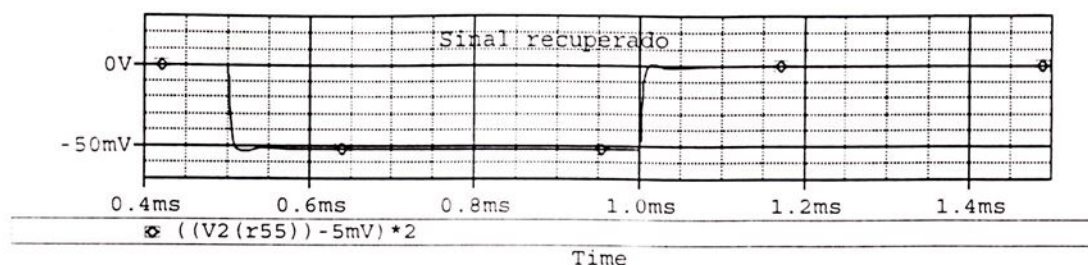


Figura 5.28: Sinal recuperado $\hat{m}(t)$.

Observando o sinal recuperado, nota-se um ganho de 2 e uma tensão de offset de 5mV.

A Figura 5.29 mostra os dois sinais sobrepostos.

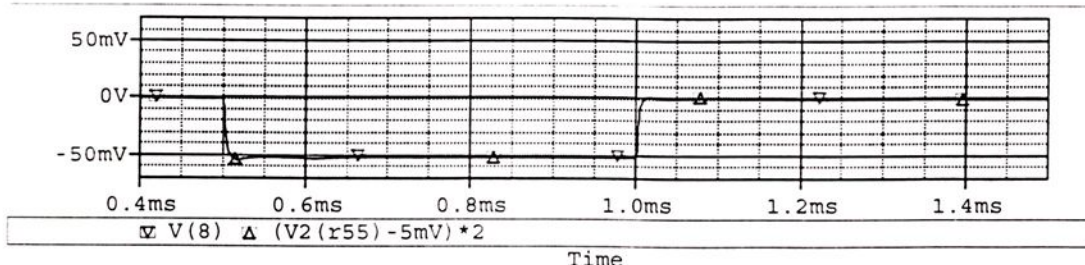


Figura 5.29: Sobreposição dos dois sinais, $m(t)$ e $\hat{m}(t)$.

A Figura 5.30 mostra o erro do sinal recuperado.

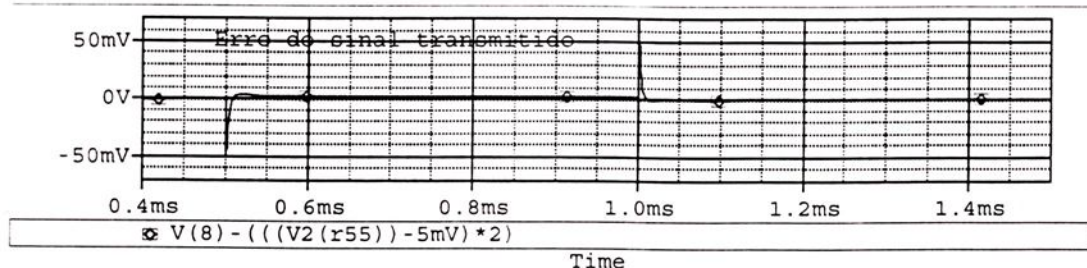


Figura 5.30: Erro do sinal recuperado.

Analisando a Figura 5.30, observa-se que a máxima tensão de erro é de aproximadamente 50mVp. Comparando com o sinal recuperado sem a atuação do controlador, nota-se uma melhora de aproximadamente 76%.

5.2 Conclusão

Analisando os resultados da seção 5.1, nota-se que a melhor recuperação de sinal foi para a forma de onda triangular que teve uma melhora de 96%. Esta implementação, apesar de não recuperar 100% a forma de onda

*Implementação em computador de um circuito caótico usando modelos fuzzy
baseados em LMI com aplicação em sistemas de comunicação*

transmitido, mostrou uma melhora na recuperação considerável, comparado com a recuperação sem a atuação do controlador.



CAPÍTULO 6

6. CONCLUSÃO

Diz-se que dois sinais caóticos estão sincronizados se eles permanecem próximos no decorrer do tempo e que essa situação não se altera com a injeção da informação. A sincronização é possibilitada pela análise dos expoentes de Lyapunov do sistema e suas condições iniciais. Os cálculos do expoente de Lyapunov devem ser feitos computacionalmente.

Esta dissertação apresentou um enfoque unificado para controle do caos através do modelo de sistema de controle *fuzzy* baseado em LMI's. Primeiro, os modelos *fuzzy* de Takagi-Sugeno e alguns resultados de estabilidade foram estudados. Para projetos de controladores *fuzzy*, o sistema caótico de Lorenz foi representado por modelo *fuzzy* de Takagi-Sugeno. O conceito de compensação paralela distribuída foi empregado para determinar estruturas de controladores *fuzzy* a partir dos modelos *fuzzy* de TS. Problemas de projeto baseado em LMI's foram definidos e empregados para encontrar ganhos de realimentação de controladores *fuzzy* satisfazendo as condições de estabilidade, taxa de decaimento e restrições no controle da entrada e saída do sistema de controle *fuzzy*. A estabilização e a sincronização foram realizadas através do enfoque unificado baseado em LMI utilizando a técnica de linearização exata.

O estudo sobre controle de sistemas caóticos baseados em LMI's utilizando modelos *fuzzy* de Takagi-Sugeno proporcionou uma metodologia de controle do caos em um sistema de comunicação segura, tais como: o tempo de sincronização que pode ser controlado através das regras da taxa de decaimento e os erros de sincronização que podem ser eliminados através da linearização exata.

Analisando os resultados da simulação completa, pode-se dizer que o controlador *fuzzy* estável simulado manteve o sistema com erro de sincronização quase nulo proporcionando uma boa recuperação no sinal de informação transmitido. Vale ressaltar que o enfoque unificado de controle do caos através de modelos *fuzzy* baseados em LMI's, não pode ser realizado



para o sistema de comunicação através de modulação caótica utilizando um parâmetro do sistema de Lorenz como o sinal de informação a ser transmitido, pois o projeto de controladores *fuzzy* com linearização exata para este determinado modelo foi infactível. Isto é, não existia uma matriz positiva definida que satisfizesse as LMI's necessárias.

A maior contribuição deste trabalho foi a simulação do sistema de comunicação e do controlador *fuzzy* utilizando componentes discretos, obtendo bons resultados visando que este trabalho seja implementado na prática e que seja um bom sistema criptográfico.



7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] D. Ruelle, "Deterministic chaos: the science and the fiction. Proc. R. Soc. Lond. A, pp. 413-421, 1990.
- [02] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," J. Atmospheric Sci, vol.20, pp. 130-141, MAR. 1963.
- [03] J. Neff and T. L. Carroll, "Circuits that get chaos in sync," Scientific American, pp.101-103, August 1993.
- [04] G. Mayer-Kress, I. Choi, N. Weber, R. Bargar and A. Hübner, "Musical signals from Chua's circuit", IEEE Trans. Circuits Syst. II: Analog and Digital Processing, vol. 40, no.10, pp. 688-694, Oct. 1993.
- [05] L. O. Chua, R. N. Madan, "Sights and sounds of chaos," IEEE Circuits and devices magazine, pp.3-13, Jan.1988.
- [06] M. Hassler, "Synchronization of chaotic systems and transmission of information", Int. J. Bifurcation and Chãos, vol. 2, pp. 881-887, 1998.
- [07] L. Kocarev and U. Parlitz, "General approach for chaotic synchronization with applications to communications", Phys. Ver. Lett., vol 74, pp. 5028-5031, 1995.
- [08] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization of chaotic systems", Phys. Rev. Lett., vol. 64, pp.821-824, Feb. 1990.
- [09] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronizing chaotic circuits", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 38, pp. 453-456, April 1991.
- [10] L. A. B. Torres, "Controle e sincronismo de osciladores não-lineares", Tese apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2001.
- [11] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, e S. H. Strogatz, "Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications" IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 40, pp. 626-633, Oct. 1993.
- [12] H. Dedieu, M. P. Kennedy e M. Hassler, "Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits ", IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 40, pp. 634-642, Oct. 1993.



- [13] K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. A. Yorke, "Chaos - an introduction to dynamical systems", Springer-Verlage New York, Inc. 1997.
- [14] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim and S. H. Isabelle, "Spread spectrum modulation and signal masking using synchronized chaotic systems", MIT Res. Lab. Electron. TR 570, Feb. 1992.
- [15] A. V. Oppenheim, G. W. Wornell, S. H. Isabelle and K. M. Cuomo, "Signal processing in the context of chaotic signals", in Proc. IEEE ICASSP, Mar., 1992.
- [16] N. J. Corron e D. W. Haahs, "A new approach to communications using chaotic signals ", IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 44, pp. 373-382, May 1997.
- [17] T. Takagy and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Trans. Fuzzy Syst., Man, Cybern., vol. 15, nº1, pp. 116-132, 1985.
- [18] E. Ott, C. Grebogi and J. A. York, "Controlling chaos", Phis. Ver. Lett., vol. 64, pp. 1196 – 1199, 1990.
- [19] T. Shinbort, C. Grebogi, E. Ott and J. A. York, "Using small perturbations to control chaos", Nature, vol.363, pp. 411-417, 1993.
- [20] G. Chen and X. Dong, "From chaos to order-Perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems", Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 3, nº 6, pp. 1363-1409, Dec. 1993.
- [21] E. H. Abed, H. O. Wang and A. Tesi, "Control of bifurcations and chaos", in The Control Handbook, W. S. Levine, Ed. Boca Raton, FL: CRC Press and IEEE Press, pp. 951-966, 1995.
- [22] F. J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott, and W. P. Dayawansa, "Controlling chaotic dynamical systems," Physica, vol. D58, pp 165-192, 1992.
- [23] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems. Cambridge, UK: Cambridge, 1993.
- [24] H. O. Wang and E. H. Abed, "Bifurcation control of a chaotic system," Automática, vol. 31, nº. 9, pp. 1213-1226. 1995.
- [25] L. O. Chua, M. Komuro, and T. Matsumoto, "The Double scroll family: 1 and 2," IEEE Trans. Circuits syst., vol. 33, pp. 1072-1118, 1996.
- [26] K. Piragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback," Phis. Lett. A, vol. 170, pp. 421-428, 1992.



- [27] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis of fuzzy systems using Lyapunov's direct method," in Proc. NAFIPS'90, pp. 133-136.
- [28] R. Langari and M. Tomizuka, "Analysis and synthesis of Fuzzy linguistic control systems," in 1990 Proc. ASME Winter Annu. Meet., pp. 35-42.
- [29] S. Kitamura and T. Kurozumi, "Extended circle criterion and stability analysis of Fuzzy control systems," in Proc. Int. Fuzzy Eng. Symp.'91, vol. 2, pp. 634-643.
- [30] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of Fuzzy control systems," Fuzzy Sets and Syst., vol. 45, no. 2, pp. 135-156, 1992.
- [31] S. S. Fariwata et al., "Stability analysis of the Fuzzy logic controller designed by the phase portrait assignment algorithm," in Proc. 2nd IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems, 1993, pp. 1377-1382.
- [32] S. Singh, "Stability analysis of discrete Fuzzy control systems," in Proc. 1st IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems, 1992, pp. 527-534.
- [33] R. Katoh et al., "Graphical stability analysis of a Fuzzy control systems," in Proc. IEEE Int. Conf. IECON'93, 1993, vol. 1, pp. 248-253.
- [34] C. L. Chen et al., "Analysis and design of Fuzzy control systems," Fuzzy Sets and Syst., vol. 57, pp. 125-140, 1993.
- [35] F. Hara and M. Ishibe, "Simulation study of the existence of limit cycle oscillation in a Fuzzy control systems," in Proc. Korea- Japan Joint Conf. Fuzzy Syst. Eng. 1992, pp. 25-28.
- [36] K. Tanaka and M. Sano, "Concept of stability margin of Fuzzy systems and design of robust Fuzzy controllers," in Proc. 2nd IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst. 1993, vol. 1, pp. 29-34.
- [37] H. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin, "Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi and Sugeno's Fuzzy model," in Proc. FUZZ-IEEE'95, pp. 531-538.
- [38] —, "An approach to Fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," IEEE Trans. Fuzzy Syst., 4, pp. 14-23, 1996.
- [39] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear system via Fuzzy control," IEEE Trans. Fuzzy syst., vol. 44, pp. 1-13, 1996.
- [40] H. C. Pietrobom "Controle de sistemas não-lineares baseados em LMI utilizando modelos fuzzy" Dissertação de mestrado apresentada à



Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual
Paulista-UNESP, fevereiro de 1999.

- [41] K.E.Lonngren, "Notes to accompany a student laboratory experiment on chaos" IEEE Trans. Ed., vol. 34, nº. 1, pp. 123-128, Feb. 1991.
- [42] S. Prigossy, "Novel applications of SPICE in engineering education," IEEE Trans. Education, vol.32, nº. 1, pp. 35-38, Feb1989.
- [43] O. E. Röessler, "An equation for continuous chaos", Phy. Lett., vol. 57A, nº5, pp. 397-398, July 1976.
- [44] Y. Ueda, "Random phenomena resulting from nonlinearity in the system described by Duffing's equation," Int. J. Nonlinear Mechanics, vol.20, nº. 5/6, pp. 481-491, 1985.
- [45] A. Azzouz, R. Duhr and M. Hasler, "Transition to chaos in a simple nonlinear circuit driven by a sinusoidal voltage source," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 30, nº. 12, pp. 913-914, Dec. 1983.
- [46] L. O. Chua, M. Hasler, J. Neirynck and P. Verburgh, "Dynamics of a piecewise-linear resonant circuit," IEEE Trans Circuits Systems, vol. 29, nº. 8, pp. 535-547, Aug. 1982.
- [47] J. H. B. Deane and D. C. Hamill, "Instability, subharmonics, and chaos in power electronic systems," IEEE Trans. Power Electron., vol. 5, nº. 3, pp. 260-268, July 1990.
- [48] D. C. Hamill and J. H. B. Deane, "Modeling of chaotic dc-dc converters by iterated nonlinear mappings," IEEE Trans. Power Electron., vol. 7, nº. 1, pp. 25-36, Jan. 1992.
- [49] J. H. B. Deane and D. C. Hamill, "Chaotic behavior in current-mode controlled dc-dc convertor," Electron. Letters, vol. 27, nº.13, pp. 1172-1173, June 1991.
- [50] L. P. Huelsman, "Pc programs for engineers,"Circuits & Devices, pp.4-5, July 1995.
- [51] D. C. Hamill, "Learning about chaotic circuits with SPICE," IEEE Trans. on Education, vol. 36, nº.1, pp. 28-35, Feb. 1993.
- [52] O. A. Gonzalez, "VLSI implementation of a chaotic encryption algorithm with applications to secure communications", thesis submitted to the office of graduate studies of Texas A&M University in partial fulfillment



of the requirements for the degree of master of science, december 1998.

- [53] K.Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "A unified approach to controlling chaos via an LMI-based *fuzzy* control system design", IEEE Trans. On Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 45, nº. 10, pp. 1021-1040, 1998.
- [54] K-Y. Lian, T-S. Chiang, C-S. Chiu and P. Liu, "*Fuzzy* synchronization and secure communications for chaotic system: a unified approach using LMI design". (ainda não publicado)
- [55] P. E. Domingues "Sincronização de sistemas dinâmicos com aplicação em comunicação segura", Estudos especiais I, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP.
- [56] N. Fiedler-Ferrara and C. P. C. Prado, "Caos: Uma introdução", Edgar Bücher, São Paulo, 1994.
- [57] P. E. Domingues "Modelagem de sistemas caóticos através de controladores *fuzzy* baseados em LMI's" Estudos especiais II, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP.
- [58] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, V. Bacakruhnna, "Linear matrix inequalities in systems and control theory", SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), 1994.
- [59] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, M. Chilali "LMI Control toolbox for use with MatLab", The Mathworks Inc., 1995.
- [60] J. P. Eckmann e D. Ruelle, "Ergodict-theory of chaos and strange attractors" Rev. Mod. Phys, vol 57, pp. 617-656, July 1985.
- [61] S. Kawamoto et al., "Nonlinerar control and rigorous stability analysis based on fuzzy system for inverted pendulum", in Proc. *FUZZ-IEEE'96*, vol. 2, pp. 1427-1432, 1996.
- [62] K. Tanaka, T. Ikeda and H. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 6, pp. 250-265, May 1998.
- [63] L.-X. Wang, adaptive fuzzy systmes and control: Desing and Stability Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [64] L. Wang and R. Langari, "Building Sugeno-type models using fuzzy discretization and orthogonal parameter estimation techniques," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 3, pp. 454-458, 1995.



- [65] K. M. Short, "Steps for unmasking secure communications", *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 4, no 4, pp. 959-977, 1992.





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dee.feis.unesp.br

