

Hygino H. Domingues

Sobre o Espectro de um Anel



1910000201



HYGINO H. DOMINGUES

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I - Anéis e Módulos

§ 1º

Ideais	1
1. Introdução	1
2. Ideais gerados	2
3. Ideais primos, primos maximais	3
4. Operações com ideais	7
5. Radical de um Ideal	8
6. Ideais primos maximais	9
7. Produtos diretos	10

SOBRE O ESPECTRO DE UM ANEL

§ 2º

Módulos	18
1. Introdução	18
2. Módulos de combinações lineares	19
3. Soma direta de módulos	20
4. Produto tensorial de módulos	21
5. Sequências exatas	25
6. Módulos planos	27
7. Módulos de frações	28
8. Propriedades locais	30
9. Módulos noetherianos e artinianos	32

Tese de doutoramento apresentada à
F.F.C.L. de São José do Rio Preto
para a obtenção do grau de Doutor em
Ciências.



201/84

São José do Rio Preto

1973

69

Í N D I C E

Página

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I - Anéis e Módulos 1

§ 1º | Ideais 1

1. Introdução 1

2. Ideais gerados 2

3. Ideais primos, primários e maximais 3

4. Operações com ideais 7

5. Radical de um Ideal 8

6. Ideais primos maximais 9

7. Produtos diretos 10

8. Anel quociente 12

9. Anel de frações 16

§ 2º | Módulos 18

1. Introdução 18

2. Módulos de combinações lineares 19

3. Soma direta de módulos 20

4. Produto tensorial de módulos 21

5. Sequências exatas 24

6. Módulos planos 27

7. Módulos de frações 28

8. Propriedades locais 30

9. Módulos noetherianos e artinianos 32

CAPÍTULO II - O Espectro Primo de um Anel 35

§ 1º | Topologia de Zariski 35

1. Introdução 35

2. A topologia espectral de um anel 36

3. Os fechados na topologia de Zariski 38

§ 2º		Conexão na Topologia de Zariski	41
§ 3º		Compacidade na Topologia de Zariski	44
§ 4º		Separação no espectro primo de um anel	45
		1. O axioma T_0	45
		2. O axioma T_D	46
		3. Os axiomas T_1 e T_2	47
§ 5º		Irredutibilidade na Topologia de Zariski ...	50
§ 6º		Aplicação Associada a um Homomorfismo de Anéis	52
CAPÍTULO III - Sobre o Espectro de Certos Anéis			57
§ 1º		Anéis Regulares	57
		1. Caracterização dos anéis regulares	57
		2. O espectro de um anel regular - Separação.	60
		3. Sequências de ideais primos num anel regular	61
		4. Irredutibilidade para o Espectro de um anel regular	63
		5. Sobre conexão no espectro de um anel regular	63
		6. Anéis booleanos	64
§ 2º		Anéis noetherianos	67
		1. Caracterização - Propriedades	67
		2. Observações iniciais sobre o espectro de um anel noetheriano	71
		3. O espectro de um anel noetheriano - Propriedades	72
§ 3º		Anéis de Dedekind	75
		1. Conceituação	75
		2. O espectro de um anel de Dedekind	76
§ 4º		Anéis artinianos	80
		1. Definição - propriedades	80
		2. O espectro de um anel artiniano	82
TABELA DE SÍMBOLOS			88

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem sua origem nos estudos que vínhamos fazendo sobre tópicos de Álgebra com implicações de ordem topológica. Dentre estes assuntos, a topologia de Zariski, obtida no espectro de um anel comutativo, ocupa um lugar digno de atenção, não só por suas possíveis aplicações (por exemplo, em Geometria Algébrica) como também pelos aspectos intrinsecamente interessantes que envolve.

O primeiro capítulo de nosso trabalho se destina a apresentar os pré-requisitos sobre Anéis e Módulos. Tais resultados se encontram distribuídos pela bibliografia, sem diferenças consideráveis, especialmente em [1], [2], [4], [8] e [19]. Certas demonstrações foram omitidas ou resumidas por razões óbvias.

No capítulo II introduzimos a topologia espectral de um Anel. E o fazemos através de uma condição necessária e suficiente para que uma classe de sub-conjuntos de um dado conjunto, não vazio, seja base de uma topologia nesse conjunto. Só posteriormente

passamos a caracterizar os fechados da topologia obtida. Neste capítulo introduzimos o axioma T_D no espectro de um anel. Tal axioma, intermediário entre os axiomas T_0 e T_1 , foi introduzido em Topologia em 1962, por Aull e Thron. Damos, também, uma condição suficiente para que o espectro de um anel satisfaça a tal axioma. Como os anéis sub-diretamente irredutíveis não terão um estudo especial no capítulo seguinte, damos aqui, no parágrafo sobre "Separação", uma condição necessária e suficiente para que o espectro destes anéis satisfaça ao axioma T_1 .

No capítulo III, em que estudamos algumas facetas do espectro de certos anéis, seguimos a seguinte orientação: focalizar apenas os aspectos algébricos essenciais desses anéis com vistas ao seu espectro. Assim, entre outras coisas, tratamos das seguintes questões: (a) No primeiro parágrafo damos uma condição necessária e suficiente para que uma sequência de pontos do espectro de um Anel Regular seja convergente, bem como a condição de irredutibilidade do espectro de um tal anel; demonstramos, ainda, a equivalência dos axiomas T_1 e T_2 no espectro de um anel, fato este que depende do seguinte resultado de caráter exclusivamente algébrico: "se todos os ideais primos de um anel A são maximais, então $A/\mathfrak{n}(A)$ é um anel regular". (b) No parágrafo segundo, que trata dos anéis noetherianos, além de tratarmos das "condições de cadeia" para os seus espectros, damos a condição de irredutibilidade de tais espectros, nos casos em que os anéis são, também, sub-diretamente irredutíveis. (c) No terceiro parágrafo descrevemos os fechados do espectro de um Anel de Dedekind e, ainda sobre o espectro de tais anéis, damos uma

condição necessária e suficiente para que se verifique o axioma T_D e estudamos o problema de conexão por caminhos. (d) No último parágrafo focalizamos o espectro dos Anéis Artinianos. Aqui, além de termos descrito tais espectros (aliás triviais), inclusive no caso de os anéis serem sub-diretamente irredutíveis (além de artinianos), demos uma condição necessária e suficiente para que seja irredutível o espectro de um Anel Semi-simples.

Por último gostaríamos de deixar público nosso mais sinceros agradecimentos aos dignos professores Dr. Jairo S. da Fonseca, não só por ter aceitado a orientação deste trabalho, como também, entre outras coisas, por ser o responsável direto por nosso ingresso na carreira universitária e Dr. Roberto C. F. Costa que, com a máxima boa vontade, leu grande parte dos originais deste trabalho, dando-nos a respeito proveitosas sugestões.



CAPÍTULO I

ANÉIS E MÓDULOS

§ 1º | IDEAIS

1. INTRODUÇÃO

Aos anéis comutativos com unidade (únicos a serem considerados neste trabalho) chamaremos apenas de anéis, em tudo o que se segue.

Dado um anel A , um sub-conjunto $I \subset A$ é chamado ideal em A se: (a) $I \neq \emptyset$; (b) $x, y \in I \Rightarrow x - y \in I$ e (c) $a \in A$ e $x \in I \Rightarrow ax \in I$. Desta definição decorre que: $0 \in I$; $x, y \in I \Rightarrow x + y \in I$; se $U(A) \cap I \neq \emptyset$, onde $U(A)$ indica o conjunto dos elementos inversíveis de A , então $I = A$.

Proposição 1-1. Um anel A é um corpo se, e somente se,

os únicos ideais em A são $\{0\}$ e A .

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja I um ideal em A tal que $I \neq \{0\}$. Tomando $a \in I$, $a \neq 0$, então $a^{-1} \in A$ e $a^{-1} \cdot a = 1 \in I$. Logo $I = A$.

($\Leftarrow$) $\forall a \in A$, $a \neq 0$, o conjunto $I = \{ax : x \in A\}$ é um ideal em A e $I \neq \{0\}$. Logo $\exists x_0 \in A$ tal que $a \cdot x_0 = 1$. Então existe $a^{-1} \in A$, $\forall a \in A^*$. Então A é corpo. $\#$

Dada uma família $(I_r)_{r \in L}$ de ideais em um anel A é óbvio que também é um ideal em A o conjunto $I = \bigcap_{r \in L} I_r$.

Sendo $\mathcal{I}$ a família de todos os ideais de A e $\mathcal{I}^* = \mathcal{I} - \{\{0\}\}$, se o ideal $\hat{A} = \bigcap_{I \in \mathcal{I}^*} I$ for diferente do ideal nulo $\{0\}$, então diremos que A é um anel sub-diretamente irredutível.

Consideremos agora dois anéis: A e B . Seja $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo. Facilmente se demonstra que: (a) " $f^{-1}(J)$ é um ideal em A , qualquer que seja o ideal J em B ; b) se f é um epimorfismo e I é um ideal em A , então $f(I)$ é um ideal em B ".

2. IDEAIS GERADOS

Seja $E \neq \emptyset$ uma parte de um anel A . O ideal gerado por E é, por definição, o ideal

$$(E) = \{a_1 x_1 + \dots + a_r x_r : r \geq 1, a_1, \dots, a_r \in A \text{ e } x_1, \dots, x_r \in E\}.$$

Se $E = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$, $r \geq 1$, então usaremos a notação $(y_1, \dots, y_r)^*$, às vezes, ao invés de (E) . Os ideais gerados por conjuntos unitários são chamados ideais principais. Se todos os ideais de um anel de integridade forem principais, este se chamará anel principal.

Dado um ideal I num anel A e um elemento $a \in A$, o conjunto

$$(a, I) = \{ax + i : x \in A \text{ e } i \in I\}$$

é um ideal em A que se chamará ideal gerado por a e I . Obviamente: $a \in (a, I)$, $I \subset (a, I)$ e se $a \notin I$, então $I \subsetneq (a, I)$.

3. IDEAIS PRIMOS, MAXIMAIS E PRIMÁRIOS

Seja $P \neq A$ um ideal num anel A . Diremos que P é um ideal primo se: $a.b \in P \implies a \in P$ ou $b \in P$.

A intersecção de todos os ideais primos de A será chamada nilradical de A e será indicada por $n(A)$.

Proposição 1-2. $x \in n(A) \iff \exists i \in \mathbb{Z}, i > 0$, tal que $x^i = 0$.

Demonstração:

$(\implies)$ $x^i = 0 \implies x^i \in P$, para todo ideal primo $P \implies$

* Estes ideais são chamados ideais de tipo finito.

$\implies x \in P$, para todo ideal primo $P \implies x \in n(A)$.

($\implies$) Se $x^i \neq 0$, $\forall i > 0$, então seria não vazia a família $\mathcal{F}$ dos ideais I de A tais que $x^n \notin I$, $\forall n > 0$ ($(0) \in \mathcal{F}$). O lema de Zorn garante, então, a existência de um ideal maximal P nessa família, ordenada por inclusão.

Sejam $a, b \in A$ tais que $a, b \notin P$. Então $P \subsetneq (a, P)$ e $P \subsetneq (b, P)$. Devido à condição de P , então $(a, P) \notin \mathcal{F}$ e $(b, P) \notin \mathcal{F}$. Logo $\exists r, s > 0$ tais que $x^r \in (a, P)$ e $x^s \in (b, P)$. Logo $x^{r+s} \in (ab, P)$.

Então $(ab, P) \notin \mathcal{F}$ o que implica que $ab \notin P$ ($ab \in P \implies \implies (ab, P) \subset P \implies x^n \notin (ab, P)$, $\forall n > 0$). Portanto P é um ideal primo. Como $x \notin P$, então $x \notin n(A)$. Absurdo. $\#$

Definição. Os elementos do nilradical de um anel A são chamados elementos nilpotentes.

Um ideal M num anel A é chamado ideal maximal se $M \neq A$ e se o único ideal que contém M , propriamente, é o anel A .

Uma aplicação rotineira do lema de Zorn garante a existência de um ideal maximal, ao menos, em cada anel A . Analogamente garante, também, que todo ideal $I \subsetneq A$ está contido num ideal maximal.

Proposição 1-3. Todo ideal maximal é primo.

Demonstração

Seja M um ideal maximal. Tomemos a e b em A de modo que

$a, b \in M$. Se $a \notin M$, então $M \subsetneq (a, M)$. Logo $(a, M) = A$. Então $\exists u \in A$ e $m \in M$ de modo que $1 = au + m$. Donde: $b = abu + mb$. Isto mostra que $b \in M$. #

Proposição 1.4. Seja $j(A)$ a intersecção de todos os ideais maximais do anel A . Então: $x \in j(A) \iff 1 - xy$ é inversível, $\forall y \in A$.

Demonstração

($\implies$) Se existisse $y_0 \in A$ tal que $1 - xy_0$ não fosse inversível, então existiria um ideal maximal M tal que

$$(1 - xy_0) \in M.$$

Como $x \in j(A) \subset M$ e como $1 - xy_0 \in M$, então $1 \in M$. Absurdo.

($\impliedby$) Suponhamos que M é um ideal maximal em A e que $x \notin M$. Então

$$(x, M) = A.$$

Assim, existem $m \in M$ e $y \in A$ tais que $1 = m + xy$. Consequentemente $1 - xy \in M$ e $1 - xy$ não é inversível. Absurdo. #

Definição. O ideal $j(A)$ será chamado radical de Jacobson do anel A .

Definição. Dado um ideal I no anel A chamaremos de anulador de I o ideal $\text{Ann}(I) = \{x \in A : xa = 0, \forall a \in I\}$.

Uma decorrência imediata da definição anterior é que dados os ideais I e J em A , então

$$I \subset J \implies \text{Ann}(J) \subset \text{Ann}(I).$$

Proposição 1-5. Seja A um anel sub-diretamente irredutível. Então: (a) $\text{Ann}(\hat{A})$ é maximal; (b) $x \in \text{Ann}(\hat{A}) \iff x = 0$ ou x é divisor próprio do zero.

Demonstração:

De início observemos que $\forall u \in \hat{A}, u \neq 0 \implies \hat{A} = (u)$, o que decorre diretamente da definição de $\hat{A}$.

(a) Dado $x \notin \text{Ann}(\hat{A})$, então $\exists a \in \hat{A}$ de modo que $xa \neq 0$. Como $xa \in \hat{A}$, então $\hat{A} = (xa)$ o que implica que $\exists s \in A$ de modo que $a = xas$. Da igualdade $a(1 - xs) = 0$ segue-se que $1 - xs \in \text{Ann}(\hat{A})$, pois $\hat{A} = (a)$.

Se $\text{Ann}(\hat{A})$ não fosse maximal, existiria um ideal J em A tal que $\text{Ann}(\hat{A}) \subsetneq J \subsetneq A$.

Tomando $y \in J - \text{Ann}(\hat{A})$, então, conforme vimos no primeiro parágrafo da demonstração, existe $s_0 \in A$ de modo que $1 - ys_0 \in \text{Ann}(\hat{A})$. Logo $1 \in J$. Absurdo.

(b) Seja v um divisor próprio do zero em A . Então

$$\text{Ann}(v) = \text{Ann}((v)) \neq (0).$$

Portanto $\hat{A} \subset \text{Ann}(v)$. Mas, $\hat{A} \subset \text{Ann}(v) \implies \text{Ann}(\text{Ann}(v)) \subset \text{Ann}(\hat{A})$. Como $v \in \text{Ann}(\text{Ann}(v))$, então $v \in \text{Ann}(\hat{A})$. Logo $\text{Ann}(\hat{A})$ contém os divisores de zero de A . A inclusão contrária é imediata. $\#$

Definição. Um ideal Q no anel A é chamado ideal primário se $xy \in Q \Rightarrow x \in Q$ ou $\exists n > 0 : y^n \in Q$.

É evidente, pois, que todo ideal primo é, também, um ideal primário.

4. OPERAÇÕES COM IDEAIS

Sejam I e J ideais em A . Chamaremos de soma e produto, respectivamente, de I e J aos seguintes ideais:

$$I + J = \{x + y : x \in I \text{ e } y \in J\} \quad \text{e}$$

$$I \cdot J = \left\{ \sum_{i=1}^r x_i y_i : x_i \in I, y_i \in J \text{ e } r \geq 1 \right\}.$$

Por indução se definem soma e produto de n ideais ($n \geq 2$).

Em particular $I^n = I \cdot I \cdot \dots \cdot I$ (n vezes).

Dados os ideais I e J em A : $I \cdot J \subset I \cap J \subset I + J$.

Dois ideais I e J dizem-se co-primos se $I + J = A$. Neste caso é fácil ver que $I \cap J = I \cdot J$.

Proposição 1-6. Sejam $I_1, \dots, I_n$ ($n \geq 2$) ideais em A .

a) Se esses ideais são co-primos, dois a dois, então

$$\bigcap_{r=1}^n I_r = \prod_{r=1}^n I_r; \quad \text{b) Se } P \text{ é um ideal primo tal que } P \supset \bigcap_{r=1}^n I_r, \text{ então}$$

$$P \supset I_t \quad (1 \leq t \leq n).$$

Demonstração

a) Para $n = 2$ já observamos acima. Admitamos que

$\bigcap_{r=1}^{n-1} I_r = \prod_{r=1}^{n-1} I_r = J$. Como $I_r + I_n = (1)$ ($1 \leq r \leq n-1$), então existem $x_r \in I_r$ e $y_r \in I_n$: $x_r + y_r = 1$. Logo $\prod_{r=1}^{n-1} x_r = \prod_{r=1}^{n-1} (1 - y_r)$. Isto implica que $\prod_{r=1}^{n-1} x_r - 1 \in I_n$. Portanto, $\exists v \in I_n$ de modo que $1 = v + \prod_{r=1}^{n-1} x_r$. Isto mostra que $(1) = I_n + J$. Consequentemente $\prod_{r=1}^n I_r = J \cdot I_n = J \cap I_n = \bigcap_{r=1}^n I_r$.

b) Suponhamos que, $\forall r, r=1, 2, \dots, n \Rightarrow I_r \not\subset P$. Então, $\exists x_1 \in I_1$ tal que $x_1 \notin P, \dots, \exists x_n \in I_n$ tal que $x_n \notin P$. Logo $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \in I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_n \subset I_1 \cap \dots \cap I_n \subset P$. Como P é primo, um dos x_i está em P . Absurdo.

Obs.: Em particular, se $P = \bigcap_{r=1}^n I_r$, então P é igual a um dos I_r .

5. IDEALS PRIMOS MINIMAIS

5. RADICAL DE UM IDEAL

Diremos que o ideal primo P em um anel A é um ideal primo minimal. Dados um anel A e um ideal I em A , o radical de I ($r(I)$) é, por definição, o ideal

$$r(I) = \{x \in A : \exists n > 0 \text{ e } x^n \in I\}.$$

Dados os ideais I e J em A as seguintes relações são verdadeiras:

(a) $I \subset r(I)$

(b) $r(I, J) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$

(c) $r(I) = (1) \iff I = (1)$

$$(d) \ r(I + J) = r(r(I) + r(J))$$

$$(e) \ r(I) + r(J) = (1) \iff I + J = (1)$$

$$(f) \ \text{Se } P \text{ é um ideal primo, então } r(p^n) = P, \forall n > 0.$$

Proposição 1-7. Se Q é um ideal primário no anel A , então $r(Q)$ é o menor ideal primo que contém Q .

Demonstração:

$$x \cdot y \in r(Q) \implies \exists m > 0 : (x \cdot y)^m = x^m y^m \in Q \implies x^m \in Q \text{ ou } y^n \in Q : y^{mn} \in Q \implies x \in r(Q) \text{ ou } y \in r(Q). \text{ Logo } r(Q) \text{ é primo.}$$

Seja P um ideal primo que contém Q . Então: $x \in r(Q) \implies \exists n > 0 : x^n \in Q \implies x^n \in P \implies x \in P$. Logo $r(Q) \subset P$. #

6. IDEAIS PRIMOS MINIMAIS

Diremos que um ideal primo P num anel A é um ideal primo minimal se P for minimal no conjunto dos ideais primos de A , ordenado por inclusão.

Uma parte multiplicativa de um anel A é um sub-conjunto $S \subset A$, $S \neq \emptyset$, fechado para a multiplicação. Obviamente um ideal P é primo se, e somente se, $A - P$ é uma parte multiplicativa de A .

Proposição 1-8. Se S é uma parte multiplicativa de um anel A e se $0 \notin S$, então existe um ideal maximal na família dos i-

deais que não interceptam S ; um tal ideal necessariamente é primo.

Demonstração

A existência se prova, também, através do lema de Zorn.

Seja P um desses ideais e mostremos que ele é primo.

Suponhamos $x.y \in P$, $x \notin P$ e $y \notin P$. Então $P \subsetneq (x, P)$ e $P \subsetneq (y, P)$. Logo, $\exists u \in (x, P) \cap S$ e $\exists v \in (y, P) \cap S$, tais que $u, v \notin P$. Como, porém, $u.v \in (x, P).(y, P) \subset (xy, P) \subset P$, então $P \cap S \neq \emptyset$ (uv está em S). Absurdo. #

Corolário. Se P é um ideal primo minimal, então, $\forall x \in P$, $\exists s \in A - P$ e $\exists k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, de modo que $s.x^k = 0$.

Demonstração:

O conjunto $S = \{s.x^r : r > 0 \text{ e } s \in A - P\}$ é uma parte multiplicativa de A .

Se $0 \notin S$, então existe um ideal primo P' tal que $P' \cap S = \emptyset$. Mas, $\forall s \in A - P$, $s = s.x^0 \in S$. Assim $A - P \subset S$, e, então, $S^c \subset P$. Ademais, $P' \cap S = \emptyset \Rightarrow P' \subset S^c$. Logo $P' \subset P$. Por outro lado, como $x \in P$ e $x = 1.x^1$, então $x \in S$. Então $x \notin P'$. Podemos afirmar pois, que $P' \subsetneq P$. Absurdo.

Logo $0 \in S$ e, então, $\exists k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, de modo que $0 = s.x^k$. #

7. PRODUTOS DIRETOS

Consideremos n anéis ($n \geq 2$): $A_1, A_2, \dots, A_n$. O conjunto

$A = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$ terá uma estrutura de anel, se definirmos nele a adição e a multiplicação componente a componente, isto é

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

e

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)$$

Este anel será chamado produto direto dos anéis $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Proposição 1-9. Dados os anéis $A_1, A_2, \dots, A_n$, para que $I \subset \prod_{i=1}^n A_i$ seja um ideal é necessário e suficiente que existam ideais $I_1, I_2, \dots, I_n$ em $A_1, \dots, A_n$, respectivamente, de modo que $I = \prod_{r=1}^n I_r$.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Evidente.

($\Rightarrow$) Seja I um ideal em A . Cada uma das aplicações $p_r: A \rightarrow A_r$ definidas por $p_r(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) = x_r$ é um epimorfismo. Então $p_r(I) = I_r$ é um ideal em A_r para cada r . Mostremos que $I = \prod_{i=1}^n I_r$.

$$\forall x_r \in I_r \Rightarrow \exists x = (\dots, x_r, \dots) \in I \text{ tal que } p_r(x) = x_r.$$

Logo $(\dots, x_r, \dots) (0, \dots, 1, \dots, 0) = (0, \dots, x_r, \dots, 0) \in I$. Isto implica que $\{(0, \dots, 0, x_r, 0, \dots, 0) : x_r \in I_r\} \subset I \quad \forall r, 1 \leq r \leq n$. Assim: $\forall (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{r=1}^n I_r \Rightarrow (y_1, \dots, y_n) = (y_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, y_n) \in I$.



Por outro lado, se $x = (x_1, \dots, x_n) \in I$, então $p_1(x) = x_1 \in I_1, \dots, p_n(x) = x_n \in I_n$. Logo $x \in \bigcap_{r=1}^n I_r$. #

8. ANEL QUOCIENTE

Dado um ideal I no anel A , a relação $\sim$ em A , definida pela sentença " $x \sim y \iff x - y \in I$ " é, claramente, uma relação de equivalência em A . As classes de equivalência são, $\forall a \in A$, os conjuntos $\bar{a} = a + I = \{a + i : i \in I\}$.

As leis de composição

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

e

$$(a + I) \cdot (b + I) = ab + I$$

estão bem definidas em A/I , que será indicado por A/I , e dão uma estrutura de anel a este conjunto quociente.

Este anel é chamado anel quociente de A por I .

O epimorfismo $x \mapsto x + I$ de A em A/I é chamado homomorfismo canônico de A em A/I .

Proposição 1-10. Seja I um ideal no anel A . Então: (a) A/I é um anel de integridade $\iff I$ é primo; (b) A/I é corpo $\iff I$ é maximal.

Demonstração:

(a) Imediata.

(b) ($\Rightarrow$) Seja M um ideal em A tal que $I \subsetneq M$ e tomemos $a \in M - I$. Então $\bar{a} = a + I \neq I = \bar{0}$. Sendo A/I um corpo, então existe $\bar{b} \in A/I$ de forma que $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$, ou seja, $ab - 1 \in I$. Logo $ab - 1 \in M$, e como $a \in M$, então $1 \in M$. Vale dizer: $M = A$.

($\Leftarrow$) Seja $\bar{a} \in A/I$, $\bar{a} \neq \bar{0}$. Então $a \notin I$. Consideremos o ideal $M = (a, I)$. Como $I \subsetneq M$, então $M = A$. Logo $\exists i_0 \in I$ e $\exists x_0 \in A$ tais que $1 = i_0 + ax_0$. Portanto $\bar{a} \cdot \bar{x}_0 = \bar{1}$. $\#$

Proposição 1-11. Qualquer que seja o anel A , $n(A/n(A)) = \{0\}$.

Demonstração:

Seja $\bar{a} \in A/n(A)$ tal que $(\bar{a})^n = \bar{0}$. Então $a^n \in n(A)$ do que resulta que $\exists m > 0 : a^{nm} = 0$. Logo $a \in n(A)$ e $\bar{a} = \bar{0}$. $\#$

Proposição 1-12. Dado um ideal I no anel A , então $r(I) = \bigcap \{P : P \text{ é primo e } P \supset I\}$.

Demonstração:

Observemos de início que

$$n(A/I) = \{a + I : \exists n > 0 \text{ e } a^n + I = I\} = \{a + I : \exists n > 0 \text{ e } a^n \in I\}.$$

Logo: $a + I \in n(A/I) \Leftrightarrow a \in r(I)$. Provaremos a seguir que $a + I \in n(A/I) \Leftrightarrow a \in \bigcap \{P : P \text{ é primo e } P \supset I\}$, o que equivale à proposição enunciada.

($\Rightarrow$) ^{Seja} ~~Seja~~ P um ideal primo em A e $\sigma : A \rightarrow A/I$ o homomorfismo canônico. É fácil provar que $\sigma(P)$ é um ideal primo em

A/I^* .

Seja $\mathcal{F}$ a coleção dos ideais primos de A que contêm I . Para todo $a + I \in n(A/I)$: $a + I \in n(A/I) \Rightarrow a + I \in \sigma(P_\alpha)$, $\forall P_\alpha \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall P_\alpha \in \mathcal{F}$, $\exists p_\alpha \in P_\alpha$: $a + I = \sigma(P_\alpha) = p_\alpha + I \Rightarrow \forall P_\alpha \in \mathcal{F}$, $\exists p_\alpha \in P_\alpha$: $a - p_\alpha \in I \Rightarrow \forall P_\alpha \in \mathcal{F}$, $\exists p_\alpha \in P_\alpha$: $a - p_\alpha \in P_\alpha \Rightarrow a \in P_\alpha$, $\forall P_\alpha \in \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$) Seja $a \in A$ um elemento que está em todos os ideais primos de A que contêm I . Se $\bar{P}$ é um ideal primo em A/I , então $\sigma^{-1}(\bar{P})$ é um ideal primo em A que contém I , uma vez que $I \in \bar{P}$. Logo $a \in \sigma^{-1}(\bar{P})$. Então $\sigma(a) = a + I \in \bar{P}$. #

Proposição 1-13. Dados os ideais $I_1, \dots, I_n$ no anel A e indicando por φ o homomorfismo $\varphi: A \rightarrow \prod_{r=1}^n (A/I_r)$ dado por

$$\varphi(x) = (x + I_1, \dots, x + I_n)$$

então: (a) φ é epimorfismo $\Leftrightarrow I_r$ e I_s são co-primos, sempre que $r \neq s$; (b) φ é monomorfismo $\Leftrightarrow \bigcap_{r=1}^n I_r = (0)$.

Demonstração:

(a) ($\Rightarrow$) Existe $x \in A$ tal que $\varphi(x) = (\bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$.

Então $x - 1 \in I_1$ e $x \in I_2$. De forma que

$$x + (x - 1) = -1 \in I_1 + I_2.$$

Logo $I_1 + I_2 = A$. Analogamente se procede no caso geral.

($\Leftarrow$) Como $I_1 + I_r = A$ ($\forall r > 1$) então, para cada $r > 1$, existem $u_r \in I_1$ e $v_r \in I_r$ de modo que $u_r + v_r = 1$. Fazem-

* A imagem de um ideal primo por um epimorfismo é, sempre, um ideal primo. A imagem inversa de um ideal primo por um homomorfismo é um ideal primo.

que aquele contém o núcleo deste

do $x_1 = \prod_{r=2}^n v_r$, então $x_1 = \prod_{r=2}^n (1 - u_r)$. Logo $x_1 - 1 \in I_1$ e $x_1 \in I_r$ ($r \geq 2$). Consequentemente $\varphi(x_1) = (\bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$. Analogamente existem $x_2, \dots, x_n \in A$ tais que $\varphi(x_2) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0})$, $\dots$, $\varphi(x_n) = (\bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{1})$. Portanto, dado $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \in \bigtimes_{r=1}^n \left(\frac{A}{I_r}\right)$, segue-se que $\varphi(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$, o que prova que φ é sobrejetora.

(b) Notemos que $\bigcap_{r=1}^n I_r$ é o núcleo de φ . Logo φ é injetora se, e somente se, $\bigcap_{r=1}^n I_r = (0)$. #

Lema. Seja A um anel de integridade. Se o número de ideais de A é finito, então A é um corpo.

Demonstração:

Para todo $r \geq 0$, $I_r = \{x \cdot a^r : x \in A\}$, onde a é um elemento fixo e não nulo de A , é um ideal em A . Logo existem $m, n \in \mathbb{Z}$ ($m > n \geq 0$, por exemplo) tais que $I_m = I_n$. Como $a^n \in I_n$, então $a^n = x_0 \cdot a^m$ ($x_0 \in A$). Logo $1 = x_0 a^{m-n}$ e $1 = (x_0 \cdot a^{m-n-1}) a$ o que prova que A é corpo. #

Proposição 1-14. Para que um anel A seja isomorfo a um produto direto finito de corpos é necessário e suficiente que o número de ideais de A seja finito e que $n(A) = (0)$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Evidente, observando que o zero é o único elemento



nilpotente de um corpo e levando em conta a proposição 1-9.

($\Leftarrow$) Se A é um anel de integridade é imediato, por causa do lema.

De um modo geral, existem ideais primos $P_1, \dots, P_k$ em A de modo que $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_k = \{0\}$. Como cada A/P_r é um anel de integridade e como pelo homomorfismo canônico $a \mapsto a + P_r$ de A sobre A/P_r , ideais distintos neste último têm imagens inversas distintas em A , então A/P_r tem um número finito de ideais. Logo cada A/P_r é corpo. Assim sendo cada P_r é maximal e, então

$$r \neq s \Rightarrow P_r + P_s = A.$$

Por outro lado, como $P_1 \cap \dots \cap P_r = (0)$, então $\varphi: A \rightarrow \prod_{r=1}^k (A/P_r)$, dada por $\varphi(x) = (x + P_1, \dots, x + P_k)$, é um isomorfismo. $\#$

9. ANEL DE FRAÇÕES

Seja A um anel e indiquemos por S uma parte multiplicativa de A tal que $0 \notin S$ e $1 \in S$. A relação $\equiv$ em $A \times S$ assim definida:

$$(a, s) \equiv (b, t) \iff \exists u \in S : (at - bs)u = 0$$

é uma relação de equivalência. Uma classe de equivalência $\overline{(a, s)}$ será indicada, neste caso, por $\frac{a}{s}$. O conjunto quociente $A \times S / \equiv$ por $S^{-1}A$.

Obteremos uma estrutura de anel em $S^{-1}A$ se considerarmos as leis (bem definidas):

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

e

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

$S^{-1}A$ será chamado, então, anel das frações de A em relação a S.

É importante o caso em que $S = A - P$, sendo P um ideal primo. Aqui, em vez de $(A - P)^{-1}A$, usa-se a notação A_P .

Proposição 1-15. Se P é um ideal primo no anel A, então $U = \left\{ \frac{a}{s} \in A_P; a \in P \right\}$ é o único ideal maximal de A_P .

Demonstração:

É fácil verificar que U é um ideal em A_P . Por outro lado, se V é um ideal em A_P tal que $U \subsetneq V$, então $\exists \frac{b}{t} \in V - U$. Logo $b \in A - P$, o que acarreta que $\frac{t}{b} = \left(\frac{b}{t}\right)^{-1} \in A_P$. Então $1 \in V$ e, daí $V = A_P$.

Ademais, se W é um ideal maximal em A_P diferente de U, então existe um elemento em W que não está em U. Repetindo o raciocínio anterior: $W = A_P$. Absurdo. #

Definição. Um anel que só contém um ideal maximal é chamado anel local.



1. INTRODUÇÃO

Dado um anel A , diremos que um grupo aditivo abeliano M é um A -módulo se existir uma lei de composição $(a, x) \mapsto ax$ de $A \times M$ em M com as seguintes propriedades:

$$(a) \quad (ab)x = a(bx)$$

$$(b) \quad (a + b)x = ax + bx$$

$$(c) \quad a(x + y) = ax + ay$$

$$(d) \quad 1x = x$$

$$\forall a, b \in A \quad \text{e} \quad \forall x, y \in M.$$

Se o anel A for um corpo, então M será um espaço vetorial sobre A .*

Nota. Abster-nos-emos de definir aqui os conceitos de sub-módulo, homomorfismo e isomorfismo de módulos, núcleo e imagem de um homomorfismo, módulo quociente e homomorfismo canônico e base de um módulo, pelo fato de as definições serem análogas às respectivas para espaços vetoriais. O teorema do homomorfismo também é válido, obviamente, para módulos.

* A teoria da dimensão para espaços vetoriais será pressuposta neste trabalho.



2. MÓDULOS DE COMBINAÇÕES LINEARES

Dado um anel A e um conjunto $L \neq \emptyset$ o conjunto A^L das aplicações de L em A terá uma estrutura de módulo se definirmos $f+g$ e af , $\forall f, g \in A^L$ e $\forall a \in A$, da seguinte forma:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in L$$

$$(af)(x) = af(x), \quad \forall x \in L.$$

O sub-conjunto $A^{(L)} \subset A^L$ das aplicações quase-nulas de L em A é um sub-módulo de A^L . $A^{(L)}$ é um módulo livre, isto é, existe uma base de $A^{(L)}$ sobre A . Com efeito, a família $(e_r)_{r \in L}$ de elementos de $A^{(L)}$, onde $e_r(s) = 1$, se $r = s$ e $e_r(s) = 0$, se $r \neq s$, satisfaz as duas condições da definição de base, o que se pode provar sem embaraços.

Proposição 1-16. Para que uma família $(x_r)_{r \in L}$ de elementos de um A -módulo M seja base de M é necessário e suficiente que M seja isomorfo a $A^{(L)}$.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ $\forall x \in M$, existe uma família quase-nula $(a_r)_{r \in L}$ em A tal que $x = \sum_{r \in L} a_r x_r$. A aplicação $x \mapsto (a_r)_{r \in L}$ é um isomorfismo de M em $A^{(L)}$.

$(\Leftarrow)$ Se $f: A^{(L)} \rightarrow M$ é um isomorfismo então a família $(f(e_r))_{r \in L}$ será uma base de M . #

Notação: $M = M_1 \oplus M_2$.

Notas:

1) A aplicação $r \mapsto e_r$ de L sobre a base usual de $A^{(L)}$ (definida atrás) é bijetora. Por esta razão é comum identificar-se L com a base mencionada, através dessa aplicação. Assim os elementos de $A^{(L)}$ passarão a se escrever $\sum_r a_r r$ ao invés de $\sum_r a_r e_r$ e serão chamados combinações lineares formais de L . $A^{(L)}$ passará a ser chamado, então, A -módulo das combinações lineares formais de L .

2) Toda aplicação $f: L \rightarrow M$, onde M é um A -módulo, pode ser prolongada, de maneira única, a um homomorfismo $\bar{f}: A^{(L)} \rightarrow M$ assim definido

$$\bar{f}\left(\sum_r a_r r\right) = \sum_r a_r f(r).$$

É evidente que $\bar{f}$ é linear e que prolonga f a $A^{(L)}$. Por outro lado se $f_1: A^{(L)} \rightarrow M$ tem as mesmas características, então

$$f_1\left(\sum_r a_r r\right) = \sum_r a_r f_1(r) = \sum_r a_r f(r) = \bar{f}\left(\sum_r a_r r\right).$$

Logo $f_1 = \bar{f}$.

3. SOMA DIRETA DE SUB-MÓDULOS

Demonstração:

Dados dois sub-módulos M_1 e M_2 do A -módulo M , diremos que M é soma direta de M_1 e M_2 se:

$$(a) \quad M_1 \cap M_2 = \{0\}$$

$$(b) \quad \forall u \in M \Rightarrow \exists u_1 \in M_1 \text{ e } \exists u_2 \in M_2 \text{ de forma que}$$

$$u = u_1 + u_2.$$

Notação: $M = M_1 \oplus M_2$.

Tal como para espaços vetoriais a condição (a) acima pode ser substituída pela unicidade da condição (b).

Se $M = M_1 \oplus M_2$, diremos que M_1 e M_2 são fatores diretos de M .

4. PRODUTO TENSORIAL DE MÓDULOS

Dados os A -módulos M, N e P , uma aplicação $f: M \times N \rightarrow P$, se diz bilinear se forem A -homomorfismos:

$$x \mapsto f(x, y), \quad \forall y \in N$$

e

$$y \mapsto f(x, y), \quad \forall x \in M.$$

Lema. Dados os A -módulos M e N , seja $g: M \rightarrow N$ um homomorfismo. Se M' é um sub-módulo de M e se $g(u) = 0, \forall u \in M'$, então existe um único homomorfismo $f: M/M' \rightarrow N$ tal que $g = f \circ \varphi$, onde $\varphi: M \rightarrow M/M'$ é o homomorfismo canônico.

Demonstração:

Definiremos $f: M/M' \rightarrow N$ assim: $f(x + M') = g(x), \forall x \in M$.

Se $x + M' = y + M'$, então $x - y \in M'$ e, então, $g(x - y) = 0$. Logo $g(x) = g(y)$ o que mostra que f está bem definida. Que f é homomorfismo é imediato. O fato de φ ser sobrejetora implica que f é única pois $f_1 \circ \varphi = f \circ \varphi \Rightarrow f_1 = f$. Como, por último, $\forall x \in M \Rightarrow (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) = f(x + M') = g(x)$, então $f \circ \varphi = g$.

Proposição 1-17. Sejam $M, N \in P$ A -módulos. Então existem um A -módulo T e uma aplicação bilinear $g: M \times N \rightarrow T$ tais que, para toda aplicação bilinear $f: M \times N \rightarrow P$, existe uma única aplicação linear $f': T \rightarrow P$, de modo que $f = f' \circ g$. Ademais, se T' e g' têm as mesmas características de T e g , respectivamente, então existe um único isomorfismo $j: T \rightarrow T'$, tal que $j \circ g = g'$.

Demonstração:

Provaremos apenas a parte de existência. Seja $C = A^{(M \times N)}$ e indiquemos por D o sub-módulo C gerado pela família dos elementos

$$(x + x', y) - (x, y) - (x', y),$$

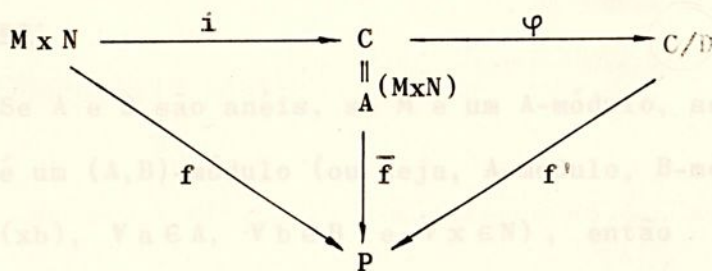
$$(x, y + y') - (x, y) - (x, y'),$$

$$(ax, y) - a(x, y) \text{ e}$$

$$(x, ay) - a(x, y),$$

$$\forall x, x' \in M, \quad \forall y, y' \in N \quad \text{e} \quad \forall a \in A.$$

Sendo $\bar{f}$ o prolongamento linear de f a C é fácil perceber que $\bar{f}$ se anula em D (pois se anula em cada gerador). O lema anterior garante, então, a existência de um único homomorfismo $f': C/D \rightarrow P$ tal que $\bar{f} = f' \circ \varphi$, onde $\varphi: C \rightarrow C/D$ é o homomorfismo canônico. Sendo $i: M \times N \rightarrow C$ a imersão canônica, então, fazendo $\varphi \circ i = g$, segue-se que $f' \circ g = f$ pois $(f' \circ \varphi \circ i)(x, y) = (f' \circ \varphi)(x, y) = f'((x, y) + D) = \bar{f}(x, y) = f((x, y))$, $\forall (x, y) \in M \times N$.



Se $(x, y) \in M \times N$, $g((x, y))$ será indicado por $x \otimes y$.

Então $f'(x \otimes y) = f'(g(x, y)) = f'(\varphi(x, y)) = \bar{f}(x, y) = f(x, y)$.

Por outro lado

$$(x + x') \otimes y - x \otimes y - x' \otimes y = g(x + x', y) - g(x, y) - g(x', y) = \\ = \varphi(x + x', y) - \varphi(x, y) - \varphi(x', y) = \varphi((x + x', y) - (x, y) - (x', y)) = 0$$

porque $(x + x', y) - (x, y) - (x', y) \in D = \text{Ker}(\varphi)$. Então

$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$. Analogamente $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$, $(ax) \otimes y = a(x \otimes y)$ e $x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$. Isto mostra que $g: M \times N \rightarrow C/D$ é bilinear.

O módulo $C/D = T$ satisfaz, pois, juntamente com g a parte de existência do teorema. $\#$

Definição. O módulo T construído acima é chamado produto tensorial de M por N . Será indicado por $M \otimes_A N$ ou, apenas por $M \otimes N$ quando não houver dúvida quanto ao anel sobre o qual M e N são módulos.

Proposição 1-18. Sejam M, N e P A -módulos. Então:

- a) $M \otimes N \cong N \otimes M$
- b) $A \otimes M \cong M$
- c) $(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$

Notas:

1) Se A e B são anéis, se M é um A -módulo, se P é um B -módulo e se N é um (A, B) -módulo (ou seja, A -módulo, B -módulo, e, ainda, $(ax)b = a(xb)$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ e $\forall x \in N$), então

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (M \otimes_B P).$$

O sinal $\cong$ aqui, como antes, indica a relação de isomorfismo.

2) Sejam M, M', N e N' A -módulos. Então, se $f: M \rightarrow M'$ e $g: N \rightarrow N'$ são homomorfismos, segue-se que a aplicação

$$(x, y) \longmapsto f(x) \otimes g(y)$$

de $M \times N$ em $M' \otimes N'$ é bilinear. Logo existe um homomorfismo (que indicaremos por $f \otimes g$) tal que

$$f \otimes g: M \otimes N \longrightarrow M' \otimes N'$$

e

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$$

$$\forall x \in M \text{ e } \forall y \in N.$$

Demonstração:

Ademais, se M'' e N'' são também A -módulos e $f': M' \rightarrow M''$ e $g': N' \rightarrow N''$ são A -homomorfismos, então, $\forall x \in M$ e $\forall y \in N$:

$$\begin{aligned} ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(x \otimes y) &= (f' \circ f)(x) \otimes (g' \circ g)(y) = \\ &= f'(f(x)) \otimes g'(g(y)) = (f' \otimes g')(f(x) \otimes g(y)) = \\ &= (f' \otimes g')((f \otimes g)(x, y)) = ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(x, y). \text{ Logo:} \end{aligned}$$

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

É, por outro lado, imediato que

$$1_{M \otimes N} = 1_M \otimes 1_N$$

quaisquer que sejam os A -módulos M e N .

5. SEQUÊNCIAS EXATAS

Uma sequência finita de A -módulos e de A -homomorfismos

(conforme o diagrama)

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \dots$$

é chamada sequência exata em M_i se $I_M(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$.

Se a sequência for exata para todo i , então diremos, simplesmente, que se trata de uma sequência exata.

Proposição 1-19. Se $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ for uma sequência exata, então

$$N \otimes M' \xrightarrow{1_N \otimes f} N \otimes M \xrightarrow{1_N \otimes g} N \otimes M'' \longrightarrow 0$$

também o será, para todo A-módulo N .

Demonstração:

$\forall x'' \in M''$ e $\forall y \in N \implies \exists x \in M$ de modo que $g(x) = x''$ e $(1_N \otimes g)(y \otimes x) = y \otimes x''$. Logo $1_N \otimes g$ é sobrejetora. Por outro lado, como $(1_N \otimes g) \circ (1_N \otimes f) = (1_N \circ 1_N) \otimes (g \circ f) = 0$, então $I = I_M(1_N \otimes f) \subset \text{Ker}(1_N \otimes g)$.

Isto posto, existe um bem definido homomorfismo $\sigma: N \otimes M/I \rightarrow N \otimes M''$ dado por $\sigma(y \otimes x + I) = (1_N \otimes g)(y \otimes x) = y \otimes g(x)$.

Seja $\sigma': N \otimes M' \rightarrow N \otimes M/I$ assim definida: $\sigma'(y, x'') = y \otimes x + I$, onde $g(x) = x''$. σ' está bem definida pois se $g(x) = g(x_1)$, então $g(x - x_1) = 0$. Logo $x - x_1 = f(x')$, onde $x' \in M'$. Portanto

$$y \otimes x - y \otimes x_1 = y \otimes (x - x_1) = y \otimes f(x') \in I.$$

Além disso, como σ' é bilinear, σ' pode ser fatorada através de $N \otimes M'$ por um homomorfismo $\bar{\sigma}$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
 N \otimes M'' & \xrightarrow{\quad} & N \otimes M'' \\
 \searrow \varphi' & & \nearrow \varphi \\
 & N \otimes M / I &
 \end{array}$$

Agora, $\forall y \in N$ e $\forall x'' \in M'' \iff (\varphi \circ \bar{\varphi})(y \otimes x'') = \varphi(\bar{\varphi}(y \otimes x'')) =$
 $= \varphi(\varphi'(y, x'')) = \varphi(y \otimes x + I) = y \otimes g(x) = y \otimes x''.$

Suponhamos, então, $\varphi(y \otimes x + I) = 0$. Daí:

$$\begin{aligned}
 0 &= \varphi(\varphi'(y, x'')) = (\varphi \circ \bar{\varphi})(y \otimes x'') = y \otimes x''. \text{ Logo } \bar{\varphi}(y \otimes x'') = \\
 &= \varphi'(y, x'') = y \otimes x + I = 0 \quad \text{o que acarreta que } \varphi \text{ é injetora.}
 \end{aligned}$$

Então $N \otimes M / I_M (1_N \otimes f) \subset N \otimes M'' \cong N \otimes M / \text{Ker}(1_N \otimes g)$.

Portanto $\text{Ker}(1_N \otimes g) \subset I_M (1_N \otimes g)$. #

Obs.: Em consequência da proposição anterior diz-se que

$\otimes$ é exato à direita.*

Corolário. Se I é um ideal em A , então $A/I \otimes M \cong M/IM$, para todo A -módulo M .

Demonstração:

$I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ é exata para os homomorfismos inclusão, canônico e nulo, respectivamente. Logo

$$I \otimes M \rightarrow IM \hookrightarrow A \otimes M = M \rightarrow A/I \otimes M \rightarrow 0$$

é também exata. Logo $M/IM \cong A/I \otimes M$ devido ao teorema do homomorfismo.

* O mesmo resultado também é válido à esquerda.

Proposição 1-20. Se $f: M \rightarrow M'$ é um A -homomorfismo injetor e se $f(M)$ é fator direto de M' , então $1_N \otimes f: N \otimes M \rightarrow N \otimes M'$ é injetora para todo A -módulo N .

Demonstração:

O fato de f ser injetor nos permite considerar M como sub-módulo de M' , identificando M com $f(M)$. Assim f passa a ser a inclusão de M em M' . Podemos, pois, escrever $M' = f(M) \oplus M'' = M \oplus M''$.

Sendo p a projeção de M' sobre M , então $p \circ f = 1_M$. Logo $(1_N \otimes p) \circ (1_N \otimes f) = (1_N \otimes 1_N) \otimes (p \circ f) = 1_N \otimes 1_M = 1_{N \otimes M}$.

Portanto $1_N \otimes f$ é injetora.

6. MÓDULOS PLANOS

Dizemos que um A -módulo M é plano se para todo ideal I em A a aplicação $1_M \otimes i: M \otimes I \rightarrow M \otimes A = M$, onde i é a inclusão de I em A , é injetora.

Proposição 1-21. Para que um A -módulo M seja plano é suficiente que para todo ideal de tipo finito I em A (gerado por um conjunto finito), seja injetora a aplicação $1_M \otimes i: M \otimes I \rightarrow M \otimes A$.

Demonstração:

Dado um ideal qualquer J de A tomemos $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in M \otimes J$ de tal modo que $(1_M \otimes j)(z) = 0$. Seja I o ideal gerado pelos y_i da somatória; obviamente I é um ideal de tipo finito. Sen-

* $j =$ inclusão de J em A

do i_1 a inclusão de I em J e j a inclusão de J em A , então a aplicação composta do diagrama

$$M \otimes I \xrightarrow{l_M \otimes i_1} M \otimes J \xrightarrow{l_M \otimes j} M \otimes A$$

é $(l_M \otimes j) \circ (l_M \otimes i_1) = (l_M \circ l_M) \otimes (j \circ i_1) = l_M \otimes i$ que por hipótese é injetora. Então, considerando z como elemento de $M \otimes I$, concluímos que $z = 0$. Mas no homomorfismo $M \otimes I \xrightarrow{l_M \otimes i_1} M \otimes J$ a imagem de z é o próprio z . Logo $z = 0$, também como elemento de $M \otimes J$. #

7. MÓDULOS DE FRAÇÕES

Seja M um A -módulo. Sendo S uma parte multiplicativa de A tal que $0 \notin S$ e $1 \in S$, a relação em $M \times S$ definida assim:

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists t \in S : t(sm' - s'm) = 0$$

é uma relação de equivalência. Cada classe de equivalência $\overline{(m, s)}$ será denotada por $\frac{m}{s}$ e o conjunto quociente indicado $S^{-1}M$. Se $S = A - P$, onde P é um ideal primo em A , então usaremos a notação M_P para $(A - P)^{-1}M$.

Estão bem definidas e dão uma estrutura de $S^{-1}A$ -módulo a $S^{-1}M$ as seguintes leis:

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'} \quad \text{e} \quad \frac{a}{s'} \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{ss'}$$

Sendo M e N A -módulos e $f: M \rightarrow N$ um homomorfismo, então $S^{-1}f: S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$ dada por $S^{-1}f\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(m)}{s}$ é um $S^{-1}A$ -homomorfismo. É fácil provar que $S^{-1}(g \circ f) = (S^{-1}g) \circ (S^{-1}f)$.

Se $S = A - P$, com P ideal primo de A , $S^{-1}f$ será denotada por f_P .

Proposição 1-22. Seja M um A -módulo. Então existe um único isomorfismo $f': S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$, dado por $f'((\frac{a}{s}) \otimes m) = \frac{am}{s}$.

Demonstração:

A aplicação $f: S^{-1}A \times M \rightarrow S^{-1}M$ dada por $f(\frac{a}{s}, m) = \frac{am}{s}$ é bilinear. Logo existe um único homomorfismo $f': S^{-1}A \otimes M \rightarrow S^{-1}M$ tal que $f'((\frac{a}{s}) \otimes m) = f(\frac{a}{s}, m) = \frac{am}{s}$.

Dado $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$, então $f'(\frac{1}{s} \otimes m) = \frac{m}{s}$. Logo f' é sobrejetora.

Suponhamos $f(\frac{1}{s} \otimes m) = \frac{m}{s} = 0$. Então $\frac{m}{s} = \frac{0}{1}$, vale dizer, existe $s' \in S$ tal que $s'm = 0$. Então $\frac{1}{s} \otimes m = \frac{s'}{s's} \otimes m = \frac{1}{s's} \otimes s'm = 0$. Mas, dado $\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \in S^{-1}A \otimes M$, fazendo $s = \prod_i s_i$ e $t_j = \sum_{i \neq j} s_i$, então

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m_i = \frac{1}{s} \otimes m.$$

Portanto f é injetora. #

Corolário. Se M e N são A -módulos, então

$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_A N)$ e, em particular, se P é um ideal primo em A , então

$$M_P \otimes_{A_P} N_P \cong (M \otimes_A N)_P.$$

* Leia-se: $t_j = \prod_{i \neq j} s_i$.

8. PROPRIEDADES LOCAIS

Uma propriedade de um A-módulo M se diz propriedade local se o fato de ela ser verdadeira em M equivale ao de ser verdadeira em M_P , para todo ideal primo P de A.

Proposição 1-23. São equivalentes para um A-módulo M:

(a) $M = \{0\}$; (b) $M_P = \{0\}$, para todo ideal primo P; (c) $M_L = \{0\}$ para todo ideal maximal L, em A.

Demonstração:

(a) $\implies$ (b) $\implies$ (c). Imediato.

(c) $\implies$ (a). Suponhamos $M_L = (0)$ para todo ideal maximal L e $M \neq (0)$. Dado $x \in M$, $x \neq 0$, é um ideal em A o conjunto

$$\text{Ann}(x) = \{a \in A : ax = 0\} \quad (\text{Anulador de } x).$$

$\text{Ann}(x) \neq A$ pois $1x = x \neq 0$. Logo existe um ideal maximal L em A tal que $L \supset I = \text{Ann}(x)$. Como $M_L = (0)$ e $\frac{x}{1} \in M_L$, então $\frac{x}{1} = \frac{0}{1}$, isto é, existe $s \in A - L$ tal que $sx = 0$. Absurdo porque $I \subset L \implies A - L \subset A - I$ e $s \in A - L \implies s \in A - I \implies s \notin I$. #

Lema. Sejam M, M' e M'' A-módulos e S uma parte multiplicativa de A tal que $0 \notin S$ e $1 \in S$. Então se $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ é exata, também o é $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$.

Demonstração:

Como $g \circ f = 0$, então $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(g \circ f) = 0$. Logo $I_M(S^{-1}f) \subset \text{Ker}(S^{-1}g)$.

Seja $\frac{m}{s} \in \text{Ker}(S^{-1}g)$. Então $S^{-1}g\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{g(m)}{s} = 0$. Logo $\exists t \in S$ tal que $tg(m) = 0 = g(tm)$. Assim $tm \in \text{Ker}(g) = I_M(f)$. Isto implica que $\exists m' \in M'$ tal que $tm = f(m')$. Onde: $\frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = \frac{f(m')}{ts} = S^{-1}f\left(\frac{m'}{ts}\right) \implies \frac{m}{s} \in I_M(S^{-1}f)$.

Proposição 1-24. Seja $f: M \rightarrow N$ um A -homomorfismo. Então são equivalentes:

- (a) f é injetora;
- (b) f_P é injetora, para todo ideal primo P em A ;
- (c) f_L é injetora, para todo ideal maximal L em A .

Demonstração:

(a) $\implies$ (b). $0 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$ é exata já que f é injetora. Logo $0 \xrightarrow{i_P} M_P \xrightarrow{f_P} N_P$ também o é, para todo ideal primo P . Logo, $\text{Ker}(f_P) = I_M(i_P) = (0)$.

(b) $\implies$ (c). Imediato.

(c) $\implies$ (a). Seja $M'' = \text{Ker}(f)$. Sendo $i: M'' \rightarrow M$ a inclusão canônica, a sequência $M'' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$ é exata. Logo também será exata $M''_L \xrightarrow{i_L} M_L \xrightarrow{f_L} N_L$ para todo ideal maximal L de A .

Mas, por hipótese, f_L é injetora. Então $I_M(i_L) = \text{Ker}(f_L) = (0)$. Sendo, contudo, $I_M(i_L) = M''_L$, então $M''_L = (0)$. A proposição anterior nos garante, então, que $M'' = (0)$. Logo f é injetora. $\#$

9. MÓDULOS NOETHERIANOS E ARTINIANOS

Dado um A-módulo M são equivalentes as seguintes condições, tomando a inclusão como relação de ordem.

(a) Toda família não vazia de sub-módulos de M possui um elemento maximal.

(b) Toda sequência crescente de sub-módulos de M é estacionária.

Um módulo noetheriano é um módulo M para o qual valem as condições equivalentes acima.

São, também, equivalentes para um A-módulo M as condições a seguir:

(a') Toda família não vazia de sub-módulos de M possui um elemento minimal (para a relação de inclusão).

(b') Toda sequência decrescente (para a relação de inclusão) de sub-módulos de M é estacionária.

Qualquer módulo que satisfaça às condições equivalentes (a') e (b') chama-se módulo artiniano.

Proposição 1-25. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo K . Então são equivalentes as afirmações:

(a) E tem dimensão finita.

(b) E é noetheriano.

(c) E é artiniano.



Demonstração:

(a) $\implies$ (b). Se E não fosse noetheriano existiria uma sequência $S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \dots$ de sub-espacos de E . Logo

$$\dim S_1 < \dim S_2 < \dots < \dim E \text{ (finita).}$$

Absurdo.

(b) $\implies$ (a). Se E tivesse dimensão infinita, então existiria uma sequência infinita $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de elementos de E , sequência essa independente. Sendo $U_r = [x_1, x_2, \dots, x_r]$ ($r \geq 1$) então: $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots$

Absurdo.

(a) $\implies$ (c). Semelhante à primeira parte.

(c) $\implies$ (a). Considerando uma sequência $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ independente de vetores de E e tomando $V_r = [x_{r+1}, x_{r+2}, \dots]$ ($r \geq 1$): $V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \dots$. Absurdo. $\#$

Proposição 1-26. Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de A -módulos. Então.

(a) M é noetheriano $\iff M'$ e M'' são noetherianos.

(b) M é artiniano $\iff M'$ e M'' são artinianos.

Demonstração:

Provaremos apenas a primeira equivalência.

($\implies$) Se $(S_r)_{r \in L}$ é uma sequência crescente de sub-módulos de M' , então $(f(S_r))_{r \in L}$ é uma sequência crescente de sub-módulos de M . Logo $\exists r_0 \in L$ tal que, $\forall r \geq r_0$, $f(S_r) = f(S_{r+1})$.



Logo $f^{-1}(f(S_r)) = f^{-1}(f(S_{r+1}))$ e, então, $S_r = S_{r+1}$, $\forall r \geq r_0$.

Por raciocínio análogo se prova que M'' é, também, noetheriano.

($\Leftarrow$) Sendo f injetora, g sobrejetora e, ainda, $I_M(f) = \text{Ker}(g)$, então $f(M') \cong M'$ e $M/f(M') \cong M''$.

Logo M' pode ser considerado sub-módulo de M e na sequência exata

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\varphi} M/f(M') \longrightarrow 0$$

onde φ indica o homomorfismo canônico, M' e $M/f(M')$ são noetherianos.

Seja $(S_r)_{r \in L}$ uma sequência crescente de sub-módulos de M . Como M/M' é noetheriano $\exists r''_0 \in L$ tal que $\forall r \geq r''_0 : S_r + M'/M' = S_{r+1} + M'/M'$. Logo $S_r + M' = S_{r+1} + M'$, $\forall r \geq r''_0$. Sendo M' noetheriano, $\exists r'_0 \in L$ tal que $\forall r \geq r'_0$, $S_r \cap M' = S_{r+1} \cap M'$. Mostremos que $S_{r+1} \subset S_r$, $\forall r \geq r_0 = \max\{r'_0, r''_0\}$.

Seja $u \in S_{r+1}$. Então, $\forall y \in M'$, $\exists v \in S_r$ e $\exists z \in M'$ de modo que $u + y = v + z$. Logo $u - v = z - y \in M'$. Como $u, v \in S_{r+1}$, então $u - v \in S_r \cap M'$. Logo $u - v \in S_r$ o que acarreta que $u \in S_r$. #

CAPÍTULO II

O ESPECTRO PRIMO DE UM ANEL

§ 1º | TOPOLOGIA DE ZARISKI

1. INTRODUÇÃO

Seja A um anel e tomemos $a \in A - n(A)$. Então $S = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ é uma parte multiplicativa de A tal que $0 \notin S$. Conforme já vimos existe um ideal primo em A que é maximal na família dos ideais de A que não interceptam S .

Por outro lado é óbvio que se $a \in n(A)$, então este elemento está em todos os ideais primos de A , ou seja, a família dos ideais primos de A que não contêm o elemento $a \in n(A)$ é vazia.

Denotaremos por $\text{Spec}(A)$, em tudo o que se segue, a classe dos ideais primos de A . Tal classe é chamada espectro primo de A . Para todo $a \in A$, $\{P \in \text{Spec}(A) : a \notin P\}$ será indicado por X_a . Lo-

go $X_a = \{ P \in \text{Spec}(A) : a \notin P \}$.

Proposição 2-1. Sejam a e b elementos de um anel A . Então: (I) $X_a = \emptyset \iff a \in n(A)$; (II) $X_a = X \iff a \in U(A)$ e (III) $X_a = X_b \iff r((a)) = r((b))$.

Demonstração:

(I) Evidente em face das observações acima.

(II) ($\Leftarrow$) Imediata.

($\Rightarrow$) Suponhamos $a \notin U(A)$. Então existe um ideal maximal (e, portanto, primo) ao qual a pertence. Absurdo já que $X_a = X$.

(III) Lembremos que $r((a))$ é a intersecção de todos os ideais primos que contêm (a) . Logo $r((a)) = \bigcap \{ P : P \in X_a^c \}$ e $r((b)) = \bigcap \{ P : P \in X_b^c \}$.^{*} Então é evidente que $X_a = X_b \Rightarrow r((a)) = r((b))$. Suponhamos agora $r((a)) = r((b))$ e $X_a \neq X_b$. Então existe $P \in X_a$ tal que $P \notin X_b$ (ou vice-versa). Então $a \notin P$ e $b \in P$. Logo $a \notin r((b))$. Onde: $a \notin r((a))$. Absurdo. #

2. A TOPOLOGIA ESPECTRAL NUM ANEL

Lembremos o seguinte resultado de Topologia: "Para que uma classe B de sub-conjuntos de um conjunto $X \neq \emptyset$ seja base de uma

^{*} X_a^c = complementar de X_a em relação ao espectro.

topologia sobre X é necessário e suficiente que:

$$(a) \quad X = \bigcup_{B_r \in B} B_r$$

(b) $\forall B_i, B_j \in B$, se $p \in B_i \cap B_j$, então $\exists B_k \in B$ tal que $p \in B_k \subset B_i \cap B_j$."

Proposição 2-2. A classe $B = \{X_a; a \in A\}$ é base de uma topologia sobre $X = \text{Spec}(A)$, para todo anel A .

Demonstração:

(a) $\forall P \in X \Rightarrow \exists b \in A: b \notin P \Rightarrow P \in X_b$. Logo $X = \bigcup_{a \in A} X_a$.

(b) Provaremos que: $\forall a, b \in A \Rightarrow X_a \cap X_b = X_{ab}$.

Seja $P \in X$. Então: $P \in X_a \cap X_b \iff a \notin P$ e $b \notin P \iff ab \notin P$ (pois P é primo) $\iff P \in X_{ab}$.

Logo, se $P \in X_a \cap X_b$, existe $c \in A$ de modo que

$P \in X_c \subset X_a \cap X_b$. Basta tomar $c = a.b$. #

Definição. Dado um anel A chamaremos de Topologia de Zariski em $\text{Spec}(A)$ ou Topologia Espectral em $\text{Spec}(A)$ à topologia sobre $\text{Spec}(A)$ cuja base é a classe $B = \{X_a; a \in A\}$.

Notas:

(a) Por simplificação de linguagem nos referiremos comumente ao "espaço topológico $X = \text{Spec}(A)$ " para significar o par $(\text{Spec}(A), T)$, onde T é a topologia de Zariski.

(b) Os elementos $X_a \in \text{Spec}(A)$ serão chamados abertos básicos. É óbvio, então, que $G \subset \text{Spec}(A)$ é aberto se, e somente se,

G é uma reunião de abertos básicos.

(c) Da proposição decorre que: $\forall a_1, \dots, a_n \in A \implies X_{a_1} \cap \dots \cap X_{a_n} = X_{a_1 a_2 \dots a_n}$, isto é, uma intersecção finita de abertos básicos é um aberto básico.

3. OS FECHADOS NA TOPOLOGIA DE ZARISKI

Seja A um anel e seja E uma parte de A . Indicaremos por $V(E)$, no que se segue, o seguinte sub-conjunto de $X = \text{Spec}(A)$:

$$V(E) = \{ P \in X : P \supset E \}.$$

Proposição 2-3. Para que $F \subset X$ seja fechado em relação à topologia de Zariski é necessário e suficiente que exista $E \subset A$ de tal modo que $F = V(E)$.

Demonstração:

F é fechado $\iff F^c$ é aberto $\iff \exists E \subset A : F^c = \bigcup_{a \in E} X_a \iff \exists E \subset A : F = \bigcap_{a \in E} X_a^c$. Mostremos que $F = V(E)$. Com efeito, seja $P \in X$. Então: $P \in V(E) \iff P \supset E \iff \forall a \in E, a \in P \iff \forall a \in E, P \notin X_a^c \iff \forall a \in E, P \notin X_a^c \iff \forall a \in E, P \in X_a \iff P \in F$. #

Proposição 2-4. Seja A um anel e X o seu espectro primo.

Então:

$$(a) \forall E_1, E_2 \subset A, E_1 \subset E_2 \implies V(E_2) \subset V(E_1)$$

$$(b) \forall a \in A \text{ e } \forall q \geq 1 \ (q \in \mathbb{Z}) \implies V((a)) = V((a^q))$$

$$(c) \forall a \in A \implies X_a = (V(a))^c$$

$$(d) \forall a \in A, a^2 = a \implies V(\{a\}) = V((a)) = X_{a-1}.$$

$$(e) \text{ Se } I \text{ é um ideal em } A, \text{ então } V(I) = V(r(I)).$$

$$(f) \text{ Se } I \text{ e } J \text{ são ideais em } A, \text{ então } V(I) \subset V(J) \iff$$

$$r(J) \subset r(I).$$

$$(g) \forall E \subset A \implies V(E) = V((E)) = V(r(E)).$$

$$(h) V(0) = X \quad \text{e} \quad V(1) = \emptyset.$$

$$(i) \text{ Se } (E_r)_{r \in L} \text{ é uma família de sub-conjuntos de } A, \text{ então } V\left(\bigcup_{r \in L} E_r\right) = \bigcap_{r \in L} V(E_r).$$

$$(j) \text{ Se } I \text{ e } J \text{ são ideais em } A, \text{ então } V(I \cap J) = V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J) \quad \text{e} \quad V(I \cup J) = V(I + J).$$

Demonstração:

$$(a) \text{ Seja } P \in X. \text{ Então: } P \in V(E_2) \iff P \supset E_2 \implies P \supset E_1 \iff P \in V(E_1).$$

$$(b) (a^q) \subset (a) \implies V((a)) \subset V((a^q)). \text{ Por outro lado, } \forall P \in X: P \in V((a^q)) \iff P \supset (a^q) \implies a^q \in P \implies a \in P \text{ (} P \text{ é primo)} \iff (a) \subset P \iff P \in V((a)).$$

$$(c) \text{ Seja } P \in X. \text{ Então: } P \in X_a \iff a \notin P \iff P \notin V(a) \iff P \in (V(a))^c.$$

$$(d) a^2 = a \implies a(a-1) = 0. \text{ Logo: } P \in X_{a-1} \iff a-1 \notin P \iff a \in P \text{ (pois } P \text{ é primo)} \iff P \in V(a).$$

$$(e) I \subset r(I) \implies V(r(I)) \subset V(I). \text{ Por outro lado, suponhamos } V(I) \not\subset V(r(I)). \text{ Então, } \exists P \in X \text{ tal que } P \supset I \text{ e } P \not\supset r(I). \text{ Logo } \exists x \in r(I) \text{ de modo que } x \notin P. \text{ Mas } x \in r(I) \implies x^n \in I \text{ (} n \in \mathbb{Z}_{++} \text{)} \implies$$

$\Rightarrow x^n \in P \Rightarrow x \in P$. Absurdo.

(f) $(\Rightarrow) x \in r(J) \Leftrightarrow x \in \bigcap \{P \in X : P \supset J\} \Rightarrow x \in \bigcap \{P \in X : P \supset I\} \Leftrightarrow x \in r(I)$.

$(\Leftarrow)$ Seja $P \in X \cap V(I)$ e suponha que exista $x \in J$ tal que $x \notin P$. Então: $x \in J \Rightarrow x \in r(J) \Rightarrow x \in r(I) \Rightarrow x^r \in I$ ($r \in \mathbb{Z}_{++}$) $\Rightarrow x^r \in P \Rightarrow x \in P$. Absurdo.

(g) Mostremos primeiro que $V(E) = V((E))$.

Seja $P \in V(E)$. Como $I = (E) = \{a_1 e_1 + \dots + a_t e_t : t \geq 1, e_i \in E \text{ e } a_i \in A\}$, então $P \supset I$. Por outro lado, se $P \in V(I)$, então $P \supset I \supset E$. Logo $P \in V(E)$.

A segunda parte nada mais é que o item (e).

(h) Imediata.

(i) Seja $P \in X$. Então $P \in V(\bigcup_r E_r) \Leftrightarrow P \supset \bigcup_r E_r \Leftrightarrow P \supset E_r, \forall r \in L \Leftrightarrow P \in V(E_r), \forall r \in L \Leftrightarrow P \in \bigcap_r V(E_r)$.

(j) Como $r(I.J) = r(I \cap J)$, então decorre do item (e) que $V(I.J) = V(I \cap J)$.

Mostremos agora que $V(I.J) = V(I) \cup V(J)$. $I.J \subset I$ e $I.J \subset J \Rightarrow V(I) \subset V(I.J)$ e $V(J) \subset V(I.J) \Rightarrow V(I) \cup V(J) \subset V(I.J)$. Tomemos agora $P \in V(I.J)$. Então P é primo e $P \supset I.J$. Admitamos que $P \not\subset V(I)$ e $P \not\subset V(J)$. Logo, $\exists x \in I$ tal que $x \notin P$ e $\exists y \in J$ tal que $y \notin P$. Como $x.y \in I.J$, então $x.y \in P$. Logo $x \in P$ ou $y \in P$. Absurdo. Consequentemente $V(I.J) \subset V(I) \cup V(J)$.

Finalmente, $I \cup J \subset I + J \Rightarrow V(I + J) \subset V(I \cup J)$. Por outro lado, se $P \in V(I \cup J)$, então $P \supset I \cup J$. Logo $P \supset I$ e $P \supset J$. Is-

to acarreta que $P \supset I + J$. Logo $P \in V(I + J)$. #

Dada uma parte Y do espectro X de um anel A , indique-mos por $k(Y)$ a intersecção dos ideais de Y . É óbvio que: (a) $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow k(Y_2) \subset k(Y_1)$; (b) $\forall P \in X \Rightarrow k(V(P)) = P$.

Proposição 2-5. Seja X o espectro de um anel A . Então: $\forall Y \subset X \Rightarrow \bar{Y} = V(k(Y))$.

Demonstração:

$\forall P, P \in Y \Rightarrow P \supset \bigcap_{P \in Y} P \Rightarrow P \in V(k(Y))$. Logo $V(k(Y))$ é um fechado que contém Y . Mostremos que é o menor.

Seja $V(E)$ um fechado tal que $V(E) \supset Y$. Logo, $\forall P \in Y \Rightarrow P \supset E$. Isto implica que $E \subset k(Y)$. Logo $V(E) \supset V(k(Y))$.

§ 2º | CONEXÃO NA TOPOLOGIA DA ZARISKI

Um espaço topológico X é dito desconexo se existirem abertos disjuntos G e H , ambos não vazios, de modo que $G \cup H = X$. É óbvio, então, que G e H são também conjuntos fechados. Um espaço topológico conexo é, por definição, um espaço que não é desconexo.

Proposição 2-6. As seguintes condições são equivalentes para um anel A :

- (a) O espectro de A é desconexo.
- (b) Existem anéis A_1 e A_2 (não triviais) de modo que $A \cong A_1 \times A_2$.
- (c) $\exists x \in A, x \neq 0, 1$, tal que $x^2 = x$.

Demonstração:

(a) $\implies$ (b). Sendo $X = \text{Spec}(A)$ desconexo, então existem fechados não triviais $V(I)$ e $V(J)$ tais que $V(I) \cup V(J) = X = V(0)$ e $V(I) \cap V(J) = \emptyset = V(1)$.

Mas, $V(I) \cup V(J) = V(0) \implies V(I \cdot J) = V(0) \implies r(I \cdot J) = r(0)$. Como $I \cdot J \subset r(I \cdot J)$, então $I \cdot J \subset r(0)$. Logo, $\forall x \in I$ e $\forall y \in J$, $\exists m \in \mathbb{Z}_{++}$ tal que $(xy)^m = 0$.

Por outro lado $V(I) \cap V(J) = V(1) \implies V(I \cup J) = V(1) \implies V(I + J) = V(1) \implies r(I + J) = r(1) \implies I + J = (1)$. Logo $\exists a \in I$ e $\exists b \in J$ tais que $1 = a + b$. Devido à conclusão do parágrafo anterior podemos afirmar que $\exists r \in \mathbb{Z}_{++}$ tal que $(ab)^r = 0$.

Além disso, como $V(I) \subset V(a)$ e $V(J) \subset V(b)$ e, ainda, $V((a)) \cap V((b)) = V((a) \cup (b)) = V((a) + (b)) = V(1) = \emptyset$ (pois $a+b=1 \implies (a) + (b) = (1)$), então $V(I) = V((a)) = V((a^r))$ e $V(J) = V((b)) = V((b^r))$. Então $V((a^r)) \cap V((b^r)) = \emptyset$, do que decorre, por raciocínio já feito atrás, que $(a^r) + (b^r) = (1)$. Como, ademais, $(a^r) \cap (b^r) = (a^r)(b^r) = ((ab)^r) = (0)$, então $g: A \rightarrow A/(a^r) \times A/(b^r)$ dada por $g(x) = (x + (a^r), x + (b^r))$ é bijetora. Logo $A \cong A/(a^r) \times A/(b^r)$.

O fato de a desconexão tomada para X ser não trivial implica que $\underline{a}$ e $\underline{b}$ não são inversíveis nem nilpotentes. Logo $A/(\underline{a}^r)$ e $A/(\underline{b}^r)$ não são triviais.

(b) $\implies$ (c). Seja $f: A \rightarrow A_1 \times A_2$ um isomorfismo. Tomando $(0, 1) \in A_1 \times A_2$, $\exists a \in A$ de maneira que $f(a) = (0, 1)$. Logo $f(a^2) = (0, 1)^2 = (0, 1) = f(a)$. Sendo f injetora, então $a^2 = a$. Como $a \neq 0, 1$, então está provada a implicação.

(c) $\implies$ (a). Seja $a \in A$ tal que $a^2 = a$ ($a \neq 0, 1$). Consideremos os fechados $V(a)$ e $V(a - 1)$. Então:

$$(I) \quad V(a) \cap V(a - 1) = (V(a - 1))^c \cap V(a - 1) = \emptyset;$$

$$(II) \quad V(a) \cup V(a - 1) = X_a^c \cup X_{a-1}^c = (X_a \cap X_{a-1})^c = X_{a^2-a}^c = X_0^c = X.$$

(III) Se $V(a - 1) = \emptyset$, então $V(a) = X = V(0)$. Logo

$(a) \subset r((a)) = r((0))$. Assim, existe $r \in \mathbb{Z}_{++}$ de forma que $a^r = 0$. Absurdo porque $a^2 = a$ e $a \neq 0, 1$ têm como consequência que $a^r = a$.

(IV) Se $V(a - 1) = X$, então $V(a) = \emptyset = V(1)$. Logo $r((a)) = r((1))$. Como $(1) \subset r((1))$, segue-se que $1 \in r((a))$, ou seja, $\exists m > 0$ tal que $1^m = 1 = at$ ($t \in A$). Desta forma: $1 = at \implies a - 1 = 1(a - 1) = a(a - 1)t = 0 \implies a = 1$. Absurdo.

Consequentemente $V(a)$ e $V(a - 1)$ constituem uma desconexão não trivial de X . $\#$

Demonstração:

Seja E um espaço topológico. E é chamado espaço compacto se para toda família $(G_r)_{r \in L}$ de abertos tais que $\bigcup_r G_r = E$, existir uma sub-família finita $(G_{r_1}, \dots, G_{r_n})$ de maneira que $G_{r_1} \cup G_{r_2} \cup \dots \cup G_{r_n} = E$. É óbvio que é suficiente considerar-se uma família de abertos básicos na definição acima.

Proposição 2-7. Todo aberto básico da topologia de Zariski é compacto.

Demonstração:

Seja X_b um aberto básico e tomemos uma família $F = (X_{a_r})_{r \in L}$ de abertos básicos que recubra X_b , isto é, $\bigcup_{r \in L} X_{a_r} \supset X_b$. Logo $(X_b)^c \supset (\bigcup_{r \in L} X_{a_r})^c$, ou seja, $V(b) \supset \bigcap_{r \in L} V(a_r) = V(\bigcup_{r \in L} \{a_r\}) = V(I)$, onde I é o ideal gerado por $E = \bigcup_{r \in L} \{a_r\}$. Mas, $V(b) \supset V(I) \implies r(I) \supset r((b))$.

Como $b \in r((b))$, então existirá $m \in \mathbb{Z}_{++}$ de modo que $b^m = x_1 a_{r_1} + \dots + x_n a_{r_n}$ ($x_i \in A$ e $a_{r_i} \in E$). Então $X_{a_{r_1}} \cup X_{a_{r_2}} \cup \dots \cup X_{a_{r_n}} = (V(a_{r_1}))^c \cup \dots \cup (V(a_{r_n}))^c = (V(a_{r_1}) \cap \dots \cap V(a_{r_n}))^c = (V(\{a_{r_1}, \dots, a_{r_n}\}))^c \supset (V(b^m))^c = X_{b^m}$. Mas: $P \in X_b \implies b \notin P \implies b^m \notin P \implies P \in X_{b^m}$. Portanto $X_b \subset X_{b^m}$ e, então, $X_{a_{r_1}} \cup \dots \cup X_{a_{r_n}} \supset X_b$. #

Corolário. O espectro primo de um anel qualquer A é um espaço compacto.

Demonstração:

Evidente, uma vez que $\text{Spec}(A) = X_1$. $\#$

Proposição 2-8. Um aberto $G \subset X = \text{Spec}(A)$ é compacto se, e somente se, G é uma união finita de abertos básicos.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Uma reunião finita de compactos é um compacto em qualquer topologia.

($\Rightarrow$) Seja $G \subset X$ um aberto compacto. Então $G = \bigcup_{r \in L} X_{a_r}$, por G ser um aberto. Mas, por G ser compacto, $\exists r_1, r_2, \dots, r_n \in L$ tais que $G = X_{a_{r_1}} \cup X_{a_{r_2}} \cup \dots \cup X_{a_{r_n}}$. $\#$

§ 4º | SEPARAÇÃO NO ESPECTRO PRIMO DE UM ANEL

1. O AXIOMA T_0

Um espaço topológico X se diz espaço T_0 se $\forall a, b \in X$, $a \neq b$, existir um aberto G tal que $a \in G$ e $b \notin G$ ou $b \in G$ e $a \notin G$.



Proposição 2-9. O espectro primo de um anel A é um espaço T_0 .

Demonstração:

Sejam $P_1, P_2 \in X = \text{Spec}(A)$, $P_1 \neq P_2$. Então $\exists a \in P_1$ tal que $a \notin P_2$ ou $a \in P_2$ e $a \notin P_1$. No primeiro caso teremos $P_2 \in X_a$ e $P_1 \notin X_a$. No segundo $P_1 \in X_a$ e $P_2 \notin X_a$. #

2. O AXIOMA T_D

Dizemos que um espaço topológico X é um espaço T_D se, $\forall a \in X$, $\{a\}'$ é fechado. Prova-se em Topologia que: "um espaço X é $T_D \iff \forall a \in X$, $\exists$ um aberto G e $\exists$ um fechado F de maneira que $G \cap F = \{a\}$ " e que "todo espaço T_D é um espaço T_0 ".

Proposição 2-10. Seja A um anel cujo espectro X tenha a seguinte propriedade: $\forall Q \in X \implies \{P \in X : Q \subset P\}$ é finito. Então o espectro de A satisfaz o axioma T_D .

Demonstração:

Seja P um ideal primo em A . Se $V(P) = \{P\}$, isto é, se P é maximal, então $V(P) \cap X = \{P\}$.

Sendo X um aberto fica provada a proposição neste caso.

Em caso contrário, então $V(P) = \{P, P_1, \dots, P_r\}$, onde $P_1 \not\supset P, \dots, P_r \not\supset P$ e $r \geq 1$. Logo $P_1 \cap \dots \cap P_r \supset P$.

Se $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_r = P$, como P é primo, então $\exists i, 1 \leq i \leq r$,

de modo que $P = P_i$ o que é absurdo. Logo $P_1 \cap \dots \cap P_r \not\supseteq P$.

Seja $a \in P_1 \cap \dots \cap P_r$ tal que $a \notin P$. Então $P \in X_a$ e $P_1, P_2, \dots, P_r \notin X_a$. Logo $V(P) \cap X_a = \{P\}$. #

Corolário. Se $\text{Spec}(A)$ é finito, então vale o axioma T_D para este espaço. #

Exemplos:

3. OS AXIOMAS T_1 E T_2

Um espaço T_1 é um espaço topológico X com a seguinte propriedade: $\forall a, b \in X, a \neq b \implies \exists$ abertos G e H de modo que $a \in G$ e $b \notin G$ e, ainda, $b \in H$ e $a \notin H$.

Prova-se que "todo espaço T_1 é T_D ".

Proposição 2-11. Para que o espectro primo de um anel A seja um espaço T_1 é necessário e suficiente que todo ideal primo de A seja maximal.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Como cada ideal primo de A é maximal, $\forall P \in X \implies V(P) = \{P\}$. Sejam $P_1, P_2 \in X = \text{Spec}(A)$, $P_1 \neq P_2$. Os sub-conjuntos de X , $G = X - \{P_1\}$ e $H = X - \{P_2\}$ são abertos e, obviamente, satisfazem a definição acima.

($\Rightarrow$) Por hipótese X é T_1 . Tomemos $P \in X$ e consideremos $Q \in X - \{P\}$. Como $Q \neq P$, então existe um aberto G tal que $Q \in G$ e

$P \notin G$. Logo $Q \in G$ e $G \subset X - \{P\}$ o que mostra que $X - \{P\}$ é aberto e, portanto, $\{P\}$ é fechado.

Logo existe um ideal I em A tal que $V(I) = \{P\}$. Se P não fosse maximal, existiria um ideal maximal M em A tal que $M \supsetneq P$. Como M é primo, então $M, P \in V(I)$. Absurdo. $\#$

Exemplos:

1) O espectro de um anel pode satisfazer o axioma T_D e não satisfazer o axioma T_1 . Com efeito, consideremos o Anel das Séries Formais $K[[X]]$ sobre um corpo K . Tal anel é o conjunto das seqüências infinitas $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ de elementos de K dotado das seguintes leis:

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

e

$$(a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, c_2, \dots)$$

onde
$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

$K[[X]]$ é um anel de integridade (principal) e seus ideais não triviais são os ideais (X^r) , onde $r \in \mathbb{Z}_{++}$ e $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$.

Assim, os ideais primos de $K[[X]]$ são (0) e (X) , este maximal. Sendo finito, o espectro de $K[[X]]$ é T_D . Mas não é T_1 pois (0) é primo e não é maximal.

2) O espectro de um anel pode ser infinito e não ser T_D . Consideremos o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Os ideais maximais de $\mathbb{Z}$ são os ideais gerados pelos números primos e, além destes, o (0) é o único outro ideal primo não maximal. Mostremos que para todo $X_a \in \text{Spec}(\mathbb{Z})$



e para todo ideal I de Z $X_a \cap V(I) \neq \{0\}$.

Suponhamos que $\exists a \in A$ e que exista um ideal I em A tal que $X_a \cap V(I) = \{(0)\}$. $(0) \in V(I) \Rightarrow (0) \supset I \Rightarrow I = (0) \Rightarrow V(I) = X = \text{Spec}(Z)$.

Ora, se $a = \pm 1$, então $X_a = X \neq \{(0)\}$. Se $a = 0$, então $X_a = \emptyset$ e daí $X_a \neq \{(0)\}$. Por último, se $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$, onde $r \geq 1$ e os p_i são primos, tomando $q \in Z$ primo e não associado de nenhum dos p_i , então $a \notin (q)$. Logo $(q) \in X_a$. Então X_a é infinito e portanto diferente de $\{(0)\}$. #

Lembremos agora que um espaço topológico X se denomina Espaço T_2 (ou Espaço de Hausdorff) se: $\forall a, b \in X, a \neq b \Rightarrow \exists G, H$, abertos, tais que $G \cap H = \emptyset$, $a \in G$ e $b \in H$. É evidente que todo espaço T_2 é também um espaço T_1 .

No próximo capítulo provaremos a

Proposição 2-12. O espectro primo de um anel é um espaço T_2 se for um espaço T_1 .

Proposição 2-13. Seja A um anel sub-diretamente irredutível. Então o espectro de A é T_1 se, e somente se, $\text{Spec}(A) = X = \{\text{Ann}(\hat{A})\}$.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Imediata.

($\Rightarrow$) Sendo A sub-diretamente irredutível, então $\hat{A} \neq (0)$, $\text{Ann}(\hat{A})$ é maximal e os elementos de $P = \text{Ann}(\hat{A})$ são os divisores do



zero de A . Se existisse $Q \in X$, $Q \neq P$, então existiriam $X_a, X_b \in X$ tais que $P \in X_a$, $Q \in X_b$ e $X_a \cap X_b = \emptyset$. Logo $X_{ab} = \emptyset$. Então $\exists t \geq 1$, $t \in \mathbb{Z}$, de modo que $(ab)^t = a(a^{t-1} \cdot b^t) = 0$. Logo $a \in \text{Ann}(\hat{A}) = P$. Absurdo, pois $P \in X_a$. $\#$

§ 5º | IRREDUTIBILIDADE NA TOPOLOGIA DE ZARISKI

Um espaço topológico X se diz irredutível se: $\forall G \subset X$, G aberto e $G \neq \emptyset \implies \bar{G} = X$. Prova-se que: "um espaço topológico X é irredutível $\iff \forall G, H \subset X$, $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$, ambos abertos, $G \cap H \neq \emptyset$ ".

Um sub-conjunto $Y \subset X$ é chamado irredutível se o sub-espaço Y de X é irredutível. Uma componente irredutível de X é uma parte irredutível maximal para a relação de ordem "inclusão". Os seguintes resultados são verdadeiros: (I) Toda componente irredutível é um conjunto fechado. (II) Toda parte irredutível está contida numa componente irredutível. (III) X é uma reunião de componentes irredutíveis.

Demonstração:

Proposição 2-14. Seja X o espectro de um anel A e tomemos $Y \subset X$. Então Y é irredutível se, e somente se, $k(Y)$ é primo.

Demonstração:

Seja $k(Y) = Q$. Observemos de início que: $c \in Q \iff c \in P$,
 $\forall P \in Y \iff \forall P \in Y, P \in V(c) \iff Y \subset V(c)$. Passemos agora à de-
monstração.

($\implies$) Sejam $a, b \in A$ de modo que $a.b \in Q$. Isto equivale
a $Y \subset V(ab) = V(a) \cup V(b)$, conforme já foi observado. Logo, $Y =$
 $= (V(a) \cap Y) \cup (V(b) \cap Y)$ e, então, $\emptyset = C_Y(V(a) \cap Y) \cap C_Y(V(b) \cap Y)$.
Sendo Y irredutível, então $C_Y(V(a) \cap Y) = \emptyset$ ou $C_Y(V(b) \cap Y) = \emptyset$. Lo-
go $V(a) \cap Y = Y$ ou $V(b) \cap Y = Y$. Daí $Y \subset V(a)$ ou $Y \subset V(b)$ o que
equivale a $a \in Q$ ou $b \in Q$.

($\impliedby$) Como já vimos $V(Q) = V(k(Y)) = \bar{Y}$. Q sendo pri-
mo, $k(\{Q\}) = Q$. Logo $\bar{Y} = V(Q) = V(k(\{Q\})) = \overline{\{Q\}}$. Portanto $\bar{Y} = \overline{\{Q\}}$.
Como Y é irredutível se, e somente se, $\bar{Y}$ o é (*) e como $\{Q\}$ é ir-
redutível, por ser unitário, então Y é irredutível. #

Corolário 1. X é irredutível se, e somente se, $n(A)$ é primo.

Demonstração:

Imediato pois $k(X) = n(A)$. #

Corolário 2. Um sub-conjunto $Y \subset X$ é uma componente irre-
dutível se, e somente se, existe um ideal primo minimal P tal que
 $Y = V(P)$.

Demonstração:

($\impliedby$) Como $k(V(P)) = P$, $\forall P \in X$, então $V(P)$ é irredutí-
vel. Seja P_1 minimal primo e Y uma parte irredutível tal que

(*) Este resultado é geral.

$Y \supset V(P_1)$. Logo $k(V(P_1)) = P_1 \supset k(Y)$. Como $k(Y)$ é primo, então $P_1 = k(Y)$. Disto, e do fato de $P_1 \in Y$, então P_1 está contido em todos os ideais de Y . Logo não pode ocorrer $Y \not\supset V(P_1)$. Assim $V(P_1)$ é uma componente irredutível.

($\Rightarrow$) Se Y é uma componente irredutível, então, $Y = \bar{Y} = V(k(Y))$, onde $k(Y)$ é primo. Se $k(Y)$ não fosse minimal existiria um ideal primo P tal que $k(Y) \not\supset P$. Logo $V(P) \supset V(k(Y)) = Y$. Como $V(P)$ é irredutível, então $V(P) = Y$. Donde $P = k(V(P)) = k(Y)$. Absurdo. # *

§ 6º | APLICAÇÃO ASSOCIADA A UM HOMOMORFISMO DE ANÉIS

Sejam A e B anéis e $f: A \rightarrow B$ um homomorfismo. Sendo X e Y os espectros de A e B respectivamente, indiquemos por $\hat{f}$ a aplicação de Y em X dada por $\hat{f}(Q) = f^{-1}(Q)$, $\forall Q \in Y$. Tal aplicação, que está bem definida, pelo fato de a imagem inversa de um ideal primo, por um homomorfismo, ser também um ideal primo, será chamada aplicação associada ao homomorfismo f .

* Se $\text{Spec}(A)$ é T_1 todo ideal primo é maximal e portanto todos são minimais. Neste caso as componentes irredutíveis são os sub-conjuntos unitários.



Proposição 2-15. A aplicação $\hat{f}$ associada ao homomorfismo $f: A \rightarrow B$ é uma função contínua. Ademais, se f for sobrejetora, então $\hat{f}$ será um homomorfismo de Y sobre $V(\text{Ker}(f))$.

Demonstração:

(a) Tomemos $a \in A$ e indiquemos por $Y_{f(a)} = \{Q \in Y : f(a) \notin Q\}$. Seja $Q \in Y$. Então: $Q \in Y_{f(a)} \iff f(a) \notin Q \iff a \notin f^{-1}(Q) \iff f^{-1}(Q) \in X_a \iff \hat{f}(Q) \in X_a \iff Q \in (\hat{f})^{-1}(X_a)$.

Logo $Y_{f(a)} = (\hat{f})^{-1}(X_a)$, $\forall a \in A$. Isto prova que $\hat{f}$ é contínua.

(b) Provemos agora que $\hat{f}$ é injetora. Para tanto tomemos $Q_1, Q_2 \in Y$ e suponhamos $\hat{f}(Q_1) = \hat{f}(Q_2)$. Então $f^{-1}(Q_1) = f^{-1}(Q_2)$, e como f é sobrejetora, por hipótese, então $Q_1 = Q_2$.

Mostremos que $\hat{f}(Y) = V(\text{Ker}(f))$. Para todo $x \in A$ se $x \in \text{Ker}(f)$, então $f(x) = 0 \in Q$, $\forall Q \in Y$. Logo $x \in f^{-1}(Q) = \hat{f}(Q)$. Donde, $\text{Ker}(f) \subset \hat{f}(Q)$, $\forall Q \in Y$. Tomando agora $P \in X$ tal que $P \in V(\text{Ker}(f))$ e fazendo $f(P) = Q$ teremos $\hat{f}(Q) = f^{-1}f(P) = P$, pois f é ^{sobrejetora} ~~injetora~~.

Sejam $y_1, y_2 \in B$ tais que $y_1 \cdot y_2 \in f(P)$. Logo $\exists x_1, x_2 \in A$ e $\exists x \in P$ tais que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ e $y_1 \cdot y_2 = f(x)$. Logo $f(x_1 \cdot x_2) = f(x)$ e, então, $x_1 \cdot x_2 - x \in \text{Ker}(f)$. Como $P \in V(\text{Ker}(f))$, então $P \supset \text{Ker}(f)$ o que implica que $x_1 \cdot x_2 - x \in P$. Logo $x_1 \cdot x_2 \in P$ e, daí, $x_1 \in P$ ou $x_2 \in P$. Portanto $f(x_2) = y_1 \in f(P)$ ou $f(x_2) = y_2 \in f(P)$ o que prova que $f(P)$ é primo.

Resta provar que $(\hat{f})^{-1}$ é contínua. Ora: $\forall b \in B \implies$

$\exists a \in A : f(a) = b \implies \hat{f}(Y_b) = \hat{f}(Y_{f(a)}) = \hat{f}(\hat{f})^{-1}(X_a) = X_a \cap \sqrt{(\text{Ker}(\hat{f}))}$. Isto completa a demonstração. #

Corolário: Para todo anel A o espectro de A é homeomorfo ao de $A/n(A)$.

Demonstração:

Considerando o homomorfismo canônico $g : A \rightarrow A/n(A)$ cujo núcleo é $n(A)$, então o espectro de $A/n(A)$ é homeomorfo a $V(n(A))$. Como todo ideal primo de A contém $n(A)$, então $V(n(A)) = \text{Spec}(A)$. Assim $\text{Spec } A/n(A)$ e $\text{Spec}(A)$ são homeomorfos. #

Proposição 2-16. Suponhamos o anel $A = \bigtimes_{i=1}^n A_i$, onde os A_i são, também, anéis. Sendo X o espectro de A , então existem sub-espacos de X , $X_1, \dots, X_n$, tais que $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ e $X_i \cap X_j = \emptyset$, quando $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Demonstração:

Para cada i ($1 \leq i \leq n$) consideremos o homomorfismo sobrejetor $f_i : A \rightarrow A_i$, dado por $f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$. Então o espectro de cada A_i é homeomorfo a $X_i = V(\text{Ker}(f_i))$. Então:

a) $X_1 \cup \dots \cup X_n = V(\text{Ker}(f_1)) \cup \dots \cup V(\text{Ker}(f_n)) = V(\text{Ker}(f_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(f_n)) = V(0) = X$;

b) se $i \neq j$, então o ideal gerado por $\text{Ker}(f_i) \cup \text{Ker}(f_j)$ é $\text{Ker}(f_i) + \text{Ker}(f_j)$ e como $\forall x = (a_1, \dots, a_n) \in A \implies x = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) + (0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0) \in \text{Ker}(f_i) + \text{Ker}(f_j)$, então $A = \text{Ker}(f_i) + \text{Ker}(f_j)$.

Logo $X_i \cap X_j = V(\text{Ker}(f_i) \cup \text{Ker}(f_j)) = V(A) = \emptyset$. #

Corolário. Se um anel A é o produto direto de um número finito de corpos, então o espectro de A é finito e discreto.

Demonstração:

Suponhamos $A = \bigtimes_{i=1}^n K_i$, onde cada K_i é um corpo. É óbvio que $\text{Spec}(A)$ é finito já que cada corpo contém dois ideais apenas.

Por outro lado, sendo $f_i : A \rightarrow K_i$ ($1 \leq i \leq n$) os epimorfismos definidos acima, então $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$, onde cada $X_i = V(\text{Ker}(f_i))$ é homeomorfo ao espectro de K_i . Mas o espectro de um corpo é unitário (consta apenas do ideal nulo). Logo $\forall P \in X \implies \exists i$ ($1 \leq i \leq n$) : $P \in X_i \implies X_i = \{P\} \implies \{P\} = V(\text{Ker}(f_i))$.

Sendo X finito e todo sub-conjunto unitário de X fechado, então X é um espaço discreto. #

Exemplos:

1) Seja A um anel com um número finito de ideais. Mostremos que o espectro de A é discreto.

Observemos, de início, que existe uma bijeção entre os ideais de A que contêm $n(A)=I$ e os ideais de $A/n(A)$. Se B é um ideal em A/I então $\varphi^{-1}(B)$ é ideal em A (φ : homomorfismo canônico de A sobre $A/n(A)$) e como $I \in B$, então $I \subset \varphi^{-1}(B)$. Se $\varphi^{-1}(B_1) = \varphi^{-1}(B_2)$, então $B_1 = B_2$. Por último, dado um ideal B' em A tal que $B' \supset I$, então $\varphi(B')$ é ideal em $A/n(A)$. Então $\varphi^{-1}(\varphi(B'))$ é um ideal



em A o qual contém B' e, portanto, contém I .*

Então, se A contém apenas um número finito de ideais, o mesmo ocorre com $A/n(A)$. Por outro lado $n(A/n(A)) = (0)$. Logo $A/n(A)$ tem espectro discreto e finito. Devido ao homeomorfismo que há entre $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(A/n(A))$, então nossa afirmação está justificada.

Como consequência desse fato podemos dizer que num anel com um número finito de ideais todo ideal primo é maximal.

2) Seja A um anel semi-local, isto é, um anel com um número finito apenas de ideais maximais. Sejam $M_1, M_2, \dots, M_n$ esses ideais. Então $g: A \rightarrow \prod_{i=1}^n A/M_i$, dada por $g(x) = (x + M_1, \dots, x + M_n)$ é um epimorfismo e $x \in \text{Ker}(g) \iff x \in M_1 \cap \dots \cap M_n = j(A)$. Usando o teorema do homomorfismo: $A/j(A) \cong \prod_{i=1}^n A/M_i$. Como cada A/M_i é corpo, então $\text{Spec}(A/j(A))$ é discreto.

Um anel A é chamado anel regular ou anel absolutamente plano se todo A -módulo M é plano.

Proposição 3-1. São equivalentes, para um anel A , as seguintes condições:

a) A é absolutamente plano.
b) Todo ideal principal de A é idempotente para a multiplicação.

c) Todo ideal de tipo finito em A é fator direto de A .

* O mesmo resultado vale para todo ideal J de A .



CAPÍTULO III

SOBRE O ESPECTRO DE CERTOS ANÉIS

§ 1º | ANÉIS REGULARES (OU ABSOLUTAMENTE PLANOS)

1. CARACTERIZAÇÃO DOS ANÉIS REGULARES

Um anel A é chamado anel regular ou anel absolutamente plano se todo A -módulo M é plano.

Proposição 3-1. São equivalentes, para um anel A , as seguintes condições:

- A é absolutamente plano.
- Todo ideal principal de A é idempotente para a multiplicação.
- Todo ideal de tipo finito em A é fator direto de A .

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b) Por hipótese o A -módulo $A/(x)$ é plano, $\forall x \in A$. Logo é injetora a aplicação $\beta: A/(x) \otimes (x) \longrightarrow A/(x) \otimes A = A/(x)$, definida naturalmente. Além disso, no diagrama

$$A \otimes (x) \xrightarrow{\alpha} A/(x) \otimes (x) \xrightarrow{\beta} A/(x)$$

α é sobrejetora e $(\beta \circ \alpha)(a \otimes (a_1 x)) = \beta((a + (x)) \otimes a_1 x) = (a + (x))(a_1 x) = a a_1 x + (x) = (x) = 0$. Disso tudo segue-se que $I_M(\alpha) = \{0\}$. Mas, sendo α sobrejetora, então $A/(x) \otimes (x) = (0)$. Como $A/(x) \otimes (x) \cong (x)/(x)^2$, então $(x)/(x)^2 = (0)$. Consequentemente $x \in (x)^2 = (x^2)$. Então $(x) \subset (x)^2$. Como a inclusão contrária é imediata, então $(x) = (x)^2$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Suponhamos $(x) = (x^2)$, $\forall x \in A$. Então, $\forall x \in A \Rightarrow \exists a \in A: x = ax^2$. Então é fácil verificar que $e = ax$ é idempotente e que $(e) = (ax)$.

Consideremos um ideal $I = (u, v)$ com $u, v \in A$. Então existem $a, b \in A$ tais que $e = au$ e $f = bv$ são idempotentes. Mostremos que $I = (e, f)$.

$$\forall z \in (e, f) \Rightarrow z = re + sf \quad (r, s \in A) \Rightarrow z = (ra)u + (sb)v \Rightarrow z \in (u, v).$$

$$\forall z \in (u, v) \Rightarrow z = ru + sv \quad (r, s \in A) \Rightarrow z = r(au^2) + s(bv^2) = (ru)e + (sv)f \in (e, f), \text{ pois } u = au^2 \text{ e } v = bv^2.$$

Por outro lado $I = (e, f) = (e + f - ef)$. É óbvio que $(e + f - ef) \subset (e, f)$. Agora, se $z \in (e, f)$, então $z = re + sf = re(e + f - ef) + sf(e + f - ef)$, uma vez que $e(e + f - ef) = e$ e $f(e + f - ef) = f$. Ademais $w = e + f - ef$ é idempotente conforme se pode comprovar diretamente. Mostremos, por fim, que $A = (w) \oplus (1-w)$.

Como $1 = w + (1 - w)$, então $A = (w) + (1 - w)$. Por outro lado, se $aw = b(1 - w)$ ($a, b \in A$), então $aw = b(w - w^2) = 0$ o que mostra que $(w) \cap (1 - w) = (0)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Seja I um ideal de tipo finito em A . Então I é fator direto de A . Como $i: I \rightarrow A$ (inclusão) é injetora e $i(I) = I$ é fator direto de A , então $1_M \otimes i: M \otimes I \rightarrow M \otimes A = M$ é injetora para todo A -módulo M . Quer dizer, M é um módulo plano. Portanto A é regular. #

Lema. Um anel local e absolutamente plano é, necessariamente, um corpo.

Demonstração:

Seja M o ideal maximal de A e tomemos $x \in M$. Como já vimos existe $a \in A$ tal que $x = ax^2$ e o elemento $e = ax$ é idempotente. Sendo A local, então $j(A) = M$. Como $x \in j(A)$, segue-se que $u = 1 - xa$ é inversível. De $e = 1 - u$, decorre que $e^2 = (1 - u)^2 = 1 - 2u + u^2 = e = 1 - u$. Logo $u^2 - u = u(u - 1) = 0$. Por u ser inversível podemos concluir que $u - 1 = 0$ e que $u = 1$. Logo $e = 0$. Assim $x = ax^2 = (ax)x = ex = 0$, $\forall x \in M$. $M = (0) \Rightarrow A$ é corpo. #

Proposição 3-2. Para que um anel A seja regular é necessário e suficiente que A_L seja corpo, para todo ideal maximal L de A .

Demonstração

($\Rightarrow$) Seja $I = (\frac{x}{s})$ um ideal principal de A_L , onde L



é maximal em A . Então $x \in A$ e como A é regular, existe $a \in A$ tal que $x^2 = ax$. Então $\left[\frac{x}{s}\right]^2 = \frac{ax}{ss} = \frac{a}{s} \cdot \frac{x}{s} \in I$. Logo $I^2 = I$. Ora, já vimos que A_L é um anel local. Logo A_L é corpo.

($\Leftarrow$) Sendo A_L um corpo, então A_L é regular, para todo ideal maximal L . Então, se M é um A -módulo, segue-se que M_L é um A_L -módulo plano. Seja agora I um ideal em A . Observemos que $I_L = (A - L)^{-1}I$ é um ideal em A_L (verificação direta). A inclusão $i: I \rightarrow A$ é injetora. Logo $i_L: I_L \rightarrow A_L$ também é injetora. Portanto $1 \otimes i_L: M_L \otimes I_L \rightarrow M_L \otimes A_L$ é injetora (pois M_L é plano). Daí $(M \otimes I)_L \rightarrow (M \otimes A)_L$ é injetora. Por conseguinte $1_M \otimes i: M \otimes I \rightarrow M \otimes A$ é injetora. Isto prova que A é absolutamente plano. #

2. O ESPECTRO DE UM ANEL REGULAR - SEPARAÇÃO

Proposição 3-3. Se A é um anel regular e $a \in A$, então existe $x \in A$ tal que $V(a) = X_{ax-1}$ e, portanto, $V(a)$ é fechado e aberto.

Demonstração:

$a \in A \Rightarrow \exists x \in A$ tal que $a = a^2x$ e o elemento $e = ax$ é idempotente, conforme já vimos.

Mostremos que $(ax) = (a)$. É evidente que $(ax) \subset (a)$. Por outro lado, $\forall y \in (a) \Rightarrow y = at \ (t \in A) \Rightarrow y = a^2xt = (at)(ax) \Rightarrow y \in (ax)$. Logo $r((ax)) = r((a))$. Portanto $X_{ax} = X_a$ e $V(ax) = V(a)$.

Para todo ideal primo P de A teremos $ax(ax-1) = 0 \in P$.

Logo $ax \in P$ ou $ax - 1 \in P$ (exclusive). Daí, $\forall P \in \text{Spec}(A)$:

$P \in V(ax) \Rightarrow ax - 1 \notin P \Rightarrow P \in V_{ax-1}$ ou seja, $V(ax) \subset X_{ax-1}$. Analogamente se prova que $X_{ax-1} \subset V(ax)$. Então vale a igualdade. Assim $V(a) = V(ax) = X_{ax-1}$. #

Proposição 3-4. O espectro X de um anel regular A é um espaço T_2 .

Demonstração:

Sejam $P, Q \in X$, $P \neq Q$. Então $\exists a \in P$ tal que $a \notin Q$ (ou vice-versa). Conforme já vimos, $\exists x \in A$ de modo que $V(a) = V(ax) = X_{ax-1}$. Por outro lado $a(1 - ax) = 0 \Rightarrow a(1 - ax) \in Q \Rightarrow 1 - ax \in Q \Rightarrow ax \notin Q \Rightarrow Q \in X_{ax}$.

Então $P \in V(a) = X_{ax-1}$ e $Q \in X_{ax}$ e, ainda $X_{ax} \cap X_{ax-1} = X_{(ax)^2 - ax} = X_0 = \emptyset$. Logo $\text{Spec}(A)$ é T_2 . #

Corolário 1. O espectro de um anel regular A é um espaço T_0, T_D e T_1 .

Corolário 2. Todo ideal primo num anel regular é maximal.

3. SEQUÊNCIAS DE IDEAIS PRIMOS NUM ANEL REGULAR

Lembremos que uma seqüência $(x_1, x_2, \dots)$ de pontos de um es-



paço topológico X converge para $p \in X$ se para todo aberto $\emptyset \neq G \subset X$ existir um índice n_0 tal que $\forall n \geq n_0, x_n \in G$. A proposição a seguir dá a condição para que uma seqüência de ideais primos de um anel regular convirja em relação à topologia de Zariski.

Proposição 3-5. Seja X o espectro de um anel regular A . Então, a seqüência $(P_1, P_2, \dots, P_n, \dots)$ de ideais de X converge para $P \in X$ se, e somente se, $\exists n_0 \geq 1$ tal que $P_n = P, \forall n \geq n_0$.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Imediata.

($\Rightarrow$) Por hipótese $(P_1, P_2, \dots, P_n, \dots) \rightarrow P$. Seja $P = (a)$. Então existe $x \in A$ tal que $a = xa^2$. Logo $a(1 - xa) = 0 \in P$. Como $xa \in P$, segue-se que $1 - xa \notin P$, ou seja, $P \in X_{1-xa}$. Devido ao fato de $P_n \rightarrow P$ podemos afirmar que $\exists n_0 \geq 1$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow P_n \in X_{1-xa} \Rightarrow 1 - xa \notin P_n \Rightarrow a \in P_n$. Então $P \subset P_n, \forall n \geq n_0$.

Sendo, contudo, maximal cada um dos ideais primos de A , então $P_n = P, \forall n \geq n_0$. #

Nota. Já sabemos que o espectro de todo anel A é compacto. Logo o espectro de um anel é enumeravelmente compacto (isto é, todo sub-conjunto infinito de $\text{Spec}(A)$ admite pontos de acumulação em X). A proposição acima nos garante que se o espectro de um anel regular ~~for~~^{tiver} infinitos ~~ideais primos~~^{ideais principais} existirão seqüências de ideais primos das quais nenhuma sub-seqüência convergirá. Logo, o espectro de um anel regular não é sequencialmente compacto se esse espectro ~~for~~^{tiver} infinitos ~~ideais primos~~^{ideais principais}.

* $P = \text{ideal de tipo finito.}$

4. IRREDUTIBILIDADE PARA O ESPECTRO DE UM ANEL REGULAR

Vejamos em que condições é irredutível o espectro de um anel regular.

Proposição 3-5. O espectro de um anel regular A é irredutível se, e somente se, A é um corpo.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Imediata pois o único ideal primo de um corpo é o ideal (0) .

($\Rightarrow$) Mostremos, inicialmente, que $n(A) = (0)$. Se $a \in n(A)$, então $\exists i \geq 1$ tal que $a^i = 0$ e $\exists x \in A$ de modo que $a = xa^2$. Desta última igualdade resulta que $a = x^{i-1} \cdot a^i$. Logo $a = 0$.

Agora: $\text{Spec}(A)$ irredutível $\Rightarrow n(A)$ é primo $\Rightarrow n(A)$ é maximal (pois A é regular) $\Rightarrow (0)$ é maximal $\Rightarrow A$ é corpo.

5. SOBRE CONEXÃO NO ESPECTRO DE UM ANEL REGULAR

Como num anel regular (que não seja corpo) há sempre elementos idempotentes, então podemos afirmar que é desconexo o espectro de tais anéis.

Um espaço totalmente desconexo é um espaço topológico X com a seguinte propriedade: $\forall a, b \in X, a \neq b \Rightarrow \exists$ abertos não va-



zios $G, H \subset X$ tais que $a \in G$, $b \in H$, $G \cup H = X$ e $G \cap H = \emptyset$.

Proposição 3-6. O espectro primo de um anel regular é totalmente desconexo.

Demonstração:

Dados $P, Q \in X = \text{Spec}(A)$, $P \neq Q$, existe X_a tal que $P \in X_a$ e $Q \notin X_a$. Logo $Q \in X_a^c = V(a) = X_{ax-1}$, onde $x \in A$ e $a = xa^2$. Como, ainda, $X_a \cup X_a^c = X$ e $X_a \cap X_a^c = \emptyset$ a proposição fica provada.

Nota. Usando a proposição acima pode-se concluir que o espectro de um anel regular é totalmente descontínuo, isto é, os sub-conjuntos conexos maximais (componentes) são unitários.

Com efeito, se $Y \subset X$ e $P, Q \in Y$, $P \neq Q$, então, com as notações da proposição: $X_a \cap Y \neq \emptyset$, $X_a^c \cap Y \neq \emptyset$, $(X_a \cap Y) \cap (X_a^c \cap Y) = \emptyset$ e $(X_a \cap Y) \cup (X_a^c \cap Y) = Y$. Ou seja, Y é desconexo. #

6. ANÉIS BOOLEANOS

Um anel A tal que, $\forall a \in A$, $a^2 = a$ é obviamente um anel regular. Um anel nestas condições é chamado anel booleano.

Nos anéis booleanos os ideais de tipo finito são principais. De fato, se $I = (a, b)$, onde $a, b \in A$, como $a(a+b+ab) = a$ e $b(a+b+ab) = b$ (pois $x^2 = x \Rightarrow x+x=0$), então $I = (a+b+ab)$.

Por indução se completa a verificação da observação feita.

Proposição 3-7. Um sub-conjunto do espectro de um anel booleano A é aberto e fechado se, e somente se, esse conjunto é um aberto básico.

Demonstração:

$$(<=>) \quad \forall a \in A \implies a^2 = a \implies X_a = V(a - 1).$$

$$\begin{aligned} (\implies) \quad & \text{Notemos, de início, que } \forall a_1, \dots, a_n \in A \implies \\ & X_{a_1} \cup \dots \cup X_{a_n} = (V(a_1))^c \cup \dots \cup (V(a_n))^c = (V(a_1) \cap \dots \cap V(a_n))^c = \\ & = (V((a_1, \dots, a_n)))^c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Como existe } a \in A \text{ tal que } (a_1, \dots, a_n) = (a), \text{ então} \\ & X_{a_1} \cup \dots \cup X_{a_n} = (V(a))^c = X_a. \end{aligned}$$

Tomemos agora $F \subset X = \text{Spec}(A)$, F fechado e aberto. Sendo F aberto: $F = \bigcup_{a \in A'} X_a$, onde $A' \subset A$. Sendo F compacto (pois é fechado e X é compacto): $\exists b_1, \dots, b_n \in A' : F = X_{b_1} \cup \dots \cup X_{b_n}$. Levando em conta a observação inicial, segue-se que $\exists b \in A$ tal que $F = X_b$, onde b é o gerador de $(b_1, \dots, b_n)$. $\#$

Proposição 3-8. O espectro de um anel booleano A é irredutível se, e somente se, A é isomorfo do anel $\mathbb{Z}_2$ das classes de restos módulo 2.

Demonstração:

$$(<=>) \quad \text{Imediata.}$$

$$\begin{aligned} (\implies) \quad & \text{Spec}(A) \text{ irredutível} \implies A \text{ é corpo (pois } A \text{ é re-} \\ & \text{gular). Logo, } \forall a \in A, a \neq 0 \implies a = a.1 = a.(a.a^{-1}) = a^2.a^{-1} = a.a^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Conseqüentemente $A = \{0, 1\}$. #

Encerraremos este parágrafo demonstrando a proposição 2-12:

"Se o espectro de um anel é T_1 , então também é T_2 ."

Demonstração:

Seja A um anel cujo espectro é T_1 . Como $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(A/n(A))$ são homeomorfos, se provarmos que este último é T_2 , então o primeiro também o será. Demonstraremos que $A/n(A)$ é regular, o que é suficiente.

Sendo $\varphi: A \rightarrow A/n(A)$ o homomorfismo canônico, então $\varphi^{-1}(\bar{M}) = M$ é um ideal maximal em A , para todo ideal maximal $\bar{M}$ em $A/n(A)$ (pois sendo $\text{Spec}(A)$ um espaço T_1 os ideais primos em A são maximais). Ainda devido à observação entre parênteses, podemos afirmar que M é um ideal minimal no conjunto dos ideais primos de A . Logo (corolário - propr. 1-7), $\forall a \in A, \exists s \in A - M$ e $\exists k > 0$ ($k \in \mathbb{Z}$) de forma que $a^k s = 0$.

Lembremos, contudo, que $(A/n(A))_{\bar{M}}$ é um anel local cujo único ideal maximal é $I = \left\{ \frac{\bar{a}}{\bar{r}} : \bar{a} \in \bar{M} \right\}$ ($\bar{r} \in A/n(A) - \bar{M}$). De $\bar{a} \in \bar{M}$, segue-se que $a \in M \subset A$. Logo $a^k s = 0$, nas condições já enunciadas. Daí $\bar{a}^k \bar{s} = \bar{0}$. Se $\bar{s} \in \bar{M} = \varphi(M)$, então $\bar{s} = \varphi(x)$, $x \in M$. Mas $\bar{s} = \varphi(s)$, onde $s \in A - M$. Logo $\varphi(x) = \varphi(s) \Rightarrow \varphi(x - s) = \bar{0} \Rightarrow x - s \in n(A) \Rightarrow x - s \in M \Rightarrow s \in M$. Absurdo. Então $\bar{s} \in A/n(A) - \bar{M}$.

Mas se $\bar{a}^k \bar{s} = \bar{0}$, então $(\bar{a} \bar{s})^k = \bar{0}$. Logo $\bar{a} \bar{s} \in n(A/n(A)) = (\bar{0})$. Assim, $\bar{a} \bar{s} = \bar{0}$ o que acarreta que $\frac{\bar{a}}{\bar{r}} = 0, \forall \frac{\bar{a}}{\bar{r}} \in I$. Sendo nulo o único ideal maximal de $(A/n(A))_{\bar{M}}$, então este anel é corpo. A proposição 3-2 garante, então, que $A/n(A)$ é regular. #

Corolário. Seja A um anel cujos ideais primos são maximais. Então $\text{Spec}(A)$ é regular (um ponto e um fechado que não o contem estão contidos em abertos disjuntos) e normal (fechados disjuntos estão contidos em abertos disjuntos).

Demonstração:

Se todo ideal primo de A é maximal então $\text{Spec}(A)$ é T_2 . Como $\text{Spec}(A)$ é compacto, então $\text{Spec}(A)$ é regular e normal. $\#$

§ 2º | ANÉIS NOETHERIANOS

1. CARACTERIZAÇÃO - PROPRIEDADES

Um anel A é, obviamente, um A -módulo. Vistas as coisas assim, é evidente que os sub-módulos de A são exatamente os ideais em A . Dizemos que um anel A é um anel noetheriano se, como A -módulo, ele é um módulo noetheriano.

Proposição 3-8. Um anel A é noetheriano se, e somente se, todo ideal de A é de tipo finito.

Demonstração:

($\implies$) Seja I um ideal em A e tomemos $x_1 \in I$. Se $I =$

$= (x_1)$, ponto final. Do contrário, seja $x_2 \in I - (x_1)$. Então $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subset I$. Como uma seqüência de ideais em A não pode ser estritamente crescente, então $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ de modo que $I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

($\Leftarrow$) Seja $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ uma seqüência de ideais em A . Então $I = \bigcup_{r=1}^{\infty} I_r$ é, também, um ideal em A . Logo existem $y_1, \dots, y_n \in A$ tais que $I = (y_1, \dots, y_n)$. Existirá então um $s \geq 1$ de forma que $y_1, y_2, \dots, y_n \in I_s$. Portanto $I = I_s$ e daí $I_s = I_{s+1} = \dots$.
#

Nota. Do que foi visto acima podemos tirar a seguinte conclusão: num anel noetheriano A toda seqüência $P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \dots$ de ideais primos é finita. Se uma tal seqüência é formada de $n+1$ ideais distintos diremos que ela tem comprimento n . A dimensão de um anel noetheriano é, por definição, o supremo do conjunto dos comprimentos acima definidos.

Definição. Um ideal I de um anel A se diz irredutível se não existirem ideais J_1 e J_2 em A de maneira que $I \subsetneq J_1$, $I \subsetneq J_2$ e $I = J_1 \cap J_2$.

Proposição 3-9. Num anel noetheriano todo ideal irredutível é primário.

Demonstração:

Suponhamos que exista um ideal irredutível I no anel noetheriano A que não seja primário. Então $\exists a, b \in A$ tais que $ab \in I$,



$a \notin I$ e $b^m \notin I$, $\forall m \geq 1$ ($m \in \mathbb{Z}$).

Indiquemos por $I_r = \{x \in A: x b^r \in I\}$ ($r = 1, 2, \dots$). É imediato que cada I_r é um ideal em A e que $I \subsetneq I_1 \subset I_2 \subset \dots$ ($I \subsetneq I_1$ porque $a \in I_1$ e $a \notin I$). Logo, $\exists k \geq 1$ tal que $I_k = I_{k+1} = \dots$

O ideal $J = I + (b^k)$ contém I propriamente porque $b^{k+1} = 0 + b \cdot b^k \in J$ e $b^{k+1} \notin I$. Logo $I \subset I_1 \cap J$. Tomemos agora $x \in I_1 \cap J$. Logo $x = i + cb^k$, por x estar em J . Mas $x \in I_1 \Rightarrow xb = ib + cb^{k+1} \in I \Rightarrow cb^{k+1} = xb - ib \in I \Rightarrow c \in I_{k+1} = I_k \Rightarrow cb^k \in I$. Voltando à igualdade $x = i + cb^k$, concluímos que $x \in I$. Logo $I_1 \cap J = I$. Isto mostra que I não é irreduzível. Absurdo. $\#$

Proposição 3-10. Num anel noetheriano A , todo ideal I é a intersecção de um número finito de ideais primários.

Demonstração:

Basta provar que todo ideal de A é a intersecção de um número finito de ideais irreduzíveis.

Seja I um ideal que não satisfaz a tese. Logo I não é irreduzível. Então existem ideais J_1 e J'_1 em A de modo que $I = J_1 \cap J'_1$, com $I \subsetneq J_1$ e $I \subsetneq J'_1$. Devido à suposição sobre I , então ou J_1 não é irreduzível ou J'_1 não é irreduzível. Supondo J_1 , então $J_1 = J_2 \cap J'_2$ com $J_1 \subsetneq J_2$ e $J_1 \subsetneq J'_2$. Assim teremos $I \subsetneq J_1 \subsetneq J_2 \subsetneq \dots$ o que é absurdo. $\#$

Nota. Se $I = J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_n$, onde cada J_i é primário, temos aí o que se chama uma representação primária do ideal I . Se

além disso ocorrer que: (a) dois ideais distintos quaisquer da representação têm radicais distintos; (b) nenhum dos ideais da representação contém a intersecção dos demais, então a representação se diz irredundante. É óbvio que de uma representação primária de I sempre se pode obter uma representação irredundante. Basta observar que uma intersecção finita de ideais P-primários (de radical P) é um ideal P-primário.

Proposição 3-11. Para todo ideal I num anel noetheriano A , existe $n \geq 1$ tal que $(r(I))^n \subset I$.

Demonstração:

Suponhamos $r(I) = (x_1, x_2, \dots, x_s)$. Então existem inteiros $m_1, m_2, \dots, m_s$ de modo que $x_i^{m_i} \in I$ ($1 \leq i \leq s$). Como $(r(I))^n$ é gerado pelos produtos $x_1^{\ell_1} \cdot x_2^{\ell_2} \dots x_s^{\ell_s}$, onde $\ell_1 + \dots + \ell_s = n$ e $\ell_i \geq 0$, tomando $n = m_1 + \dots + m_s - (s - 1)$ (ou maior) cada um desses produtos estará em I . Logo $(r(I))^n \subset I$. #

Corolário I. O nilradical de um anel noetheriano é nilpotente para a multiplicação.

Demonstração:

Basta fazer $I = (0)$ na demonstração anterior. #

Corolário II. Todo ideal de um anel noetheriano contém um produto de ideais primos.

Demonstração:



$(0) = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$, onde cada Q_i é primário. Logo $r(0) = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_s$, onde $P_i = r(Q_i)$. Então $n(A) = r(0) \supset P_1 \cdot P_2 \dots P_s$. Supondo $(n(A))^r = (0)$, então $(0) \supset (P_1 \cdot P_2 \dots P_s)^r$.

Como todo ideal contém o ideal nulo, então o corolário está provado. #

2. OBSERVAÇÕES INICIAIS SOBRE O ESPECTRO DE UM ANEL NOETHERIANO

O espectro de um anel noetheriano pode ou não ser conexo. Os anéis principais são noetherianos (seus ideais são de tipo finito) cujo espectro é conexo, pois um anel principal é um anel de integridade. Os anéis Z_{2m} (m ímpar, $m > 1$) são obviamente noetherianos. Como porém, neste caso $m^2 - m \equiv 0 \pmod{2m}$, então $m^2 = \bar{m}$. Havendo elementos idempotentes não triviais em Z_{2m} , então $\text{Spec}(Z_{2m})$ não é conexo.

O axioma T_D também pode ou não se verificar no espectro dos anéis noetherianos. No anel Z , por exemplo, não se verifica conforme já vimos. Num corpo K , que é também trivialmente noetheriano, é evidente que se verifica, uma vez que $\text{Spec}(K)$ é finito.

Quanto ao axioma T_1 (ou T_2), o mesmo se pode dizer. O espectro de um anel principal (que não seja corpo) não satisfaz o axioma pois (0) é primo, neste caso, e não é maximal. Por outro lado os anéis com um número finito de ideais têm espectros T_1 , pois



seus ideais são todos maximais conforme já vimos.

Por último, a irredutibilidade pode ou não, também, se verificar no espectro dos anéis noetherianos. Os anéis de integridade noetherianos se enquadram no caso afirmativo, já que (0) é primo. Um anel finito, por outro lado, é noetheriano e seu espectro é T_2 . Logo não é irredutível seu espectro, a não ser quando é unitário.

3. O ESPECTRO DE UM ANEL NOETHERIANO - PROPRIEDADES

Um espaço topológico X se diz espaço noetheriano se toda sequência crescente de abertos de X for estacionária. Ou, o que é equivalente, toda família de abertos de X contém um aberto maximal.

Proposição 3-12. São equivalentes para o espectro X de um anel A as afirmações:

- a) X é noetheriano;
- b) Todo sub-conjunto de X é compacto;
- c) Todo aberto de X é compacto.

Demonstração:

$(a) \implies (b)$. Seja Y um sub-conjunto de X e $\mathcal{F} = (X_{a_r})_{r \in L}$ um recobrimento de Y por abertos básicos. Sendo $\mathcal{F}'$ a família das reuniões finitas de membros de $\mathcal{F}$ indiquemos por M um elemento maximal de $\mathcal{F}'$. Então $M = \bigcup_{r \in L} X_{a_r}$.

Com efeito, se $M \subsetneq \bigcup_{r \in L} X_{a_r}$, então $\exists p \in \bigcup_{r \in L} X_{a_r}$, tal que $p \notin M$. Logo $\exists k \in L$ de modo que $p \in X_{a_k}$. Como $X_{a_k} \cup M \in \mathcal{F}'$ então

$M = X_{a_k} \cup M$, ou seja, $X_{a_k} \subset M$. Absurdo. Logo Y é compacto.

(b) $\implies$ (c). Imediato.

(c) $\implies$ (a). Seja $0_1 \subset 0_2 \subset 0_3 \subset \dots$ uma sequência de abertos de X . Então $0 = \bigcup_{r \geq 1} 0_r$ é aberto e é recoberto por essa sequência. Logo, $\exists r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N} : 0_{r_1} \cup 0_{r_2} \cup \dots \cup 0_{r_n} = 0$. Tomando $m = \max \{r_1, \dots, r_n\}$, então $0 = 0_m$. Como $0_m \subset 0_{m+1} \subset \dots \subset 0 = 0_m$, então $0_m = 0_{m+1} = \dots$ e isto mostra que a sequência dada é estacionária. #

Obs.: É óbvio que as condições acima são equivalentes em um espaço topológico qualquer.

Proposição 3-13. Se A é um anel noetheriano, então $\text{Spec}(A)$ é um espaço noetheriano.

Demonstração:

Suponhamos que exista uma sequência de abertos de $\text{Spec}(A)$ assim: $0_1 \subsetneq 0_2 \subsetneq \dots$. Então, para todo $r \geq 1$, existe $X_{a_r} \subset 0_r$ de forma que

$$X_{a_1} \subsetneq X_{a_1} \cup X_{a_2} \subsetneq \dots$$

Logo: $V(a_1) \supsetneq V(a_1) \cap V(a_2) \supsetneq \dots$ e, então,

$$V(a_1) \supsetneq V((a_1, a_2)) \supsetneq \dots$$

Como porém $(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \dots$ e A é noetheriano, então $\exists t \geq 1$ de forma que

$$(a_1, \dots, a_t) = (a_1, \dots, a_t, a_{t+1}) = \dots$$

Portanto



$$V((a_1, \dots, a_t)) = V((a_1, \dots, a_t, a_{t+1})) = \dots$$

o que é absurdo.

Proposição 3-14. Seja A um anel noetheriano e booleano. Então $F \subset \text{Spec}(A)$ é fechado se, e somente se, F é um aberto básico.

Demonstração:

$$(\Leftarrow) \quad F = X_a \implies F = V(a-1) \implies F \text{ é fechado.}$$

$(\Rightarrow)$ Seja $F \subset \text{Spec}(A)$ um fechado. Então $\exists$ um ideal I em A tal que $I = (a_1, \dots, a_r)$ e $V(I) = F$. Logo $F = V(I) = V(a) = X_{a-1}$ onde a é um gerador de I . $\#$

Proposição 3-15. O espectro de um anel noetheriano e subdiretamente irredutível é um espaço irredutível.

Demonstração:

Provaremos que $n(A) = \text{Ann}(\hat{A})$ o que é suficiente pois este último ideal é primo.

Suponhamos que exista $x \in \text{Ann}(\hat{A})$ tal que $x \notin n(A)$. Então $x, x^2, \dots \neq 0$. Supondo $\hat{A} = (c)$, segue-se que $c \in (x^n)$, $\forall n \geq 1$. Logo, $\forall n \geq 1$, $\exists y_n \in A$ tal que $c = x^n \cdot y_n$. Consideremos os ideais $I_k = \text{Ann}(x^k)$, $\forall k \geq 1$. É evidente que $I_1 \subset I_2 \subset \dots$.

Contudo $y_n \in I_{n+1}$ porque $y_n \cdot x^{n+1} = x(y_n x^n) = xc = 0$ e $y_n \notin I_n$ pois $y_n \cdot x^n = c \neq 0$. Isto para todo $n \geq 1$. Logo $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$

Absurdo. Logo $\text{Ann}(\hat{A}) \subset n(A)$ e, então, vale a igualdade $\text{Ann}(\hat{A}) = n(A)$. $\#$

§ 3º | ANÉIS DE DEDEKIND

1. CONCEITUAÇÃO

Um anel de Dedekind é, por definição, um anel de integridade noetheriano, de dimensão um, no qual todo ideal primário ^{ph} é potência de um ideal primo.

Exemplo: São importantes anéis de Dedekind, os anéis principais. Nestes um ideal P ⁽⁰⁾ é primo se, e somente se, $P = (p)$, onde $p \in A$ é irreduzível. E um ideal Q ^{NÃO TRIVIAL} é primário se, e somente se, $Q = (p^m) = (p)^m$, onde p é irreduzível e $m \geq 1$.

Proposição 3-16. Num anel de Dedekind A todo ideal não ^{TRIVIAL} nulo é um produto de ideais primos.

Demonstração:

Para todo ideal I de A existe uma decomposição primária irredundante $I = \bigcap_{r=1}^n Q_r$. Logo, $i \neq j \Rightarrow r(Q_i) \neq r(Q_j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Sendo porém maximal todo ideal primo não nulo de A :

$i \neq j \Rightarrow r(Q_i) + r(Q_j) = (1) \Rightarrow r(Q_i + Q_j) = r(r(Q_i) + r(Q_j)) = r((1)) = (1) \Rightarrow Q_i + Q_j = (1) \Rightarrow Q_i$ e Q_j são co-primos $\Rightarrow I = \bigcap_{i=1}^n Q_i = \prod_{i=1}^n Q_i$. Como cada ideal primário é potência de um primo, a proposição fica provada. #

Obs.: É possível provar que a fatoração de um ideal não nulo de um anel ~~noetheriano~~ ^{de Dedekind} num produto de ideais primos é única. Todavia não precisaremos deste fato aqui.

2. O ESPECTRO DE UM ANEL DE DEDEKIND

De início observemos que decorre da definição de Anel de Dedekind que o espectro destes anéis é conexo mas não é T_1 e, portanto, não é T_2 .

Proposição 3-17. Seja A um anel de Dedekind. Se $X = \text{Spec}(A)$ e $F \subset X$, então F é fechado se, e somente se, $F = \emptyset$, $F = X$ ou F é finito e $(0) \notin F$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $F \subset X$ um fechado. Suponhamos $F \neq \emptyset$ e $F \neq X$. Então existe um ideal não trivial I tal que $F = V(I)$. Logo, existem $P_1, \dots, P_r \in X$ (nenhum deles nulo) de forma que $I = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_r$. Então $V(I) = V(P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_r) = V(P_1) \cup \dots \cup V(P_r) = \{P_1\} \cup \dots \cup \{P_r\} = \{P_1, \dots, P_r\}$, pois cada P_i é maximal.

($\Leftarrow$) Se $F = \{P_1, \dots, P_r\}$ é um fechado e $(0) \notin F$, então é óbvio que $V(P_1 \dots P_r) = F$. Logo F é fechado. #

Demonstração:

Corolário. O espectro X de um anel de Dedekind é um espaço T_D se, e somente se, X é finito.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Já provado genericamente.

($\Rightarrow$) Suponhamos X infinito e consideremos o ideal primo $P = (0)$. Se F é um fechado que contém P , então $F = V(I)$, onde I é um ideal tal que $(0) \supset I$. Logo $I = (0)$ e portanto $F = X$. Por outro lado, se $X_b \ni (0)$ então $b \neq 0$. Se b é inversível, então $X_b = X$ e daí $X_b \cap F = X \neq \{P\}$. Se b não é inversível, então $(b) = P_1 \dots P_r$ ($P_i \in X$, $P_i \neq (0)$). Logo $V(b) = \{P_1, \dots, P_r\}$ e $X_b = X - \{P_1, \dots, P_r\}$. Portanto $X_b \cap F = X_b \cap X = X - \{P_1, \dots, P_r\} \neq \{P\}$. #

Obs.: 1) Se I é um ideal não nulo e $I = P_1 \dots P_r = P'_1 \dots P'_s$ (P_i e P'_i primos), então $V(I) = \{P_1, \dots, P_r\} = \{P'_1, \dots, P'_s\}$. Isto mostra que os fatores na decomposição de I são os mesmos.

2) Seja X o espectro de um anel de Dedekind. Se Y é um sub-espaço de X , então um sub-conjunto U de Y será fechado em Y se, e somente se, $U = \emptyset$, $U = Y$ ou U é finito e $(0) \notin U$. Isto é uma consequência imediata da proposição anterior e dá ensejo ao resultado a seguir.

Proposição 3-18. Todo sub-conjunto Y do espectro X de um anel de Dedekind tal que $(0) \in Y$ é conexo por caminhos.

Demonstração:

Se $Y = \{(0)\}$ é imediato. Em caso contrário, tomemos $P, Q \in Y$, $P \neq Q$. Definamos $f: [0,1] \rightarrow Y$ da seguinte maneira: $f(0) = P$, $f(1) = Q$ e $f(t) = (0)$, $\forall t \neq 0,1$. Seja F um fechado em Y . Então: (a) $Y = F \Rightarrow f^{-1}(F) = [0,1]$; (b) $F = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(F) = \emptyset$ e (c) $F = \{P_1, \dots, P_r\}$ com $P_i \neq (0)$. Neste caso

$$P \in F \text{ e } Q \notin F \Rightarrow f^{-1}(F) = \{0\}$$

$$P \notin F \text{ e } Q \in F \Rightarrow f^{-1}(F) = \{1\}$$

$$P \in F \text{ e } Q \in F \Rightarrow f^{-1}(F) = \{0,1\}$$

$$Q \notin F \text{ e } P \notin F \Rightarrow f^{-1}(F) = \emptyset.$$

Em todos os casos possíveis a imagem inversa de um fechado de Y é um fechado em $[0,1]$. Logo f é contínua. #

Corolário. Seja A um anel de Dedekind. Então: (a) $\forall Y \subset \text{Spec}(A)$, $(0) \in Y \Rightarrow Y$ é conexo; (b) Todo aberto de $\text{Spec}(A)$ é conexo por caminhos (e portanto conexo). #

Notas:

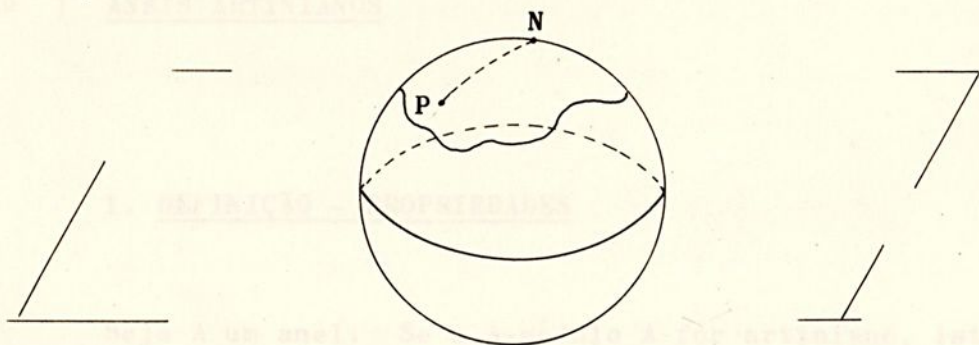
(1) Como num anel de Dedekind é primo o ideal (0) , então o espectro de tais anéis é sempre irredutível.

(2) Como os abertos do espectro de um anel de Dedekind A são o $\emptyset$, o $\text{Spec}(A)$ e os conjuntos tais como $G = \text{Spec}(A) - \{P_1, \dots, P_r\}$, onde $P_i \in \text{Spec}(A)$ e $P_i \neq (0)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), então toda

seqüência de ideais de $\text{Spec}(A)$ contém uma sub-seqüência convergente, isto é, $\text{Spec}(A)$ é sequencialmente compacto.

Exemplos:

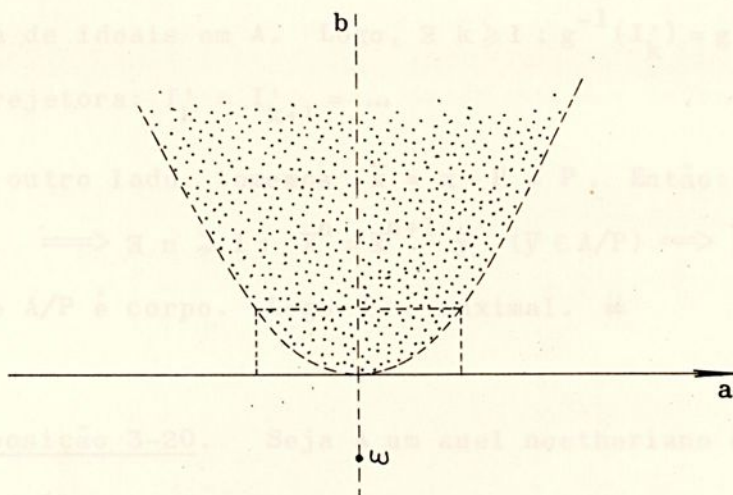
1) O anel $C[X]$ é um anel de Dedekind; seus ideais primos são, além do (0) , os ideais gerados pelos elementos da coleção $\{X+u; u \in C\}$. Sendo $u \mapsto X+u$ uma bijeção, podemos identificar o espectro de $C[X]$ com um plano mais um "ponto no infinito", este representando o ideal (0) . Como um plano e uma superfície esférica, sem o polo norte, são equipotentes, então uma superfície esférica completa é homeomorfa ao espectro de $C[X]$. Nesta representação os fechados não triviais são os conjuntos finitos de pontos da superfície esférica que não contêm o polo norte. Além disso, todo ponto da superfície esférica "está ligado" por um "caminho" ao polo norte.



$$f: [0,1] \rightarrow Y; \quad f(0) = P, \quad f(t) = (0), \quad \forall t \neq 0.$$

2) No anel de Dedekind $A = \mathbb{R}[X]$ os ideais primos são o (0) e os gerados por polinômios da coleção $\{X+u; u \in \mathbb{R}\}$ ou da coleção $\{X^2 + aX + b; a^2 - 4b < 0\}$. Então $\text{Spec}(\mathbb{R}[X])$ é homeomorfo ao sub-conjunto do plano $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2; \frac{b}{a^2} = 0 \vee a^2 - 4b < 0\} \cup \{\omega\}$,

onde ω é um ponto qualquer do plano, distinto dos demais de V , dotando V da topologia em que os fechados não triviais se definem como no exemplo anterior.



Proposição 3-20. Seja A um anel artiniano de dimensão zero. Então A é artiniano.

Demonstração.

§ 42 | ANÉIS ARTINIANOS

1. DEFINIÇÃO - PROPRIEDADES

Seja A um anel. Se o A -módulo A for artiniano, isto é, se toda seqüência $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ de ideais em A for estacionária, diremos que A é um anel artiniano.

Proposição 3-18. Todo ideal primo de um anel artiniano é maximal.

Demonstração:



Seja P um ideal primo de A . Então A/P é um anel de integridade. Além disso é artiniano, pelo seguinte:

Seja $I'_1 \supset I'_2 \supset \dots$ uma seqüência de ideais em A/P . Sendo $g: A \rightarrow A/P$ o homomorfismo canônico, então $g^{-1}(I'_1) \supset g^{-1}(I'_2) \supset \dots$ é uma seqüência de ideais em A . Logo, $\exists k \geq 1: g^{-1}(I'_k) = g^{-1}(I'_{k+1}) = \dots$. Sendo g sobrejetora: $I'_k = I'_{k+1} = \dots$.

Por outro lado, tomemos $\bar{x} = x + P \notin P$. Então:
 $(\bar{x}) \supset (\bar{x}^2) \supset \dots \implies \exists n \geq 1: \bar{x}^n = \bar{x}^{n+1} \cdot \bar{y} \quad (\bar{y} \in A/P) \implies \bar{1} = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Isto mostra que A/P é corpo. Logo P é maximal. $\#$

Proposição 3-20. Seja A um anel noetheriano de dimensão zero. Então A é artiniano.

Demonstração.

Já sabemos que existem ideais primos em A (logo maximais) $M_1, \dots, M_r$ de modo que $M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_r = (0)$. Fazendo-se $M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_i = N_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$), então cada N_{i-1}/N_i é um A -módulo e, também, um espaço vetorial sobre A/M_i , desde que se defina o "produto por um escalar" assim: $\forall x \in N_{i-1}, \forall a \in A \implies (a + M_i)(x + N_i) = ax + N_i$. Em virtude disto, os A -sub-módulos de N_{i-1}/N_i são os sub-espacos de N_{i-1}/N_i , sobre A/M_i , e vice-versa. Consideremos as seqüências exatas:

$$(0) \rightarrow M_1 \rightarrow A \rightarrow A/M_1 \rightarrow (0)$$

$$(0) \rightarrow M_1 M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M_1/M_1 M_2 \rightarrow (0)$$

$$(0) \rightarrow M_1 \dots M_r \rightarrow M_1 \dots M_{r-1} \rightarrow M_1 \dots M_{r-1}/M_1 \dots M_r \rightarrow (0).$$

O fato de A ser noetheriano acarreta que (propr. 1-26) $M_1 \dots M_{r-1}/M_1 \dots M_r$ também o é. Passando a olhar cada N_{i-1}/N_i como espaço vetorial sobre A/M_i , lembrando que seus sub-espacos são os seus A -sub-módulos e observando que para um espaço vetorial são equivalentes as condições "artiniano" e "noetheriano", então, ainda devido à proposição citada, podemos dizer que A é artiniano. #

Obs.: Vale a recíproca: Se A é artiniano, então A é noetheriano e tem dimensão zero.

2. O ESPECTRO DE UM ANEL ARTINIANO

Proposição 3-21. O espectro de um anel artiniano é finito e discreto.

Demonstração:

Se fosse infinito, existiria uma sequência $(P_1, P_2, \dots, P_r, \dots)$ de ideais primos de A tais que: $i \neq j \Rightarrow P_i \not\subset P_j$ ($i, j = 1, 2, \dots$). Então $P_1 \supset P_1 \cap P_2 \supset \dots$

Logo, $\exists t \geq 1$ tal que $P_1 \cap \dots \cap P_t = P_1 \cap \dots \cap P_t \cap P_{t+1} = \dots$.
 Onde $\forall P_j \notin \{P_1, \dots, P_t\} \Rightarrow P_j \supset P_1 \cap \dots \cap P_t \Rightarrow \exists i, 1 \leq i \leq t : P_j = P_i$
 (pois cada P_r é maximal). Absurdo.

Sendo finito o $\text{Spec}(A)$ e cada $\{P\} \subset \text{Spec}(A)$ fechado, então este espaço é discreto. #



Proposição 3-22. Seja A um anel noetheriano. Se $\text{Spec}(A)$ for discreto, então A é artiniano.

Demonstração:

Se $X = \text{Spec}(A)$ for discreto, então $\{P\} \subset X$ é fechado, $\forall P \in X$. Logo P é maximal. Portanto A tem dimensão zero. #

Proposição 3-23. Seja A um anel artiniano e sub-diretamente irredutível. Então $n(A) = \text{Ann}(\hat{A})$ e $\text{Spec}(A) = \{\text{Ann}(\hat{A})\}$.

Demonstração:

Provemos de início que é irredutível o $\text{Spec}(A)$. Para tanto é suficiente mostrar que $\text{Ann}(\hat{A}) \subset n(A)$, conforme já vimos. Suponhamos que $\exists a \in \text{Ann}(\hat{A})$ tal que $a \notin n(A)$. Então: $(a) \supset (a^2) \supset \dots \Rightarrow \Rightarrow \exists n \geq 1 : a^n = r a^{n+1} \quad (r \in A) \Rightarrow a^n(1 - ra) = 0 \Rightarrow 1 - ra \in \text{Ann}(\hat{A})$ (pois $a^n \neq 0$) $\Rightarrow \forall x \in \hat{A}, x \neq 0, x(1 - ra) = 0$. Como porém $xa = 0$ (já que $a \in \text{Ann}(\hat{A})$), então $x = 0$. Absurdo. Logo $\text{Ann}(\hat{A}) = n(A)$.

Sendo $n(A) = \text{Ann}(\hat{A}) = M$ primo, então o $\text{Spec}(A)$ é irredutível. Mas um espaço discreto é irredutível se, e somente se, esse espaço for unitário. Logo $\text{Spec}(A) = \{M\}$. #

Proposição 3-24. Seja A um anel artiniano tal que todo ideal de A admite um gerador idempotente. Então o espectro de A é irredutível se, e somente se, A é um corpo.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Imediata.



($\implies$) Suponhamos $n(A) = (u)$, onde $u^2 = u$. Mas, $u \in n(A) \implies \exists i \geq 1 : u^i = 0$. Logo $u = 0$. Sendo discreto e irredutível o $\text{Spec}(A)$, então $\forall a \in A \implies X_a = \emptyset$ ou $X_a = X$. Tomando $a \neq 0$, então $X_a \neq \emptyset$ ($X_a = \emptyset \implies a \in n(A) \implies a = 0$). Logo $X_a = X$, isto é, a é inversível. #

BIBLIOGRAFIA

Obs.: São anéis que se enquadram nas hipóteses do teorema os anéis semi-simples, isto é, anéis artinianos cujo único ideal nilpotente é o ideal nulo.

1. ALLEN, M.P. and MAC DONALD, I.G. - Introduction to Commutative Algebra - Addison - Wesley Publishing Co. - 1969.
2. BOURBAKI, N. - Algèbre Commutative (Chapitre 1 - Modules Plats; Chapitre 2 - Localisation) - Hermann - Paris - 1961.
3. BOURBAKI, N. - Algèbre (Chapitre 8 - Modules et Anneaux Semi-Simples) - Hermann - Paris - 1958.
4. BOURBAKI, N. - Algèbre (Chapitre 1 - Algèbre Linéaire) - Hermann - Paris - 1962.
5. BOURBAKI, N. - Topologie Générale (Chapitre I - Structures Topologiques; Chapitre II - Structures Uniformes) - Hermann & Cie. Editeurs - Paris - 1951.
6. BOURBAKI, N. - Théorie des Ensembles (Fascicule de Résultats) - Hermann - Paris - 1958.
7. BURTON, D.W. - A First Course in Rings and Ideals - Addison - Wesley Publishing Co. - 1970.



BIBLIOGRAFIA

1. ATIYAH, M.F. and MAC DONALD, I.G. - Introduction to Commutative Algebra - Addison - Wesley Publishing Co. - 1969.
2. BOURBAKI, N. - Algèbre Commutative (Chapitre 1 - Modules Plats; Chapitre 2 - Localisation) - Hermann - Paris - 1961.
3. BOURBAKI, N. - Algèbre (Chapitre 8 - Modules e Anneaux Semi-Simples) - Hermann - Paris - 1958.
4. BOURBAKI, N. - Algèbre (Chapitre 2 - Algebre Lineaire) - Hermann - Paris - 1962.
5. BOURBAKI, N. - Topologie Générale (Chapitre I - Structures Topologiques; Chapitre II - Structures Uniformes) - Hermann & Cie. Editeurs - Paris - 1951.
6. BOURBAKI, N. - Theorie des Ensembles (Fascicule de Resultats) - Hermann - Paris - 1958.
7. BURTON, D.M. - A First Course in Rings and Ideals - Addison - Wesley Publishing Co. - 1970.



8. DUBLEIL, P. et JACOTIN, M.L.D. - Leçons D'Algèbre Moderne - Dunod - Paris - 1964.
9. GRAY, M. - A Radical Approach to Algebra - Addison - Wesley Publishing Co. - 1970.
10. GODEMENT, R. - Cours d'Algèbre - Hermann - Paris - 1963.
11. HERNSTEIN, I.N. - Topics in Algebra - Blabdel Publishing Co. - 1964.
12. GROTHENDIECK, A. - Éléments de Geometrie Algébrique - Paris - 1960.
13. LIMA, E.L. - Elementos de Topologia (Volumes I e II) - I.M.P.A. - Rio de Janeiro - 1969.
14. LIPSCHUTZ, S. - General Toplogy - Schaum Publishing Co. - New York - 1965.
15. MC COY, N.H. - Rings and Ideals - The Mathematical Association of America - 1947.
- 16 - MONTEIRO, L.H. - Algebra Multilinear (Notas de Aulas do Prof. J. L. Koszul) - São Paulo - 1964.
17. MONTEIRO, L.H. - Algebra Linear - São Paulo - 1962 (Apostila).
18. MONTEIRO, L.H. - Algebra M₀derna - Vol. II - S.Paulo - 1964 (Apostila).
19. SAMUEL, P. - Théorie Algébrique des Nombres - Hermann - Paris - 1967.



20. THRON, W.J. - Topological Structures - Holt, Rinehart and
Winston - New York - 1966.

21. WALL, C.T.C. - A Geometric Introduction to Topology - Addison -
Wesley Publishing Co. - 1972.

$U(A)$ Conjunto dos elementos invertíveis de anel A .

Δ Interseções dos ideais não nulos de anel A .

(a) Ideal gerado por a .

(E) Ideal gerado por E .

(a, I) Ideal gerado por a e I .

$\pi(A)$ Nilradical de anel A .

$j(A)$ Radical de Jacobson de anel A .

$\text{Ann}(I)$ Anulador de ideal I .

$r(I)$ Radical de ideal I .

E^c Complementar de E .

$\bar{C}_Y E$ Complementar de E em relação a Y .

A' Derivado de A .

$\bar{Y}$ Fecho de Y .

$A_1 \times A_2$ Produto direto externo dos anéis A_1 e A_2 .

$a \cdot I$ Classe lateral módulo I do elemento a .

A/I Anel quociente de A por I .

$S^{-1}A$ Anel das frações de A em relação a S .

A_P Anel das frações de A em relação a $A - P$.

$M_1 \oplus M_2$ Soma direta dos A -módulos M_1 e M_2 .

$M \otimes_A N$ Produto tensorial dos A -módulos M e N .

$S^{-1}M$ Módulo das frações do A -módulo M em relação a S .

M_P Módulo das frações do A -módulo M em relação a $A - P$.



TABELA DE ALGUNS SÍMBOLOS USADOS

$U(A)$	Conjunto dos elementos inversíveis do anel A .
$\hat{A}$	Intersecção dos ideais não nulos do anel A .
(a)	Ideal gerado por a .
(E)	Ideal gerado por E .
(a, I)	Ideal gerado por a e I .
$n(A)$	Nilradical do anel A .
$j(A)$	Radical de Jacobson do anel A .
$\text{Ann}(I)$	Anulador do ideal I .
$r(I)$	Radical do ideal I .
E^c	Complementar de E .
$\bigcup_Y E$	Complementar de E em relação a Y .
A'	Derivado de A .
$\bar{Y}$	Fecho de Y .
$\bigotimes_{i=1}^n A_i$	Produto direto externo dos anéis A_i .
$a + I$	Classe lateral módulo I do elemento a .
A/I	Anel quociente de A por I .
$S^{-1}A$	Anel das frações de A em relação a S .
A_P	Anel das frações de A em relação a $A - P$.
$M_1 \oplus M_2$	Soma direta dos A -módulos M_1 e M_2 .
$M \otimes_A N$	Produto tensorial dos A -módulos M e N .
$S^{-1}M$	Módulo das frações do A -módulo M em relação a S .
M_P	Módulo das frações do A -módulo M em relação a $A - P$.

$[x_1, x_2, \dots]$ Sub-espço gerado por $x_1, x_2, \dots$.
 $\text{Spec}(A)$ Espectro do anel A .
 X_a Coleção dos ideais primos de A que não contêm a .
 $V(E)$ Coleção dos ideais primos de A que contêm E .
 $k(Y)$ Intersecção dos ideais de Y .
 $\hat{f}$ Aplicação associada ao homomorfismo $f: A \rightarrow B$.
 l_E Aplicação idêntica do conjunto E .
 i Aplicação inclusão de I em A ($I \subset A$).
 $\text{Ker}(f)$ Núcleo do homomorfismo f .
 $\prod_{i=1}^n Q_i$ Produto dos ideais Q_i .
 $\prod_{i=1}^n x_i$ Produto dos elementos x_i .
 $\cong$ Isomorfismo, entre módulos (ou anéis).



