

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Um estudo do espaço de parâmetros em
mapeamentos bidimensionais discretos

Fábio Henrique da Costa

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO - SP

2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Fábio Henrique da Costa

Um estudo do espaço de parâmetros em mapeamentos bidimensionais discretos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

**Rio Claro - SP
2022**

C837e Costa, Fábio Henrique da
Um estudo do espaço de parâmetros em mapeamentos
bidimensionais discretos / Fábio Henrique da Costa. -- Rio
Claro, 2022
81 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

1. Espaços de parâmetros. 2. Mapeamentos
bidimensionais. 3. Sistemas não lineares. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo
autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Fábio Henrique da Costa

Um estudo do espaço de parâmetros em mapeamentos bidimensionais discretos

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exa-
tas do Câmpus de Rio Claro, da Univer-
sidade Estadual Paulista “Júlio de Mes-
quita Filho”, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Física

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

Prof. Dr. Rene Orlando Medrano Torricos

Prof. Dr. Silvio Luiz Thomaz de Souza

Rio Claro - SP, 20 de Julho de 2022

A todos que me incentivaram para chegar onde cheguei, vocs moram no meu coraço.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por possibilitar que eu chegasse a vivenciar este momento de minha vida e carreira.

A toda minha família, meus pais Márcio, Rita e minha irmã Beatriz, que sempre me apoiaram e fizeram de tudo para que eu chegasse até aqui.

A minha namorada Natália por sempre acreditar em mim nos momentos de alegria e tristeza, além do constante apoio durante esta jornada.

Ao meu orientador Professor Dr. Juliano Antônio de Oliveira por sempre apostar no meu potencial, além disso, por todas as conversas, grandes ensinamentos e tempo dedicado a auxiliar o meu crescimento como pesquisador e também como ser humano.

A todos os professores que passaram pela minha formação e possibilitaram me tornar o melhor aluno que poderia ser. Aos amigos e colegas pelos momentos de estudo, aprendizado e descontração.

Ao cluster computacional do grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear da Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro, por proporcionar agilidade na execução dos programas.

À UNESP pela oportunidade da realização do mestrado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, ao processo nº 2018/14685-9 da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - (FAPESP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq - 309649/2021-8, 303242/2018-3.

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível”

São Francisco de Assis

Resumo

Neste trabalho consideraremos uma família de mapeamentos dissipativos bidimensionais discretos descritos nas variáveis ângulo (θ) e ação (I) parametrizados por ϵ que controla a intensidade de não linearidade no sistema. Inicialmente, no modelo conservativo, observamos no espaço de fases um mar caótico ao redor de ilhas periódicas e limitado por um conjunto de curvas invariantes *spanning* para diferentes combinações dos parâmetros de controle. Para caracterizar as órbitas do sistema, usamos os expoentes de Lyapunov. Estendemos os nossos estudos introduzindo uma dissipação $\delta \in [0,1]$ no sistema. Se $\delta = 1$ recupera-se o mapeamento conservativo. Dada a escolha dos parâmetros de controle, a estrutura mista antes observada no sistema conservativo é aniquilada dando lugar ao surgimento de atratores caóticos que, por sua vez, puderam ser caracterizados de acordo com os expoentes de Lyapunov. Este comportamento caótico nos permitirá investigar um decaimento exponencial existente, tal qual foi descrito analiticamente. Por fim, construímos os espaços de parâmetros para o sistema dissipativo utilizando o cálculo do expoente de Lyapunov com o intuito de investigar as janelas de periodicidade. Em nossos estudos encontramos as estruturas conhecidas como *shrimps* e também outras classes de estruturas as quais buscamos investigar a organização. A partir disso, buscamos estender as nossas investigações recuperando o modelo *Bouncer* dissipativo a fim de explorar diferentes conjuntos e organizações estruturais em algumas janelas periódicas para este sistema.

Palavras-chave: Mapeamentos bidimensionais discretos, Atratores caóticos, Expoentes de Lyapunov, Espaços de parâmetros.

Abstract

In this work we will consider a family of discrete two-dimensional dissipative mappings described in the variables angle (δ) and action (I) parameterized by ϵ that controls the intensity of nonlinearity in the system. Initially, in the conservative model, we observe in the phase space a chaotic sea around periodic islands and limited by a set of invariant spanning curves for different combinations of the control parameters. To characterize the orbits of the system, we use the Lyapunov exponents. We extend our studies by introducing a dissipation $\delta \in [0,1)$ in the system. If $\delta = 1$, the conservative mapping is recovered. Given the choice of control parameters, the mixed structure previously observed in the conservative system is annihilated, giving rise to the appearance of chaotic attractors which, in turn, could be characterized according to the Lyapunov exponents. This chaotic behavior will allow us to investigate an existing exponential decay, as described analytically. Finally, we build the parameter spaces for the dissipative system using the calculation of the Lyapunov exponent in order to investigate the periodicity windows. In our studies we found the structures known as shrimps and also other classes of structures which we seek to investigate their organization. From this, we seek to extend our investigations by recovering the dissipative Bouncer model in order to explore different sets and structural organizations in some periodic windows for this system.

Keywords: Discrete two-dimensional mappings, Chaotic attractors, Lyapunov Exponents, Parameter spaces.

LISTA DE FIGURAS

1	O Atrator de Lorenz projetado no plano (a) z vs. x e (b) y vs. x com a condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ para os parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $b = 8/3$	4
2	Ilustração da seção e Poincaré. Figura retirada da referência[1].	5
1.1	Espaço de fase gerado pelo mapeamento (1.10) para o parâmetro de controle $\gamma = 1/2$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) $\epsilon = 10^{-2}$	11
1.2	Espaço de fase gerado pelo mapeamento (1.10) para o parâmetro de controle $\gamma = 1$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) $\epsilon = 10^{-2}$	12
1.3	Espaço de fase gerado pelo mapeamento (1.10) para o parâmetro de controle $\gamma = 3/2$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) $\epsilon = 10^{-2}$	13
1.4	x_0 e y_0 são condições iniciais vizinhas e δ_0 é uma distância infinitesimal.	14
1.5	Convergência dos expoentes de Lyapunov λ em função do número de iterações n para o modelo conservativo. Os parâmetros utilizados são: $\epsilon = 10^{-2}$ e $\gamma = 1/2$ e o valor médio obtido para o expoente de Lyapunov foi $\bar{\lambda} = 1.057 \pm 0.003$	17
1.6	Diagrama de convergência de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ positivo em (a) e negativo em (b) como função do parâmetro de controle $\gamma = 1/2$	18
1.7	Diagrama de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ positivo em (a) e negativo em (b) como função do parâmetro de controle $\gamma = 1$	19
1.8	Diagrama de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ positivo em (a) e negativo em (b) como função do parâmetro de controle $\gamma = 3/2$	19
2.1	Espaço de fase gerado pelo mapeamento (2.1) para o parâmetro de controle $\gamma = -1.0$, $\delta = 0.999$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 10$, (b) $\epsilon = 100$ e (c) $\epsilon = 1000$	22

2.2	Espaço de fase gerado pelo mapeamento (2.1) para o parâmetro de controle $\gamma = 1$, $\delta = 0.7$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 10^{-5}$, (b) $\epsilon = 10^{-4}$ e (c) $\epsilon = 10^{-3}$	23
2.3	Espaço de fase gerado pelo mapeamento (2.1) para o parâmetro de controle $\gamma = -1$, $\delta = 1$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 0.053$, (b) $\epsilon = 0.07$ e (c) $\epsilon = 0.08$	24
2.4	Curvas do comportamento dos expoentes de Lyapunov (a) positivo e (b) negativo para os parâmetros de controle $\epsilon = 10$, $\delta = 0.999$ e $\gamma = -1$. Em (c) a soma dos valores médios dos expoentes de Lyapunov λ_1 e λ_2	26
2.5	Atratores pontos fixos observado para o mapeamento (2.1) para os parâmetros de controle, $\epsilon = 0.15$ e $\delta = 0.998$ e $\gamma = -1$	27
2.6	Atratores pontos fixos observado com o aumento do parâmetro $\delta = 0.958$ para os mesmos parâmetros de controle, $\epsilon = 0.15$ e $\gamma = -1$	28
2.7	Decaimento para o atrator caótico: (a) comportamento de $(I \times n)$ para diferentes parâmetros ϵ , I_0 , δ e $\gamma = -1$ para todas as curvas. Em (b) sobreposição de todas as curva em uma única curva universal.	30
3.1	Espaço de parâmetros do mapa (2.1). Os domínios dos diferentes atratores estão identificados por diferentes cores.	33
3.2	Diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo da Fig. 3.1, evidenciando as estruturas periódicas.	34
3.3	Em (a) amplificação de um conjunto complexo obtido na Fig. 3.1. Em (b) representação de uma janela periódica no diagrama bidimensional de parâmetros. Em verde está representado o endoesqueleto, em preto as curvas de duplicação de período e em vermelho as curvas de bifurcação selá-nó. Figura retirada da referência [38].	35
3.4	Diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo da Fig. 3.3 (a), evidenciando as estruturas periódicas.	36
3.5	Aproximação da Fig. 3.3 (a) evidenciando as estruturas auto similares.	37
3.6	Diagrama isoperiódico evidenciando a periodicidade das estruturas analisadas na Fig. 3.5.	38
3.7	Em (a) ampliação de uma região no espaço de parâmetros colorida de acordo com o expoente de Lyapunov máximo e em (b) diagrama isoperiódico resultante da mesma região observada.	39
3.8	Em (a) diagrama das estruturas resultantes de tangências homoclínicas cúbicas mencionadas. Em (b) diagrama isoperiódico onde pode-se ver o que se conhece como estrutura <i>spring-area</i>	41
3.9	Diagrama das estruturas resultantes de tangências homoclínicas cúbicas mencionadas. Aqui se pode ver o que se conhece como estrutura <i>saddle-area</i>	42

3.10	Diagrama isoperiódico resultante do intervalo δ vs ϵ da Fig. 3.9.	43
3.11	Espaço de parâmetros evidenciando um conjunto de organização de estruturas do tipo <i>spring-area</i>	44
3.12	Diagrama isoperiódico correspondente a Fig. 3.11.	45
3.13	Em (a) diagrama evidenciando a simetria das estruturas em relação a $\delta = 0$. Já em (b), diagrama isoperiódico evidenciando a mesma simetria observada.	46
3.14	Espaço de parâmetros evidenciando estruturas imersas em região caótica para o parâmetro de controle $\gamma = 1$	48
3.15	Espaço de parâmetros evidenciando estruturas imersas em região caótica para o parâmetro de controle $\gamma = 1$	49
3.16	Em (a) diagrama isoperiódico evidenciando as diferentes estruturas que compõem uma região do espaço de parâmetros. Em (b) uma ampliação do mesmo conjunto de parâmetros δ vs ϵ para $\gamma = 1$	50
3.17	Diagrama do expoente de Lyapunov máximo evidenciando diferentes estruturas presentes no espaço de parâmetros utilizando $\gamma = 1$	51
3.18	Diagrama isoperiódico evidenciando diferentes estruturas que compõe uma mesma região do espaço de parâmetros utilizando $\gamma = 1$	52
3.19	Diagrama do expoente de Lyapunov máximo evidenciando uma cascata de estruturas <i>saddle-area</i> compondo uma mesma região do espaço de parâmetros, utilizando $\gamma = 1$	53
3.20	Diagrama isoperiódico para o mesmo conjunto de parâmetros da Figura 3.19 evidenciando os períodos de tal cascata de estruturas <i>saddle-area</i>	54
3.21	Estruturas <i>saddle-area</i> e <i>spring-area</i> observadas aos pares no espaço de parâmetros. Em (a) diagrama do expoente de Lyapunov máximo e em (b) diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo de parâmetros utilizando $\gamma = 1$	55
3.22	Diagrama evidenciando uma organização de estruturas <i>saddle-area</i> que evoluem no espaço de parâmetros utilizando $\gamma = 1$	56
3.23	Diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo de parâmetros da Fig. 3.22 com $\gamma = 1$	57
3.24	Diagramas do expoente de Lyapunov máximo evidenciando uma estrutura complexa e sua organização e evolução no espaço de parâmetros. Em (a) $\gamma = 0,5$, em (b) $\gamma = 0,75$, em (c) $\gamma = 0,8$ e em (d) $\gamma = 1$. Em todas as simulações utilizou-se $\gamma = 1$	58
3.25	Em (a) diagrama do expoente de Lyapunov máximo a partir da ampliação de uma janela periódica resultante da Figura 3.24 (d) onde $\gamma = 1$. Em (b) diagrama isoperiódico correspondente a mesma região.	59

3.26	Em (a) diagrama do expoente de Lyapunov máximo feito a partir da ampliação da Figura 3.25 evidenciando as diferentes estruturas compondo uma mesma janela periódica. Em (b) diagrama isoperiódico referente a mesma região.	60
3.27	Diagrama do expoente de Lyapunov máximo evidenciando estruturas complexas em diferentes formas e organizações no espaço de parâmetros para $\gamma = 1$	61
3.28	Diagrama isoperiódico evidenciando as estruturas complexas em diferentes formas utilizando o mesmo intervalo de parâmetros da Figura 3.27.	62

SUMÁRIO

Introdução	1
1 O modelo	8
1.1 A obtenção do mapeamento	8
1.2 Caso conservativo	10
1.3 Expoentes de Lyapunov e o sistema conservativo	13
2 O modelo dissipativo e suas propriedades	21
2.1 Caso dissipativo	21
2.2 Os Expoentes de Lyapunov e o sistema Dissipativo	25
2.3 O surgimento de atratores pontos fixos	27
2.4 Decaimento de órbitas para os atratores caóticos	28
3 Espaço de Parâmetros	32
3.1 Diagrama do espaço de parâmetros	32
3.2 Diagrama do espaço de parâmetros para o modelo <i>Bouncer</i> dissipativo . .	47
Considerações Finais e Perspectivas	63
Referências Bibliográficas	65

INTRODUÇÃO

No decorrer do desenvolvimento da ciência, a investigação acerca de problemas envolvendo sistemas dinâmicos vem despertando o interesse de vários autores nas últimas décadas, isso se deve ao fato de que muitos desses sistemas permitirem modelar matematicamente sistemas naturais. Os primeiros relatos, estudos e observações matemáticas que se tem das investigações a respeito de sistemas dinâmicos datam dos séculos XV e XVI e como particularidade, remetem a estudos relacionados a Mecânica Celeste [1, 2].

O físico francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) no ano de 1889 notou a existência de comportamentos complexos e instáveis em sistemas dinâmicos em seus estudos sobre órbitas planetárias. A partir do estudo do movimento dos três corpos celestes, Poincaré obteve em seus resultados movimentos irregulares com trajetórias variando rapidamente, uma sensibilidade aos dados iniciais que o impossibilitava obter uma previsão clara para tempos longos. Seus estudos respaldam ao que se conhece hoje, como comportamento caótico [2].

Também, não menos importante, podemos destacar a contribuição do matemático e físico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), no final do século XIX, mais precisamente em 1892, onde o mesmo contribui significativamente para análise de sistemas dinâmicos ao desenvolver uma poderosíssima ferramenta de análise de estabilidade através da sua teoria da estabilidade [2]. A partir dos estudos de Lyapunov, tanto sistemas lineares quanto não lineares puderam ser amplamente estudados, no que se refere a caracterização de sistemas que apresentam comportamento caótico cuja dinâmica pode ser quantificado através da análise de um “coeficiente característico”, hoje conhecido como “expoente de Lyapunov”.

Com a descoberta de sistemas sensíveis a condições iniciais, advindos dos resultados de Poincaré, estudos em dinâmica não linear e caos aumentaram muito ao longo das últimas décadas. Na década de 60, o meteorologista estadunidense Edward Norton Lorenz (1917-2008) descobre acidentalmente as consequências do caos determinístico através da

imprevisibilidade em sistemas dinâmicos não lineares. O que se acreditava é que o estudo de métodos lineares era suficiente para entender e formular respostas acerca da meteorologia [3]. Vale ainda ressaltar, que os dados dos experimentos de previsão meteorológica de Lorenz correspondiam a fatores naturais que eram coletados ao decorrer dos dias.

Mas, Lorenz em seus estudos, verificou que para intervalos curtos, ou seja, no decorrer de alguns poucos dias, os efeitos encontrados não eram de grande frivolidade mas, a longo prazo, os efeitos produziam resultados completamente diferentes. A natureza poderia até demonstrar sinais de ser bem comportada, porém, ela é muito sensível às condições iniciais. Essas descobertas causaram um grande impacto entre os cientistas o que evidenciou que a partir daí, investigar com métodos tradicionais já não era significativo, pois, pode-se dizer, que os mesmos já não refletiam as previsões experimentais e tornavam impossíveis a validação de uma teoria. Em síntese, a contribuição de Lorenz refletiu na descoberta acerca da sensibilidade às condições iniciais e essa contribuição foi a primeira ideia do que viria a ser conhecido como caos.

A dinâmica não linear tem sido por muito tempo investigada, embora o real entendimento de determinados processos não lineares tenha ocorrido nos últimos 40 anos devido ao desenvolvimento computacional, onde as simulações numéricas ficaram mais acessíveis e a partir disso, investigar detalhadamente as dinâmicas de sistemas não lineares ficou mais acessível. Em virtude desse desenvolvimento nota-se continuamente a abrangência da aplicabilidade do estudo numérico de fenômenos não-lineares em diversas áreas tanto da Ciência como também da Engenharia, aqui podemos destacar algumas delas, tais como: o estudo de circuitos elétricos, previsões relacionadas ao mercado financeiro, previsão do tempo, sistemas térmicos, dinâmicas de populações, evolução de epidemias, etc., ou seja, a grande versatilidade apresentada por essa teoria se expande de forma a enriquecer a literatura científica [4, 5, 6].

No que se refere a sistemas dinâmicos, torna-se imprescindível buscar entender sua definição e as propriedades que dizem respeito a essa classe de sistemas. Portanto, sistemas dinâmicos são assim ditos porque existe uma relação matemática que a partir de um estado configuracional em um determinado instante, caracterizado comumente como condição inicial do sistema, permite encontrar o estado em um instante de tempo posterior. Em outras palavras, são sistemas nos quais a evolução de suas variáveis de estado dependem do tempo como uma variável. Deve-se levar em consideração que tais sistemas podem apresentar algumas propriedades acerca de sua classificação, uma delas se refere a serem contínuos ou discretos. Quando utilizam o tempo como uma variável contínua, sendo representado por equações diferenciais cuja solução é conhecida como fluxo são ditos contínuos. São chamados discretos quando a utilizam a variável tempo de modo discreto e assim suas soluções são conhecidas como órbitas, tais quais, são obtidas através de iterações de um mapeamento [2, 7].

Além da categorização mencionada acima, onde tal sistema pode ser contínuo ou discreto, tais sistemas podem ser classificados como lineares e não lineares. Em um sistema dito linear, as equações que descrevem a dinâmica do sistema assumem potências de primeira ordem. Em contrapartida, sistemas não lineares são caracterizados por apresentar polinômios de grau diferente de um, do mesmo modo que podem apresentar formas descritas por funções seno, cosseno, exponencial, dentre outras diversas alternativas [1]. Na maioria dos casos, esses sistemas também possuem parâmetros de controles, estes por sua vez, desempenham um papel fundamental na evolução de um sistema, de modo que, podemos observar a ocorrência de caos, sensibilidade às condições iniciais e estabilidade.

Sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de forma discreta também são chamados de mapeamentos, ou simplesmente, mapas. Sua utilidade se reflete no âmbito do auxílio, compreensão e caracterização da evolução de um sistema dinâmico, pois, são mais simples para se fazer análise do que as equações diferenciais que lhes deram origem.

A medida que evoluímos as variáveis do sistema de investigação ao longo do tempo, a partir de um determinado estado inicial, então obtemos a partir de uma evolução dinâmica um conjunto de estados seguintes. A sequência cronológica desses estados recebe o nome de órbita, que fornece a dinâmica temporal de tal sistema sob determinada condição inicial. A partir da troca da configuração inicial, a evolução mostra um novo conjunto de estados distintos e conseqüentemente, outra órbita. Ao conjunto de todas as órbitas chamamos de espaço de fases [1].

Através do conhecimento do espaço de fases muitas particularidades relevantes da dinâmica de um determinado sistema podem ser observadas. Dependendo do sistema o espaço de fases caracteriza os comportamentos dinâmicos possíveis do sistema, tais como: comportamentos periódicos, quase periódicos ou até mesmo caóticos.

Como destaque, podemos exemplificar tais comportamentos dinâmicos através do sistema de Lorenz, constituído de um sistema com três equações não lineares e acopladas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = -xz + \rho x - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz. \end{cases} \quad (1)$$

onde $x, y, z \in \mathbb{R}$ e são variáveis nessas equações, x é proporcional à intensidade do movimento convectivo, enquanto y é proporcional à diferença de temperatura entre as correntes de fluido ascendente e descendente e, por sua vez, a variável z é proporcional à distorção do perfil de temperatura vertical, relativamente a um perfil linear. Também, em tal sistema, σ , ρ e b são parâmetros livres, mais especificamente, os parâmetros de controle do sistema. O parâmetro σ está relacionado ao número de Prandtl e está associado ao

número de difusividade de um fluido. Por outro lado, o parâmetro ρ está relacionado ao número de Rayleigh e associado à diferença de temperatura entre dois extremos de um fluido. Finalmente, o parâmetro b diz respeito a razão entre a altura e a largura do fluxo convectivo [3].

É possível observar a Fig. 1, tal qual ilustra o famoso “Atrator de Lorenz”, que a mesma provém das soluções do conjunto de equações dado pela Eq. (1). A fim de facilitar a compreensão de algumas definições a descrição de tal figura é de extrema importância, pois, se trata da evolução de uma órbita para o sistema mencionado. Os valores utilizados por Lorenz foram $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $b = 8/3$. Uma descrição completa acerca desse modelo pode ser encontrado na referência [3].

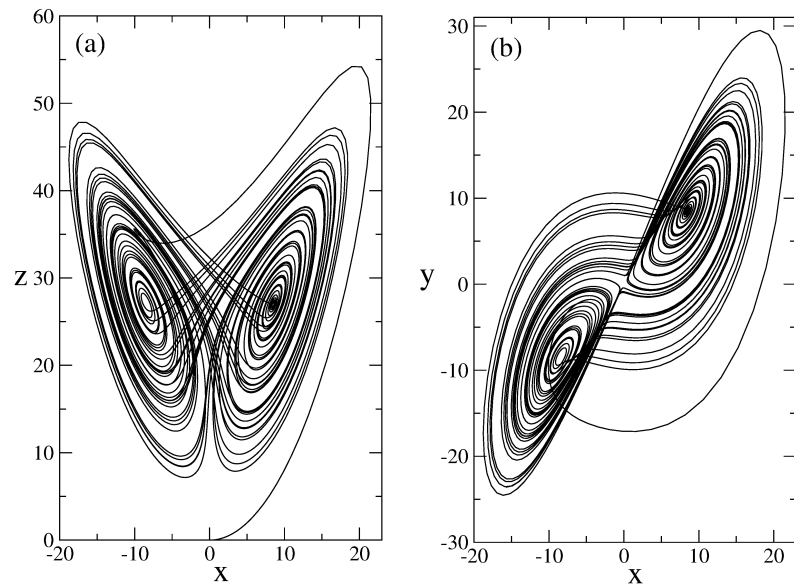


Figura 1: O Atrator de Lorenz projetado no plano (a) z vs. x e (b) y vs. x com a condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ para os parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $b = 8/3$.

Os sistemas Hamiltonianos constituem uma classe bastante importante no cenário científico, que descrevem a dinâmica de alguns sistemas físicos. O estudo da dinâmica a partir do estudo de tais sistemas é realizado através de um formalismo Hamiltoniano [8]. O que se pode dizer é que a dinâmica de um sistema Hamiltoniano é determinada por uma única função, a chamada Hamiltoniana, matematicamente dada por: $H(\vec{p}, \vec{q}, t)$ onde $\vec{p}$ é “momentum” e $\vec{q}$ é “posição” em que ambos vetores têm dimensão N . Chamamos de N o número de graus de liberdade do sistema. Utilizaremos as equações de Hamilton para chegarmos a equação do mapeamento de estudo, uma vez que com a utilização de equações discretas diminuimos ligeiramente o custo computacional.

Se tratando em graus de liberdade, sistemas com muitos graus de liberdade podem ser bastante difíceis de se tratar devido à dimensão do espaço de fases. No entanto, uma alternativa para investigar tais sistemas é interceptar o fluxo de soluções no espaço de fases utilizando uma superfície que “corta” o conjunto de soluções. Essa superfície é também conhecida como seção de Poicaré [1].

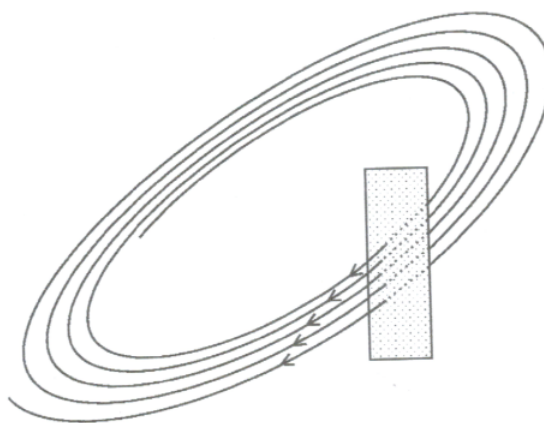


Figura 2: Ilustração da seção e Poincaré. Figura retirada da referência[1].

Como pode-se perceber através da Fig. 2 cada interseção do fluxo de soluções na superfície produz um ponto da seção de Poincaré com dimensão $N - 1$, desta forma, a sequência destes pontos pode ser descrita por um mapeamento discreto dado na forma de uma função $P(\vec{x}_k) = \vec{x}_{k+1}$ onde k pode ser considerado como o índice temporal discreto e o resultado em x_{n+1} é reutilizado em x_n para a próxima iteração, trazendo a ideia de uma relação de recorrência.

Com essa ideia atrelada ao sistema de investigação podemos observar diversas características importantes que afetam o mesmo, uma delas é se o sistema é conservativo ou não. Isso quer dizer que, se o sistema for conservativo, logo, poderá ser vislumbrado a preservação de volume no espaço de fases durante a evolução temporal do sistema, isto é, os pontos de um dado volume se movem e com o passar do tempo, estes pontos ocupam um volume que permanece inalterado. Em contrapartida, se durante a evolução temporal os pontos que ocupam um determinado volume se movem e, durante uma evolução temporal, eles ocupam um volume menor, então, logo se têm uma contração do volume no espaço de fases, quando isso ocorre temos um sistema dissipativo. Em sistemas dissipativos as trajetórias podem convergir para uma região limitada do espaço de fases, regiões estas conhecidas como sorvedouros. Quando o sistema atinge o sorvedouro, ele permanece nesta condição até que haja uma ação externa, que pode agir para tirá-lo desta região. Este conjunto de pontos em que as soluções convergem assintoticamente são denominados de atratores [1, 9].

Dependendo das condições do sistema tais atratores podem possuir determinados tipos de comportamentos, ou seja, ele pode ser um atrator pontual, tal qual é independente no tempo, um toro, que corresponde a um regime quase-periódico com n frequências fundamentais independentes, um atrator periódico ou ciclo limite, é um conjunto de valores para o qual o comportamento do sistema converge, exibindo um comportamento periódico (movimento regular), pode ser um atrator caótico, que apresenta alta sensibilidade às condições iniciais, aqui, podemos destacar o atrator de Lorenz visualizado de acordo com

a Fig. 1 [7].

Qualquer sistema dinâmico que descreva um sistema físico real, geralmente depende de um ou mais parâmetros. São os chamados parâmetros de controle do sistema. Um sistema dinâmico pode então ser pensado como uma função desses parâmetros de controle. Com efeito, o comportamento dinâmico do sistema pode ser modificado se o valor desses parâmetros for alterado. Com respeito a isso, os estudos sobre atratores e como são afetados quando o parâmetro de controle do sistema são variados recebeu atenção no decorrer dos anos [6, 7].

Existem ferramentas, como espaço de fases, diagrama de órbitas, análise de estabilidade para investigar o comportamento dinâmico de sistemas dinâmicos. Além deste métodos, outra forma de analisar o comportamento de um sistema dinâmico pode ser feita através do estudo do espaço de parâmetros. Esta forma de análise está totalmente relacionada com os parâmetros de controle do sistema. Para realizar este estudo uma ferramenta importante a ser utilizada é o expoente de Lyapunov, uma outra ferramenta utilizada para analisar o comportamento de um sistema dinâmico, a fim de classificar sua órbita como caótica ou não caótica, temática esta que será trabalhada na seção 1.3 deste texto.

A proposta deste trabalho é investigar algumas propriedades dinâmicas considerando uma família de mapeamentos bidimensionais discretos. Definido o mapeamento, o nosso foco será construir o espaço de parâmetros para analisar o comportamento do sistema dinâmico, mas, para isso, percorremos uma trajetória que possibilitará um melhor entendimento do leitor.

Para melhor compreender o que será tratado nesta monografia, será apresentada uma descrição de como foi dado a estruturação da mesma. No que segue este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 1 descreveremos o Sistema Hamiltoniano de estudo e estudar alguns aspectos da sua dinâmica. Para o problema conservativo, construímos o espaço de fase, calculamos sua matriz Jacobiana e depois determinamos os expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos.

Posteriormente, no capítulo 2, estudamos o caso dissipativo, construímos o espaço de fase para o mesmo, calculamos novamente sua matriz Jacobiana e determinamos os expoentes de Lyapunov evidenciando suas características. Além disso, mostramos também para o caso dissipativo que as estruturas mistas vistas no espaço de fase do modelo conservativo, quando adicionado dissipação, há uma contração na sua área e também há o surgimento de atratores caóticos ou periódicos e, além disso, dependendo da escolha dos parâmetros de controle este comportamento caótico permite investigar um decaimento de órbitas para atratores caóticos e a velocidade com que isso ocorre.

Já no Capítulo 3, além de todos processos investigativos para análise de sistemas caóticos é dado relevância para o estudo acerca do espaço de parâmetros bidimensional, utilizando o cálculo do expoente de Lyapunov. Através disso, propomo-nos investigar as janelas de periodicidade e pretendemos encontrar as estruturas conhecidas na literatura

como anzol, *shrimps*, entre outras terminologias e assim poder investigar a organização das mesmas. Não obstante, buscaremos realizar a mesma análise partindo de uma variação de um dos parâmetros de controle do sistema, recuperando o modelo *bouncer* dissipativo e, a partir dele, possivelmente, encontrar estruturas semelhantes as visualizadas e que possam corroborar com nossas perspectivas e com o estudo desenvolvido até o presente momento. Finalmente, de forma a concluir, faremos as conclusões finais e possíveis indicações para trabalhos futuros.

Cabe destacar que todas as simulações numéricas para a construção dos espaços de fase, espaços de parâmetros para o expoente de Lyapunov e espaços de parâmetros dos períodos, além dos outros diagramas esboçados no decorrer do texto foram computadas com linguagem de programação FORTRAN, em ambiente Linux. As figuras construídas foram executadas com o auxílio do programa Gnuplot.

CAPÍTULO 1

O MODELO

Este Capítulo é dedicado a apresentarmos o modelo do mapeamento que será o objeto de estudo desta monografia. Através do desenvolvimento do espaço de fases abordaremos algumas características importantes do modelo além de descrevermos sobre a conservação de área dos mesmos. Também, utilizamos os expoentes de Lyapunov a fim de verificar se o modelo realmente apresenta comportamento caótico.

1.1 A obtenção do mapeamento

Para a realização da discussão que será proposto consideramos um Hamiltoniano genérico levemente perturbado, o qual pode ser aproximado por uma Hamiltoniana da forma:

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2), \quad (1.1)$$

onde θ_i e I_i são variáveis ângulo-ação, sendo $i = 1, 2$. A parte integrável é representada por H_0 enquanto H_1 representa a parte não integrável. O parâmetro ϵ é um pré-fator que controla a transição da integrabilidade do sistema ($\epsilon = 0$), para não integrabilidade ($\epsilon \neq 0$). Dizemos que o sistema é integrável se temos tantas constantes de movimento quanto graus de liberdade. Se tal consideração for satisfeita, então o espaço de fases apresenta dinâmica regular e está confinado superfícies toroidais. Quando tal consideração não é satisfeita, então o sistema passa a ser dito não integrável, as superfícies toroidais são destruídas e surgem ilhas periódicas e o mar caótico que começam a coexistir no mesmo espaço de configurações [6].

Consideraremos um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade. Se este sistema for integrável, a sua Hamiltoniana H pode ser então escrita nas variáveis de ação e ângulo. Como tal Hamiltoniana é independente do tempo, logo, a energia do

sistema é constante e assim, a dimensão do espaço de fases pode ser reduzida de quatro para três variáveis dinâmicas. Desta maneira, pode-se então eliminar uma das variáveis, tal como I_2 e reescrever a Hamiltoniana sem esta variável. Diante de tais considerações e ainda fazendo o uso da seção de Poincaré no plano $I_1 \times \theta_1$ com θ_2 constante, podemos reduzir o fluxo que era tridimensional em um mapeamento bidimensional, que pode ser descrito na seguinte forma [6]:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + F(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \mod(2\pi) \end{cases} \quad (1.2)$$

onde F , h e p são assumidos como funções não lineares quaisquer de suas variáveis [10]. Vale ressaltar que o índice n corresponde a n -ésima iteração do mapeamento. Para que o mapa (1.2) preserve a área no espaço de fases, as funções $h(\theta_n, I_{n+1})$ e $p(\theta_n, I_{n+1})$ devem obedecer a algumas relações intrínsecas especiais. Essas relações são obtidas considerando que o determinante da matriz Jacobiana seja igual à unidade. A matriz Jacobiana J é descrita como:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

sendo os coeficientes da matriz J obtidos a partir das derivadas parciais em relação às variáveis dinâmicas. Tais derivadas são obtidas como:

$$j_{11} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{1}{1 - \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}}} \quad (1.4)$$

$$j_{12} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \quad (1.5)$$

$$j_{21} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = \left[\frac{\partial F(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \quad (1.6)$$

$$j_{22} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \left[\frac{\partial F(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \quad (1.7)$$

A partir dos elementos da matriz Jacobiana encontramos que seu determinante é dado por:

$$Det J = \frac{1 + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n}}{1 - \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}}} \quad (1.8)$$

Analisando o determinante, podemos concluir que a preservação do espaço de fase ocorre quando:

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0, \quad (1.9)$$

As funções F , h e p em síntese podem ser escolhidas conforme o objeto de investigação. Diferentes aplicações conhecidas podem ser encontradas na literatura considerando $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ e $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$, são elas:

- $F(I_{n+1}) = I_{n+1} + \xi I_{n+1}^2$, o mapa logístico *twist* [11];
- $F(I_{n+1}) = I_{n+1}$, o mapa de Taylor-Chirikov [12];
- $F(I_{n+1}) = \xi I_{n+1}$, com $\xi = \text{constante}$, o modelo *bouncer* [13];
- $F(I_{n+1}) = 2/I_{n+1}$, o modelo de Fermi-Ulam [14];
- $F(I_{n+1}) = \begin{cases} 4\xi^2(I_{n+1} - \sqrt{I_{n+1}^2 \xi^{-2}}), & \text{se } I_{n+1} > \xi^{-1} \\ 4\xi^2 I_{n+1}, & \text{se } I_{n+1} \leq \xi^{-1} \end{cases}$

com $\xi = \text{constante}$, o modelo Fermi-Ulam *bouncer* híbrido [15, 16].

Para o desenvolvimento deste trabalho, recorreremos ao caso em que $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$, $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(2\pi\theta_n)$ e $F(I_{n+1}) = \frac{1}{I_{n+1}^\gamma}$ para $\gamma > 0$ de onde partimos nossa investigação.

Na seção 1.2 será apresentada algumas características relacionadas ao comportamento conservativo. Na seção 2.1 dedicaremos a investigação do comportamento dissipativo.

1.2 Caso conservativo

Dada a discussão efetuada na seção 1.1, podemos reescrever o mapeamento (1.2) na forma:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = |I_n - \epsilon \sin(2\pi\theta_n)| \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{I_{n+1}^\gamma} \end{cases} \mod(1), \quad (1.10)$$

onde ϵ e γ são parâmetros de controle do sistema. O módulo se faz necessário aqui pra prevenir que a variável ação I tome valores negativos. O parâmetro ϵ controla a intensidade da não linearidade do sistema. Quando $\epsilon = 0$ o sistema é integrável, apresentando uma dinâmica regular ao passo que se $\epsilon \neq 0$ o sistema é dito não integrável, a regularidade anteriormente observada é aniquilada e o espaço de configurações a partir disso, passa a exibir uma composição mista.

A fim de ilustrar o comportamento do mapeamento conservativo construímos o espaço de fases para três diferentes valores de γ e diferentes valores do parâmetro de não linearidade ϵ , como pode ser visto conforme as Figs. 1.1, 1.2 e 1.3.

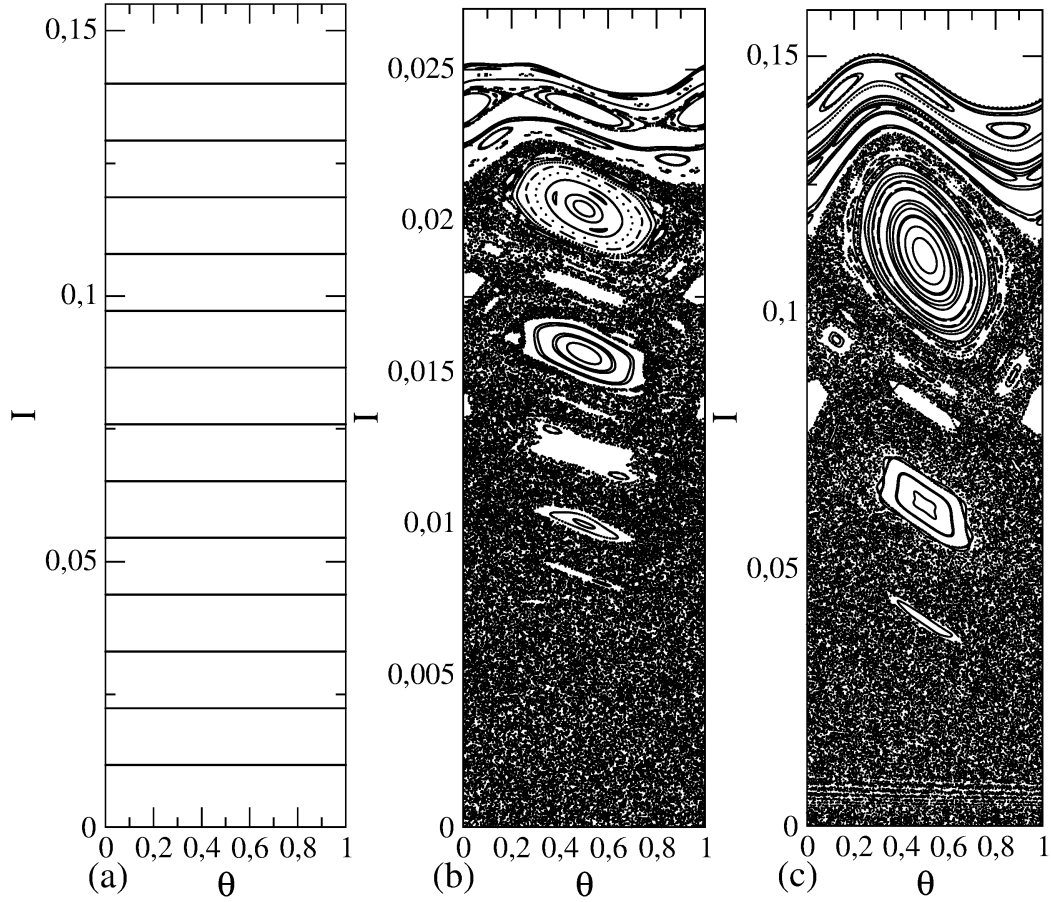


Figura 1.1: Espaço de fase gerado pelo mapeamento (1.10) para o parâmetro de controle $\gamma = 1/2$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) $\epsilon = 10^{-2}$.

Observa-se na Fig. 1.1 (a) com $\epsilon = 0$ que o sistema é regular, a coordenada ação I é constante enquanto a coordenada angular θ está igualmente distribuída ao longo do intervalo de $[0, 1)$. As imagens seguintes, Figs. 1.1 (b) com $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) com $\epsilon = 10^{-2}$ respectivamente, apresentam uma rica dinâmica, exibindo um espaço de fases do tipo misto, contendo ilhas de periodicidade um extenso mar caótico e curvas invariantes do tipo *spanning*.

As curvas invariantes *spanning* limitam o tamanho do mar de caos e impedem o fluxo de partículas entre as diferentes regiões do espaço de fases. Em determinados mapeamentos, uma opção para obter a posição da primeira curva invariante parte da conexão entre o mapeamento de estudo e o mapa padrão, pois, este modelo possui a propriedade de apresentar uma transição de caos local para global através da variação do parâmetro de controle K e um ponto crítico K_c , que marca essa mudança [1].

Vale ressaltar também que as ilhas periódicas tem a característica de não permitirem o trânsito livre de uma órbita entre seu interior e o mar de caos, assim, a evolução de uma condição inicial que esteja em seu interior jamais sairá desta região, da mesma forma que, uma órbita pertencente ao mar de caos jamais entrará numa ilha de periodicidade.

Para a Fig. 1.2 foi considerado o parâmetro de controle $\gamma = 1$. Através de uma análise do espaço de fases percebe-se a predominância da região caótica e já torna-se difícil encontrar curvas invariantes *spanning* no espaço de fases. A medida que se aumenta o parâmetro ϵ , como pode ser visualizado em (b) com $\epsilon = 10^{-3}$ vemos com mais clareza a presença de ilhas periódicas que se difundem no espaço de fases e já fica visível a presença de algumas curvas invariantes *spanning*. Já em (c) com $\epsilon = 10^{-2}$ pode-se visualizar um espaço de fase misto, com a presença de ilhas agora já bem definidas confinadas por uma curva invariante *spanning* [17, 18]. Por fim, para este caso conservativo, buscamos também esboçar os espaços de fases para o parâmetro de controle $\gamma = 3/2$, como veremos a seguir.

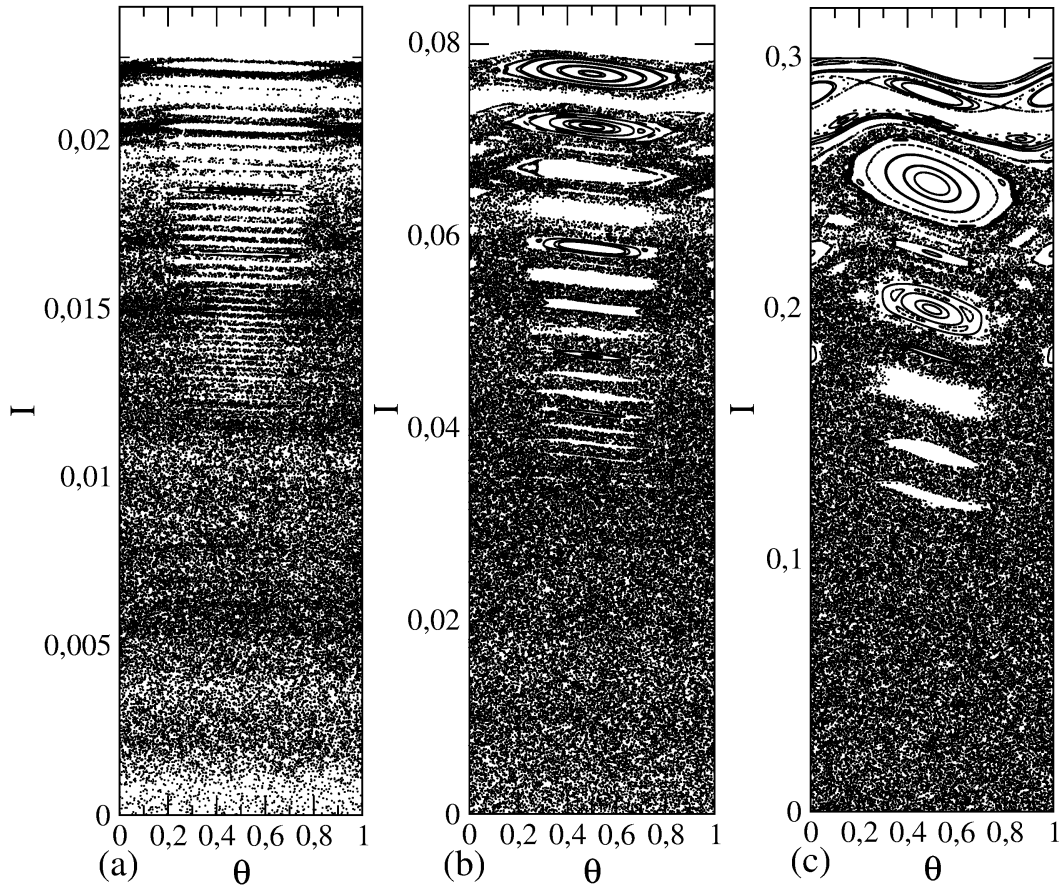


Figura 1.2: Espaço de fase gerado pelo mapeamento (1.10) para o parâmetro de controle $\gamma = 1$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) $\epsilon = 10^{-2}$.

Analisando a Fig. 1.3, agora com o parâmetro $\gamma = 3/2$, podemos verificar que os espaços de fases ainda permanecem mistos, com ilhas de estabilidade coexistindo com o mar de caos e ainda há a presença de curvas invariantes do tipo *spanning* visíveis no espaço de fases.

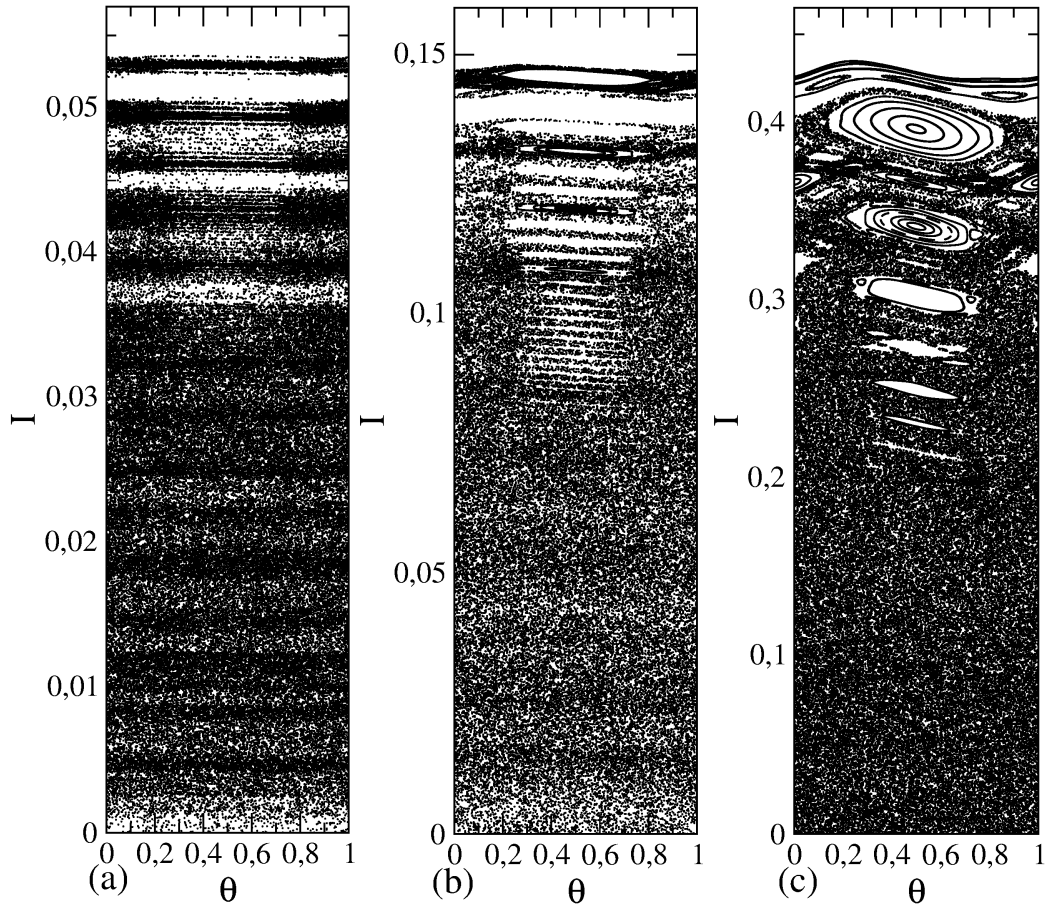


Figura 1.3: Espaço de fase gerado pelo mapeamento (1.10) para o parâmetro de controle $\gamma = 3/2$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 10^{-4}$, (b) $\epsilon = 10^{-3}$ e (c) $\epsilon = 10^{-2}$.

Ao observar atentamente tais espaços de fases a impressão que se tem e que também pôde ser visualizada de acordo com a análise feita através do desenvolvimento das Figs. 1.1 1.2 e 1.3 é que conforme há uma mudança dos parâmetros de controle também a estrutura que se forma no espaço de fases modifica-se. Fica visível que para os três casos, utilizando $\gamma = 1/2$, $\gamma = 1$ e $\gamma = 3/2$ conforme o parâmetro de não linearidade do sistema aumenta, ocorre um aumento do mar de caos no espaços de fases e conseqüentemente uma variação na presença de ilhas de estabilidade e curvas invariantes *spanning*. Em contrapartida, quanto menor o valor deste parâmetro mais regular é o espaço de fase e mais ilhas de estabilidade se evidenciam nele [19].

1.3 Expoentes de Lyapunov e o sistema conservativo

A sensibilidade às condições iniciais é uma das características mais importantes de sistemas que apresentam caos. Uma maneira de quantificar essa sensibilidade é através dos expoentes de Lyapunov. Tais expoentes são obtidos a partir da distância das trajetórias de duas condições iniciais distintas, ou seja, ao evoluirmos a dinâmica no tempo duas condições iniciais que estavam próximas, as mesmas podem se afastar de maneira exponencial, e se,

ao menos um dos expoentes encontrados for positivo, então a órbita é classificada como caótica [20]. Além disso, os expoentes de Lyapunov permitem obter informações valiosas a respeito da estabilidade local de um atrator (conjunto de comportamentos característicos para qual evolui um sistema dinâmico), mais exatamente, com relação as suas direções de contração ($\lambda < 0$) e de expansão ($\lambda > 0$). A Fig. 1.4 exemplifica a divergência entre duas condições iniciais x_0 e y_0 .

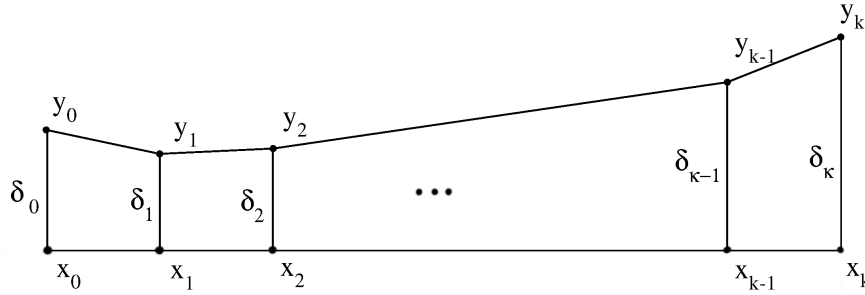


Figura 1.4: x_0 e y_0 são condições iniciais vizinhas e δ_0 é uma distância infinitesimal.

Assim, nosso objetivo nesta seção é utilizar o cálculo do expoente de Lyapunov para caracterizar o comportamento caótico encontrado no espaço de fases tanto do modelo conservativo quanto no modelo dissipativo que será evidenciado na seção 2.1.

Para sistemas unidimensionais o cálculo é feito utilizando as derivadas ao longo da órbita, da mesma forma que para a obtenção da estabilidade do sistema através da equação [21]:

$$\lambda = \lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(x_i)|, \quad (1.11)$$

em que a função F fornece o mapeamento discreto unidimensional. Extrapolando para o caso bidimensional, que é o foco deste trabalho, os expoentes de Lyapunov são obtidos a partir da seguinte expressão [21, 22]:

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Lambda_j^{(N)}|, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

onde $|\Lambda_j^{(N)}|$ representa os autovalores da matriz M definida por:

$$M = \prod_{j=1}^N J_i(I_i, \theta_i), \quad (1.13)$$

sendo J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliado ao longo da órbita (I_i, θ_i) . É de suma importância salientar que a implementação direta de um algoritmo computacional para avaliar a equação (1.12) implica em profundas limitações para se obter a matriz M . No que se refere a convergência, que é observada para grandes ordens de grandeza de (N) , o acúmulo do produtos das matrizes (J_i) pode levar a um crescimento muito rápido

de seus coeficientes, causando problemas numéricos, o que dificulta a implementação do algoritmo, dificultando a estimativa de λ . Para contornar este tipo de problema utilizaremos o *Algoritmo de Triangularização*, proposto por J.P. Eckmann e D. Ruelle [21]. Este algoritmo consiste em escrever a matriz (J) como um produto de uma matriz triangular (T) por uma matriz ortogonal (Θ) , isto é,

$$J = \Theta T,$$

onde (J) é a matriz Jacobiana. Cabe destacar que uma matriz é dita ortogonal quando sua inversa é igual à sua transposta, ou seja,

$$\Theta^{-1} = \Theta^T.$$

Levando em considerações a definição acima, notamos que a matriz (M) pode ser reescrita como

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1 = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1.$$

Chamando $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$ e o produto $J_2 \Theta_1 = \tilde{J}_2$. Seguindo do mesmo raciocínio podemos escrever

$$M = J_n J_{n-1}, \dots, J_3 \Theta_2 \Theta_2^{-1} \tilde{J}_2 T_1.$$

O raciocínio é análogo para se obter $T_2 = \Theta_2^{-1} \tilde{J}_2$ e assim sucessivamente. Desta forma, o problema é reduzido em se avaliar a diagonal principal da matriz triangular (T) , ou seja, os elementos T_{11} e T_{22} . Agora nosso, foco é encontrar os coeficientes de $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$, dados por

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo tal produto de matrizes teremos:

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) & j_{12} \cos(\theta) + j_{22} \sin(\theta) \\ -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) & -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$

Como $T_{21} = 0$, o que nos leva a $-j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) = 0$, chegamos a seguinte equação:

$$\frac{j_{21}}{j_{11}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \quad (1.14)$$

Pode-se perceber que se utilizarmos $\theta = \arctan(j_{21}/j_{11})$, teremos uma função que exhibe um gasto computacional indesejado. Para resolver tal contratempo, utiliza-se as expressões de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ diretamente de J , logo

$$\sin(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (1.15)$$

$$\cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (1.16)$$

Finalmente, podemos obter as expressões da diagonal principal da matriz (T) mencionadas anteriormente, ou seja, como $T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta)$ e $T_{22} = j_{22} \cos(\theta) - j_{12} \sin(\theta)$ obtemos:

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (1.17)$$

$$T_{22} = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (1.18)$$

De posse dos autovalores T_{11} e T_{22} , podemos encontrar numericamente os expoentes de Lyapunov para uma órbita caótica do espaço de fases do modelo de nosso interesse.

Uma vez conhecidas as equações do mapeamento e o entendimento acerca do desenvolvimento de tal algoritmo um dos passos a ser investigado está relacionado com a preservação ou não da área no espaço de fases. Para tal, precisamos obter o determinante da matriz Jacobiana, tal qual, dada pela equação (1.3) onde, calculando os elementos teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} &= 1, \\ \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} &= -2\pi\epsilon \cos(2\pi\theta_n), \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} &= -\gamma[I_n - \epsilon \sin(2\pi\theta_n)]^{-\gamma-1}, \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + 2\pi\epsilon\gamma \cos(2\pi\theta_n)[I_n - \epsilon \sin(2\pi\theta_n)]^{-\gamma-1}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

Encontrados os elementos da matriz Jacobiana, podemos então obter o determinante da mesma, este, dado por:

$$\det J = 1 \quad (1.20)$$

Desta forma, de acordo com o Teorema de Liouville [23] podemos afirmar que o sistema preserva a área no espaço de fases. Preservar a área no espaço de fase significa que mesmo que ocorra alguma mudança no espaço de fases, seja na região ou no formato geométrico da mesma, a área dos pontos não sofrerão alterações.

Os expoentes de Lyapunov apresentam diversas características, uma delas que é muito interessante de ser observada é a de que para sistemas conservativos, que é este caso, devemos ter $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ou seja, $\sum_{i=0}^N \lambda_i = 0$ onde N identifica o número de equações do mapeamento discreto investigado [1].

A Fig. 1.5 mostra a evolução temporal do expoente de Lyapunov para o modelo conservativo. Para seu desenvolvimento foram usadas cinco condições iniciais diferentes, iteradas 5×10^8 vezes. Podemos perceber que apesar de condições iniciais diferentes, as órbitas convergem para um valor constante após um número suficiente grande de iterações e através desse desenvolvimento calculou-se a média dessas cinco condições iniciais e encontramos o valor do expoente de Lyapunov médio, tal qual, aqui, de $\bar{\lambda} = 1.057 \pm 0.003$. O erro ± 0.003 representa o desvio padrão das cinco curvas.

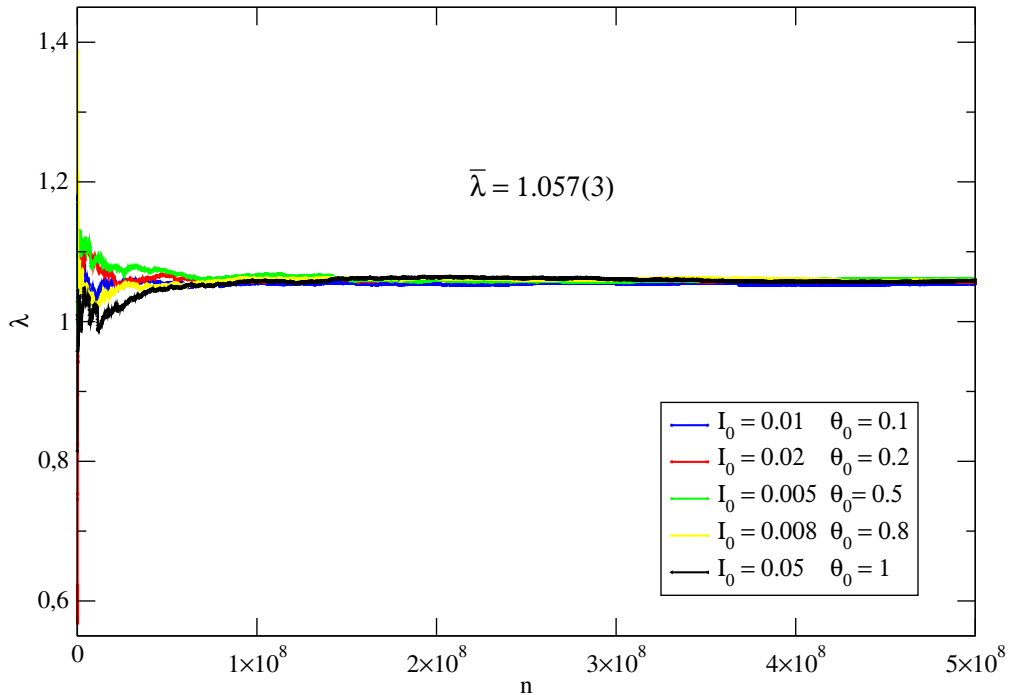


Figura 1.5: Convergência dos expoentes de Lyapunov λ em função do número de iterações n para o modelo conservativo. Os parâmetros utilizados são: $\epsilon = 10^{-2}$ e $\gamma = 1/2$ e o valor médio obtido para o expoente de Lyapunov foi $\bar{\lambda} = 1.057 \pm 0.003$.

Além disso, obtemos também o comportamento do expoente Lyapunov positivo e negativo médio em função do parâmetro de controle ϵ , como pode ser visto nas Figs. 1.6, 1.7 e 1.8. Podemos ver que a variação do expoente Lyapunov positivo e negativo é relativamente pequena para o intervalo de parâmetros de controle considerados $\epsilon \in [10^{-5}, 10^{-2}]$. Essa variação é considerada pequena frente às 3 ordens de magnitude do parâmetro de controle ϵ . Nota-se também que ambos os expoentes são iguais em módulo porém possuem sinais diferentes, o que é característico de sistemas Hamiltonianos

Ainda observando a Fig. 1.6 podemos relacioná-la com a Fig. 1.1 onde foi construído o espaço de fases utilizando o mesmo valor do parâmetro $\gamma = 1/2$. O expoente de Lyapunov médio foi calculado resultando em (b) $\epsilon = 10^{-3}$ um valor de $\bar{\lambda} = \pm 1.193(3)$ e em (c) $\epsilon = 10^{-2}$ um referente valor de $\bar{\lambda} = \pm 1.057(3)$, valor este, que consequentemente foi observado no desenvolvimento da Fig. 1.5.

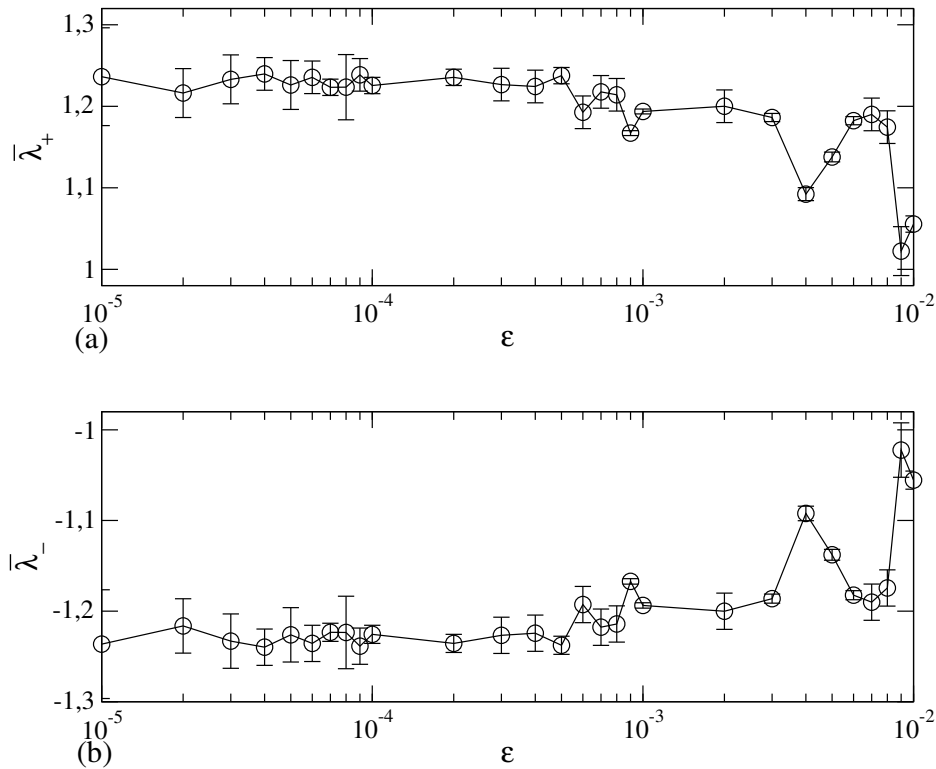


Figura 1.6: Diagrama de convergência de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ positivo em (a) e negativo em (b) como função do parâmetro de controle $\gamma = 1/2$.

Tal consideração pode ser feita também ao compararmos a Fig. 1.7 com o espaço de fases observado na Fig. 1.2 que foi obtida a partir do valor do parâmetro de controle $\gamma = 1$. Nesta comparação, encontramos novamente o valor do expoente de Lyapunov médio para o espaço de fases visualizado em (a) utilizando o parâmetros $\epsilon = 10^{-4}$ que apresenta o valor de $\bar{\lambda} = \pm 1.67(5)$, já em (b) com $\epsilon = 10^{-3}$ o valor $\bar{\lambda} = \pm 1.69(3)$ e finalmente em (c) com $\epsilon = 10^{-2}$ o valor de $\bar{\lambda} = \pm 1.640(8)$.

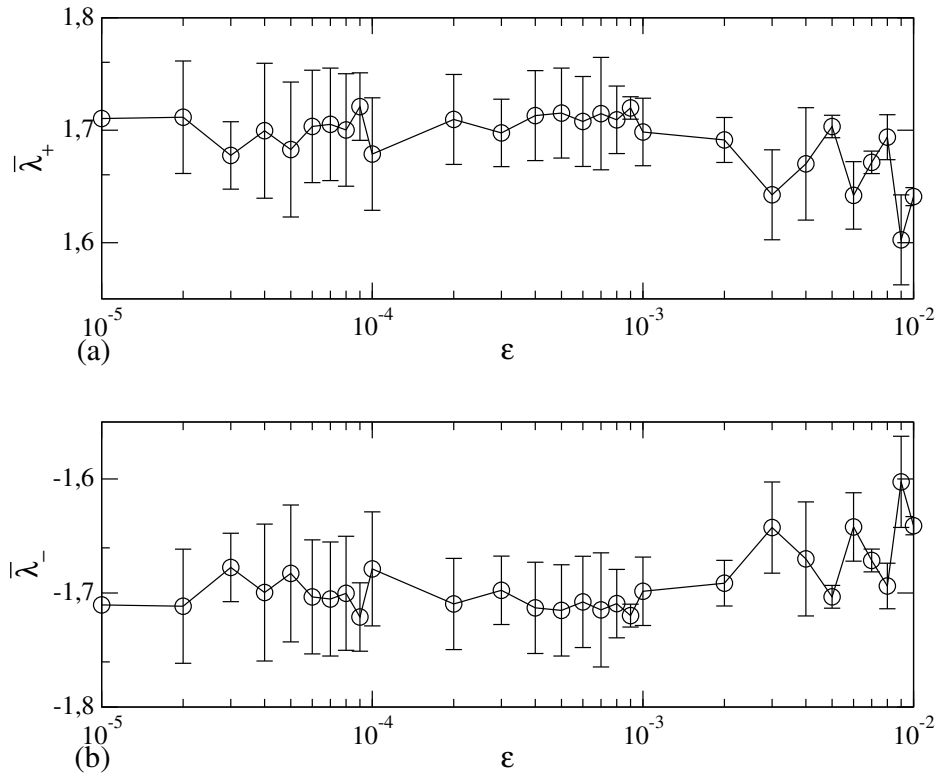


Figura 1.7: Diagrama de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ positivo em (a) e negativo em (b) como função do parâmetro de controle $\gamma = 1$.

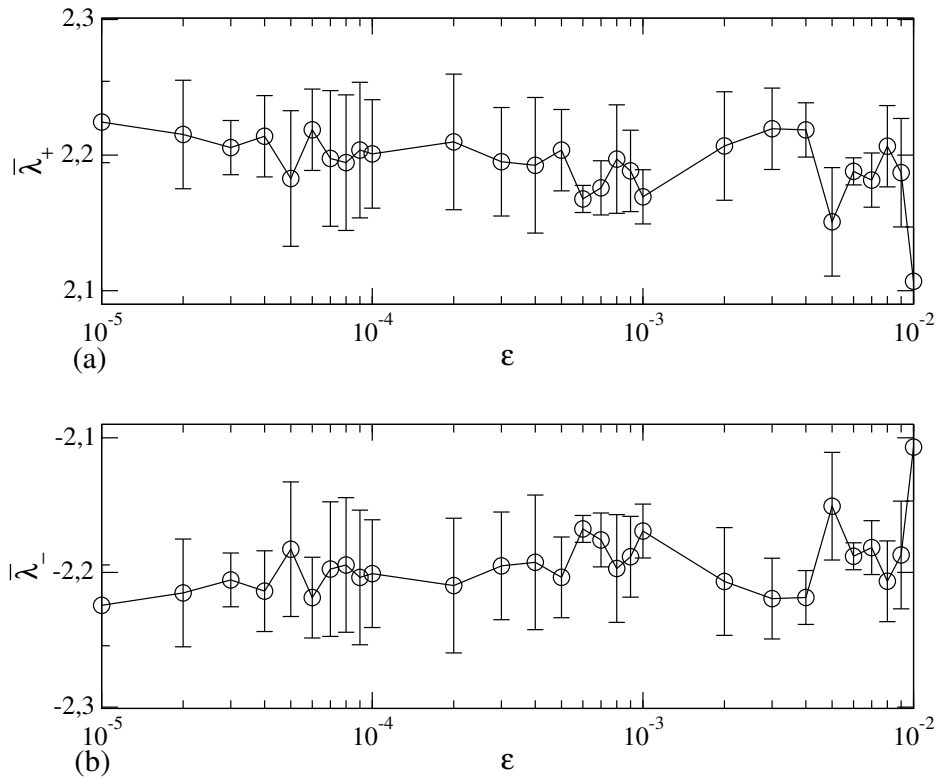


Figura 1.8: Diagrama de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ positivo em (a) e negativo em (b) como função do parâmetro de controle $\gamma = 3/2$.

Também, não menos importante, pode-se fazer a mesma consideração em relação ao espaço de fases da Fig. 1.3 e a construção da Fig. 1.8 que diz respeito ao diagrama do expoente de Lyapunov médio desenvolvido a partir do parâmetro $\gamma = 3/2$. Para este caso, novamente, mensuramos os valores dos expoentes de Lyapunov e pode-se observar que na Fig. 1.3 (a) para $\epsilon = 10^{-4}$ temos um valor de $\bar{\lambda} = \pm 2.20(4)$, em (b) para $\epsilon = 10^{-3}$ temos $\bar{\lambda} = \pm 2.16(2)$ e em (c) $\epsilon = 10^{-2}$ obtivemos $\bar{\lambda} = \pm 2.10(4)$. Para todos os casos observamos a presença de expoentes positivos, o que caracteriza o comportamento das órbitas do sistema como caóticas.

Cabe destacar que a construção dos diagramas 1.6, 1.7 e 1.8 partiu do uso de 5 condições iniciais diferentes, porém próximas entre si para cada valor do parâmetro ϵ percorrendo todo o intervalo $[10^{-5}, 10^{-2}]$. A partir disso, foi calculado o valor do desvio padrão das 5 órbitas geradas para cada ϵ e também o erro disposto entre a evolução das mesmas. Os dados obtidos a partir de tal análise no permitiu a elaboração dos diagramas de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ observados.

CAPÍTULO 2

O MODELO DISSIPATIVO E SUAS PROPRIEDADES

Neste Capítulo apresentaremos uma investigação sobre os efeitos causados pela introdução de uma dissipação no sistema, levando em consideração a partir disso, algumas das propriedades do sistema, com isso, podemos analisar o surgimento de órbitas periódicas no sistema de acordo com a escolha dos parâmetros de controle. Ainda neste capítulo, realizaremos uma análise do decaimento de órbitas para um atrator caótico.

2.1 Caso dissipativo

No desenvolvimento desta seção discutiremos os efeitos da dissipação no sistema. Para adequarmos o mapeamento, introduziremos os fatores δ e $(1 + \delta)$ na componente ação do sistema, de modo que a equação (1.10) do mapeamento possa ser reescrita da seguinte forma:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = |\delta I_n - (1 + \delta)\epsilon \sin(2\pi\theta_n)| \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{I_{n+1}^\gamma} \end{cases} \mod(1), \quad (2.1)$$

onde a variável de ação e ângulo continuam sendo representadas por I e θ respectivamente, aqui, ϵ continua controlando a intensidade de não linearidade e a partir de agora temos o parâmetro de dissipação $\delta \in [0,1]$. A variável θ continua modulada em 1. Observe que quando $\delta = 1$ recuperamos o caso conservativo, ou seja, sem dissipação. No que se refere a grande versatilidade desse mapeamento vale ressaltar que novamente $\gamma \neq 0$ é um parâmetro livre que leva à recuperação de vários sistemas dinâmicos diferentes e podemos

aqui destacar um deles. No estudo de mapeamentos é conveniente descrever a dinâmica usando variáveis adimensionais, ou seja, se $\delta = 1$, $\gamma = -1$ e considerando

- $I_{n+1} = V_n$ e $(2\pi\theta_n) = \phi_{n+1}$, onde ϕ_{n+1} representa o produto da frequência angular pelo tempo ωt , então recupera-se o modelo *bouncer* dissipativo [24, 25];

Além disso podemos destacar a presença de outros modelos semelhantes que podem ser encontrados na literatura [26, 27].

No que se refere a sistemas dinâmicos, sabe-se que um conjunto de condições iniciais produzem órbitas no espaço de fases. Se tratando de sistemas dissipativos tais órbitas irão convergir a um conjunto invariante a partir da sua evolução no tempo. Tal conjunto transiente (o tempo para que o atrator seja alcançado através da sua evolução) pode ser um ponto, curva, área e assim por diante, e o mesmo é denominado atrator [4, 7]. O conjunto de condições iniciais que são atraídas para o atrator é denominado bacia de atração. Genericamente, cada atrator é inteiramente rodeado no espaço de fases por sua própria bacia de atração.

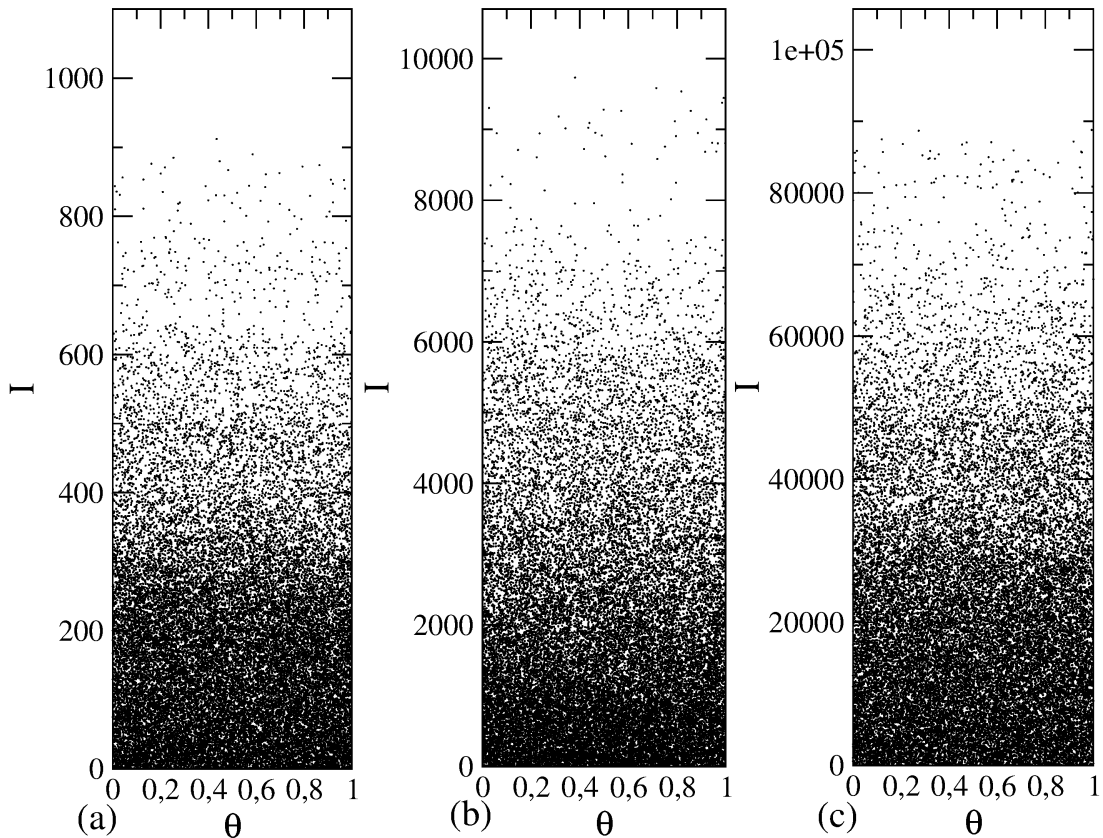


Figura 2.1: Espaço de fase gerado pelo mapeamento (2.1) para o parâmetro de controle $\gamma = -1.0$, $\delta = 0.999$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 10$, (b) $\epsilon = 100$ e (c) $\epsilon = 1000$.

Na medida que consideramos um coeficiente de dissipação em nosso sistema de investigação podemos notar que a dinâmica observada na seção 1.2 é aniquilada. Curvas

invariantes *spanning* também são destruídas e o mar de caos dá origem a atratores caóticos no espaço de fases. Portanto, é possível observar uma variedade de comportamentos diferentes quando tal coeficiente é variado. Como forma de exemplificar e ilustrar o que foi mencionado, foi desenvolvido os espaços de fases para o caso dissipativo conforme pode ser visualizado de acordo com as Figs. 2.1, 2.2 e 2.3.

Ao analisarmos a Fig. 2.1 podemos ver tais características anteriormente mencionadas. Para sua construção foram utilizados o parâmetro $\delta = 0.999$ e $\gamma = -1$, ambos fixos e diferentes valores do parâmetro de não linearidade (a) $\epsilon = 10$, (b) $\epsilon = 100$ e (c) $\epsilon = 1000$. Pode-se perceber que as ilhas de estabilidade que haviam sido encontradas no espaço de fases para o caso conservativo foram completamente destruídas e não há menção alguma a qualquer curva invariante *spanning*, o que resulta em um atrator caótico no espaço de fase. Tal característica está relacionado ao cálculo do determinante da matriz Jacobiana, que será discutido seção 2.2, que por conclusão não preserva a área no espaço de fase.

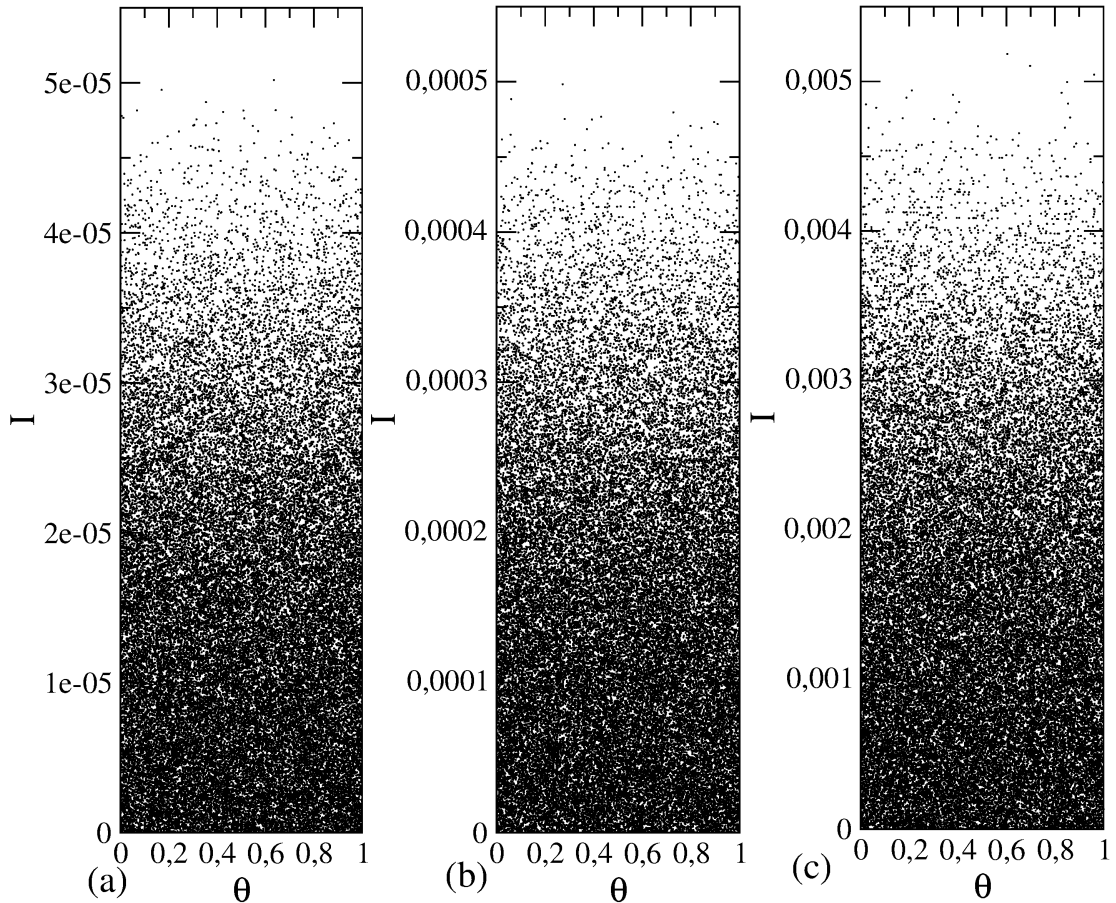


Figura 2.2: Espaço de fase gerado pelo mapeamento (2.1) para o parâmetro de controle $\gamma = 1$, $\delta = 0.7$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 10^{-5}$, (b) $\epsilon = 10^{-4}$ e (c) $\epsilon = 10^{-3}$.

O espaço de fase visualizado na Fig. 2.2 é semelhante ao visualizado na figura anterior, visto que, há diferenças no parâmetro de dissipação, ou seja, buscamos aumentar a dissipação no sistema, utilizando $\delta = 0.7$, porém com $\gamma = 1$ fixo e variando o parâmetro ϵ conforme (a) $\epsilon = 10^{-5}$, (b) $\epsilon = 10^{-4}$ e (c) $\epsilon = 10^{-3}$. O espaço de fases visualizado Fig. 2.2

recuperam as características de um sistema dissipativo, ou seja, não há curvas invariantes *spanning* e que podemos ver são atratores caóticos ao longo da dinâmica. Para este caso, conforme o parâmetro de não linearidade diminui, juntamente com o coeficiente de dissipação, observa-se uma diminuição do mar de caos em relação a coordenada I , característica esta que também pôde ser visualizada nos espaços de fases para o modelo conservativo.

Já na Fig. 2.3 exibe o espaço de fase para o mapeamento (2.1) recuperando aqui a dinâmica do modelo na sua versão conservativa, ou seja, quando $\delta = 1$, porém, fixamos o parâmetro $\gamma = -1$. Podemos ver em ambas as figuras uma estrutura mista, mas em (a) $\epsilon = 0.053$ há a existência de curvas invariantes *spanning* que visualmente evitam que o mar caótico se espalhe ilimitadamente no espaço de fase. Na Fig. 2.3 (b) $\epsilon = 0.07$ ainda há a presença de curvas invariantes *spanning* mas é possível notar há o aumento gradativo do mar caótico. Já em (c) $\epsilon = 0.8$ todas as curvas invariantes *spanning* pelo que se pode observar são destruídas e a difusão ilimitada é observada. Uma característica importante que vale ser ressaltada nos casos (a), (b) e (c) é a de que em ambos a estrutura do espaço de fase se repete no eixo de ação a cada valor de I inteiro [28].

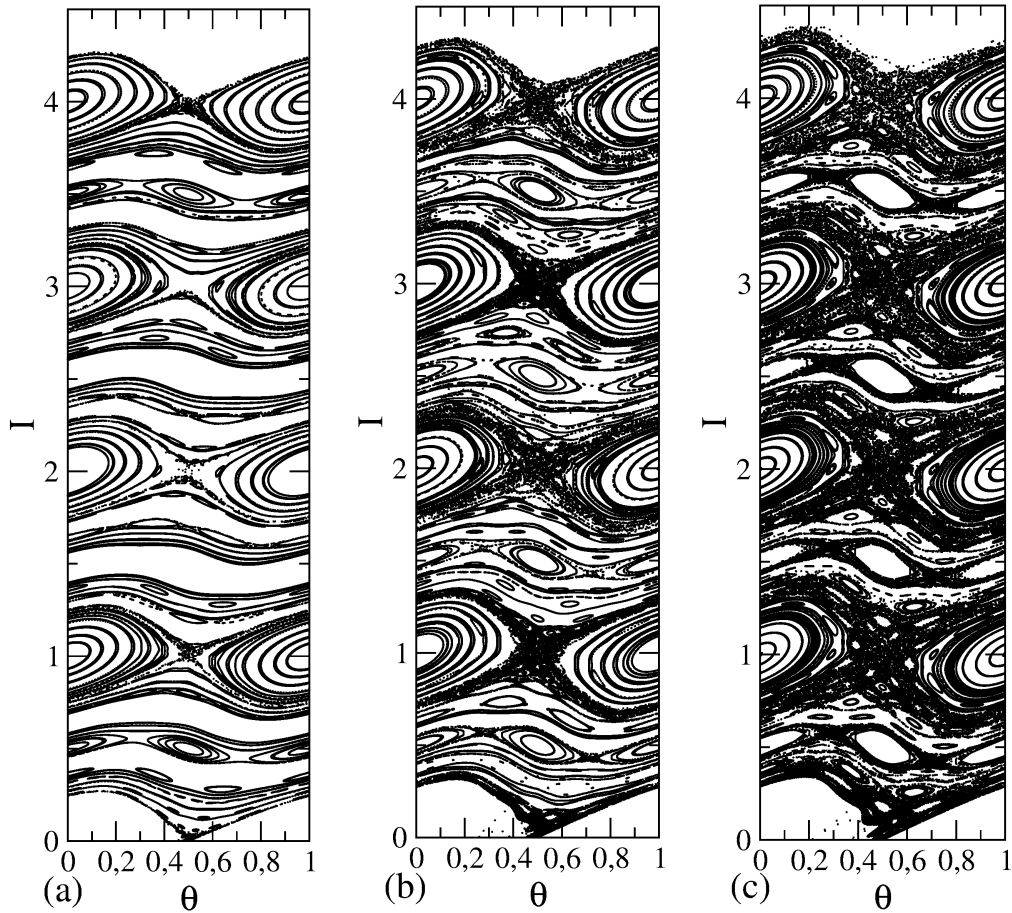


Figura 2.3: Espaço de fase gerado pelo mapeamento (2.1) para o parâmetro de controle $\gamma = -1$, $\delta = 1$ e diferentes valores de ϵ , são eles: (a) $\epsilon = 0.053$, (b) $\epsilon = 0.07$ e (c) $\epsilon = 0.08$.

2.2 Os Expoentes de Lyapunov e o sistema Dissipativo

Como mencionado na subseção 1.3, os coeficiente de Lyapunov, ou mesmo, expoentes de Lyapunov são uma ferramenta muito utilizada a fim de quantificar a sensibilidade às condições iniciais. De forma sucinta, os expoentes de Lyapunov descrevem a velocidade com que dois pontos próximos das condições iniciais do sistema se aproximam ou se distanciam perante sua evolução no tempo. Assim, nosso intuito nesta seção é fazer o cálculo da matriz Jacobiana e também o cálculo dos expoentes de Lyapunov para mostrar quais os efeitos que temos no sistema sob o efeito do coeficientes de dissipação δ .

Vale novamente fazer a observação que, para mapas multidimensionais, o cálculo dos expoentes de Lyapunov é mais complicado do ponto de vista numérico. Porém aqui, o processo aplicado é o mesmo discutido na seção 1.3 diante do algoritmo de triangularização que foi discutido na mesma seção.

Se considerarmos $\delta < 1$, encontramos no espaço de fases uma contração de área ao longo da sua evolução no tempo. Tal característica pode ser confirmada através do cálculo da matriz Jacobiana dada pela equação (1.3). Para o caso dissipativo, se calcularmos seus elementos teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} &= \delta, \\ \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} &= -2\pi\epsilon\cos(2\pi\theta_n)(1+\delta), \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} &= -\gamma\delta[I_n - (1+\delta)\epsilon\sin(2\pi\theta_n)]^{-\gamma-1}, \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + 2\pi\epsilon\gamma\cos(2\pi\theta_n)(1+\delta)[I_n - (1+\delta)\epsilon\sin(2\pi\theta_n)]^{-\gamma-1}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

Calculando finalmente o determinante encontramos:

$$\text{Det}J = \delta \tag{2.3}$$

Com esse resultado, de acordo com o Teorema de Liouville [23] podemos concluir que a área no espaço de fase não é preservada.

Na seção 1.3 discutimos sobre o algoritmo para determinar o expoente de Lyapunov para mapeamentos bidimensionais, tal qual pode ser imediatamente aplicado a este sistema. Uma propriedade que pode ser mencionada e que podemos ver através do desenvolvimento da Fig. 2.4 é a de que para sistemas dissipativos, devemos ter $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, ou seja, $\sum_{i=0}^N \lambda_i < 0$ onde N identifica o número de equações do mapeamento discreto investigado [1].

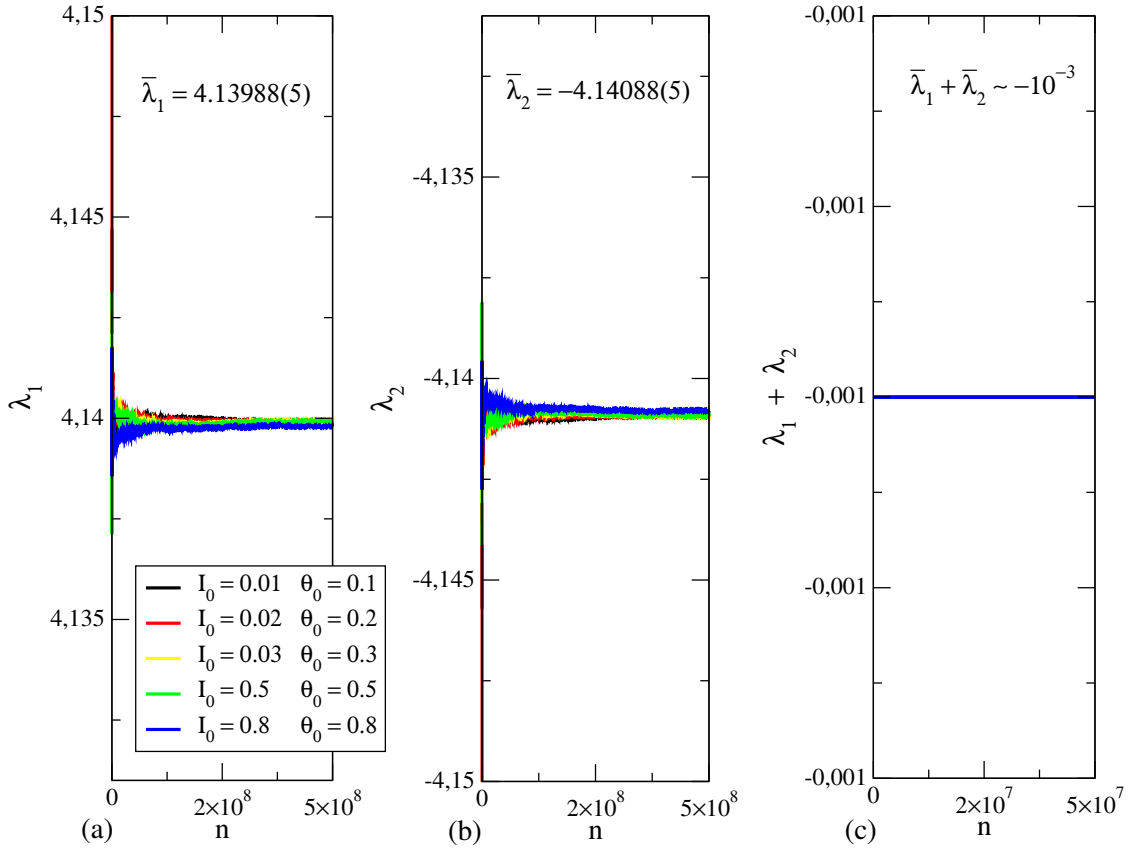


Figura 2.4: Curvas do comportamento dos expoentes de Lyapunov (a) positivo e (b) negativo para os parâmetros de controle $\epsilon = 10$, $\delta = 0.999$ e $\gamma = -1$. Em (c) a soma dos valores médios dos expoentes de Lyapunov λ_1 e λ_2 .

A Fig. 2.4 mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov referente ao mapeamento (2.1). Para a construção das curvas visualizadas no diagrama, os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 10$, $\delta = 0.999$ e $\gamma = -1$ e um conjunto de cinco condições iniciais diferentes, conforme descritos no diagrama, e cada uma destas condições iniciais foi iterada 5×10^8 vezes. A Fig. 2.4 (a) mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov positivos. Uma média no conjunto das diferentes órbitas nos dá $\bar{\lambda}_1 = 4.13988(5)$. Em (b) a figura mostra o comportamento do expoente de Lyapunov negativo, em que o valor médio é de $\bar{\lambda}_2 = -4.14088(5)$. Em (c) o diagrama exibe a soma dos valores médios dos expoentes Lyapunov ($\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \approx -10^{-3}$) que é da mesma magnitude que a de $(1 - \delta)$. Um estudo completo acerca de tais características pode ser encontrado na referência [29].

O estudo e desenvolvimento das características acerca dos espaços de fases, do estudo da matriz Jacobiana e também da investigação acerca dos expoentes de Lyapunov para os dois modelos de investigação proporcionaram uma base, uma referência para o desenvolvimento avaliado nas próximas seções. Podemos perceber que ao introduzir a dissipação no sistema há a presença de atratores no espaço de fases e buscaremos analisá-los e caracterizar alguns exemplos que podem ser obtidos a partir desse modelo.

2.3 O surgimento de atratores pontos fixos

A presença de perturbações externas, como dissipação, aparece em vários contextos físicos e existem muitos trabalhos sobre este tema, como foi apresentado na seção 2.1 deste Capítulo. Sistemas não lineares dissipativos, sejam eles descritos por equações diferenciais ou por mapeamentos discretos, podem admitir a existência de mais de um atrator simultaneamente, seja ele periódico ou caótico, muitas vezes ambos [1].

Nesta seção, nos concentramos em evidenciar uma das características, não menos importante, que uma dissipação causa no sistema, ou seja, quando acrescentamos uma dissipação com uma magnitude muito pequena, o sistema passa a exibir um comportamento que é dominado principalmente pelo aparecimento de atratores pontos fixos, com diferentes períodos. Para a construção das Figs. 2.5 e 2.6 foram realizadas 10^4 iterações, com um transiente de 10^7 vezes. As cores indicam os períodos de cada atrator. Indicado em cores vermelhas, há o surgimento de órbitas de período 1, em azuis, órbitas de período 2, já em cores verdes se observa órbitas de período 5 e indicado em preto, órbitas de período 6, de acordo com a ilustração na Fig. 2.5. Vale reforçar que os atratores que estão em formatos diferentes porém de mesma cor se referem ao mesmo conjunto periódico.

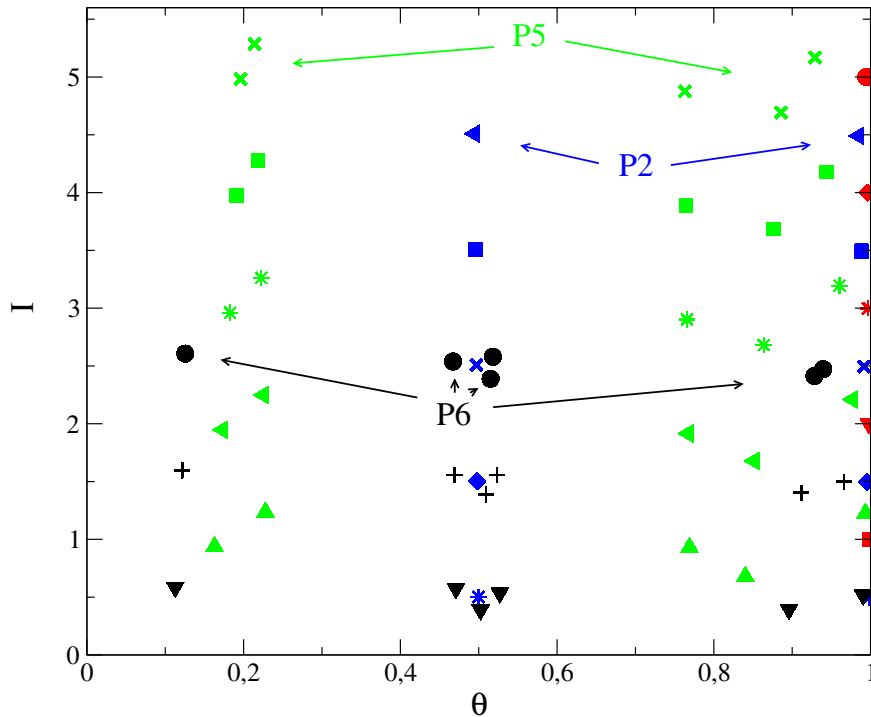


Figura 2.5: Atratores pontos fixos observado para o mapeamento (2.1) para os parâmetros de controle, $\epsilon = 0.15$ e $\delta = 0.998$ e $\gamma = -1$.

Com o intuito de caracterizar as órbitas presentes no espaço de fases do diagrama exibido através das Figs. 2.5 e 2.6, utilizou-se uma técnica. A investigação parte da escolha de um ponto fixo qualquer presente do espaço de fases. A partir daí, coletamos a respectiva coordenada deste ponto fixo e através dela pode-se localizar a órbita que está relacionada

a tal ponto. Com isso, através da repetição de tal processo, todos os pontos fixos que se encontravam na mesma “bacia de atração” (conjunto de todas as possíveis condições iniciais que convergem para o mesmo atrator, após um transiente [7]) foram contabilizados e de posse de tais resultados se pôde identificar o período de cada órbita existente no espaço de fases do mapeamento dado pela equação (2.1) utilizando os parâmetros de controle $\epsilon = 0.15$ e $\delta = 0.998$ e $\gamma = -1$

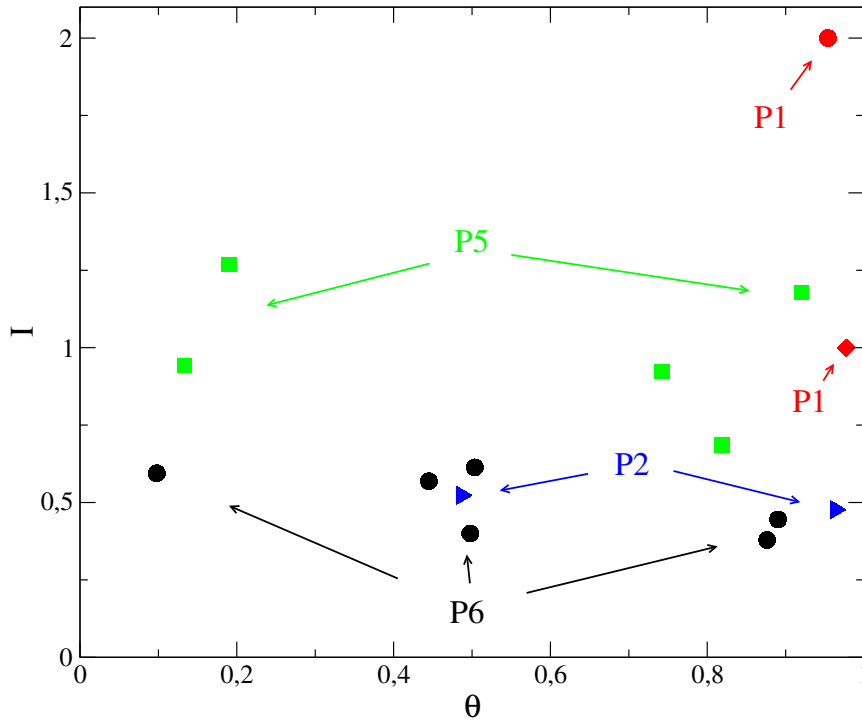


Figura 2.6: Atratores pontos fixos observado com o aumento do parâmetro $\delta = 0.958$ para os mesmos parâmetros de controle, $\epsilon = 0.15$ e $\gamma = -1$.

Na Fig. 2.6 podemos ver uma consequência direta da variação da dissipação ($\delta = 0.958$) para o sistema em questão. Essa variação causou uma mudança na quantidade de órbitas, podendo ser comparadas com as órbitas que foram caracterizadas de acordo com a Fig. 2.5. Porém, para este caso, pode-se perceber que órbitas de período 1, indicado em cores vermelhas, órbitas de período 2 em cores azuis, em cores verdes órbitas de período 5 e em cores pretas, órbitas de período 6 mantiveram-se ainda perceptíveis para os parâmetros de controle, $\epsilon = 0.15$ e $\gamma = -1$. Nota-se que mudanças consideráveis podem ocorrer no sistema decorrente da variação do parâmetro de dissipação.

2.4 Decaimento de órbitas para os atratores caóticos

Nesta seção buscamos realizar uma investigação analítica acerca do decaimento das órbitas no modelo de estudo na sua versão dissipativa, dado de acordo com a equação (2.1). Iterando a primeira equação do mapeamento discreto, partindo de um par (I_0, θ_0) teremos:

$$I_{n+1} = |\delta I_n - (1 + \delta)\epsilon \text{sen}(2\pi\theta_n)|, \quad (2.4)$$

$$I_1 = |\delta I_0 - (1 + \delta)\epsilon \text{sen}(2\pi\theta_0)|, \quad (2.5)$$

$$I_2 = |\delta I_1 - (1 + \delta)\epsilon \text{sen}(2\pi\theta_1)|. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.6), obteremos:

$$I_2 = |\delta^2 I_0 - (1 + \delta)\epsilon[\delta \text{sen}(2\pi\theta_0) + \text{sen}(2\pi\theta_1)]|. \quad (2.7)$$

Iterando o mapa novamente, e substituindo I_2 , teremos:

$$I_3 = |\delta I_2 - (1 + \delta)\epsilon \text{sen}(2\pi\theta_2)|, \quad (2.8)$$

$$I_3 = |\delta^3 I_0 - (1 + \delta)\epsilon[\delta^2 \text{sen}(2\pi\theta_0) + \delta \text{sen}(2\pi\theta_1) + \text{sen}(2\pi\theta_2)]|. \quad (2.9)$$

$\vdots$

Se continuarmos as iterações, podemos encontrar uma generalização para a expressão acima, que pode ser dada por:

$$I_n = \delta^n I_0 - (1 + \delta)\epsilon \sum_{i=0}^{n-1} \delta^{n-1-i} \text{sen}(2\pi\theta_i). \quad (2.10)$$

Observando o segundo termo da equação (2.10), onde é apresentada a função seno, notamos que, $\sum \text{sen}(2\pi\theta_i) \cong 0$, logo, a mesma poderá ser anulada, pois, dada a periodicidade da função *seno* este conjunto contribui muito pouco para o decaimento médio [29]. Feito tais considerações, a expressão se tornará:

$$I_n \simeq \delta^n I_0. \quad (2.11)$$

Utilizando propriedades matemáticas, podemos observar que a expressão do lado direito da igualdade exprime informações de grande relevância a nossa análise. Dada uma função exponencial do tipo $a \cdot r^x$ a mesma será crescente se $r > 1$, ao passo que, se $0 < r < 1$ a mesma é decrescente. Dessa forma, em tal análise, se considera-se uma pequena dissipação, ou seja, tomando $0 < \delta \ll 1$ fica nítido a existência de uma queda exponencial. Tal análise pode ser confirmada ao observar-se a Fig. 2.7 que exhibe a curva de decaimento, realizada a partir da iteração da primeira equação no mapa (2.1), através da variável de ação e da

quantidade de iterações para a obtenção do decaimento ($I \times n$).

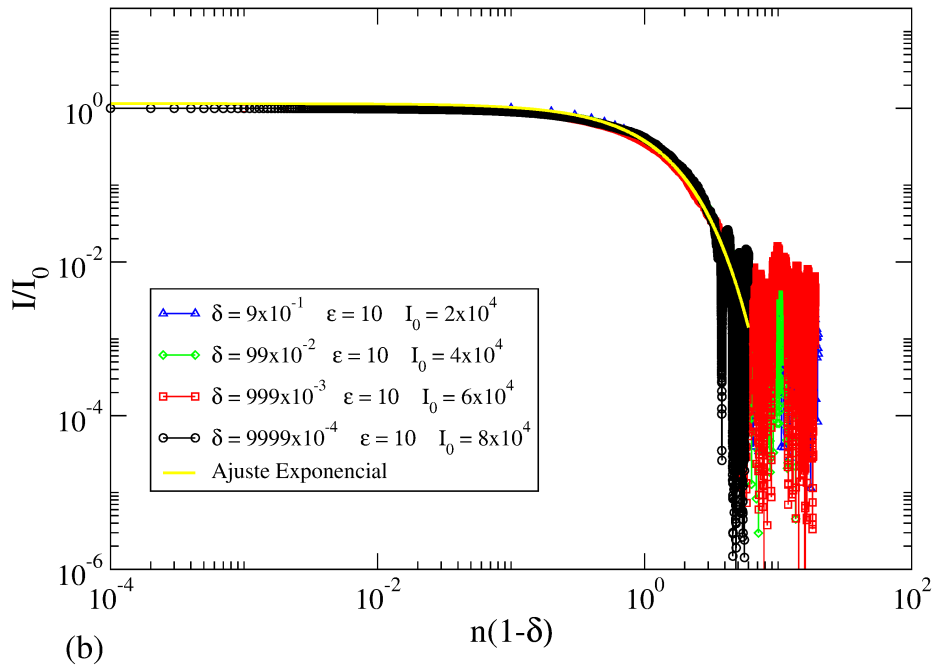
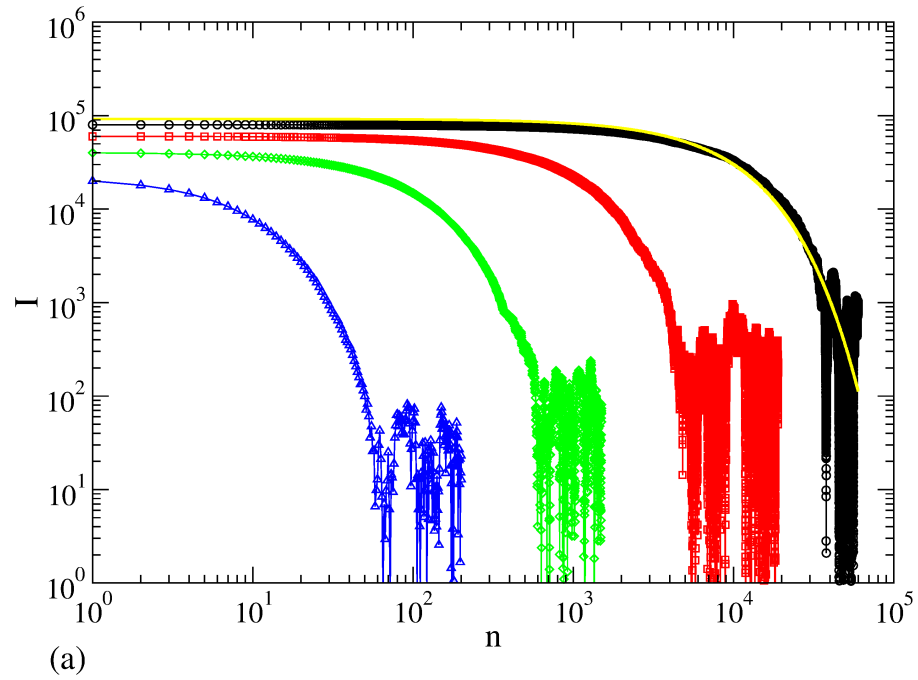


Figura 2.7: Decaimento para o atrator caótico: (a) comportamento de $(I \times n)$ para diferentes parâmetros ϵ , I_0 , δ e $\gamma = -1$ para todas as curvas. Em (b) sobreposição de todas as curvas em uma única curva universal.

Na Fig. 2.7(a) apresentamos este comportamento: a variável ação I em função da quantidade de iterações n . Foram utilizados diferentes valores para o parâmetro de controle δ bem como distintos valores de ações iniciais I_0 para ϵ fixo, conforme evidenciado na legenda da própria figura.

Através da construção das curvas foi possível observar que todos os comportamentos encontrados apresentam decaimentos exponenciais das suas órbitas para atratores caóticos. Além disso, foi possível obter um ajuste exponencial do tipo $I = Ae^{Bn}$, curva de cor amarela, de acordo com a primeira curva, de cor preta, que tem como $\delta = 9999 \times 10^{-4}$, $\epsilon = 10$ e $I_0 = 8 \times 10^4$, onde foram encontradas o coeficiente $A = 92006$ e o expoente $B = -0,0001117(1)$. Já na Fig. 2.7 (b) mostramos a sobreposição das quatro curvas mostradas na Fig. 2.7 (a) em uma única curva universal, feita a partir das transformações $I \rightarrow I/I_0$ e $n \rightarrow n(1 - \delta)$. Nesta figura, conseguimos evidenciar que o decaimento exponencial possui uma escala invariável em relação ao parâmetro δ e a ação inicial I_0 .

CAPÍTULO 3

ESPAÇO DE PARÂMETROS

Neste Capítulo, iniciamos fazendo uma revisão bibliográfica acerca da referência [30], onde construímos o espaço de parâmetros para o sistema dissipativo utilizando o cálculo do expoente de Lyapunov com o intuito de investigar algumas janelas de periodicidade. Além disso, pretendemos encontrar as estruturas conhecidas na literatura como *shrmps* e investigar a organização das mesmas.

3.1 Diagrama do espaço de parâmetros

Alguns diagramas interessantes para a análise de um sistema previamente estudado além dos diagramas de bifurcação e espaço de fases são os diagramas de espaço de parâmetros. O estudo de diagramas bidimensionais de parâmetros vem sendo realizado desde os anos 80 e tem se mostrado eficaz no que se diz respeito a análise do comportamento dinâmico de sistemas não lineares. Neste capítulo, em específico, nos concentramos no desenvolvimento de tais planos de parâmetros, ou simplesmente, espaços de parâmetros.

Para efeitos de análise do comportamento caótico do modelo, de acordo com a equação (2.1) variamos δ vs ϵ para $\gamma = 1$ fixo, sendo este um cenário representativo para tal modelo.

Para cada par de parâmetros, associamos o valor do expoente de Lyapunov a uma cor usando o Gnuplot. Assim, podemos visualizar o valor do expoente de Lyapunov comparando a cor do ponto no diagrama do espaço de parâmetros com a cor correspondente na paleta de cores que está ao lado de cada figura. A paleta de cores por sua vez permite verificar onde o sistema apresenta regiões de equilíbrio, regiões periódicas e regiões caóticas. Para a construção deste e dos demais diagramas que serão apresentados na sequência, discretizamos o intervalo de parâmetros δ vs ϵ em uma malha de $10^3 \times 10^3$ pontos igualmente espaçados como pode ser observado através da Fig. 3.1 que esboça uma visão panorâmica do conjunto de parâmetros aqui estudados.

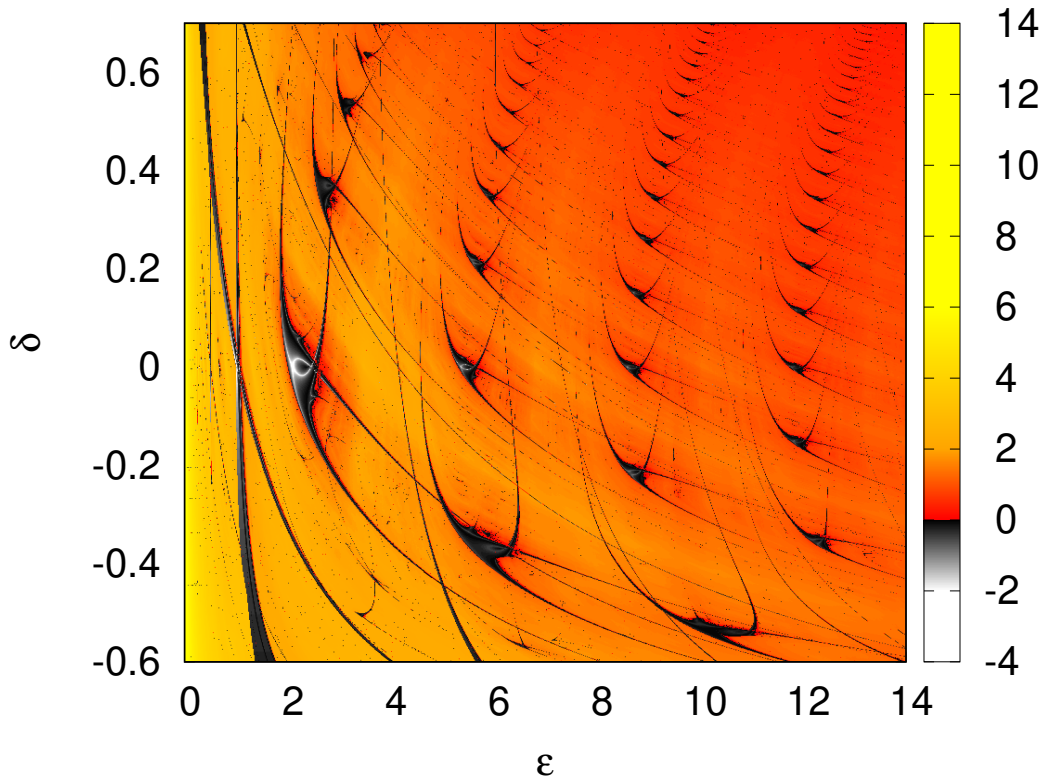


Figura 3.1: Espaço de parâmetros do mapa (2.1). Os domínios dos diferentes atratores estão identificados por diferentes cores.

Como condição inicial foi utilizado $I_0 = \theta_0 = 0.4$, a mesma que foi utilizada na referência [30] e para esta simulação foi descartado um transiente de 10^6 pontos. Identificamos uma cor para cada maior expoente de Lyapunov variando continuamente o espectro de cores, que vai desde o branco (expoentes negativos), ou seja, as regiões de equilíbrio, passando pelo preto (expoentes nulos), estas, sendo as regiões periódicas e as variações do laranja ao amarelo (expoentes positivos), tais quais, definem as regiões conhecidas como caóticas conforme pode ser visualizado no desenvolvimento dos diagramas.

Além disso, a fim de refinar ainda mais a visualização dessas estruturas periódicas e suas regras de formação, construímos os diagramas isoperiódicos [31] como outra ferramenta de visualização. O diagrama isoperiódico é obtido através da variação de dois parâmetros do sistema, plotando o número de máximos ou mínimos locais de uma variável, obtendo assim os períodos das estruturas periódicas presentes no intervalo dos parâmetros escolhido.

Analisado na Fig. 3.2 nota-se que existem vários domínios diferentes de periodicidade e cada um fornece informações específicas e relevantes sobre a dinâmica do sistema. A paleta de cores ao lado direito da mesma diz respeito ao comportamento da órbita, ou seja, as órbitas periódicas são indicadas por cores que variam do verde oliva ao rosa (que evidencia períodos iguais ou maiores que 20) e as órbitas caóticas são destacadas na cor branca.

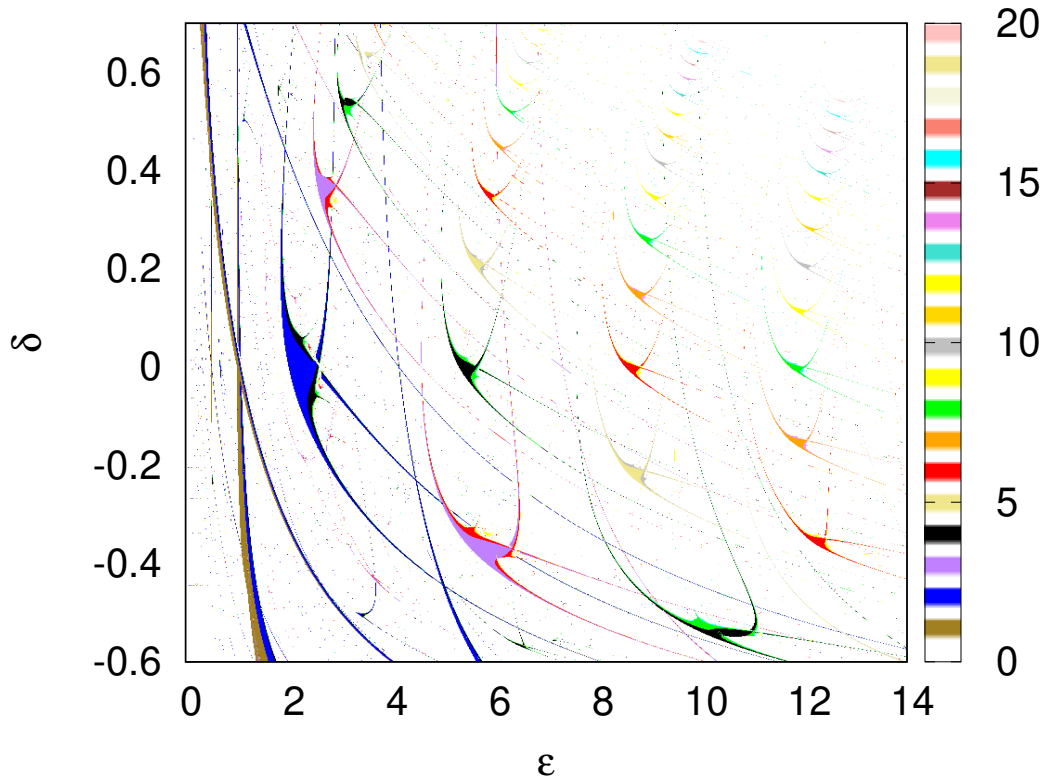


Figura 3.2: Diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo da Fig. 3.1, evidenciando as estruturas periódicas.

Como se pode ver, ainda de acordo com a Fig. 3.2, há um grande número de domínios complexos com periodicidade que seguem padrões. Neste modelo, são evidenciadas 4 ruas formadas com domínios que diminuem de tamanho e crescem em relação ao período conforme δ cresce. Além disso, a periodicidade de todas as ruas apresenta o fenômeno de adição de período, ou seja, a estrutura primária segue uma organização por adição de período: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \dots$.

Mas, além disso, as estruturas periódicas que podem ser vistas na Fig. 3.1 e de tal forma evidenciada através da Fig. 3.3 (a) podem ser encontradas na literatura como *shrims* [32], *compound window* [33], também, conjunto complexo de periodicidade (CSP) [34]. A topologia dessas estruturas foi profundamente estudada por Mira [35], no entanto, análises sistemáticas de espaços de parâmetros bidimensionais também puderam ser observados em alguns artigos influentes de Gallas [36]. Contudo, observou-se que tais estruturas puderam ser formalmente definidas a partir de estudos de Broer e colaboradores [37]. Apesar de que tais nomenclaturas, antes mencionadas, de certa forma capturem a essência das geometrias delicadas observadas em tais estudos numéricos, neste estudo optou-se por nomeá-las como **estruturas complexas**.

De forma sucinta, podemos entender a complexidade das mesmas. Elas possuem um corpo central, chamado endoesqueleto, representado pelas curvas estendidas em quatro direções diferentes na cor verde da Fig. 3.3 (b). O esqueleto é envolvido por curvas de

bifurcação tipo sela-nó do tipo cúspide e curvas de bifurcação do tipo dobra, representadas pelas curvas de cor vermelho da Fig. 3.3 (b), e dobramento de período (flip), curvas na cor preto da Fig. 3.3 (b), delimitando quatro áreas internas conforme observa-se a figura [38].

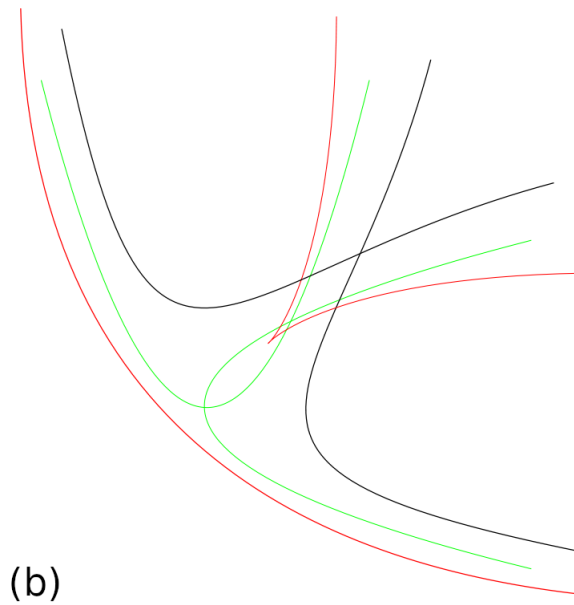
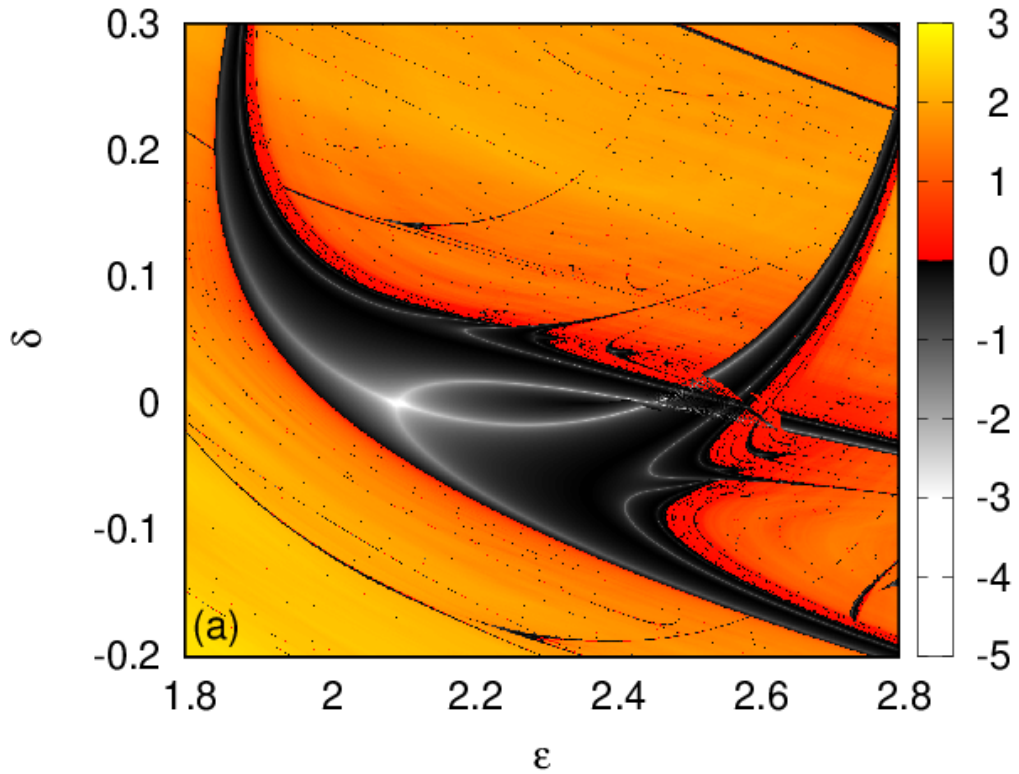


Figura 3.3: Em (a) amplificação de um conjunto complexo obtido na Fig. 3.1. Em (b) representação de uma janela periódica no diagrama bidimensional de parâmetros. Em verde está representado o endoesqueleto, em preto as curvas de duplicação de período e em vermelho as curvas de bifurcação selá-nó. Figura retirada da referência [38].

No sistema de estudo, conforme a Fig. 3.3 (a) percebe-se que há um contraste entre a região em vermelho, uma região de baixa sensibilidade às condições iniciais com a transição para a região de coloração amarelo, uma região de alta sensibilidade às condições iniciais, portanto, se referindo a região caótica da mesma.

Também, pode-se notar na região mais interna, as curvas correspondentes ao endoesqueleto da estrutura, na cor verde, que em um mapa unidimensional se refere ao conjunto de órbitas superestáveis no espaço de parâmetros bidimensional. Para um mapa dito bidimensional, apesar de similar, elas correspondem as curvas de alta estabilidade do atrator periódico. No nosso sistema de investigação, essas curvas de alta estabilidade estão representadas na cor branco na parte mais interna da estrutura complexa conforme mostrado na Fig. 3.3 (a).

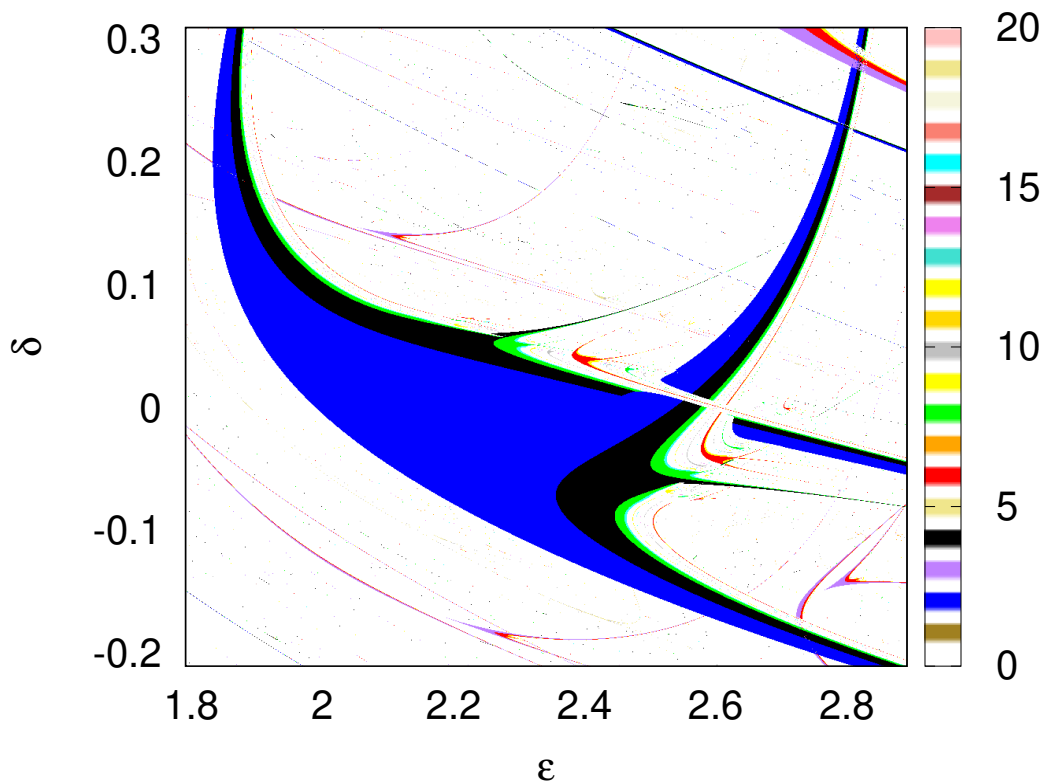


Figura 3.4: Diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo da Fig. 3.3 (a), evidenciando as estruturas periódicas.

Tendo como referência a análise da Fig. 3.3 (a) e (b), no diagrama isoperiódico mostrado na Fig. 3.4, o que se pode dizer é que o limite entre as regiões azul e branco se remete a uma bifurcação sela-nó, já o limite entre as regiões azul e preto é decorrente de uma bifurcação de duplicação do período, assim como o próximo, entre as regiões preto e verde e as demais seguintes, sofrendo assim, dobramentos de período até atingir a região caótica, caracterizando a conhecida rota para o caos por dobramento de período, ou, duplicação de período (cenário de Feigenbaum) [7].

No estudo de diagramas de espaços de parâmetros, é comum o uso de ampliações, como pode ser visualizado na Fig. 3.5. Para estudar e analisar com mais minuciosidade as estruturas presentes, ampliamos uma região da Fig. 3.3 (a) e nela pode-se observar estruturas de diferentes tamanhos que são auto similares, uma vez que o espaço de parâmetros está repleto delas e quanto mais ampliações forem feitas pode-se encontrar mais estruturas cada vez menores.

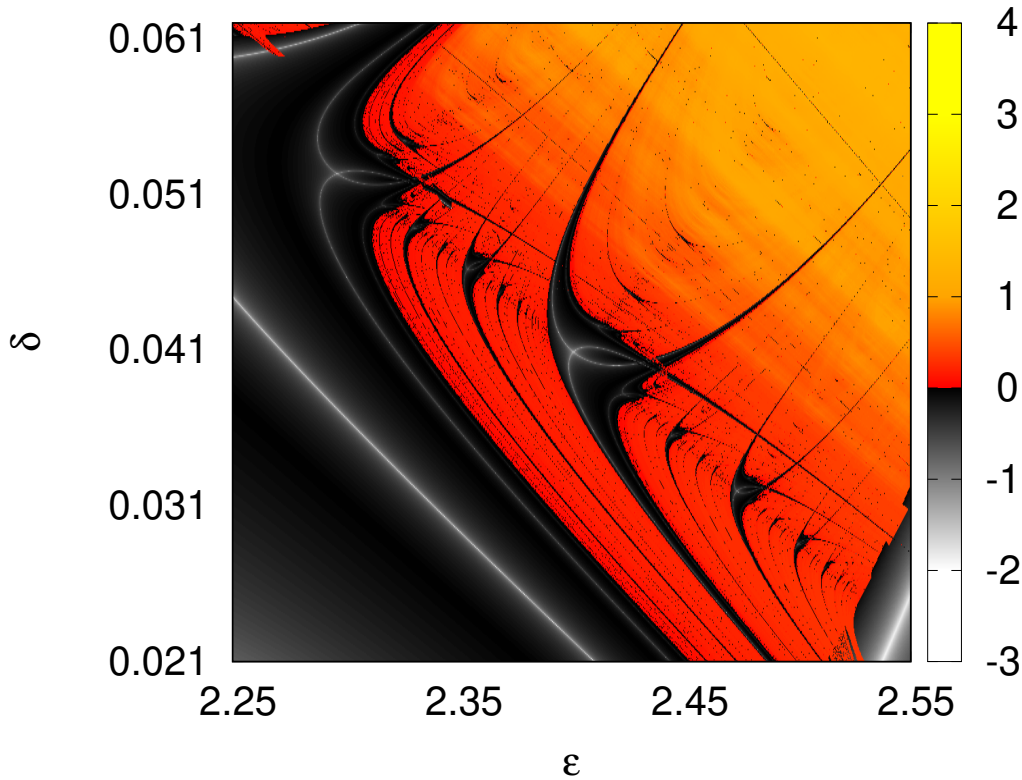


Figura 3.5: Aproximação da Fig. 3.3 (a) evidenciando as estruturas auto similares.

No desenvolvimento da Figura 3.6, pode-se perceber ao longo da estrutura complexa mais evidente surge uma cascata de conjuntos auto semelhantes. Observa-se que o maior deles tem um período três vezes o período do conjunto principal de periodicidade, e assim, há uma organização subsequente de hierarquia de períodos. Se olharmos o conjunto principal, referente a Figura 3.4 observamos que o mesmo tem período 2 (coloração azul), aqui, na Fig. 3.6 observamos que o maior conjunto auto similar tem período 6 (cor vermelha), porém caracterizado pela constante 2, logo, seu conjunto correspondente parte uma cascata de adição de período que segue como: $(3 \times 2) \rightarrow (4 \times 2) \rightarrow (5 \times 2) \rightarrow (6 \times 2) \cdot \cdot \cdot \rightarrow (p \times 2) \cdot \cdot \cdot$. Todo este cenário, caracterizado a partir de um conjunto de estruturas alinhadas a uma principal, na literatura é genericamente denominado como um conjunto complexo.

No desenvolvimento da Fig. 3.7 (a), se observa uma nova organização de estruturas complexas com um comportamento dinâmico ligeiramente diferente. Também, ainda podemos ver de forma gradativa uma região de baixa sensibilidade às condições iniciais,

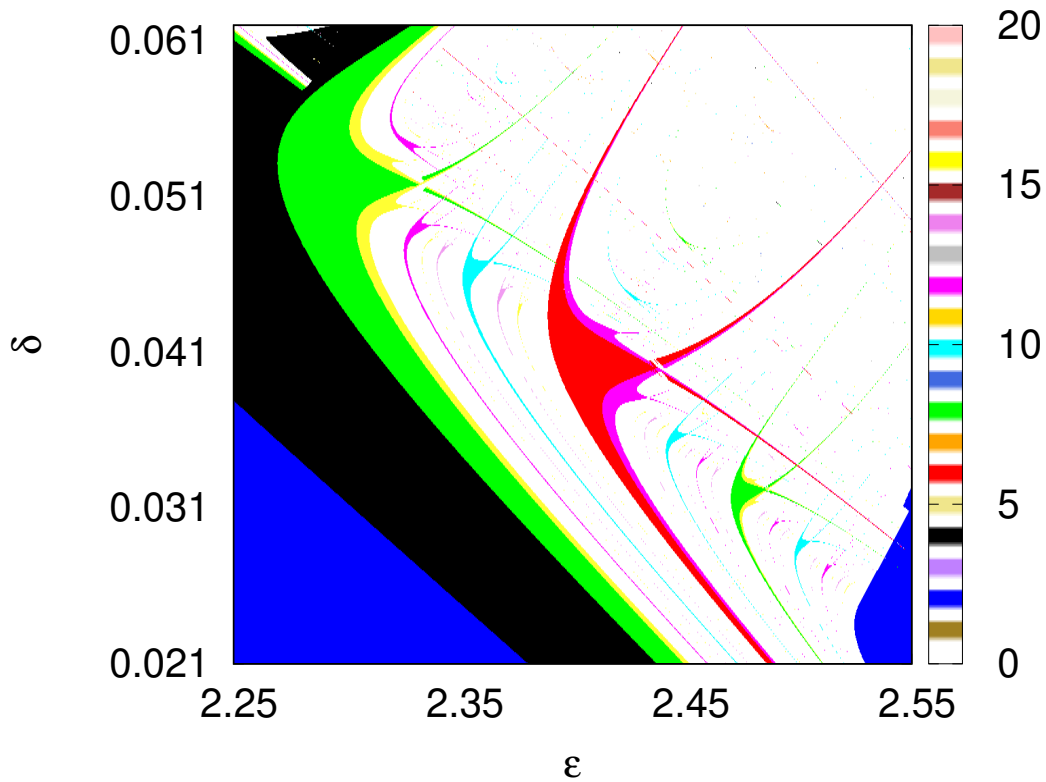


Figura 3.6: Diagrama isoperiódico evidenciando a periodicidade das estruturas analisadas na Fig. 3.5.

dada numa coloração mais avermelhada causando um contraste com a região de coloração amarelo. Vale também destacar que conforme a faixa de parâmetros $\epsilon \in [0.5, 4.5]$ e $\delta \in [-0.4, 0.8]$ evolui, é perceptível que há uma transformação suave da estrutura principal em dois novos ramos, que serão caracterizados mais adiante conforme sua organização.

Nesta discussão, vale destacar que o sistema dinâmico que estamos considerando desenvolve alguns conjuntos de periodicidade muito semelhantes ao evidenciado na Fig. 3.4 no entanto, para este caso, diante do diagrama isoperiódico mostrado na Fig. 3.7 (b) se chamarmos de P os conjuntos consecutivos referentes aos períodos podemos perceber que aqui, nesta “rua” (organização sequencial de estruturas), a medida que os domínios avançam no espaço de parâmetros há uma relação constante entre os conjuntos consecutivos que obedece uma lei de formação, tal qual nos fornece: $P_{n+1} - P_n = 1$. Assim, podemos ver que esta situação não se enquadra na discussão feita anteriormente mas a mesma se remete também a classificação de conjunto complexo apesar de aqui, o mesmo ser um pouco diferente.

Outro ponto que vale a pena notar é que, como o período principal do conjunto complexo aumenta, além do corpo central é possível encontrar para alguns sistemas do espaço de parâmetros. Este caso pode ser também encontrado neste sistema de investigação.

Ao analisar a Fig. 3.8 (a), nota-se que a mesma exibe sequências de certas estruturas semelhantes a “peixes” com caudas finas e muito longas. Essas estruturas singulares exibem

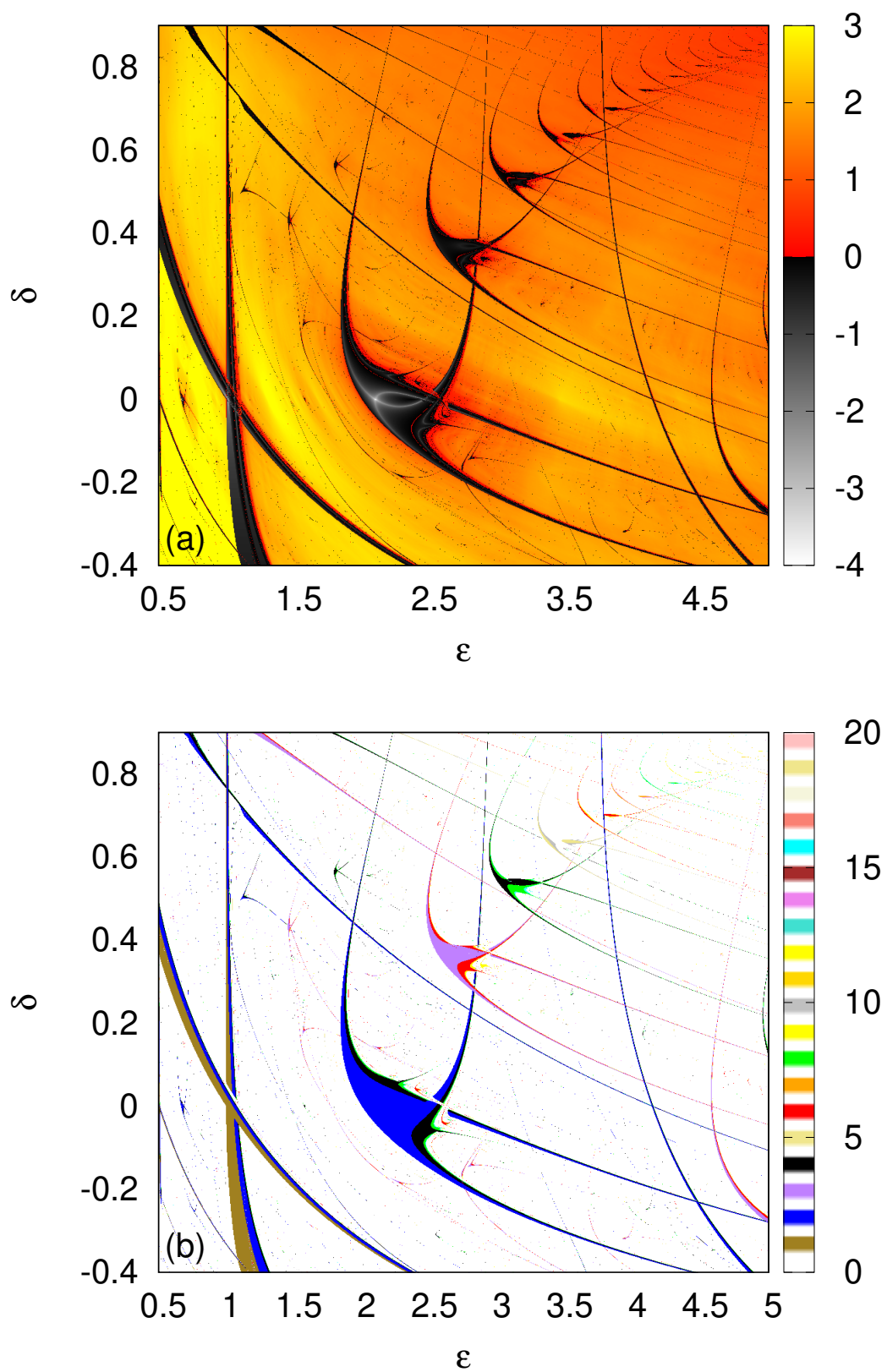


Figura 3.7: Em (a) ampliação de uma região no espaço de parâmetros colorida de acordo com o expoente de Lyapunov máximo e em (b) diagrama isoperiódico resultante da mesma região observada.

características muito importantes e sua compreensão é de grande valia. Tais estruturas foram previamente encontradas no estudo de duas famílias de sistemas dinâmicos modelados por polinômios cúbicos [39, 40]. O que se sabe e que foi demonstrado no Apêndice A da referência [40] é que a diferença de sinal entre esses polinômios cúbicos implica mudanças em vários aspectos dinâmicos dos modelos.

No que se refere ao desenvolvimento das estruturas que podem ser visualizadas tanto na Fig. 3.8 (e) e (b) quanto na Fig. 3.9, como mencionado, pode-se inferir que tais estruturas ocorrem sempre que perto do ponto fixo a dinâmica pode ser descrita por um sistema dinâmico cúbico, de forma mais específica, as mesmas estão intimamente relacionadas a uma tangência homoclínica cúbica. Seguindo este raciocínio entramos numa discussão relacionada a variedades, pois, no que se refere a essa tangência, tais estruturas se inter relacionam através de uma órbita composta por tangências cúbicas entre as variedades estável e instável de um ponto fixo.

Fazendo uma breve análise no que diz respeito a variedades, as mesmas são definidas de acordo com o estado assintótico de um conjunto de pontos, ou seja, ponto fixo tipo sela apresenta conjuntos, ligados a ele, chamados de variedades. A variedade estável é formada pelo conjunto de pontos que iterados no tempo se aproximam assintoticamente do ponto fixo. A variedade instável é o conjunto de pontos que também chega ao ponto fixo assintoticamente, mas para tempos negativos. Correspondentemente a esta definição, a intersecção das variedades estável e instável de um ponto fixo é chamada órbita homoclínica. As órbitas homoclínicas conectam pontos de equilíbrio instáveis, separando o espaço de fase em regiões que contém movimentos qualitativamente diferentes [41].

Diante de tais considerações, de forma sucinta a elucidar o que queremos mostrar, seja x um ponto fixo classificado como ponto de sela, $W^s(x)$ a variedade estável e $W^u(x)$ a variedade instável, temos que a definição segue da seguinte forma [42]:

$$W^s(x) = \{x_s \in \mathbb{R}^m : f^{[n]}(x_s) \rightarrow x, n \rightarrow \infty\} \quad (3.1)$$

$$W^u(x) = \{x_u \in \mathbb{R}^m : f^{[-n]}(x_u) \rightarrow x, n \rightarrow \infty\} \quad (3.2)$$

ou seja, resumidamente, a órbita homoclínica converge para o ponto fixo para iterações positivas e negativas. Em relação ao polinômio cúbico que corrobora para a formação de tais estruturas pode-se dizer que o aspecto mais importante é definido pelo sinal do termo cúbico, ou seja, se o termo cúbico for negativo, há o surgimento de uma estrutura do tipo *spring-area*, conforme mostrado através da Fig. 3.8 (a) e (b). Se for positivo, há o surgimento da estrutura do tipo *saddle-area*, tal qual será apresentada na Fig. 3.9.

Ainda fazendo uma breve análise do diagrama exibido na Figura 3.8 (a) pode-se notar que no seu interior há a presença de linhas/curvas de cor cinza, na parte mais interna da estrutura. Tais curvas dizem respeito às curvas de alta estabilidade deste

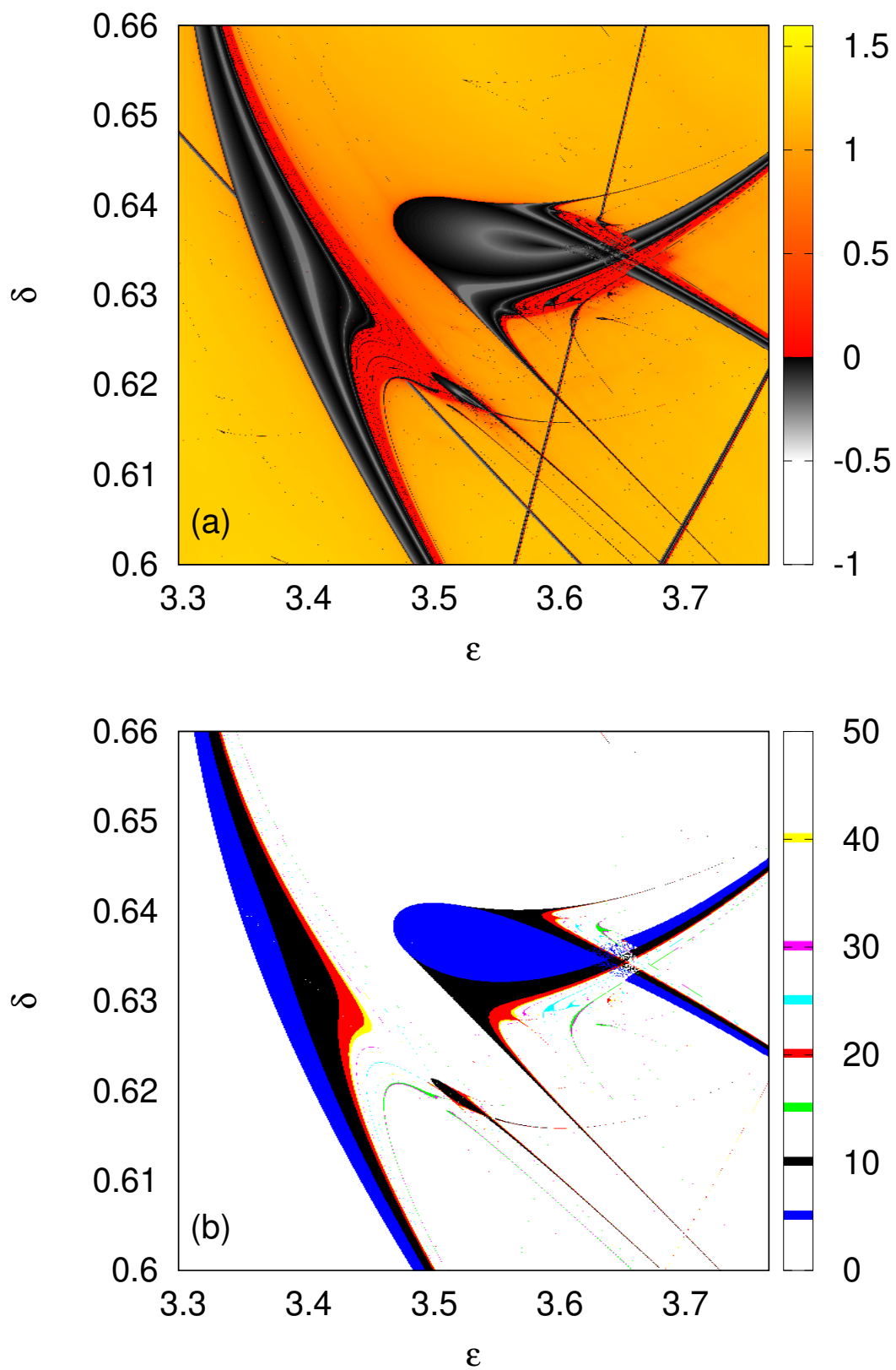


Figura 3.8: Em (a) diagrama das estruturas resultantes de tangências homoclínicas cúbicas mencionadas. Em (b) diagrama isoperiódico onde pode-se ver o que se conhece como estrutura *spring-area*.

estrutura, característica esta, que pôde ser observada nas estruturas esboçadas e analisadas anteriormente.

Ao analisar o diagrama isoperiódico, visualizado a partir do desenvolvimento da Fig. 3.8 (b) percebe-se que o mesmo não segue nenhum padrão antes visualizado. Este diagrama, diferente dos vistos até agora, exibe em relação à escala de cores uma estrutura onde o período do maior conjunto é 5 (em azul) e os seguintes, são multiplicados por 5, ou seja, órbitas periódicas que seguem uma sequência/progressão no formato $P = 5 \cdot 2^{k-1}$ com $k \in \mathbb{N}^*$.

No que se refere ao raciocínio mencionado anteriormente, advindo de um sistema modelado por polinômios cúbico, para a estrutura em questão, esboçada através da Fig. 3.9 nota-se que a mesma também apresenta uma característica singular referente ao seu formato, diferente das observadas até agora. No que se refere as curvas de alta estabilidade, aqui, novamente elas podem ser observadas na região mais interna da figura, na cor cinza, assim como foi analisado na estrutura anterior.

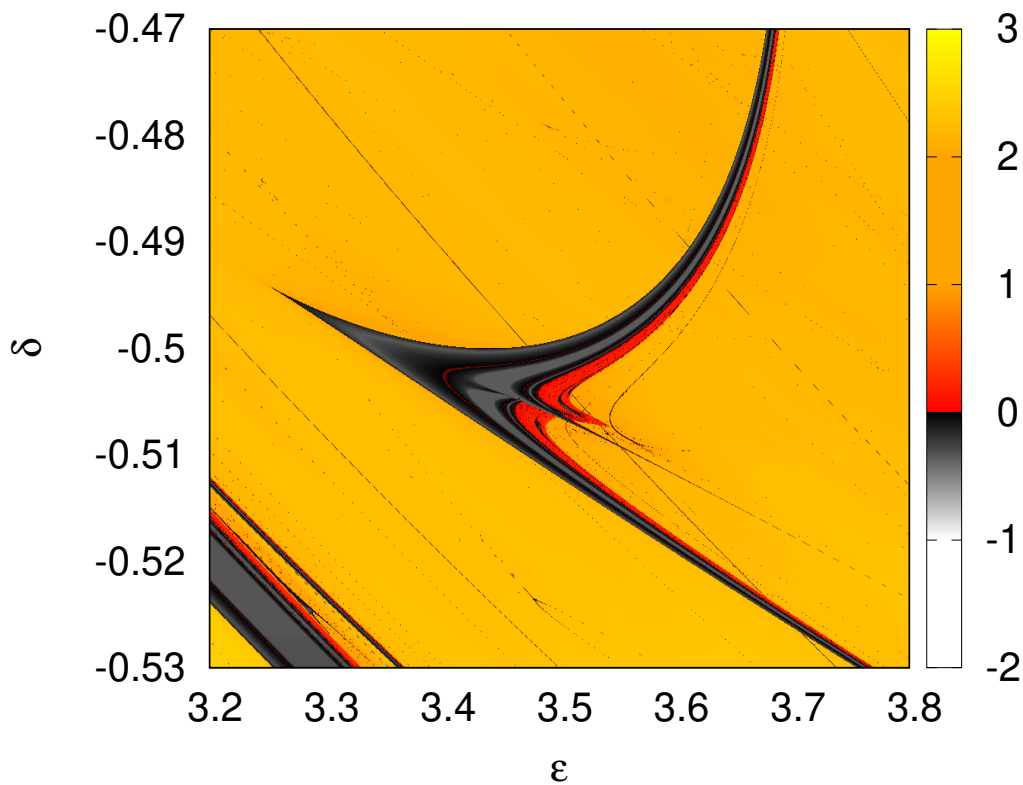


Figura 3.9: Diagrama das estruturas resultantes de tangências homoclínicas cúbicas mencionadas. Aqui se pode ver o que se conhece como estrutura *saddle-area*.

Em relação ao surgimento de tais estruturas, podemos observá-las a medida que são feitas ampliações, onde mais estruturas idênticas, cada vez menores surgem no espaço de parâmetros. No que se refere ao seu desenvolvimento, que está intimamente relacionado com o sinal do termo cúbico, se o mesmo for positivo, a estrutura é do tipo “cúspide”, ou, *saddle-area* [43, 44, 45].

Através do desenvolvimento do diagrama isoperiódico da Fig. 3.10 é possível identificar esta estrutura que por característica segue uma regra: $P = k \times 2^n$ onde k é o período do corpo principal. Assim, podemos perceber que o corpo principal tem período $k = 2$ que é mostrado na cor azul, o preto corresponde ao período 4, o ciano, indica o período 8 e assim por diante. Portanto, observamos que o espaço de parâmetros está repleto de tais estruturas periódicas para este sistema e a medida que puderem ser feitas mais ampliações, a possibilidade de se observar mais destas estruturas em formatos e diferentes configurações aumenta. Vale ressaltar também que apesar de encontramos diversas estruturas semelhantes em diferentes regiões do espaço de parâmetros as mesmas podem apresentar diferentes conjuntos de periodicidade.

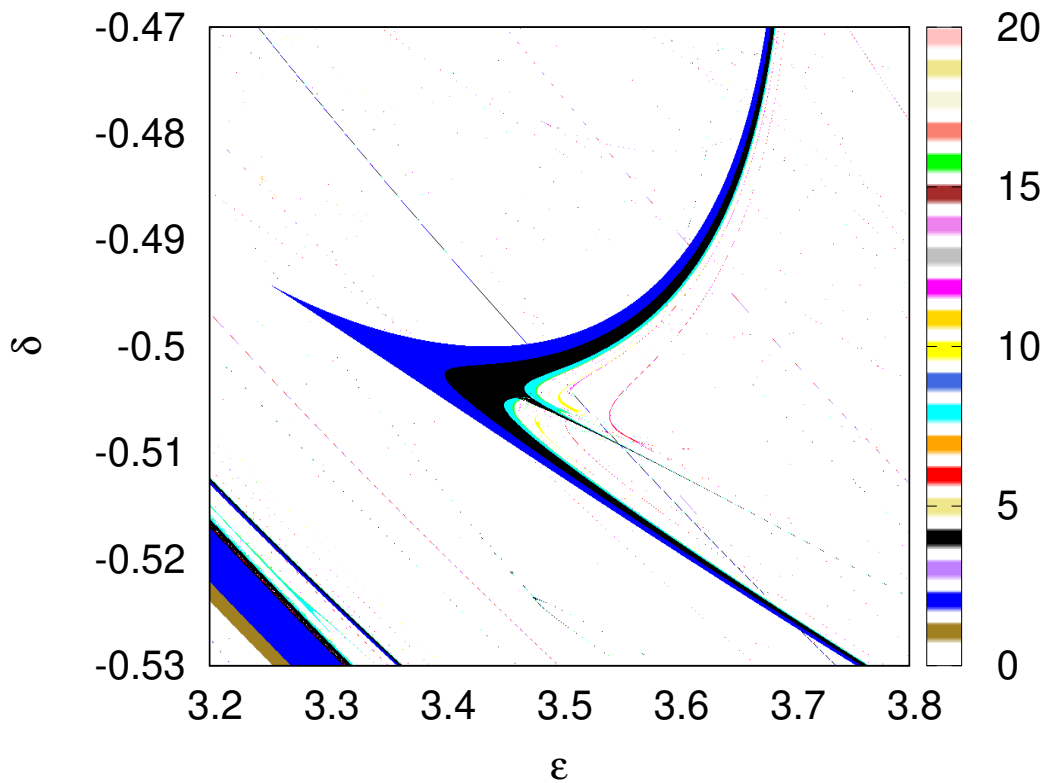


Figura 3.10: Diagrama isoperiódico resultante do intervalo δ vs ϵ da Fig. 3.9.

Ao longo das simulações pudemos perceber que a medida que variamos δ vs ϵ , estruturas de diferentes formas, tamanhos e repleta de informações surgem no espaço de parâmetros, que é o caso da Fig. 3.11 abaixo, onde observa-se a evolução das estruturas a partir de uma “rua” (conjunto organizacional de estruturas complexas) do diagrama de estudo e a

Fig. 3.12 que mostra informações complementares a respeito do diagrama isoperiódico da mesma.

De acordo com a Fig. 3.11 visualiza-se características do comportamento caótico de tais estruturas complexas, o que está intimamente relacionado com a magnitude do maior expoente de Lyapunov evidenciado pela paleta de cores ao lado do diagrama. Já na Fig. 3.12 observa-se o comportamento periódico para esta mesma região, evidenciando que tais estruturas se organizam através de uma associação de períodos. Tal conjunto organizacional é formada por uma cascata evidenciando a adição de períodos, ou seja, o arranjo parte da estrutura de cor azul, período 5, em sequência $5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \dots$, que aumenta a periodicidade de um montante igual à unidade, conforme se observa a partir da paleta de cores ao lado da mesma.

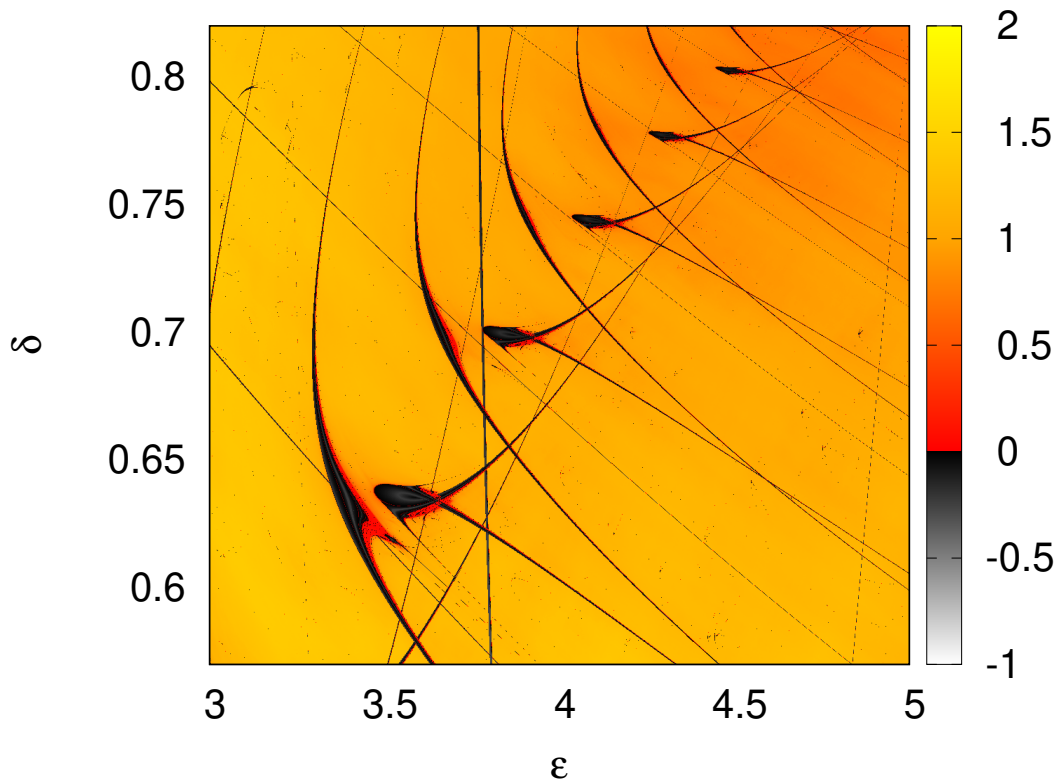


Figura 3.11: Espaço de parâmetros evidenciando um conjunto de organização de estruturas do tipo *spring-area*.

Como foi tratado anteriormente, o surgimento de tais estruturas no espaço de parâmetros está atrelado a presença de tangências homoclínicas cúbicas. Neste sistema de investigação foi possível encontrar estruturas complexas do tipo *spring-area* e algumas cascatas neste mesmo formato e configuração. Além disso, também foi possível encontrar estruturas complexas conhecidas como *saddle-area*, mas aqui, cascatas dessas estruturas não foram verificadas.

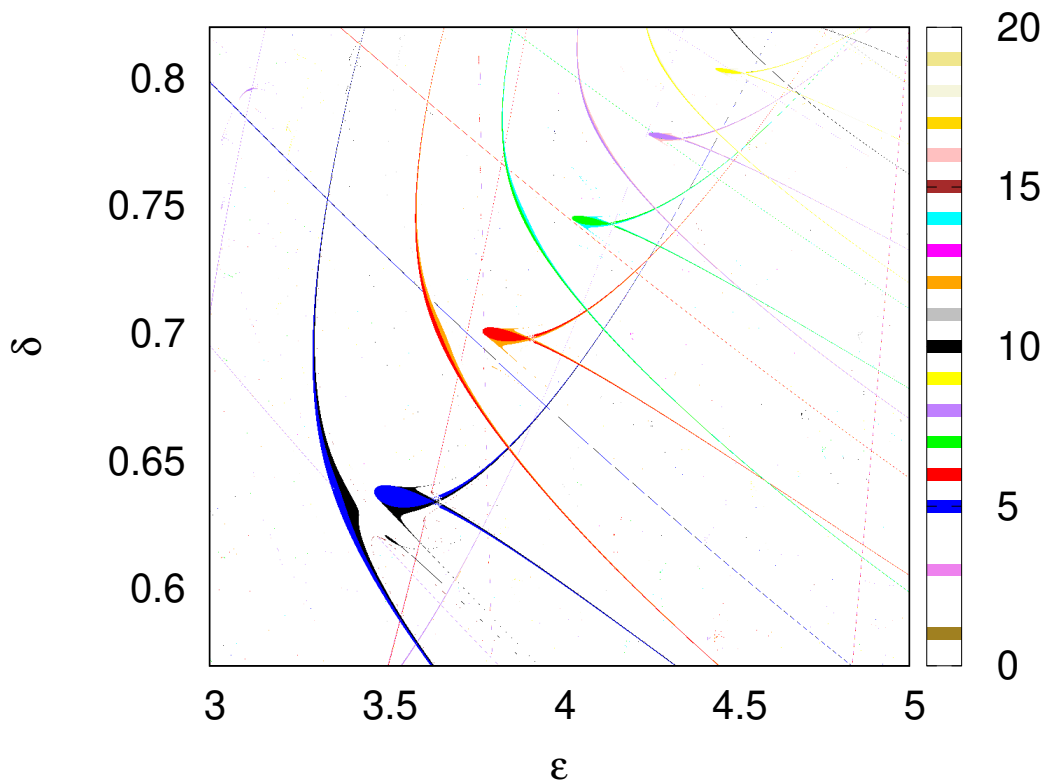


Figura 3.12: Diagrama isoperiódico correspondente a Fig. 3.11.

Além dessas estruturas complexas que surgem no espaço de parâmetros, tais quais foram evidenciadas até agora, também pôde-se abordar características interessantes ao se observar a Fig. 3.13 tal qual é evidenciada novamente outra “rua” onde há a presença de estruturas centradas em $\delta = 0$. Tal configuração foi recuperada ao analisar o intervalo $0.15 \leq \epsilon \leq 0.95$ onde, fica nítido a presença de estruturas complexas que estão separadas por duas curvas alongadas que atravessam o diagrama. Nota-se que essas estruturas complexas novamente apresentam uma certa simetria entre si, recuperando a ideia e particularidades do que é um conjunto complexo [30].

Ao analisar a Fig. 3.13 (a) que diz respeito ao expoente de Lyapunov máximo é possível visualizar na parte mais interna da estrutura as curvas de alta estabilidade, que estão variando na transição do branco ao cinza, já entre as cores preto e laranja, onde marca o surgimento de tal estrutura e a região do laranja ao amarelo destacando a região caótica de tal diagrama.

A fim de ilustrar e evidenciar a periodicidade de tal região, elaboramos a Fig. 3.13 (b). Através dela, pode-se notar que diferente da estrutura complexa mais evidente presente no diagrama que evidencia período 2, vide Fig. 3.4, as diferentes estruturas alongadas que atravessam todo o diagrama apresentam somente período 1. Também, visualiza-se que entre cada cruzamento dessas estruturas há a presença de uma estrutura complexa, o que pode confirmar ainda mais a simetria entre tais organizações e estruturas.

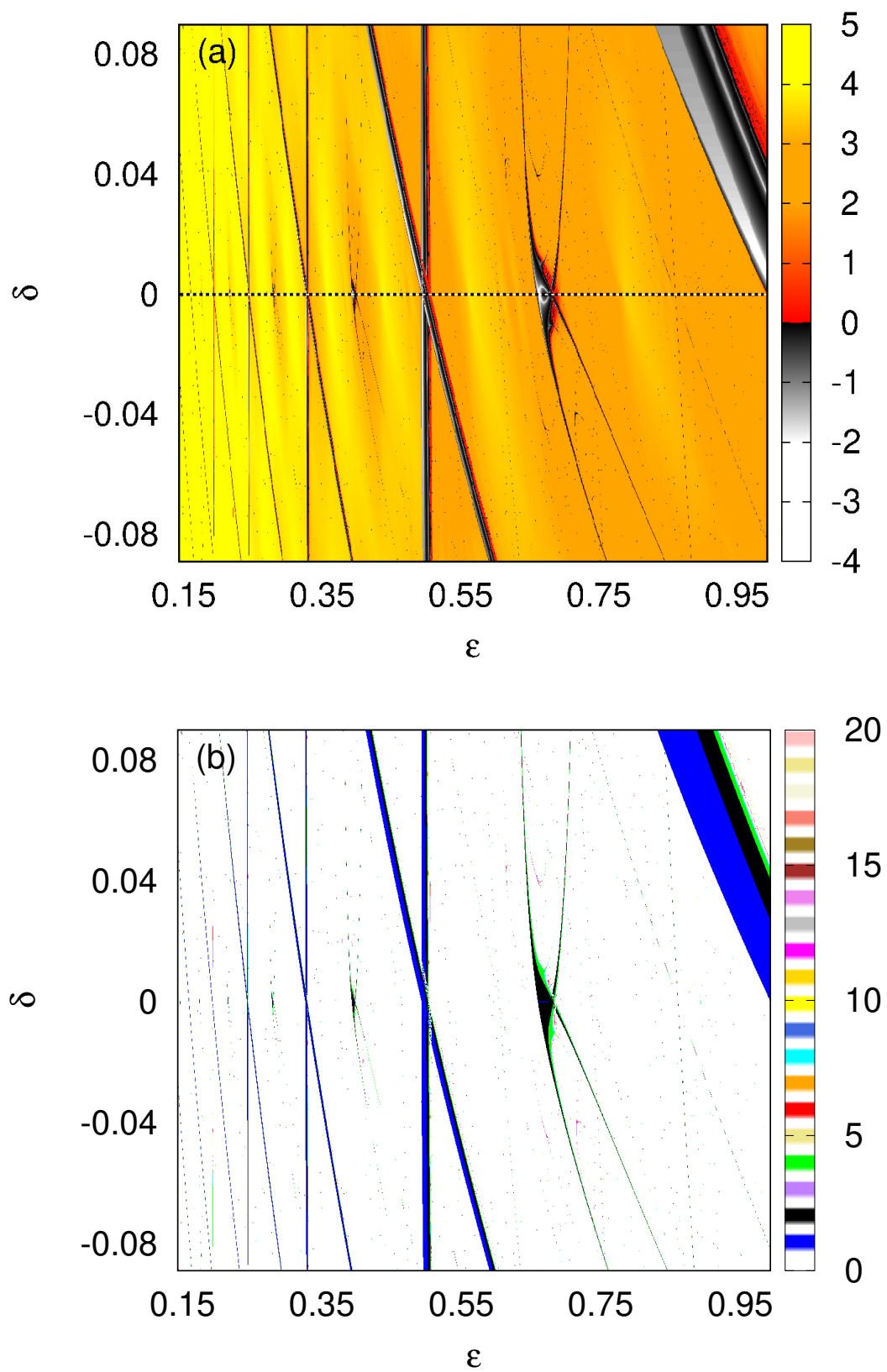


Figura 3.13: Em (a) diagrama evidenciando a simetria das estruturas em relação a $\delta = 0$. Já em (b), diagrama isoperiódico evidenciando a mesma simetria observada.

Até o momento, todas as simulações de larga escala desenvolvidas nesta seção, além de vislumbrar características de grande importância e relevância acadêmica serve de base para uma estudo que visa estender a dinâmica de acordo com a equação (2.1) para outros valores do parâmetro γ , tal qual pretende-se discutir na seção 3.2 deste mesmo texto. Vale ressaltar mais uma vez que a dinâmica e as diferentes estruturas visualizadas até a presente seção pode ser estendida e evidenciada para outros mapeamentos e a sua compreensão é de grande valia para a comunidade científica.

3.2 Diagrama do espaço de parâmetros para o modelo *Bouncer* dissipativo

Como pôde ser destacado até agora, o espaço de parâmetros está repleto de diferentes estruturas com diferentes tamanhos que demandam grande cunho investigativo para serem compreendidas e que dotam de grande similaridade. Cabe evidenciar que tais estruturas podem ser encontradas em diversos artigos científicos [36, 44, 45].

Para o desenvolvimento desta seção levamos em consideração não somente a variação do parâmetro γ mas além disso, a fração antes vista no segundo termo da equação (2.1) foi suprimida, ou seja, mudança esta que faz com que a variável I_{n+1}^γ seja, a partir de agora, um numerador. Este ajuste foi necessário para que assim, pudéssemos recuperar um modelo físico que apresenta aceleração de Fermi, ou seja, uma versão dissipativa do modelo *Bouncer* [24] na forma:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = |\delta I_n - (1 + \delta)\epsilon \sin(2\pi\theta_n)| \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}^\gamma \end{cases} \mod(1), \quad (3.3)$$

De forma sucinta o modelo do acelerador de Fermi foi introduzido em 1949 por Enrico Fermi na tentativa de explicar a aceleração de raios cósmicos na presença de campos magnéticos oscilantes [46]. O sistema consiste de uma partícula clássica confinada ao interior de duas paredes rígidas sendo uma delas fixa enquanto que a outra move-se periodicamente no tempo. Desde os estudos pioneiros de Fermi esse modelo vem sendo estudado em vários contextos e com várias generalizações. Uma outra versão do modelo, conhecida como modelo *Bouncer* consiste em uma partícula clássica movendo-se sob a influência de um campo gravitacional constante e que por sua vez colide elasticamente (quando há conservação da energia a partir da colisão) com uma parede rígida que move-se periodicamente no tempo [13, 47]. Já na sua versão dissipativa, tal qual nosso modelo recupera, um dos modos de introduzir a dissipação é através de colisões inelásticas (quando não existe conservação de energia) com a parede móvel o que implica na existência de um coeficiente de restituição $\delta \in [0,1]$ que governa a dissipação de modo que, a cada colisão,

a partícula sofre uma perda fracionária de energia [24].

Como forma de ilustrar a dinâmica investigada, o primeiro passo foi a investigação do espaço de parâmetros utilizando o parâmetro $\gamma = 1$. Foi possível esboçar o diagrama conforme a Fig. 3.14 que mostra uma visão geral do comportamento da dinâmica do mapeamento em questão. Para esta simulação mantivemos como condição inicial $I_0 = \theta_0 = 0.4$ e os intervalos de parâmetros foram discretizados em uma malha de $10^3 \times 10^3$ pontos. Para cada valor do parâmetro foi descartado um transiente de 10^6 pontos.

Para este caso, pôde-se visualizar estruturas semelhantes as visualizadas anteriormente. Também, foi possível observar neste intervalo de parâmetros a predominância de regiões de comportamento caótico (em amarelo, laranja e vermelho) e uma pequena região de periodicidade e ponto fixo (preto e branco respectivamente).

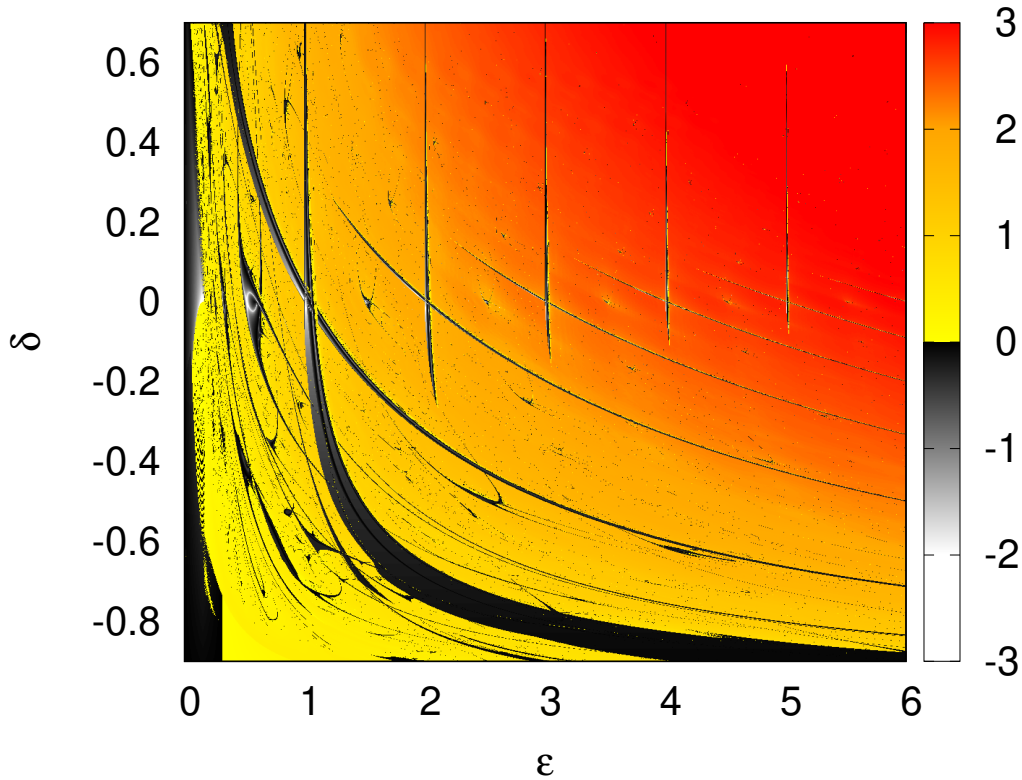


Figura 3.14: Espaço de parâmetros evidenciando estruturas imersas em região caótica para o parâmetro de controle $\gamma = 1$.

Na Fig. 3.14 e na ampliação desenvolvida de acordo com a Fig. 3.15 é notório a presença de uma estrutura complexa mais evidente contendo em seu interior duas linhas de cor branca, que se referem as curvas de alta estabilidade do atrator periódico. Além disso, pode-se notar o aparecimento de duas curvas que atravessam todo o espaço de fases, o que também já pôde ser destacado de acordo com as Figs. 3.1, 3.7 (a) e 3.13 (a), já observados na seção 3.1. Também, observa-se um alinhamento das estruturas em $\delta = 0$. Nota-se que a medida que δ vs ϵ evolui no espaço de parâmetros tais curvas vão vagamente sendo suprimidas pelo grande mar de caos. Para este modelo, de antemão, observa-se um espaço

de parâmetros repleto de diferentes conjuntos e composições de estruturas imersas na região caótica.

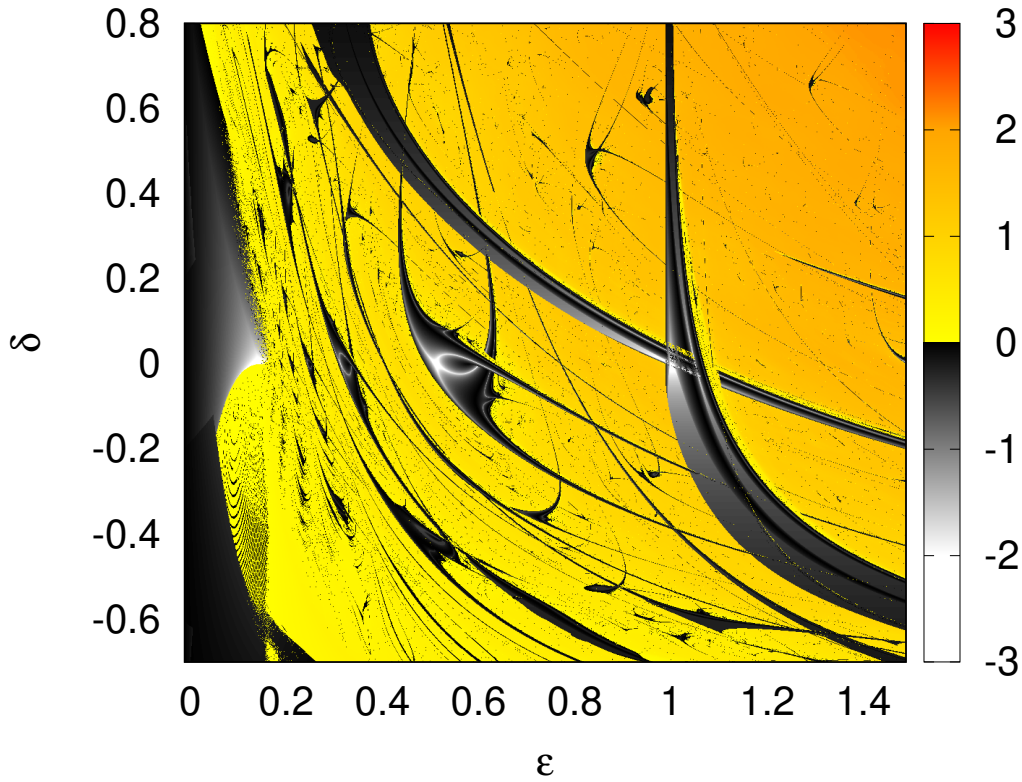


Figura 3.15: Espaço de parâmetros evidenciando estruturas imersas em região caótica para o parâmetro de controle $\gamma = 1$.

Além disso, nos propomos a construção do diagrama isoperiódico a partir da ampliação referente ao mesmo conjunto de parâmetros, de acordo com a Fig. 3.16 (a) e (b) onde fica nítido a presença de uma estrutura complexa mais evidente de período 2 (na cor azul), seguido por uma certa organização de várias outras estruturas complexas subsequentes. Além disso, vê-se duas curvas de período 1 e 2 que atravessam todo o espaço de parâmetros. Notamos, para este caso, que as estruturas se organizam na forma $2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$ porém, se observa que as estruturas de período 3 que surge entre essa cascata, são estruturas do tipo *saddle-area*, apresentando uma característica singular desde sistema, ou seja, para tal conjunto de parâmetros observa-se diferentes organizações e estruturas compondo uma mesma região.

O que se observa, para este caso, recuperando o modelo *bouncer* na sua versão dissipativa, é uma dinâmica que revela diferentes comportamentos e organizações estruturais existentes. Nesta seção, busca-se entender a complexidade de tais conjuntos organizacionais e explorar algumas janelas periódicas, além de suas características mais fundamentais.

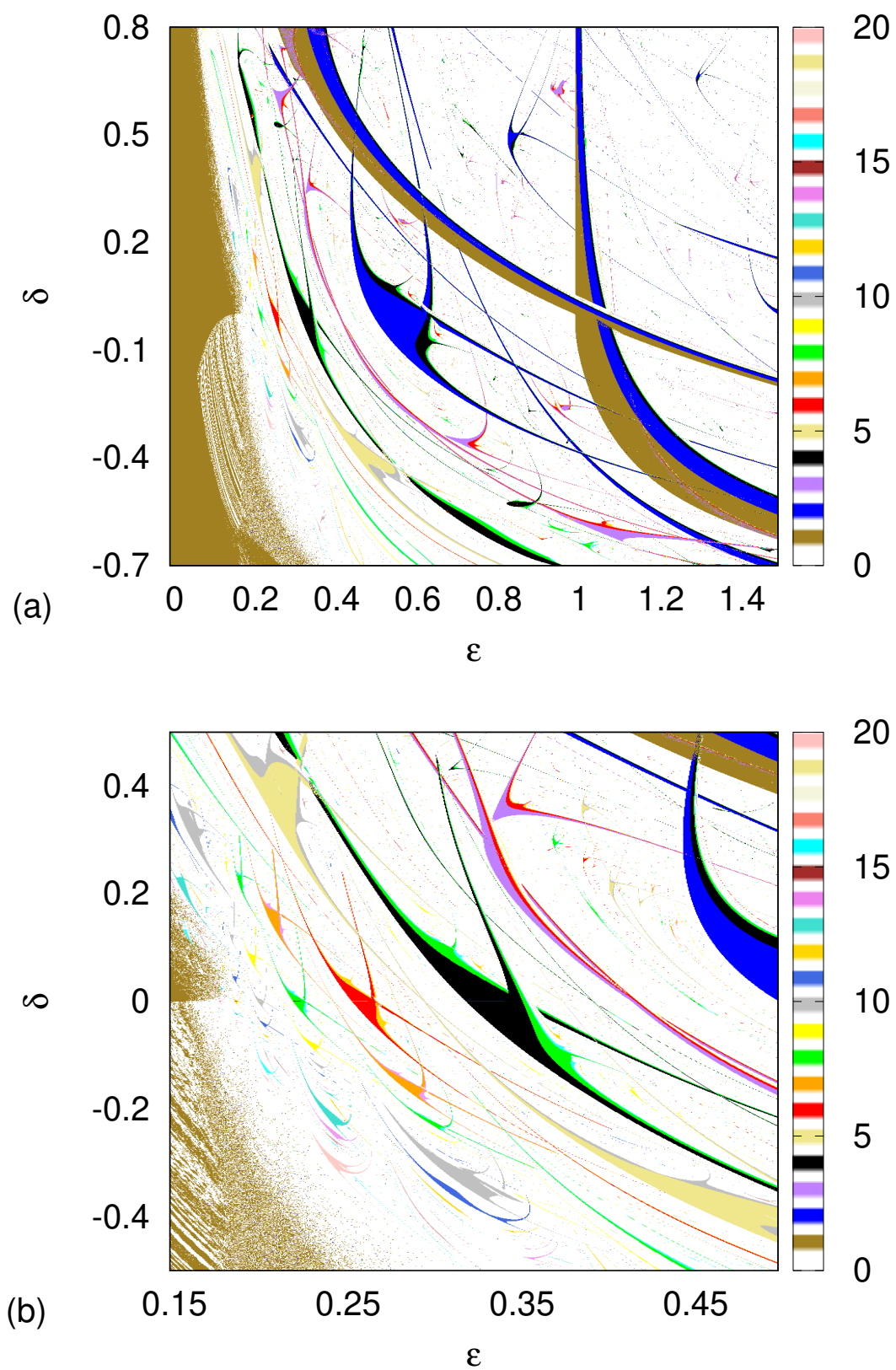


Figura 3.16: Em (a) diagrama isoperiódico evidenciando as diferentes estruturas que compõem uma região do espaço de parâmetros. Em (b) uma ampliação do mesmo conjunto de parâmetros δ vs ϵ para $\gamma = 1$.

A fim de ilustrar com mais lucidez as estruturas presentes no espaço de parâmetros, traçamos o diagrama do maior expoente de Lyapunov para uma nova janela periódica. Nela, observa-se que a dinâmica caótica se faz presente, sendo indicado na Fig. 3.17 pela transição das cores que varia do amarelo ao vermelho. As regiões coloridas em preto dizem respeito às regiões periódicas no espaço de parâmetros, que por sua vez, evidenciam diferentes estruturas.

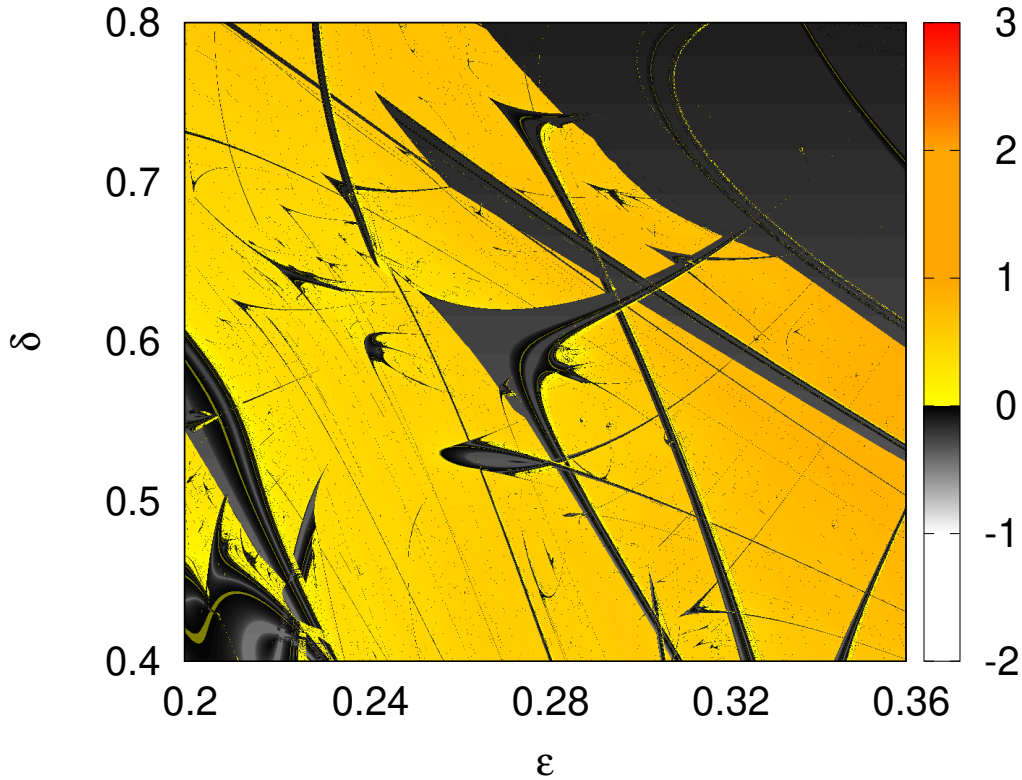


Figura 3.17: Diagrama do expoente de Lyapunov máximo evidenciando diferentes estruturas presentes no espaço de parâmetros utilizando $\gamma = 1$.

De forma a exemplificar as diferentes características do modelo, destacamos a construção da Fig. 3.18, tal qual, exibe um diagrama isoperiódico com uma vasta riqueza em informações. Nele, observa-se diferentes tipos de estruturas, tanto *saddle-area* quanto estruturas do tipo *spring-area* para um mesmo intervalo de parâmetros. Savin [48] mostra que, no estudo da dinâmica de dois mapas de Hénon acoplados, que ao se alterar o parâmetro de dissipação do sistema, as regiões periódicas existentes se moviam pelo espaço paramétrico, ou seja, mudavam sua localização e também seu tamanho. Acontece que, para um determinado valor de dissipação do sistema, uma das regiões periódicas colide com a região periódica principal o que resulta em uma “fusão” de toda a estrutura com a área periódica principal.

No sistema de investigação, diante da construção da Fig. 3.18 observa-se tais características mencionadas, para alguns intervalos de parâmetros do sistema. Em um sistema dito não linear, para um mesmo conjunto de parâmetros e condições iniciais distintas, o

mesmo pode apresentar mais de uma solução. Isto é denominado coexistência de atratores [49, 50]. O conjunto de condições iniciais no espaço de fase cujas trajetórias convergem, após um regime transitório para um dado atrator é denominado bacia de atração deste atrator .

Uma determinada região do espaço de parâmetros pode estar relacionando diferentes singularidades do mapeamento com propriedades de estabilidade possivelmente diferentes. Tais singularidades residem no fato de que certas mudanças de estabilidade estruturais causam eventos de bifurcação no sistema. De acordo com Mira [51] e Carcasses [52] três estruturas fundamentais de bifurcação (também chamadas de áreas de comunicação) podem ser definidas no plano de parâmetro. Essas áreas de comunicações estão associadas a três disposições típicas de curvas de bifurcação de dobra e flip (duplicação de período) em um plano de parâmetro associado a um mapa, são elas: a *crossroad-area*, a *saddle-area* e a *spring-area* e, neste sistema, observa-se a presença delas.

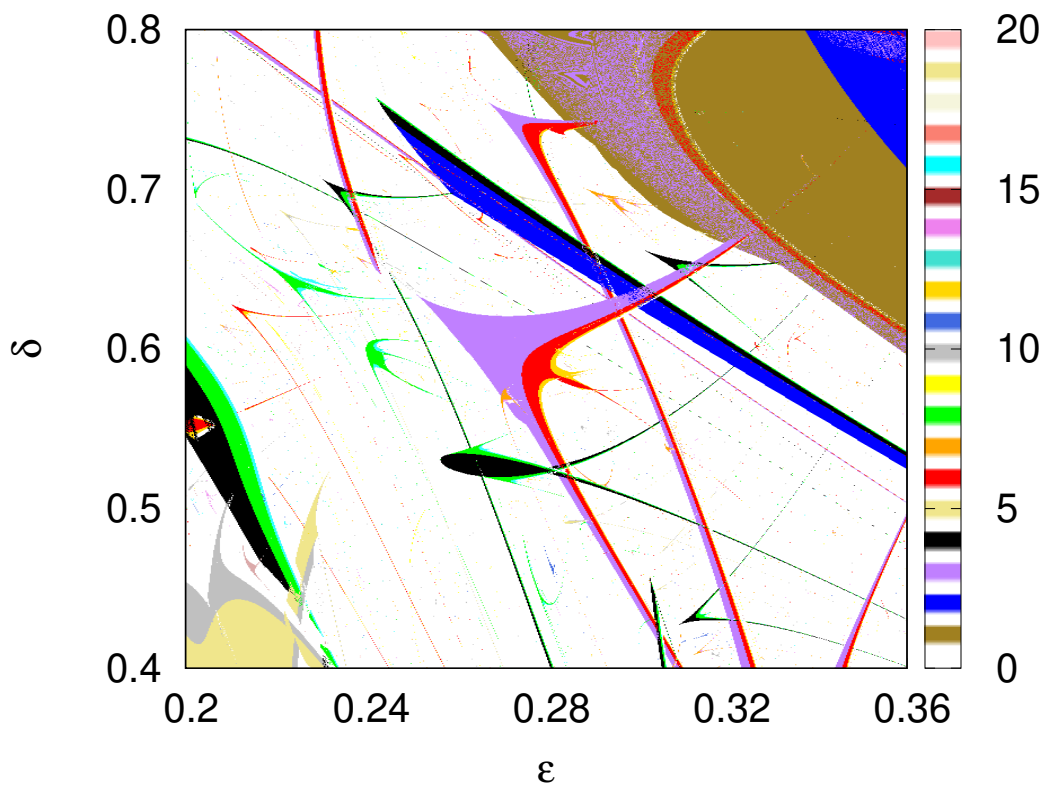


Figura 3.18: Diagrama isoperiódico evidenciando diferentes estruturas que compõe uma mesma região do espaço de parâmetros utilizando $\gamma = 1$.

Ao levar em consideração tal análise, de acordo com a Fig. 3.18 sucessivas ampliações nessas regiões, a partir de simulações em larga escala, demonstram que tais cascatas apresentam estruturas de períodos superiores a 15, conforme a paleta de cores posicionada ao lado da mesma. O que também chama a atenção em tal diagrama, é a região mais interna da estrutura *saddle-area* mais evidente do diagrama, região de período 3. Nela, a partir das curvas de duplicação de período, ou seja, na região de período 6, vê-se suavemente o

nascimento de uma nova estrutura no sistema, formando duas novas pernas com período 6, ou seja, as estruturas sofrem alterações qualitativas quando o terceiro parâmetro γ varia, o que acarretará em uma transformação dessa estrutura em dois novos arranjos, sendo uma delas uma nova estrutura do tipo *spring-area*. Essa transição suave entre estruturas de um tipo de área para outro foi observada por Carcasses [53] ao analisar um “mecanismo” de transição a partir da evolução das curvas de bifurcação no plano de parâmetros a partir de um mapa unidimensional típico.

Também, não menos importante, destaca-se uma região na parte superior direita do diagrama novamente a característica de coexistência de duas órbitas periódicas, é notório o destaque de uma região rasa de período 3 que sobrepõe uma região de período 1. Essas regiões dizem respeito as curvas que atravessam todo o espaço de parâmetros, como pôde ser evidenciado de acordo com a análise da Figura 3.14.

Analisando as estruturas evidenciadas pela Fig. 3.18, nota-se claramente que há uma linha diagonal mais acima da estrutura mais evidente onde há o surgimento de uma cascata de estruturas do tipo *saddle-area*, ampliada na Fig 3.19. Nela também podemos ver, que outras sequências de estruturas cada vez mais microscópicas vão surgindo, conforme é mostrado no diagrama isoperiódico da Fig. 3.20 onde nota-se há uma sequência de período $4 \rightarrow 8 \rightarrow 6$ e outras estruturas subsequentes compondo o mesmo cenário.

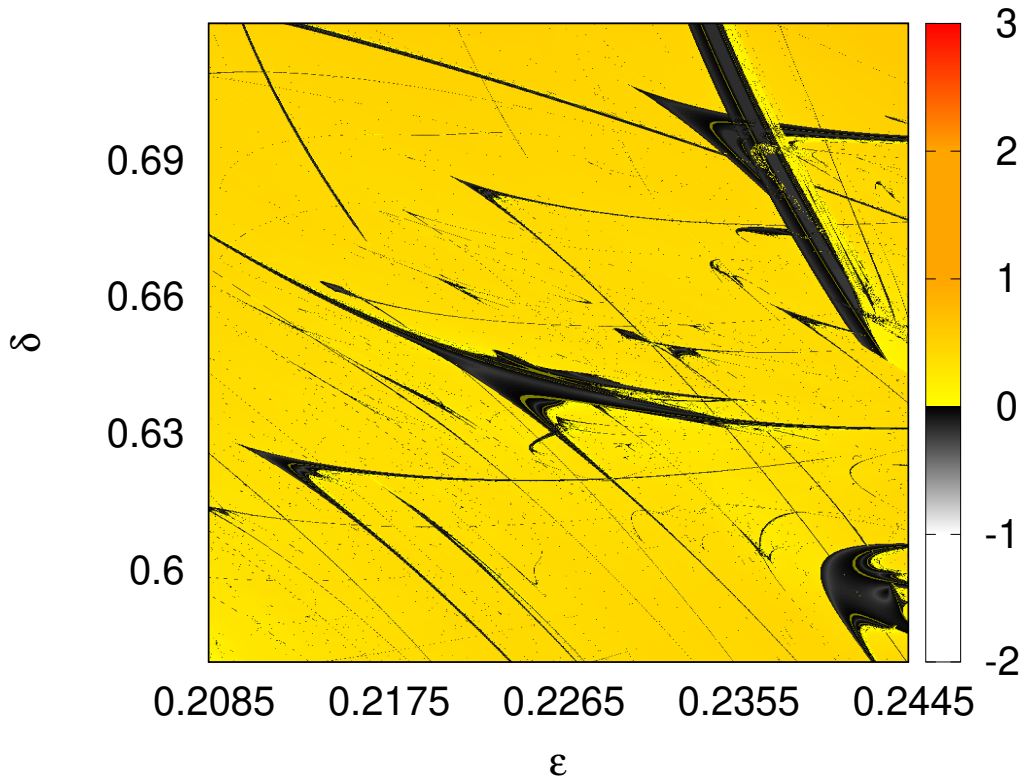


Figura 3.19: Diagrama do expoente de Lyapunov máximo evidenciando uma cascata de estruturas *saddle-area* compondo uma mesma região do espaço de parâmetros, utilizando $\gamma = 1$.

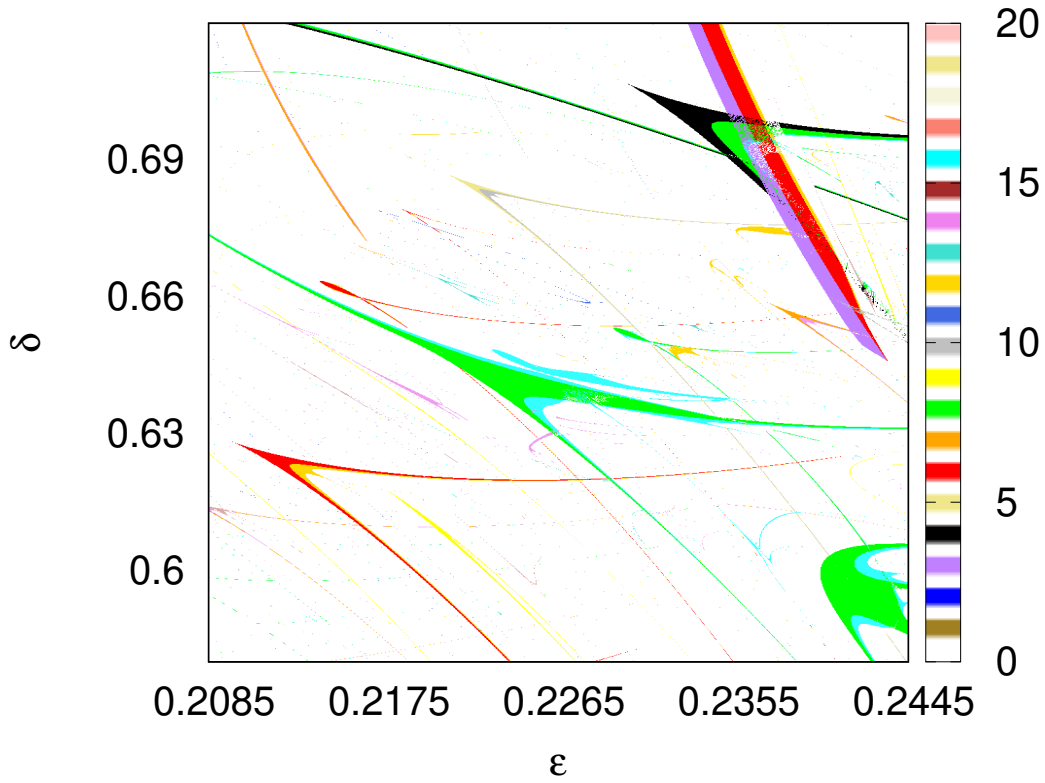


Figura 3.20: Diagrama isoperiódico para o mesmo conjunto de parâmetros da Figura 3.19 evidenciando os períodos de tal cascata de estruturas *saddle-area*.

Do que foi discutido e observado até agora, sabe-se que o espaço de parâmetros está repleto de diferentes organizações de estruturas compondo uma mesma região. O que também chama a atenção para este sistema de investigação é a composição estrutural observada de acordo com a ampliação de uma região do espaço de parâmetros evidenciada de acordo com a Fig. 3.21 (a) e (b) que esboça o diagrama isoperiódico para tal intervalo de parâmetros.

A Fig. 3.21 (a) evidencia o diagrama do expoente de Lyapunov máximo, que se faz necessário visto que, pode-se melhor entender a complexidade de tais estruturas imersas no regime caótico. Aqui, fica claro a essas estruturas complexas surgem aos pares, ou seja, uma estrutura do tipo *saddle-area* com o mesmo período de uma estrutura *spring-area*, como visualiza-se pela Fig. 3.21 (b). Tal fato se comprova ao observar a paleta de cores ao lado direito da figura que mostra uma sequência de estruturas de período $8 \rightarrow 12 \rightarrow 16 \rightarrow 20 \rightarrow 24 \rightarrow \dots$ exibindo uma variação com acréscimo de fator 4 em unidades de período. Tal peculiaridade do sistema, de estruturas em diferentes configurações estruturais porém de mesma periodicidade foi verificada por Endler e Gallas [45] em seus estudos a partir de um sistema dinâmico a tempo discreto sem pontos críticos.

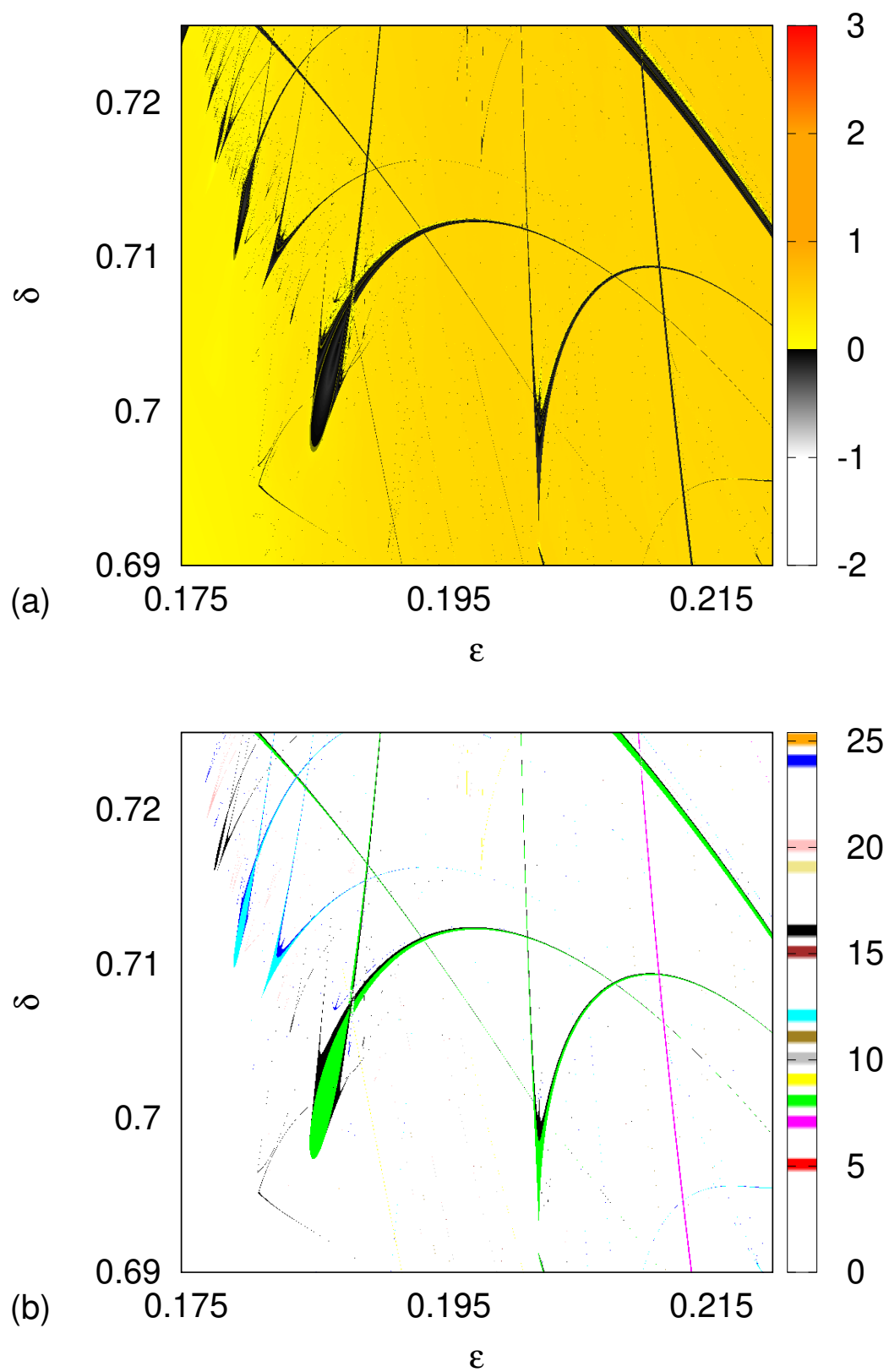


Figura 3.21: Estruturas *saddle-area* e *spring-area* observadas aos pares no espaço de parâmetros. Em (a) diagrama do expoente de Lyapunov máximo e em (b) diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo de parâmetros utilizando $\gamma = 1$.

De acordo com as Figs. 3.22 e 3.23 observa-se outro conjunto de estruturas notáveis no espaço de parâmetros. Aqui, se vê uma ligeira organização de estruturas *saddle-area* que evoluem de acordo com que δ varia, tal fato pode ser corroborado ao se analisar o diagrama do expoente de Lyapunov máximo, de acordo com a Fig. 3.22. Observa-se que tal organização de estruturas periódicas, dado pela região colorida na cor preta diante da paleta de cores, está imersa no regime caótico, dado pela transição do amarelo ao vermelho e evidenciam que independente do decrescimento de tais estruturas a medida que δ *vs* ϵ evolui, há a presença do fenômeno de adição de período entre elas, ou seja, tal organização parte de uma estrutura de período 6 na cor vermelha e segue em sequência $6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$ mostrando que há um aumento de periodicidade de um montante de fator 1. Tal organização se assemelha a discussão feita a respeito da Fig. 3.20 onde observou-se o surgimento de uma cascata dessas estruturas.

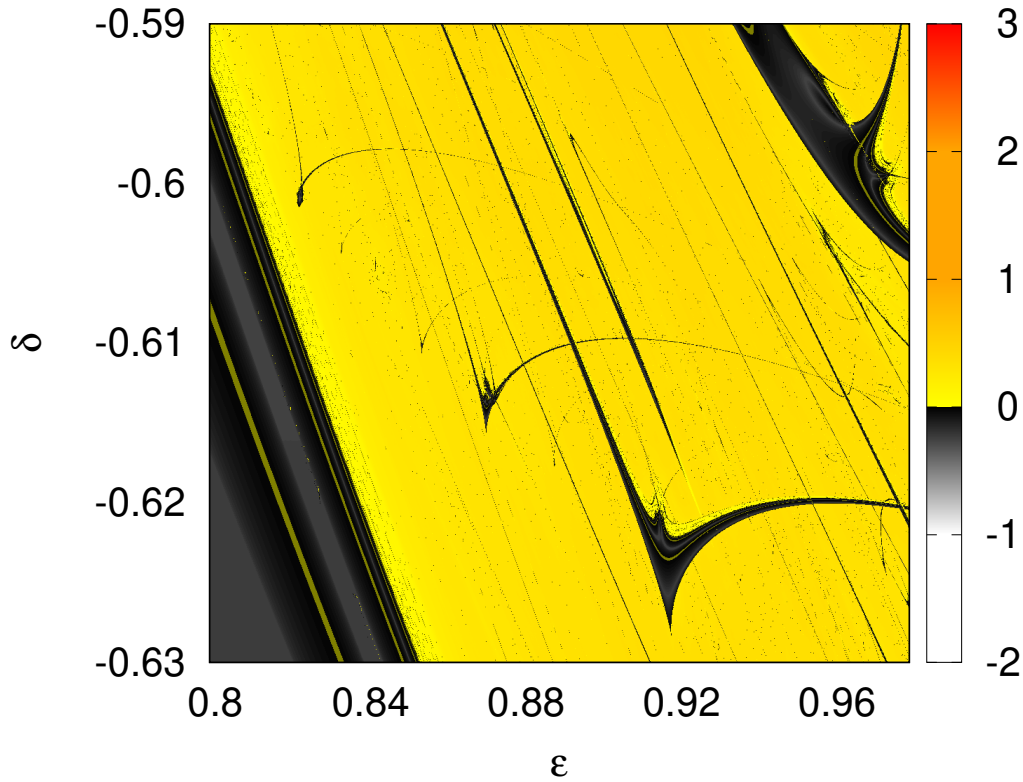


Figura 3.22: Diagrama evidenciando uma organização de estruturas *saddle-area* que evoluem no espaço de parâmetros utilizando $\gamma = 1$.

Diante das observações feitas até o presente momento, outra estrutura complexa que chama a atenção está representada logo abaixo. De acordo com o diagrama visualizado pela Fig. 3.24 pretende-se mostrar as propriedades que caracterizam as modificações observadas em tais estruturas com base nos estudos de Savin [48]. A respeito da dinâmica observou-se que ao alterar o parâmetro γ , as estruturas se movem pelo espaço paramétrico, ou seja, mudam sua localização e também seu tamanho. Nela, vê-se a evolução de uma estrutura complexa diante da variação de um dos parâmetros do sistema.

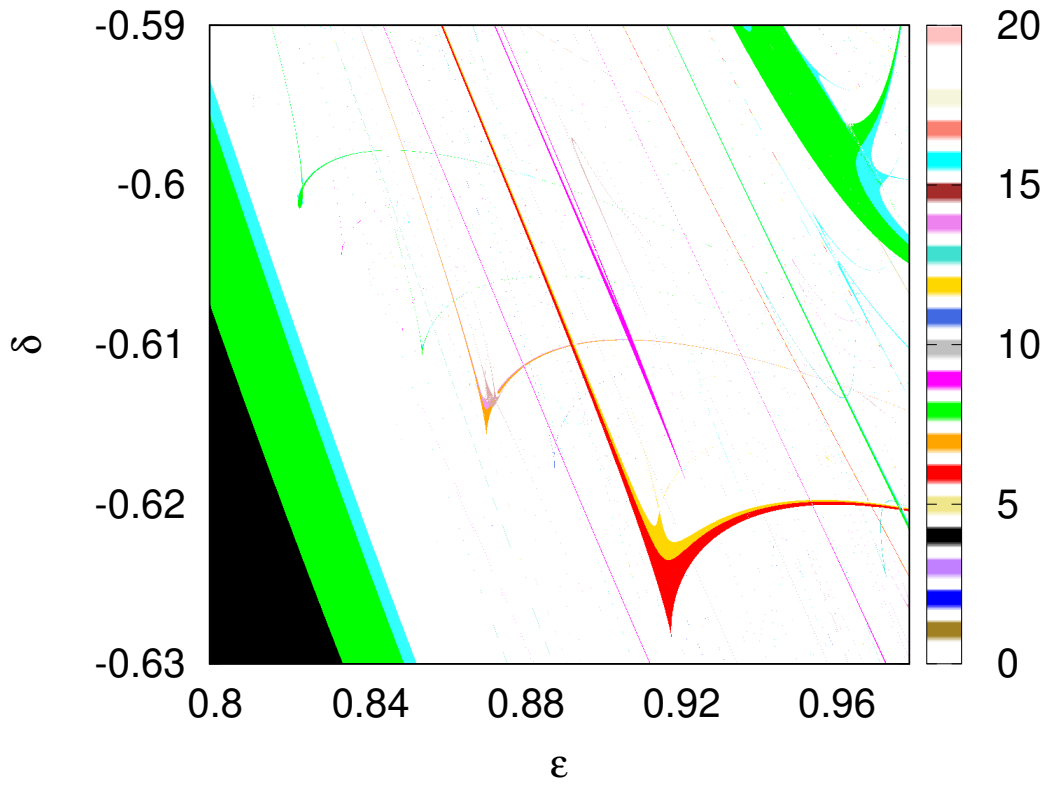


Figura 3.23: Diagrama isoperiódico para o mesmo intervalo de parâmetros da Fig. 3.22 com $\gamma = 1$.

Tendo como referência a estrutura (d) $\gamma = 1$, onde recupera-se o modelo de investigação, nota-se que tal estrutura complexa aparece num formato peculiar, porém, seu comportamento mostra que essa estrutura ainda se encontra em um processo de formação até se tornar uma estrutura complexa factual, semelhante a desenvolvida na Fig. 3.3 (b) da seção 3.1.

Ao analisar a estrutura complexa exibida na Fig 3.24 (a) onde $\gamma = 0,5$, tais características de confirmam. Nela, nota-se que o intervalo no eixo x onde tal estrutura “nasce/evolui” é relativamente diferente dos demais, entre $3.3 \leq \epsilon \leq 4.0$, porém, no que se refere ao eixo y , tal estrutura existe para parcialmente os mesmos valores de δ que foi visualizado em (b), (c) e (d). Já em (b) com $\gamma = 0,75$ e em (c) com $\gamma = 0,8$ nota-se que a evolução de tal estrutura complexa acontece relativamente para os mesmos valores do intervalo tanto em ϵ quanto em δ . O que também reafirma tais características mencionadas reside no desenvolvimento da Fig. 3.25 (a) e (b), que se refere a uma ampliação feita a partir da Figura 3.24 (d). Em tais diagramas, talvez seja interessante enfatizar que as estruturas auto similares subsequentes a estrutura principal exibem em uma nova janela periódica uma rica variedade de estruturas em diferentes formatos e tamanhos que estão intimamente relacionadas quanto ao nascimento da estrutura principal, ou seja, a medida que existe uma variação do parâmetro γ surgem novas estruturas alinhados a esta principal.

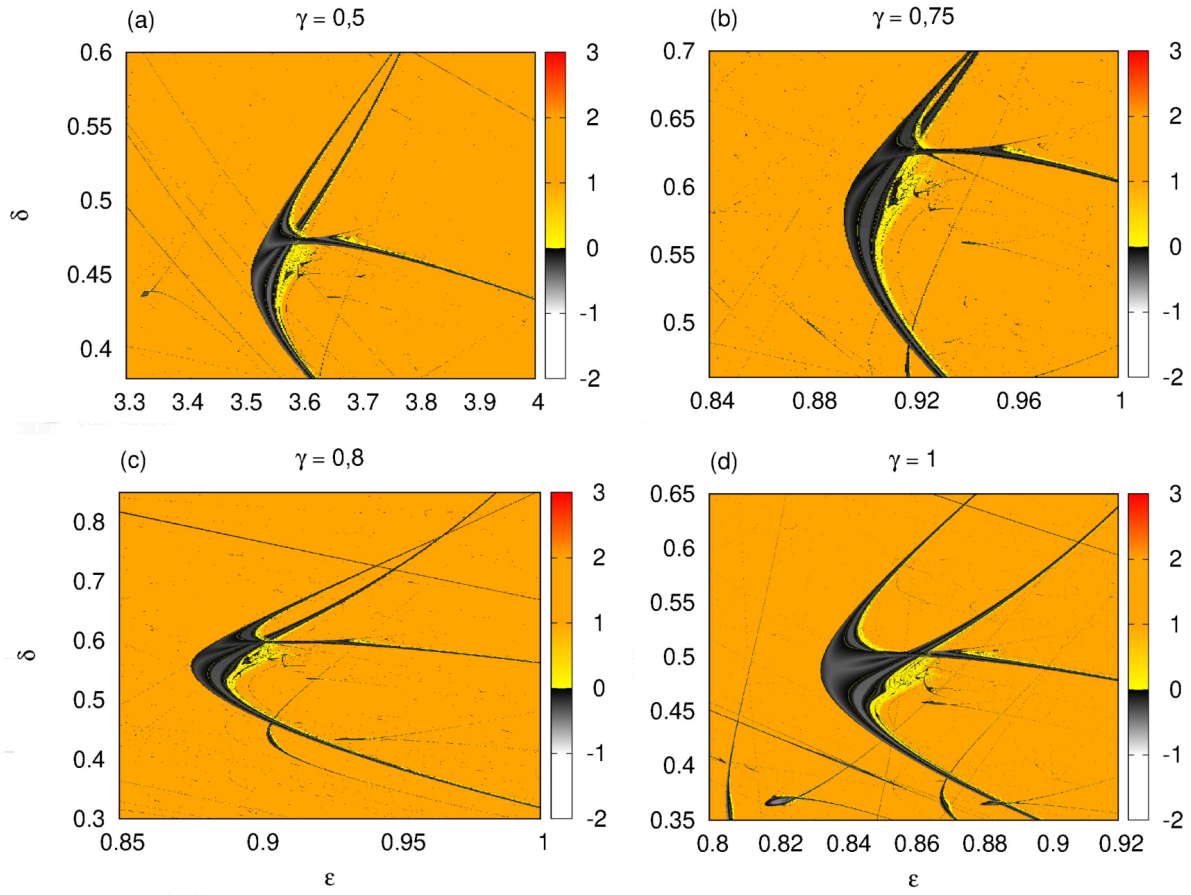


Figura 3.24: Diagramas do expoente de Lyapunov máximo evidenciando uma estrutura complexa e sua organização e evolução no espaço de parâmetros. Em (a) $\gamma = 0,5$, em (b) $\gamma = 0,75$, em (c) $\gamma = 0,8$ e em (d) $\gamma = 1$. Em todas as simulações utilizou-se $\gamma = 1$.

A partir da elaboração da Fig. 3.25 (a) e pelo diagrama isoperiódico dado pela Fig. 3.25 (b) vale destacar que essa região exibe uma vasta parcela de estruturas aparentemente complicadas que apresentam diferentes estruturas e conjuntos de periodicidade.

De acordo com a Fig. 3.25 observa-se que a estrutura principal têm período 2, seguindo uma organização de períodos na forma $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16$ demonstrando uma rota para o caos via duplicação de período. Porém, a presença de estruturas periódicas em meio ao mar de caos chama a atenção pela sua forma e fronteiras, diferente das encontradas até agora.

Com o intuito de aprofundar tal análise, ampliamos novamente esta mesma região e a caracterizamos através do diagrama do maior expoente de Lyapunov, dado pela Fig. 3.26 (a) e pelo diagrama isoperiódico, dado pela Fig. 3.26 (b). Notamos através dela, que as estruturas mais visíveis de tal janela periódica apresentam períodos diversos, não exibindo uma sequência, sendo estas de períodos 4, 6, 8.

Ao observá-las com mais atenção, além da estrutura complexa de período 2 (estrutura principal), que se mostra na variação do azul, preto e verde, nota-se também o surgimento de estruturas ou “ramos” com diferentes conjuntos de periodicidade, apresentando ramos

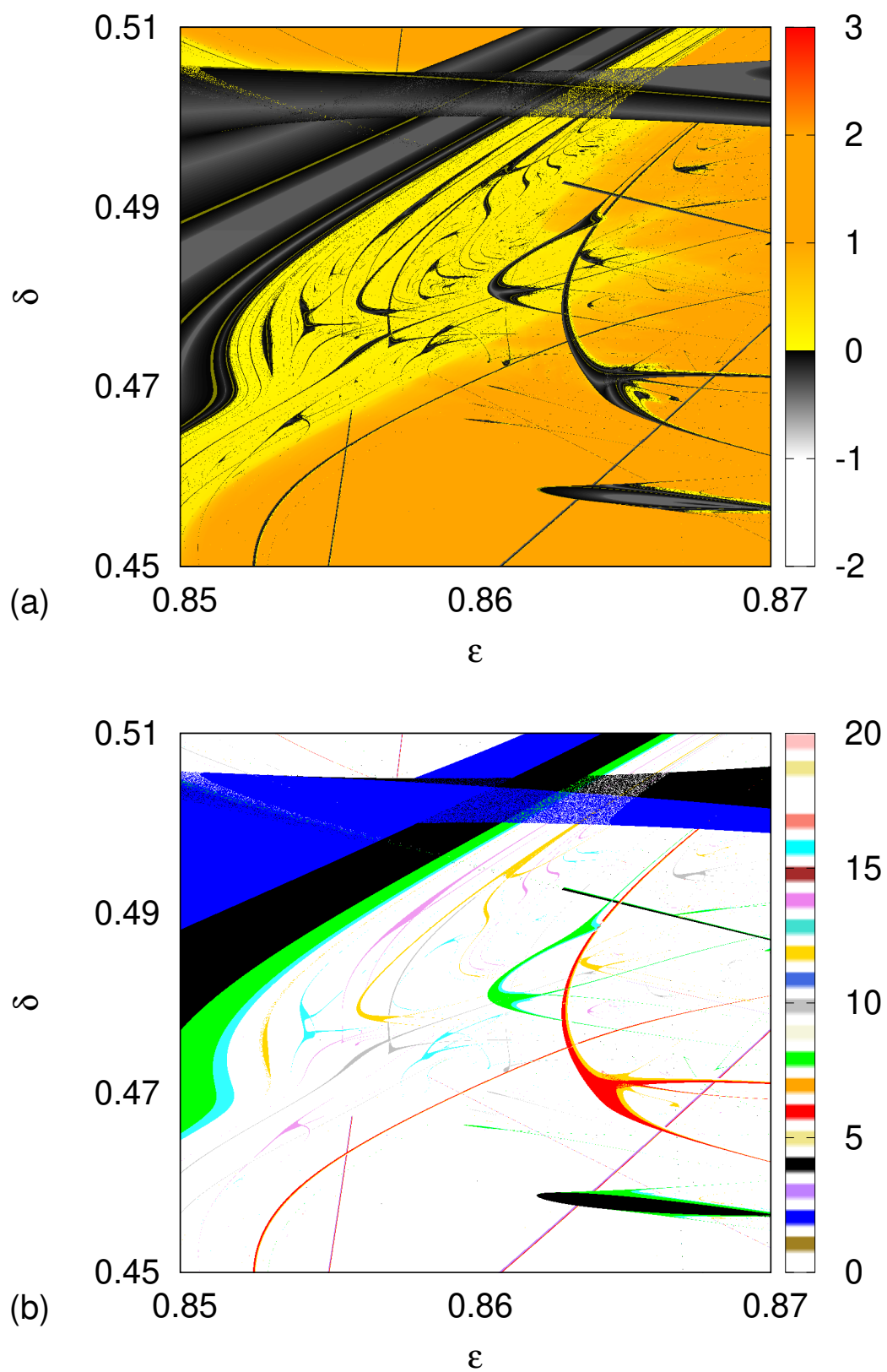


Figura 3.25: Em (a) diagrama do expoente de Lyapunov máximo a partir da ampliação de uma janela periódica resultante da Figura 3.24 (d) onde $\gamma = 1$. Em (b) diagrama isoperiódico correspondente a mesma região.

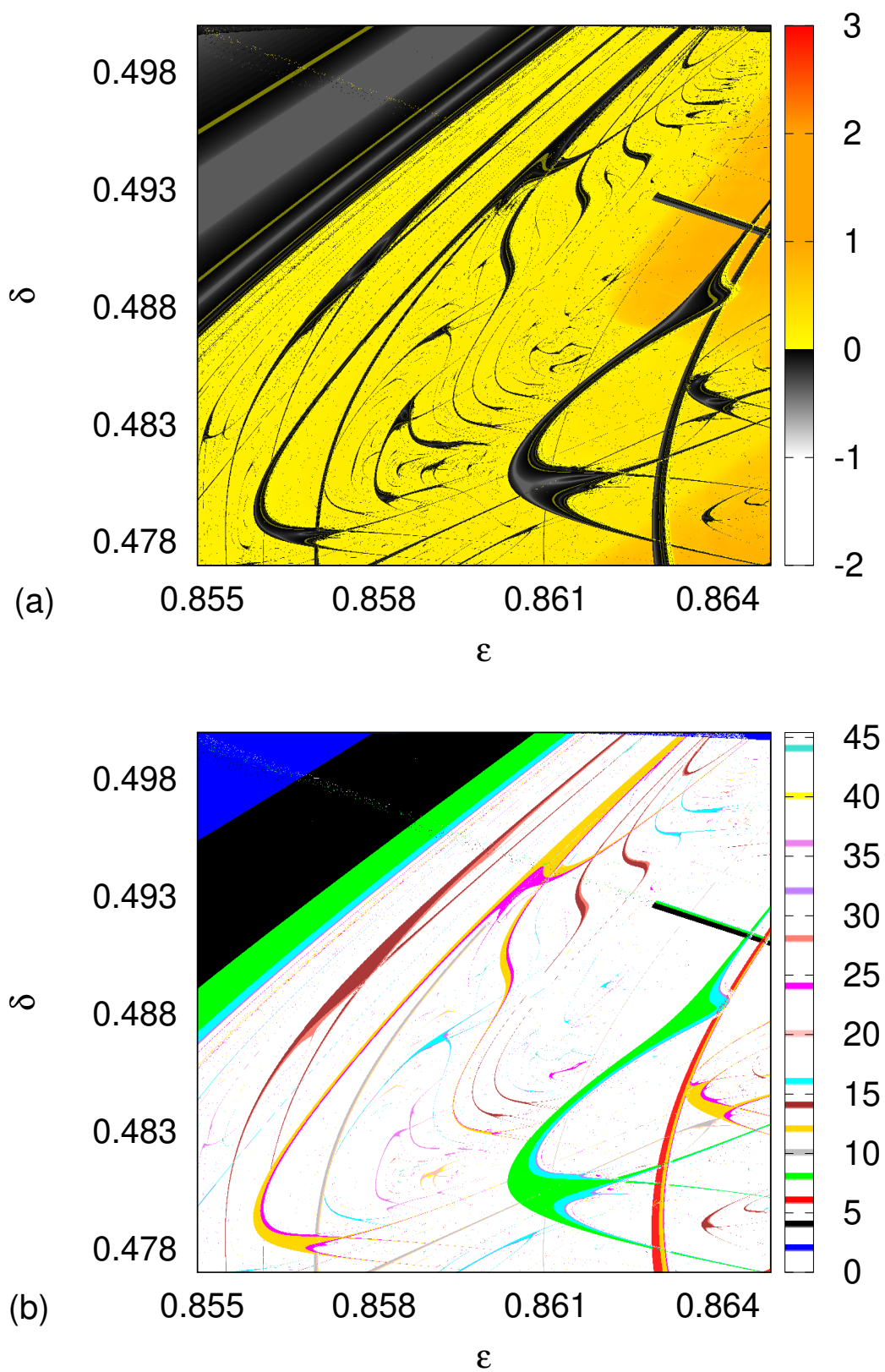


Figura 3.26: Em (a) diagrama do expoente de Lyapunov máximo feito a partir da ampliação da Figura 3.25 evidenciando as diferentes estruturas compondo uma mesma janela periódica. Em (b) diagrama isoperiódico referente a mesma região.

de períodos 12, 14, 24, 28, 32, 36, 40, 44 e períodos superiores, caracterizando a existência de diferentes estruturas compondo esta mesma região. O que se observa, como já foi mencionado, é que tais características relacionadas a esta janela periódica se relacionam a variação dos parâmetros de controle que por sua vez evidenciam o nascimento, a evolução e a possível destruição de tais estruturas correspondentes a tal região do espaço de parâmetros. Além disso, pela Fig. 3.26 (a) nota-se que além de tais estruturas mensuradas de acordo com seu conjunto periódico, ainda há a presença de estruturas com períodos superiores a 44 compondo uma mesma região.

Além disso, de acordo com o desenvolvimento da Fig. 3.27 observa-se com mais clareza essa transição suave entre estruturas que compõe um mesmo cenário. A Fig. 3.27 se refere ao expoente de Lyapunov máximo e de acordo com a mesma, é possível observar a predominância de estruturas complexas complicadas em diversas formas e tamanhos, coexistindo para os mesmos intervalo de parâmetros. Além disso, elaborou-se o diagrama isoperiódico, dado pela Fig. 3.28. Em tal diagrama se vê o surgimento de uma estrutura que se assemelha a forma de um “siri” na faixa parâmetros $\delta \in [-0.6, -0.56]$ e $\epsilon \in [-0.9, 1.0]$ e logo abaixo da mesma há a evidência de outra estrutura, também em transformação, na faixa $\delta \in [-0.68, -0.65]$ e $\epsilon \in [1.0, 1.5]$. De fato, a evolução desse conjunto de estruturas afirma que há parcialmente uma transição suave para duas novas estruturas, ambas já conhecidas, sendo uma delas do tipo *spring-area* e logo abaixo a evolução para uma *saddle-area*.

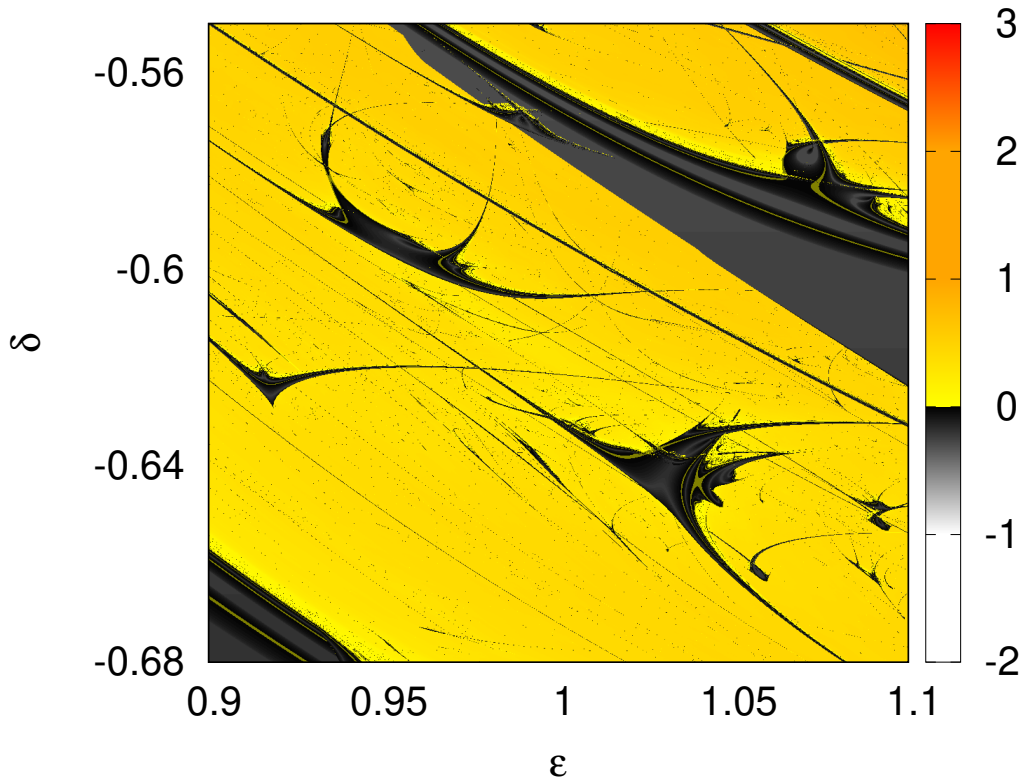


Figura 3.27: Diagrama do expoente de Lyapunov máximo evidenciando estruturas complexas em diferentes formas e organizações no espaço de parâmetros para $\gamma = 1$.

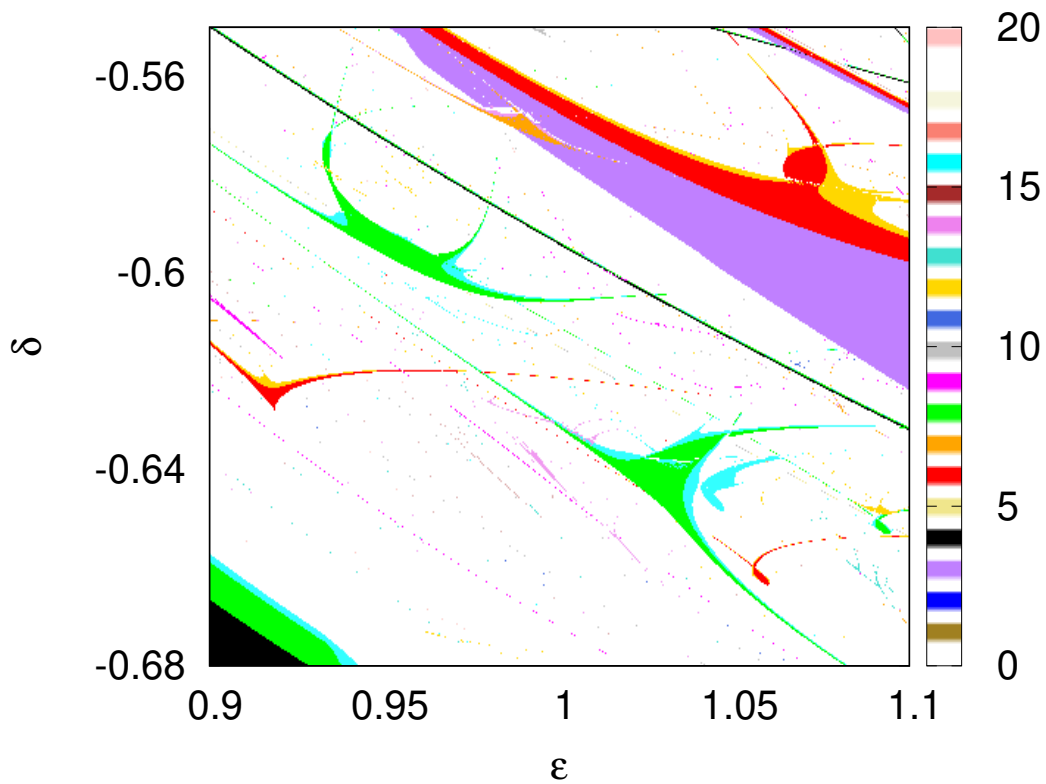


Figura 3.28: Diagrama isoperiódico evidenciando as estruturas complexas em diferentes formas utilizando o mesmo intervalo de parâmetros da Figura 3.27.

Embora ambas as estruturas complexas estejam ligeiramente diferentes das que foram observados até agora, chamo a atenção ao leitor novamente para a Figura 3.21 (b) elaborada acima. Em tal diagrama foi possível observar o surgimento de tais estruturas aos pares no espaço de parâmetros. Aqui, se vê que ambas as estruturas apresentam período 8 (cor verde). Novamente, nota-se que diante da evolução dos parâmetros δ vs ϵ tal transformação para novas estruturas se tornem concretas.

Através dos resultados apresentados, para este caso, verificou-se a existência de diferentes tipos de estruturas e a predominância de regiões de comportamento caótico no sistema. Além disso, observou-se também a formação de diferentes estruturas periódicas imersas na região caótica, organizadas por adição de período, recorrendo muitas das vezes, a uma relação hierárquica de periodicidade. Também, pode-se observar que tais características encontram-se dispostas num pequeno intervalo de parâmetros, onde, ao se explorar cada vez mais tais regiões, mas é perceptível e notória a grande quantidade de estruturas em diferentes formas e tamanhos. Vale destacar que não pretende-se finalizar as investigações mas sim buscar evidências que comprovem ainda mais as observações aqui elaboradas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Estudamos nesse trabalho algumas propriedades de uma família de mapeamentos bi-dimensionais. Obtivemos o mapa a partir de um Hamiltoniano levemente perturbado, mostrando que dele podemos recuperar vários outros mapeamentos, muitos deles amplamente estudados e encontrados na literatura. A investigação partiu do mapeamento na sua versão conservativa apresentando um espaço de fases rico em informações, sendo este porém, misto, composto por mares caóticos, ilhas e estabilidade e curvas invariantes do tipo *spanning* para diferentes combinações dos parâmetros de controle. Já na sua versão dissipativa, foi possível observar que as singularidades antes observadas, como a presença de ilhas e curvas invariantes *spanning* deram lugar ao que se conhece como um atrator caótico no espaço de fases, para diferentes parâmetros de controle. Ainda, se o parâmetro $\delta = 1$ recupera-se o modelo conservativo e também as suas características antes observadas.

Para todos os mapas foram calculados os expoentes de Lyapunov, obtidos a partir de um processo de triangularização de matrizes e, com isso, para todos os casos, encontramos expoentes positivos, podendo caracterizar as órbitas do sistema de investigação. Como a finalidade de analisar o comportamento do sistema, construímos os diagramas do expoente de Lyapunov médios em função do parâmetro de controle ϵ para o modelo conservativo e observamos que a variação do expoente não é significativa se comparada com a grande magnitude da ordem de grandeza do parâmetro de controle em questão.

Não obstante, estudamos também o decaimento da variável ação I para atratores caóticos e observamos decaimentos exponenciais e, além disso, encontramos uma invariância de escala que resulta na sobreposição das curvas. Notamos também que dependendo dos parâmetros de controle nota-se a presença não somente de atratores caóticos mas também o surgimento de atratores pontos fixos no sistema.

Aprofundamos nossos estudos ainda no modelo dissipativo, onde, a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov foi possível investigar o espaço de parâmetros para tal modelo. Esse estudo teve o intuito de investigar as janelas de periodicidade, verificar onde o sistema apresenta regiões de equilíbrio, regiões periódicas e regiões caóticas tal como a periodicidade das mesmas. Foi possível encontrar estruturas complexas, semelhantes a *shrimps*, além de outras estruturas, como do tipo *spring-area* e *saddle-area* em formatos diversos, ambas, já encontradas em outros sistemas encontrados na literatura. Buscou-se caracterizá-las conforme sua organização. O desenvolvimento de tais estruturas serviu como suporte para a investigação e caracterização do espaço de parâmetros ao se recuperar o modelo *bouncer* dissipativo. A partir desse modelo também observou-se a presença e semelhança das mesmas estruturas observadas para o caso discutido anteriormente porém com algumas características próprias relevantes que foram discutidas no decorrer do texto. Notou-se que diante da variação do parâmetro γ algumas regiões do espaço de parâmetros exibem uma vasta parcela de estruturas com forma e fronteiras aparentemente complicadas que apresentam diferentes conjuntos de periodicidade.

Com base em alguns dos resultados aqui abordados, pretendemos escrever e submeter um artigo científico para uma revista internacional assim como poder estender esta dinâmica para outros modelos, diferentes combinações dos parâmetros de controle e afins.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LEONEL, E. D. *Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares*. Editora Blucher, São Paulo, 2019.
- [2] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [3] LORENZ, E. N. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, 20(2):130–141, 1963.
- [4] STROGATZ, S. ; FRIEDMAN, M. ; MALLINCKRODT, A. J.; McKAY, S. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Computers in Physics, 8(5):532–532, 1994.
- [5] BATISTA, G. H.; REIS, M. A. *O que o modelo de um gás tem a ver com o novo coronavírus?* A Física na Escola, 18(2):41, 2020.
- [6] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics*. Springer Science & Business Media, New York, 1992.
- [7] FERRARA, N. F.; DO PRADO, N. F. *Caos: uma introdução*. Editora Blucher, São Paulo, 1994.
- [8] GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, United States, 1969.
- [9] OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [10] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] HOWARD, J. E.; HUMPHERYS, J. *Nonmonotonic twist maps*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 80(3):256–276, 1995.
- [12] CHIRIKOV, B. V. *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*. Physics Reports, 52(5):263–379, 1979.
- [13] PUSTYLNIKOV, L. D. *Stable and oscillating motions in non-autonomous dynamical systems*. Physics Reports, 2(1), 1978.

- [14] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. E.; DA SILVA, J. K. L. *Fermi-Ulam accelerator model under scaling analysis*. Physical Review Letters, 93(1):014101, 2004.
- [15] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. E. *A hybrid Fermi-Ulam-bouncer model*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 38(4):823–839, 2005.
- [16] LADEIRA, D. G.; LEONEL, E. D. *Dynamical properties of a dissipative hybrid Fermi-Ulam-bouncer model*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 17(1):823, 2007.
- [17] DE OLIVEIRA, J. A.; DETTMANN, C. P.; DA COSTA, D. R.; LEONEL, E. D. *Scaling invariance of the diffusion coefficient in a family of two-dimensional Hamiltonian mappings*. Physical review. E, 87(6):062904, 2013.
- [18] LIVORATI, A. L. P.; DE OLIVEIRA, J. A.; LADEIRA, D. G.; LEONEL, E. D. *Time-dependent properties in two-dimensional and Hamiltonian mappings*. The European Physical Journal Special Topics, 223(13):2953–2958, 2014.
- [19] DE OLIVEIRA, J. A.; LEONEL, E. D. *A rescaling of the phase space for Hamiltonian map: Applications on the Kepler map and mappings with diverging angles in the limit of vanishing action*. Applied Mathematics and Computation, 221:32–39, 2013.
- [20] PIKOVSKY, A.; POLITI, A. *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*. Cambridge University Press, Reino Unido, 2016.
- [21] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Review of Modern Physics, 57:617–656, 1985.
- [22] SANDRI, M. *Numerical calculation of Lyapunov exponents*. Mathematica Journal, Itália, 6(3):78–84, 1996.
- [23] LEONEL, E. D. *Fundamentos da Física Estatística*. Editora Blucher, São Paulo, 2015.
- [24] E. D. LEONEL and A. L. P. LIVORATI. *Describing Fermi acceleration with a scaling approach: The bouncer model revisited*. Physica A - Statistical Mechanics and Its Applications, 387(5-6):1155–1160, 2008.
- [25] LEONEL, E. D.; LIVORATI, A. L. P. *Thermodynamics of a bouncer model: A simplified one-dimensional gas*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 20(1):159–173, 2014.
- [26] LEONEL, E. D. *Corrugated waveguide under scaling investigation*. Physical Review Letters, 98(11):114102, 2007.
- [27] SHEVCHENKO, I. *The Kepler map in the three-body problem*. New Astronomy, 16(2):94–99, 2011.
- [28] KUWANA, C. M. ; DE OLIVEIRA, J. A.; LEONEL, E. D. *A family of dissipative two-dimensional mappings: Chaotic, regular and steady state dynamics investigation*. Physica A - Statistical Mechanics and its Applications, 395:458–465, 2014.

- [29] DE OLIVEIRA, J. A.; LEONEL, E. D. *Dissipation and its consequences in the scaling exponents for a family of two-dimensional mappings*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 45(16):165101, 2012.
- [30] DE OLIVEIRA, J. A.; MONTERO, L. T.; DA COSTA, D. R.; MÉNDEZ-BERMÚDEZ, J. A.; MEDRANO-T. R. O.; LEONEL, E. D. *An investigation of the parameter space for a family of dissipative mappings*. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 29(5):053114, 2019.
- [31] FREIRE, J. G.; GALLAS, J. A. C. *Stern–Brocot trees in cascades of mixed-mode oscillations and canards in the extended Bonhoeffer–van der Pol and the FitzHugh–Nagumo models of excitable systems*. Physics Letters A, 375(7):1097–1103, 2011.
- [32] VITOLO, R.; GLENDINNING, P. ; GALLAS, J. A. C. *Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows*. Physical Review E, 84(1):016216, 2011.
- [33] LORENZ, E. N. *Compound windows of the Hénon-map*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 237(13):1689–1704, 2008.
- [34] DA COSTA, D. R.; ROCHA, J. G. S.; DE PAIVA, L. S.; MEDRANO-T, R. O. *Logistic-like and gauss coupled maps: The born of period-adding cascades*. Chaos, Solitons & Fractals, 144:110688, 2021.
- [35] MIRA, C. *Chaotic Dynamics: From the One-Dimensional Endomorphism to the Two-Dimensional Diffeomorphism*. World Scientific, 1987.
- [36] GALLAS, J. A. C. *Structure of the parameter space of the Hénon map*. Physical Review Letters, 70(18):2714–2717, 1993.
- [37] BROER, H.; SIMÓ, C.; TATJER, J. C. *Towards global models near homoclinic tangencies of dissipative diffeomorphisms*. Nonlinearity, 11(3):667, 1998.
- [38] FACCANHA, W. L. C. *Análise de mapeamentos não lineares e aplicações*. 2015, 83 f. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2015.
- [39] CABRAL, F.; LAGO, A.; GALLAS, J. A. C. *A picture book of two families of cubic maps*. International Journal of Modern Physics C, 4(03):553–568, 1993.
- [40] GONCHENKO, S. V.; SIMÓ, C.; VIEIRO, A. *Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight*. Nonlinearity, 26(3):621, 2013.
- [41] SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. Editora E-papers, 2006.
- [42] ABDULAK, S. A. *Sombreamento de trajetórias no mapa padrão*. 2010. 126 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2010.
- [43] ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. A. *Chaos an introduction to dynamical systems*. Springer, Nova York, 1996.
- [44] CELESTINO, A. ; MANCHEIN, C. ; ALBUQUERQUE, H. A.; BEIMS, M. W. *Stable structures in parameter space and optimal ratchet transport*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations, 19(1):139–149, 2014.

- [45] ENDLER, A. ; GALLAS, J. A. C. *Mandelbrot-like sets in dynamical systems with no critical points*. Comptes Rendus Mathematique, 342(9):681–684, 2006.
- [46] FERMI, E. *On the origin of the cosmic radiation*. Physical Review, 75(8):1169, 1949.
- [47] LICHTENBERG, A. J ; LIEBERMAN, M. A; COHEN, R. H. *Fermi acceleration revisited*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1(3):291–305, 1980.
- [48] SAVIN, D. V.; KUZNETSOV, A. P.; SAVIN, A. V.; FEUDEL, U. *Different types of critical behavior in conservatively coupled Hénon maps*. Physical Review E, 91(6):062905, 2015.
- [49] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. *Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 7(1-3):181–200, 1983.
- [50] GREBOGI, C.; KOSTELICH, E.; OTT, E.; YORKE, J. A. *Multi-dimensioned intertwined basin boundaries: Basin structure of the kicked double rotor*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 25(1-3):347–360, 1987.
- [51] MIRA, C.; TOUZANI-QRIOUET, M.; KAWAKAMI, H. *Bifurcation structures generated by the nonautonomous Duffing equation*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 9(07):1363–1379, 1999.
- [52] CARCASSES, J. P. *A new kind of parametric singularities and their use for the study of the bifurcation structure of an n -dimensional map..* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 28(5):917–946, 1997.
- [53] CARCASSES, J. P.; MIRA, C.; BOSH, M.; SIMÓ, C. ; TATJER, J. C. *“CROSSROAD AREA–SPRING AREA”TRANSITION (I) PARAMETER PLANE REPRESENTATION*”. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1(01):183–196, 1991.