

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

“Projeto e Implementação com Chaveamento de Reguladores Fuzzy
Takagi-Sugeno para um Conjunto de Pontos de Operação”

Máira Peres Alves Santim

Licenciada em Matemática - FEIS/UNESP

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Co-orientador: Dr. Rodrigo Cardim

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira - SP
27 de Abril / 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

S235p Santim, Máira Peres Alves.
Projeto e implementação com chaveamento de reguladores fuzzy takagi-sugeno para um conjunto de pontos de operação / Máira Peres Alves Santim. - Ilha Solteira : [s.n.], 2012
84 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2012

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Co-orientador: Rodrigo Cardim
Inclui bibliografia

1. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. 2. Desigualdades matriciais lineares (LMIs).
3. Sistemas chaveados. 4. Controlador chaveado. 5. Rastreamento.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Projeto e Implementação com Chaveamento de Reguladores Fuzzy Takagi-Sugeno para um Conjunto de Pontos de Operação

AUTORA: MÁIRA PERES ALVES SANTIM

ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. RODRIGO CARDIM

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica,
Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC

Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina

Data da realização: 27 de abril de 2012.

À minha família, em especial aos meus pais Francisco e Marilena, aos meus irmãos Rafael e Gisele e ao meu marido Ricardo, por todo amor, apoio, confiança e incentivo em todos os momentos.

Agradecimentos

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A Deus, por ter me dado força e saúde para chegar até aqui;
- Aos meus pais Francisco e Marilena e aos meus irmãos Rafael e Gisele pelo carinho, apoio e incentivo;
- Ao meu marido Ricardo pelo amor, apoio, confiança e incentivo em todos os momentos;
- Ao Prof. Dr. Marcelo C. M. Teixeira, por todo ensinamento, incentivo, confiança e orientação;
- Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelo acompanhamento nas bancas examinatórias, sugestões e incentivo;
- Ao Dr. Rodrigo Cardim pela co-orientação e todo o ensinamento.
- Aos meus amigos e colegas do laboratório que de forma direta ou indiretamente me ajudaram, em especial ao Wallysonn, pela ajuda e o trabalho feito em conjunto ;
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela oportunidade e apoio financeiro.

“Seja a mudança que você quer ver no mundo.”

Gandhi

Resumo

Foi proposto nesta dissertação um novo método para o rastreamento de sinais constantes (regulação) em sistemas não lineares através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno. O método consiste em projetar um único controlador que torna assintoticamente estável um ponto de equilíbrio desejado, que pertence a um determinado intervalo ou região conhecida, sem a necessidade de refazer o projeto dos ganhos do controlador a cada novo ponto de operação escolhido. Neste trabalho também é proposta uma nova metodologia de controle com comutação para algumas classes de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno. Tal metodologia projeta os ganhos do controlador baseado na Compensação Distribuída Paralela, porém é utilizado um regulador com comutação que utiliza o ganho que retorna o menor valor da derivada da função de Lyapunov. Esse procedimento evita a necessidade da obtenção das funções de pertinência normalizadas, o que pode facilitar a implementação dos controladores, pois as funções de pertinência normalizadas são, em geral, funções não lineares. Os projetos são baseados em desigualdades matriciais lineares (em inglês Linear Matrix Inequalities (LMIs)) e tem a estabilidade assintótica garantida por funções de Lyapunov. Para verificar a validade dos métodos propostos são apresentados exemplos numéricos e simulações, abordando o sistema bola-viga e levitador magnético, usando o software MATLAB.

Palavras chave: Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Sistemas chaveados. Controlador chaveado. Rastreamento.

Abstract

This dissertation proposes a new method based on LMIs for tracking constant signals (regulation) considering nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models. The method consists in designing a single controller that stabilizes the system at an operation point belonging to a certain range or region, without the need of remaking the design of the controller gains at each new chosen operation point. This paper also proposes a new methodology to control switching for some classes of nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models. This methodology projects the controller gains based on the Parallel Distributed Compensation, however is used a switching regulator that uses the gain that returns the minimum value of the derivative of the Lyapunov function. This procedure can be useful in the implementations of Takagi-Sugeno fuzzy controllers, because it does not use the normalized membership function, that usually are nonlinear functions. The designs are based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and asymptotic stability is ensured by Lyapunov functions. To verify the validity of the proposed methods are presented numeric examples and simulations, considering the ball-beam and magnetic levitator systems, using the software MATLAB.

Keywords: Takagi-Sugeno fuzzy models. Linear matrix inequalities (LMIs). Switched systems. Switched controller. Tracking.

Lista de Siglas e Abreviações

- LMIs: *Linear Matrix Inequalities*.
- CDP: *Compensação Distribuída Paralela*.
- TS: *Takagi-Sugeno*.

Lista de Figuras

1	Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.	19
2	Levitador Magnético.	34
3	Posição $y(t) = \bar{x}_1(t)$ e velocidade $(\bar{x}_2(t))$ do sistema controlado para $y_0 = 0,1m$	39
4	Sinal de controle $u(t) = i(t)^2 - i_0^2$ e corrente elétrica $(i(t))$ do sistema controlado para $y_0 = 0,1m$	40
5	Posição e velocidade do sistema controlado para $y_0 = 0,05m$	41
6	Sinal de controle e corrente elétrica do sistema controlado para $y_0 = 0,05m$	42
7	Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$ e velocidade $(\bar{x}_2(t))$ do sistema controlado para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m, 0,05m$ e $0,08m$ para $t \in [0,1), t \in [1,2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente.	44
8	Sinal de controle $u(t) = i(t)^2 - i_0^2$ e corrente elétrica $i(t)$ para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m, 0,05m$ e $0,08m$ para $t \in [0,1), t \in [1,2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente.	44
9	Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$ e velocidade $(\bar{x}_2(t))$ do sistema controlado para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m, 0,05m$ e $0,08m$ para $t \in [0,1), t \in [1,2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,8$	46
10	Sinal de controle $(u(t) = i(t)^2 - i_0^2)$ e corrente elétrica $(i(t))$ para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m, 0,05m$ e $0,08m$ para $t \in [0,1), t \in [1,2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,8$	46
11	Posição $(y(t) = \bar{x}_1(t))$ e velocidade $(\bar{x}_2(t))$ do sistema controlado para $y_0 \in [0,05, 0,07]$, considerando $y_0 = 0,07m, 0,05m$ e $0,06m$ e $m = 0,05kg, 0,07kg$ e $0,09kg$ para $t \in [0,1), t \in [1,2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente.	51
12	Sinal de controle $u(t) = i(t)^2 - i_0^2$ e corrente elétrica $i(t)$ para $y_0 \in [0,05, 0,07]$, considerando $y_0 = 0,07m, 0,05m$ e $0,06m$ e $m = 0,05kg, 0,07kg$ e $0,09kg$ para $t \in [0,1), t \in [1,2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente.	52
13	Sistema Bola-Viga.	53

14	Posição $\bar{x}_1(t)$, velocidade $\bar{x}_2(t)$, ângulo $x_3(t)$ e velocidade angular $\bar{x}_4(t)$ do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$	58
15	Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$	58
16	Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$ e um tempo $t = 2s$	59
17	Posição $\bar{x}_1(t)$, velocidade $\bar{x}_2(t)$, ângulo $x_3(t)$ e velocidade angular $\bar{x}_4(t)$ do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,1m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$	60
18	Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,1m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$	61
19	Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$ e um tempo $t = 3s$	61
20	Posição $\bar{x}_1(t)$ e ângulo $\bar{x}_3(t)$ do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente	63
21	Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente.	64
22	Destaques 1, 2 e 3 do sinal de controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente.	64
23	Posição $\bar{x}_1(t)$ e ângulo $\bar{x}_3(t)$, para $\bar{x}_{10} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,23$	65
24	Sinal de Controle para $\bar{x}_{10} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,23$	66
25	Destaques 4, 5 e 6 do sinal de controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,23$	66
26	Variáveis de estado do sistema bola-viga 13 utilizando o controlador fuzzy (15) (linha pontilhada) e o controlador chaveado (143) (linha contínua), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \ -1 \ 0,2 \ 0]^T$	72
27	Sinal de controle do sistema bola-viga 13 utilizando o controlador fuzzy (15) (linha pontilhada) e o controlador chaveado (143) (linha contínua), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \ -1 \ 0,2 \ 0]^T$	72

28	Sinal de controle do sistema bola-viga 13 utilizando o controlador fuzzy (15) (linha pontilhada) e o controlador chaveado (143) (linha contínua), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \ -1 \ 0,2 \ 0]^T$	73
29	Posição ($y(t) = \bar{x}_1(t)$), velocidade ($\bar{x}_2(t)$) e entrada de controle ($x_3 = u = i^2 - i_0^2$) do sistema controlado utilizando o controlador fuzzy (15) (linha pontilhada) e o controlador chaveado (143) (linha contínua), para $y_0 \in [0,04 \ , \ 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m$ e a condição inicial $[0,04 \ 1 \ 0]^T$	76
30	Sinal de controle fuzzy u (linha pontilhada), sinal de controle chaveado v (linha contínua), corrente elétrica fuzzy $i(t)$ (linha pontilhada) e corrente elétrica chaveada $i(t)$ (linha contínua) do sistema controlado, para $y_0 \in [0,04 \ , \ 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m$ e a condição inicial $[0,04 \ 1 \ 0]^T$	77

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	16
2.1	Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno	16
2.2	Representação fuzzy Takagi-Sugeno	16
2.3	Forma Geral do Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno	19
2.4	Reguladores com modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e suas condições para estabilidade global	21
2.5	Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs	24
2.6	Rastreamento	27
2.7	Sistemas Chaveados	29
3	SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM RASTREAMENTO EM UMA REGIÃO DE OPERAÇÃO	31
3.1	Resultados Preliminares	32
3.1.1	Estabilidade de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno via LMI	32
3.2	Levitador Magnético	33
3.2.1	Projeto do Regulador para um Ponto de Operação	37
3.3	Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação	42
3.3.1	Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação com Taxa de Decaimento	45
3.3.2	Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação com Variação da Massa do Sistema	47

3.4	Sistema Bola-Viga	52
3.4.1	Projeto do Regulador para um Ponto de Operação	54
3.4.2	Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação	62
3.4.3	Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação com Taxa de De- caimento	65
3.5	Conclusões Parciais	67
4	SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM CONTROLADOR CHAVEADO	68
4.1	CASO 1: Sistema Fuzzy com a Matriz B Constante	68
4.1.1	Exemplo	70
4.2	CASO 2: Sistema Fuzzy Completo com $B(\alpha)$ Utilizando Integrador	74
4.2.1	Exemplo	75
4.3	Conclusões Parciais	77
5	CONCLUSÕES	78
5.1	Perspectivas Futuras	79
5.2	Trabalhos Realizados	79
	REFERÊNCIAS	80

1 INTRODUÇÃO

Em nosso cotidiano somos conduzidos a tomar várias decisões para resolver diversos tipos de problemas, que em geral são feitas a partir de algum aprendizado e/ou experiência anterior. Porém, nos deparamos com situações inusitadas que nos deixam com dúvidas sobre que atitude tomar. Então, a solução para isso é procurar uma decisão a partir de uma interação com aprendizados anteriores, de situações diferentes, mas que sejam próximas da situação em questão. Se observarmos bem, os sistemas nebulosos, conhecidos como sistemas fuzzy são bem similares a esse comportamento humano na solução de problemas complexos, pois permitem que o projetista utilize seu conhecimento experimental para elaborar o projeto em sistemas de controle. Os problemas reais são dotados de uma certa complexidade que se deve ao fato do surgimento de incertezas em formas ambíguas. Os humanos tratam os problemas complexos e ambíguos de forma subconsciente para solucionar problemas emocionais, técnicos, sociais, biológicos, dentre outros (MACHADO, 2003).

No início dos anos 60, as pesquisas se voltaram para o questionamento do conceito das incertezas, da ambigüidade e do conhecimento humano e se eles poderiam ser usados para completar a descrição e a compreensão de sistemas reais complexos. Em 1965, o professor Lotfi Askar Zadeh com seu artigo “*Fuzzy Sets*”, (ZADEH, 1965), introduziu a teoria de lógica fuzzy, conhecida em português como lógica nebulosa e até mesmo difusa. Zadeh formalizou uma nova ferramenta matemática que utiliza conhecimento e incertezas sem descrevê-las em termos de probabilidade. A sua proposta era modelar o mecanismo do pensamento humano com valores lingüísticos ao invés de números, levando tais valores para a teoria de sistemas e desenvolver uma nova classe denominada sistemas fuzzy. Na lógica fuzzy, uma variável premissa varia em grau de verdade de 0 a 1, o que a leva a ser parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa. O controle executado pela lógica fuzzy imita um comportamento baseado em regras. Seu objetivo é gerar uma saída a partir de um conjunto de entradas não precisas, com ruídos ou até mesmo com falta de entradas. A lógica fuzzy é robusta, pois não requer entradas precisas, é facilmente modificada, pois é baseada em regras, fornece uma estrutura para o controle de sistemas não lineares sem a disponibilidade do modelo matemático, tem uma solução mais rápida e barata

em alguns casos, e é de fácil implementação (JUNGES, 2006).

Nessa dissertação serão utilizados os modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) para representar sistemas não lineares, como uma combinação de modelos locais lineares invariantes no tempo, que descrevem o comportamento do sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados (TAKAGI; SUGENO, 1985). A técnica de linearização tradicional é interpretada em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy TS, consistindo de apenas um modelo local. O modelo global é obtido pela combinação dos modelos locais lineares, sendo projetado um controle de realimentação linear para cada modelo local linear. O regulador global resultante, que em geral é não linear, é uma combinação de cada regulador linear individual. O algoritmo de controle foi implementado com modelos fuzzy TS, e o projeto é baseado em desigualdades matriciais lineares (LMIs) e tem despertado um crescente interesse na literatura (TANAKA; WANG, 2001). Normalmente utiliza-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CDP) (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) para os projetos de reguladores e observadores Fuzzy TS, para estabilizar sistemas não-lineares, descritos por modelos Fuzzy (TANIGUCHI et al., 2001). Tais projetos podem ser realizados resolvendo-se as LMIs. Os problemas descritos através de LMIs, quando factíveis, podem ser resolvidos eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação convexa (GAHINET et al., 1995; PEAUCELLE et al., 2002). Desta forma, as soluções encontradas dos problemas descritos por LMIs são muitas vezes equivalentes às soluções do problema original. A primeira contribuição desta dissertação foi a proposta de um novo método de projeto de reguladores fuzzy TS, considerando aplicações nas quais os possíveis pontos de operação da planta pertencem a um conjunto conhecido. Este procedimento generaliza os projetos de controladores fuzzy TS disponíveis, por exemplo em Teixeira, Pietrobom e Assunção (2000) e Teixeira, Assunção e Avellar (2003), que consideram apenas um ponto de operação.

A segunda contribuição é uma nova estratégia chaveada de controle, que evita a necessidade de obtenção das funções de pertinência normalizadas dos modelos fuzzy TS, o que pode facilitar a implementação. As seções deste trabalho se apresentam da seguinte forma:

- Capítulo 1: São apresentados conceitos necessários para o desenvolvimento teórico do trabalho;
- Capítulo 2: Abordagem do tema rastreamento em sistemas fuzzy TS e resultados da nova técnica de rastreamento proposta;
- Capítulo 3: Foi realizada uma implementação com chaveamento de reguladores fuzzy Takagi-Sugeno, ilustrada em exemplos;
- Capítulo 4: Conclusões e perspectivas futuras para o trabalho desenvolvido.

2 *CONCEITOS FUNDAMENTAIS*

2.1 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

O modelo fuzzy TS é uma descrição de um sistema não linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo (TANIGUCHI et al., 2001; TAKAGI; SUGENO, 1985; TANAKA; WANG, 2001), podendo considerar o comportamento desse sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados de forma exata ou aproximada (TEIXEIRA; ŽAK, 1999). Na maioria dos casos a quantidade de modelos locais a ser utilizada para o sistema não linear fica a critério do projetista, pois a descrição do sistema geralmente se dá de forma aproximada. Vale ressaltar que uma grande quantidade de modelos locais exige grande esforço computacional, o que dificulta a implementação do projeto. A grande importância dos modelos fuzzy TS na teoria de controle é que o modelo fuzzy global é obtido como combinação fuzzy dos modelos locais lineares. Adicionalmente, o sistema não linear pode ser representado de forma exata com uma determinada quantidade de modelos locais lineares. A ideia normalmente empregada, é que para cada modelo linear local seja considerado um controle de realimentação linear. Este capítulo abordará conceitos que irão contribuir para fundamentar a ideia dessa dissertação, relacionados ao controle fuzzy TS.

2.2 Representação fuzzy Takagi-Sugeno

O sistema fuzzy TS é representado pelas regras fuzzy SE-ENTÃO. Certas classes de sistemas não lineares podem ser representados exatamente por tais modelos (TANIGUCHI et al., 2001). Considere os seguintes modelos locais lineares para a descrição da planta a ser controlada:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r.\end{aligned}$$

As informações acima são então fundidas com as regras SE-ENTÃO disponíveis, nas quais a i -ésima regra, como descrito em Takagi e Sugeno (1985), tem a forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: \quad & \text{Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{Então} \quad & \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, r$, em que r é o número de modelos locais, M_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto fuzzy j da regra i ; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada, $y \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas, que nessa dissertação serão as variáveis de estado. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ o "peso" do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$, e seja:

$$w^i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)].$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i = 1, 2, \dots, r$,

$$w^i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(z(t)) > 0.$$

Dados $x(t)$, $u(t)$, $z(t)$, obtém-se o sistema fuzzy resultante utilizando o método do centro da gravidade para a defuzzificação (TANIGUCHI et al., 2001). Então o sistema (1) é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) B_i \right) u(t) \\ &= A(\alpha) x(t) + B(\alpha) u(t), \end{aligned} \quad (3)$$

sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{w^i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4)$$

Em (4), $\alpha_i(z(t))$ é a função de pertinência normalizada de cada modelo de regra, mais conhecida como função de pertinência do modelo local i , $i = 1, 2, \dots, r$. O sistema não forçado ($u(t) = 0$)

é definido abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))A_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))A_i x(t), \\ &= A(\alpha)x(t).\end{aligned}\tag{5}$$

A saída para ambos os casos, forçado e não forçado, é dada por

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))C_i x(t), \\ &= C(\alpha)x(t).\end{aligned}\tag{6}$$

Para $i = 1, 2, \dots, r$, é importante observar a combinação linear convexa dos modelos, ou seja,

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1.\tag{7}$$

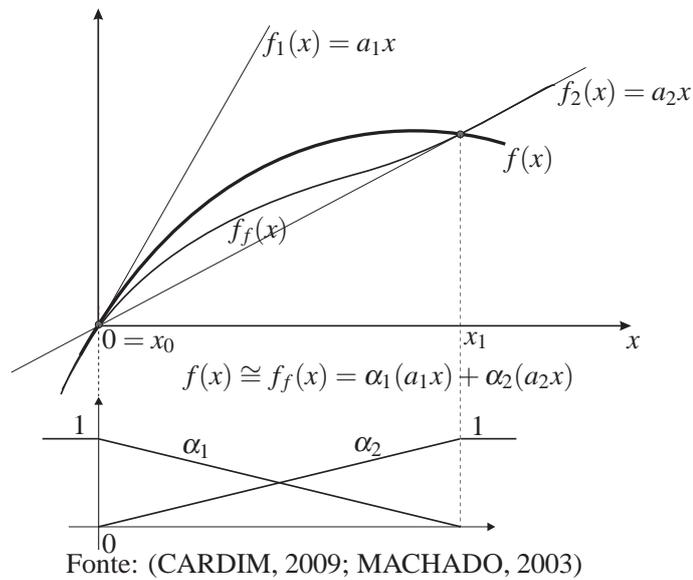
Para a obtenção do modelo fuzzy TS para sistemas não lineares, é conveniente adotar $z(t) = x(t)$, sendo que $x(t)$ é o vetor de estado do sistema não linear.

Exemplo:

O exemplo a seguir ilustra a aproximação obtida pelos modelos fuzzy TS (CARDIM et al., 2009; MACHADO, 2003).

Considerando a função não linear $f(x)$ descrita na Figura 1, nota-se que esta pode ser aproximada, para $x \approx x_0 = 0$, por $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$. Uma aproximação linear para esta função, para $x \approx x_1$, é $f_2(x) = a_2x$; observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois $f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definidas na Figura 1 (observe que $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$ são positivas ou nulas e que $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = 1$), um modelo fuzzy TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 1. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $\alpha_2 \approx 1$, $\alpha_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Verifica-se que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, por exemplo para $x_0 \leq x \leq x_1$. Obviamente, se aumentarmos o número de modelos locais, a aproximação torna-se melhor. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos fuzzy TS, no tratamento de funções e/ou de sistemas não lineares.

Figura 1 - Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.



Neste caso é possível representar exatamente a função $f(x)$ através de $f_f(x)$, escolhendo-se convenientemente as funções $\alpha_1(x)$ e $\alpha_2(x)$. Essa situação será tratada na próxima seção.

2.3 Forma Geral do Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno

Considere a planta descrita pela seguinte equação, na qual $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u. \quad (8)$$

Um modelo de projeto para esta planta, com modelos fuzzy TS, tendo em vista (7), é descrito em (2). Supondo $x = 0$ como o único ponto de equilíbrio do sistema com $u = 0$, ou seja, $f(x) = 0$ somente para $x = 0$ e considerando que $\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j$ existe em $x = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, o modelo local linear de operação em $x \approx 0$ é obtido pela linearização por série de Taylor em $x = 0$. O problema consiste em obter um modelo local linear ótimo que represente a planta descrita em (8), em $x \approx x_0$, sendo que $x_0 \neq 0$ foi estudado em Teixeira e Žak (1999), considerando as condições:

$$f(x) + G(x)u \approx Ax + Bu, \quad (9)$$

para $x \approx x_0$, todo u e

$$f(x_0) + G(x_0)u = Ax_0 + Bu \quad (10)$$

para todo u . A solução ótima obtida foi a seguinte:

$$G(x_0) = B \quad (11)$$

e se a_i^T é a linha i de A , então

$$a_i = \nabla f_i(x_0) + \frac{f_i(x_0) - x_0^T \nabla f_i(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0, \quad x_0 \neq 0, \quad (12)$$

sendo que nesta fórmula, $\|x_0\|^2 = x_0^T x_0$ e $\nabla f_i(x) = [\partial f_i(x)/\partial x_1 \dots \partial f_i(x)/\partial x_n]^T$.

Os modelos locais ótimos não podem ser obtidos pela linearização em série de Taylor em um determinado ponto considerado, sendo este diferente do ponto de equilíbrio. Na fórmula (12) vemos que a aproximação ótima é a soma de dois termos, já a linearização por série de Taylor fornece apenas o primeiro termo da fórmula, que é o gradiente da função $f_i(x)$ no ponto considerado, desprezando-se os termos constantes. A fórmula (12) tem sido bem aceita na comunidade científica porque é uma maneira fácil de determinar os modelos locais. Dentre vários autores que utilizaram essa fórmula podemos citar alguns tais como Bergsten, que a utilizou no projeto de observadores fuzzy (BERGSTEN; PALM; DRIANKOV, 2002), por Guo, no rastreamento de órbitas de sistemas caóticos (GUO et al., 2000), e por Zheng no projeto de um controlador proporcional integral robusto para uma turbina termoelétrica (ZHENG et al., 2001).

Certas classes de sistemas não lineares podem ser representadas de forma exata através de modelos fuzzy TS, utilizando-se o método proposto por Taniguchi et al. (2001), no qual os modelos locais são obtidos em função dos valores máximos e mínimos das funções não lineares na região de operação do sistema, sendo possível modelar vários sistemas no intervalo de operação. O número de modelos está diretamente relacionado ao número de funções não lineares. Na construção dos modelos, em geral, são considerados apenas os valores extremos das funções não lineares. Os modelos locais são obtidos pelos sistemas não lineares descritos abaixo:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^m g_{ik}(x(t))u_k(t), \quad (13)$$

em que $i = 1, 2, \dots, n$, n é o número de variáveis de estado, m o número de entradas e $\tilde{f}_{ij}(x(t))$ e $g_{ik}(x(t))$ são funções de $x(t)$, sendo $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$. Para obter a forma generalizada

deste método, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &\equiv \max_{x(t)} \{\tilde{f}_{ij}(x(t))\}, \\ a_{ij2} &\equiv \min_{x(t)} \{\tilde{f}_{ij}(x(t))\}, \\ b_{ik1} &\equiv \max_{x(t)} \{g_{ik}(x(t))\}, \\ b_{ik2} &\equiv \min_{x(t)} \{g_{ik}(x(t))\}. \end{aligned}$$

Para representar exatamente o sistema (13) com a forma generalizada são necessários 2^s modelos locais, sendo s o número de não linearidades distintas existentes no sistema (TANIGUCHI et al., 2001). No Capítulo 2 esse método será usado para representar, de forma exata, o modelo matemático de um levitador magnético e de um sistema bola viga.

2.4 Reguladores com modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e suas condições para estabilidade global

Para estabilizar sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy TS, é utilizado o conceito de CDP, para que assim seja projetado um compensador para cada regra de modelo fuzzy, na qual são utilizadas técnicas de projeto similares às empregadas no controle linear. O resultado dessa combinação fuzzy linear individual é um regulador fuzzy não linear. Na CDP, cada regra de controle é projetada a partir de uma regra do modelo fuzzy TS correspondente da planta. O regulador fuzzy projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy nas partes premissas. Para o modelo fuzzy (1), com $i = 1, 2, \dots, r$, os reguladores fuzzy via CDP possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i &: \text{ SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ E } \dots \text{ E } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ &\text{ ENTÃO } u(t) = -F_i x(t). \end{aligned} \quad (14)$$

De forma análoga à efetuada na obtenção de (2), o regulador fuzzy é dado por

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \\ &= -\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) F_i x(t), \\ &= -F(\alpha) x(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo a equação (15) na equação (2) tem-se:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))A_i x(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))B_i \left[- \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t))F_j x(t) \right], \quad (16)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t))B_i F_j x(t). \quad (17)$$

Sabe-se que

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Sendo assim, pode-se escrever

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t))A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t))B_i F_j x(t), \quad (18)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t), \quad (19)$$

ou seja,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t), \quad (20)$$

como efetuado em Tanaka, Ikeda e Wang (1998). O segundo método de Lyapunov generaliza a teoria clássica da mecânica que diz que um sistema vibratório é assintoticamente estável se sua energia total (função definida positiva) for continuamente decrescente (isto é, a derivada em relação ao tempo é definida negativa) até que um ponto de equilíbrio seja alcançado. A generalização de Lyapunov afirma que, se um sistema possui um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada transferida no interior do domínio de atração decai à medida que o tempo cresce até que finalmente assume seu valor mínimo no ponto de equilíbrio. Para sistemas puramente matemáticos, contudo, não há forma simples de se definir uma “função energia”. Sendo assim Lyapunov introduziu a chamada função de Lyapunov, uma “função energia” fictícia, que é uma ideia mais geral do que a de energia, que foi aplicada de forma mais abrangente (OGATA, 2003). Através de funções de Lyapunov quadráticas do tipo $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ obtém-se condições suficientes de estabilidade para modelos fuzzy TS contínuos no tempo, como pode ser visto por exemplo em Tanaka e Sugeno (1992), Pietrobon (1999), Teixeira, Pietrobon e Assunção (2000), Kim e Lee (2000), Teixeira, Assunção e Avellar (2003), Xiaodong e Qingling (2003), Tuan et al. (2001). Definindo

$$G_{ij} = A_i - B_i F_j, \quad (21)$$

então, a equação (20) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) G_{ij} x(t), \quad (22)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t), \quad (23)$$

com

$$\sum_{i < j}^r a_{ij} = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r a_{ij}.$$

Lema 2.1. (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) *O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy contínuo descrito por (5) é globalmente assintoticamente estável se existe uma matriz simétrica positiva definida comum \mathbf{P} tal que*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad (24)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$; isto é, para todos os subsistemas.

Para comprovar esse resultado, considere a candidata a função de Lyapunov do tipo $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$. Desta forma, considerando $x \neq 0$, sua derivada em relação ao tempo (que no caso deve ser negativa definida) é dada por,

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0. \quad (25)$$

Substituindo (5) em (25) tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) A_i x(t) \right) < 0, \quad (26)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) x(t)^T A_i^T P x(t) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) x(t)^T P A_i x(t) < 0, \quad (27)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) (A_i^T P + P A_i) x(t) < 0. \quad (28)$$

Assim, tendo em vista (7),

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (29)$$

é uma condição necessária e suficiente para (28) (estabilidade quadrática) pois de (7), para $\alpha_i = 1, \alpha_j = 0, i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ e assim, (28) implica em (29) (condição necessária). Agora, as condições (29) e (7) implicam em (28) (condição suficiente).

Vamos aplicar o Lema 1 no sistema realimentado (23), a fim de que seja projetado um regulador (15) que estabilize este sistema (CARDIM, 2009).

Substituindo (23) em (25) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) x(t)^T G_{ii}^T + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) x(t)^T \left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) \right] P x(t) + \\ & + x(t)^T P \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right]. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos da equação tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i<j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left[\left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right] \right\} x(t). \end{aligned} \quad (30)$$

Assim, verificando a equação (30), como $\alpha_i(z(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\alpha_1(z(t)) + \dots + \alpha_r(z(t)) = 1$, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do sistema (2) realimentado com a lei de controle (15) (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998):

$$P > 0, \quad P = P^T, \quad (31)$$

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (32)$$

$$\left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \quad i < j. \quad (33)$$

2.5 Projeto de Reguladores Fuzzy com LMIs

Geralmente os problemas de controle e a análise de estabilidade podem ser reduzidos a problemas com LMIs, e as soluções de tais LMIs, quando existem, podem ser obtidas eficientemente por ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação convexa (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998). As soluções encontradas por problemas descritos por LMIs são equivalentes às soluções encontradas para o problema original. O uso de LMIs permite a consideração de diversas especificações, tais como a resposta transitória através da taxa de decaimento e as restrições nos sinais de controle e nas saídas. As condições (31), (32) e (33) garantem a estabilidade assintótica global do sistema (2) realimentado com a lei de controle (15). Substituindo (21) na condição (32) tem-se,

$$\begin{aligned} (A_i - B_i F_i)^T P + P (A_i - B_i F_i) &< 0, \\ (A_i^T - F_i^T B_i^T) P + P (A_i - B_i F_i) &< 0, \\ A_i^T P - F_i^T B_i^T P + P A_i - P B_i F_i &< 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Sejam,

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X \Rightarrow F_i = M_i X^{-1}.$$

Então, (34) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_i^T X^{-1} - X^{-1} M_i^T B_i^T X^{-1} + X^{-1} A_i - X^{-1} B_i M_i X^{-1} < 0, \\ X A_i^T - M_i^T B_i^T + A_i X - B_i M_i < 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Portanto,

$$-X A_i^T + M_i^T B_i^T - A_i X + B_i M_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (36)$$

Agora, substituindo (21) em (33) tem-se que:

$$\begin{aligned} (A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i)^T P + P(A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i) \leq 0, \\ (A_i^T - F_j^T B_i^T + A_j^T - F_i^T B_j^T) P + P(A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i) \leq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Definindo, $X = P^{-1}$ e $F_i = M_i X^{-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned} A_i^T X^{-1} - X^{-1} M_j^T B_i^T X^{-1} + A_j^T X^{-1} - X^{-1} M_i^T B_j^T X^{-1} \\ + X^{-1} A_i - X^{-1} B_i M_j X^{-1} + X^{-1} A_j - X^{-1} B_j M_i X^{-1} \leq 0, \\ X A_i^T - M_j^T B_i^T + X A_j^T - M_i^T B_j^T + A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i \leq 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -X A_i^T + M_j^T B_i^T - X A_j^T + M_i^T B_j^T - A_i X + B_i M_j - A_j X + B_j M_i \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, r-1, \quad j = i+1, i+2, \dots, r. \end{aligned} \quad (39)$$

Veremos, a seguir, as condições que garantem a estabilidade de um sistema, a velocidade de resposta, que está relacionada com a taxa de decaimento (β), a restrição na entrada do sinal de controle e na saída da planta.

a) Estabilidade: As LMIs (36) e (39), juntamente com $X = X^T > 0$, garantem a estabilidade assintótica global do sistema (2) realimentado com a lei de controle (15).

b) Taxa de Decaimento: Considere a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, com $\dot{V}(x(t)) < 0$ para todo $x \neq 0$. A taxa de decaimento maior ou igual a β , $\beta > 0$, é obtida se a condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$ for satisfeita para toda a trajetória $x(t)$ do sistema (TANAKA;

IKEDA; WANG, 1998). Lembrando-se que (da equação (30)),

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left[\left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right] \right\} x(t), \end{aligned} \quad (40)$$

e que:

- $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$,
- $\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \sum_{j=1}^r \alpha_j(z(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) = 1$,

tem-se,

$$V(x(t)) = \left[\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \right] x(t)^T P x(t). \quad (41)$$

Dessa forma, de (40) e $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$ obtém-se:

$$\begin{aligned} x(t)^T \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i^2(z(t)) (G_{ii}^T P + P G_{ii} + 2\beta P) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i < j}^r \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) \left[\left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + 2\beta P \right] \right\} x(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Assim, como $\alpha_i(z(t)) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1$, as condições a seguir garantem a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento maior ou igual a β ($\beta > 0$):

$$P > 0, \quad P = P^T, \quad (43)$$

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + 2\beta P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (44)$$

$$\left(\frac{G_{ij}^T + G_{ji}^T}{2} \right) P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + 2\beta P \leq 0, \quad i < j. \quad (45)$$

Analogamente ao cálculo das LMIs considerando apenas a estabilidade do sistema, obtém-se:

$$-X A_i^T + M_i^T B_i^T - A_i X + B_i M_i - 2\beta X > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} -X A_i^T + M_j^T B_i^T - X A_j^T + M_i^T B_j^T - A_i X + B_i M_j - A_j X + B_j M_i - 4\beta X \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, r-1, \quad j = i+1, i+2, \dots, r, \quad X = X^T > 0, \end{aligned} \quad (47)$$

que são as LMIs que garantem a estabilidade assintótica global do sistema com taxa de decaimento maior ou igual a β .

c) Restrição da Entrada: Considere conhecida a condição inicial $x(0)$. Temos que a res-

restrição $\|u(t)\|_2 \leq \gamma$ é inserida para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (48)$$

e

$$\begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (49)$$

se mantém (juntamente com as condições para estabilidade dadas em **a**, ou taxa de decaimento dadas em **b**) ((BOYD et al., 1994; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998)), sendo $X = P^{-1}$ e $M_i = F_i X$. Logo, as condições (48) e (49) garantem a restrição da entrada de um sistema.

d) Restrição da Saída: Considere que a condição inicial $x(0)$ é conhecida e defina $y(t) = C_i x(t)$. A restrição $\|y(t)\|_2 \leq \lambda$ é imposta para todo tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (50)$$

e

$$\begin{bmatrix} X & X C_i^T \\ C_i X & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (51)$$

se mantém (juntamente com as condições para estabilidade dadas em **a**, ou taxa de decaimento dadas em **b**) (BOYD et al., 1994; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998), sendo $X = P^{-1}$. As condições (50) e (51) garantem a restrição da saída de um sistema.

Observação 1. Como mencionado em **c** e **d**, as LMIs de restrição na entrada e/ou saída devem vir a ser especificadas juntamente com as LMIs de estabilidade do sistema e da taxa de decaimento, quando houver. Nesse trabalho essas LMIs não foram utilizadas, elas foram inseridas no texto para conhecimento dos índices de desempenho do sistema controlado.

2.6 Rastreamento

Nos últimos anos o problema de controle com rastreamento tem sido alvo de vários estudos, como pode ser visto em Lian e Liou (2006), Assunção et al. (2008), Chen, Chen e Chiang (2008), Chang e Chen (2010), Yu et al. (2010), Shih, CLi e Tsai (2011), dentre outros. Para o problema do rastreamento, o objetivo é fazer com que o erro de rastreamento (diferença entre a saída e a saída desejada) tenda a zero, assegurando também a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio.

Em Lian e Liou (2006) o processo de rastreamento utiliza o conceito de variável virtual

desejada, e o projeto se divide em duas etapas: primeiro determinam-se as variáveis virtuais desejadas da dinâmica do sistema; em seguida determinam-se os ganhos de controle, baseados em LMIs, para estabilizar o sistema.

Já em Assunção et al. (2008), o rastreamento de sinais emprega a modificação ótima dos zeros a fim de minimizar a norma H_∞ de custo garantido da função de transferência entre os sinais de referência e o sinal de erro de rastreamento, sendo o erro de rastreamento a diferença entre o sinal de referência e o sinal de saída.

Em Andrea et al. (2008) foi proposta uma metodologia de rastreamento de sinais e rejeição de distúrbios aplicada a sistemas não lineares. Para o projeto do sistema de rastreamento, foram projetados controladores fuzzy que minimizam o limitante superior da norma H_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro do rastreamento.

Em Chang e Chen (2010) é tratado o problema de controle com rastreamento da referência para sistemas não lineares com parâmetros distribuídos, considerando a existência de um atraso de transporte, distúrbios externos e ruídos de medição; o sistema não linear com parâmetros distribuídos é medido utilizando-se vários sensores, para a realimentação da saída de controle do rastreamento.

No artigo de Wai e Yang (2008) foi feito o desenvolvimento de um sistema de controle utilizando uma rede neural fuzzy de um manipulador robótico para alcançar alta precisão do rastreamento da posição. Foi construída uma dinâmica de tempo contínuo utilizando o modelo fuzzy Takagi Sugeno com capacidade de aprendizagem on-line para representar o manipulador robótico.

No trabalho de Lian e Tu (2008) foi apresentado um procedimento baseado em LMI para projetar um sistema de rastreamento da saída do controlador de sistemas paramétricos realimentados, baseado em um regime adaptativo. Para beneficiar o rastreamento, foram introduzidos os conceitos de variáveis virtuais desejadas, que podem ser determinadas sem falha dinâmica do sistema. O controle adaptativo de rastreamento proposto foi investigado para sistemas com uma única entrada e com múltiplas entradas, com parâmetros desconhecidos. Diferente das formas de controle adaptativos existentes, a pesquisa foi de uma abordagem exata, comparada com a abordagem usando a aproximação universal. Além disso, um novo método chamado técnica do balanço foi proposto para lidar com a infactibilidade das LMIs para a estrutura específica de uma matriz comum P positiva definida, e foi adotada uma técnica de parametrização para certificar que as variáveis virtuais desejadas podem ser bem definidas.

No trabalho de Chiu (2010) foi apresentado um sistema de rastreamento do ponto máximo

de energia para sistemas autônomos de geração de energia solar através do modelo fuzzy TS. Para regular a potência de saída da matriz do painel fotovoltaico foi considerado um conversor dc/dc. Primeiro o sistema foi representado por modelos fuzzy TS e em seguida, a fim de reduzir o número de sinais medidos, um observador fuzzy TS foi desenvolvido para a realimentação do vetor de estado. Então um controlador fuzzy para o rastreamento assintótico do ponto máximo de energia foi proposto para alcançar o controle de rastreamento do ponto máximo de energia, em que os ganhos do controlador e do observador são obtidos separadamente resolvendo dois conjuntos de desigualdades matriciais lineares. Diferente das abordagens tradicionais de rastreamento do ponto máximo de energia, o controlador fuzzy proposto aciona diretamente o sistema para o ponto de energia máxima sem ter que procurá-lo e medir a insolação. Além disso, quando se considera perturbação e incerteza, o rastreamento do ponto máximo de energia robusto é garantido. Portanto o método proposto fornece uma forma mais fácil de implementação na análise estrita de estabilidade.

Em Chen, Lee e Guo (2003) é feito um projeto de um sistema de rastreamento ótimo para sistemas fuzzy estocásticos.

Em Chiu e Ouyang (2011) é apresentado um modelo fuzzy TS unificado baseado em uma aproximação máxima do controle de potência para melhorar a eficiência e a robustez do sistema de geração de energia solar fotovoltaica.

2.7 Sistemas Chaveados

Nos últimos anos tem crescido muito o interesse em estudar sistemas com comutação, principalmente os sistemas lineares, como pode ser visto em trabalhos como Ji et al. (2004), Hespanha (2004), Xie e Wang (2005), Geromel e Colaneri (2006), Deaecto e Geromel (2008), Cardim et al. (2009), Deaecto et al. (2010). Entretanto, pouco tem-se estudado sobre sistema fuzzy TS com comutação. Mesmo de forma bem tímida (se comparado ao caso linear), tem surgido alguns trabalhos utilizando controladores com comutação para resolver problemas de estabilidade de sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy como pode ser visto em Tanaka, Iwasaki e Wang (2000A), Tanaka, Iwasaki e Wang (2000B), Arrifano, Oliveira e Cossi (2006), Dong e Yang (2008A), Dong e Yang (2008B), Yan e Sun (2010), Yang e Dong (2010).

Em Tanaka, Iwasaki e Wang (2000A) um sistema fuzzy com comutação é empregado para representar o sistema dinâmico não linear de um veículo *hovercraft*. Já em Tanaka, Iwasaki e Wang (2000B) é projetado um controlador fuzzy com comutação e obtém-se condições de suavidade que evitam o fenômeno de descontinuidade do sinal de controle.

Em Arrifano, Oliveira e Cossi (2006) é proposta uma nova análise de estabilidade e também de projeto de sistemas de controle fuzzy chaveado, baseado em sistemas fuzzy TS, considerando a existência de incertezas na planta. O projeto de controle proposto utiliza ganhos de realimentação de estado locais obtidos da solução de um problema de otimização com desempenho de custo garantido formulado em termos de desigualdades matriciais lineares e um esquema de chaveamento fuzzy baseado em funções de Lyapunov, que são usadas quando a trajetória do estado do sistema está na fronteira de subespaços definidos do espaço de estados.

Em Dong e Yang (2008A), são explorados os controladores fuzzy com comutação, que comutam baseados nos valores das funções de pertinência e o esquema de controle é uma extensão da Compensação Distribuída Paralela. Já em Dong e Yang (2008B) é proposto um novo tipo de controlador com realimentação dinâmica da saída, ou seja, é proposto um controlador baseado na Compensação Distribuída Paralela Dinâmica Chaveada, que comuta com base no valor das funções de pertinência. Esse novo método garante estabilidade e performance H_∞ do sistema não linear em malha fechada.

Em Yan e Sun (2010) é provado que o princípio da separação para sistemas fuzzy TS com controladores e observadores fuzzy chaveados são válidos tanto em tempo contínuo quanto em tempo discreto, e podem garantir a estabilidade do sistema fuzzy total ao projetar controladores e observadores correspondentes, de forma independente.

Em Yang e Dong (2010) é estudado o problema de controle H_∞ como realimentação dinâmica da saída para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy TS por partes, com variáveis premissas mensuráveis e partes incertas. Os parâmetros incertos são dependentes, desconhecidos e variantes no tempo.

Nos capítulos seguintes veremos exemplos de sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy TS para definição e projeto das leis de controle, a nova metodologia de rastreamento proposta e os sistemas com chaveamento de reguladores fuzzy TS.

3 SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM RASTREAMENTO EM UMA REGIÃO DE OPERAÇÃO

Neste trabalho, é proposta uma nova metodologia de controle para o rastreamento de sinais constantes em sistemas não lineares. Tal método é baseado em LMIs e utiliza modelos fuzzy Takagi-Sugeno que descrevem, de forma exata, o modelo não linear da planta. O método proposto consiste no aumento da dimensão do domínio das funções não lineares do sistema. Assim, em cada função não linear é incorporada, como uma nova variável, a coordenada do ponto de equilíbrio que se deseja rastrear. Para ilustrar foi utilizado o modelo de um levitador magnético dado em Marquez (2003) e do sistema bola viga dado em Silva (2005).

A principal vantagem dessa nova metodologia é a sua aplicação prática, pois o projetista escolhe a região desejada para os pontos de equilíbrio e projeta um único conjunto de ganhos do regulador que garante a estabilidade assintótica do sistema em qualquer ponto de equilíbrio previamente escolhido na região. Tal região é flexível e é escolhida de acordo com as necessidades do projetista. O projeto considera que a alteração de um ponto de operação para outro, ocorre em grandes intervalos de tempo, de modo que nos instantes das mudanças o sistema está praticamente em regime.

Além disso, essa nova metodologia se ajusta bem aos métodos de projeto de regulador existentes, pois não é necessário modificar as LMIs que garantem estabilidade e/ou índices de desempenho de trabalhos que já são bem aceitos na literatura como, por exemplo, Boyd et al. (1994), Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Teixeira e Žak (1999), Taniguchi et al. (2001), Teixeira, Assunção e Avellar (2003), Mozelli et al. (2009).

3.1 Resultados Preliminares

3.1.1 Estabilidade de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno via LMI

Será enunciado nessa subseção, em forma de teorema, apenas as condições de estabilidade e de taxa de decaimento, que foram explicitadas no capítulo anterior. Os teoremas a seguir, cuja demonstração pode ser vista em Tanaka, Ikeda e Wang (1998), garantem a estabilidade global da origem do sistema dado abaixo:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) G_{ij} x(t). \quad (52)$$

sendo $\alpha_i(x(t))$ e $\alpha_j(x(t))$ dados em (7).

Teorema 1. (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) *O ponto de equilíbrio do sistema de controle fuzzy contínuo dado em (52), com G_{ij} dado em (21), é globalmente assintoticamente estável na origem, se existe uma matriz simétrica positiva definida X ($X > 0$) e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 1, 2, \dots, r$, tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$XA_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0, \quad (53)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_i M_j - B_j M_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T \leq 0, \quad i < j, \quad (54)$$

para todo $i, j = 1, \dots, r$, exceto os pares (i, j) tais que $\alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) = 0, \quad \forall x(t)$. Se existir tal solução os ganhos do controlador são dados por $F_i = M_i X^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Prova: Vide em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) ■

Sabe-se que em geral, no projeto de sistemas de controle é importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado tais como: velocidade de resposta, restrições na entrada do sinal de controle e saída dos estados. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento do sistema (52), (ou maior expoente Lyapunov) que é definido como sendo o maior $\beta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta t} \|x(t)\| = 0 \quad (55)$$

vale para todas as trajetórias $x(t)$.

Como em Boyd et al. (1994, p. 66), pode-se usar a função de Lyapunov quadrática $V = x(t)^T P x(t)$ para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema (52). A condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$ para todas as trajetórias $x(t)$ é equivalente ao Teorema 2 enun-

ciado a seguir.

Teorema 2. (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) *O ponto de equilíbrio do sistema de controle fuzzy contínuo dado em (22) é globalmente assintoticamente estável na origem, com taxa de decaimento maior ou igual a β , se existe uma matriz simétrica positiva definida X ($X > 0$) e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i = 1, 2, \dots, r$ tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$XA_i^T + A_iX - B_iM_i - M_i^T B_i^T + 2\beta X < 0, \quad (56)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^T - B_iM_j - B_jM_i - M_i^T B_j^T - M_j^T B_i^T + 4\beta X \leq 0, \quad i < j, \quad (57)$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, r$, excetuando os pares (i, j) tais que $\alpha_i(x(t))\alpha_j(x(t)) = 0, \quad \forall x(t)$. Se existir tal solução os ganhos do controlador são dados por $F_i = M_iX^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Prova: Vide em (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) ■

3.2 Levitador Magnético

Os sistemas de suspensão magnética são geralmente encontrados em trens de alta velocidade, giroscópios e acelerômetros, pois neles, a redução da força de atrito e o contato mecânico são essenciais. Em Komori e Yamane (2001) e Assunção e Teixeira (2002) é apresentado o modelo e o sistema de controle de um micromotor para um coração artificial que também utiliza um sistema de suspensão magnética para sustentar o rotor do micromotor. Será apresentado a seguir um modelo matemático de um levitador magnético para a aplicação dos sistemas de controle fuzzy anteriormente estudados e dos que serão propostos nessa dissertação. A Figura 2 mostra a configuração básica de um levitador magnético.

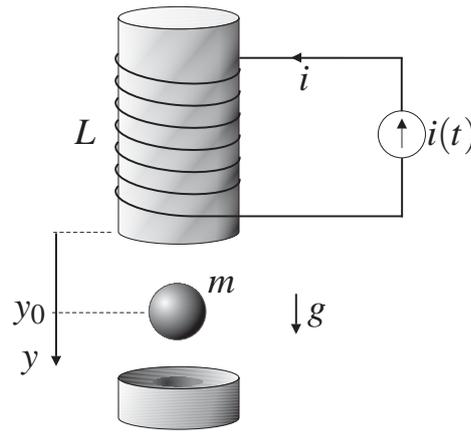
Como visto em Marquez (2003), de acordo com a segunda lei de Newton tem-se a partir da Figura 2:

$$m\ddot{y} = -f_k + mg + F, \quad (58)$$

sendo:

- m : massa da bola;
- f_k : força de atrito viscoso entre a bola e o ar;
- g : aceleração da gravidade;
- F : força eletromagnética (com sentido contrário ao de g);
- L : indutância do eletroímã.

Figura 2 - Levitador Magnético.



Fonte: (CARDIM, 2009)

Para completar o modelo é necessário encontrar as propriedades da força eletromagnética F . A energia eletromagnética armazenada é dada por:

$$E(i) = \frac{1}{2}Li^2. \quad (59)$$

A indutância L não é constante, pois depende da posição da bola. De acordo com Marquez (2003) podemos aproximar L como:

$$L = L(y) = \frac{\lambda}{1 + \mu y}, \quad (60)$$

sendo λ e μ constantes positivas. A equação (60) considera o fato de que a posição da bola altera o fluxo magnético no circuito, resultando numa alteração da indutância L . A energia no circuito é então dada por:

$$E(i, y) = \frac{1}{2}L(y)i^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(1 + \mu y)} i^2. \quad (61)$$

A força magnética F pode ser escrita como:

$$F(i, y) = \frac{\partial E(i, y)}{\partial y} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L(y)}{\partial y}, \quad (62)$$

$$F(i, y) = \frac{-1}{2} \frac{\lambda \mu i^2}{(1 + \mu y)^2}. \quad (63)$$

Considerando que a força de atrito f_k é da forma

$$f_k = k\dot{y}, \quad (64)$$

sendo $k > 0$ o coeficiente de atrito viscoso entre a bola e o ar, e substituindo (63) e (64) em (58),

tem-se a equação de movimento da bola:

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + mg - \frac{1}{2} \frac{\lambda \mu i^2}{(1 + \mu y)^2}. \quad (65)$$

Definindo como variáveis de estado, $\bar{x}_1 = y$ e $\bar{x}_2 = \dot{y}$ tem-se:

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \quad (66)$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = g - \frac{k}{m} \bar{x}_2 - \frac{\lambda \mu i^2}{2m(1 + \mu \bar{x}_1)^2}. \quad (67)$$

O objetivo do projeto é manter a bola numa posição arbitrária $y = y_0$, para isso, de (65) devemos ter:

$$m\ddot{y}_0 = -k\dot{y}_0 + mg - \frac{1}{2} \frac{\lambda \mu i_0^2}{(1 + \mu y_0)^2}, \quad (68)$$

$$i_0^2 = \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2. \quad (69)$$

Pode-se verificar que o ponto de equilíbrio é instável e, além disso, o mesmo não se encontra na origem (condição necessária no projeto de controladores usando funções de Lyapunov), pois $\bar{x}_e = (\bar{x}_{1e}, \bar{x}_{2e})^T = (y_0, 0)^T$. Segundo Cardim (2009), para contornar esse problema pode-se proceder da forma a seguir.

Sejam,

$$x_1 = \bar{x}_1 - y_0 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\bar{x}}_1, \quad (70)$$

$$x_2 = \bar{x}_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\bar{x}}_2, \quad (71)$$

$$u = i^2 - i_0^2 \Rightarrow u = i^2 - \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2. \quad (72)$$

De (72) tem-se

$$i^2 = u + \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2. \quad (73)$$

Substituindo em (66) e (67),

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (74)$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m} x_2 - \frac{\lambda \mu [u + \frac{2mg}{\lambda \mu} (1 + \mu y_0)^2]}{2m[1 + \mu(x_1 + y_0)]^2}. \quad (75)$$

Com o objetivo de descrever o comportamento dinâmico do sistema na forma de espaço de estado, podemos escrever (75) da seguinte forma:

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m} x_2 - \frac{g(1 + \mu y_0)^2}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} - \frac{\lambda \mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} u, \quad (76)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_2 + g \frac{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2 - (1 + \mu y_0)^2}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} - \frac{\lambda \mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} u, \quad (77)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} x_1 - \frac{k}{m} x_2 - \frac{\lambda \mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} u. \quad (78)$$

O sistema resultante será composto pelas equações (74) e (78).

Logo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} & \frac{-k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda \mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} \end{bmatrix} u, \quad (79)$$

é uma representação no espaço de estados do levitador magnético ilustrado na Figura 2.1.

Para a simulação deste sistema (não linear), será utilizada a modelagem fuzzy TS exata, apresentada em Taniguchi et al. (2001). Neste caso, como existem duas não linearidades no sistema, serão necessários quatro modelos locais (2^2). A Tabela 1, vista em Cardim (2009) mostra os valores dos parâmetros considerados para o sistema.

Tabela 1 - Parâmetros da planta (80)-(82).

Parâmetros	Valores
m	$50 \times 10^{-3} \text{ Kg}$
g	$9,8 \text{ m/s}^2$
k	$1 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}$
λ	$460 \times 10^{-3} \text{ H}$
μ	2 m^{-1}
$0 \leq \bar{x}_1 \leq 0,15 \text{ m}$	

Fonte: (CARDIM, 2009)

Sejam:

$$f_{21}(x_1, y_0) = \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2}, \quad (80)$$

$$g_{21}(x_1, y_0) = \frac{-\lambda \mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2}. \quad (81)$$

Então note que (79) pode ser reescrito na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{21}(x_1, y_0) & \frac{-k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21}(x_1, y_0) \end{bmatrix} u, \quad (82)$$

3.2.1 Projeto do Regulador para um Ponto de Operação

Nessa seção serão projetados, separadamente, os ganhos do controlador que mantém a bola na posição $\bar{x}_1 = y_0$. No primeiro projeto, $y_0 = 0,1m$ e no segundo, $y_0 = 0,05m$. A Tabela 1 apresenta os parâmetros da planta (80)-(82), para o projeto do controlador.

Primeiro consideramos que $y_0 = 0,1m$ e consideramos o seguinte domínio durante a operação:

$$D_1 = \{[x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : -0,1 \leq x_1 \leq 0,05 \text{ e } y_0 = 0,1\}. \quad (83)$$

Observação 2. Não será necessário definir um intervalo para x_2 porque esta variável não irá influenciar nas simulações. Essa observação vale também para domínios D_2 , D_3 e D_4 que serão especificados ao longo do texto.

Agora, para obter a forma generalizada, como proposto em Taniguchi et al. (2001), é necessário calcular os valores máximos e mínimos das funções (80) e (81) no domínio D_1 . Foram obtidos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} a_{21_1} &= \max_{x_1 \in D_1} \{f_{21}(x_1)\} = 43,1200, \\ a_{21_2} &= \min_{x_1 \in D_1} \{f_{21}(x_1)\} = 28,9941, \\ b_{21_1} &= \max_{x_1 \in D_1} \{g_{21}(x_1)\} = -5,4438, \\ b_{21_2} &= \min_{x_1 \in D_1} \{g_{21}(x_1)\} = -9,2000. \end{aligned} \quad (84)$$

A função não linear f_{21} , como proposta em Taniguchi et al. (2001), pode ser representada por um modelo fuzzy TS, considerando dois modelos locais: a_{21_1} e a_{21_2} , isto é, existem $\sigma_{21_1}(x_1)$ e $\sigma_{21_2}(x_1)$ tais que ,

$$f_{21}(x_1) = \sigma_{21_1}(x_1)a_{21_1} + \sigma_{21_2}(x_1)a_{21_2}, \quad (85)$$

com

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma_{21_1}(x_1), \sigma_{21_2}(x_1) \leq 1, \\ \sigma_{21_1}(x_1) + \sigma_{21_2}(x_1) &= 1. \end{aligned} \quad (86)$$

Além disso, de (85) e (86) note que

$$\begin{aligned} \sigma_{21_1}(x_1) &= \frac{f_{21}(x_1) - a_{21_2}}{a_{21_1} - a_{21_2}}, \\ \sigma_{21_2}(x_1) &= 1 - \sigma_{21_1}(x_1). \end{aligned}$$

Similarmente, de (84) existem $\xi_{21_1}(x_1)$ e $\xi_{21_2}(x_1)$ tais que

$$g_{21}(x_1) = \xi_{21_1}(x_1)b_{21_1} + \xi_{21_2}(x_1)b_{21_2}, \quad (87)$$

com

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi_{21_1}(x_1), \xi_{21_2}(x_1) \leq 1, \\ \xi_{21_1}(x_1) + \xi_{21_2}(x_1) &= 1. \end{aligned} \quad (88)$$

Dessa forma, de (87) e (88) tem-se que

$$\begin{aligned} \xi_{21_1}(x_1) &= \frac{g_{21}(x_1) - b_{21_2}}{b_{21_1} - b_{21_2}}, \\ \xi_{21_2}(x_1) &= 1 - \xi_{21_1}(x_1). \end{aligned}$$

Lembrando que $\xi_{21_1}(x_1) + \xi_{21_2}(x_1) = 1$. Além disso, de (85) segue que

$$\begin{aligned} f_{21}(x_1) &= (\xi_{21_1}(x_1) + \xi_{21_2}(x_1))(\sigma_{21_1}(x_1)a_{21_1} + \sigma_{21_2}(x_1)a_{21_2}) \\ &= \sigma_{21_1}(x_1)\xi_{21_1}(x_1)a_{21_1} + \sigma_{21_1}(x_1)\xi_{21_2}(x_1)a_{21_1} + \\ &\quad \sigma_{21_2}(x_1)\xi_{21_1}(x_1)a_{21_2} + \sigma_{21_2}(x_1)\xi_{21_2}(x_1)a_{21_2}. \end{aligned} \quad (89)$$

Similarmente, de (87) e $\sigma_{21_1}(x_1) + \sigma_{21_2}(x_1) = 1$ obtém-se

$$\begin{aligned} g_{21}(x_1) &= (\sigma_{21_1}(x_1) + \sigma_{21_2}(x_1))(\xi_{21_1}(x_1)b_{21_1} + \xi_{21_2}(x_1)b_{21_2}) \\ &= \sigma_{21_1}(x_1)\xi_{21_1}(x_1)b_{21_1} + \sigma_{21_1}(x_1)\xi_{21_2}(x_1)b_{21_2} + \\ &\quad \sigma_{21_2}(x_1)\xi_{21_1}(x_1)b_{21_1} + \sigma_{21_2}(x_1)\xi_{21_2}(x_1)b_{21_2}. \end{aligned} \quad (90)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) &= \sigma_{21_1}(x_1)\xi_{21_1}(x_1), \\ \alpha_2(x_1) &= \sigma_{21_1}(x_1)\xi_{21_2}(x_1), \\ \alpha_3(x_1) &= \sigma_{21_2}(x_1)\xi_{21_1}(x_1), \\ \alpha_4(x_1) &= \sigma_{21_2}(x_1)\xi_{21_2}(x_1), \end{aligned} \quad (91)$$

como sendo as funções de pertinência do sistema (80)-(82), tem-se de (89) - (91) que os modelos locais para o mesmo são:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_1} & -0,02 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_2} & -0,02 \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$B_1 = B_3 = [0 \quad b_{21_1}]^T, \quad B_2 = B_4 = [0 \quad b_{21_2}]^T.$$

Portanto, o sistema (80)-(82), com a lei de controle (15), pode ser representado na forma de

um modelo fuzzy Takagi-Sugeno, como em (20) e (22), com $r = 4$:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) G_{ij} x(t), \quad \text{sendo } G_{ij} = A_i - B_i F_j.$$

Nota-se que, para $i = 1, 2, 3, 4$:

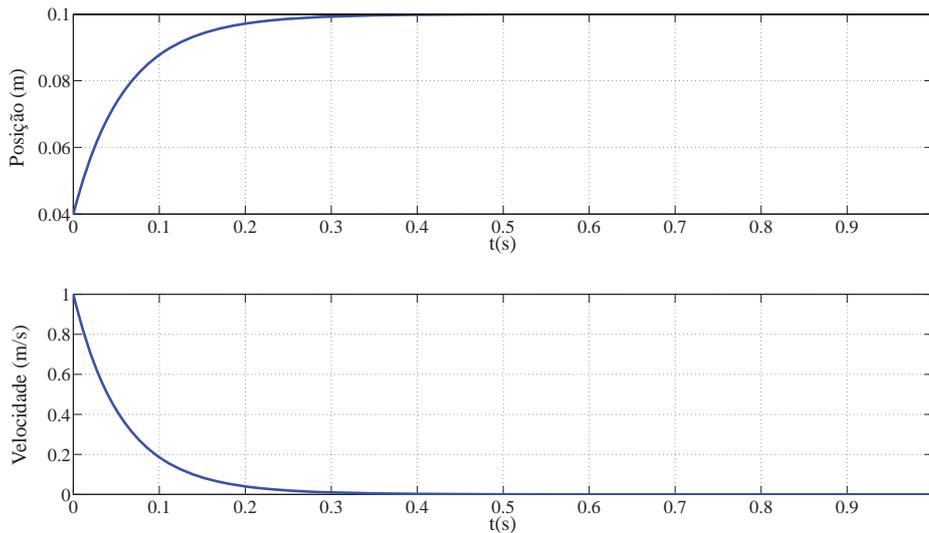
$$\alpha_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^4 \alpha_i(\mathbf{x}) = 1. \quad (93)$$

Logo, utilizando as LMIs (53) e (54) dadas no Teorema 1, foram obtidos os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned} F_1 &= [-38,3098 \quad -4,7610], \\ F_2 &= [-26,0150 \quad -3,1937], \\ F_3 &= [-37,2796 \quad -4,8423], \\ F_4 &= [-23,3273 \quad -3,0979]. \end{aligned} \quad (94)$$

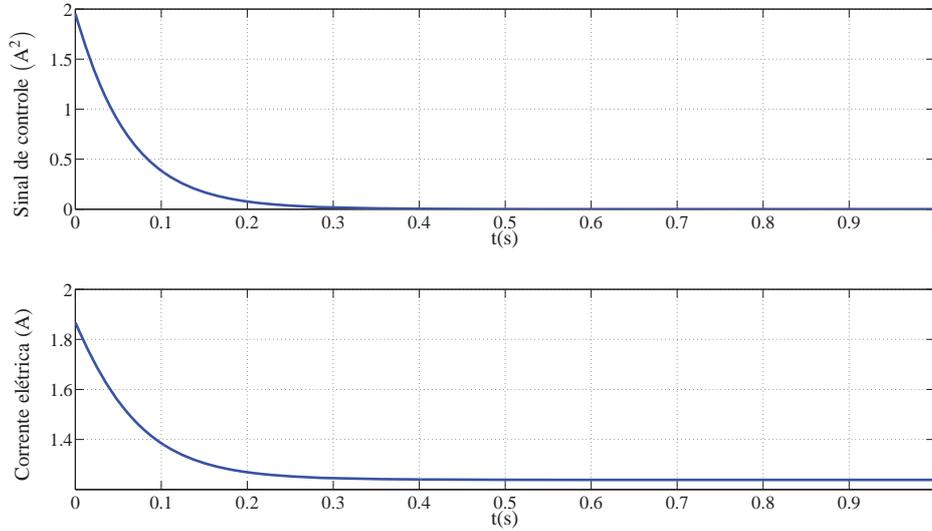
Considerando a condição inicial $\bar{x}_0 = [0,04 \quad 1]^T$ e $y_0 = 0,1m$ para o sistema (74) e (78), (para o sistema (80)-(82) a condição inicial é $x_0 = \bar{x}_0 - [y_0 \quad 0]^T = [-0,06 \quad 1]^T$), a simulação do sistema controlado (80)-(82), (15) e (94) apresenta a resposta mostrada nas Figuras 3 e 4. Note que $y(\infty) = y_0$, como desejado.

Figura 3 - Posição $y(t) = \bar{x}_1(t)$ e velocidade $(\bar{x}_2(t))$ do sistema controlado para $y_0 = 0,1m$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Figura 4 - Sinal de controle $u(t) = i(t)^2 - i_0^2$ e corrente elétrica ($i(t)$) do sistema controlado para $y_0 = 0,1m$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Agora, suponha que a posição desejada para o levitador magnético seja $y_0 = 0,05m$. Assim, para o projeto da lei de controle considere que na operação requerida o domínio é:

$$D_2 = \{[x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2 : -0,05 \leq x_1 \leq 0,1 \text{ e } y_0 = 0,05m\}. \quad (95)$$

Para obter a forma generalizada, como proposto em Taniguchi et al. (2001), é necessário calcular os valores máximos e mínimos das funções (80) e (81) no domínio D_2 . Feitos os cálculos foram obtidos os seguintes valores:

$$a_{21_1} = \max_{x_1 \in D_2} \{f_{21}(x_1)\} = 41,1600$$

$$a_{21_2} = \min_{x_1 \in D_2} \{f_{21}(x_1)\} = 27,8343$$

$$b_{21_1} = \max_{x_1 \in D_2} \{g_{21}(x_1)\} = -5,4438$$

$$b_{21_2} = \min_{x_1 \in D_2} \{g_{21}(x_1)\} = -9,2000.$$

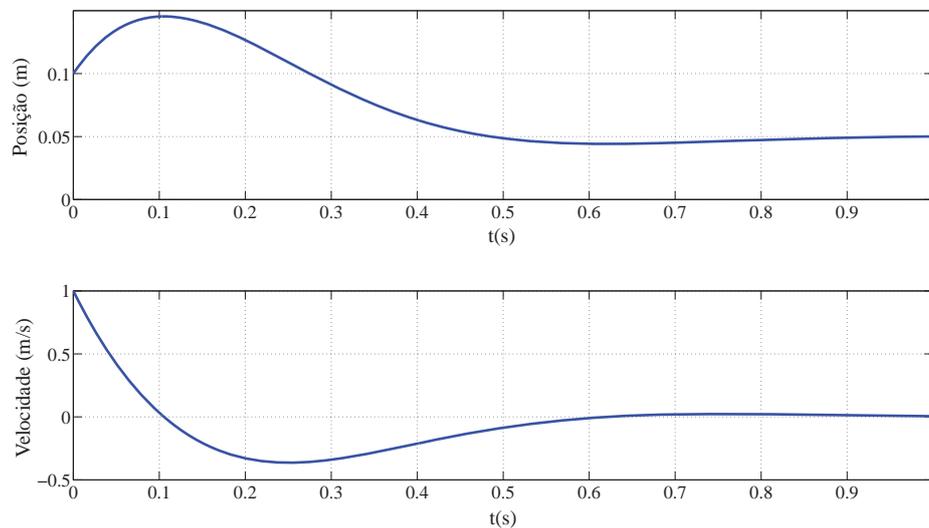
Admitindo as mesmas considerações feitas em (85)-(92) e utilizando o Teorema 1, foram

obtidos os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned} F_1 &= [-17,5514 \quad -1,7747], \\ F_2 &= [-12,0856 \quad -1,1922], \\ F_3 &= [-16,2911 \quad -1,8098], \\ F_4 &= [-10,0255 \quad -1,1717]. \end{aligned} \tag{96}$$

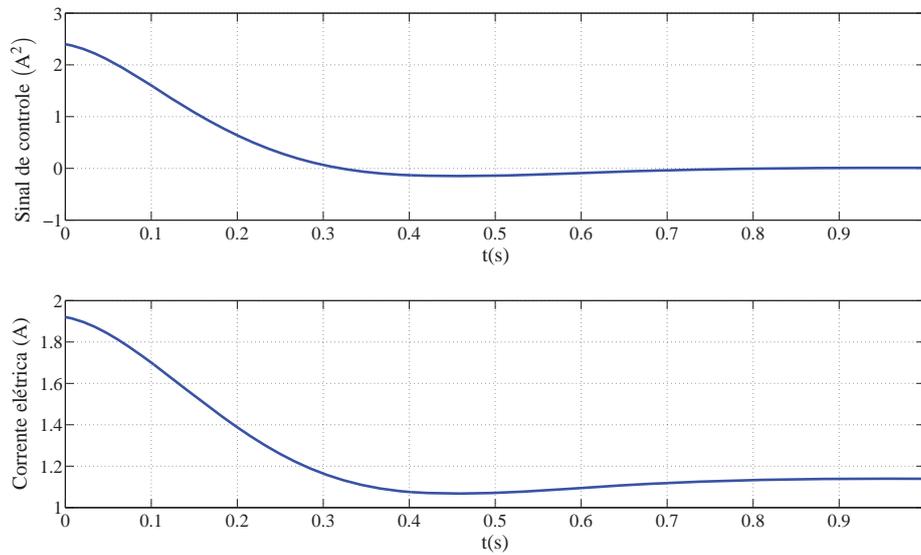
Considerando a condição inicial $\bar{x}_0 = [0,1 \quad 1]$ e $y_0 = 0,05m$, (para o sistema (80)-(82) a condição inicial $x_0 = [0,05 \quad 1]^T$) com a simulação do sistema controlado (80)-(82), (15) e (96) apresenta as respostas dadas nas Figuras 5 e 6.

Figura 5 - Posição e velocidade do sistema controlado para $y_0 = 0,05m$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Nota-se que os ganhos dos controladores (94) e (96), mudam com a alteração de y_0 , ou seja, cada vez que alteramos o valor de y_0 , seguindo o método apresentado, é necessário fazer um novo projeto do regulador, o que dificulta a implementação prática nos casos em que o sistema pode trabalhar em diferentes pontos de operação. Para resolver tal problema, na próxima seção, será proposto um novo método, no qual incluímos regulação de sinais para sistemas não lineares com modelos fuzzy TS, via LMIs para uma faixa conhecida de valores de y_0 .

Figura 6 - Sinal de controle e corrente elétrica do sistema controlado para $y_0 = 0,05m$.

Fonte: (SANTIM, 2012)

3.3 Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação

Antes da apresentação do método faz-se necessário o entendimento da seguinte propriedade:

Propriedade 1. *Sejam $I_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $I_0 \subset \mathbb{R}^{n_0}$ subconjuntos compactos tais que $I = I_1 \times I_0$, $f : I \subset \mathbb{R}^{n_t} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $n_t = n_1 + n_0$. Se para algum $y_0 \in I_0$ dado, $M = \max_{y \in I_1} \{f(y, y_0)\}$ e $m = \min_{y \in I_1} \{f(y, y_0)\}$, então $M \leq \max_{(y, y_0) \in I} \{f(y, y_0)\}$ e $m \geq \min_{(y, y_0) \in I} \{f(y, y_0)\}$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $M > \max_{(y, y_0) \in I} \{f(y, y_0)\}$, isto implica que $f(y, y_0) < M$ para todo $(y, y_0) \in I$ o que é um absurdo, pois I é compacto. Logo existe $(y^*, y_0^*) \in I$ tal que $M \leq f(y^*, y_0^*)$.

De forma análoga mostra-se que $m \geq \min_{(y, y_0) \in I} \{f(y, y_0)\}$. □

A Propriedade 1 é de grande importância para justificar a metodologia proposta. Por exemplo suponha que deseja-se trabalhar na região $\bar{x}_1 \in [0, 0, 15]$. Então a ideia é projetar um controlador que assegure a estabilidade assintótica do ponto de operação $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (y_0, 0)$ para um dado $y_0 \in I_0 = [0, 04, 0, 11]$. Assim, a faixa de $x_1 = \bar{x}_1 - y_0$ para todo $y_0 \in I_0$ é $I_1 = [-0, 11, 0, 11]$. Portanto, para encontrar os ganhos do regulador para todo $y_0 \in I_0$, y_0 será

considerado como sendo uma nova variável para a especificação do domínio D_3 para as funções não lineares f_{21} e g_{21} :

$$D_3 = \{[x_1 \ x_2 \ y_0]^T \in \mathbb{R}^3 : -0,11 \leq x_1 \leq 0,11 \text{ e } 0,04 \leq y_0 \leq 0,11\}. \quad (97)$$

Da Propriedade 1, (83), (95) e (97) conclui-se que:

$$\begin{aligned} \max_{(x_1, y_0) \in D_1, D_2} \{f_{21}(x_1, y_0)\} &\leq \max_{(x_1, y_0) \in D_3} \{f_{21}(x_1, y_0)\}, \\ \min_{(x_1, y_0) \in D_1, D_2} \{f_{21}(x_1, y_0)\} &\geq \min_{(x_1, y_0) \in D_3} \{f_{21}(x_1, y_0)\}, \\ \max_{(x_1, y_0) \in D_1, D_2} \{g_{21}(x_1, y_0)\} &\leq \max_{(x_1, y_0) \in D_3} \{g_{21}(x_1, y_0)\}, \\ \min_{(x_1, y_0) \in D_1, D_2} \{g_{21}(x_1, y_0)\} &\geq \min_{(x_1, y_0) \in D_3} \{g_{21}(x_1, y_0)\}. \end{aligned} \quad (98)$$

De fato, feitos os cálculos, considerando (80), (81), a Tabela 1 e (97), foram obtidos os seguintes valores:

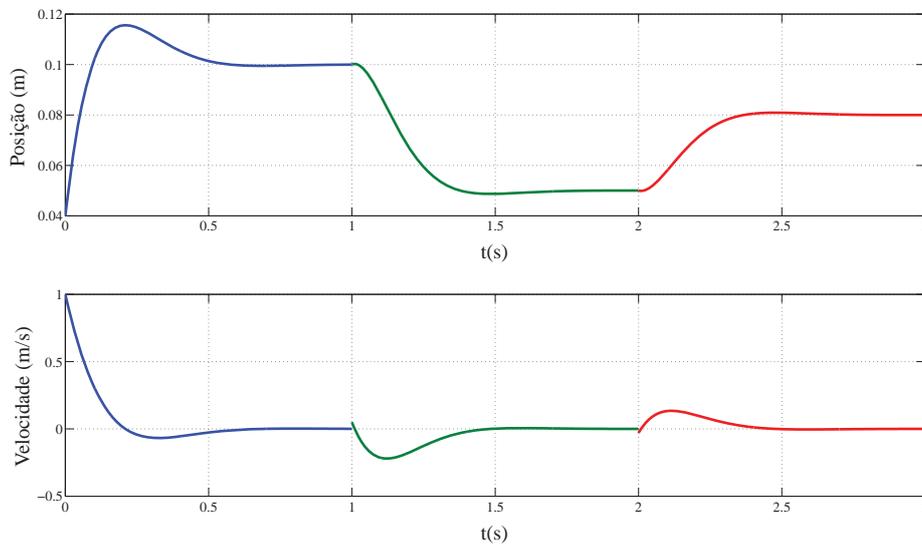
$$\begin{aligned} a_{21_1} &= \max_{(x_1, y_0) \in D_3} \{f_{21}(x_1, y_0)\} = 51,4116, \\ a_{21_2} &= \min_{(x_1, y_0) \in D_3} \{f_{21}(x_1, y_0)\} = 25,1427, \\ b_{21_1} &= \max_{(x_1, y_0) \in D_3} \{g_{21}(x_1, y_0)\} = -4,4367, \\ b_{21_2} &= \min_{(x_1, y_0) \in D_3} \{g_{21}(x_1, y_0)\} = -12,4392. \end{aligned} \quad (99)$$

Admitindo as mesmas considerações feitas em (85)-(92) (agora no domínio D_3) e utilizando o Teorema 1, foram obtidos os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned} F_1 &= [-23,5425 \quad -2,4447], \\ F_2 &= [-14,1328 \quad -1,3935], \\ F_3 &= [-22,2383 \quad -2,5629], \\ F_4 &= [-10,8040 \quad -1,2964]. \end{aligned} \quad (100)$$

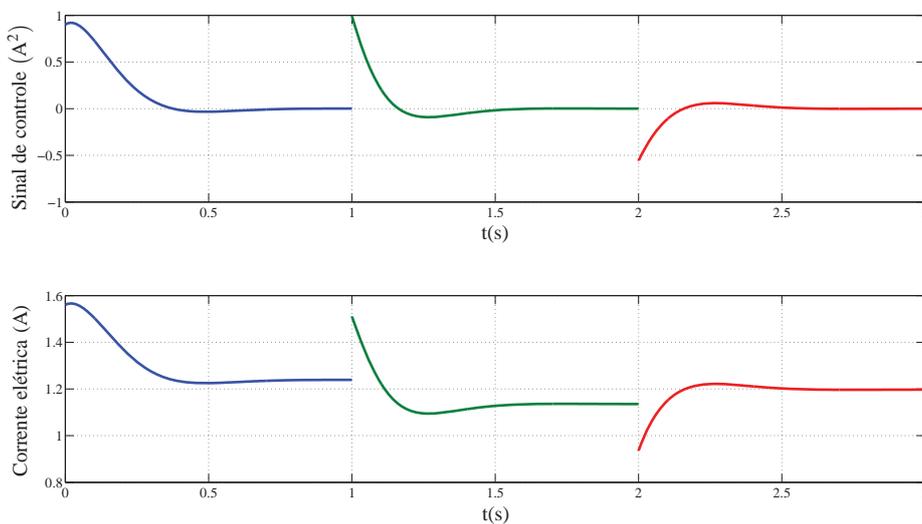
Para a simulação numérica, inicialmente ($t = 0s$) foi considerada a condição inicial $\bar{x}_0 = [0,04 \ 1]^T$ e $y_0 = 0,1m$. Assim, $x(0) = \bar{x}(0) - [y_0 \ 0]^T = [-0,06 \ 1]^T$. Em $t = 1s$, como mostrado na Figura 7, o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(1) = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2]^T = [0,1 \ 0]^T$. Agora, mudando y_0 de $0,1m$ para $0,05m$ em $t = 1s$, note na Figura 7 que em $t = 2s$ o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(2) = [0,05 \ 0]^T$. Finalmente, mudando novamente y_0 de $0,05m$ para $0,08m$ em $t = 2s$, observe na Figura 7 que $\bar{x}(\infty) = [0,08 \ 0]^T$. As Figuras 7 e 8 ilustram a resposta do sistema.

Figura 7 - Posição ($y(t) = \bar{x}_1(t)$) e velocidade ($\bar{x}_2(t)$) do sistema controlado para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m, 0,05m$ e $0,08m$ para $t \in [0, 1), t \in [1, 2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Figura 8 - Sinal de controle $u(t) = i(t)^2 - i_0^2$ e corrente elétrica $i(t)$ para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m, 0,05m$ e $0,08m$ para $t \in [0, 1), t \in [1, 2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Note que a lei de controle, dada em (15) com $r = 4$, utiliza um único conjunto de ganhos

apresentados em (100). Entretanto, as funções de pertinência $\alpha_i(x(t))$, $i = 1, 2, 3, 4$, especificadas em (80), (81), (85)-(92) e (99), são funções de y_0 e assim são alteradas cada vez que ocorre uma mudança no valor de y_0 . Finalmente, observe que $x = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2]^T - [y_0 \ 0]^T$ também deve ser mudado na lei de controle (15), quando y_0 é alterado.

Observação 3. *Observa-se que, no exemplo do levitador, o intervalo considerado para o ponto de equilíbrio y_0 foi $[0,04 \ , \ 0,11]$ e o domínio de \bar{x}_1 foi $[0 \ , \ 0,15]$. Assim, de uma maneira geral, a única restrição para o método proposto é que a região que contém os pontos de equilíbrios desejados esteja contida no domínio das variáveis de estados do sistema. Tal região é flexível e sua escolha é feita de acordo com as necessidades do projetista.*

3.3.1 Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação com Taxa de Decaimento

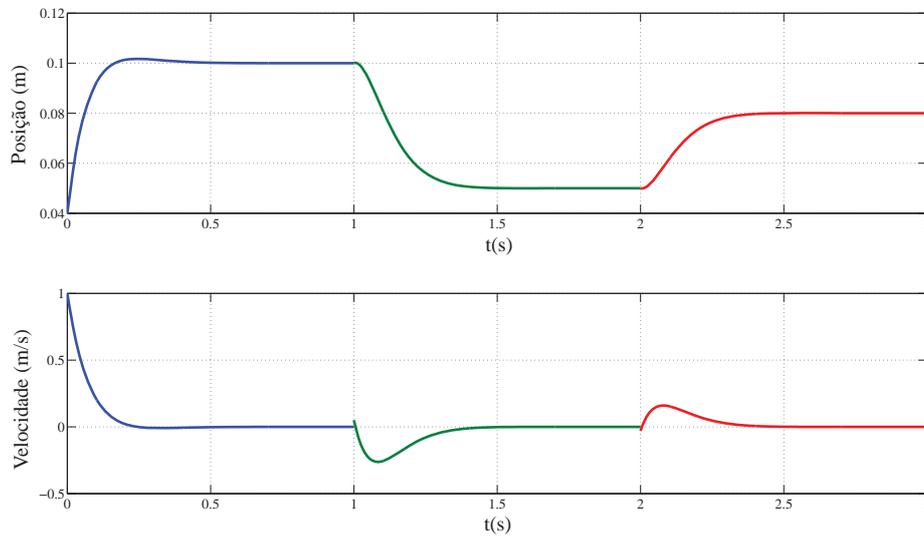
Como foi dito anteriormente, em projetos de sistemas de controle é importante considerar não somente a estabilidade, mas também outros índices de desempenhos do sistema controlado tais como: velocidade de resposta, restrições na entrada e saída do sinal de controle. A metodologia proposta contempla todos esses índices de desempenhos sem a necessidade de alterar as LMIs, dadas em Boyd et al. (1994) (as mesmas apresentadas nos Teoremas 1 e 2), ou suas relaxações apresentadas por exemplo em Tanaka, Ikeda e Wang (1998) e Teixeira, Assunção e Avellar (2003), adicionando um novo conjunto de LMIs.

Agora, será usada uma taxa de decaimento para projetar novos ganhos do controle do levitador magnético. Assim, foi considerado (85)-(92), (99) e as LMIs (56) e (57) dadas no Teorema 2 com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,8$ e obteve-se os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned} F_1 &= [-36,2829 \quad -3,9509], \\ F_2 &= [-21,8487 \quad -2,3121], \\ F_3 &= [-36,6258 \quad -4,2662], \\ F_4 &= [-17,9936 \quad -2,1555]. \end{aligned} \tag{101}$$

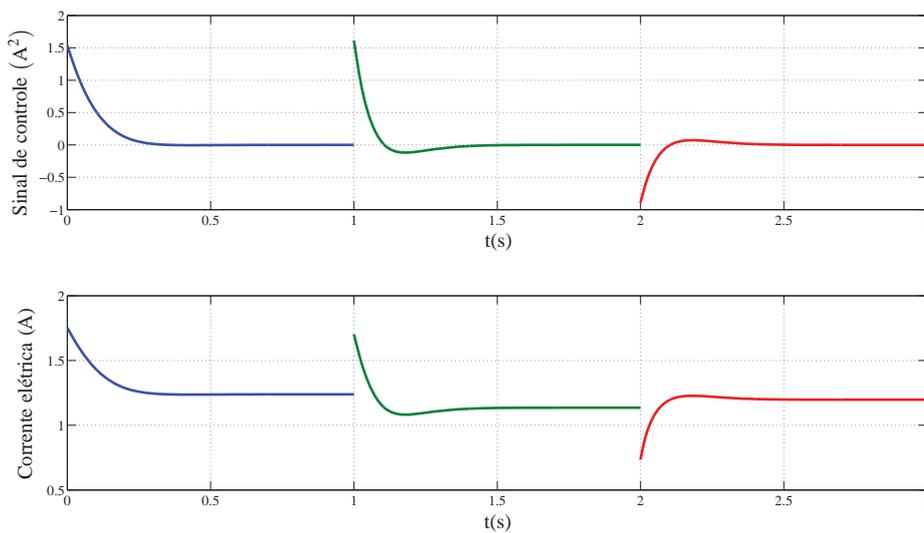
A simulação numérica utilizou as mesmas condições da última simulação, ou seja, a condição inicial $\bar{x}_0 = [0,04 \ 1]^T$ e $y_0 = 0,1m$. Em $t = 1s$ o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}_0 = [0,1 \ 0]^T$, e então, y_0 muda de $y_0 = 0,1m$ para $y_0 = 0,05m$. Em $t = 2s$ o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}_0 = [0,05 \ 0]^T$ e agora y_0 muda de $y_0 = 0,05m$ para $y_0 = 0,08m$. As Figuras 9 e 10, ilustram a resposta do sistema.

Figura 9 - Posição ($y(t) = \bar{x}_1(t)$) e velocidade ($\bar{x}_2(t)$) do sistema controlado para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m, 0,05m$ e $0,08m$ para $t \in [0, 1), t \in [1, 2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,8$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Figura 10 - Sinal de controle ($u(t) = i(t)^2 - i_0^2$) e corrente elétrica ($i(t)$) para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m, 0,05m$ e $0,08m$ para $t \in [0, 1), t \in [1, 2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,8$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Como pode ser visto na Figura 9, usando a taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,8$ a resposta do sistema ficou mais rápida, quando comparada com a Figura 7. Entretanto, de (100) e (101), note que os ganhos do controlador são maiores e consequentemente o sinal de controle e a corrente elétrica também são maiores, como pode ser visto comparando-se as Figuras 8 e 10.

3.3.2 Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação com Variação da Massa do Sistema

Considere que deseja-se trabalhar na mesma região $\bar{x}_1 \in [0, -0,15]$ para projetar um controlador que assegure a estabilidade assintótica do ponto de operação $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (y_0, 0)$ para um dado $y_0 \in I_0 = [0,05, -0,07]$ e estabelecendo também uma região para a variação da massa do sistema, dada por $m \in [0,04, -0,11]$. Assim, a faixa de $x_1 = \bar{x}_1 - y_0$ para todo $y_0 \in I_0$ é $I_1 = [-0,07, -0,1]$. Portanto, para encontrar os ganhos do regulador para todo $y_0 \in I_0$, além de y_0 , m também será considerada como sendo uma nova variável, no sistema (82) agora com as funções não lineares f_{21} , f_{22} e g_{21} , ou seja,

$$f_{21}(x_1, y_0, m) = \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2}, \quad (102)$$

$$f_{22}(x_1, y_0, m) = \frac{-K}{m}, \quad (103)$$

$$g_{21}(x_1, y_0, m) = \frac{-\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2}. \quad (104)$$

O domínio D_4 é dado por:

$$D_4 = \{[x_1 \ x_2 \ y_0 \ m]^T \in \mathbb{R}^4 : -0,07 \leq x_1 \leq 0,1, 0,05 \leq y_0 \leq 0,07 \text{ e } 0,04 \leq m \leq 0,11\}. \quad (105)$$

De fato, feitos os cálculos, considerando (102), (103), (104), a Tabela 1, e (105), foram

obtidos os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
a_{21_1} &= \max_{(x_1, y_0, m) \in D_4} \{f_{21}(x_1, y_0, m)\} = 43,8108, \\
a_{21_2} &= \min_{(x_1, y_0, m) \in D_4} \{f_{21}(x_1, y_0, m)\} = 27,0706, \\
a_{22_1} &= \min_{(x_1, y_0, m) \in D_4} \{f_{22}(x_1, y_0, m)\} = -0,0091, \\
a_{22_2} &= \min_{(x_1, y_0, m) \in D_4} \{f_{22}(x_1, y_0, m)\} = -0,0250, \\
b_{21_1} &= \max_{(x_1, y_0, m) \in D_4} \{g_{21}(x_1, y_0, m)\} = -2,3289, \\
b_{21_2} &= \min_{(x_1, y_0, m) \in D_4} \{g_{21}(x_1, y_0, m)\} = -12,4783.
\end{aligned} \tag{106}$$

Assim, a função não linear f_{21} pode ser representada, de forma exata, por um modelo fuzzy Takagi-Sugeno, considerando dois modelos locais: $a_{21_1}(x_1, y_0, m)$ e $a_{21_2}(x_1, y_0, m)$, ou seja, existem $\sigma_{21_1}(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)$ e $\sigma_{21_2}(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)$ tais que,

$$f_{21}(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)a_{21_1} + \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)a_{21_2}, \tag{107}$$

com

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m), \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m) \leq 1, \\
\sigma_{21_1}(x_1, y_0, m) + \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m) &= 1.
\end{aligned} \tag{108}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\sigma_{21_1}(x_1, y_0, m) &= \frac{f_{21}(x_1, y_0, m) - a_{21_2}}{a_{21_1} - a_{21_2}}, \\
\sigma_{21_2}(x_1, y_0, m) &= 1 - \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m).
\end{aligned}$$

De forma análoga, existem $\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m) = \sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)$, $\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m) = \sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)$, $\xi_{21_1}(x_1, y_0, m) = \xi_{21_1}(x_1, y_0, m)$ e $\xi_{21_2}(x_1, y_0, m) = \xi_{21_2}(x_1, y_0, m)$ tais que

$$f_{22}(x_1, y_0, m) = \sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)a_{22_1} + \sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)a_{22_2}, \tag{109}$$

$$g_{21}(x_1, y_0, m) = \xi_{21_1}(x_1, y_0, m)b_{21_1} + \xi_{21_2}(x_1, y_0, m)b_{21_2}, \tag{110}$$

com

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sigma_{22_1}(x_1, y_0, m), \sigma_{22_2}(x_1, y_0, m) \leq 1, \\
0 &\leq \xi_{21_1}(x_1, y_0, m), \xi_{21_2}(x_1, y_0, m) \leq 1,
\end{aligned} \tag{111}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m) + \sigma_{22_2}(x_1, y_0, m) &= 1 \\
\xi_{21_1}(x_1, y_0, m) + \xi_{21_2}(x_1, y_0, m) &= 1.
\end{aligned} \tag{112}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m) &= \frac{f_{22}(x_1, y_0, m) - a_{22_2}}{a_{22_1} - a_{22_2}}, \\ \sigma_{22_2}(x_1, y_0, m) &= 1 - \sigma_{22_1}(x_1, y_0, m), \\ \xi_{21_1}(x_1, y_0, m) &= \frac{g_{21}(x_1, y_0, m) - b_{21_2}}{b_{21_1} - b_{21_2}}, \\ \xi_{21_2}(x_1, y_0, m) &= 1 - \xi_{21_1}(x_1, y_0, m).\end{aligned}$$

Como $\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m) + \sigma_{22_2}(x_1, y_0, m) = \xi_{21_1}(x_1, y_0, m) + \xi_{21_2}(x_1, y_0, m) = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}f_{21}(x_1, y_0, m) &= (\sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)a_{21_1} + \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)a_{21_2}) \cdot (\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m) + \sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)) \cdot \\ &\quad (\xi_{21_1}(x_1, y_0, m) + \xi_{21_2}(x_1, y_0, m)) \\ &= \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)\xi_{21_1}(x_1, y_0, m)a_{21_1} \\ &\quad + \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)\xi_{21_2}(x_1, y_0, m)a_{21_1} \\ &\quad + \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)\xi_{21_1}(x_1, y_0, m)a_{21_1} \\ &\quad + \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)\xi_{21_2}(x_1, y_0, m)a_{21_1} \\ &\quad + \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)\xi_{21_1}(x_1, y_0, m)a_{21_2} \\ &\quad + \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)\xi_{21_2}(x_1, y_0, m)a_{21_2} \\ &\quad + \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)\xi_{21_1}(x_1, y_0, m)a_{21_2} \\ &\quad + \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)\xi_{21_2}(x_1, y_0, m)a_{21_2}.\end{aligned}$$

Defina,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_1(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)\xi_{21_1}(x_1, y_0, m), \\ \alpha_2 &= \alpha_2(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)\xi_{21_2}(x_1, y_0, m), \\ \alpha_3 &= \alpha_3(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)\xi_{21_1}(x_1, y_0, m), \\ \alpha_4 &= \alpha_4(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_1}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)\xi_{21_2}(x_1, y_0, m), \\ \alpha_5 &= \alpha_5(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)\xi_{21_1}(x_1, y_0, m), \\ \alpha_6 &= \alpha_6(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_1}(x_1, y_0, m)\xi_{21_2}(x_1, y_0, m), \\ \alpha_7 &= \alpha_7(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)\xi_{21_1}(x_1, y_0, m), \\ \alpha_8 &= \alpha_8(x_1, y_0, m) = \sigma_{21_2}(x_1, y_0, m)\sigma_{22_2}(x_1, y_0, m)\xi_{21_2}(x_1, y_0, m),\end{aligned}\tag{113}$$

como sendo as funções de pertinência do sistema (82), os modelos locais para o mesmo são:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_1} & a_{22_1} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_1} & a_{22_2} \end{bmatrix},$$

$$A_5 = A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_2} & a_{22_1} \end{bmatrix}, \quad (114)$$

$$A_7 = A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21_2} & a_{22_2} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_3 = B_5 = B_7 = [0 \quad b_{21_1}],$$

$$B_2 = B_4 = B_6 = B_8 = [0 \quad b_{21_2}].$$

Portanto, o sistema (82), com a lei de controle (15), pode ser representado na forma de um modelo fuzzy Takagi-Sugeno, como em (20), com $r = 8$:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \alpha_i \alpha_j (A_i - B_i F_j) x(t).$$

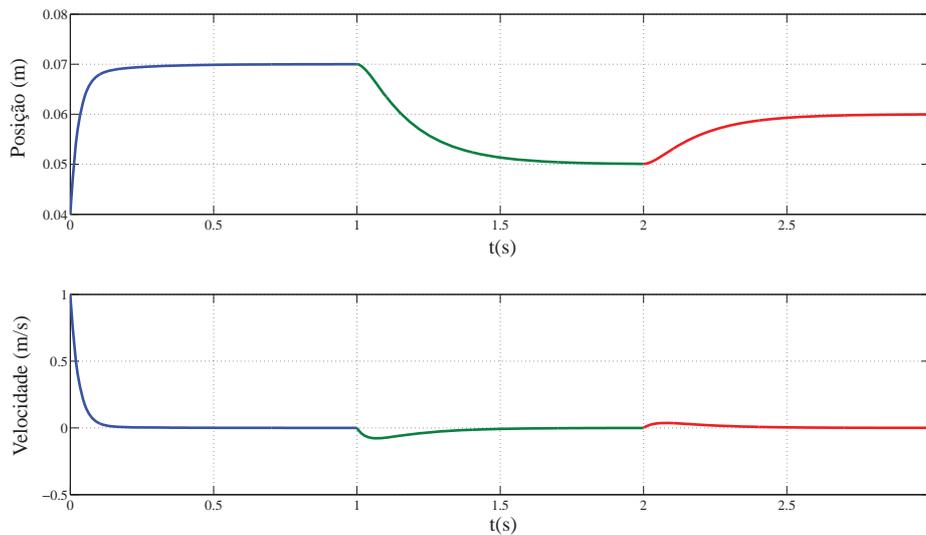
Aplicando-se o Teorema 1 com os modelos locais (106) e (114), foram obtidos os seguintes ganhos do controlador, agora no domínio D_4 :

$$\begin{aligned} F_1 &= [-43,2792 \quad -7,0124], \\ F_2 &= [-21,7595 \quad -3,2673], \\ F_3 &= [-43,2777 \quad -7,0109], \\ F_4 &= [-21,7600 \quad -3,2661], \\ F_5 &= [-51,8767 \quad -9,2554], \\ F_6 &= [-16,5194 \quad -3,0079], \\ F_7 &= [-51,7146 \quad -9,2238], \\ F_8 &= [-16,5359 \quad -3,0090]. \end{aligned} \quad (115)$$

Para a simulação numérica, inicialmente ($t = 0s$) foi considerada a condição inicial $\bar{x}_0 = [0,04 \quad 1]^T$, $y_0 = 0,07m$ e $m = 0,05kg$. Assim, $x(0) = \bar{x}(0) - [y_0 \quad 0]^T = [-0,03 \quad 1]^T$. Em

$t = 1s$, na Figura 11, o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(1) = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2]^T = [0,07 \quad 0]^T$. Agora, mudando y_0 de $0,07m$ para $0,05m$ e m de $0,05kg$ para $0,07kg$ em $t = 1s$, note na Figura 11 que em $t = 2s$ o sistema está praticamente no ponto $\bar{x}(2) = [0,05 \quad 0]^T$. Finalmente, mudando novamente y_0 de $0,05m$ para $0,06m$ e m de $0,07kg$ para $0,09kg$ em $t = 2s$, observe na Figura 11 que $\bar{x}(\infty) = [0,06 \quad 0]^T$. As Figuras 11 e 12 ilustram a resposta do sistema.

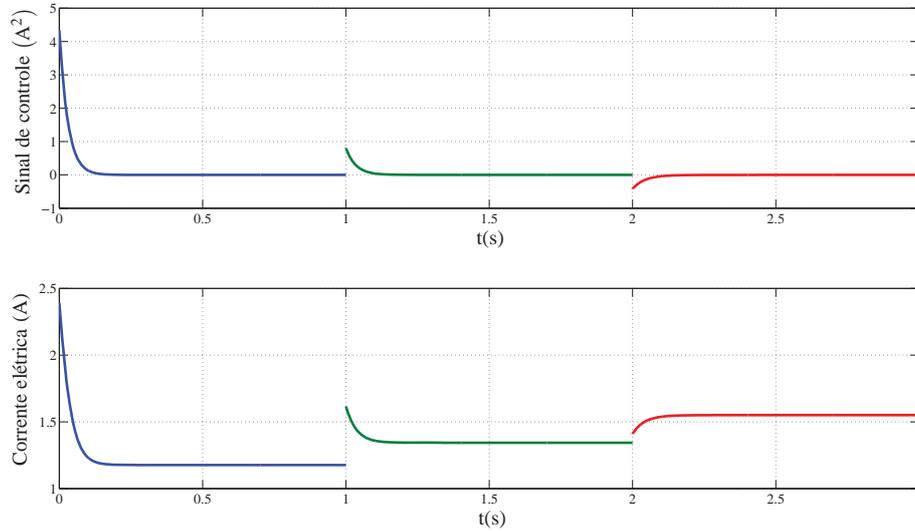
Figura 11 - Posição ($y(t) = \bar{x}_1(t)$) e velocidade ($\bar{x}_2(t)$) do sistema controlado para $y_0 \in [0,05, 0,07]$, considerando $y_0 = 0,07m, 0,05m$ e $0,06m$ e $m = 0,05kg, 0,07kg$ e $0,09kg$ para $t \in [0, 1), t \in [1, 2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Vimos que a metodologia proposta também pode ser aplicada quando a planta tem os parâmetros desconhecidos em uma determinada região. Nesse caso devemos considerar esses parâmetros como novas variáveis do domínio das não linearidades para obter seus valores máximos e mínimos. No exemplo do levitador, podemos considerar, por exemplo, que a massa m é um parâmetro desconhecido, sendo $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$. Assim, basta considerar m como uma nova variável das não linearidades (102), (103) e (104) que agora são iguais a $f_{21}(x_1, y_0, m)$, $g_{21}(x_1, y_0, m)$ e $f_{22}(x_1, y_0, m)$, respectivamente. Note que nesse caso i_0 também depende da massa m , e portanto deve ser atualizado quando mudamos a massa.

Figura 12 - Sinal de controle $u(t) = i(t)^2 - i_0^2$ e corrente elétrica $i(t)$ para $y_0 \in [0,05, 0,07]$, considerando $y_0 = 0,07m, 0,05m$ e $0,06m$ e $m = 0,05kg, 0,07kg$ e $0,09kg$ para $t \in [0, 1), t \in [1, 2)$ e $t \geq 2s$, respectivamente.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Observação 4. No exemplo do Levitador Magnético especificamente, deve-se ter cautela ao escolher os valores de m , já que o sistema é sensível a essa alteração e resulta em raízes negativas na equação (73) (ou seja, $i(t)^2$ negativo para $u(t)$ projetado em alguns instantes de tempo t) dependendo do valor da massa escolhida. Devido a esse fato reduzimos o intervalo de y_0 para $[0,05, 0,07]$ e colocamos o intervalo de m em $[0,04, 0,11]$, para que assim o sistema opere em qualquer valor de massa e de y_0 escolhidos.

3.4 Sistema Bola-Viga

Seja o sistema bola-viga mostrado na Figura 13, estudado em Silva (2005).

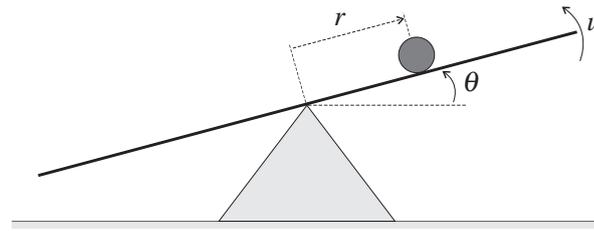
De acordo com Cardim (2009, p.31), Silva (2005) e Wang (1997), a dinâmica do sistema pode ser descrita como:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = \alpha r(t) \dot{\theta}^2(t) - \alpha \beta \text{sen}(\theta(t)), \\ \ddot{\theta}(t) = u(t), \end{cases} \quad (116)$$

sendo:

- $r(t) \rightarrow$ Posição da bola;

Figura 13 - Sistema Bola-Viga.



Fonte: (SILVA, 2005)

- $\theta(t) \rightarrow$ Ângulo da viga;
- $u(t) \rightarrow$ Sinal de controle (torque);
- $\alpha, \beta \rightarrow$ Parâmetros, $\alpha = 0,7143$ e $\beta = 9,81$.

Definindo $\bar{x}_1(t) = r(t)$, $\bar{x}_2(t) = \dot{r}(t)$, $\bar{x}_3(t) = \theta(t)$, $\bar{x}_4(t) = \dot{\theta}(t)$ como sendo as variáveis de estado, o sistema (116) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{x}_2(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \alpha(\bar{x}_1(t))\bar{x}_4^2(t) - \alpha\beta\text{sen}(\bar{x}_3(t)), \\ \dot{\bar{x}}_3(t) = \bar{x}_4(t), \\ \dot{\bar{x}}_4(t) = u(t). \end{cases} \quad (117)$$

O objetivo é projetar um controlador que mantenha a bola em uma posição desejada $\bar{x}_1 = \bar{x}_{1_0}$. Assim o ponto de equilíbrio do sistema é $\bar{x}_e = [\bar{x}_{1_0} \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Como o ponto de equilíbrio não se encontra na origem, será feita a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x_1(t) = \bar{x}_1(t) - \bar{x}_{1_0}(t), \\ x_2(t) = \bar{x}_2(t), \\ x_3(t) = \bar{x}_3(t), \\ x_4(t) = \bar{x}_4(t). \end{cases} \quad (118)$$

Então,

$$\begin{cases} \bar{x}_1(t) = x_1(t) + \bar{x}_{1_0}(t), \\ \bar{x}_2(t) = x_2(t), \\ \bar{x}_3(t) = x_3(t), \\ \bar{x}_4(t) = x_4(t). \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = \dot{x}_1(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \dot{x}_2(t), \\ \dot{\bar{x}}_3(t) = \dot{x}_3(t), \\ \dot{\bar{x}}_4(t) = \dot{x}_4(t). \end{cases} \quad (119)$$

Substituindo (119) em (117) tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{r}(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \dot{r}(t) = \alpha(x_1 + \bar{x}_{1_0}(t))x_4^2(t) - \alpha\beta\text{sen}(x_3(t)), \\ \dot{x}_3(t) = \dot{\theta}(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = \dot{\theta}(t) = u(t). \end{cases} \quad (120)$$

De (120) segue que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha\beta\text{sen}(x_3(t))}{x_3(t)} & \alpha(x_1 + \bar{x}_{1_0}(t))x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (121)$$

Sejam,

$$\tilde{f}_{23}(x(t)) = \frac{-\alpha\beta\text{sen}(x_3(t))}{x_3(t)} \quad e \quad \tilde{f}_{24}(x(t)) = \alpha(x_1 + \bar{x}_{1_0}(t))x_4(t),$$

as funções não lineares do sistema. Desta forma, pode-se reescrever (121) como sendo,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f}_{23}(x(t)) & \tilde{f}_{24}(x(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (122)$$

3.4.1 Projeto do Regulador para um Ponto de Operação

Nesta subseção serão projetados, separadamente, os ganhos do controlador que mantém a bola numa posição desejada, com $\bar{x}_{1_0} = 0,6m$ e $\bar{x}_{1_0} = 0,1m$. Lembrando que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) \in D_5$, sendo

$$D_5 = \{[\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \bar{x}_3 \ \bar{x}_4]^T \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq \bar{x}_1 \leq 1\}.$$

Observação 5. Como as variáveis de estado \bar{x}_2 , \bar{x}_3 e \bar{x}_4 não influenciam nas simulações, não há necessidade de explicitá-las no domínio D_5 .

Será fixado $\bar{x}_{1_0} = 0,6m$. Assim, será considerado o domínio

$$D_6 = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : -1,6 \leq x_1 \leq 0,4 \text{ e } \bar{x}_{1_0} = 0,6\}. \quad (123)$$

Observação 6. Como dito anteriormente, aqui também as variáveis de estado x_2 , x_3 e x_4 não influenciam nas simulações, e portanto, não há necessidade de explicitá-las no domínio. Essa

observação vale também para os domínios D_7 e D_8 que serão especificados mais adiante no texto.

De acordo com Taniguchi et al. (2001), determinando os valores máximos e mínimos das funções $\tilde{f}_{23}(x(t))$ e $\tilde{f}_{24}(x(t))$ no conjunto considerado, obtém-se a forma generalizada. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} a_{23_1} &= \max_{x(t) \in D_6} \{\tilde{f}_{23}(x(t))\} = -6,9275, \\ a_{23_2} &= \min_{x(t) \in D_6} \{\tilde{f}_{23}(x(t))\} = -7,0073, \\ a_{24_1} &= \max_{x(t) \in D_6} \{\tilde{f}_{24}(x(t))\} = 1,7143, \\ a_{24_2} &= \min_{x(t) \in D_6} \{\tilde{f}_{24}(x(t))\} = -1,7143. \end{aligned} \quad (124)$$

Segundo o método proposto por Taniguchi et al. (2001), a função não linear $\tilde{f}_{23}(x(t))$ pode ser representada, de forma exata, por um modelo fuzzy TS, considerando dois modelos locais: a_{23_1} e a_{23_2} , ou seja, existem $\sigma_{23_1}(x(t))$ e $\sigma_{23_2}(x(t))$ tais que,

$$\tilde{f}_{23}(x(t)) = \sigma_{23_1}(x(t))a_{23_1} + \sigma_{23_2}(x(t))a_{23_2}, \quad (125)$$

sendo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma_{23_1}(x(t)), \sigma_{23_2}(x(t)) \leq 1, \\ \sigma_{23_1}(x(t)) + \sigma_{23_2}(x(t)) &= 1, \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sigma_{23_1}(x(t)) &= \frac{\tilde{f}_{23}(x(t)) - a_{23_2}}{a_{23_1} - a_{23_2}}, \\ \sigma_{23_2}(x(t)) &= 1 - \sigma_{23_1}(x_1). \end{aligned}$$

Da mesma forma, existem ξ_{24_1} e ξ_{24_2} tais que a função $\tilde{f}_{24}(x(t))$ pode ser representada por:

$$\tilde{f}_{24}(x(t)) = \xi_{24_1}(x(t))a_{24_1} + \xi_{24_2}(x(t))a_{24_2}, \quad (126)$$

sendo que,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi_{24_1}(x(t)), \xi_{24_2}(x(t)) \leq 1, \\ \xi_{24_1}(x(t)) + \xi_{24_2}(x(t)) &= 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \xi_{24_1}(x(t)) &= \frac{\tilde{f}_{24}(x(t)) - a_{24_2}}{a_{24_1} - a_{24_2}}, \\ \xi_{24_2}(x(t)) &= 1 - \xi_{24_1}(x_1). \end{aligned}$$

Desta forma, pode-se escrever:

$$\tilde{f}_{23}(x(t)) = (\xi_{24_1}(x(t)) + \xi_{24_2}(x(t))) (\sigma_{23_1}(x(t))a_{23_1} + \sigma_{23_2}(x(t))a_{23_2}), \quad (127)$$

$$\begin{aligned} &= \xi_{24_1}(x(t))\sigma_{23_1}(x(t))a_{23_1} + \xi_{24_1}(x(t))\sigma_{23_2}(x(t))a_{23_2} + \\ &+ \xi_{24_2}(x(t))\sigma_{23_1}(x(t))a_{23_1} + \xi_{24_2}(x(t))\sigma_{23_2}(x(t))a_{23_2}. \end{aligned} \quad (128)$$

Defina,

$$\begin{aligned} \alpha_1(x(t)) &= \xi_{24_1}(x(t))\sigma_{23_1}(x(t)), \\ \alpha_2(x(t)) &= \xi_{24_1}(x(t))\sigma_{23_2}(x(t)), \\ \alpha_3(x(t)) &= \xi_{24_2}(x(t))\sigma_{23_1}(x(t)), \\ \alpha_4(x(t)) &= \xi_{24_2}(x(t))\sigma_{23_2}(x(t)). \end{aligned} \quad (129)$$

Note que,

$$\alpha_1(x(t)) + \alpha_2(x(t)) + \alpha_3(x(t)) + \alpha_4(x(t)) = 1 \quad (130)$$

Assim tem-se:

$$\tilde{f}_{23}(x(t)) = \alpha_1(x(t))a_{23_1} + \alpha_2(x(t))a_{23_2} + \alpha_3(x(t))a_{23_1} + \alpha_4(x(t))a_{23_2}. \quad (131)$$

Analogamente,

$$\tilde{f}_{24}(x(t)) = \alpha_1(x(t))a_{24_1} + \alpha_3(x(t))a_{24_2} + \alpha_2(x(t))a_{24_1} + \alpha_4(x(t))a_{24_2}. \quad (132)$$

Finalmente, substituindo (131) e (132) em (122), pode-se obter uma representação exata do sistema (121) com modelos fuzzy TS:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(x(t))A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i(x(t))B_i \right) u(t). \quad (133)$$

Sendo que os modelos locais são:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,9275 & 1,4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,0073 & 1,4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,9275 & -1,4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,0073 & -1,4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (134)
 \end{aligned}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

O sistema (122), com a lei de controle (15), pode ser representado na forma de modelos fuzzy TS (133) e (134), como em (20) e (22), com $r = 4$:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) G_{ij} x(t), \quad \text{sendo } G_{ij} = A_i - B_i F_j.$$

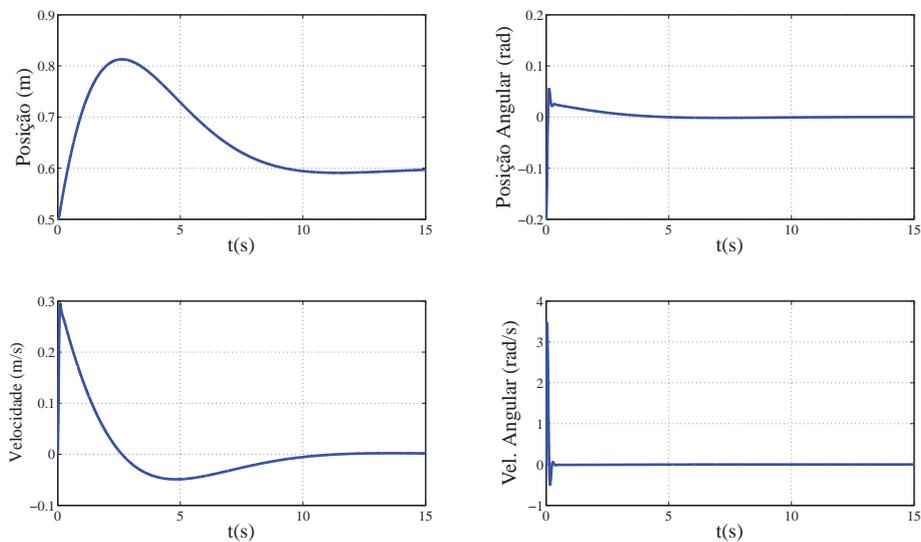
De maneira geral, segundo este método, se o sistema apresenta s ($s = 2$) funções não lineares ($\tilde{f}_{23}(x(t))$ e $\tilde{f}_{24}(x(t))$), são necessários 2^s ($2^s = 4$) modelos locais para a sua representação exata através de modelos fuzzy TS.

Logo, utilizando as LMIs (53) e (54) dadas no Teorema 1, foram obtidos os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= [-24,6129 \quad -62,5360 \quad 720,4078 \quad 23,4541], \\
 F_2 &= 10^3 \times [-0,0510 \quad -0,1520 \quad 1,4121 \quad 0,0456], \\
 F_3 &= [-24,6018 \quad -62,4982 \quad 720,1158 \quad 23,4447], \\
 F_4 &= 10^3 \times [-0,0510 \quad -0,1520 \quad 1,4118 \quad 0,0456]. \quad (135)
 \end{aligned}$$

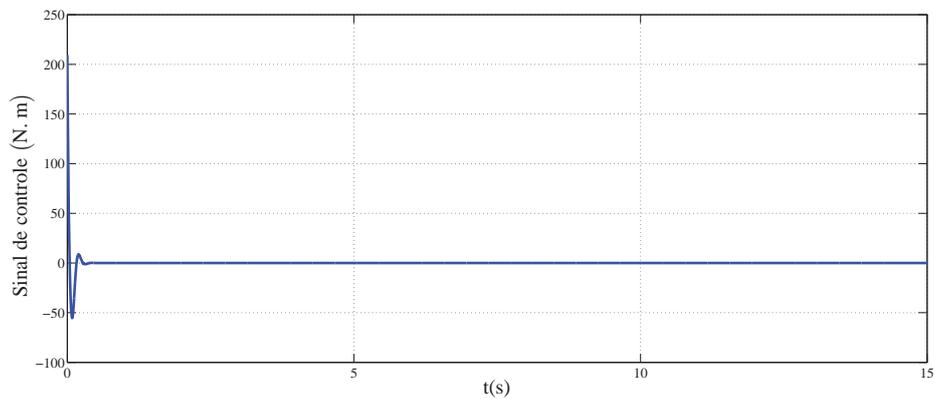
Considerando a condição inicial $\bar{x}_0 = [0,5 \quad 0 \quad 0,2 \quad 0]^T$ e $\bar{x}_{10} = 0,6m$, (com a simulação do sistema (122), (15) e (135)) foram obtidas as respostas apresentadas nas Figuras 14 e 15.

Figura 14 - Posição $\bar{x}_1(t)$, velocidade $\bar{x}_2(t)$, ângulo $x_3(t)$ e velocidade angular $\bar{x}_4(t)$ do sistema controlado para $\bar{x}_{1_0} = 0,6m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

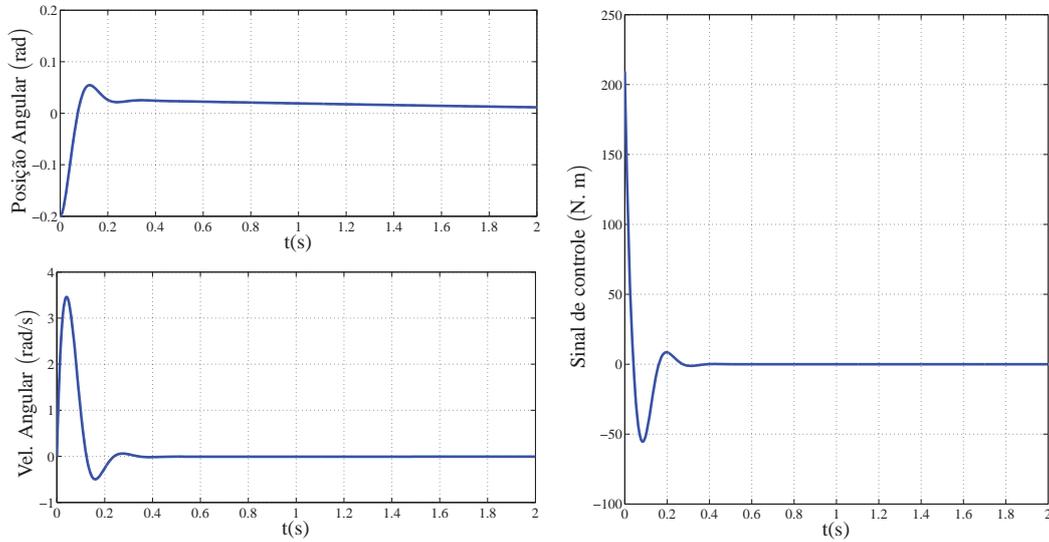
Figura 15 - Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{1_0} = 0,6m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Dando destaque para a posição angular, velocidade angular e para o sinal de controle em um tempo de 2s temos:

Figura 16 - Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{1_0} = 0,6m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$ e um tempo $t = 2s$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Agora, será considerado $\bar{x}_{1_0} = 0,1m$. Assim, para a simulação tem-se o domínio

$$D_7 = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : -1,1 \leq x_1 \leq 0,9 \text{ e } \bar{x}_{1_0} = 0,1\}. \quad (136)$$

Para obter a forma generalizada, como proposto em Taniguchi et al. (2001), é necessário calcular os valores máximos e mínimos das funções (131) e (132) no domínio D_7 . Feitos os cálculos foram obtidos os seguintes valores:

$$a_{23_1} = \max_{x_1 \in D_7} \{\tilde{f}_{23}(x_1)\} = -6,9275$$

$$a_{23_2} = \min_{x_1 \in D_7} \{\tilde{f}_{23}(x_1)\} = -7,0073$$

$$a_{24_1} = \max_{x_1 \in D_7} \{\tilde{f}_{24}(x_1)\} = 1,7143$$

$$a_{24_2} = \min_{x_1 \in D_7} \{\tilde{f}_{24}(x_1)\} = -1,7143.$$

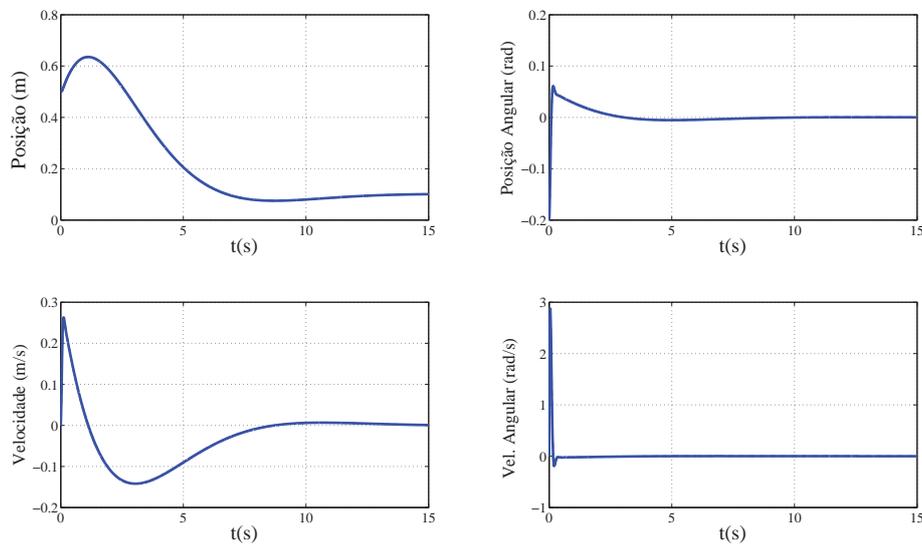
Admitindo as mesmas considerações feitas em (125)-(134) e utilizando o Teorema 1, foram

obtidos os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned} F_1 &= [-27,0586 \quad -60,7320 \quad 613,3959 \quad 29,6383], \\ F_2 &= [-43,5720 \quad -113,5524 \quad 928,1893 \quad 44,9846], \\ F_3 &= [-27,0403 \quad -60,6734 \quad 613,0462 \quad 29,6212], \\ F_4 &= [-43,5537 \quad -113,4937 \quad 927,8397 \quad 44,9675]. \end{aligned} \quad (137)$$

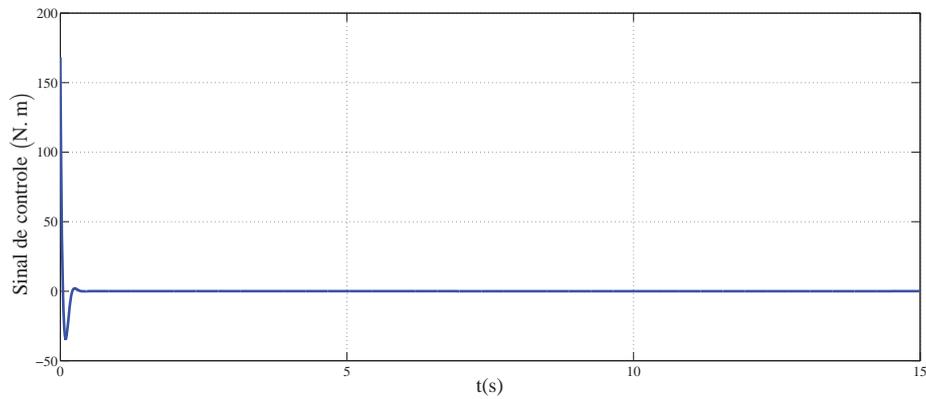
Considerando a condição inicial $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]$ e $\bar{x}_{10} = 0,1m$, (com a simulação do sistema (120), (15) e (137)) foram obtidas as respostas apresentadas nas Figuras 17 e 18.

Figura 17 - Posição $\bar{x}_1(t)$, velocidade $\bar{x}_2(t)$, ângulo $x_3(t)$ e velocidade angular $\bar{x}_4(t)$ do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,1m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

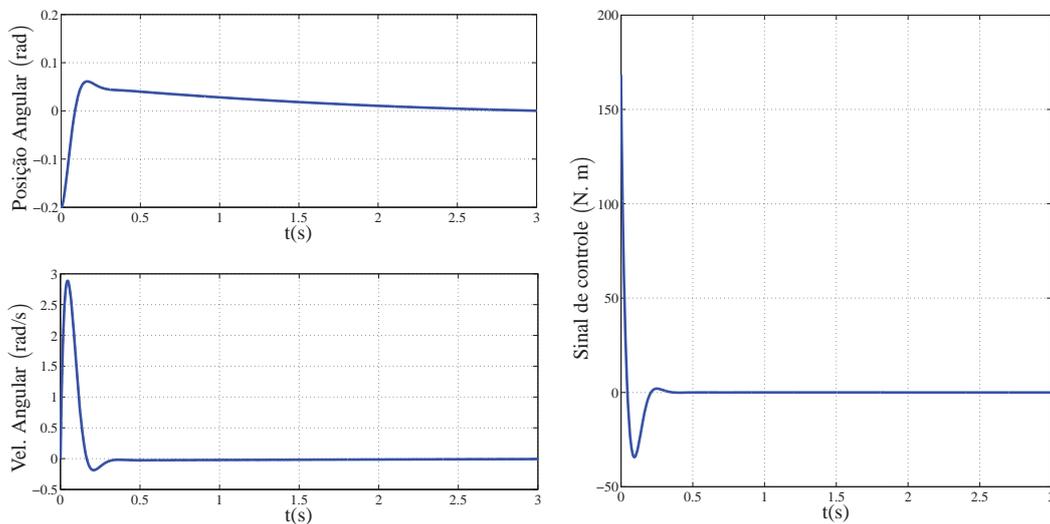
Figura 18 - Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,1m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Dando destaque para a posição angular, velocidade angular e para o sinal de controle em um tempo de 3s temos:

Figura 19 - Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m$ com a condição inicial de $\bar{x}_0 = [0,5 \ 0 \ -0,2 \ 0]^T$ e um tempo $t = 3s$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Note que os ganhos dos controladores (135) e (137) mudam com a alteração de \bar{x}_{10} , ou seja, ao alterarmos o valor de \bar{x}_{10} é necessário refazer um novo projeto de regulador, o que dificulta

a implementação prática nos casos em que o sistema pode trabalhar em diferentes pontos de operação. Para resolver tal problema, usaremos a seguir o mesmo procedimento utilizado no Levitador Magnético.

3.4.2 Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação

Usaremos aqui o mesmo princípio usado no levitador magnético exposto na seção 3.3. Como o projeto de controle se torna inviável com a mudança dos ganhos do controlador a cada mudança de ponto de operação, vamos aqui aplicar o novo método, que projeta um controlador fuzzy Takagi-Sugeno via LMI para uma conhecida faixa de valores de \bar{x}_{10} , a fim de se obter viabilidade do projeto. Seja

$$D_8 = \{[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ \bar{x}_{10}]^T \in \mathbb{R}^5 : -1,9 \leq x_1 \leq 1,9 \text{ e } -0,9 \leq \bar{x}_{10} \leq 0,9\}, \quad (138)$$

considerando \bar{x}_{10} como sendo uma nova variável das não linearidades (131) e (132), e como o intervalo $[-0,9, 0,9] \subset [-1,9, 1,9]$, da Propriedade 1 conclui-se que:

$$\begin{aligned} \max_{x_1 \in (D_6, D_7)} \{\tilde{f}_{23}(x_1)\} &\leq \max_{(x_1, \bar{x}_{10}) \in D_8} \{\tilde{f}_{23}(x_1, \bar{x}_{10})\} \\ \min_{x_1 \in (D_6, D_7)} \{\tilde{f}_{23}(x_1)\} &\geq \min_{(x_1, \bar{x}_{10}) \in D_8} \{\tilde{f}_{23}(x_1, \bar{x}_{10})\} \\ \max_{x_1 \in (D_6, D_7)} \{\tilde{f}_{24}(x_1)\} &\leq \max_{(x_1, \bar{x}_{10}) \in D_8} \{\tilde{f}_{24}(x_1, \bar{x}_{10})\} \\ \min_{x_1 \in (D_6, D_7)} \{\tilde{f}_{24}(x_1)\} &\geq \min_{(x_1, \bar{x}_{10}) \in D_8} \{\tilde{f}_{24}(x_1, \bar{x}_{10})\} \end{aligned}$$

Feito os cálculos obtemos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} a_{23_1} &= \max_{(x_1, \bar{x}_{10}) \in D_8} \{\tilde{f}_{23}(x_1, \bar{x}_{10})\} = -6,9275 \\ a_{23_2} &= \min_{(x_1, \bar{x}_{10}) \in D_8} \{\tilde{f}_{23}(x_1, \bar{x}_{10})\} = -7,0073 \\ a_{24_1} &= \max_{(x_1, \bar{x}_{10}) \in D_8} \{\tilde{f}_{24}(x_1, \bar{x}_{10})\} = 4,0001 \\ a_{24_2} &= \min_{(x_1, \bar{x}_{10}) \in D_8} \{\tilde{f}_{24}(x_1, \bar{x}_{10})\} = -4,0001. \end{aligned} \quad (139)$$

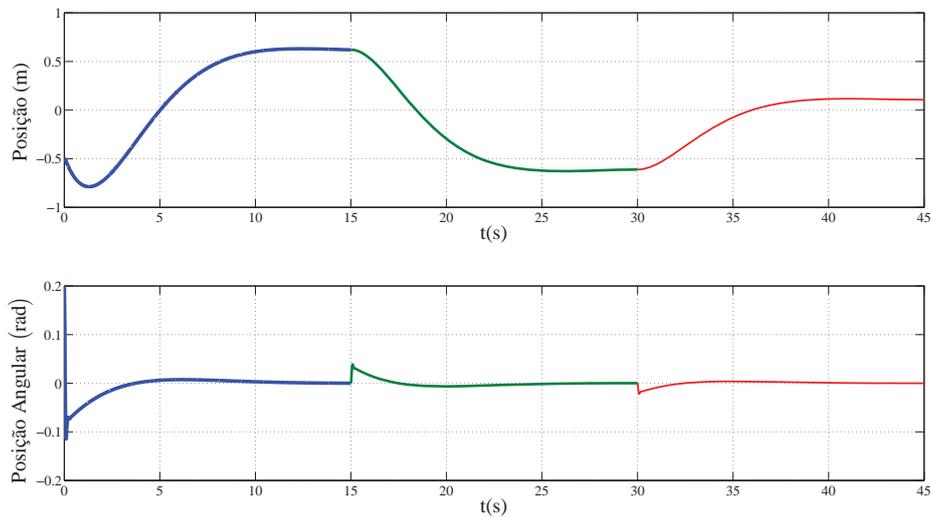
Admitindo as mesmas considerações feitas em (125)-(134) (agora no domínio D_8) e uti-

lizando o Teorema 1, obteve-se os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 10^3 \times [-0,0293 \quad -0,0942 \quad 1,0865 \quad 0,0263], \\
 F_2 &= 10^3 \times [-0,0704 \quad -0,2546 \quad 2,5041 \quad 0,0601], \\
 F_3 &= 10^3 \times [-0,0293 \quad -0,0942 \quad 1,0861 \quad 0,0263], \\
 F_4 &= 10^3 \times [-0,0704 \quad -0,2546 \quad 2,5038 \quad 0,0601].
 \end{aligned}
 \tag{140}$$

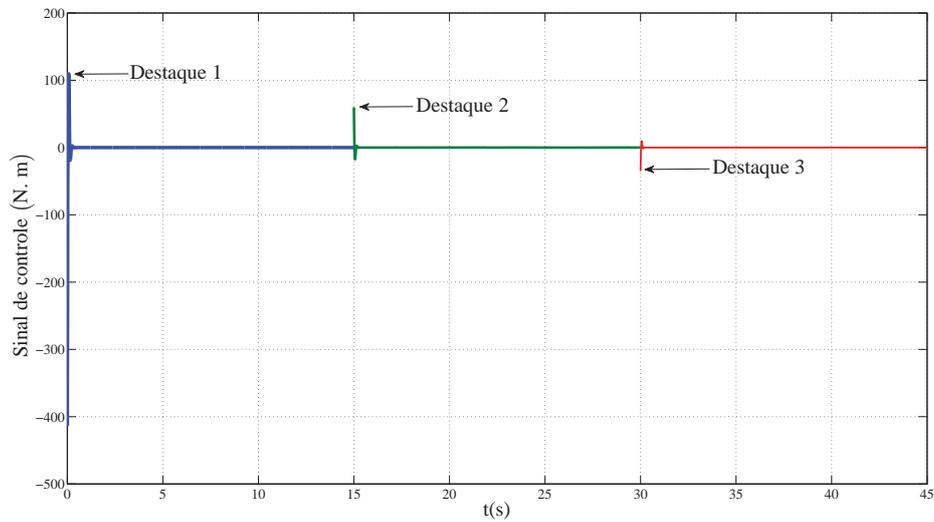
Considerando as condições iniciais $\bar{x}_0 = [-0,5 \quad 0 \quad 0,2 \quad 0]^T$ com $\bar{x}_{10} = 0,6m$, $\bar{x}_{10} = -0,6m$ e $\bar{x}_{10} = 0,1m$, no sistema (121) obteve-se as Figuras 20 e 21, que ilustram a resposta do sistema.

Figura 20 - Posição $\bar{x}_1(t)$ e ângulo $\bar{x}_3(t)$ do sistema controlado para $\bar{x}_{10} = 0,6m$, $-0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15)$, $t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente



Fonte: (SANTIM, 2012)

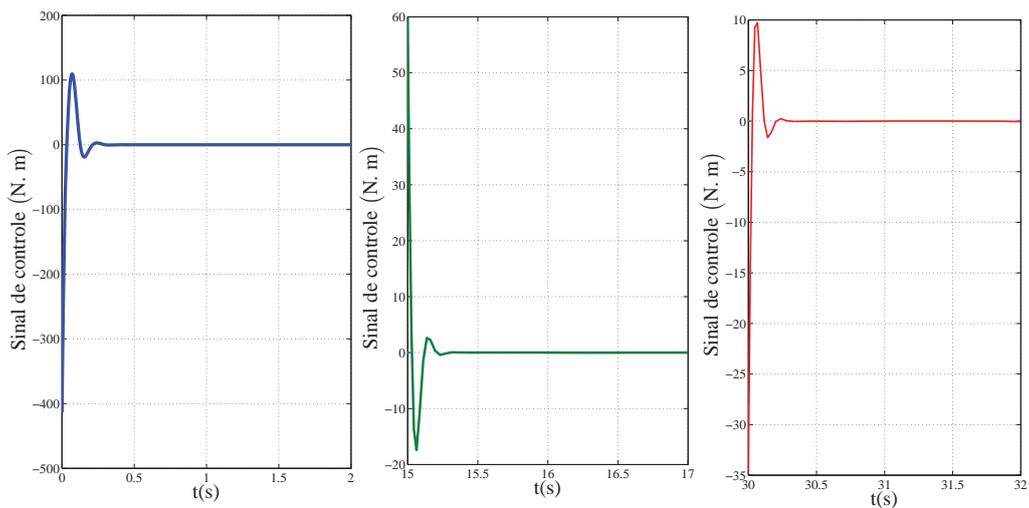
Figura 21 - Sinal de Controle do sistema controlado para $\bar{x}_{1_0} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Na Figura 21 ampliando os destaques 1, 2 e 3 podemos observar o módulo máximo do sinal de controle, como vemos na figura abaixo:

Figura 22 - Destaques 1, 2 e 3 do sinal de controle do sistema controlado para $\bar{x}_{1_0} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente.



Fonte: (SANTIM, 2012)

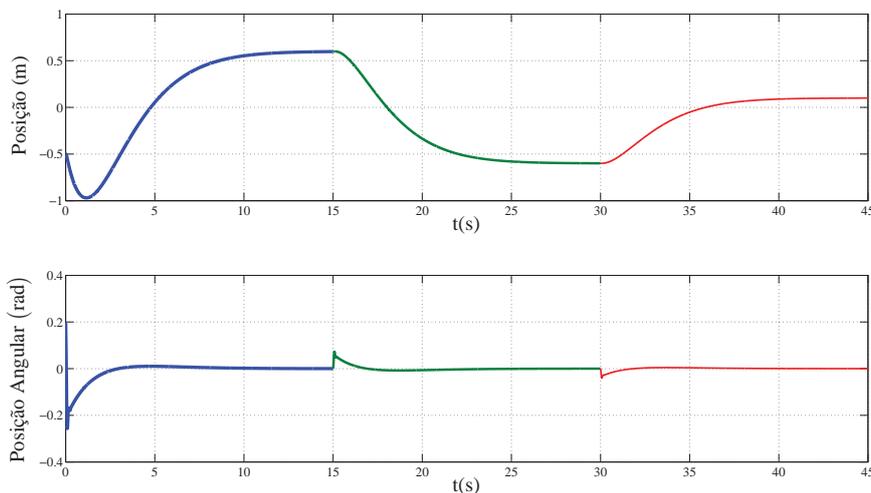
3.4.3 Projeto do Regulador para um Conjunto de Pontos de Operação com Taxa de Decaimento

Agora, será usada uma taxa de decaimento para projetar novos ganhos do controle do levitador magnético. Assim, foi considerado (125)-(134), (139) e as LMIs (56) e (57) dadas no Teorema 2 com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,23$ e obteve-se os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned} F_1 &= [-30,0945 \quad -103,0487 \quad 768,3918 \quad 13,2853], \\ F_2 &= 10^3[-0,1550 \quad -0,5297 \quad 3,3548 \quad 0,0563], \\ F_3 &= [-30,0726 \quad -102,9739 \quad 767,9380 \quad 13,2777], \\ F_4 &= 10^3[-0,1549 \quad -0,5296 \quad 3,3544 \quad 0,0563]. \end{aligned} \quad (141)$$

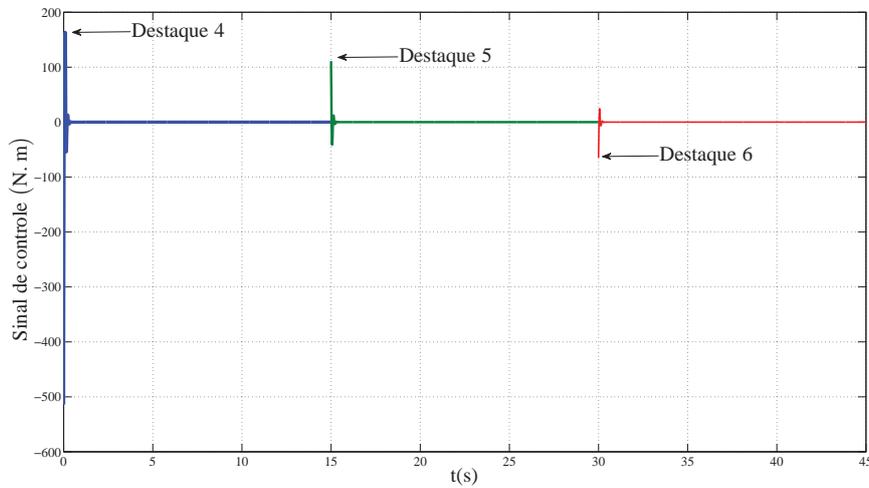
A simulação numérica considerou os mesmos parâmetros do caso anterior, ou seja, inicialmente considerou-se a condição inicial $x_0 = [-0,5 \quad 0 \quad 0,2 \quad 0]^T$ e $\bar{x}_{10} = 0,6m$. Em $t = 15s$ o sistema está praticamente em regime no ponto $\bar{x}_0 = [0,6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, que será a nova condição inicial. Em seguida muda-se \bar{x}_{10} para $\bar{x}_{10} = -0,6m$ e em $t = 30s$ o sistema está praticamente em regime no ponto $\bar{x}_0 = [-0,6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ que será a nova condição inicial. Por fim, fixa-se $\bar{x}_{10} = 0,1m$ para $t \geq 30s$. As Figuras 23 e 24, ilustram a resposta do sistema.

Figura 23 - Posição $\bar{x}_1(t)$ e ângulo $\bar{x}_3(t)$, para $\bar{x}_{10} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,23$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

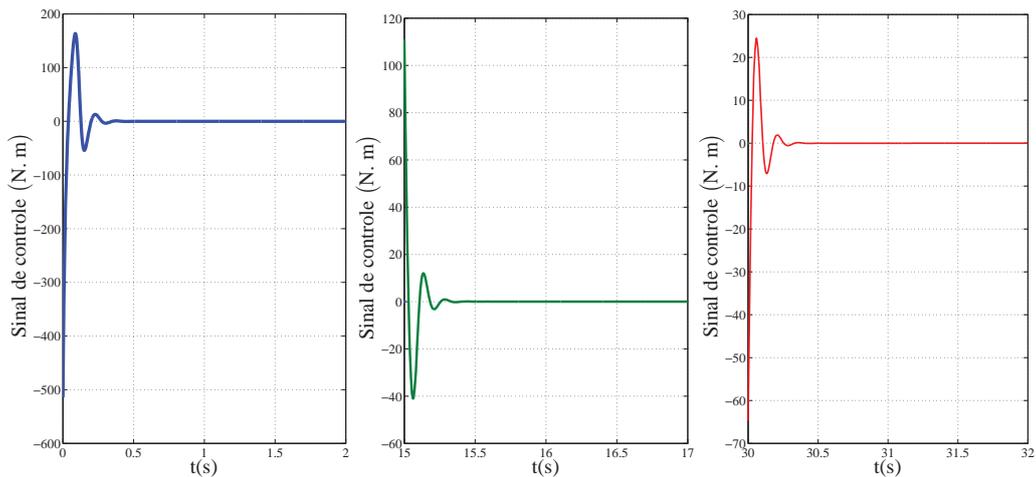
Figura 24 - Sinal de Controle para $\bar{x}_{1_0} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,23$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

N Figura 24 também vemos em detalhe o módulo máximo do sinal de controle com taxa de decaimento ampliando os destaques 4, 5 e 6:

Figura 25 - Destaques 4, 5 e 6 do sinal de controle do sistema controlado para $\bar{x}_{1_0} = 0,6m, -0,6m$ e $0,1m$ com $t \in [0, 15), t \in [15, 30)$ e $t \geq 30s$, respectivamente, com taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,23$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Como pode ser observado na Figura 23, utilizando uma taxa de decaimento maior ou igual a $\beta = 0,23$ garante um transitório satisfatório sem mudanças significativas, comparadas com a Figura 20. Essa taxa de decaimento utilizada é o valor máximo que podemos colocar nas simulações, já que valores maiores resultam em funções de pertinência negativas.

3.5 Conclusões Parciais

O método proposto não alterou as LMIs dadas nos Teoremas 1 e 2 usadas em métodos de controle fuzzy Takagi-Sugeno. Além disso foi possível escolher um ponto do equilíbrio pertencente a um determinado intervalo e/ou região estabelecidos sem a necessidade de refazer o projeto dos ganhos do controlador para cada novo ponto de equilíbrio escolhido. O resultado foi um comportamento transitório adequado como mostrado nas figuras simuladas tanto para o levitador magnético quanto para o sistema bola-viga. A Subseção 3.3.2 confirma que a metodologia proposta também pode ser aplicada quando a planta tem parâmetros constantes pertencentes a uma determinada região. Nesse caso esses parâmetros são considerados como novas variáveis do domínio das não linearidades.

4 SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM CONTROLADOR CHAVEADO

Neste capítulo é proposta uma nova metodologia de controle com comutação para algumas classes de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Tal método projeta os ganhos do controlador com base na Compensação Distribuída Paralela como proposto, por exemplo em Boyd et al. (1994), Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Teixeira e Žak (1999), Taniguchi et al. (2001), Teixeira, Assunção e Avellar (2003), Mozelli et al. (2009), Andrea et al. (2008), Teixeira, Pietrobom e Assunção (2000), Guerra e Vermeiren (2004), Klug, Castelan e Leite (2011), Montagner et al. (2005), Montagner, Oliveira e Peres (2010), mas na prática é implementado um controlador que comuta entre os ganhos que retorna o menor valor da derivada da função de Lyapunov quadrática. Uma outra vantagem da metodologia proposta é que os controladores projetados mostram-se mais eficientes se comparados com o controlador fuzzy sem comutação normalmente empregado, e dispensa a necessidade de encontrar as expressões explícitas das funções de pertinência, que algumas vezes podem ter expressões longas e/ou complexas.

4.1 CASO 1: Sistema Fuzzy com a Matriz B Constante

Nesta seção será projetado um controlador com comutação para o sistema fuzzy TS dado em (3) admitindo que B seja uma matriz constante.

Assim, o sistema (3) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu, \quad (142)$$

sendo que os ganhos do controlador fuzzy u dado em (15) foram obtidos utilizando as LMIs (53) e (54) do Teorema 1, como proposto em Tanaka, Ikeda e Wang (1998) e $A(\alpha)$ definida em (5).

Observação 7. Neste trabalho será utilizado o Teorema 1 para projetar os ganhos do controlador, mas a metodologia proposta não impede a utilização de outros métodos de projeto de controladores, baseados em LMIs, em plantas descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, por exemplos os apresentados em Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Teixeira e Žak (1999), Taniguchi et al. (2001), Teixeira, Assunção e Avellar (2003), Mozelli et al. (2009), Montagner, Oliveira e Peres (2010).

Defina o controlador

$$u_\sigma = -F_\sigma x(t) \quad (143)$$

sendo que

$$\sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{F}_r} (-x^T P B F_i x) \quad \text{e} \quad \mathbb{F}_r = \{1, 2, \dots, r\}. \quad (144)$$

Portanto, o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (142) utilizando o controlador chaveado (143) é dado por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B u_\sigma = \sum_{i=1}^r \alpha_i [A_i - B F_\sigma] x(t). \quad (145)$$

O Teorema 3 a seguir garante que o controlador com comutação u_σ é mais eficiente do que o controlador fuzzy u dado em (15), no contexto de que a função de Lyapunov considerada, utilizando o controlador com comutação u_σ , dado em (143), tende a zero mais rapidamente (ou com a mesma rapidez) do que com o controlador fuzzy sem comutação apresentado em (15).

Teorema 3. Considere o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (142) e $\dot{V}(x(t)) = x(t)^T P \dot{x}(t)$, $P = P^T > 0$, uma candidata a função de Lyapunov. Defina $\dot{V}_u(x)$ e $\dot{V}_{u_\sigma}(x(t))$ as derivadas de $V(x)$ para o sistema (142), com as leis de controle com CDP (15) e (143), respectivamente. Então,

$$\dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) \leq \dot{V}_u(x(t)).$$

Demonstração. Seja a candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$. Então, de (142) e (143),

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) &= 2x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= 2x(t)^T P (A(\alpha)x(t) + B u_\sigma) \\ &= 2x(t)^T P A(\alpha)x(t) + 2x(t)^T P B (-F_\sigma)x(t). \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e observando que

$$\min_{i \in \mathbb{F}_r} \{x(t)^T PB(-F_i)x(t)\} \leq x(t)^T PB\left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i F_i\right)x(t),$$

obtém-se da lei de chaveamento (144) que

$$\begin{aligned} \dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) &= 2x(t)^T PA(\alpha)x(t) + 2\min_{i \in \mathbb{F}_r} \{x(t)^T PB(-F_i)x(t)\} \\ &\leq 2x(t)^T PA(\alpha)x(t) + 2x(t)^T PB\left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i F_i\right)x(t) \\ &= 2x(t)^T P(A(\alpha) - BF(\alpha))x(t) \\ &= 2x(t)^T P(A(\alpha)x(t) + Bu) = \dot{V}_u(x(t)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) \leq \dot{V}_u(x(t)).$$

□

Logo, projetando-se os ganhos F_1, F_2, \dots, F_r e utilizando-se o Teorema 1, tem-se que $\dot{V}_{u(x)} < 0$ para $x \neq 0$. Assim, utilizando-se a lei de controle chaveada (143), tem-se do Teorema 3 que $\dot{V}_{u_\sigma} \neq 0$ para $x \neq 0$ e assim o ponto de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável.

Para ilustrar estes resultados será apresentado o projeto de controle de um sistema bola-viga.

4.1.1 Exemplo

Considere o sistema bola-viga ilustrado na Figura 13, cuja dinâmica é dada pelas equações (116). Considerando as variáveis de estado do sistema $x_1(t) = r(t)$, $x_2(t) = \dot{r}(t)$, $x_3(t) = \theta(t)$, $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ e a saída $y(t) = x_1(t)$, as equações de estado ficam descritas por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t)x_4^2(t) - \alpha\beta \text{sen}(x_3(t)), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = u(t). \end{cases} \quad (146)$$

que matricialmente fica da forma como dado em (122) sendo $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$, e

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{23}(x) &= -\frac{\alpha\beta\text{sen}(x_3(t))}{x_3(t)}, \\ \tilde{f}_{24}(x) &= \alpha x_1(t)x_4(t).\end{aligned}\tag{147}$$

as não linearidades do sistema.

Para utilizar o controlador com comutação (143), inicialmente serão projetados os ganhos do controlador fuzzy dado em (15). Assim, para obter os ganhos do controlador foi utilizada a forma generalizada proposta em (TANIGUCHI et al., 2001), e portanto, será suposto o seguinte domínio para o sistema (122) e (147),

$$D_1 = \{x(t) \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq x_1(t) \leq 1, -1 \leq x_2(t) \leq 1, -\frac{\pi}{12} \leq x_3(t) \leq \frac{\pi}{12}, -2 \leq x_4(t) \leq 2\}.$$

Feitos alguns cálculos foram obtidos os valores máximos e mínimos das funções \tilde{f}_{23} e \tilde{f}_{24} , que são dados por (148):

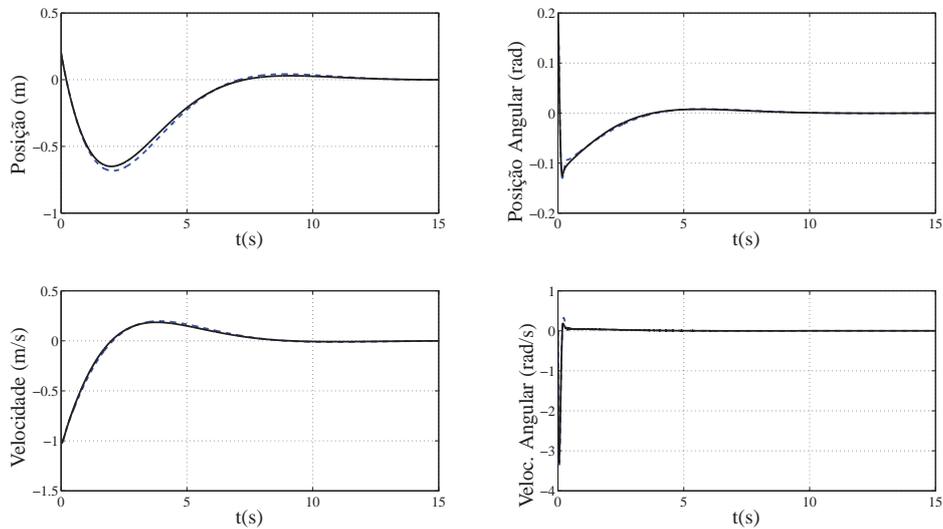
$$\begin{aligned}a_{23_1} &= \max_{x_1 \in D_1} \{\tilde{f}_{23}(x_1)\} = -6,9275; \\ a_{23_2} &= \min_{x_1 \in D_1} \{\tilde{f}_{23}(x_1)\} = -7,0073; \\ a_{24_1} &= \max_{x_1 \in D_1} \{\tilde{f}_{24}(x_1)\} = 1.4286; \\ a_{24_2} &= \min_{x_1 \in D_1} \{\tilde{f}_{24}(x_1)\} = -1.4286.\end{aligned}\tag{148}$$

Logo, utilizando as LMIs (53) e (54) dadas no Teorema 1, foram obtidos os seguintes ganhos do controlador:

$$\begin{aligned}F_1 &= [-20,2102 \quad -40,1556 \quad 415,0558 \quad 23,1590], \\ F_2 &= [-30,8668 \quad -73,6667 \quad 589,3973 \quad 33,1809], \\ F_3 &= [-20,1940 \quad -40,1049 \quad 414,7920 \quad 23,1439], \\ F_4 &= [-30,8507 \quad -73,6160 \quad 589,1335 \quad 33,1657].\end{aligned}\tag{149}$$

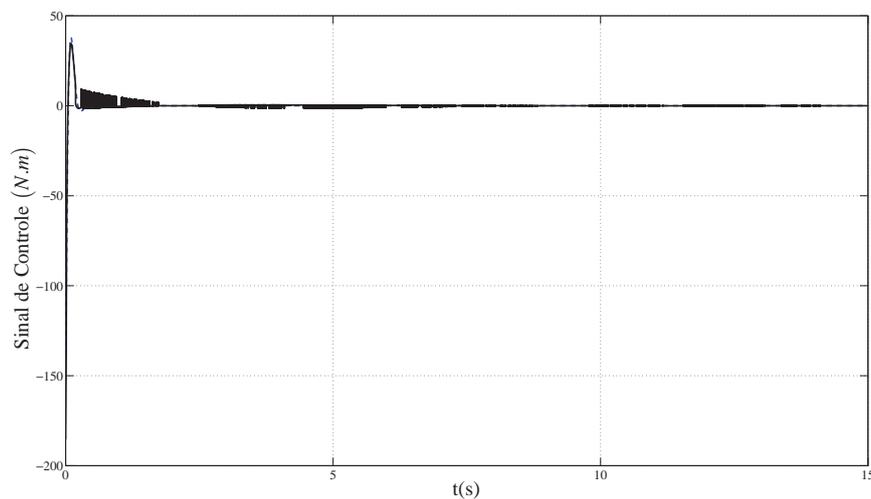
O objetivo da simulação é manter a bola na origem na origem. Assim, considerando a condição inicial $x_0 = [0, 2 \quad -1 \quad 0, 2 \quad 0]^T$ e o ponto de equilíbrio $x_e = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, com a simulação do sistema controlado (122), (143), (147) e (149) foram obtidas as respostas ilustradas nas Figuras 26 e 27.

Figura 26 - Variáveis de estado do sistema bola-viga 13 utilizando o controlador fuzzy (15) (linha pontilhada) e o controlador chaveado (143) (linha contínua), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \ -1 \ 0,2 \ 0]^T$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Figura 27 - Sinal de controle do sistema bola-viga 13 utilizando o controlador fuzzy (15) (linha pontilhada) e o controlador chaveado (143) (linha contínua), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \ -1 \ 0,2 \ 0]^T$.

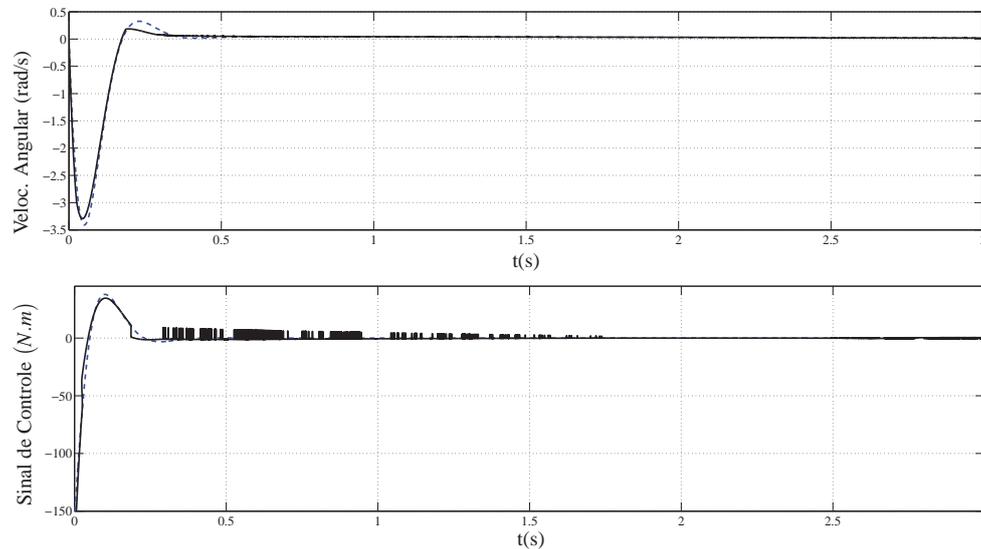


Fonte: (SANTIM, 2012)

Mostrando em detalhes a velocidade angular e o sinal de controle, reduzindo os eixos x e y

de ambas temos a figura abaixo:

Figura 28 - Sinal de controle do sistema bola-viga 13 utilizando o controlador fuzzy (15) (linha pontilhada) e o controlador chaveado (143) (linha contínua), considerando a condição inicial $x(0) = [0,2 \ -1 \ 0,2 \ 0]^T$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Observa-se que o sistema foi projetado como se fosse utilizar a forma generalizada dada em Taniguchi et al. (2001). No entanto, não foi preciso encontrar e implementar as funções de pertinência pois foi usado o controlador com comutação u_{σ} dado em (143), que não depende de tais funções. Assim, uma vantagem dessa nova metodologia é que pode-se eliminar todos os passos do projeto dados em (125)-(129) que são necessários para encontrar as funções de pertinência, que algumas vezes podem ter expressões longas e/ou complexas.

Nesse caso, pode-se notar na Figura 26 e na Figura 27 que as trajetórias dos sistemas (122) e (147) utilizando o controlador chaveado (143) e o controlador fuzzy (15) apresentam praticamente o mesmo desempenho. Veremos a seguir, para o caso do levitador magnético, com $B(\alpha)$, que a vantagem do controlador chaveado sobre o controlador fuzzy é mais expressiva e apresenta uma convergência mais rápida.

4.2 CASO 2: Sistema Fuzzy Completo com $B(\alpha)$ Utilizando Integrador

Neste caso será considerado o sistema fuzzy dado em (3), ou seja,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u.$$

Sejam $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle e $v \in \mathbb{R}^m$ a derivada temporal do vetor de entrada. Defina x_{n+l} e v_l , tais que $\dot{x}_{n+l}(t) = \dot{u}_l(t) = v_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, m$, ou seja, $x_{n+l}(t) = u_l(t) = \int_0^t v_l(t) dt, l = 1, 2, \dots, m$.

Assim tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u, \\ \dot{x}_{n+1}(t) = v_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m}(t) = v_m, \end{cases} \quad (150)$$

ou de forma equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{n+m}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix} v. \quad (151)$$

Definindo

$$\hat{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m}(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_{n+m}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix},$$

o sistema (151) pode ser escrito da seguinte forma

$$\hat{\dot{x}} = \hat{A}(\alpha)\hat{x} + \hat{B}v. \quad (152)$$

Feita esta adequação, pode-se notar que o sistema (152) é semelhante ao sistema (142) e portanto o problema recai ao Caso 1. Assim, basta fazer uso do controlador, trocando-se $x(t)$ por $\hat{x}(t)$ e adotando-se $v(t) = -F_{\sigma}\hat{x}(t)$ de modo similar ao definido em (143).

4.2.1 Exemplo

Para ilustrar este caso será utilizado o modelo matemático do levitador magnético dado pela Figura 2. Seja o sistema (80)-(82), e defina x_3 e v tais que

$$\dot{x}_3 = \dot{u} = v, \text{ ou seja, } x_3 = u.$$

Assim, o sistema composto pelas equações (74) e (78) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} x_1 - \frac{k}{m} x_2 - \frac{\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} x_3, \\ \dot{x}_3 = v. \end{cases} \quad (153)$$

ou de forma equivalente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ f_{21}(x_1, y_0) & -\frac{k}{m} & g_{21}(x_1, y_0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad (154)$$

sendo f_{21} e g_{21} como em (80) e (81), respectivamente.

Feita esta adequação pode se notar que o problema recai no Caso 1. Assim, foi considerada (99) e definiu-se os modelos locais,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21_1} & -0,02 & b_{21_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21_1} & -0,02 & b_{21_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21_2} & -0,02 & b_{21_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21_2} & -0,02 & b_{21_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = [0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Observação 8. Como dito anteriormente, essa nova metodologia dispensa os passos similares às equações (85)-(91), necessárias para a construção das funções de pertinência. Assim, neste caso, esses passos não são necessários e não foram realizados.

Para encontrar os ganhos do controlador

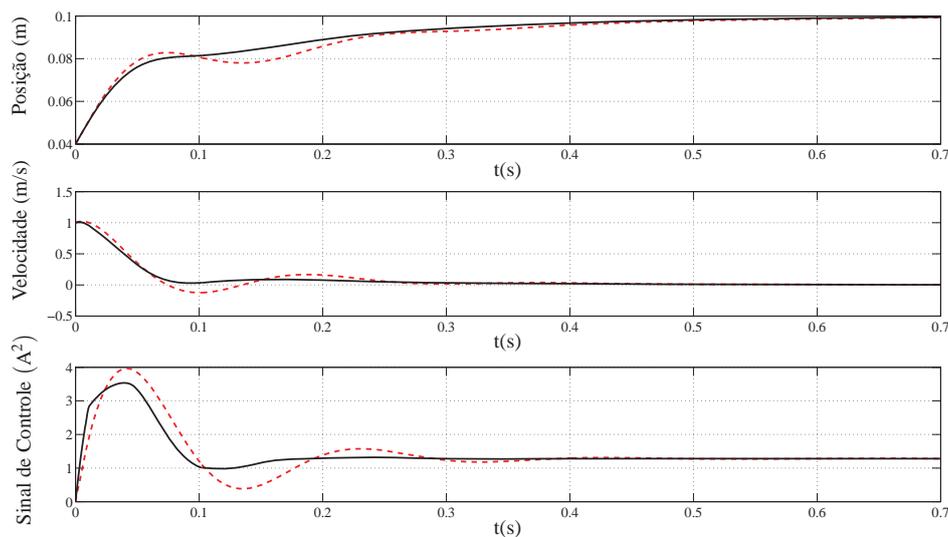
$$V(\hat{x}(t))(t) = \sum_{i=1}^4 -\alpha_i(x(t)) F_i \hat{x}(t), \quad \hat{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^T \quad (155)$$

foram utilizadas as LMIs (53) e (54), dadas no Teorema 1, e obteve-se:

$$\begin{aligned} F_1 &= [-636,9216 \quad -109,3352 \quad 15,6269], \\ F_2 &= 10^3 \times [-2,2199 \quad -0,3851 \quad 0,0535], \\ F_3 &= [-784,7978 \quad -135,0930 \quad 19,1611], \\ F_4 &= 10^3 \times [-2,3678 \quad -0,4108 \quad 0,0570]. \end{aligned} \quad (156)$$

Para a simulação foi considerada, no sistema composto pelas equações (154) e (155), a condição inicial $\bar{x}_0 = [0,04 \ 1 \ 0]^T$. Como $x_3 = u = i^2 - i_0^2$ e $i_0^2 = 1,28$ (para o sistema (154) a condição inicial é $x_0 = [0,04 \ 1 \ 0]^T - [0,1 \ 0 \ 1,28]^T = [-0,06 \ 1 \ -1,28]^T$), a simulação do sistema controlado (154), (143) e (156) apresentou as respostas mostradas nas Figuras 29 e 30.

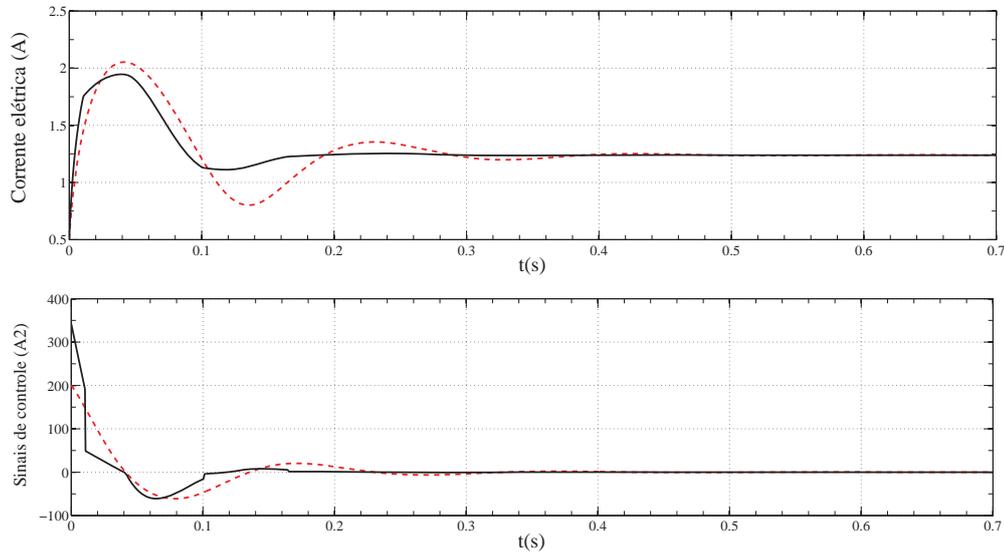
Figura 29 - Posição ($y(t) = \bar{x}_1(t)$), velocidade ($\bar{x}_2(t)$) e entrada de controle ($x_3 = u = i^2 - i_0^2$) do sistema controlado utilizando o controlador fuzzy (15) (linha pontilhada) e o controlador chaveado (143) (linha contínua), para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m$ e a condição inicial $[0,04 \ 1 \ 0]^T$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

Como no Caso 1, as trajetórias do sistema (80)-(82), utilizando o controlador chaveado (143), converge mais rapidamente do que utilizando o controlador fuzzy (15), como pode ser visto na Figura 29. Já o sinal de controle, utilizando o controlador u_σ , é inicialmente mais elevado e no decorrer do tempo mais baixo, do que utilizando o controlador fuzzy u , como ilustrado na Figura 30.

Figura 30 - Sinal de controle fuzzy u (linha pontilhada), sinal de controle chaveado v (linha contínua), corrente elétrica fuzzy $i(t)$ (linha pontilhada) e corrente elétrica chaveada $i(t)$ (linha contínua) do sistema controlado, para $y_0 \in [0,04, 0,11]$, considerando $y_0 = 0,1m$ e a condição inicial $[0,04 \ 1 \ 0]^T$.



Fonte: (SANTIM, 2012)

4.3 Conclusões Parciais

Como demonstrado no Teorema 3, os controladores chaveados projetados mostram-se mais eficientes ou iguais ao controlador fuzzy Takagi-Sugeno baseando-se na CDP, se for considerada a convergência de uma função de Lyapunov para zero. Como foi visto os controladores com comutação dispensam a necessidade de explicitar as expressões das funções de pertinência, o que pode tornar a implementação bastante simples. Uma outra vantagem é que essa nova metodologia não altera as LMIs dadas em projetos de métodos de controle conhecidos na literatura. Através das simulações dos exemplos foram obtidas respostas transitórias apropriadas.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposto um novo método de projeto de reguladores, com pontos de operação pertencentes a uma região dada, que permite o rastreamento, em sistemas não lineares, de sinais constantes. O método utiliza modelos fuzzy Takagi-Sugeno que descrevem exatamente o modelo de projeto não linear e é baseado em LMIs. Para ilustrar foram utilizados os sistemas de controle de um levitador magnético e de um sistema bola-viga.

A vantagem do método proposto é que ele não altera as LMIs dadas em métodos de controle fuzzy Takagi-Sugeno como, por exemplo, em Boyd et al. (1994), Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Teixeira e Žak (1999), Taniguchi et al. (2001), Teixeira, Assunção e Avellar (2003), Mozelli et al. (2009) e Andrea et al. (2008), Teixeira, Pietrobon e Assunção (2000), Guerra e Vermeiren (2004), Klug, Castelan e Leite (2011), Montagner et al. (2005), Montagner, Oliveira e Peres (2010); e possibilita escolher um ponto de equilíbrio do sistema, em um intervalo e/ou região de valores previamente estabelecidos, sem a necessidade de refazer o projeto dos ganhos do controlador para cada novo ponto de equilíbrio escolhido. Além disso, no caso, o sistema apresentou um comportamento transitório adequado, como pode ser visto analisando as Figuras 3, 4, 5, 6, 7 e 8 do levitador magnético e também 14, 15, 17, 18, 20 e 21 do sistema bola-viga. Assim, o método proposto pode ser útil em aplicações práticas de sistemas de controle. Além disso, a metodologia também pode ser aplicada quando a planta tem os parâmetros constantes pertencentes a uma determinada região. Neste caso esses parâmetros são considerados como novas variáveis do domínio das não linearidades. No caso do levitador magnético, a massa m foi considerada como um parâmetro constante mas pertencente a uma região dada. Observa-se que nesse caso específico se deve ter cautela ao escolher os valores de m , já que o sistema é sensível a essa alteração podendo resultar em raízes negativas da corrente elétrica na equação (73) (ou seja, $i(t)^2$ negativo para $u(t)$ projetado em alguns instantes de tempo t), dependendo do m escolhido. Devido a esse fato reduziu-se o intervalo de y_0 , para que assim o sistema operasse em qualquer valor de massa e de y_0 nos intervalos escolhidos para eles. Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras 11 e 12.

Também foi apresentada uma nova metodologia de projeto de controladores com comu-

tação para algumas classes de plantas não lineares, descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. A metodologia proposta é baseada em LMIs e, como demonstrado no Teorema 3, os controladores projetados mostram-se mais eficientes ou iguais ao controlador fuzzy Takagi-Sugeno, se for considerada a convergência de uma função de Lyapunov para zero. Uma vantagem da metodologia proposta é que os controladores com comutação dispensam a necessidade de explicitar as expressões das funções de pertinência, o que pode tornar a implementação bastante simples. Uma outra vantagem é que essa nova metodologia não altera as LMIs dadas em projetos de métodos de controle conhecidos na literatura, por exemplo, as propostas em Boyd et al. (1994), Tanaka, Ikeda e Wang (1998), Teixeira e Žak (1999), Taniguchi et al. (2001), Teixeira, Assunção e Avellar (2003), Mozelli et al. (2009). Além disso, a aplicação desse novo método no projeto de controle do sistema bola-viga e do levitador magnético apresentou respostas transitórias apropriadas como mostram as Figuras 26, 27, 29, 30. Assim, este novo método de projeto de controle pode ser inovador e bastante útil em projeto de controle de sistemas não lineares.

5.1 Perspectivas Futuras

Como extensão da pesquisa do projeto pretende-se dar continuidade ao estudo de sistemas com comutação, utilizando a lei de controle $u_\sigma = -F_\sigma x$ para sistemas com incertezas e/ou para um conjunto conhecido de pontos de operação.

5.2 Trabalhos Realizados

Foi apresentado um trabalho no X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, como pode ser visto em Souza et al. (2011). Além deste, um outro trabalho realizado foi aceito na Revista *Mathematical Problems in Engineering*, como pode ser visto em Santim et al. (2012).

REFERÊNCIAS

ANDREA, C. Q. et al. Controle ótimo H_∞ de sistemas não lineares com modelos fuzzy Takagi-Sugeno. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Natal, v. 19, n. 3, p. 256 – 269, set. 2008.

ARRIFANO, N. S. D.; OLIVEIRA, V. A.; COSSI, L. V. Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 17, n. 2, p. 213 – 225, jun. 2006.

ASSUNÇÃO, E. et al. Metodologia para rastreamento com modificação dos zeros e rejeição de distúrbio aplicada a sistemas incertos. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Natal, v. 19, n. 1, p. 43 – 52, mar. 2008.

ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Comments on magnetically levitated micro PM motors by two types of active magnetic bearings. *IEEE Transactions on Mechatronics*, New York, v. 7, n. 1, p. 99–100, mar. 2002.

BERGSTEN, P.; PALM, R.; DRIANKOV, D. Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, Orlando, v. 32, n. 1, p. 114–121, 2002.

BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. 2. ed. USA: Studies in Applied Mathematics- SIAM, 1994. Disponível em: <<http://www.stanford.edu/boyd/lmibook/lmibook.pdf>>. Acesso em: 2 mar. 2012.

CARDIM, R. *Projeto de controladores baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável*. 2009, 121 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

CARDIM, R. et al. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 56, n. 9, p. 3505 – 3513, set. 2009.

CHANG, Y.; CHEN, B. A fuzzy approach for robust reference-tracking-control design on nonlinear distributed parameter time-delayed systems and its application. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, New York, v. 18, n. 6, p. 1041–1057, dez. 2010.

CHEN, B. S.; LEE, B. K.; GUO, L. B. Optimal tracking design for stochastic fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 6, p. 796 – 813, dez. 2003.

CHEN, P. C.; CHEN, C. W.; CHIANG, W. L. GA-based fuzzy sliding mode controller for nonlinear systems. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2008, p. 1–16, ISSN 1563–5147, ID 325859, 2008.

- CHIU, C. T-S fuzzy maximum power point tracking control of solar power generation systems. *IEEE Transactions on energy conversion*, New York, v. 25, n. 4, p. 1123–1132, dez. 2010.
- CHIU, C. S.; OUYANG, Y. L. Robust maximum power tracking control of uncertain photovoltaic systems: A unified T-S fuzzy model-based approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, New York, v. 19, n. 6, p. 1516–1526, nov. 2011.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Controle de sistemas lineares com comutação. *Revista: Controle & Automação*, Natal, v. 19, n. 4, p. 431 – 443, dez. 2008.
- DEAECTO, G. S. et al. Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. *IET Control Theory Applications*, New York, v. 4, n. 7, p. 1201 –1210, jul. 2010.
- DONG, J.; YANG, G.-H. State feedback control of continuous-time T-S fuzzy systems via switched fuzzy controllers. *Information Sciences*, New York, v. 178, n. 6, p. 1680 – 1695, 2008A.
- DONG, J.; YANG, G.-H. Dynamic output feedback control synthesis for continuous-time T-S fuzzy systems via a switched fuzzy control scheme. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, New York, v. 38, n. 4, p. 1166 –1175, 2008B.
- GAHINET, P. et al. *LMI control toolbox - for use with Matlab*. Natick: The MathWorks, 1995. 356 p. Disponível em: <<http://kczy.zjut.edu.cn/zdkz/file/Matlab/04.pdf>>. Acesso em: 2 mar. 2012.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control & Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915 – 1930, 2006.
- GUERRA, T. M.; VERMEIREN, L. LMI-based relaxed nnquadratic stabilization conditions for Nonlinear Systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, New York, v. 40, n. 5, p. 823 – 829, 2004.
- GUO, S. et al. Effective chaotic orbit tracker: A prediction-based digital redesign approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I - Fundamental Theory and Application*, Pennsylvania, v. 47, n. 11, p. 1557–1570, 2000.
- HESPANHA, J. P. Uniform stability of switched linear systems: Extensions of Lasalle's invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 49, n. 4, p. 470 – 482, abr. 2004.
- JI, Z. et al. Linear matrix inequality approach to quadratic stabilisation of switched systems. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, New York, v. 151, n. 3, p. 289 – 294, mai. 2004.
- JUNGES, L. Introdução a lógica fuzzy. In: . SISTEMAS industriais inteligentes. Santa Catarina: [s. n.], 2006. Disponível em: <<http://s2i.das.ufsc.br/tikiwiki/tiki-index.php>>. Acesso em: 22 ago. 2011. Slides.
- KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, n. 5, p. 523–534, out. 2000.

- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; LEITE, V. J. S. A dynamic compensator for parameter-varying systems subject to actuator limitations applied to a T-S fuzzy system. In: WORLD CONGRESS OF THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL- IFAC, 18., Milan. Congress... Milan, 2011. Milan: [s.n.], 2011. v. 18, p. 14495–14500.
- KOMORI, M.; YAMANE, T. Magnetically levitated micro PM motors by two types of active magnetic bearings. *IEEE Transactions on Mechatronics*, New York, v. 6, n. 1, p. 43–49, mar. 2001.
- LIAN, K.; LIOU, J. Output tracking control for fuzzy systems via output feedback design. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, New York, v. 14, n. 5, p. 628–639, out 2006.
- LIAN, K.; TU, H. LMI-based adaptative tracking control for parametric strict-feedback systems. *IEEE Transactions on systems*, New York, v. 16, n. 5, p. 1245–1258, out. 2008.
- MACHADO, E. R. M. D. *Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno*. 2003. 209 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.
- MARQUEZ, H. J. *Nonlinear control systems - analysis and design*. Canada: John Wiley Professional, 2003. 376 p.
- MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Relaxações convexas de convergência garantida para o projeto de controladores para sistemas nebulosos de Takagi Sugeno. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 21, p. 82 – 95, fev. 2010.
- MONTAGNER, V. F. et al. LMI approach for H_∞ ; linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, New York, v. 152, n. 2, p. 195 – 201, mar. 2005.
- MOZELLI, L. A. et al. Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, Elmsford, v. 45, n. 6, p. 1580 – 1583, 2009.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4th. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2003. 800 p.
- PEAUCELLE, D. et al. *User's guide for sedumi interface 1.04*. Toulouse: [s. n.], 2002. 37 p.
- PIETROBOM, H. C. *Controle de sistemas não-lineares baseados em LMI utilizando modelos fuzzy*. 1999. 95 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 1999.
- SANTIM, M. P. A. et al. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, 2012. (Aceito).
- SHIH, K. S.; CLI, T. H. S.; TSAI, S. H. New nonlinear controller for a class of chaotic systems based on adaptive backstepping fuzzy-immune control. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2011, p. 1–20, ID 439324, 2011.
- SILVA, N. A. P. da. *Projeto de controladores automáticos com atualização das condições iniciais*. 2005, 218 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.

SOUZA, W. et al. Controle de um helicóptero 3-DOF utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 2011, São João del-Rei. *Anais...* São João del-Rei: [s. n.], 2011. p. 1155–1160.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, Jan./Fev. 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, Mai 1998.

TANAKA, K.; IWASAKI, M.; WANG, H. Stable switching fuzzy control and its application to a hovercraft type vehicle. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 9., 2000, San Antonio. *Proceedings...* San Antonio: [s.n.], 2000A. v. 2, p. 804–809.

TANAKA, K.; IWASAKI, M.; WANG, H. Stability and smoothness conditions for switching fuzzy systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 6., 2000, Chicago. *Proceedings...* Chicago: [s. n.], 2000B. v. 4, p. 2474–2478.

TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 135–156, 1992.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. Canada: John Wiley Professional, 2001. 432 p.

TANIGUCHI, T. et al. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, out. 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; PIETROBOM, H. C.; ASSUNÇÃO, E. Novos resultados sobre estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 11, n. 1, p. 37–48, 2000.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, abr. 1999.

TUAN, H. D. et al. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 2, p. 324–332, abr. 2001.

WAI, R.; YANG, Z. Adaptive fuzzy neural network control design via a T-S fuzzy model for a robot manipulator including actuator dynamics. *IEEE Transactions on systems*, New York, v. 38, n. 5, p. 1326–1346, out. 2008.

WANG, L. *A course in fuzzy systems and control*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997. 424 p.

- XIAODONG, L.; QINGLING, Z. New approaches to \mathcal{H}_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, Oxford, v. 9, n. 39, p. 1571–1582, 2003.
- XIE, G.; WANG, L. Periodical stabilization of switched linear systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Amsterdam, v. 181, n. 1, p. 176 – 187, 2005.
- YAN, S.; SUN, Z. Study on separation principles for T-S fuzzy system with switching controller and switching observer. *Neurocomputing*, Amsterdam, v. 73, n. 13-15, p. 2431 – 2438, 2010.
- YANG, G.-H.; DONG, J. Switching fuzzy dynamic output feedback H_∞ control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, New York, v. 40, n. 2, p. 505–516, abr. 2010.
- YU, J. et al. Adaptive fuzzy tracking control for a permanent magnet synchronous motor via backstepping approach. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2010, 2010.
- ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and control*, California, v. 8, n. 1, p. 338–353, 1965.
- ZHENG, F. et al. Robust PI controller design of nonlinear systems via fuzzy modeling approach. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, Orlando, v. 31, n. 6, p. 666–675, 2001.