

UNESP
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2013

SAMPAIO, Jarbas Cordeiro

TD
2013

Código do grau: TD = Tese Doutorado
TLD = Tese Livre Docência
DM = Dissertação Mestrado

JARBAS CORDEIRO SAMPAIO

MOVIMENTO ORBITAL DE SATÉLITES ARTIFICIAIS: EFEITOS
RESSONANTES

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade Es-
tadual Paulista, para a obtenção do Título de
Doutor em Física na área de Dinâmica Orbital.

Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes
Co-Orientador: Prof. Dr. Sandro da Silva Fernandes

Guaratinguetá - SP

2013

S192m	Sampaio, Jarbas Cordeiro Movimento orbital de satélites artificiais: efeitos ressonantes / Jarbas Cordeiro Sampaio.- Guaratinguetá : [s.n.], 2013 151 f.: il. Bibliografia: f. 143-147 Inclui apêndice Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2013 Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes Co-orientador: Prof Dr. Sandro da Silva Fernandes 1. Satélites artificiais I. Título CDU 629.783(043)
-------	---

JARBAS CORDEIRO SAMPAIO

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"DOUTOR EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Sílvia Maria Giuliatti Winter
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. RODOLPHO VILHENA DE MORAES
Orientadora / Unesp-Feg


Prof. Dr. MARIA CECILIA FRANÇA DE PAULA SANTOS
ZANARDI
Unesp-Feg


Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA NETO
Unesp-Feg


Prof. Dr. ROBERTO VIEIRA MARTINS
Observatório Nacional-RJ


Prof. Dr. MAISA DE OLIVEIRA TERRA
ITA

DADOS CURRICULARES

JARBAS CORDEIRO SAMPAIO

NASCIMENTO	18/05/1983 - Baixa Grande/BA
FILIAÇÃO	Benedito Arcanjo Sampaio Joselita Cordeiro Sampaio
2002 - 2007	Curso de Graduação Licenciatura em Física - UEFS
2007 - 2009	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP
2009 - 2013	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Doutorado Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus;

aos meus pais, Benedito e Joselita;

aos Professores Rodolpho Vilhena de Moraes e Sandro da Silva Fernandes;

ao Professor Edwin Wnuk da Universidade Adam Mickiewicz;

aos Professores da Pós-Graduação em Física da FEG/UNESP;

aos colegas e amigos da Pós Graduação em Física da FEG/UNESP;

às minhas irmãs, Aracelle, Bruna e Catiúscia;

à Joseane que é minha fonte de segurança e amor.

Este trabalho contou com apoio da seguinte entidade

- FAPESP - através do processo 2009/00735-5.

"...Eu quero te pedir que não chore
Que não sofra, nem se menospreze
Não corra atrás do vazio, do que não te aguarda, do que não te espera
Eu quero que tu sejas feliz, alegre, sorridente..."

(Jarbas Sampaio)

SAMPAIO, J. C., Movimento Orbital de Satélites Artificias: Efeitos Ressonantes. 2013, 151f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Resumo

O crescente número de objetos orbitando a Terra justifica a grande atenção e interesse no espaço entre o Planeta e a Lua nos últimos anos. Estes estudos envolvem diferentes perturbações e ressonâncias nos movimentos orbitais destes objetos distribuídos por diferentes altitudes. Neste trabalho, o problema da ressonância no movimento de satélites artificiais é estudado. O desenvolvimento do geopotencial inclui os harmônicos zonais J_{20} e J_{40} e os harmônicos tesserais J_{22} e J_{42} . Através de um procedimento de média e sucessivas transformações de Mathieu, a ordem do sistema dinâmico é reduzida e o sistema final é resolvido por integração numérica. No modelo dinâmico simplificado, três ângulos críticos são estudados. A semi-largura da separatriz é calculada através de um modelo linearizado, o qual descreve o comportamento do sistema dinâmico na vizinhança de cada ângulo crítico. Através do critério de sobreposição das ressonâncias, os possíveis movimentos regulares e irregulares são investigados pelo comportamento no tempo do semi-eixo maior, argumento do pericentro e excentricidade. O maior expoente de Lyapunov é usado como ferramenta para verificar o movimento caótico. Nos estudos sobre os objetos ressonantes, os TLE (Two-Line Elements) do NORAD (North American Defense) são estudados observando o período ressonante dos objetos orbitando a Terra e a ressonância principal na região LEO (Low Earth Orbits). O comportamento no tempo do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação de alguns satélites artificiais e detritos espaciais são estudados. Possíveis movimentos irregulares são observados pela presença de diferentes ângulos ressonantes descrevendo a dinâmica orbital destes objetos.

PALAVRAS-CHAVE: Satélites Artificias. Detritos Espaciais. Movimento Orbital. Efeitos de Ressonância.

SAMPAIO, J. C., Orbital Motion of Artificial Satellites: Resonant Effects. 2013, 151f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Abstract

The increasing number of objects orbiting the Earth justifies the great attention and interest in the space between the Planet and the Moon in the last years. These studies involve different disturbances and resonances in the orbital motions of these objects distributed by the distinct altitudes. In this work, the resonance problem in the artificial satellites motion is studied. The development of the geopotential includes the zonal harmonics J_{20} and J_{40} and the tesseral harmonics J_{22} and J_{42} . Through an averaging procedure and successive Mathieu transformations, the order of dynamical system is reduced and the final system is solved by numerical integration. In the simplified dynamical model, three critical angles are studied. The half-width of the separatrix is calculated through a linearized model which describes the behavior of the dynamical system in a neighborhood of each critical angle. Through the resonance overlap criterion the possible regular and irregular motions are investigated by the time behavior of the semi-major axis, argument of perigee and eccentricity. The largest Lyapunov exponent is used as tool to verify the chaotic motion. In the studies about the resonant objects the TLE (Two-Line Elements) of the NORAD are studied observing the resonant period of the objects orbiting the Earth and the main resonance in the LEO region. The time behavior of the semi-major axis, eccentricity and inclination of some artificial satellites and space debris are studied. Possible irregular motions are observed by the presence of different resonant angles describing the orbital dynamics of these objects.

KEYWORDS: Artificial Satellite. Space Debris. Orbital Motion. Resonant Effects.

Lista de Figuras

3.1	Histograma do semi-eixo maior dos objetos catalogados.	33
3.2	Histograma da inclinação dos objetos catalogados.	33
3.3	Histograma da excentricidade dos objetos catalogados.	34
3.4	Histograma do movimento médio dos objetos catalogados.	35
3.5	Semi-eixo maior versus excentricidade de objetos ressonantes satisfazendo a condição do período ressonante maior do que 300 dias.	39
3.6	Semi-eixo maior versus inclinação de objetos ressonantes satisfazendo a condição do período ressonante maior do que 300 dias.	39
5.1	Espaço de fase para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} : As condições iniciais para a inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. . . .	78
5.2	Espaço de fase para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} : As condições iniciais para a inclinação e excentricidade são $I = 55^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. . . .	78
5.3	Espaço de fase para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} : As condições iniciais para a inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. . . .	79
5.4	Comportamento no tempo do semi-eixo maior para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} : As condições iniciais para a inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente.	80
5.5	ϕ_2 versus t, considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} : As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. As curvas mais escuras mostram os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras mostram os movimentos de libração, de acordo com a Figura 5.1. As condições iniciais para ϕ_2 são $-29,86^\circ$ e $870,14^\circ$ para a região de circulação e $150,14^\circ$ para a região de libração.	81

- 5.6 a versus t , considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} : As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com a Figura 5.1. 81
- 5.7 ϕ_2 versus t , considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} : As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 55^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. As curvas mais escuras mostram os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras mostram os movimentos de libração, de acordo com a Figura 5.2. As condições iniciais para ϕ_2 são $-29,86^\circ$ e $870,14^\circ$ para a região de circulação e $150,14^\circ$ para a região de libração. 82
- 5.8 a versus t , considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} : As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 55^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. As curvas mais escuras mostram os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras mostram os movimentos de libração, de acordo com a Figura 5.2. . 82
- 5.9 Comportamento no tempo do semi-eixo maior dos objetos 20959, 24876 e 25030, correspondendo ao período Janeiro - Dezembro, 2011, dos dados TLE do NORAD. As mudanças repentinas nos valores de semi-eixo maior, nas órbitas dos objetos, representam correções orbitais que são feitas ao longo do tempo de vida útil do satélite artificial. 84
- 5.10 Semi-eixo maior crítico versus inclinação para $e = 0,001$, a) considerando os ângulos críticos ϕ_{2201} , ϕ_{2211} , ϕ_{2221} e b) considerando os ângulos críticos ϕ_{4211} , ϕ_{4221} , ϕ_{4231} 86
- 5.11 Semi largura da separatriz considerando diferentes inclinações e excentricidades. 87
- 5.12 $a_{max}(a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min}(a_{crit} - \Delta a)$ para os ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , considerando diferentes inclinações e $e = 0,001$ 88
- 5.13 $a_{max}(a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min}(a_{crit} - \Delta a)$ para os ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , considerando diferentes inclinações e $e = 0,01$. Os valores de semi-eixo maior, inclinação e excentricidade dos pontos A, B, C e D, são dados na Tabela 5.4. . . 88
- 5.14 $a_{max}(a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min}(a_{crit} - \Delta a)$ para os ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , considerando diferentes inclinações e $e = 0,05$ 89
- 5.15 Comportamento no tempo do semi-eixo maior, considerando as condições iniciais definidas na Tabela 5.4. 90

5.16	Comportamento no tempo da excentricidade, considerando as condições iniciais definidas na Tabela 5.4.	91
5.17	Comportamento no tempo do argumento do perigeu, considerando as condições iniciais definidas na Tabela 5.4.	91
5.18	Comportamento no tempo da constante de integração C_2 , considerando as condições iniciais definidas na Tabela 5.4.	92
5.19	Expoente de Lyapunov para a condição inicial correspondente ao ponto "A" na Figura 5.13.	94
5.20	Expoente de Lyapunov para a condição inicial correspondente ao ponto "B" na Figura 5.13.	94
5.21	Expoente de Lyapunov para a condição inicial correspondente ao ponto "C" na Figura 5.13.	95
5.22	Expoente de Lyapunov para a condição inicial correspondente ao ponto "D" na Figura 5.13.	95
5.23	Comportamento no tempo do semi-eixo maior para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.6.	103
5.24	Comportamento no tempo de x_4 para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.6.	103
5.25	Comportamento no tempo do argumento do pericentro para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.6.	104
5.26	Comportamento no tempo da excentricidade para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.6.	104
5.27	Comportamento no tempo do semi-eixo maior para diferentes valores de C_1 dados na Tabela 5.7.	105
5.28	Comportamento no tempo do ângulo x_4 para diferentes valores de C_1 dados na Tabela 5.7.	106
5.29	Comportamento no tempo do argumento do pericentro para diferentes valores de C_1 dados na Tabela 5.7.	106
5.30	Comportamento no tempo da excentricidade para diferentes valores de C_1 dados na Tabela 5.7.	107
5.31	Comportamento no tempo do semi-eixo maior para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.8.	108

5.32	Comportamento no tempo do ângulo x_4 para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.8.	109
5.33	Comportamento no tempo do argumento do pericentro para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.8.	109
5.34	Comportamento no tempo da excentricidade para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.8.	110
5.35	Expoentes de Lyapunov $\lambda(1)$ e $\lambda(2)$, correspondendo às variáveis X_4 e Y_4 , respectivamente, para $C_1 = -1,467778013 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467819454 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 0^\circ$	111
5.36	Expoentes de Lyapunov $\lambda(1)$ e $\lambda(2)$, correspondendo às variáveis X_4 e Y_4 , respectivamente, para $C_1 = -1,467765786 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467821043 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 60^\circ$	111
5.37	Expoente de Lyapunov $\lambda(1)$ e $\lambda(2)$, correspondendo às variáveis X_4 e Y_4 , respectivamente, para $C_1 = -1,467778013 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467819454 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 0^\circ$	112
5.38	Expoentes de Lyapunov $\lambda(1)$ e $\lambda(2)$, correspondendo às variáveis X_4 e Y_4 , respectivamente, para $C_1 = -1,467765786 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467821043 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 60^\circ$	113
6.1	a versus ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 87^\circ$ e $e = 0,019$, respectivamente.	119
6.2	a versus ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 95^\circ$ e $e = 0,005$, respectivamente.	119
6.3	Comportamento no tempo do semi-eixo maior, considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 87^\circ$ e $e = 0,019$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com o espaço de fase mostrado na Figura 6.1.	120

6.4	Comportamento no tempo do ângulo ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 87^\circ$ e $e = 0,019$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com o espaço de fase mostrado na Figura 6.1.	120
6.5	Comportamento no tempo do semi-eixo maior, considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 95^\circ$ e $e = 0,005$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com o espaço de fase mostrado na Figura 6.2.	121
6.6	Comportamento no tempo do ângulo ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 95^\circ$ e $e = 0,005$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com o espaço de fase mostrado na Figura 6.2.	121
7.1	Semi-eixo maior versus período ressonante de objetos satisfazendo a condição $Pres > 300$ dias.	125
7.2	Comportamento no tempo do semi-eixo maior do objeto 16181 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	126
7.3	Comportamento no tempo da excentricidade do objeto 16181 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	127
7.4	Comportamento no tempo da inclinação do objeto 16181 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	127
7.5	Comportamento no tempo do semi-eixo maior do objeto 16369 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	128
7.6	Comportamento no tempo da excentricidade do objeto 16369 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	128
7.7	Comportamento no tempo da inclinação do objeto 16369 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	129

7.8	Comportamento no tempo do semi-eixo maior do objeto 17527 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	129
7.9	Comportamento no tempo da excentricidade do objeto 17527 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	130
7.10	Comportamento no tempo da inclinação do objeto 17527 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	130
7.11	Comportamento no tempo do semi-eixo maior do objeto 19467 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	131
7.12	Comportamento no tempo da excentricidade do objeto 19467 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	131
7.13	Comportamento no tempo da inclinação do objeto 19467 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.	132
7.14	Comportamento no tempo do período ressonante correspondente ao movimento orbital do objeto 16181.	134
7.15	Comportamento no tempo do período ressonante correspondente ao movimento orbital do objeto 16369.	134
7.16	Comportamento no tempo do período ressonante correspondente ao movimento orbital do objeto 17527.	135
7.17	Comportamento no tempo do período ressonante correspondente ao movimento orbital do objeto 19467.	135
7.18	Comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondente ao movimento orbital do objeto 16181.	136
7.19	Comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondente ao movimento orbital do objeto 16369.	137
7.20	Comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondente ao movimento orbital do objeto 17527.	137
7.21	Comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondente ao movimento orbital do objeto 19467.	138

Lista de Tabelas

3.1	Dados TLE de objetos orbitando a Terra.	38
3.2	Resultados: objetos em movimentos orbitais ressonantes	38
3.3	Número de objetos satisfazendo a condição $Pres > 300$ dias	40
3.4	Porcentagem de objetos satisfazendo a condição $Pres > 300$ dias	40
5.1	Os harmônicos zonais e tesserais.	77
5.2	Elementos orbitais dos objetos 20959, 24876 e 25030, correspondendo a 1 ^o de Janeiro de 2011.	83
5.3	A semi-largura da separatriz	85
5.4	Elementos orbitais dos pontos "A", "B", "C" e "D", na Figura 5.13.	90
5.5	Coefficientes ressonantes.	99
5.6	Valores da constante de integração C_1 para $e = 0,05$, $I = 10^0$ e valores diferentes de semi-eixo maior.	102
5.7	Valores da constante de integração C_1 para $e = 0,001$, $I = 55^0$ e valores diferentes de semi-eixo maior.	105
5.8	Valores da constante de integração C_1 para $e = 0,01$, $I = 55^0$ e valores diferentes de semi-eixo maior.	108
7.1	Número de objetos pelo número do coeficiente m considerando o valor do semi-eixo maior até $15000km$	124
7.2	Ângulos ressonantes ϕ_{mkq} relacionados aos movimentos orbitais dos objetos 16181, 16369, 17527 e 19467.	133

Lista de Símbolos

a	semi-eixo maior
a_{crit}	semi-eixo maior crítico
C_1	constante de integração
C_2	constante de integração
e	excentricidade da órbita
$F_{lmp}(I)$	função da inclinação
G_{lpq}	função da excentricidade
H'_{CR}	hamiltoniana do sistema ressonante crítico
H_F	hamiltoniana final
$H_q^{-(l+1)(l-2p)}$	coeficientes de Hansen
$\hat{H}_r$	hamiltoniana reduzida
I	inclinação da órbita
J	jacobiano
J_{lm}	coeficiente do harmônico esférico de grau l e ordem m
M	anomalia média
n	movimento médio

$Pres$	período ressonante
r	distância geocêntrica do satélite artificial
r_a	distância do apocentro
r_e	raio equatorial médio da Terra
r_p	distância do pericentro
V	potencial gravitacional
α	comensurabilidade da ressonância
Δa	semi-largura da separatriz
θ	tempo sideral de Greenwich
κ	maior expoente de Lyapunov
λ_{lm}	longitude de referência correspondente ao longo do equador
μ	parâmetro gravitacional da Terra
ϕ_{lmpq}	argumento ressonante
ω	argumento do pericentro
ω_e	velocidade angular da Terra
Ω	longitude do nodo ascendente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	26
2.1	Levantamento Bibliográfico	26
2.1.1	Potencial Gravitacional	26
2.1.2	Ressonância	27
2.1.3	Ressonância 2:1	28
2.1.4	Ressonância 14:1	29
2.1.5	Detritos Espaciais	30
2.1.6	Objetos Catalogados	31
3	OBJETOS ORBITANDO A TERRA	32
3.1	Objetos em Movimento Orbital Ressonante	35
4	HAMILTONIANA REDUZIDA	41
4.1	Equações Canônicas do Movimento	42
4.2	Termos Seculares	45
4.3	Termos Periódicos	45
4.4	Análise da Ressonância	46
4.5	Integral Primeira do Sistema Reduzido	49
4.6	Hamiltoniana Ressonante	50
5	RESSONÂNCIA 2:1	52
5.1	Sistema Ressonante Crítico	52
5.2	Integral Primeira do Sistema Dinâmico Crítico	53
5.3	O Sistema Dinâmico Final	54
5.4	Integrais Primeiras C_1 e C_2	56
5.5	Excentricidade e Inclinação como Funções de X_2, C_1 e C_2	58

5.6	Definindo o Sistema de Equações para cada Frequência Ressonante	60
5.6.1	Ângulo Ressonante $\phi_{2,2201}$	60
5.6.2	Ângulo Ressonante $\phi_{2,2211}$	63
5.6.3	Ângulo Ressonante $\phi_{2,2221}$	66
5.6.4	Sistema Dinâmico gerado considerando os harmônicos J_{40} e J_{42}	69
5.6.5	A semi-largura da separatriz	71
5.7	Resultados da Ressonância 2:1	77
5.7.1	Estudo do Sistema Simplificado	77
5.7.1.1	Espaço de fase correspondente a ϕ_{2201} e ϕ_{4211}	77
5.7.1.1	Comportamento no tempo	80
5.7.1.1	Análise da largura da separatriz e a sobreposição de ressonâncias	84
5.7.1.1	Análise dos expoentes de Lyapunov	93
5.7.1.1	Estudo dos expoentes de Lyapunov pelo método de Gram-Schmidt	96
5.7.2	Estudo do Sistema Completo	98
6	RESSONÂNCIA 14:1	114
6.1	Resultados da Ressonância 14:1	118
6.1.1	Estudo do Sistema Simplificado	118
7	OBJETOS CATALOGADOS	123
7.1	Estudo de Órbitas Ressonantes na Região LEO	125
8	CONCLUSÃO	139
8.1	Trabalhos Futuros	142
	REFERÊNCIAS	143
	BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	148
	APÊNDICE A - Dados TLE do NORAD	149

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A Astronáutica, concebida como Ciência do Vôo Espacial, consiste na arte de navegar de astro em astro incluindo teorias e técnicas relativas a construção de foguetes, cálculo de trajetórias e órbitas de corpos celestes artificiais entre outras atividades (LUCA, 1990).

Entre os principais precursores dos estudos envolvendo essa ciência estão o russo Konstantin Eduardovich Tsiolkovsky (1857-1935), o americano Robert Hutchings Goddard (1882-1945), o francês Robert Albert-Charles Esnault-Pelterier (1881-1957) e o romeno com ascendência alemã Hermann Julius Oberth (1894-1989) (LUCA, 1990).

Os satélites artificiais são utilizados em várias atividades como em geodinâmica, navegação, monitoramento do clima, estudo da atmosfera, nas telecomunicações, experiências com micro-gravidade, dentre outras. Mas, para que o satélite tenha pleno funcionamento e cumpra o objetivo a que ele foi proposto é necessário que se tenha grande precisão na determinação de sua órbita, para que se evite, por exemplo, perdas na comunicação, ou problemas mais graves como algum acidente.

Para uma missão espacial ser bem sucedida é preciso que se tenha pleno conhecimento das forças perturbadoras que atuam no satélite artificial. O movimento orbital de um satélite artificial, sem perturbação, tem características como uma elipse de determinado tamanho e excentricidade constantes num plano fixo. Caso o movimento orbital não fosse perturbado, esse objeto continuaria nessa órbita indefinidamente, mas não é o que se observa na prática. As principais forças perturbadoras são devidas à distribuição não-uniforme de massa do corpo central, força de arrasto, a força devida às marés provocadas pela Lua e o Sol, perturbação gravitacional por outros corpos, forças de radiação (pressão de radiação direta e refletida, re-emissão térmica), e devido ao impacto com outros pequenos corpos.

Nos últimos anos, muita atenção tem sido dada na literatura ao estudo de órbitas ressonantes

que caracterizam a dinâmica dos satélites síncronos em órbitas circulares ou elípticas. Estes satélites são extensivamente utilizados para fins de comunicação, navegação e de missões militares, o que justifica seu estudo desde os anos 60 (BLITZER, 1963; ELY; HOWELL, 1996; GARFINKEL, 1965a, 1965b, 1966; GEDEON et al., 1967a, 1967b, 1969; JUPP, 1969; LANE, 1988; MORANDO, 1963; SAMPAIO et. al. 2012a, 2012d)

A pesquisa tem como objetivo estudar o comportamento dos elementos orbitais de satélites artificiais sob o efeito da ressonância 2:1, na região de órbitas médias da Terra, e sob efeito da ressonância 14:1, na região de órbitas baixas da Terra. A escolha das ressonâncias 2:1 e 14:1, se deve ao fato da grande aglomeração de objetos nas regiões influenciadas por essas ressonâncias, nas regiões de órbitas média e baixa da Terra, respectivamente. Nestes casos, considera-se a comensurabilidade entre as frequências n e ω_e do movimento médio do satélite artificial e do movimento de rotação da Terra, respectivamente. A ressonância considerada é a $q:m$, ou seja, o satélite realiza q revoluções enquanto a Terra realiza m , de forma que q e m são números inteiros positivos.

Do ponto de vista da Dinâmica, os satélites síncronos são considerados complexos. Os harmônicos tesserais de geopotencial geram múltiplas ressonâncias que interagem resultando movimentos significativamente não-lineares se comparados às órbitas não ressonantes (ELY; HOWELL, 1996). É interessante observar que missões caracterizadas por este tipo de órbita exigem manobras de custo mínimo e dessa forma, controle preciso das trajetórias que estão sujeitas a não-linearidades no decorrer da vida útil do satélite artificial.

Existem missões que são caracterizadas por órbitas excêntricas, inclinadas e síncronas, que incluem satélites responsáveis por investigar a magnetosfera solar, lançados nos anos 90. Outro exemplo são os satélites da série Molniya utilizados pela antiga União Soviética para comunicação, lançados a partir de 1965, possuindo órbitas excêntricas e com período de 12 horas.

O modelo desenvolvido neste trabalho para o potencial gravitacional é devido a Osório (1973). Para o estudo da ressonância, são feitas mudanças de variáveis, utilizando as variáveis Delaunay e Delaunay modificadas, com a finalidade de se ter uma Hamiltoniana cujos termos periódicos tenham apenas termos ressonantes. O método adotado é o mesmo que em Lima Jr. (1998) e Grosso (1989).

O presente texto está dividido em oito capítulos, começando pela Introdução. O capítulo seguinte é a Revisão Bibliográfica trazendo discussões teóricas importantes de diferentes autores sobre os principais temas tratados neste texto: potencial gravitacional, satélite síncrono e

ressonância.

O Capítulo 3 denomina-se "Objetos Orbitando a Terra", e mostra o cenário recente dos objetos em órbita, incluindo satélites artificiais e detritos espaciais, através de histogramas dos elementos orbitais. Este capítulo também mostra resultados com todos os objetos catalogados, indicando quais objetos estariam em movimento orbital ressonante, através de um critério estabelecido para o período ressonante.

O Capítulo 4 denomina-se "Hamiltoniana Reduzida", e apresenta como o potencial gravitacional é desenvolvido a partir das transformações canônicas obtendo a Hamiltoniana reduzida, assim como o sistema dinâmico associado e suas equações de movimento.

Os Capítulos 5 e 6 denominam-se "Ressonância 2:1" e "Ressonância 14:1", respectivamente. Nestes capítulos, a Hamiltoniana Reduzida é utilizada para o estudo dos sistemas simplificado e completo, que envolvem os movimentos orbitais ressonantes de satélites artificiais nas regiões de órbitas médias e baixas da Terra.

O Capítulo 7 é denominado "Objetos Catalogados" e estuda a Ressonância 14:1 diretamente de dados reais de objetos na região de órbitas baixas da Terra.

O oitavo e último capítulo traz uma visão geral do que é feito no trabalho, com análises e discussões do que ainda pode ser feito na continuação do trabalho no estudo das ressonâncias 2:1 e 14:1 apresentadas no presente texto.

Capítulo 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A busca pelo conhecimento a respeito dos diversos tipos de objetos que habitam o Universo, e de suas órbitas, sempre foi instigante e desafiador para a Humanidade. Desde o lançamento do primeiro satélite artificial no século passado, o homem tenta entender cada vez melhor a natureza do ambiente espacial propiciando missões mais longas e seguras para sondas e satélites artificiais. Ter um bom entendimento das forças perturbadoras que atuam em um determinado objeto em movimento ao redor da Terra, pode minimizar erros de propagação de órbita e proporcionar maior confiabilidade na determinação da posição do objeto. Nesses estudos percebeu-se que efeitos de ressonâncias, causadas pela comensurabilidade entre o movimento médio de satélites artificiais e detritos espaciais em relação ao movimento de rotação da Terra, afetam uma parcela significativa das órbitas dos objetos e podem provocar movimentos inesperados e riscos para missões que desconsiderem este efeito. Regiões de movimento regular e irregular podem ser definidas e o comportamento em torno da ressonância exata melhor entendido.

2.1 Levantamento Bibliográfico

2.1.1 Potencial Gravitacional

A idéia de uma Terra não totalmente rígida e, portanto, sujeita a deformações elásticas quando sob a influência de forças perturbadoras, tem cerca de um século e meio (GEMAEL, 1999).

Como a Terra não é perfeitamente rígida, ela se deforma sob a ação do potencial que é criado devido a atração gravitacional da Lua e do Sol, alterando assim a distribuição de massa

do planeta (KUGA et al., 2000). A nova distribuição de massa gera um novo potencial no espaço diferente do original. Inicialmente assume-se que a massa do terceiro corpo, Sol ou Lua, esteja concentrada no seu centro de massa, com o objetivo de modelar o efeito da presença desse terceiro corpo no potencial da Terra, em outras palavras significa que é desprezado o tamanho do corpo perturbador tendo em vista a grande distância do mesmo em relação à Terra.

De maneira geral, a integração analítica de um sistema dinâmico não-conservativo e não-linear é impraticável, a não ser que se consiga uma solução aproximada do problema com uma certa precisão. Nos métodos analíticos, a função densidade atmosférica é representada por uma função que garanta integrabilidade analítica ao sistema dinâmico. A função gravitacional da Terra, por exemplo, é truncada de forma a evitar longas expressões analíticas. Desta forma, em alguns métodos utilizados, apenas alguns harmônicos zonais da função gravitacional da Terra são considerados e as perturbações provocadas por outros corpos celestes são ignoradas (KUGA et. al., 2000).

No trabalho de Kaula (1966), a equação de Laplace é escrita em coordenadas esféricas, obtendo a função potencial gravitacional da Terra. Nesse mesmo trabalho são mostradas as funções excentricidade e inclinação que são utilizadas no Capítulo 4 do presente estudo na determinação do sistema dinâmico para cada ângulo ressonante.

Um dos objetivos no presente trabalho é obter uma Hamiltoniana reduzida, a partir do potencial gravitacional, que só contenha termos seculares e termos ressonantes para se estudar a ressonância 2:1, que relaciona o movimento médio do satélite artificial com o movimento de rotação da Terra. A ressonância 14:1 também é estudada na região de órbitas baixas da Terra. Tanto satélites artificiais como detritos espaciais são considerados nos estudos envolvendo a ressonância 14:1, devido a grande quantidade de detritos espaciais nesta região e pelo risco aos satélites artificiais que este fato pode representar.

2.1.2 Ressonância

Define-se ressonância, de forma simplificada, como uma situação em que a razão entre os movimentos médios de dois ou mais corpos tem uma razão próxima de números inteiros.

Um dos trabalhos muito referenciados a respeito de ressonância se deve a Garfinkel (1966). Nestes trabalhos, ele trata do problema de ressonância ideal, com o desenvolvimento da Hamiltoniana utilizando variáveis canônicas.

Nos últimos anos, muitas pesquisas envolvendo perturbações em satélites artificiais, estão

incluindo análises a respeito de ressonância, o que mostra a importância do conhecimento desse efeito. Vilhena de Moraes et. al. (2007) analisa o efeito da ressonância nos elementos orbitais do satélite a partir da comensurabilidade do seu movimento médio com a rotação da Terra, através de ressonâncias do tipo 2:1 e 15:1.

A influência das ressonâncias no movimento translacional e rotacional de satélites artificiais foi estudada em vários aspectos tais como:

- a) comensurabilidade do movimento orbital do satélite com o movimento rotacional do planeta;
- b) considerando a inclinação crítica;
- c) considerando a pressão de radiação solar;
- d) incluindo órbitas sol-síncronas;
- e) considerando perturbações lunisulares;
- f) considerando o acoplamento spin-órbita;
- g) considerando frequências relacionadas com o movimento rotacional.

É comum também o estudo de ressonâncias entre satélites naturais e planetas extra-solares. Em Zhou et. al. (2004), é analisada uma ressonância de movimento médio em co-rotação apsidal entre dois planetas extra-solares que se movimentam ao redor do sistema 55 Cancri. É um movimento orbital considerado complexo devido a diferentes tipos de estabilidade e que envolve altas excentricidades.

Em trabalhos como Sampaio e Vilhena de Moraes (2008, 2012b) e Sampaio (2009), estuda-se a influência da maré terrestre e oceânica nas órbitas de satélites artificiais, observando o aparecimento de fatores ressonantes que podem ser analisados. Existem termos envolvendo a longitude do nodo ascendente que são analisados nesses trabalhos pela ressonância de co-rotação nodal.

Muitos objetos que orbitam a Terra são influenciados por alguma ressonância, o que mostra a importância deste efeito na propagação de suas órbitas.

As ressonâncias 2:1 e 14:1 são investigadas no presente trabalho, considerando a comensurabilidade entre o movimento médio do objeto e o movimento de rotação da Terra.

2.1.3 Ressonância 2:1

A influência da ressonância 2:1 nas órbitas de satélites artificiais tem sido estudada por vários autores (VILHENA DE MORAES et al., 1995; LIMA JR., 1998; NETO, 2006; FORMIGA;

VILHENA DE MORAES, 2009; SAMPAIO et al., 2012a; SAMPAIO et al. 2012d). No trabalho de Vilhena de Moraes et al. (1995), uma teoria analítica é apresentada para resolver as equações de movimento que incluem as perturbações devidas ao campo gravitacional terrestre, à atração gravitacional do Sol e da Lua, à pressão de radiação solar e à perturbação adicional referente à comensurabilidade 2:1 do período orbital do satélite com o período de rotação da Terra. É apresentada uma solução analítica baseada no método de Lie-Hori e essa solução é comparada com uma integração numérica das equações.

No trabalho de Lima Jr. (1998), são consideradas algumas hipóteses ao geopotencial implicando no estudo isolado de cada ângulo crítico, associado a duas integrais primeiras que são encontradas tornando o sistema de equações integrável. No estudo do espaço de fase percebe-se que a região de libração é deslocada com o aumento da inclinação.

O estudo do satélite de 12 horas envolvendo o desenvolvimento do geopotencial e de três ângulos ressonantes críticos, com a ajuda de simulações numéricas e método analítico é mostrado em Neto (2006). Neste trabalho também são utilizadas ferramentas da dinâmica não-linear como o expoente de Lyapunov e da seção de Poincaré em complementação à análise analítica do problema. De maneira geral, conclui-se que a região do espaço de fase de condições iniciais com aspecto caótico torna-se maior acompanhada pelo aumento da excentricidade e/ou inclinação.

Em Formiga et. al. (2009), o comportamento do movimento de um satélite artificial na vizinhança da ressonância 2:1 é analisado. O espaço de fase do sistema resultante é estudado considerando um ângulo ressonante fixo. No mesmo trabalho é mostrado como é o comportamento do semi-eixo maior variando com o tempo para diferentes condições iniciais na vizinhança da ressonância estudada.

No presente trabalho a ressonância 2:1 é estudada com o objetivo de se entender melhor o que acontece na região da ressonância exata e próximo dela. Um dos interesses é estudar a largura da separatriz que distingue a região de libração e de circulação no espaço de fase. O estudo é feito inicialmente para o sistema dinâmico simplificado e posteriormente para o sistema dinâmico completo, considerando diferentes condições iniciais para o problema.

2.1.4 Ressonância 14:1

Em trabalhos recentes como Sampaio et. al. (2011), Sampaio et. al. (2012c) e Sampaio et. al. (2012e), a ressonância 14:1 tem sido estudada usando os dados de objetos catalogados.

A partir do estudo de movimentos orbitais ressonantes, com dados de todos os objetos catalogados, percebe-se que grande parte dos mesmos se concentra na região de órbitas baixas da Terra. Na região LEO, a maior parte encontra-se na vizinhança da ressonância 14:1. Em Sampaio et. al. (2011), um desenvolvimento analítico é feito, escrevendo a Hamiltoniana reduzida em termos do harmônico zonal J_2 e do harmônico tesseral J_{1414} , que é definido considerando os coeficientes $l = 14$ e $m = 14$ no harmônico J_{lm} . O sistema final é resolvido por integração numérica e regiões de circulação e libração são estudadas.

Em Sampaio et. al. (2012c), os dados de objetos catalogados são usados para selecionar alguns objetos que apresentam longos períodos ressonantes em suas órbitas. Na análise do comportamento no tempo dos períodos ressonantes percebem-se grandes variações influenciadas, principalmente, por diferentes ângulos ressonantes que compõem os movimentos orbitais.

Movimentos irregulares de detritos espaciais na ressonância 14:1 são estudados por Sampaio et. al. (2012e). Nesse trabalho, o comportamento temporal dos elementos orbitais, período ressonante e ângulos ressonantes são considerados. Usando os dados reais dos objetos, todos os ângulos ressonantes que fazem parte das órbitas dos satélites artificiais e detritos espaciais estudados podem ser identificados e estudados separadamente, podendo conhecer melhor a composição de seus movimentos.

2.1.5 Detritos Espaciais

Os objetos orbitando a Terra são classificados, basicamente, em órbita baixa da Terra, média e geoestacionária, mais conhecidas pelas siglas em inglês, LEO, MEO e GEO, respectivamente. A maior parte dos objetos são encontrados na região LEO porque esta região tem uma grande quantidade de detritos espaciais. De acordo a Osiander e Ostdiek (2009) e Ikeda et al. (2008), existem aproximadamente 10000 objetos catalogados ao redor da Terra, e pode-se verificar a distribuição dos objetos como: 27% de espaçonaves em operação, 22% de espaçonaves antigas, 41% de fragmentos diversos, 17% de corpos rochosos e cerca de 13% de objetos relacionados a missões. Os objetos não catalogados maiores do que 1 cm são estimados em algum valor entre 50000 e 600000 (OSIANDER; OSTDIEK, 2009; IKEDA et al., 2008).

O aumento de detritos espaciais na região LEO, ao longo dos anos, tem estimulado o desenvolvimento de pesquisas que envolvam a diminuição destes objetos. Estes aspectos englobam a observação, proteção à espaçonave e em evitar colisões (CHANGYIN et al., 2010; NISHIDA et al., 2009). Os detritos espaciais são compostos de alumínio de estruturas de espaçonaves,

alumina de escapamento de motores de foguetes sólidos, zinco e óxidos de titânio de revestimentos para controle térmico; e o tamanho destes detritos varia de muitos metros a uma fração de um micrômetro em diâmetro (MECHISHNEK, 1995).

Neste trabalho, objetos em movimentos orbitais ressonantes na região LEO são investigados. Os resultados mostram objetos em ressonância profunda, ou seja, com períodos ressonantes longos, e possíveis movimentos irregulares pela presença de diferentes ângulos ressonantes descrevendo a dinâmica orbital destes objetos.

2.1.6 Objetos Catalogados

Desde o lançamento do satélite US Transit-4A, em 29 de Junho de 1961, os detritos espaciais têm contribuído em demasia com a população de objetos espaciais observáveis. Minutos depois do lançamento do satélite US Transit-4A, parte deste explodiu distribuindo 625 kg de massa em cerca de 298 fragmentos. Além disso, na época deste lançamento, outros 115 objetos já haviam sido lançados ao espaço desde o Sputnik-1 em 1957 (KLINKRAD, 2006).

Atualmente, a quantidade de lançamentos já é muito superior, assim como de detritos espaciais gerados por novas explosões, colisões, satélites inoperáveis, entre outras causas. De forma que, a discussão a respeito da atenuação de detritos espaciais orbitando a Terra está em crescente interesse (KLINKRAD, 2006).

Os movimentos orbitais dos objetos catalogados podem ser analisados usando o grupo de elementos 2-linhas do NORAD (North American Defense), mais conhecido por TLE (Two-Line Element) (SPACE TRACK, 2011, 2012). Os dados TLE são compostos por sete parâmetros e época. Estes dados podem ser comparados, por exemplo, com o modelo do propagador de órbita alocado no satélite artificial. Um estudo similar é feito para o satélite brasileiro CBERS-1 em cooperação com a China. Neste caso, perturbações orbitais devidas ao geopotencial, arrasto atmosférico, pressão de radiação solar, efeitos gravitacionais do Sol e da Lua são considerados na integração numérica da órbita e os resultados são comparados com os dados TLE (KUGA, 2002; ORLANDO et al. 1997; HOOTS; ROEHRICH, 1980)

No presente trabalho, os dados catalogados são utilizados na investigação de objetos ressonantes, incluindo satélites artificiais e detritos espaciais.

Capítulo 3

OBJETOS ORBITANDO A TERRA

Neste capítulo, dados de objetos espaciais catalogados são analisados, através dos histogramas dos elementos orbitais e de resultados computacionais que apontam os objetos, incluindo satélites artificiais e detritos espaciais, em possíveis movimentos orbitais ressonantes.

O grande crescimento na quantidade de detritos espaciais motivou o acompanhamento diário de diversos objetos em órbita, além de satélites artificiais em operação. Dentre estes objetos estão restos de satélites e corpos rochosos, que podem causar riscos a missões espaciais e também à população devido ao processo de reentrada que esses corpos podem sofrer na região de órbitas baixas da Terra.

Nas Figs. 3.1, 3.2 e 3.3 são apresentados os histogramas do semi-eixo maior, inclinação e excentricidade dos objetos catalogados em movimento orbital ao redor da Terra. Os dados usados são extraídos do website Space Track (SPACE TRACK, 2011, 2012), e datam de fevereiro de 2011.

Analisando o histograma do semi-eixo maior, Fig. 3.1, é possível observar a grande influência de ressonâncias sobre os objetos. Na região de órbitas baixas, onde se encontram a maior parte dos objetos, as ressonâncias 14:1 e 15:1 aglomeram grande parte destes. As ressonâncias exatas 14:1 e 15:1 estão em torno dos valores de semi-eixo maior de 7258,69 *km* e 6932,38 *km*, respectivamente. A região MEO, concentra uma quantidade importante de satélites artificiais, dentre eles estão os satélites GPS, Cosmos, Molnya e Meridian, sendo que a ressonância 2:1 abrange esta região. A ressonância 2:1 exata está em torno do valor de semi-eixo maior de 26561,75 *km*. Na região GEO, a ressonância exata 1:1 está em torno do valor de semi-eixo maior de 42164,16 *km* e reúne muitos objetos na vizinhança dessa ressonância.

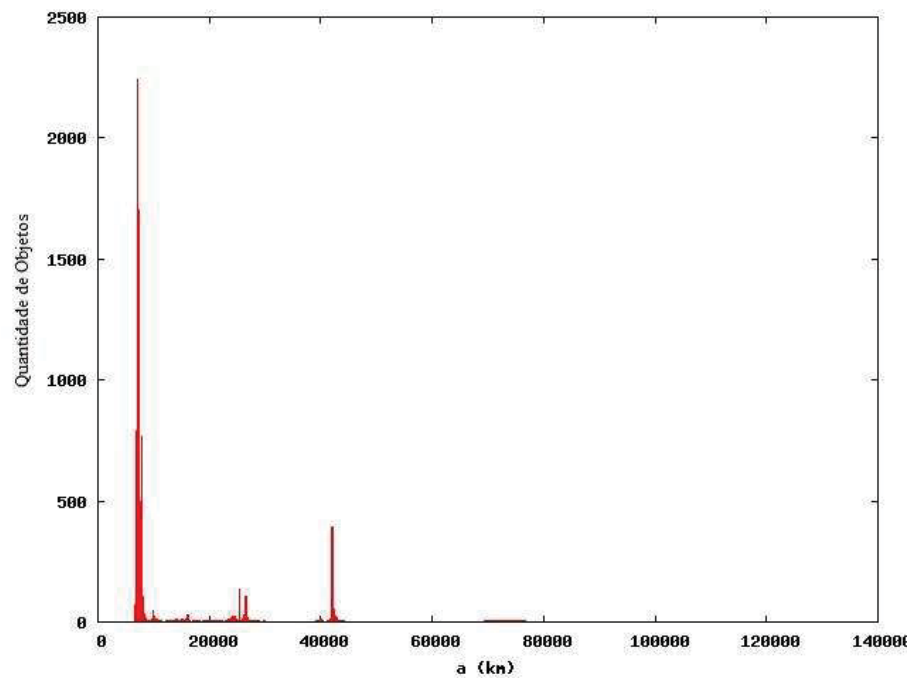


Figura 3.1: Histograma do semi-eixo maior dos objetos catalogados.

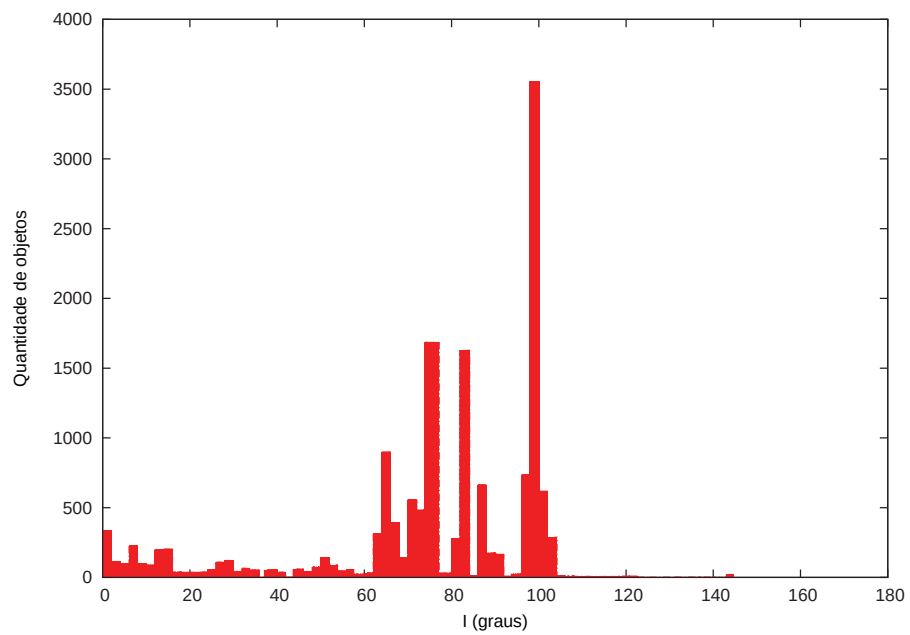


Figura 3.2: Histograma da inclinação dos objetos catalogados.

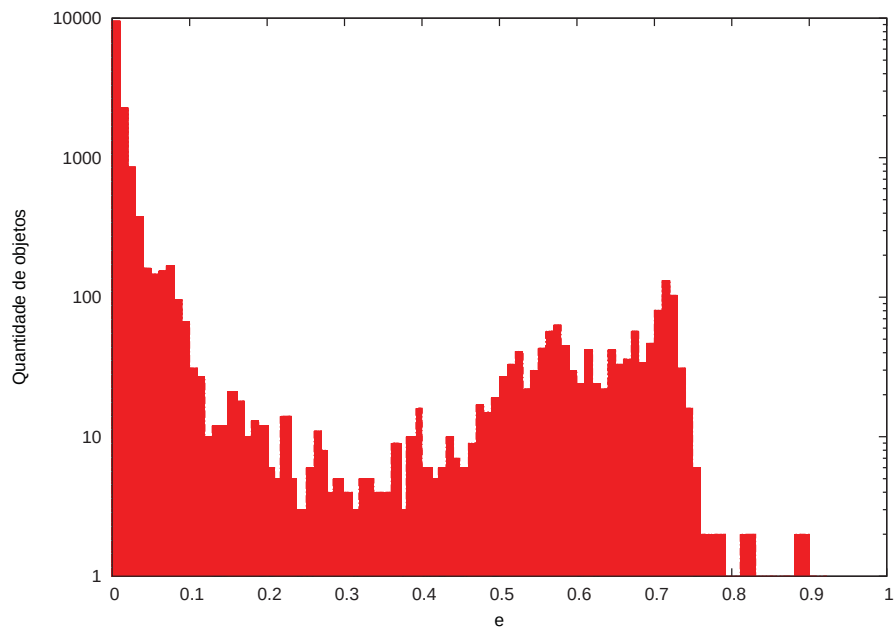


Figura 3.3: Histograma da excentricidade dos objetos catalogados.

Observando o histograma da inclinação, Fig. 3.2, pode-se dizer que grande parte dos objetos possuem inclinações que variam de 60° a 100° , incluindo o movimento prógrado e retrógrado. A Fig. 3.3 mostra que a maioria dos objetos que orbitam a Terra possuem excentricidades menores que 0,1 e considerando as órbitas com excentricidades maiores que 0,1, os movimentos orbitais mais frequentes são entre 0,5 e 0,7 no valor da excentricidade.

3.1 Objetos em Movimento Orbital Ressonante

Nesta seção, os dados TLE são usados para verificar os objetos em movimentos orbitais ressonantes (SPACE TRACK, 2011, 2012).

A atual distribuição de objetos pelo valor do movimento médio n indica a comensurabilidade entre as frequências do movimento médio do objeto e o movimento de rotação da Terra. Veja o histograma do movimento médio na Fig. 3.4.

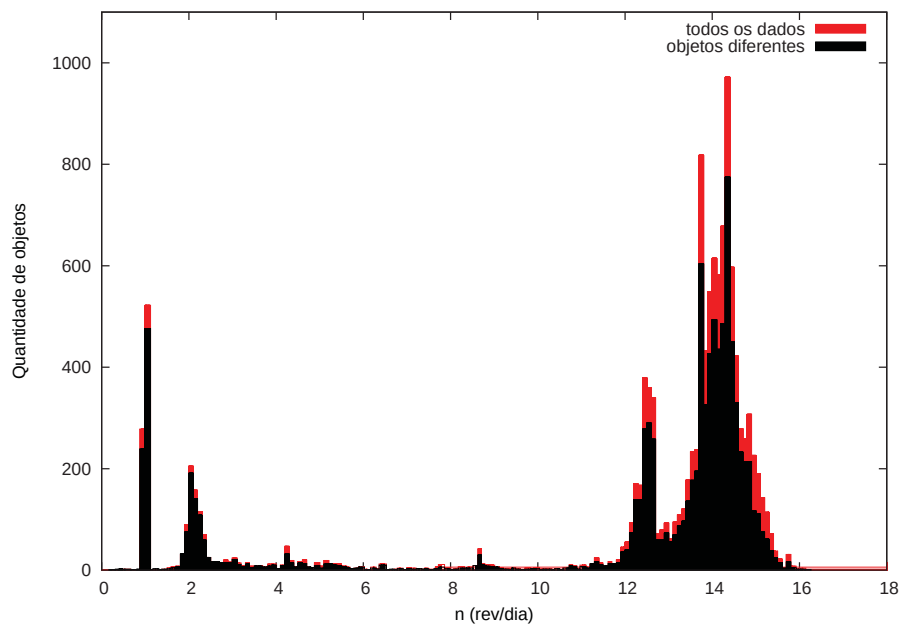


Figura 3.4: Histograma do movimento médio dos objetos catalogados.

Na Fig. 3.4 é verificado que a maioria dos objetos está na região $13 \leq n \text{ (rev/dia)} \leq 15$. Verifica-se na figura 3.4, que a diferença entre a quantidade de dados (em vermelho) e a quantidade de objetos (em preto), também chamado de objetos diferentes, deve-se ao fato de que no arquivo TLE, encontram-se cerca de 15000 dados de objetos, mas no mesmo arquivo pode ser encontrado mais de um dado observacional para um mesmo objeto. De maneira que, existem cerca de 10000 objetos catalogados, alguns objetos são observados apenas uma vez por dia e outros são observados duas vezes por dia, o que faz com que tenham mais dados observacionais do que a quantidade de objetos.

Para estudar os objetos ressonantes usando os dados TLE, um critério foi estabelecido no período ressonante $Pres$, pela condição $Pres > 300$ dias. Observe que o período ressonante está relacionado com um determinado ângulo ressonante que pode influenciar o movimento orbital de um determinado satélite artificial, por exemplo. A medida do $Pres$ ajuda a entender a influência de cada ângulo ressonante em uma órbita e este conhecimento pode ajudar a

aprimorar uma formulação analítica mais ampla do problema. Percebe-se a necessidade em estabelecer um valor para o período ressonante, de forma a ter acesso aos principais ângulos ressonantes que podem influenciar uma dada órbita. $Pres$ é obtido pela relação,

$$Pres = \frac{2\pi}{\dot{\phi}_{lmpq}}. \quad (3.1)$$

O ângulo ϕ_{lmpq} é escrito na forma (OSORIO, 1973; LIMA JR., 1998)

$$\phi_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta) = qM + (l - 2p)\omega + m(\Omega - \theta - \lambda_{lm}) + (l - m)\frac{\pi}{2}. \quad (3.2)$$

onde a , e , I , Ω , ω , M são os elementos keplerianos clássicos: a é o semi-eixo maior, e é a excentricidade, I é a inclinação do plano da órbita com o equador, Ω é a longitude do nodo ascendente, ω é o argumento do pericentro e M é a anomalia média, respectivamente; θ é o tempo sideral de Greenwich e λ_{lm} é a correspondente longitude de referência ao longo do equador. Dessa forma, $\dot{\phi}_{lmpq}$ é definido como

$$\dot{\phi}_{lmpq} = q\dot{M} + (l - 2p)\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}). \quad (3.3)$$

Substituindo $k = l - 2p$ em (3.3),

$$\dot{\phi}_{kmq} = q\dot{M} + k\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}). \quad (3.4)$$

Os termos $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$ e $\dot{M}$ podem ser escritos como (HOOTS; ROEHRICH, 1980; GOLEBIWSKA et al., 2010).

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{4}J_2n_o\left(\frac{r_e}{a_o}\right)^2\frac{(1 - 5\cos^2(I))}{(1 - e^2)^2}.$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}J_2n_o\left(\frac{r_e}{a_o}\right)^2\frac{(\cos(I))}{(1 - e^2)^2}.$$

$$\dot{M} = n_o - \frac{3}{4}J_2n_o\left(\frac{r_e}{a_o}\right)^2\frac{(1 - 3\cos^2(I))}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (3.5)$$

r_e é o raio equatorial médio da Terra, $r_e=6378.140 \text{ km}$, J_2 é o segundo harmônico zonal, $J_2 = 1,0826 \times 10^{-3}$, com a_o e n_o definidos pelas Eqs. (3.9) e (3.10).

O termo $\dot{\theta}$ em rad/dia é

$$\dot{\theta} \approx 1.00273790926 \times 2\pi. \quad (3.6)$$

Com o objetivo de usar elementos orbitais compatíveis com a maneira pela qual os elementos 2-linhas foram gerados, algumas correções são feitas no movimento médio dos dados TLE, usando o modelo SGP, descrito em Hoots e Roehrich (HOOTS; ROEHRICH, 1980). Considerando como n_1 o movimento médio dos elementos 2-linhas, o semi-eixo maior a_1 é calculado (HOOTS; ROEHRICH, 1980).

$$a_1 = \left(\frac{\sqrt{\mu}}{n_1} \right)^{2/3} \quad (3.7)$$

onde μ é o parâmetro gravitacional da Terra, $\mu=3.986009 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$. Usando a_1 , o parâmetro δ_1 é calculado pela Eq. (3.8) (HOOTS; ROEHRICH, 1980):

$$\delta_1 = \frac{3}{4} J_2 \frac{r_e^2}{a_1^2} \frac{(3\cos^2(I) - 1)}{(1 - e^2)^{3/2}}. \quad (3.8)$$

Agora, o semi-eixo maior a_o usado nos cálculos do período ressonante é definido usando δ_1 da Eq. (3.8) (HOOTS; ROEHRICH, 1980):

$$a_o = a_1 \left[1 - \frac{1}{3}\delta_1 - \delta_1^2 - \frac{134}{81}\delta_1^3 \right]. \quad (3.9)$$

E o novo movimento médio n_o usado nos cálculos é encontrado considerando o semi-eixo maior corrigido a_o

$$n_o = \sqrt{\frac{\mu}{a_o^3}}. \quad (3.10)$$

As correções para o movimento médio e para o semi-eixo maior são feitas com o intuito de compensar possíveis alterações nas medidas devido a atmosfera terrestre (HOOTS; ROEHRICH, 1980).

Agora, usando as correções mostradas anteriormente, um arquivo TLE é estudado com o propósito de investigar os objetos em movimento orbital ressonante (definido pela comensurabilidade entre o movimento médio do objeto e a velocidade angular de rotação da Terra).

O arquivo analisado é "*alldata_2011_045*" do website Space Track (SPACE TRACK, 2011, 2012), e corresponde a fevereiro de 2011. Na Tab. 3.1, o número de dados disponíveis no arquivo e o número de objetos diferentes são especificados.

Tabela 3.1: Dados TLE de objetos orbitando a Terra.

Arquivo	Número de dados	Número de objetos diferentes
<i>alldata_2011_045</i>	15360	9745

Os resultados identificam objetos com período ressonante maior do que 300 dias. Vários valores dos coeficientes, k , q e m são considerados na Eq. (3.2) produzindo ângulos ressonantes diferentes a serem analisados pela Eq. (3.1). Veja a Tab. 3.2 mostrando detalhes sobre os resultados.

Tabela 3.2: Resultados: objetos em movimentos orbitais ressonantes

Número de dados	Número de objetos diferentes	coeficiente k	coeficiente q	coeficiente m
3180	1276	$-50 \leq k \leq 50$	$-5 \leq q \leq 5$	$1 \leq m \leq 50$

Observe que a Tab. 3.2 mostra apenas os dados satisfazendo o critério estabelecido $P_{res} > 300$ dias. Os resultados mostram os ângulos ressonantes e os períodos ressonantes os quais compõem os movimentos orbitais dos objetos ressonantes.

As Figuras. 3.5 e 3.6 mostram o semi-eixo maior versus excentricidade e semi-eixo maior versus inclinação, respectivamente, usando apenas os dados dos objetos relacionados na Tab. 3.2.

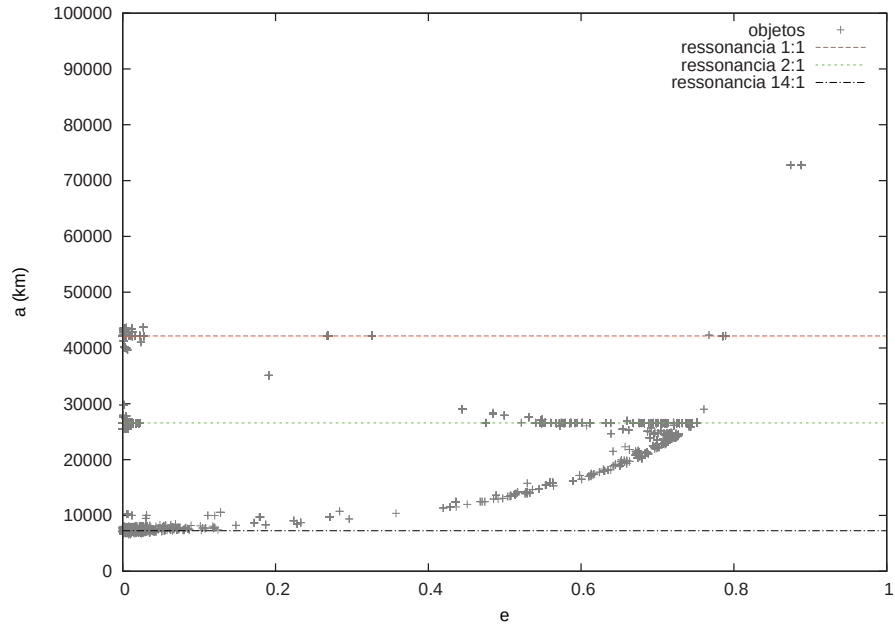


Figura 3.5: Semi-eixo maior versus excentricidade de objetos ressonantes satisfazendo a condição do período ressonante maior do que 300 dias.

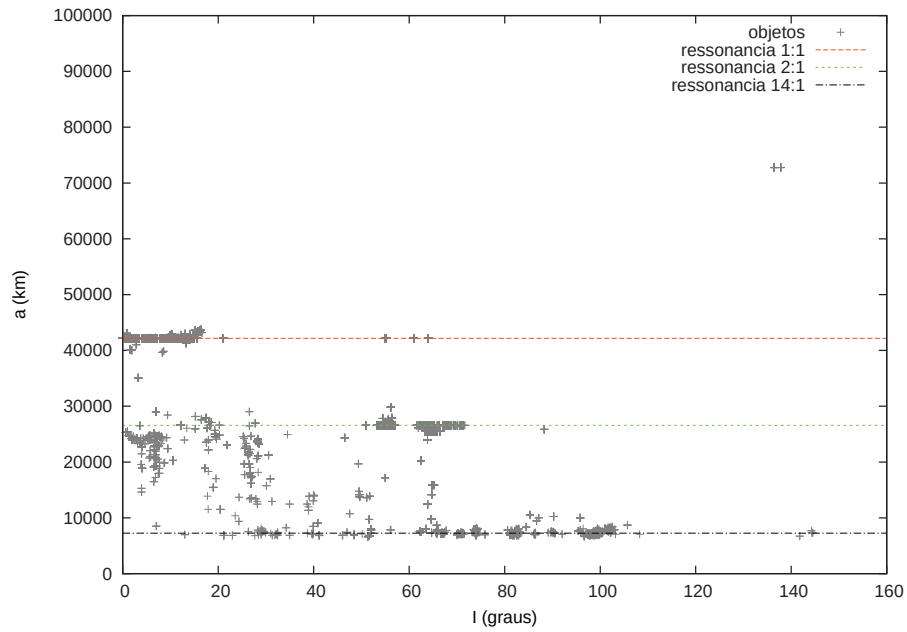


Figura 3.6: Semi-eixo maior versus inclinação de objetos ressonantes satisfazendo a condição do período ressonante maior do que 300 dias.

Comparando o número de objetos satisfazendo a condição de $Pres > 300$ dias em duas regiões diferentes, $a < 15000km$ e $a \geq 15000km$, é verificado que cerca de 62,37% dos objetos ressonantes possuem $a < 15000km$. Veja esta informação nas Tabs. 3.3 e 3.4.

Tabela 3.3: Número de objetos satisfazendo a condição $\text{Pres} > 300$ dias

$a < 15000km$	$15000km \leq a < 40000km$	$a \geq 40000km$
1276	331	439

Tabela 3.4: Porcentagem de objetos satisfazendo a condição $\text{Pres} > 300$ dias

$a < 15000km$	$15000km \leq a < 40000km$	$a \geq 40000km$
62,37 %	16,18 %	21,46 %

Estes estudos permitem mostrar a real influência do efeito de ressonância na dinâmica orbital dos satélites artificiais e detritos espaciais. O número de objetos ressonantes em comparação com o número total de objetos nos dados TLE mostra a grande influência da comensurabilidade entre o movimento médio do objeto e a velocidade angular da Terra nestas órbitas. Por este motivo, um estudo mais detalhado sobre o período ressonante e os ângulos ressonantes é necessário.

No próximo capítulo, sucessivas transformações canônicas são aplicadas ao geopotencial, com o objetivo de escrever uma Hamiltoniana reduzida com termos seculares e ressonantes.

Capítulo 4

HAMILTONIANA REDUZIDA

Para o estudo da ressonância são feitas mudanças de variáveis no potencial gravitacional, utilizando as variáveis de Delaunay e de Delaunay modificadas, com a finalidade de se obter uma Hamiltoniana com apenas termos seculares e termos ressonantes.

A expressão do potencial gravitacional utilizada no presente trabalho é apresentada por Osório (1973):

$$V = \frac{\mu}{2a} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{a} \left(\frac{r_e}{a} \right)^l J_{lm} F_{lm}(I) H_q^{-(l+1)(l-2p)}(e) \cos(\phi_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta)) \quad (4.1)$$

sendo que,

$$\phi_{lmpq} = qM + (l - 2p)\omega + m(\Omega - \theta - \lambda_{lm}) + (l - m)\frac{\pi}{2}, \quad (4.2)$$

onde $F_{lmp}(I)$ é a função da inclinação de Kaula (1966), $H_q^{-(l+1)(l-2p)}(e)$ os coeficientes de Hansen, r_e é o raio equatorial da Terra e θ é o tempo sideral de Greenwich.

O potencial gravitacional definido pela equação (4.1) é válido para órbitas com $0 < e < 1$.

As expressões que aparecem no estudo de satélites artificiais usam as constantes J_{lm} e λ_{lm} (ao invés dos coeficientes S_{lm} e C_{lm}) e são definidas como

$$J_{lm} = \sqrt{S_{lm}^2 + C_{lm}^2},$$

$$\lambda_{lm} = \frac{1}{m} \arctg \frac{S_{lm}}{C_{lm}}, \quad (4.3)$$

sendo que J_{lm} é o coeficiente harmônico esférico de grau l e ordem m e λ_{lm} é a longitude de referência correspondente ao longo do equador.

Cada classe de harmônico J_{lm} representa um tipo de assimetria da figura gravitacional da Terra. A combinação de uma infinidade destes termos compõe a forma geral terrestre.

Para o estudo da ressonância é adotado o mesmo método apresentado em Lima Jr (1998) e Grosso (1989).

4.1 Equações Canônicas do Movimento

Nesta seção, sucessivas transformações de variáveis são feitas no potencial gravitacional dado pela equação (4.1), com o objetivo de escrever a Hamiltoniana Reduzida.

Inicialmente é feita uma mudança de variáveis dos elementos Keplerianos para as variáveis Delaunay (LIMA JR, 1998; GROSSO, 1989):

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} & G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} & H &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos(I) \\ \ell &= M & g &= \omega & h &= \Omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

Observe que com essas mudanças tem-se:

$$F_{lmp}(I) \rightarrow F_{lmp}(L, G, H), \quad H_q^{-(l+1), (l-2p)}(e) \rightarrow H_q^{-(l+1), (l-2p)}(L, G)$$

$$\cos(\phi_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \theta)) \rightarrow \cos(\phi_{lmpq}(\ell, g, h, \theta)),$$

Fazendo as substituições (4.4) no potencial (4.1), obtém-se a seguinte Hamiltoniana

$$\hat{F} = \frac{\mu^2}{2L^2} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_{lm}, \quad (4.5)$$

com o potencial perturbador R_{lm} dado por,

$$R_{lm} = \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} B_{lmpq}(L, G, H) \cos(\phi_{lmpq}(\ell, g, h, \theta)), \quad (4.6)$$

e o termo B_{lmpq} é escrito na forma,

$$B_{lmpq} = \frac{\mu^2}{L^2} \left(\frac{\mu a_e}{L^2} \right)^l J_{lm} F_{lmp}(L, G, H) G_{lpq}(L, G). \quad (4.7)$$

A Hamiltoniana R_{lm} , dada pela Eq. (4.6), então depende dos seguintes elementos

$$R_{lm} = R_{lm}(L, G, H, \Theta, \ell, g, h, \theta). \quad (4.8)$$

e a partir de R_{lm} , as seguintes equações diferenciais na forma canônica podem ser escritas

$$\frac{d(L, G, H)}{dt} = \frac{\partial R_{lm}}{\partial(\ell, g, h)}, \quad \frac{d(\ell, g, h)}{dt} = -\frac{\partial R_{lm}}{\partial(L, G, H)}. \quad (4.9)$$

Observando que $\theta = \omega_e t$, com ω_e sendo a velocidade angular da Terra e t o tempo, introduz-se a nova variável Θ conjugada a $\theta(t)$. Um novo termo $\omega_e \Theta$ é introduzido de forma a estender o espaço de fase. A Hamiltonian estendida $\hat{H}$ é dada por

$$\hat{H} = \hat{F} - \omega_e \Theta. \quad (4.10)$$

e o sistema canônico de equações diferenciais correspondente a (4.10) é

$$\frac{d(L, G, H, \Theta)}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial(\ell, g, h, \theta)}, \quad \frac{d(\ell, g, h, \theta)}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial(L, G, H, \Theta)}. \quad (4.11)$$

No estudo de órbitas ressonantes é conveniente utilizar um novo conjunto de variáveis canônicas. Considere a transformação canônica de variáveis definida pelas seguintes relações (NETO, 2006; OSÓRIO, 1973),

$$X = L \quad Y = G - L \quad Z = H - G \quad \Theta = \Theta,$$

$$x = \ell + g + h \quad y = g + h \quad z = h \quad \theta = \theta, \quad (4.12)$$

onde $X, Y, Z, \Theta, x, y, z, \theta$, são as variáveis Delaunay modificadas.

Com as modificações feitas pela Eq. (4.12), tem-se o novo termo $\hat{F}$

$$\hat{F} = \frac{\mu^2}{2L^2} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_{lm} \rightarrow \frac{\mu^2}{2X^2} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l R'_{lm} \quad (4.13)$$

e a nova relação com a Hamiltoniana estendida,

$$\hat{H}' = \frac{\mu^2}{2X^2} - \omega_e \Theta + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l R'_{lm}. \quad (4.14)$$

Da equação (4.6) tem-se agora que

$$R'_{lm} = \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} B'_{lmpq}(X, Y, Z) \cos(\phi'_{lmpq}(x, y, z, \theta)). \quad (4.15)$$

Considerando que ocorreram as transformações,

$$B_{lmpq}(L, G, H) \rightarrow B'_{lmpq}(X, Y, Z), \quad \phi_{lmpq}(\ell, g, h, \theta) \rightarrow \phi'_{lmpq}(x, y, z, \theta). \quad (4.16)$$

Mas de (4.7),

$$B'_{lmpq}(X, Y, Z) = \frac{\mu^{l+2}}{X^{2l+2}} a_e^l J_{lm} F_{lmp}(X, Y, Z) G_{lpq}(X, Y) \quad (4.17)$$

e, da equação para $\phi_{lmpq}(\ell, g, h, \theta)$,

$$\phi_{lmpq}(\ell, g, h, \theta) = q\ell + (l - 2p)g + m(h - \theta - \lambda_{lm}) + (l - m)\frac{\pi}{2}, \quad (4.18)$$

tem-se a partir das transformações (4.12) que

$$\phi'_{lmpq} = q(x - y) + (l - 2p)(y - z) + m(z - \theta - \lambda_{lm}) + (l - m)\frac{\pi}{2}. \quad (4.19)$$

De forma que a Eq. (4.19), pode ser reescrita de forma mais conveniente,

$$\phi'_{lmpq} = (qx - m\theta) + (l - 2p - q)y + (m - l + 2p)z - m\lambda_{lm} + (l - m)\frac{\pi}{2}. \quad (4.20)$$

Desta maneira, o sistema canônico gerado pela Hamiltoniana $\hat{H}' = \hat{H}'(X, Y, Z, \Theta, x, y, z, \theta)$ que descreve o movimento de um satélite artificial, sujeito a perturbações, é dado pelas equações diferenciais:

$$\frac{d(X, Y, Z, \Theta)}{dt} = \frac{\partial \hat{H}'}{\partial (x, y, z, \theta)}, \quad \frac{d(x, y, z, \theta)}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}'}{\partial (X, Y, Z, \Theta)}. \quad (4.21)$$

Nas próximas seções, os termos seculares e periódicos que compõem a Hamiltoniana $\hat{H}'$ são descritos.

4.2 Termos Seculares

Os termos seculares são obtidos fazendo as seguintes considerações no argumento ϕ'_{lmpq} :

$$q = m = 0, \quad l = 2p. \quad (4.22)$$

Então,

$$\cos(\phi'_{lmpq}) = \cos\left(l\frac{\pi}{2}\right),$$

e, consequentemente,

$$\cos\left(l\frac{\pi}{2}\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p.$$

4.3 Termos Periódicos

Os termos periódicos envolvem as variáveis: ω, Ω, M e θ , ou nas variáveis de Delaunay modificadas x, y, z e θ .

Os termos periódicos se dividem em termos de longo período, envolvendo as variáveis ω, Ω , termos de curto período, englobando as variáveis θ, M e termos ressonantes, que são os termos onde existe alguma comensurabilidade entre duas ou mais frequências que compõem o argumento.

Na próxima seção, a comensurabilidade entre o movimento médio do satélite artificial e a velocidade de rotação da Terra pode ser melhor entendida e aplicada à Hamiltoniana $\hat{H}'$.

4.4 Análise da Ressonância

Para a análise da ressonância considere a comensurabilidade entre a velocidade de rotação da Terra ω_e e o movimento médio $n = \frac{\mu^2}{X^3}$ do satélite artificial. Esta comensurabilidade pode ser escrita como

$$qn - m\omega_e \cong 0. \quad (4.23)$$

considerando q e m como inteiros. A razão q/m definindo a comensurabilidade será denotada por α . Quando a comensurabilidade ocorre, pequenos divisores aparecem na integração das equações de movimento (LANE, 1988). Estes termos periódicos na Hamiltoniana $\hat{H}'$ com frequências $qn - m\omega_e$ são chamados de termos ressonantes. Os outros termos periódicos são chamados de termos de curto e longo período.

Os termos de curto e longo período podem ser eliminados da Hamiltoniana $\hat{H}'$ aplicando um procedimento de média (SANCKEZ et al., 2009; ROY, 1988),

$$\langle \hat{H}' \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{H}' d\varsigma_{sp} d\varsigma_{lp} \quad (4.24)$$

As variáveis ς_{sp} e ς_{lp} representam os termos de curto e longo períodos, respectivamente, a serem eliminados da Hamiltoniana $\hat{H}'$.

Os termos de longo período têm a combinação no argumento ϕ_{lmpq} o qual envolve apenas o argumento do pericentro ω e a longitude do nodo ascendente Ω , ou, em termos das novas variáveis, $y - z$ e z , respectivamente. Das Eqs. 4.14 e 4.15 tem-se que estes termos são representados nas novas variáveis por

$$\hat{H}'_{lp} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} B'_{lmpq}(X, Y, Z) \cos((l-2p)(y-z) + mz). \quad (4.25)$$

Os termos de curto período são identificados pela presença do tempo sideral θ e da anomalia média M no argumento ϕ_{lmpq} . Desta forma, das Eqs. 4.14 e 4.15, o termo $\hat{H}'_{sp}$ nas novas variáveis é dado por

$$\hat{H}'_{sp} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{+\infty} B'_{lmpq}(X, Y, Z) \cos(q(x-y) - m\theta + \zeta_p). \quad (4.26)$$

O termo ζ_p , representa as outras variáveis no argumento ϕ_{lmpq} , incluindo o argumento do peri-centro ω e a longitude do nodo ascendente Ω .

A Hamiltoniana reduzida é encontrada considerando somente os termos seculares e ressonantes de (4.14), sendo desprezados os termos de curto e de longo período

$$\begin{aligned} \hat{H}_r = & \frac{\mu^2}{2X^2} - \omega_e \Theta + \sum_{j=1}^{\infty} B'_{2j,0,j,0}(X, Y, Z) \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z) \cos(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)). \end{aligned} \quad (4.27)$$

De (4.27) tem-se os termos não perturbado e secular, $\frac{\mu^2}{2X^2}$ e $\sum_{j=1}^{\infty} B'_{2j,0,j,0}(X, Y, Z)$, respectivamente.

O sistema dinâmico gerado pela Hamiltoniana reduzida (4.27) é:

$$\frac{d(X, Y, Z, \Theta)}{dt} = \frac{\partial \hat{H}_r}{\partial(x, y, z, \theta)}, \quad \frac{d(x, y, z, \theta)}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial(X, Y, Z, \Theta)}. \quad (4.28)$$

No estudo de uma determinada ressonância, as outras comensurabilidades que podem aparecer são tratadas como termos de curto período e são eliminados de $\hat{H}_r = \hat{H}_r(X, Y, Z, \Theta, x, y, z, \theta)$.

As equações de movimento obtidas do sistema dinâmico (4.28) são dadas explicitamente por:

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l m B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z) \sin(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)), \quad (4.29)$$

$$\frac{dY}{dt} = - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l (l - 2p - m\alpha) B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z) \text{sen}(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)), \quad (4.30)$$

$$\frac{dZ}{dt} = - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l (m - l + 2p) B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z) \text{sen}(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)), \quad (4.31)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l m B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z) \text{sen}(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)), \quad (4.32)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu^2}{X^3} + v_x - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l \frac{\partial B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z)}{\partial X} \cos(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)), \quad (4.33)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l \frac{\partial B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z)}{\partial Y} \cos(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)), \quad (4.34)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l \frac{\partial B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z)}{\partial Z} \cos(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)), \quad (4.35)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_e. \quad (4.36)$$

Os termos v_x , v_y e v_z representam as frequências relacionadas à parte secular da função perturbadora e são dados pelas expressões a seguir:

$$v_x = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial B'_{2j,0,j,0}(X, Y, Z)}{\partial X}, \quad (4.37)$$

$$v_y = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial B'_{2j,0,j,0}(X, Y, Z)}{\partial Y}, \quad (4.38)$$

$$v_z = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial B'_{2j,0,j,0}(X, Y, Z)}{\partial Z}. \quad (4.39)$$

Nas próximas seções, o sistema é reduzido em um grau de liberdade e a Hamiltoniana Ressonante é determinada.

4.5 Integral Primeira do Sistema Reduzido

Considerando as três primeiras equações (4.29), (4.30) e (4.31) é calculada uma integral primeira.

Reescrevendo a Eq. (4.29) tem-se que

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dX}{dt} = - \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l m B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z) \text{sen}(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)). \quad (4.40)$$

E somando as equações (4.30) e (4.31), encontra-se

$$\frac{dY}{dt} + \frac{dZ}{dt} = (\alpha - 1) \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l m B'_{lmp(\alpha m)}(X, Y, Z) \text{sen}(\phi'_{lmp(\alpha m)}(x, y, z, \theta)). \quad (4.41)$$

Substituindo (4.40) em (4.41); resulta

$$\frac{dY}{dt} + \frac{dZ}{dt} = -(\alpha - 1) \frac{1}{\alpha} \frac{dX}{dt}. \quad (4.42)$$

Reescrevendo a Eq. (4.42),

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt} + \frac{dZ}{dt} = 0. \quad (4.43)$$

A partir de (4.43), obtém-se a integral primeira,

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) X + Y + Z = C_1, \quad (4.44)$$

onde C_1 é constante de integração.

Da integral primeira (4.44) pode-se definir uma transformação de Mathieu que permitirá fazer uma nova mudança de variáveis

$$(X, Y, Z, \Theta, x, y, z, \theta) \rightarrow (X_1, Y_1, Z_1, \Theta_1, x_1, y_1, z_1, \theta_1)$$

Considere a transformação de Mathieu (GROSSO, 1989; LIMA JR, 1998).

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad Z_1 = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) X + Y + Z, \quad \Theta_1 = \Theta$$

$$x_1 = x - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) z, \quad y_1 = y - z, \quad z_1 = z, \quad \theta_1 = \theta. \quad (4.45)$$

O sistema é então reduzido em um grau de liberdade, pois $Z_1 = C_1$ é uma constante de movimento e a coordenada z_1 é ignorável.

4.6 Hamiltoniana Ressonante

A Hamiltoniana ressonante é encontrada substituindo na Hamiltoniana reduzida as variáveis $(X_1, Y_1, Z_1, \Theta_1, x_1, y_1, z_1, \theta_1)$,

$$\begin{aligned} H'_{RS} = & \frac{\mu^2}{2X_1^2} - \omega_e \Theta_1 + \sum_{j=1}^{\infty} B'_{1,2j,0,j,0}(X_1, Y_1, Z_1) \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=2}^l \sum_{p=0}^l B'_{1,lm p,(\alpha m)}(X_1, Y_1, Z_1) \cos(\phi'_{1,lm p(\alpha m)}(x_1, y_1, z_1, \theta_1)). \end{aligned} \quad (4.46)$$

A equação (4.46) possui todas as frequências relacionadas à α . Observe que a expressão (4.27) para H'_R é invariante com a transformação canônica (4.45).

O ângulo $\phi'_{1,lm p(\alpha m)}$ é dado por

$$\phi'_{1,lm p(\alpha m)} = m(\alpha x_1 - \theta_1) + (l - 2p - \alpha m)y_1 - \phi'_{1,lm p(\alpha m)0}, \quad (4.47)$$

com

$$\phi'_{1,lm p(\alpha m)0} = m\lambda_{lm} - (l - m)\frac{\pi}{2}. \quad (4.48)$$

Da expressão (4.46) tem-se que os termos seculares e os coeficientes dos co-senos ressonantes são dados pelos termos:

$$B'_{1,2j,0,j,0}(X_1, Y_1, Z_1) \quad e \quad B'_{1,lm p(\alpha m)}(X_1, Y_1, Z_1) \quad (4.49)$$

Fazendo $Z_1 = C_1$, obtém-se:

$$B'_{1,lm(\alpha m)}(X_1, Y_1, C_1) = \frac{\mu^{l+2}}{X^{2l+2}} r_e^l J_{lm} F_{1,lm}(X_1, Y_1, C_1) H_{\alpha m}^{-(l+1), (l-2p)}(X_1, Y_1),$$

$$B'_{1,2j,0,j,0}(X_1, Y_1, C_1) = \frac{\mu^{2j+2}}{X^{4j+2}} r_e^{2j} J_{2j,0} F_{1,2j,0,j}(X_1, Y_1, C_1) H_0^{-(2j+1), (2j)}(X_1, Y_1).$$

Agora, cada ângulo ressonante crítico pode ser estudado separadamente, no caso de movimento orbital regular, ou os ângulos ressonantes podem ser estudados juntos, no caso de movimentos irregulares.

No próximo capítulo, a ressonância 2:1 é estudada a partir da Hamiltoniana Ressonante definida nesta seção.

Capítulo 5

RESSONÂNCIA 2:1

A ressonância estudada neste capítulo é a 2:1, ou seja, enquanto o satélite artificial completa 2 revoluções ao redor da Terra, esta completa 1 movimento de rotação. Tem-se, então, que $\alpha = \frac{q}{m} = \frac{1}{2}$.

O parâmetro $\alpha = \frac{1}{2}$ pode ser inserido na Eq. (4.47), e $\dot{\phi}'_{1,lp(\alpha m)}$ pode ser escrito em termos de l , m e p ,

$$\dot{\phi}'_{1,lp(\alpha m)} = m \left(\frac{1}{2} \frac{dx_1}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} \right) + \left(l - 2p - \frac{m}{2} \right) \frac{dy_1}{dt}. \quad (5.1)$$

De forma que a frequência ressonante crítica que será estudada terá seu efeito mais pronunciado se $\dot{\phi}'_{1,lp(\alpha m)} \approx 0$.

Para que se tenha apenas uma frequência ressonante crítica é preciso fixar os coeficientes α , m e $(l - 2p - m\alpha)$ das variáveis x_1 , y_1 e θ_1 .

Existem 3 frequências relacionadas com os tesserais J_{l2} .

Nas próximas seções, novas considerações e transformações de variáveis serão feitas na Hamiltoniana Ressonante, com o objetivo de encontrar o sistema dinâmico final que será usado na integração numérica.

5.1 Sistema Ressonante Crítico

Nesta seção, a Hamiltoniana H'_{CR} é apresentada, sendo determinada a partir da Hamiltoniana (4.46), fazendo $Z_1 = C_1$ e desprezando a coordenada z_1 , com os coeficientes $k = l - 2p$ e m fixos. O subscrito CR denota o sistema crítico.

A Hamiltoniana H'_{CR} é dada por

$$\begin{aligned}
H'_{CR} = & \frac{\mu^2}{2X_1^2} - \omega_e \Theta_1 + \sum_{j=1}^{\infty} B'_{1,2j,0,j,0}(X_1, Y_1, C_1) \\
& + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l B'_{1,lp,(\alpha m)}(X_1, Y_1, C_1) \cos(\phi'_{1,lp,(\alpha m)}(x_1, y_1, \theta_1)). \quad (5.2)
\end{aligned}$$

Da relação $k = l - 2p$, o coeficiente l pode ser reescrito na forma $l = k + 2p$. A Eq. (5.3) mostra a Eq. (5.2) reescrita, simplificando os dois somatórios em um, pois $S \leq p < \infty$ e S é o mínimo valor assumido por p .

$$\begin{aligned}
H'_{CR} = & \frac{\mu^2}{2X_1^2} - \omega_e \Theta_1 + \sum_{j=1}^{\infty} B'_{1,2j,0,j,0}(X_1, Y_1, C_1) \\
& + \sum_{p=S}^{\infty} B'_{1,lp,(\alpha m)}(X_1, Y_1, C_1) \cos(\phi'_{1,lp,(\alpha m)}(x_1, y_1, \theta_1)). \quad (5.3)
\end{aligned}$$

A expressão (5.3) apresenta termos seculares com os harmônicos zonais pares e termos ressonantes com a mesma frequência ressonante crítica.

O sistema dinâmico gerado pela Hamiltoniana (5.3) é expresso por

$$\frac{d(X_1, Y_1, \Theta_1)}{dt} = \frac{\partial H'_{CR}}{\partial(x_1, y_1, \theta_1)}, \quad \frac{d(x_1, y_1, \theta_1)}{dt} = -\frac{\partial H'_{CR}}{\partial(X_1, Y_1, \Theta_1)}, \quad (5.4)$$

com $H'_{CR} = H'_{CR}(X_1, Y_1, \Theta_1, x_1, y_1, \theta_1)$.

5.2 Integral Primeira do Sistema Dinâmico Crítico

Com o objetivo de simplificar o sistema de equações a ser estudado, mais uma integral primeira é calculada. Para isso, considere as seguintes equações calculadas do sistema dinâmico (5.4)

$$\frac{dX_1}{dt} = -m\alpha \sum_{p=S}^{\infty} B'_{1,(2p+k)mp,(\alpha m)}(X_1, Y_1, C_1) \sin(\phi'_{1,(2p+k)mp,(\alpha m)}(x_1, y_1, \theta_1)), \quad (5.5)$$

$$\frac{dY_1}{dt} = -(k - m\alpha) \sum_{p=S}^{\infty} B'_{1,(2p+k)mp,(\alpha m)}(X_1, Y_1, C_1) \sin(\phi'_{1,(2p+k)mp,(\alpha m)}(x_1, y_1, \theta_1)). \quad (5.6)$$

Multiplicando (5.5) por $(k - m\alpha)$ e combinando com (5.6), obtém-se

$$(k - m\alpha)\frac{dX_1}{dt} - m\alpha\frac{dY_1}{dt} = 0. \quad (5.7)$$

A partir de (5.7) escreve-se a integral primeira

$$(k - m\alpha)X_1 - m\alpha Y_1 = C_2. \quad (5.8)$$

onde C_2 é constante de integração.

Um novo conjunto de variáveis é definido através de uma nova transformação de Mathieu:

$$(X_1, Y_1, \Theta_1, x_1, y_1, \theta_1) \rightarrow (X_2, Y_2, \Theta_2, x_2, y_2, \theta_2)$$

As novas variáveis canônicas envolvendo a equação (5.8) são dadas por (GROSSO, 1989; NETO et al., 2005)

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1, & Y_2 &= (k - m\alpha)X_1 - m\alpha Y_1, & \Theta_2 &= \Theta_1, \\ x_2 &= x_1 + \left(\frac{k - m\alpha}{m\alpha}\right)y_1, & y_2 &= -\frac{1}{m\alpha}y_1, & \theta_2 &= \theta_1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

A partir da transformação (5.9) pode-se obter a Hamiltoniana final H_F .

5.3 O Sistema Dinâmico Final

A Hamiltoniana final H_F é determinada introduzindo a transformação de variáveis (5.9) na Hamiltoniana definida por (5.3),

$$\begin{aligned} H_F &= \frac{\mu^2}{2X_2^2} - \omega_e \Theta_2 + \sum_{j=1}^{\infty} B'_{2,2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2) \\ &\quad + \sum_{p=S}^{\infty} B'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(x_2, \theta_2)). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Na equação (5.10) o termo secular é dado por $\sum_{j=1}^{\infty} B'_{2,2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2)$ e os termos ressonantes por $\sum_{p=S}^{\infty} B'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)})$.

A redução em um grau de liberdade do sistema, devido a criação da constante de integração C_2 , fez com que $Y_2 = C_2$, de forma que y_2 pode ser desprezada.

E a equação para o ângulo $\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(x_2, \theta_2)$ agora é dada por:

$$\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(x_2, \theta_2) = \phi'_2 - \phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m),0} \quad (5.11)$$

$$\phi'_2(x_2, \theta_2) = m(\alpha x_2 - \theta_2), \quad \phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha),0} = m\lambda_{(2p+k)m} - (2p + k - m)\frac{\pi}{2}.$$

sendo que λ_{lm} é dado em termos dos coeficientes S_{lm} e C_{lm} pela equação

$$\lambda_{lm} = \frac{1}{m} \arctg \frac{S_{lm}}{C_{lm}}. \quad (5.12)$$

A Hamiltoniana H_F dada pela equação (5.10), gera então o sistema dinâmico,

$$\frac{d(X_2, \Theta_2)}{dt} = \frac{\partial H_F}{\partial(x_2, \theta_2)}, \quad \frac{d(x_2, \theta_2)}{dt} = -\frac{\partial H_F}{\partial(X_2, \Theta_2)}. \quad (5.13)$$

A Eq. (5.11) pode ser escrita na forma

$$\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(x_2, \theta_2) = m(\alpha x_2 - \theta_2) - m\lambda_{(2p+k)m} + (2p + k - m)\frac{\pi}{2}. \quad (5.14)$$

De ϕ'_2 especificado na Eq. (5.11), pode-se escrever a seguinte expressão

$$\frac{d\phi'_2}{dt} = m\alpha \frac{dx_2}{dt} - m \frac{d\theta_2}{dt} \quad e \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_e. \quad (5.15)$$

De (5.15), encontra-se

$$\frac{d\phi'_2}{dt} = m\alpha \frac{dx_2}{dt} - m\omega_e. \quad (5.16)$$

De (5.13), tem-se as equações:

$$\frac{dX_2}{dt} = -m\alpha \sum_{p=S}^{\infty} B'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2) \text{sen}(\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}), \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_2^3} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial B'_{2,2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \\ & - \sum_{p=S}^{\infty} \frac{\partial B'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(x_2, \theta_2)). \end{aligned} \quad (5.18)$$

A partir das Eqs. (5.16) e (5.18) é gerada a nova equação:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi'_2}{dt} = & m\alpha \frac{\mu^2}{X_2^3} - m\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial B'_{2,2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \\ & - m\alpha \sum_{p=S}^{\infty} \frac{\partial B'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(x_2, \theta_2)) \\ & - m\omega_e. \end{aligned} \quad (5.19)$$

As Eqs. (5.17) e (5.19) representam as equações de movimento para uma órbita com excentricidade entre $0 < e < 1$, em uma ressonância de comensurabilidade α .

Para efeito de simplificação, nas equações de movimento, será considerado que $\phi'_2 = \phi_2$, $B'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)} = B_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}$, $B'_{2,2j,0,j,0} = B_{2,2j,0,j,0}$ e $\phi'_{2,(2p+k)mp(\alpha m)} = \phi_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}$

5.4 Integrais Primeiras C_1 e C_2

Para que seja possível integrar o sistema de equações gerado pelo sistema dinâmico final (Eqs. 5.17 e 5.19), é necessário escrever as integrais primeiras C_1 e C_2 em termos das condições iniciais do problema.

A partir da equação para C_1 ,

$$C_1 = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) X + Y + Z,$$

e, considerando as variáveis Delaunay modificadas, dadas na Eq. (4.12), e introduzindo as variáveis Delaunay, Eq. (4.4), a expressão para C_1 em termos dos elementos orbitais clássicos será dada por

$$C_1 = -\frac{\sqrt{\mu a}}{\alpha} + \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos(I),$$

ou, ainda,

$$C_1 = \sqrt{\mu a} \left[\sqrt{1 - e^2} \cos(I) - \frac{1}{\alpha} \right]. \quad (5.20)$$

A Eq. (5.20) é escrita em termos de μ , de α que determina a ressonância considerada, nesse caso $\alpha = 1/2$, e dos valores iniciais do semi-eixo maior, $a = a(0)$, da excentricidade, $e = e(0)$, e da inclinação, $I = I(0)$. Dessa forma, a Eq. (5.20) pode ser escrita como:

$$C_1 = \sqrt{\mu a(0)} \left[\sqrt{1 - e(0)^2} \cos(I(0)) - 2 \right]. \quad (5.21)$$

C_2 também deve ser escrita em termos das condições iniciais do problema. A partir da Eq. (5.8),

$$C_2 = (k - m\alpha)X_1 - m\alpha Y_1.$$

Considerando as variáveis canônicas, dadas na Eq. (4.45), as variáveis Delaunay modificadas, Eq. (4.12) e as variáveis Delaunay, Eq. (4.4), a expressão para C_2 em termos dos elementos orbitais clássicos será dada por

$$C_2 = (k - m\alpha)\sqrt{\mu a} - m\alpha(\sqrt{\mu a(1 - e^2)} - \sqrt{\mu a}). \quad (5.22)$$

Simplificando a Eq. (5.22) e considerando $a = a(0)$, $e = e(0)$ e $I = I(0)$, tem-se então que

$$C_2 = \sqrt{\mu a(0)}(k - m\alpha\sqrt{1 - e(0)^2}). \quad (5.23)$$

Analisando as Eqs. para C_1 , (5.21), e para C_2 , (5.23), verifica-se que na equação para C_1 , o tipo de ressonância é inserida a partir do termo α , não aparecendo o coeficiente k , enquanto que C_2 depende do valor de k , e portanto seu valor tem dependência com a frequência ressonante analisada dentro da ressonância 2:1, pois $k = l - 2p$.

5.5 Excentricidade e Inclinação como Funções de X_2 , C_1 e C_2

Nesta seção, a excentricidade e a inclinação são escritas em termos das novas variáveis X_2 , C_1 e C_2 .

5.5.0.1 Excentricidade da Órbita $e = e(X_2, C_1, C_2)$

A partir da variável Delaunay,

$$G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)},$$

chega-se a expressão

$$e = \sqrt{\frac{\mu a - G^2}{\mu a}}. \quad (5.24)$$

Considerando a variável Delaunay, $L = \sqrt{\mu a}$, introduzindo as variáveis Delaunay modificadas, Eq. 4.12, e, verificando que G pode ser escrito como $G = Y + X$, a Eq. (5.24) é escrita como

$$e = \sqrt{\frac{X^2 - (Y + X)^2}{X^2}}.$$

Considerando a transformação de variáveis, Eq. (4.45), e, da transformação de Mathieu, dada na Eq. (5.9), chega-se a,

$$e = \sqrt{\frac{X_2^2 - \left(\frac{(k-m\alpha)X_2 - Y_2}{m\alpha} + X_2 \right)^2}{X_2^2}}.$$

Simplificando a expressão para e , e lembrando que $Y_2 = C_2$, obtém-se

$$e = \frac{1}{(m\alpha)X_2} \sqrt{((k+m\alpha)X_2 - C_2)((m\alpha - k)X_2 + C_2)}. \quad (5.25)$$

5.5.0.2 Inclinação da órbita $I = I(X_2, C_1, C_2)$

A partir das variáveis Delaunay, Eq. (4.4), encontra-se que

$$\cos(I) = \frac{H}{G}. \quad (5.26)$$

Considerando a transformação definida pelas variáveis Delaunay modificadas, Eq. (4.12), tem-se que

$$G = Y + X, \quad H = Z + Y + X.$$

Introduzindo estas expressões na Eq. (5.26), resulta

$$\cos(I) = \frac{Z + Y + X}{Y + X}. \quad (5.27)$$

Considerando a transformação de variáveis, Eq. (4.45), e fazendo $Z_1 = C_1$, a expressão para $\cos(I)$ resulta em

$$\cos(I) = \frac{1}{Y_1 + X_1} \left[\frac{X_1}{\alpha} + C_1 \right].$$

A partir da transformação canônica dada pela Eq. (5.9), e, fazendo $Y_2 = C_2$, chega-se a

$$\cos(I) = \frac{mX_2 + m\alpha C_1}{kX_2 - C_2},$$

Como $k = l - 2p$, então

$$\cos(I) = \frac{mX_2 + m\alpha C_1}{(l - 2p)X_2 - C_2}. \quad (5.28)$$

5.6 Definindo o Sistema de Equações para cada Frequência Ressonante

Nesta seção, os termos seculares e ressonantes que fazem parte de cada sistema dinâmico produzido pelos diferentes ângulos ressonantes, $\phi_{2,2201}$, $\phi_{2,2211}$ e $\phi_{2,2221}$, são descritos.

5.6.1 Ângulo Ressonante $\phi_{2,2201}$

O ângulo ressonante crítico $\phi_{2,2201}$ é determinado pelos coeficientes $l = 2$, $m = 2$, $p = 0$ e $q = 1$, sendo que a ressonância estudada é determinada por $\alpha = q/m$.

5.6.1.1 Termo secular

O termo secular é dado por

$$B_{2,2010} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{20} F_{201}(I(X_2, C_1, C_2)) G_{210}(e(X_2, C_2)). \quad (5.29)$$

O termo $F_{201}(I)$ é a função inclinação de Kaula (1966) e $G_{210}(e)$ é expresso em série de potências de e .

A Função $F_{201}(I)$ é dada por

$$F_{201}(I) = \frac{3}{4} \sin^2(I) - \frac{1}{2}. \quad (5.30)$$

Substituindo a Eq. (5.28), pode-se escrever $F_{201}(I) = F_{201}(I(X_2, C_1, C_2))$, ou seja,

$$F_{201}(I(X_2, C_1, C_2)) = -\frac{1}{4} \left[3 \left(\frac{2X_2 + C_1}{2X_2 - C_2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (5.31)$$

A função excentricidade $G_{210}(e)$ é dada por

$$G_{210}(e) = (1 - e^2)^{-3/2}. \quad (5.32)$$

Substituindo a Eq. (5.25), pode-se escrever $G_{210}(e) = G_{210}(e(X_2, C_2))$, ou seja,

$$G_{210}(e(X_2, C_2)) \approx 1 + \frac{3}{2X_2^2} [(3X_2 - C_2)(-X_2 + C_2)], \quad (5.33)$$

considerando a aproximação até a segunda ordem na excentricidade,

$$(1 - e^2)^{-3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}e^2. \quad (5.34)$$

Desta forma, a partir das Eqs. (5.31) e (5.33), tem-se que a parte secular é expressa por

$$\begin{aligned} B_{2,2010} &= \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{20} \left[-\frac{3}{4} \frac{(2X_2 + C_1)^2}{(2X_2 - C_2)^2} + \frac{1}{4} \right] \\ &\times \left(1 + \frac{3}{2} \frac{[(3X_2 - C_2)(-X_2 + C_2)]}{X_2^2} \right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

5.6.1.2 Termo ressonante

O termo ressonante é dado por

$$B_{2,2201} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{22} F_{220}(I(X_2, C_1, C_2)) G_{201}(e(X_2, C_2)). \quad (5.36)$$

O termo $F_{220}(I)$ é a função inclinação e $G_{201}(e)$ a função excentricidade que podem ser encontrados em Kaula (1966).

A função $F_{220}(I)$ é dada por

$$F_{220}(I) = \frac{3}{4}(1 + \cos(I))^2. \quad (5.37)$$

Substituindo a Eq. (5.28), pode-se escrever $F_{220}(I) = F_{220}(I(X_2, C_1, C_2))$, ou seja,

$$F_{220}(I(X_2, C_1, C_2)) = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2X_2 + C_1}{2X_2 - C_2} \right) \right]^2. \quad (5.38)$$

A função excentricidade $G_{201}(e)$ é dada até a segunda ordem na excentricidade por:

$$G_{201}(e) = \frac{7}{2}e. \quad (5.39)$$

Substituindo a Eq. (5.25), pode-se escrever $G_{201}(e) = G_{201}(e(X_2, C_2))$, ou seja,

$$G_{201}(e) = \frac{7}{2X_2} [3X_2 - C_2]^{1/2} [-X_2 + C_2]^{1/2}. \quad (5.40)$$

Desta forma, a partir das Eqs. (5.38), (5.40) e (5.36) tem-se que a parte ressonante é expressa por

$$B_{2,2201} = \frac{21}{8} \frac{1}{X_2^7} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 - C_2} \right]^2 [\sqrt{3X_2 - C_2} \sqrt{-X_2 + C_2}]. \quad (5.41)$$

5.6.1.3 Sistema Dinâmico gerado pelo ângulo ressonante $\phi_{2,2201}$

O sistema dinâmico devido ao ângulo $\phi_{2,2201}$ é escrito a partir das Eqs. (5.17) e (5.19) resultando nas equações de movimento:

$$\frac{dX_2}{dt} = -B_{2,2010}(X_2, C_1, C_2) \sin(\phi_{2,2201}), \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_2^3} - \frac{\partial B_{2,2010}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \\ & - \frac{\partial B_{2,2201}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi_{2,2201}) - 2\omega_e. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Observa-se, a partir da expressão (5.11), que $\phi_{2,2201} = \phi_2 - 2\lambda_{22}$.

Agora, substituindo as Eqs. (5.35) e (5.41) em (5.42) e (5.43), encontra-se o sistema de equações:

$$\frac{dX_2}{dt} = -\frac{21}{8} \frac{1}{X_2^7} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 - C_2} \right]^2 \left[\sqrt{3X_2 - C_2} \sqrt{-X_2 + C_2} \right] \text{sen}(\phi_{2,2201}), \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_2^3} + 6\mu^4 r_e^2 J_{20} \left[-\frac{3}{4} \frac{(2X_2 + C_1)^2}{(2X_2 - C_2)^2} + \frac{1}{4} \right] \\ & \times \left(1 + \frac{3}{2} \frac{[(3X_2 - C_2)(-X_2 + C_2)]}{X_2^2} \right) X_2^{-7} \\ & - \mu^4 r_e^2 J_{20} \left[-3 \frac{2X_2 + C_1}{(2X_2 - C_2)^2} + 3 \frac{(2X_2 + C_1)^2}{(2X_2 - C_2)^3} \right] \\ & \times \left(1 + 3/2 \frac{[(3X_2 - C_2)(-X_2 + C_2)]}{X_2^2} \right) X_2^{-6} \\ & - \mu^4 r_e^2 J_{20} \left[-\frac{3}{4} \frac{(2X_2 + C_1)^2}{(2X_2 - C_2)^2} + \frac{1}{4} \right] \\ & \times \left(\frac{3}{2} \frac{[-6X_2 + 4C_2]}{X_2^2} - 3 \frac{[(3X_2 - C_2)(-X_2 + C_2)]}{X_2^3} \right) X_2^{-6} \\ & - \left(-\frac{147}{8} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 - C_2} \right]^2 \left[\sqrt{3X_2 - C_2} \sqrt{-X_2 + C_2} \right] X_2^{-8} \right. \\ & + \frac{21}{4} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 - C_2} \right] \left[\sqrt{3X_2 - C_2} \sqrt{-X_2 + C_2} \right] [2(2X_2 - C_2)]^{-1} \\ & - 2 \frac{2X_2 + C_1}{(2X_2 - C_2)^2} X_2^{-7} + \frac{21}{8} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 - C_2} \right]^2 \\ & \left. \times \left[\frac{3}{2} \frac{\sqrt{-X_2 + C_2}}{\sqrt{3X_2 - C_2}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3X_2 - C_2}}{\sqrt{-X_2 + C_2}} \right] X_2^{-7} \right) \cos(\phi_{2,2201}) - 2\omega_e. \end{aligned} \quad (5.45)$$

O sistema de equações (5.44) e (5.45) é integrado numericamente para estudar as órbitas de movimento regular que são influenciadas pelo ângulo ressonante $\phi_{2,2201}$.

5.6.2 Ângulo Ressonante $\phi_{2,2211}$

O ângulo ressonante crítico $\phi_{2,2211}$ é determinado pelos coeficientes $l = 2$, $m = 2$, $p = 1$ e $q = 1$, de forma que o k agora é -2, pela relação $k = l - 2p$.

5.6.2.1 Termo secular

O termo secular é dado por

$$B_{2,2010} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{20} F_{201}(I(X_2, C_1, C_2)) G_{210}(e(X_2, C_2)). \quad (5.46)$$

O termo $F_{201}(I)$ é a função inclinação e $G_{210}(e)$ a função excentricidade que podem ser encontrados em Kaula (1966).

O termo $F_{201}(I)$ já foi mostrado anteriormente, e a expressão para $F_{201}(I(X_2, C_1, C_2))$ é escrita com a ajuda da Eq. (5.28), obtendo:

$$F_{201}(I(X_2, C_1, C_2)) = -\frac{1}{4} \left[3 \left(\frac{-2X_2 - C_1}{C_2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (5.47)$$

A função excentricidade $G_{210}(e(X_2, C_2))$ é escrita com a ajuda da Eq. (5.25), obtendo

$$G_{210}(e(X_2, C_2)) \approx 1 + \frac{3}{2X_2^2} [(X_2 - C_2)(X_2 + C_2)]. \quad (5.48)$$

Desta forma, a partir das Eqs. (5.47) e (5.48), tem-se a parte secular

$$\begin{aligned} B_{2,2010} &= \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{20} \left[-\frac{1}{4} \left[3 \left(\frac{-2X_2 - C_1}{C_2} \right)^2 - 1 \right] \right] \\ &\times \left(1 + \frac{3}{2X_2^2} [(X_2 - C_2)(X_2 + C_2)] \right). \end{aligned} \quad (5.49)$$

5.6.2.2 Termo ressonante

O termo ressonante é dado por

$$B_{2,2211} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{22} F_{221}(I(X_2, C_1, C_2)) G_{211}(e(X_2, C_2)). \quad (5.50)$$

O termo $F_{221}(I)$ é a função inclinação e $G_{211}(e)$ a função excentricidade que podem ser encontrados em Kaula (1966).

A função $F_{221}(I)$ é dada por

$$F_{221}(I) = \frac{3}{2} (1 - \cos(I)^2). \quad (5.51)$$

Substituindo a Eq. (5.28), pode-se escrever $F_{221}(I) = F_{221}(I(X_2, C_1, C_2))$, ou seja,

$$F_{221}(I(X_2, C_1, C_2)) = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{-2X_2 - C_1}{C_2} \right)^2 \right]. \quad (5.52)$$

A função excentricidade $G_{211}(e)$ é dada até a segunda ordem na excentricidade por

$$G_{211}(e) = \frac{3}{2}e. \quad (5.53)$$

Substituindo a Eq. (5.25), pode-se escrever $G_{211}(e) = G_{211}(e(X_2, C_2))$, ou seja,

$$G_{211}(e) = \frac{3}{2X_2} [X_2 - C_2]^{1/2} [X_2 + C_2]^{1/2}. \quad (5.54)$$

Desta forma, a partir das Eqs. (5.52), (5.54) e (5.50) tem-se que a parte ressonante é expressa por

$$B_{2,2211} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{22} \left[\frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{-2X_2 - C_1}{C_2} \right)^2 \right] \right] \left[\frac{3}{2X_2} [X_2 - C_2]^{1/2} [X_2 + C_2]^{1/2} \right]. \quad (5.55)$$

O sistema dinâmico gerado pelo ângulo ressonante $\phi_{2,2211}$ é então descrito, utilizando as funções definidas anteriormente.

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{dt} = & -\frac{3}{2X_2^7} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{(-2X_2 - C_1)^2}{C_2^2} \right] \\ & \times [\sqrt{X_2 - C_2} \sqrt{X_2 + C_2}] \sin(\phi_{2,2211}), \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_2^3} + 6 \mu^4 r_e^2 J_{20} \left[-\frac{3}{4} \frac{(-2X_2 - C_1)^2}{C_2^2} + \frac{1}{4} \right] \\ & \times \frac{1}{X_2^7} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{[(X_2 - C_2)(X_2 + C_2)]}{X_2^2} \right) \\ & - \frac{1}{X_2^6} \mu^4 r_e^2 J_{20} \left[3 \frac{-2X_2 - C_1}{C_2^2} \right] \left(1 + \frac{3}{2} \frac{[(X_2 - C_2)(X_2 + C_2)]}{X_2^2} \right) \\ & - \mu^4 r_e^2 J_{20} \left[-\frac{3}{4} \frac{(-2X_2 - C_1)^2}{C_2^2} + \frac{1}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{X_2^6} \left(\frac{3}{2} \frac{[2X_2]}{X_2^2} - 3 \frac{[(X_2 - C_2)(X_2 + C_2)]}{X_2^3} \right) \\
& - \left(-\frac{21}{2} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{(-2X_2 - C_1)^2}{C_2^2} \right] [\sqrt{X_2 - C_2} \sqrt{X_2 + C_2}] X_2^{-8} \right. \\
& + \frac{3}{2} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[6 \frac{-2X_2 - C_1}{C_2^2} \right] [\sqrt{X_2 - C_2} \sqrt{X_2 + C_2}] X_2^{-7} \\
& + \frac{3}{2} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{(-2X_2 - C_1)^2}{C_2^2} \right] \\
& \times \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{X_2 + C_2}}{\sqrt{X_2 - C_2}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{X_2 - C_2}}{\sqrt{X_2 + C_2}} \right] X_2^{-7} \left. \right) \cos(\phi_{2,2211}) - 2\omega_e. \tag{5.57}
\end{aligned}$$

O sistema de equações (5.56) e (5.57) é integrado numericamente para estudar as órbitas de movimento regular que são influenciadas pelo ângulo ressonante $\phi_{2,2211}$, sendo que $\phi_{2,2211} = \phi_2 - 2\lambda_{22}$.

5.6.3 Ângulo Ressonante $\phi_{2,2211}$

O ângulo ressonante crítico $\phi_{2,2211}$ é determinado pelos coeficientes $l = 2$, $m = 2$, $p = 2$ e $q = 1$, de modo que k agora vale -2, pela relação $k = l - 2p$

5.6.3.1 Termo secular

O termo secular é dado por

$$B_{2,2010} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{20} F_{201}(I(X_2, C_1, C_2)) G_{210}(e(X_2, C_2)). \tag{5.58}$$

O termo $F_{201}(I) = F_{201}(I(X_2, C_1, C_2))$ é dado por

$$F_{201}(I(X_2, C_1, C_2)) = -\frac{1}{4} \left[3 \left(\frac{-2X_2 - C_1}{2X_2 + C_2} \right)^2 - 1 \right]. \tag{5.59}$$

A função excentricidade $G_{210}(e) = G_{210}(e(X_2, C_2))$ é dada por

$$G_{210}(e(X_2, C_2)) \approx 1 + \frac{3}{2X_2^2} [(-X_2 - C_2)(3X_2 + C_2)]. \tag{5.60}$$

Desta forma, a partir das Eqs. (5.59) e (5.60), tem-se a parte secular

$$B_{2,2010} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{20} \left[-\frac{1}{4} \left[3 \left(\frac{-2X_2 - C_1}{2X_2 + C_2} \right)^2 - 1 \right] \right] \times \left(1 + \frac{3}{2X_2^2} [(-X_2 - C_2)(3X_2 + C_2)] \right). \quad (5.61)$$

5.6.3.2 Termo ressonante

O termo ressonante é dado por

$$B_{2,2221} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{22} F_{222}(I(X_2, C_1, C_2)) G_{221}(e(X_2, C_2)). \quad (5.62)$$

O termo $F_{222}(I)$ é a função inclinação e $G_{221}(e)$ a função excentricidade que podem ser encontrados em Kaula (1966).

A função $F_{222}(I)$ é dada por

$$F_{222}(I) = \frac{3}{4} (1 - \cos(I)^2). \quad (5.63)$$

Substituindo a Eq. (5.28), pode-se escrever $F_{222}(I) = F_{222}(I(X_2, C_1, C_2))$, ou seja,

$$F_{222}(I(X_2, C_1, C_2)) = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2X_2 + C_1}{2X_2 + C_2} \right) \right]^2. \quad (5.64)$$

A função excentricidade $G_{221}(e)$ é dada até a segunda ordem na excentricidade por

$$G_{221}(e) \approx -\frac{1}{2}e. \quad (5.65)$$

Substituindo a Eq. (5.25), pode-se escrever $G_{221}(e) = G_{221}(e(X_2, C_2))$, ou seja,

$$G_{221}(e) = -\frac{1}{2X_2} [-X_2 - C_2]^{1/2} [3X_2 + C_2]^{1/2}. \quad (5.66)$$

Desta forma, a partir das Eqs. (5.64), (5.66) e (5.62) tem-se que a parte ressonante é expressa por

$$B_{2221} = \frac{\mu^4}{X_2^6} r_e^2 J_{22} \left[\frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2X_2 + C_1}{2X_2 + C_2} \right) \right]^2 \right] \left[-\frac{1}{2X_2} [-X_2 - C_2]^{1/2} [3X_2 + C_2]^{1/2} \right]. \quad (5.67)$$

O sistema dinâmico gerado pelo ângulo ressonante $\phi_{2,2221}$ é então definido, a partir das funções descritas anteriormente.

$$\frac{dX_2}{dt} = \frac{3}{8} \mu^4 r_e^2 J_{22} \frac{1}{X_2^7} \left(1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 + C_2} \right)^2 \sqrt{-X_2 - C_2} \sqrt{3X_2 + C_2} \sin(\phi_{2,2221}), \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_2^3} + 6\mu^4 r_e^2 J_{20} \left(-\frac{3}{4} \frac{(-2X_2 - C_1)^2}{(2X_2 + C_2)^2} + \frac{1}{4} \right) \\ & \times \frac{1}{X_2^7} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{(-X_2 - C_2)(3X_2 + C_2)}{X_2^2} \right) \\ & - \mu^4 r_e^2 J_{20} \left(3 \frac{-2X_2 - C_1}{(2X_2 + C_2)^2} + 3 \frac{(-2X_2 - C_1)^2}{(2X_2 + C_2)^3} \right) \\ & \times \left(1 + \frac{3}{2} \frac{(-X_2 - C_2)(3X_2 + C_2)}{X_2^2} \right) X_2^{-6} \\ & - \mu^4 r_e^2 J_{20} \left(-\frac{3}{4} \frac{(-2X_2 - C_1)^2}{(2X_2 + C_2)^2} + \frac{1}{4} \right) \\ & \times \left(-\frac{3}{2} \frac{3X_2 + C_2}{X_2^2} + \frac{9}{2} \frac{-X_2 - C_2}{X_2^2} - 3 \frac{(-X_2 - C_2)(3X_2 + C_2)}{X_2^3} \right) X_2^{-6} \\ & - \left(\frac{21}{8} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left(1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 + C_2} \right)^2 \sqrt{-X_2 - C_2} \sqrt{3X_2 + C_2} X_2^{-8} \right. \\ & - \frac{3}{4} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left(1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 + C_2} \right) \sqrt{-X_2 - C_2} \sqrt{3X_2 + C_2} \\ & \times \left(2(2X_2 + C_2)^{-1} - 2 \frac{2X_2 + C_1}{(2X_2 + C_2)^2} \right) X_2^{-7} \\ & + \frac{3}{16} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left(1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 + C_2} \right)^2 \sqrt{3X_2 + C_2} X_2^{-7} \frac{1}{\sqrt{-X_2 - C_2}} \\ & \left. - \frac{9}{16} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left(1 + \frac{2X_2 + C_1}{2X_2 + C_2} \right)^2 \right. \\ & \times \left. \sqrt{-X_2 - C_2} X_2^{-7} \frac{1}{\sqrt{3X_2 + C_2}} \right) \cos(\phi_{2,2221}) - 2\omega_e. \end{aligned} \quad (5.69)$$

O sistema dinâmico gerado pelas Eqs. (5.68) e (5.69) pode ser integrado numericamente para estudar os movimentos orbitais influenciados pelo ângulo ressonante $\phi_{2,2221}$, sendo que $\phi_{2,2221} = \phi_2 - 2\lambda_{22}$.

5.6.4 Sistema Dinâmico gerado considerando os harmônicos J_{40} e J_{42}

5.6.4.1 $k=2$

A expressão da Hamiltoniana, considerando os harmônicos zonais J_{20} e J_{40} , e, os harmônicos tesserais J_{22} e J_{42} , é dada por

$$\begin{aligned} H_3 = & \frac{\mu^2}{2X_2^2} - \omega_e \Theta_2 + B_{2,2010}(X_2, C_1, C_2) + B_{2,4020}(X_2, C_1, C_2) \\ & + B_{2,2201}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi_{2,2201}(x_2, \theta_2)) \\ & + D_{2,4211}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi_{2,4211}(x_2, \theta_2)). \end{aligned} \quad (5.70)$$

sendo que, de acordo com a Eq. (5.11), tem-se que $\phi_{2,2201} = \phi_2 - 2\lambda_{22}$ e $\phi_{2,4211} = \phi_2 - 2\lambda_{42} + \pi$.

O sistema dinâmico formado pelas equações de movimento $\frac{dX_2}{dt}$ e $\frac{d\phi_2}{dt}$ é expresso por:

$$\frac{dX_2}{dt} = -(B_{2,2201}(X_2, C_1, C_2) \sin(\phi_{2,2201}) + B_{2,4211}(X_2, C_1, C_2) \sin(\phi_{2,4211})), \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_2^3} - \left(\frac{\partial B_{2,2010}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} + \frac{\partial B_{2,4020}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \right) \\ & - \left(\frac{\partial B_{2,2201}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi_{2,2201}(x_2, \theta_2)) \right. \\ & \left. + \frac{\partial B_{2,4211}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi_{2,4211}(x_2, \theta_2)) \right) - 2\omega_e. \end{aligned} \quad (5.72)$$

O sistema dinâmico gerado pelas Eqs. (5.71) e (5.72) pode ser integrado numericamente para estudar os movimentos orbitais influenciados pelos ângulos ressonantes $\phi_{2,2201}$ e $\phi_{2,4211}$

5.6.4.2 $k=0$

Neste caso, a Hamiltoniana é dada por:

$$\begin{aligned} H_4 = & \frac{\mu^2}{2X_2^2} - \omega_e \Theta_2 + B_{2,2010}(X_2, C_1, C_2) + B_{2,4020}(X_2, C_1, C_2) \\ & + B_{2,2211}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi_{2,2211}(x_2, \theta_2)) \\ & + B_{2,4221}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi_{2,4221}(x_2, \theta_2)). \end{aligned} \quad (5.73)$$

O sistema dinâmico formado pelas equações de movimento $\frac{dX_2}{dt}$ e $\frac{d\phi_2}{dt}$ é expresso por:

$$\frac{dX_2}{dt} = -(B_{2,2211} \text{sen}(\phi_{2,2211}) + B_{2,4221} \text{sen}(\phi_{2,4221})), \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_2^3} - \left(\frac{\partial B_{2,2010}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} + \frac{\partial B_{2,4020}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \right) \\ & - \left(\frac{\partial B_{2,2211}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi_{2,2211}(x_2, \theta_2)) \right. \\ & \left. + \frac{\partial B_{2,4221}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi_{2,4221}(x_2, \theta_2)) \right) - 2\omega_e, \end{aligned} \quad (5.75)$$

onde, $\phi_{2,2211} = \phi_2 - 2\lambda_{22}$ e $\phi_{2,4221} = \phi_2 - 2\lambda_{42} + \pi$.

O sistema dinâmico gerado pelas Eqs. (5.74) e (5.75) pode ser integrado numericamente para estudar os movimentos orbitais influenciados pelos ângulos ressonantes $\phi_{2,2211}$ e $\phi_{2,4221}$

5.6.4.3 k=-2

Neste caso, a Hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} H_5 = & \frac{\mu^2}{2X_2^2} - \omega_e \Theta_2 + B_{2,2010}(X_2, C_1, C_2) + B_{2,4020}(X_2, C_1, C_2) \\ & + B_{2,2221}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi_{2,2221}(x_2, \theta_2)) \\ & + B_{2,4231}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi_{2,4231}(x_2, \theta_2)). \end{aligned} \quad (5.76)$$

O sistema dinâmico formado pelas equações de movimento $\frac{dX_2}{dt}$ e $\frac{d\phi_2}{dt}$ é expresso por

$$\frac{dX_2}{dt} = -(B_{2,2221} \text{sen}(\phi_{2,2221}) + B_{2,4231} \text{sen}(\phi_{2,4231})), \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_2^3} - \left(\frac{\partial B_{2,2010}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} + \frac{\partial B_{2,4020}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \right) \\ & - \left(\frac{\partial B_{2,2221}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi_{2,2221}(x_2, \theta_2)) \right. \\ & \left. + \frac{\partial B_{2,4231}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} \cos(\phi_{2,4231}(x_2, \theta_2)) \right) - 2\omega_e, \end{aligned} \quad (5.78)$$

onde $\phi_{2,2221} = \phi_2 - 2\lambda_{22}$ e $\phi_{2,4231} = \phi_2 - 2\lambda_{42} + \pi$.

O sistema dinâmico gerado pelas Eqs. (5.77) e (5.78) pode ser integrado numericamente para estudar os movimentos orbitais influenciados pelos ângulos ressonantes $\phi_{2,2221}$ e $\phi_{2,4231}$.

5.6.5 A semi-largura da separatriz

Nesta seção, uma equação definindo a semi-largura da separatriz é derivada, considerando um modelo linearizado, o qual descreve o comportamento do sistema dinâmico na vizinhança de cada ângulo crítico. A ressonância 2:1 é considerada.

Considere a Hamiltoniana

$$H_F = \frac{\mu^2}{2X_2^2} - \omega_e \Theta_2 + B_{2,2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2) + B_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2) \cos(\phi_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(x_2, \theta_2)) , \quad (5.79)$$

sendo que $\phi_{2,(2p+k)mp(\alpha m)} = x_2 - 2\theta_2 - 2\lambda_{22} = \phi_2 - 2\lambda_{22}$. Equação (5.79) representa a Hamiltoniana do sistema considerando o primeiro termo secular e um termo ressonante. Observe que apenas o segundo harmônico zonal J_{20} está associado ao termo secular.

Considere a transformação canônica definida por

$$X_3 = X_2 \quad x_3 = x_2 - 2\theta_2 \quad \Theta_3 = \Theta_2 + 2X_2 \quad \theta_3 = \theta_2 . \quad (5.80)$$

A Hamiltoniana resultante desta transformação canônica é dada por

$$H'_3 = \frac{\mu^2}{2X_3^2} - \omega_e(\Theta_3 - 2X_3) + B_{SEC}(X_3, C_1, C_2) + B_{RES}(X_3, C_1, C_2) \cos(x_3, 2\lambda_{22}) , \quad (5.81)$$

sendo que B_{SEC} representa o coeficiente do termo secular e B_{RES} representa o coeficiente do termo ressonante. Observe que θ_3 é uma variável que pode ser desprezada e Θ_3 é constante. Desta forma, uma nova Hamiltoniana pode ser introduzida,

$$\hat{H}_3 = H'_3 + \omega_e \Theta_3 .$$

As equações canônicas descritas por $\hat{H}_3$ são

$$\frac{dX_3}{dt} = -B_{RES}(X_3, C_1, C_2) \sin(x_3 - 2\lambda_{22}),$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} = & \frac{\mu^2}{X_3^3} - 2\omega_e - \frac{\partial B_{SEC}}{\partial X_3}(X_3, C_1, C_2) \\ & - \frac{\partial B_{RES}}{\partial X_3}(X_3, C_1, C_2) \cos(x_3 - 2\lambda_{22}) . \end{aligned} \quad (5.82)$$

O semi-eixo maior crítico é obtido da condição de comensurabilidade (Eq. 4.23), considerando a ressonância exata e incluindo a perturbação devido ao termo secular,

$$\frac{\mu^2}{X_3^3} - \frac{\partial B_{SEC}}{\partial X_3}(X_3, C_1, C_2) - 2\omega_e = 0 . \quad (5.83)$$

Deixe $X_{3,crit}$ ser o valor de X_3 , o qual satisfaz a Eq. (5.83). Expandindo a Hamiltoniana $\hat{H}_3$ ao redor do valor crítico $X_{3,crit}$, encontra-se

$$\begin{aligned} \hat{H}_3(X_{3,crit} + \Delta X_3) = & \hat{H}_3(X_{3,crit}) + \frac{\partial \hat{H}_3}{\partial X_3}(X_{3,crit}) \Delta X_3 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{H}_3}{\partial X_3^2}(X_{3,crit}) \Delta X_3^2 + \dots . \end{aligned} \quad (5.84)$$

Por outro lado, de (5.81),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{H}_3}{\partial X_3} = & -\frac{\mu^2}{X_3^3} + 2\omega_e + \frac{\partial B_{SEC}}{\partial X_3} + \frac{\partial B_{RES}}{\partial X_3} \cos(x_3 - 2\lambda_{22}) \\ \frac{\partial^2 \hat{H}_3}{\partial X_3^2} = & \frac{3\mu^2}{X_3^4} + \frac{\partial^2 B_{SEC}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 B_{RES}}{\partial X_3^2} \cos(x_3 - 2\lambda_{22}) . \end{aligned} \quad (5.85)$$

Escrevendo $\Delta X_3 = \varsigma$, e, usando as Eqs. (5.83), (5.84) e (5.85), resulta que

$$\begin{aligned} \hat{H}_3(X_{3,crit} + \varsigma) = & \frac{\mu^2}{2X_{3,crit}^2} + 2\omega_e X_{3,crit} + B_{SEC}(X_{3,crit}) \\ & + B_{RES}(X_{3,crit}) \cos(x_3 - 2\lambda_{22}) \\ & + \left[-\frac{\mu^2}{X_{3,crit}^3} + 2\omega_e + \frac{\partial B_{SEC}}{\partial X_3}(X_{3,crit}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial B_{RES}}{\partial X_3}(X_{3,crit}) \cos(x_3 - 2\lambda_{22}) \right] \varsigma \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{3\mu^2}{X_{3,crit}^4} + \frac{\partial^2 B_{SEC}}{\partial X_3^2}(X_{3,crit}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 B_{RES}}{\partial X_3^2}(X_{3,crit}) \cos(x_3 - 2\lambda_{22}) \right] \varsigma^2 + \dots . \end{aligned}$$

Note que o termo secular B_{SEC} e as suas derivadas são associados ao segundo harmônico zonal $J_{20} = 1,0826 \times 10^{-3}$. Assim, eles são da ordem ou menores que 10^{-3} . O termo ressonante B_{RES} e as suas derivadas são associadas ao harmônico tesseral $J_{22} = 1,8154 \times 10^{-6}$. Dessa forma, eles são da ordem de 10^{-6} . Desde que o termo $\frac{\mu^2}{2X_{3,crit}^2} + 2\omega_e X_{3,crit} + B_{SEC}(X_{3,crit})$ é constante, uma nova Hamiltoniana $\tilde{H}$ é introduzida através da equação

$$\tilde{H} = \hat{H}_3 - \left[\frac{\mu^2}{2X_{3,crit}^2} + B_{SEC}(X_{3,crit}) \right].$$

A Hamiltoniana que descreve o problema é dada por

$$\tilde{H}(\varsigma, x_3) = B_{RESCos}(x_3 - 2\lambda_{22}) + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{X_{3,crit}^4} \varsigma^2. \quad (5.86)$$

Observe que a coordenada generalizada é ς e o momento conjugado é x_3 (ângulo). Em geral, o ângulo é considerado como a coordenada generalizada. Assim, considere a transformação de Mathieu definida por

$$\phi = x_3 - 2\lambda_{22} - \pi, \quad p = -\varsigma. \quad (5.87)$$

De acordo a esta transformação, a Hamiltoniana é escrita no novo grupo de variáveis como

$$Q(\phi, p) = -B_{RESCos}(\phi) + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{X_{3,crit}^4} p^2. \quad (5.88)$$

A Hamiltoniana $Q(\phi, p)$ descreve o pêndulo simples.

A separatriz pode ser definida pela Eq. 5.89, sendo que mais detalhes sobre o método analítico adotado para estabelecer esta condição pode ser vista em Neto (NETO, 2006)

$$E = U_0, \quad (5.89)$$

considerando E a energia cinética e U_0 a energia potencial e

$$E = \frac{3\mu^2}{X_{3,crit}^4} \tilde{E} = \frac{3\mu^2}{X_{3,crit}^4} Q(\phi, p).$$

Desta forma,

$$E = -\frac{3\mu^2}{X_{3,crit}^4} B_{RES} \cos(\phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{3\mu^2}{X_{3,crit}^4} \right)^2 p^2. \quad (5.90)$$

Por outro lado,

$$U_0 = \frac{3\mu^2}{X_{3,crit}^4} B_{RES}. \quad (5.91)$$

Combinando as Eqs. (5.89), (5.90) e (5.91), encontra-se

$$B_{RES} = -B_{RES} \cos(\phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{3\mu^2}{X_{3,crit}^4} \right) p^2. \quad (5.92)$$

Da definição das variáveis canônicas de Delaunay

$$\frac{\mu^2}{X_{3,crit}^4} = \frac{1}{a_{crit}^2}. \quad (5.93)$$

De (5.92) e (5.93), segue que

$$B_{RES} = -B_{RES} \cos(\phi) + \frac{3}{2} \left(\frac{p}{a_{crit}} \right)^2.$$

Resolvendo esta equação para p , encontra-se

$$\left(\frac{p}{a_{crit}} \right)^2 = \frac{4B_{RES}}{3} \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right).$$

Assim, o valor máximo do momento conjugado é

$$|p_{max}| = 2a_{crit} \sqrt{\frac{B_{RES}}{3}}. \quad (5.94)$$

De acordo a esta transformação canônica estabelecida anteriormente,

$$p = -\Delta X_3.$$

Assim,

$$\Delta a = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_{crit}}} \Delta X_3. \quad (5.95)$$

O coeficiente B_{RES} do termo ressonante é dado por

$$B_{RES} = \frac{\mu^4}{X_{3,crit}^6} r_e^2 J_{22} F_{22p}(I) G_{2p1}(e) = \frac{\mu}{a_{crit}} \left(\frac{r_e}{a_{crit}} \right)^2 J_{22} F_{22p}(I) G_{2p1}(e). \quad (5.96)$$

Os coeficientes l , m e q são definidos nos termos $F_{22p}(I)$ e $G_{2p1}(e)$, porque a comensurabilidade $\alpha = q/m$ é fixada, devido à ressonância 2:1 e o harmônico tesseral J_{22} é usado. Por outro lado, o coeficiente p pode ser 0, 1 ou 2, resultando em ângulos críticos diferentes associados ao J_{lm} estudado. Combinando as Eqs. (5.94), (5.95) e (5.96), encontra-se

$$\Delta a = \frac{4\sqrt{3}}{3} r_e \sqrt{J_{22} F_{22p}(I) G_{2p1}(e)}. \quad (5.97)$$

A Eq. (5.97) fornece a semi-largura da separatriz, para dados valores da excentricidade e inclinação. Observe que as expressões das funções $F_{22p}(I)$ e $G_{2p1}(e)$ dependem do ângulo crítico escolhido.

O desenvolvimento analítico para a equação da semi-largura da separatriz, pode ser feito, sem especificar a ressonância a ser estudada, com o objetivo de escrever uma expressão para Δa em termos dos coeficientes l , m , p e q , encontrando a seguinte equação,

$$\Delta a = \frac{4\sqrt{3}}{3} r_e^{\frac{1}{2}} a_{crit}^{\frac{2-l}{2}} \sqrt{J_{lm} F_{lmp}(I) G_{lpq}(e)}. \quad (5.98)$$

Δa representa o valor máximo da separatriz medida a partir do centro para uma dada ressonância. Usando as amplitudes máximas das separatrizes de duas ressonâncias vizinhas, um método simples para verificar o surgimento de caos pode ser formulado como proposto por Chirikov (CHIRIKOV, 1979). Quando as separatrizes se tocam, verifica-se a possibilidade de

que as trajetórias entre as ilhas de libração são caóticas e correspondem às superfícies KAM quando da intersecção de ilhas, resultantes de diferentes órbitas periódicas.

Dessa forma, de acordo a Chirikov (1979), superfícies KAM entre as ilhas de libração serão destruídas quando

$$\frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{\delta a_{12}} = 1.$$

δa_{12} é a distância entre os centros de duas ressonâncias vizinhas.

No entanto, este resultado não fornece uma visão realista da interação entre as separatrizes quando elas se tornam próximas.

De acordo a Lichtenberg e Liebermann (1992), uma boa estimativa para verificar o surgimento de caos é dado pelo critério de Chirikov Modificado, o qual pode ser estabelecido como

$$\frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{\delta a_{12}} = \frac{2}{3}. \quad (5.99)$$

A Eq. (5.99) é usada se as separatrizes possuem, aproximadamente, a mesma largura.

Na próxima seção são mostrados alguns resultados envolvendo a semi-largura da separatriz.

5.7 Resultados da Ressonância 2:1

5.7.1 Estudo do Sistema Simplificado

5.7.1.1 Espaço de fase correspondente a ϕ_{2201} e ϕ_{4211}

Nesta seção, alguns resultados da integração numérica das equações de movimento (5.17) e (5.19) são apresentados. No estudo de órbitas irregulares, a semi-largura da separatriz é usada para determinar as regiões instáveis a serem investigadas pelo maior expoente de Lyapunov.

Os harmônicos zonais e os harmônicos tesserais usados nas Eqs. (5.17) e (5.19) são mostrados na Tab. 5.1.

Tabela 5.1: Os harmônicos zonais e tesserais.	
Harmônicos zonais	Harmônicos tesserais
$J_{20} = 1,0826 \times 10^{-3}$	$J_{22} = 1,8154 \times 10^{-6}$
$J_{40} = -1,6204 \times 10^{-6}$	$J_{42} = 1,6765 \times 10^{-7}$

Figuras 5.1 e 5.2 mostram os espaços de fase considerando os ângulos críticos, ϕ_{2201} e ϕ_{4211} , de acordo a integração numérica das equações de movimento, (5.17) e (5.19). O ângulo associado a J_{42} , ϕ_{4211} , tem a mesma frequência do ângulo crítico associado a J_{22} com uma fase diferente. Nas Figs. 5.1 e 5.2 são considerados como valores iniciais para a inclinação, 23° e 55° , respectivamente, e para ambos os casos, o valor inicial da excentricidade é de 0,001. Os valores iniciais do semi-eixo maior estão ao redor do semi-eixo crítico. Observe que a aparência dos espaços de fase lembram o bem conhecido espaço de fase do pêndulo simples, com duas regiões diferentes, separadas pela separatriz. As curvas fechadas representam os possíveis movimentos periódicos, conhecidos como libração. As linhas onduladas abaixo e acima representam os movimentos onde ϕ_{2201} e ϕ_{4211} aumentam (ou diminuem) sempre e descrevem as circulações.

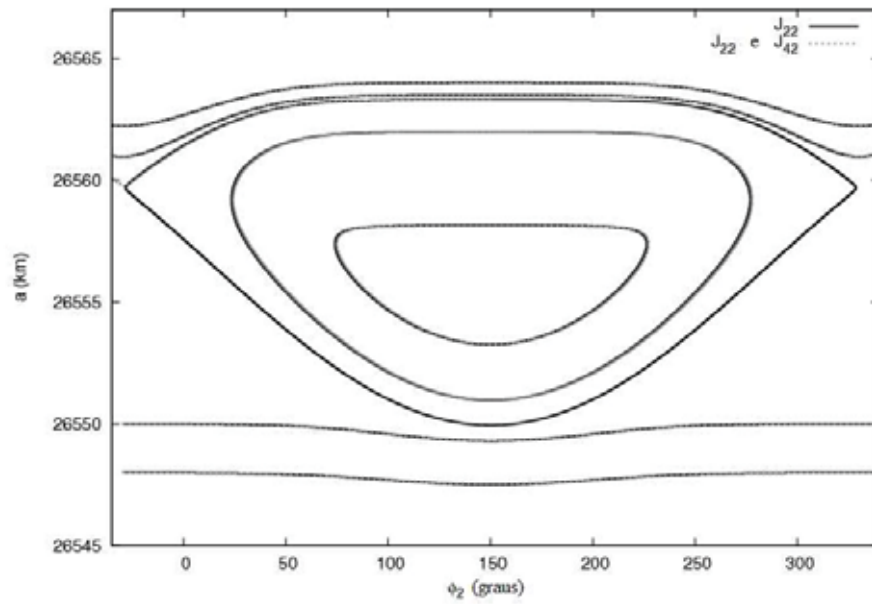


Figura 5.1: Espaço de fase para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} : As condições iniciais para a inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente.

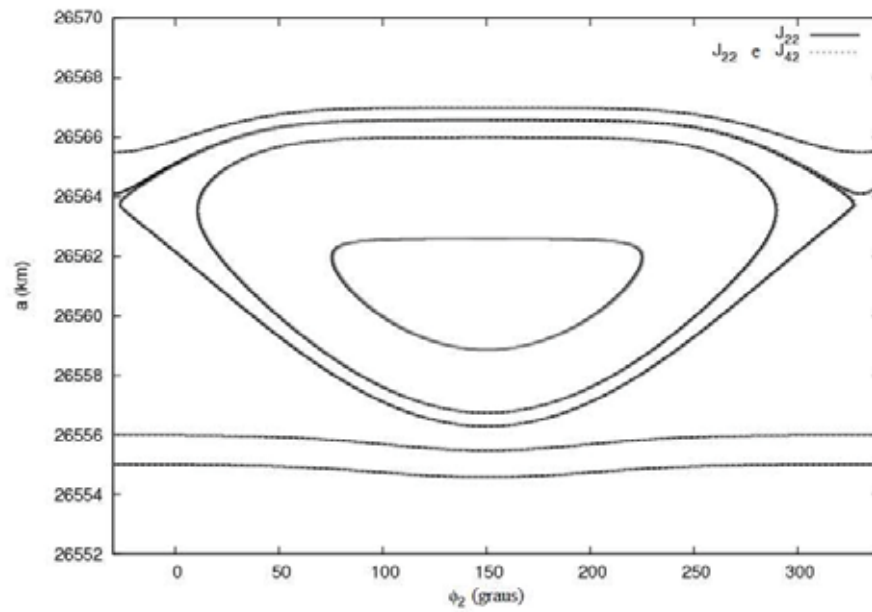


Figura 5.2: Espaço de fase para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} : As condições iniciais para a inclinação e excentricidade são $I = 55^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente.

Figuras 5.1 e 5.2 mostram que as amplitudes de libração aumentam quando a inclinação varia de 23° a 55° . Verifica-se pelos dados reais de objetos orbitando a Terra (SPACE TRACK, 2011, 2012), que existem órbitas de satélites artificiais nas proximidades da ressonância 2:1 com inclinações maiores que as usadas nas Figs. 5.1 e 5.2. Mas, uma grande parte destes objetos também possuem altas excentricidades (satélites Molniya, por exemplo) em suas órbitas e não fazem parte do grupo de satélites GPS, estudados pelo presente trabalho. Figura 5.2 mostra que os espaços de fase apresentam pequenas mudanças com a adição do harmônico tesseral J_{42} através do ângulo ressonante ϕ_{4211} , e na Fig. 5.1 pode-se observar que a curva externa da região de libração muda quando o harmônico tesseral J_{42} é adicionado, conforme mostrado na Fig. 5.3.

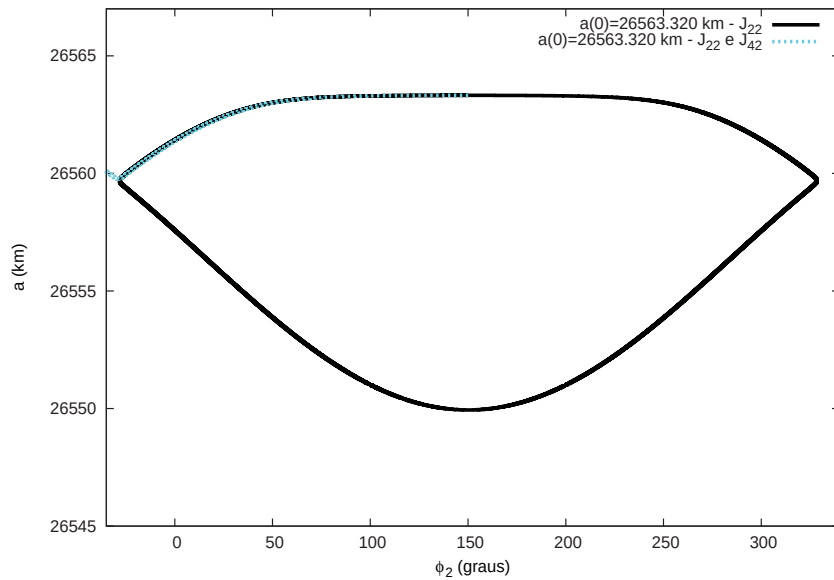


Figura 5.3: Espaço de fase para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} : As condições iniciais para a inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente.

A Fig. 5.3 mostra o espaço de fase com duas curvas diferentes, considerando os valores iniciais $I(0) = 23^\circ$, $e(0) = 0,001$, $a(0) = 26563,320\text{km}$ e $\phi_2 = 150,15^\circ$ para inclinação, excentricidade, semi-eixo maior e o ângulo ϕ_2 , respectivamente. A primeira curva considera o ângulo crítico ϕ_{2201} associado ao harmônico tesseral J_{22} e a segunda curva considera os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} associados aos harmônicos tesserais J_{22} e J_{42} , respectivamente. Observe que, considerando as mesmas condições iniciais, o movimento orbital, inicialmente na região de libração, muda para o movimento na região de circulação, quando o harmônico tesseral J_{42} é adicionado. Percebe-se que os valores iniciais considerados estão no limite da região de li-

bração, de forma que uma pequena perturbação acrescentada ao movimento faz com que o satélite mude sua órbita. A Fig. 5.4 apresenta o comportamento no tempo do semi-eixo maior, considerando as mesmas condições iniciais que a Fig. 5.3, e a diferença entre os movimentos na região de libração e circulação é mais visível.

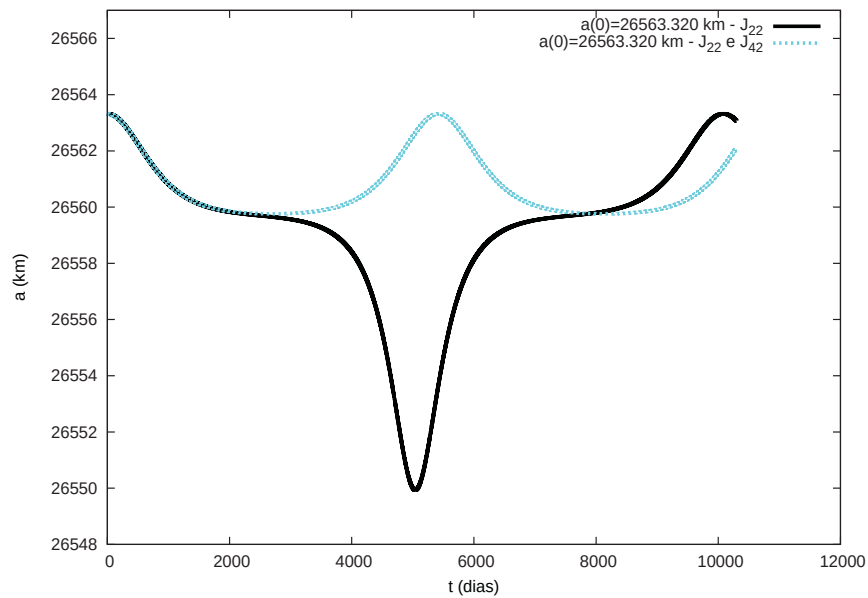


Figura 5.4: Comportamento no tempo do semi-eixo maior para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} : As condições iniciais para a inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente.

5.7.1.2 Comportamento no tempo

Figuras 5.5 a 5.8 mostram o comportamento no tempo do semi-eixo maior e do ângulo ϕ_2 , de acordo aos espaços de fase das Figs. 5.1 e 5.2. Os resultados apresentados pelo ângulo crítico ϕ_{2201} lembram qualitativamente aos resultados gerados pelo ângulo crítico ϕ_{2211} .

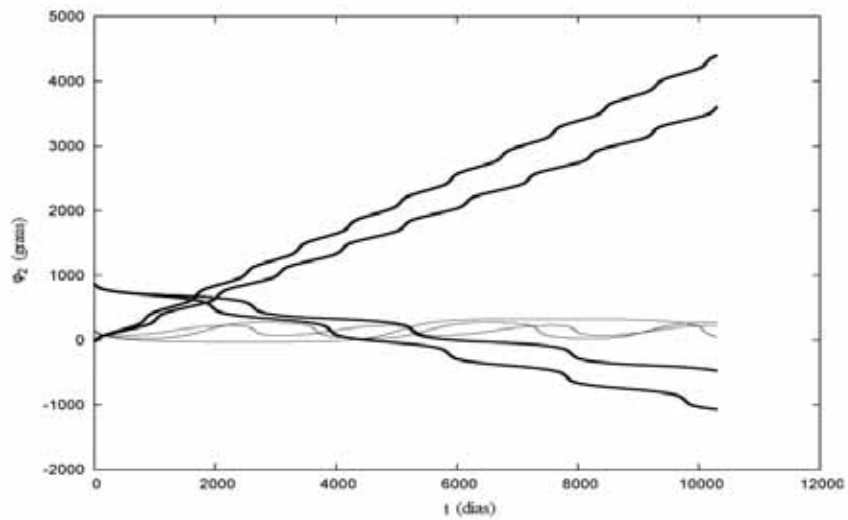


Figura 5.5: ϕ_2 versus t , considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} : As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. As curvas mais escuras mostram os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras mostram os movimentos de libração, de acordo com a Figura 5.1. As condições iniciais para ϕ_2 são $-29,86^\circ$ e $870,14^\circ$ para a região de circulação e $150,14^\circ$ para a região de libração.

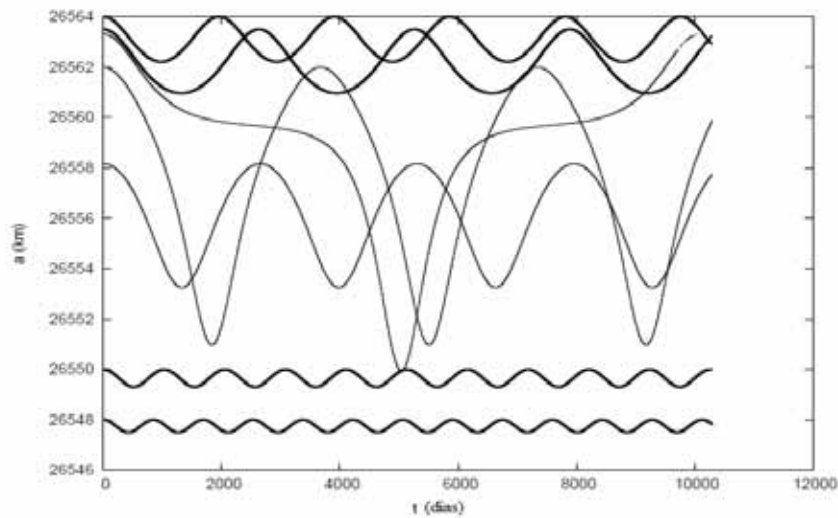


Figura 5.6: a versus t , considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} : As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 23^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com a Figura 5.1.

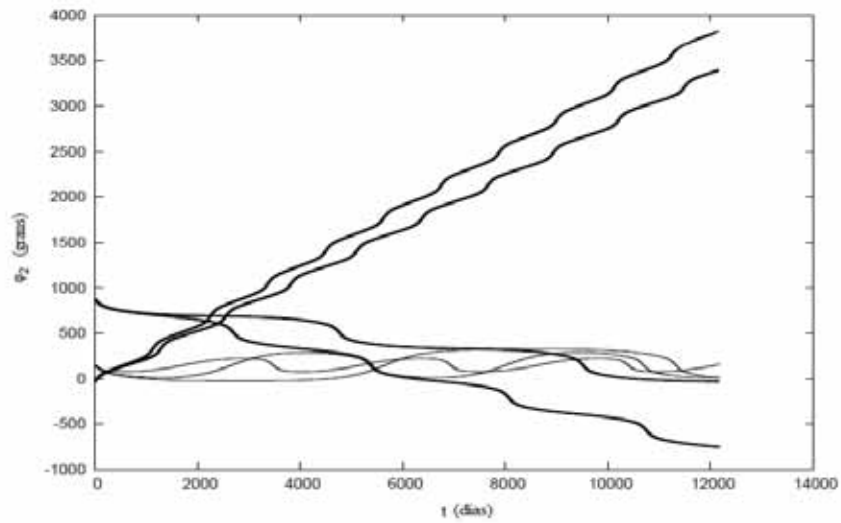


Figura 5.7: ϕ_2 versus t , considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} : As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 55^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. As curvas mais escuras mostram os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras mostram os movimentos de libração, de acordo com a Figura 5.2. As condições iniciais para ϕ_2 são $-29,86^\circ$ e $870,14^\circ$ para a região de circulação e $150,14^\circ$ para a região de libração.

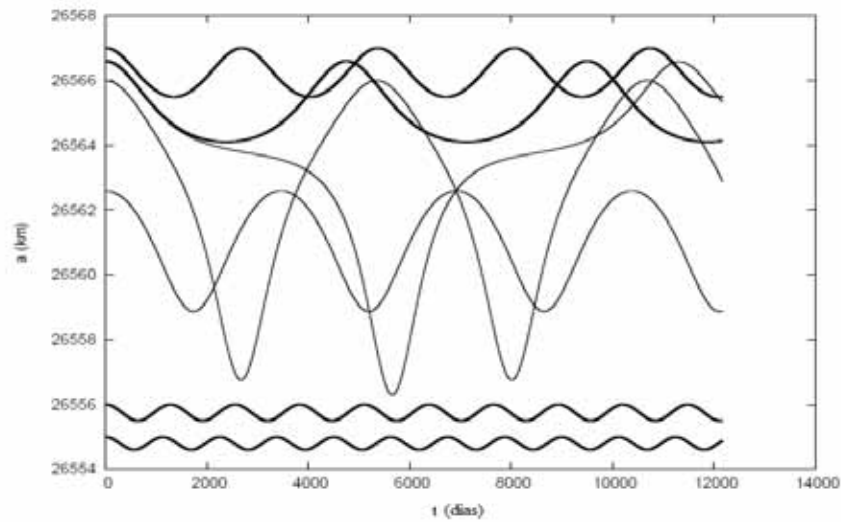


Figura 5.8: a versus t , considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} : As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 55^\circ$ e $e = 0,001$, respectivamente. As curvas mais escuras mostram os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras mostram os movimentos de libração, de acordo com a Figura 5.2.

Dos dados TLE do NORAD (Hoots e Roehrich 1980) é possível observar os movimentos orbitais de alguns satélites GPS. Usando dados reais (correspondentes a Janeiro - Dezembro, 2011), os objetos 20959, 24876 e 25030 são analisados pelo comportamento no tempo do semi-eixo maior, conforme mostrado na Fig. 5.9. Os movimentos dos satélites artificiais podem ser corrigidos durante seu tempo de vida útil, porque algumas perturbações, efeitos de ressonâncias ou risco de colisões podem afetar suas missões. Na Fig. 5.9, estas correções podem ser vistas pela rápida mudança nos valores do semi-eixo maior. A Tab. 5.2 mostra os valores iniciais do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação dos objetos mostrados na Fig. 5.9.

Analisando a Fig. 5.9, pode-se verificar a maior variação no semi-eixo maior do objeto 20959, comparando com os outros dois. Não é estranho a variação ser mais pronunciada do que as outras, porque o objeto 20959 está mais próximo da ressonância 2:1 exata e as amplitudes são maiores, mesmo com valores iniciais diferentes da excentricidade e inclinação.

Tabela 5.2: Elementos orbitais dos objetos 20959, 24876 e 25030, correspondendo a 1º de Janeiro de 2011.

Objeto	Excentricidade	Inclinação (°)	Semi-eixo maior (km)
20959	0,0126	54,81	26561,436
24876	0,0041	56,79	26560,288
25030	0,0115	57,01	26559,993

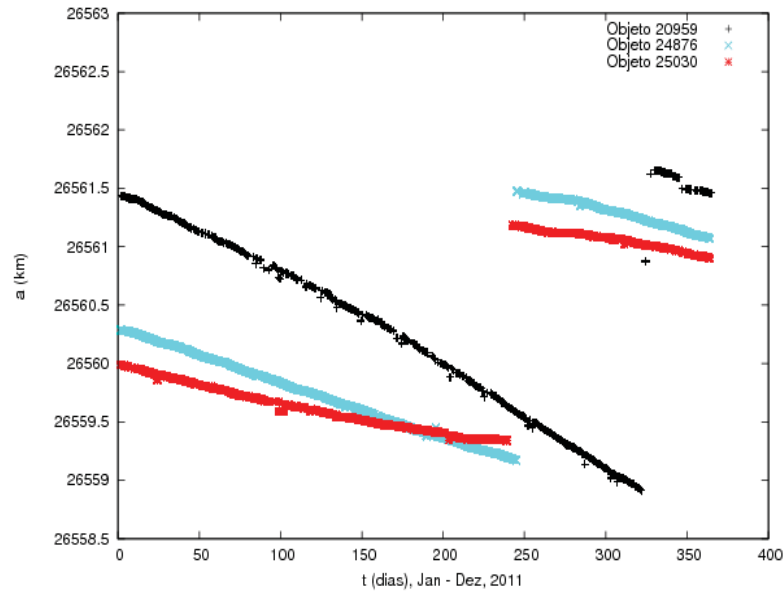


Figura 5.9: Comportamento no tempo do semi-eixo maior dos objetos 20959, 24876 e 25030, correspondendo ao período Janeiro - Dezembro, 2011, dos dados TLE do NORAD. As mudanças repentinas nos valores de semi-eixo maior, nas órbitas dos objetos, representam correções orbitais que são feitas ao longo do tempo de vida útil do satélite artificial.

5.7.1.3 Análise da largura da separatriz e a sobreposição de ressonâncias

A Tab. 5.3 mostra alguns valores da semi-largura da separatriz, Eq. (5.97), para os ângulos críticos, ϕ_{2201} e ϕ_{2211} . Estes ângulos críticos geram região de libração, ao contrário do ângulo, ϕ_{2221} que não gera região de libração. Os valores de inclinação mostrados são 10^0 , 23^0 , 55^0 e 80^0 , e excentricidade, 0,001, 0,01 e 0,05.

Tabela 5.3: A semi-largura da separatriz

Ângulo crítico	Excentricidade	Inclinação ($^{\circ}$)	Semi-eixo crítico (km)	Semi-largura da separatriz (km)
ϕ_{2201}	0,001	10	26557,05255	2,01777
ϕ_{2201}	0,001	23	26558,16050	1,95239
ϕ_{2201}	0,001	55	26562,59742	1,59967
ϕ_{2201}	0,001	80	26564,49131	1,19368
ϕ_{2201}	0,01	10	26557,05208	6,38207
ϕ_{2201}	0,01	23	26558,16017	6,17530
ϕ_{2201}	0,01	55	26562,59758	5,05979
ϕ_{2201}	0,01	80	26564,49163	3,77383
ϕ_{2201}	0,05	10	26557,04092	14,27078
ϕ_{2201}	0,05	23	26558,15213	13,80844
ϕ_{2201}	0,05	55	26562,60156	11,31402
ϕ_{2201}	0,05	80	26564,49934	8,43854
ϕ_{2211}	0,001	10	26563,43643	0,16344
ϕ_{2211}	0,001	23	26563,52788	0,36776
ϕ_{2211}	0,001	55	26563,66653	0,77099
ϕ_{2211}	0,001	80	26563,08372	0,92670
ϕ_{2211}	0,01	10	26563,43645	0,51694
ϕ_{2211}	0,01	23	26563,52797	1,16318
ϕ_{2211}	0,01	55	26563,66692	2,43857
ϕ_{2211}	0,01	80	26563,08413	2,93173
ϕ_{2211}	0,05	10	26563,43695	1,15592
ϕ_{2211}	0,05	23	26563,53037	2,60096
ϕ_{2211}	0,05	55	26563,67616	5,45281
ϕ_{2211}	0,05	80	26563,09413	6,55552

Analisando os ângulos ressonantes ϕ_{2201} , ϕ_{2211} e ϕ_{2221} , associados ao harmônico tesseral J_{22} , pode-se verificar que as distâncias de separação entre as ressonâncias diminuem com o aumento da inclinação, indicando que a inclinação está se aproximando da inclinação crítica, $I = 63^{\circ}26'$. Na inclinação crítica, não existe separação entre os centros das ilhas, observando que os harmônicos perdem a dependência do argumento do pericentro, e tornam apenas uma

função do ângulo ressonante crítico, o problema é reduzido a um grau de liberdade. Veja a Fig. 5.10, alguns valores de semi-eixo maior crítico são mostrados na Tab. 5.3.

Agora, analisando os ângulos ressonantes ϕ_{4211} , ϕ_{4221} e ϕ_{4231} , associados ao harmônico tesseral J_{42} , pode-se verificar que não existe separação entre os centros das ilhas, para as inclinações, 37° e 72° , observando as órbitas diretas ($0^\circ \leq I \leq 90^\circ$). Veja a Fig. 5.10.

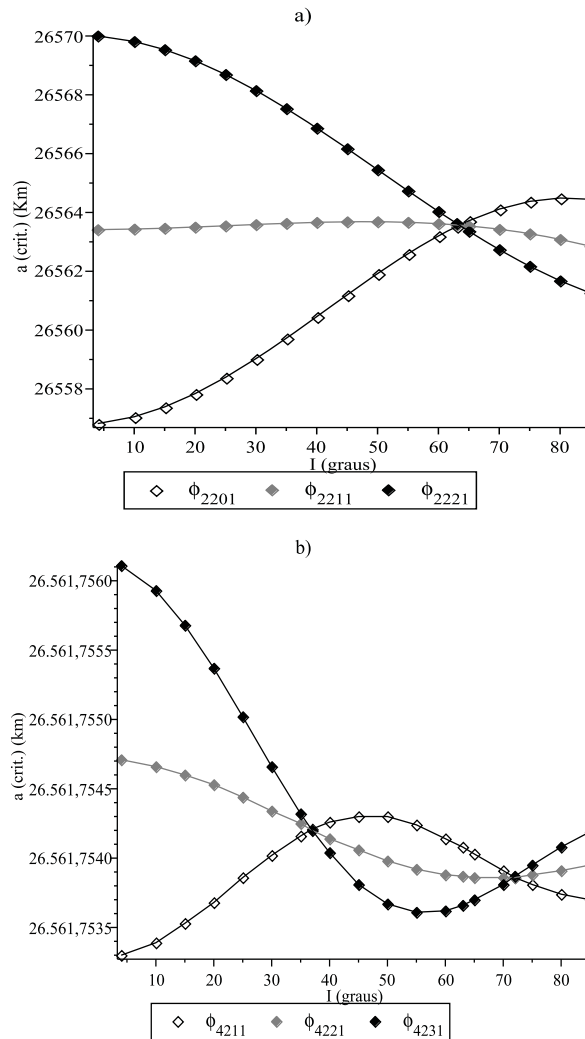


Figura 5.10: Semi-eixo maior crítico versus inclinação para $e = 0,001$, a) considerando os ângulos críticos ϕ_{2201} , ϕ_{2211} , ϕ_{2221} e b) considerando os ângulos críticos ϕ_{4211} , ϕ_{4221} , ϕ_{4231}

Figura 5.11 mostra os valores da semi-largura da separatriz para diferentes valores de semi-eixo maior, excentricidade e inclinação. A semi-largura da separatriz aumenta quando a excentricidade varia de 0,001 a 0,05, para a mesma inclinação. Entretanto, ela diminui com a inclinação considerando o ângulo crítico ϕ_{2201} e aumenta com a inclinação para o ângulo crítico ϕ_{2211} . Δa é calculado da Eq. (5.97).

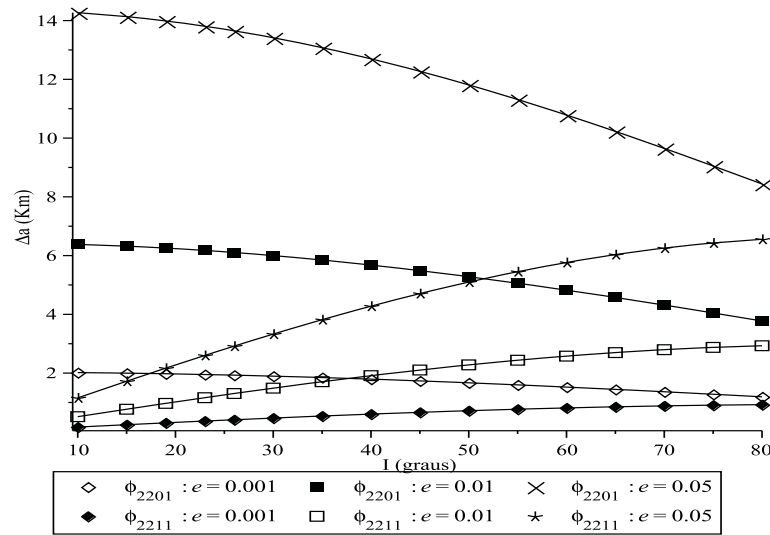


Figura 5.11: Semi largura da separatriz considerando diferentes inclinações e excentricidades.

Figuras 5.12 a 5.14 mostram as curvas $a_{max} (a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min} (a_{crit} - \Delta a)$ para os ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , considerando diferentes inclinações e excentricidades. As regiões em azul, nas Figs. 5.12 a 5.14, representam interseções entre as curvas $a_{max} (a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min} (a_{crit} - \Delta a)$ dos ângulos ressonantes. Estas regiões identificam os possíveis movimentos orbitais instáveis devido à sobreposição de ressonâncias. Por esta razão, as órbitas regulares, identificadas por apenas um ângulo crítico, e as órbitas irregulares, sujeitas a dois ou mais ângulos críticos, podem ser investigadas pelo comportamento no tempo dos elementos orbitais e por alguma ferramenta, como os expoentes de Lyapunov, para confirmar o movimento caótico.

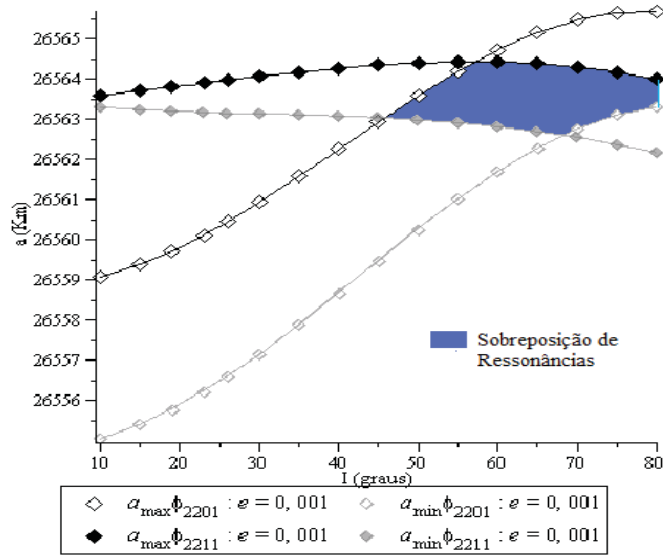


Figura 5.12: $a_{max} (a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min} (a_{crit} - \Delta a)$ para os ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , considerando diferentes inclinações e $e = 0,001$.

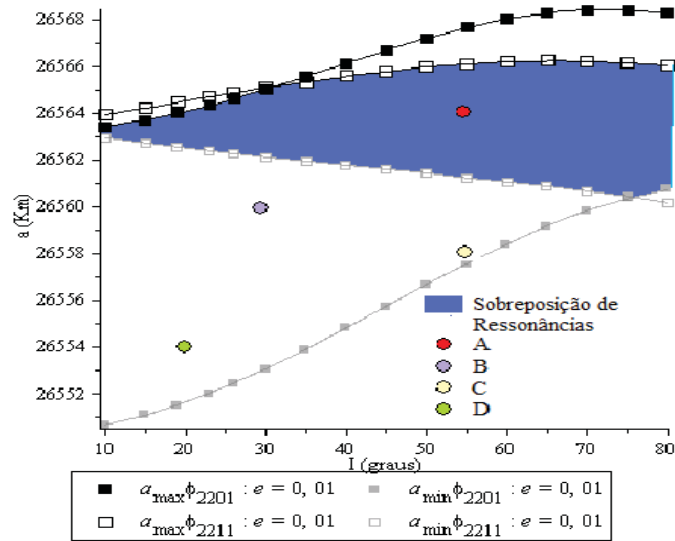


Figura 5.13: $a_{max} (a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min} (a_{crit} - \Delta a)$ para os ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , considerando diferentes inclinações e $e = 0,01$. Os valores de semi-eixo maior, inclinação e excentricidade dos pontos A, B, C e D, são dados na Tabela 5.4.

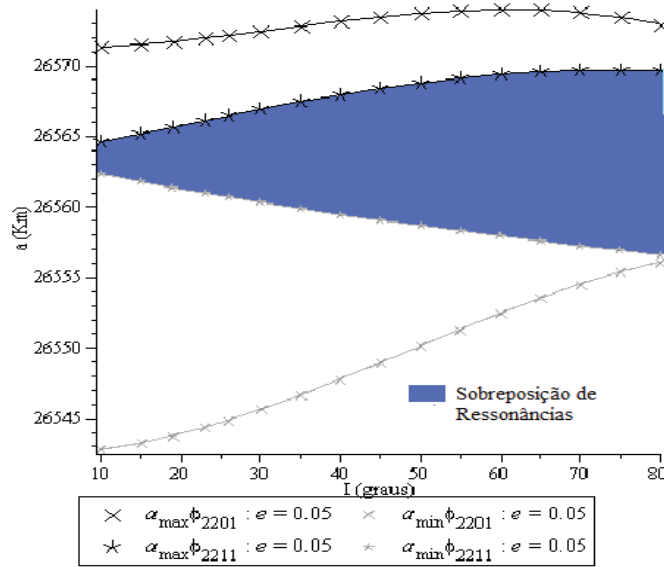


Figura 5.14: $a_{\max} (a_{\text{crit}} + \Delta a)$ e $a_{\min} (a_{\text{crit}} - \Delta a)$ para os ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , considerando diferentes inclinações e $e = 0,05$.

Observe nas Figs. 5.12 a 5.14, que a região de sobreposição de ressonâncias, delimitada pelas separatrizes dos ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , aumenta com a excentricidade, dessa forma, existe uma larga região de sobreposição, para o caso $e = 0,05$ (Fig. 5.14), envolvendo qualquer valor de inclinação. Observar que, o movimento orbital na região delimitada pelas separatrizes, deve ser analisado considerando o sistema completo, isto é, na integração numérica todos os ângulos ressonantes associados aos harmônicos tesserais estudados J_{lm} são considerados juntos. Na região regular, os outros lugares nas Figs. 5.12 a 5.14, o movimento orbital pode ser estudado considerando cada ângulo crítico separadamente.

A região de sobreposição de ressonâncias pode ser investigada quanto a instabilidade ou regularidade nas órbitas. Na Fig. 5.13, diferentes pontos são escolhidos e usados como condições iniciais na integração numérica dos elementos orbitais. A Tab. 5.4 mostra os valores do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação usados como valores iniciais da integração numérica dos elementos orbitais.

Tabela 5.4: Elementos orbitais dos pontos "A", "B", "C" e "D", na Figura 5.13.

Ponto	Semi-eixo maior km	Excentricidade	Inclinação $^{\circ}$
A	26564,000	0,01	55
B	26560,000	0,01	30
C	26558,000	0,01	55
D	26554,000	0,01	20

As Figs. 5.15 a 5.17 mostram o comportamento no tempo do semi-eixo maior, excentricidade e argumento do perigeu, usando como condições iniciais, a Tab. 5.4.

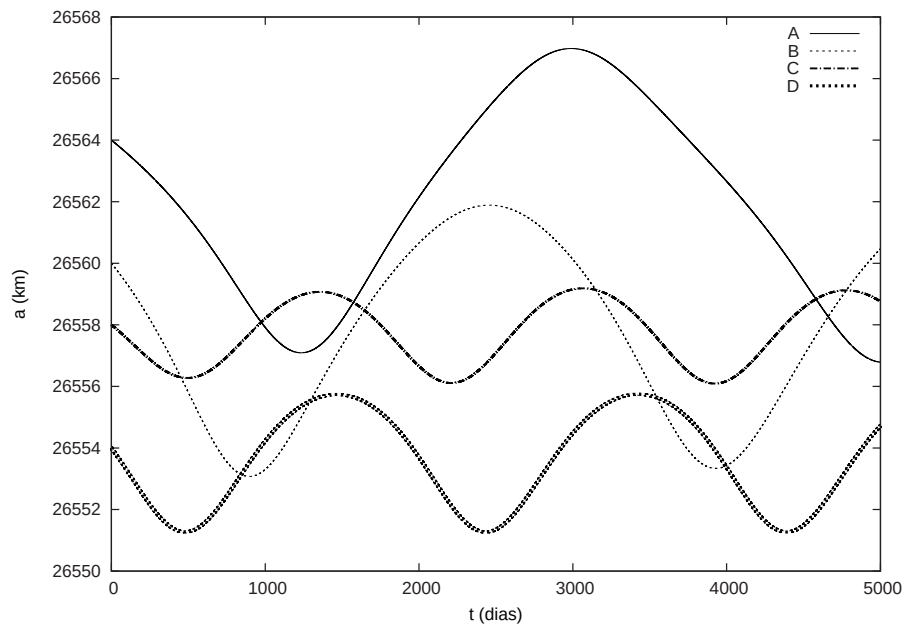


Figura 5.15: Comportamento no tempo do semi-eixo maior, considerando as condições iniciais definidas na Tabela 5.4.

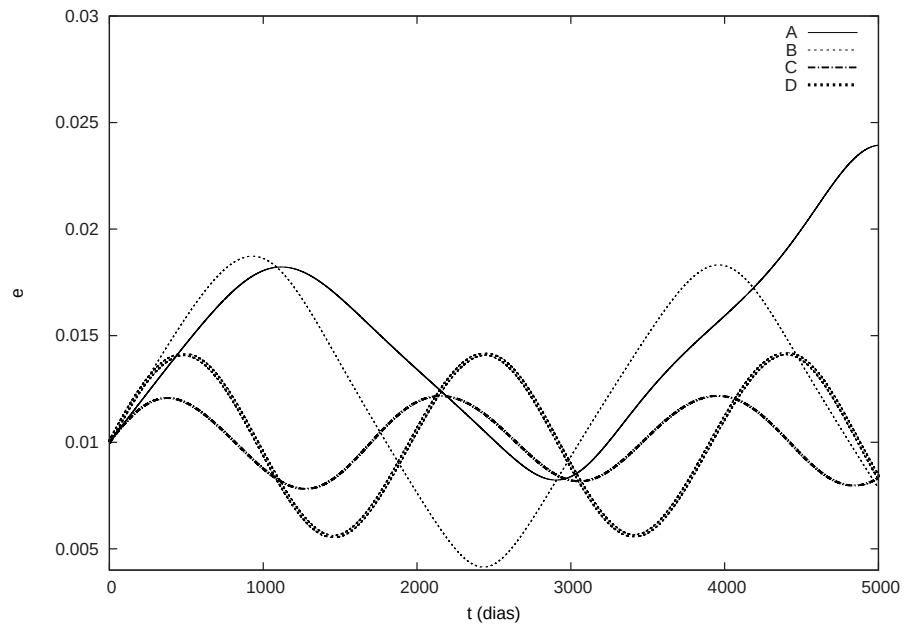


Figura 5.16: Comportamento no tempo da excentricidade, considerando as condições iniciais definidas na Tabela 5.4.

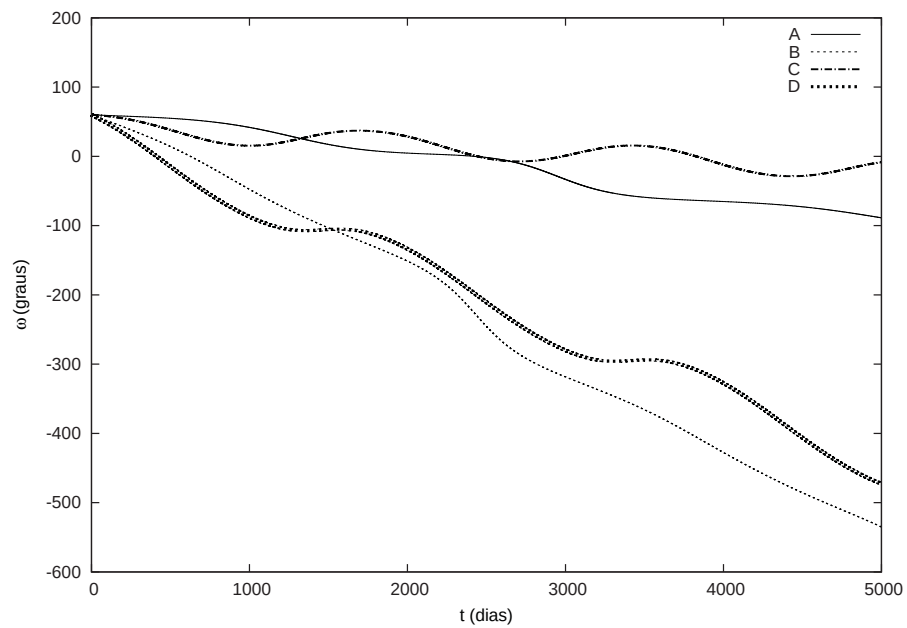


Figura 5.17: Comportamento no tempo do argumento do perigeu, considerando as condições iniciais definidas na Tabela 5.4.

O possível movimento irregular é observado para a órbita "A" nas Figs. 5.15 a 5.17, principalmente sobre o comportamento no tempo da excentricidade. A primeira análise a respeito dos movimentos irregulares nos casos "A", "B", "C" e "D", pode ser feita pelo comportamento no tempo da constante de integração C_2 , definida pela Eq. 5.23.

O comportamento no tempo de C_2 é um forte indicativo de órbitas regulares ou irregulares, porque esta constante de integração é usada para reduzir o sistema em um grau de liberdade para estudar o sistema dinâmico através de um ângulo crítico. Este estudo é possível no movimento orbital regular, o qual produz movimentos de libração ou circulação no espaço de fase. No entanto, nas regiões onde diferentes ângulos críticos são encontrados, por exemplo a Fig. 5.13, o movimento não pode ser tratado por apenas um ângulo crítico, e o termo C_2 deixa de ser constante. Veja a Fig. 5.18 mostrando o comportamento no tempo de C_2 das órbitas "A", "B", "C" e "D".

Na Fig. 5.18, os casos "B", "C" e "D", oscilam ao redor de um valor C_2 e indicam um movimento regular, enquanto que o caso "A" mostra um movimento irregular indicando que a constante C_2 não se conserva e portanto representa uma possível órbita caótica.

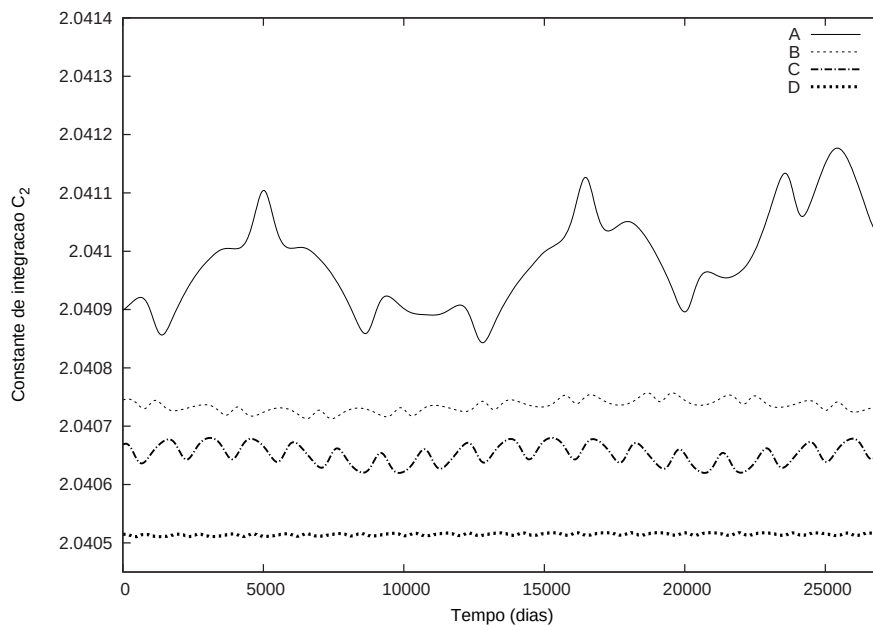


Figura 5.18: Comportamento no tempo da constante de integração C_2 , considerando as condições iniciais definidas na Tabela 5.4.

Na Fig. 5.18, os valores da constante de integração C_2 são normalizados. O parâmetro gravitacional da Terra $\mu=1$, o semi-eixo maior é escrito em termos do raio equatorial médio da Terra r_e , isto é, $\frac{a}{r_e}$ (o mesmo para qualquer variável com dimensão de distância), e as variáveis com dimensão de tempo são escritos $t(s)/806,81(s)$, aproximadamente, em respeito às equações $n^2 a^3 = \mu$ (BATE et al., 1971).

5.7.1.4 Análise dos expoentes de Lyapunov

A estimativa da caoticidade de órbitas é muito importante nos estudos de sistemas dinâmicos, e possíveis movimentos irregulares podem ser analisados pelos expoentes de Lyapunov (CHRISTIANSEN; RUGHZ, 1997).

Considere um sistema dinâmico com uma solução $x(t)$ associado à condição inicial $x(0)$. Ao mesmo momento, uma solução perturbada é produzida com as condições iniciais $x(0) + \varrho(0)$. A extensão da perturbação $\varrho(t)$ no tempo $t = 0$ é o número $|\varrho(0)| = d_0 = d$. A integração no passo τ resulta na nova perturbação $\tau(t)$ com a extensão $d_1 = |\varrho(\tau)|$. O maior expoente de Lyapunov relacionado com a solução $x(t)$ é definida como

$$\kappa = \kappa(\tau, n, d) = \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{d_i}{d} \right) = \frac{1}{n\tau} \ln \left(\frac{d_1}{d} \frac{d_2}{d} \frac{d_3}{d} \frac{d_4}{d} \cdots \frac{d_n}{d} \right) \quad (5.100)$$

sendo que n é o número total de passos de integração de tamanho τ , indicando que $n\tau$ é o tempo total de integração T .

A teoria estabelece que se o maior expoente de Lyapunov κ tende a um valor positivo o movimento orbital é caótico.

A Fig. 5.19 confirma o movimento caótico para o caso "A", porque o maior expoente de Lyapunov tende a um valor positivo. Por outro lado, as Figs. 5.20 a 5.22 confirmam movimentos orbitais regulares para os pontos "B", "C" e "D", porque o maior expoente de Lyapunov, nestes casos, tende a zero.

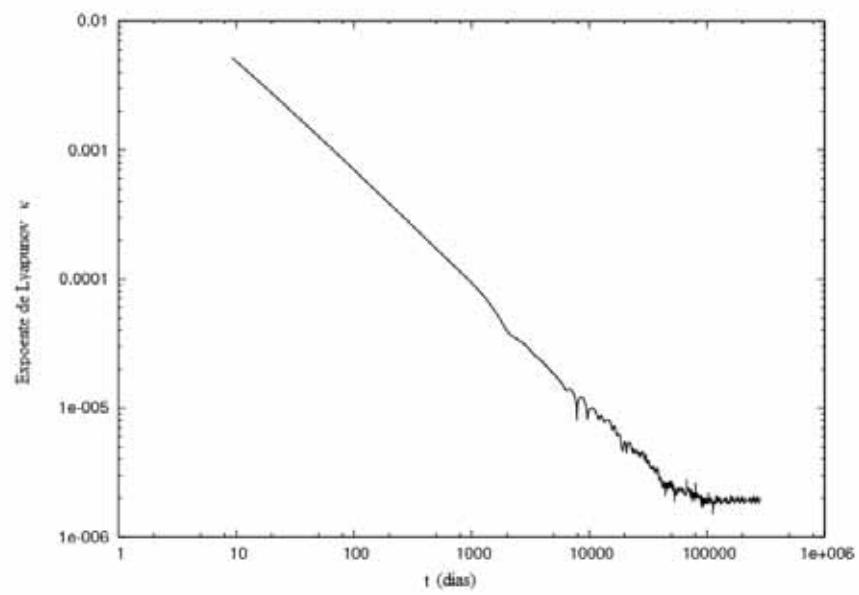


Figura 5.19: Expoente de Lyapunov para a condição inicial correspondente ao ponto "A" na Figura 5.13.

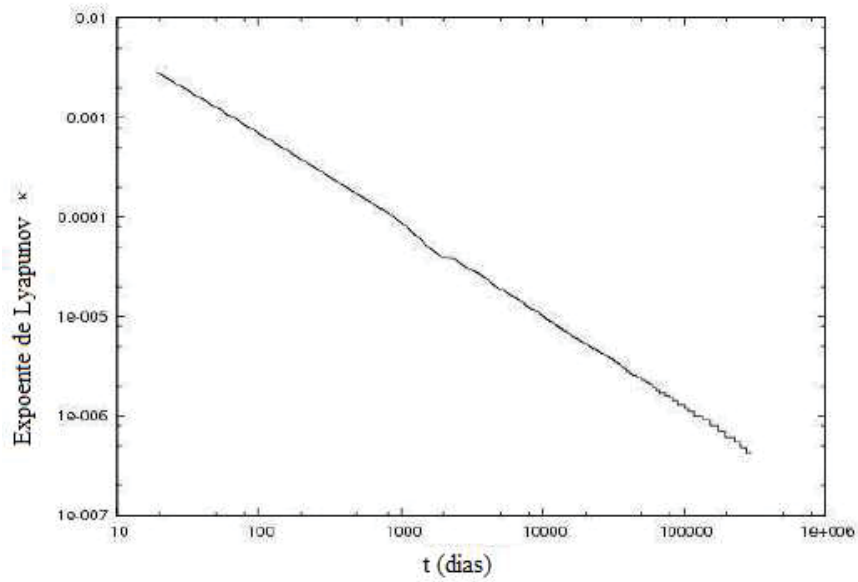


Figura 5.20: Expoente de Lyapunov para a condição inicial correspondente ao ponto "B" na Figura 5.13.

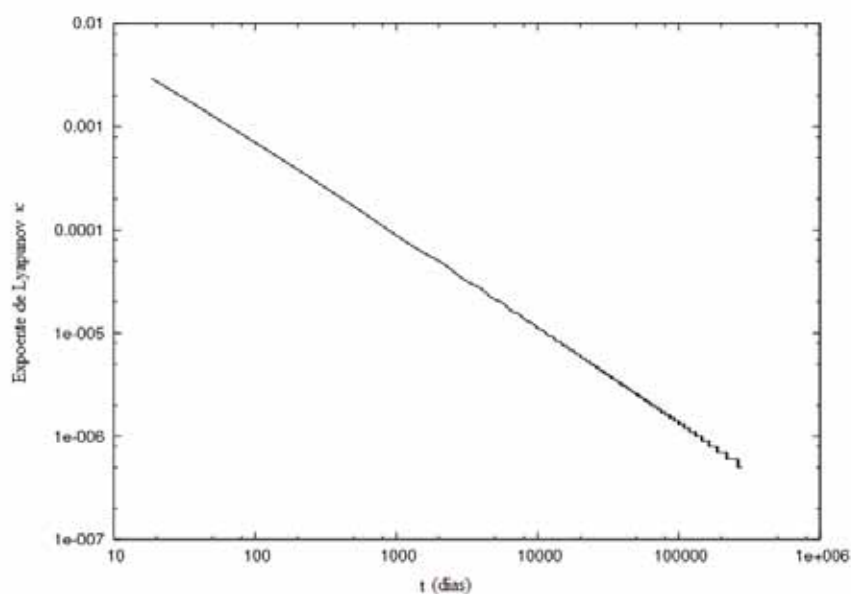


Figura 5.21: Expoente de Lyapunov para a condição inicial correspondente ao ponto "C" na Figura 5.13.

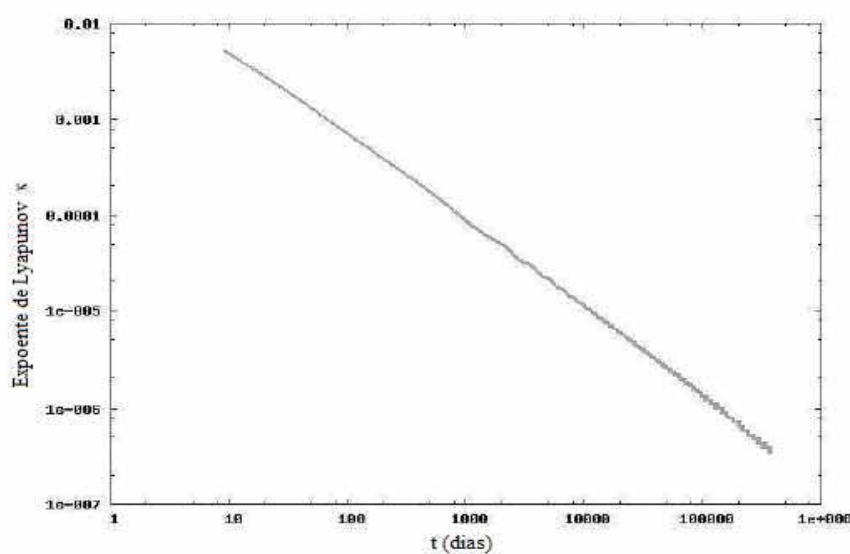


Figura 5.22: Expoente de Lyapunov para a condição inicial correspondente ao ponto "D" na Figura 5.13.

O estudo dos expoentes de Lyapunov é importante para verificar possíveis movimentos irregulares, através da divergência de órbitas vizinhas. Esta análise é útil para trajetórias específicas mas, numa verificação mais ampla, as regiões em que transitam órbitas irregulares podem ser detalhadas usando seções de Poincaré.

5.7.1.5 Estudo dos expoentes de Lyapunov pelo método de Gram-Schmidt

Além do método do maior expoente de Lyapunov, apresentado no trabalho, o método de Gram-Schmidt também foi considerado no estudo do sistema completo, investigando possíveis órbitas caóticas.

O método de Gram-Schmidt, descrito em (CHRISTIANSEN; RUGHZ, 1997; QUN-HONG; JIE-YAN, 2011; SHIMADA; NAGASHIMA, 1979; WIESEL, 1993), é aplicado para calcular os expoentes de Lyapunov. Uma breve descrição deste método é apresentada a seguir.

O sistema dinâmico descrito pelas Eqs. (5.122) pode ser reescrito como

$$\frac{dX_4}{dt} = P_1(X_4, Y_4, x_4, y_4; C_1)$$

$$\frac{dY_4}{dt} = P_2(X_4, Y_4, x_4, y_4; C_1)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = P_3(X_4, Y_4, x_4, y_4; C_1)$$

$$\frac{dy_4}{dt} = P_4(X_4, Y_4, x_4, y_4; C_1). \quad (5.101)$$

Introduzindo

$$z = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad (5.102)$$

$$Z = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}, \quad (5.103)$$

As Equações (5.102) e (5.103) podem ser colocadas na forma

$$\frac{dz}{dt} = Z(z). \quad (5.104)$$

As equações variacionais, associadas ao sistema de equações diferenciais (5.104) são dadas por

$$\frac{d\zeta}{dt} = J\zeta. \quad (5.105)$$

sendo que $J = \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \right)$ é o Jacobiano.

O número total de equações diferenciais usadas neste método é $n(n+1)$, n representa o número de equações de movimento descrevendo o problema, neste caso são quatro. Por este motivo, existem vinte equações diferenciais, quatro são equações de movimento do problema e dezesseis são equações variacionais descritas pela Eq. (5.105)

O sistema dinâmico representado pelas Eqs. (5.104) e (5.105) é numericamente integrado e as trajetórias vizinhas são estudadas usando o método da ortonormalização de Gram-Schmidt para calcular os expoentes de Lyapunov.

O método da ortonormalização de Gram-Schmidt pode ser visto em (SHIMADA; NAGASHIMA, 1979; WIESEL, 1993) com mais detalhes. Uma denominação simplificada do método é descrita como segue.

Considerando as soluções para as Eqs. (5.105) como $\mathbf{u}_\kappa(t)$, a integração no tempo τ inicia das condições iniciais $\mathbf{u}_\kappa(t_0) = \mathbf{e}_\kappa(t_0)$, uma base ortonormal.

Ao fim do intervalo de tempo, os volumes de dimensão κ ($\kappa = 1, 2, \dots, N$) produzidos pelos vetores $\mathbf{u}_\kappa$ são calculados

$$V_\kappa = \left\| \bigwedge_{j=1}^{\kappa} \mathbf{u}_j(t) \right\|, \quad (5.106)$$

$\bigwedge$ é o produto externo e $\| \cdot \|$ é uma norma.

Por esta ideia, os vetores $\mathbf{u}_\kappa$ são ortonormalizados pelo método de Gram-Schmidt. Em outras palavras, novos vetores ortonormais $\mathbf{e}_\kappa(t_0 + \tau)$ são calculados, em geral, de acordo a

$$\mathbf{e}_\kappa = \frac{\mathbf{u}_\kappa - \sum_{j=1}^{\kappa-1} (\mathbf{u}_\kappa \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j}{\left\| \mathbf{u}_\kappa - \sum_{j=1}^{\kappa-1} (\mathbf{u}_\kappa \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j \right\|}. \quad (5.107)$$

O método de Gram-Schmidt faz invariante o subespaço de dimensão κ produzido pelos vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_\kappa$ em construção do novo subespaço de dimensão κ gerado pelos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_\kappa$.

Com o novo vetor $\mathbf{u}_\kappa(t_0 + \tau) = \mathbf{e}_\kappa(t_0 + \tau)$, a integração é reiniciada e levada a $t = t_0 + 2\tau$. O ciclo completo é repetido sobre um longo intervalo de tempo. O teorema garante que os expoentes de Lyapunov de dimensão κ são calculados por (SHIMADA; NAGASHIMA, 1979; WIESEL, 1993)

$$\lambda(\kappa) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\ln(V_\kappa(t_0 + j\tau))}{\ln(V_\kappa(t_0 + (j-1)\tau))} . \quad (5.108)$$

Da mesma forma que no método do maior expoente de Lyapunov, o teorema apresentado estabelece que se o expoente de Lyapunov tende a um valor positivo a órbita é caótica.

Na próxima seção são mostrados alguns resultados envolvendo o estudo dos expoentes de Lyapunov pelo método de Gram-Schmidt.

5.7.2 Estudo do Sistema Completo

Nesta seção, os movimentos orbitais de satélites artificiais na ressonância 2:1 são descritos considerando todos os ângulos ressonantes juntos, associados aos harmônicos tesserais J_{22} e J_{42} . Este estudo permite investigar, principalmente, as regiões onde existem sobreposições de ressonâncias.

A Hamiltoniana H'_{RS} , (4.46), possui todas as frequências ressonantes, relativas à comensurabilidade α , onde o argumento $\phi_{lmp(\alpha m)}$ é dado por

$$\phi_{lmp(\alpha m)} = m(\alpha x_1 - \theta_1) + (l - 2p - \alpha m)y_1 - \phi_{lmp(\alpha m)0} , \quad (5.109)$$

com

$$\phi_{lmp(\alpha m)0} = m\lambda_{lm} - (l - m)\frac{\pi}{2} . \quad (5.110)$$

Os termos seculares e ressonantes são dados, respectivamente, por $B_{2j,0,j,0}(X_1, Y_1, C_1)$ e $B_{lmp(\alpha m)}(X_1, Y_1, C_1)$.

Cada uma das frequências contidas em $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{d\theta_1}{dt}$ é relacionada, através dos coeficientes l , m , para os harmônicos tesserais J_{lm} . Variando os coeficientes l , m , p e mantendo q/m fixo, encontram-se todas as frequências $\frac{d\phi_{1,lm p(\alpha m)}}{dt}$ para uma ressonância específica.

De H_{rs} , levando em conta, $j=1,2$, $l=2,4$, $m=2$, $\alpha = 1/2$ e $p=0,1,2,3$, consegue-se

$$\begin{aligned}\hat{H}_1 = & \frac{\mu^2}{2X_1^2} - \omega_e \Theta_1 + B_{1,2010}(X_1, Y_1, C_1) + B_{1,4020}(X_1, Y_1, C_1) \\ & + B_{1,2201}(X_1, Y_1, C_1) \cos(x_1 - 2\theta_1 + y_1 - 2\lambda_{22}) \\ & + B_{1,2211}(X_1, Y_1, C_1) \cos(x_1 - 2\theta_1 - y_1 - 2\lambda_{22}) \\ & + B_{1,2221}(X_1, Y_1, C_1) \cos(x_1 - 2\theta_1 - 3y_1 - 2\lambda_{22}) \\ & + B_{1,4211}(X_1, Y_1, C_1) \cos(x_1 - 2\theta_1 + y_1 - 2\lambda_{42} + \pi) \\ & + B_{1,4221}(X_1, Y_1, C_1) \cos(x_1 - 2\theta_1 - y_1 - 2\lambda_{42} + \pi) \\ & + B_{1,4231}(X_1, Y_1, C_1) \cos(x_1 - 2\theta_1 - 3y_1 - 2\lambda_{42} + \pi).\end{aligned}\quad (5.111)$$

A Hamiltoniana $\hat{H}_1$ é definida considerando uma ressonância fixa e três diferentes ângulos críticos associados ao harmônico tesseral J_{22} , os ângulos críticos associados ao harmônico tesseral J_{42} possui a mesma frequência dos ângulos críticos associados a J_{22} com uma diferença na fase. Os outros termos em H_{rs} são considerados como termos de curto período.

A Tabela 5.5 mostra os coeficientes ressonantes usados na Hamiltoniana $\hat{H}_1$.

Tabela 5.5: Coeficientes ressonantes.

Grau (l)	Ordem (m)	p	q
2	2	0	1
2	2	1	1
2	2	2	1
4	2	1	1
4	2	2	1
4	2	3	1

Finalmente, uma última transformação de variáveis é feita, com a proposta de escrever os ângulos ressonantes explicitamente. Esta transformação é definida por

$$X_4 = X_1 \quad Y_4 = Y_1 \quad \Theta_4 = \Theta_1 + 2X_1$$

$$x_4 = x_1 - 2\theta_1 \quad y_4 = y_1 \quad \theta_4 = \theta_1. \quad (5.112)$$

Dessa forma, considerando as Eqs. (5.111) e (5.112), a Hamiltoniana $\tilde{H}_4$ é encontrada

$$\begin{aligned} \tilde{H}_4 = & \frac{\mu^2}{2X_4^2} - \omega_e(\Theta_4 - 2X_4) + B_{4,2010}(X_4, Y_4, C_1) + B_{4,4020}(X_4, Y_4, C_1) \\ & + B_{4,2201}(X_4, Y_4, C_1)\cos(x_4 + y_4 - 2\lambda_{22}) \\ & + B_{4,2211}(X_4, Y_4, C_1)\cos(x_4 - y_4 - 2\lambda_{22}) \\ & + B_{4,2221}(X_4, Y_4, C_1)\cos(x_4 - 3y_4 - 2\lambda_{22}) \\ & + B_{4,4211}(X_4, Y_4, C_1)\cos(x_4 + y_4 - 2\lambda_{42} + \pi) \\ & + B_{4,4221}(X_4, Y_4, C_1)\cos(x_4 - y_4 - 2\lambda_{42} + \pi) \\ & + B_{4,4231}(X_4, Y_4, C_1)\cos(x_4 - 3y_4 - 2\lambda_{42} + \pi), \end{aligned} \quad (5.113)$$

com $\omega_e\Theta_4$ constante.

e

$$B_{4,2010} = \frac{\mu^4}{X_4^6} r_e^2 J_{20} \left(-\frac{3}{4} \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} + \frac{1}{4} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}{X_4^2} \right), \quad (5.114)$$

$$\begin{aligned} B_{4,4020} = & \frac{\mu^6}{X_4^{10}} r_e^4 J_{40} \left(\frac{105}{64} \left(1 - \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} \right)^2 - \frac{3}{2} + \frac{15}{8} \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} \right) \\ & \times \left(1 + 5 \frac{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}{X_4^2} \right), \end{aligned} \quad (5.115)$$

$$B_{4,2201} = \frac{21}{8X_4^7} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left(1 + \frac{C_1 + 2X_4}{X_4 + Y_4} \right)^2 \sqrt{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}, \quad (5.116)$$

$$B_{4,2211} = \frac{3}{2X_4^7} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} \right) \sqrt{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}, \quad (5.117)$$

$$B_{4,2221} = -\frac{3}{8X_4^7} \mu^4 r_e^2 J_{22} \left(1 - \frac{C_1 + 2X_4}{X_4 + Y_4} \right)^2 \sqrt{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}, \quad (5.118)$$

$$\begin{aligned}
B_{4,4211} &= \frac{9}{2X_4^{11}} \mu^6 r_e^4 J_{42} \left(\frac{35}{27} \left(1 - \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} \right) (C_1 + 2X_4) \right. \\
&\quad \times \left(1 + \frac{C_1 + 2X_4}{X_4 + Y_4} \right) (X_4 + Y_4)^{-1} \\
&\quad \left. - \frac{15}{8} \left(1 + \frac{C_1 + 2X_4}{X_4 + Y_4} \right)^2 \right) \sqrt{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}, \tag{5.119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{4,4221} &= \frac{5}{2X_4^{11}} \mu^6 r_e^4 J_{42} \left(\frac{105}{16} \left(1 - \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} \right) \left(1 - 3 \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{15}{4} - \frac{15}{4} \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} \right) \sqrt{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}, \tag{5.120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{4,4231} &= \frac{\mu^6}{X_4^{10}} r_e^4 J_{42} \left(-\frac{35}{27} \left(1 - \frac{(C_1 + 2X_4)^2}{(X_4 + Y_4)^2} \right) (C_1 + 2X_4) \right. \\
&\quad \times \left(1 - \frac{C_1 + 2X_4}{X_4 + Y_4} \right) (X_4 + Y_4)^{-1} - \frac{15}{8} \left(1 - \frac{C_1 + 2X_4}{X_4 + Y_4} \right)^2 \Big) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}}{X_4} + \frac{33}{16} \frac{-Y_4^2 - 2X_4Y_4}{X_4^2} \right). \tag{5.121}
\end{aligned}$$

Desde que o termo $\omega_e \Theta_4$ é constante, ele não é significativo nas equações de movimento, e, uma nova Hamiltoniana pode ser introduzida,

$$\hat{H}_4 = \tilde{H}_4 + \omega_e \Theta_4,$$

O sistema dinâmico descrito por $\hat{H}_4$, é dado por

$$\frac{d(X_4, Y_4)}{dt} = \frac{\partial \hat{H}_4}{\partial (x_4, y_4)} \quad \frac{d(x_4, y_4)}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}_4}{\partial (X_4, Y_4)}, \tag{5.122}$$

A constante de integração C_1 , nas Eqs. (5.114) e (5.121), é escrita em termos dos valores iniciais dos elementos orbitais, a_o , e_o e I_o ,

$$C_1 = \sqrt{\mu a_o} (\sqrt{1 - e_o^2} \cos(I_o) - 2). \tag{5.123}$$

ou em termos das variáveis X_4 e Y_4

$$C_1 = X_4(\cos(I_o) - 2) + Y_4\cos(I_o).$$

Nas próximas seções, alguns resultados da integração numérica das Eqs. (5.122) são apresentados.

5.7.2.1 Resultados do sistema completo

Figuras 5.23 a 5.26 mostram o comportamento no tempo do semi-eixo maior, ângulo x_4 , argumento do perigeu e da excentricidade para dois casos diferentes. O primeiro caso considera os ângulos críticos ϕ_{2201} , ϕ_{2211} e ϕ_{2221} , associados ao harmônico tesseral J_{22} , e, o segundo caso considera os ângulos críticos associados aos harmônicos tesserais J_{22} e J_{42} . Os ângulos associados a J_{42} , ϕ_{4211} , ϕ_{4221} e ϕ_{4231} , possuem a mesma frequência dos ângulos críticos associados a J_{22} com uma fase diferente. As condições iniciais correspondentes às variáveis X_4 e Y_4 são definidas para $e_o = 0,05$, $I_o = 10^\circ$, e, a_o dadas na Tab. 5.6. As condições iniciais das variáveis x_4 e y_4 são 0° e 60° , respectivamente. A Tabela 5.6 mostra os valores de C_1 correspondentes às condições iniciais dadas.

Tabela 5.6: Valores da constante de integração C_1 para $e = 0,05$, $I = 10^\circ$ e valores diferentes de semi-eixo maior.

$a(0) \times 10^3(m)$	$C_1 \times 10^{11}(m^2/s)$
26555,000	-1,045724331
26565,000	-1,045921210
26568,000	-1,045980267
26574,000	-1,046098370

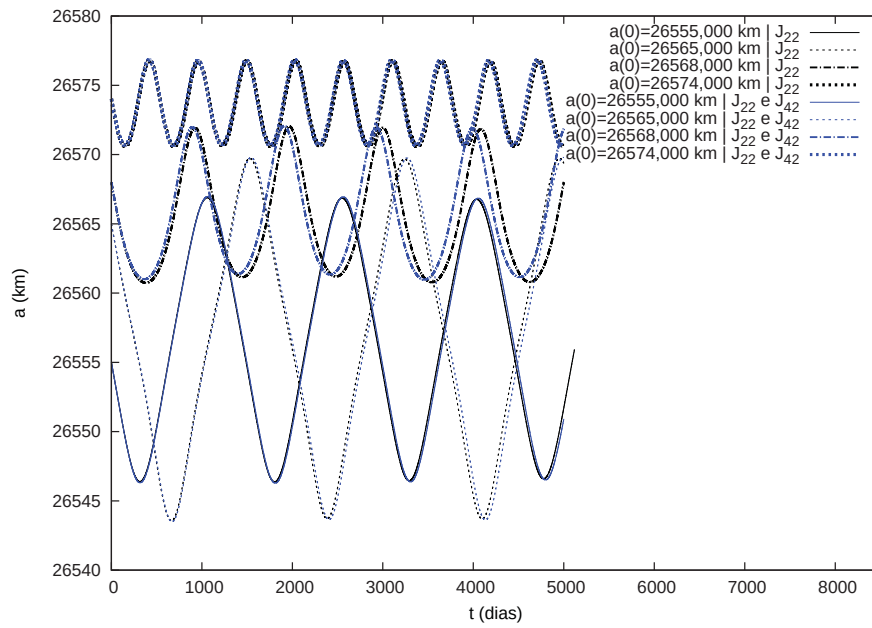


Figura 5.23: Comportamento no tempo do semi-eixo maior para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.6.

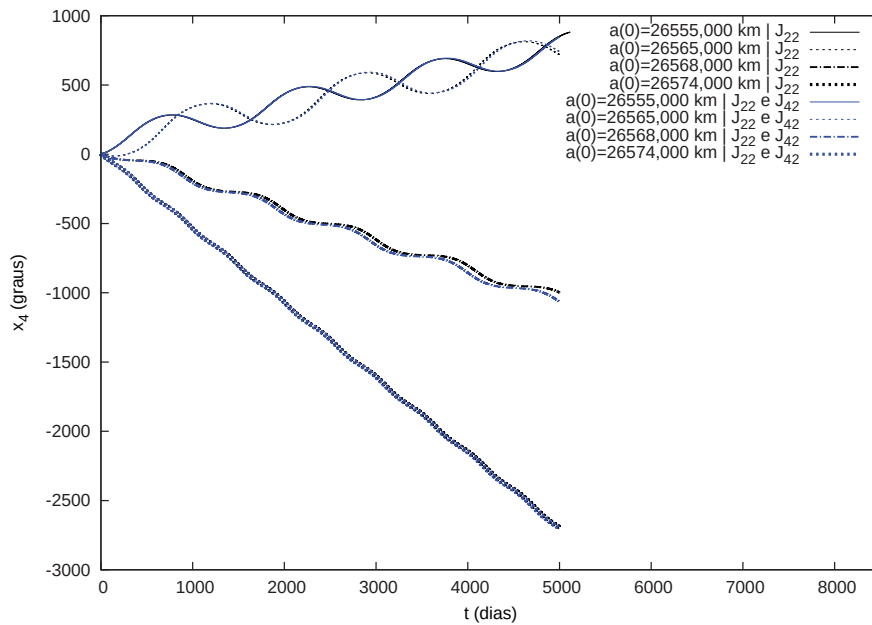


Figura 5.24: Comportamento no tempo de x_4 para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.6.

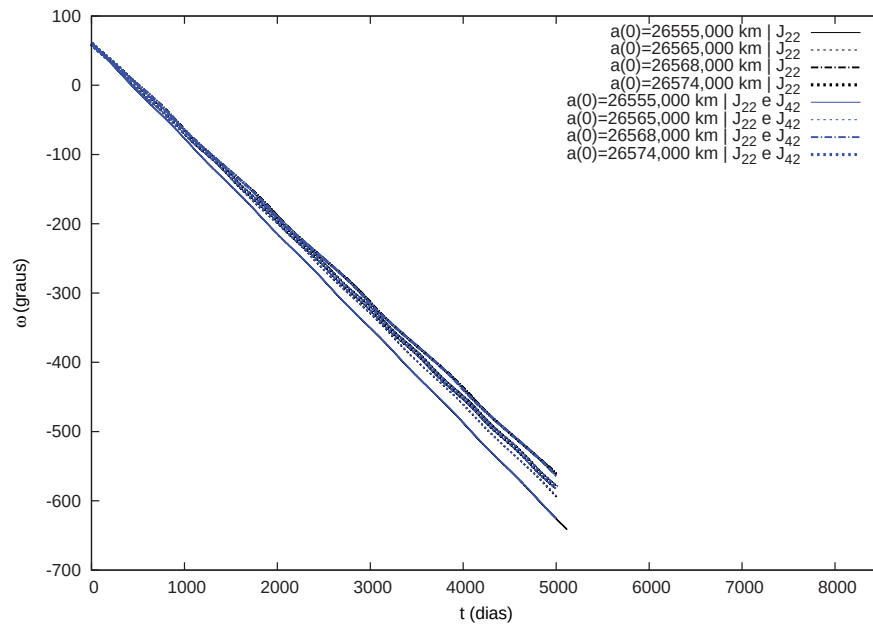


Figura 5.25: Comportamento no tempo do argumento do pericentro para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.6.

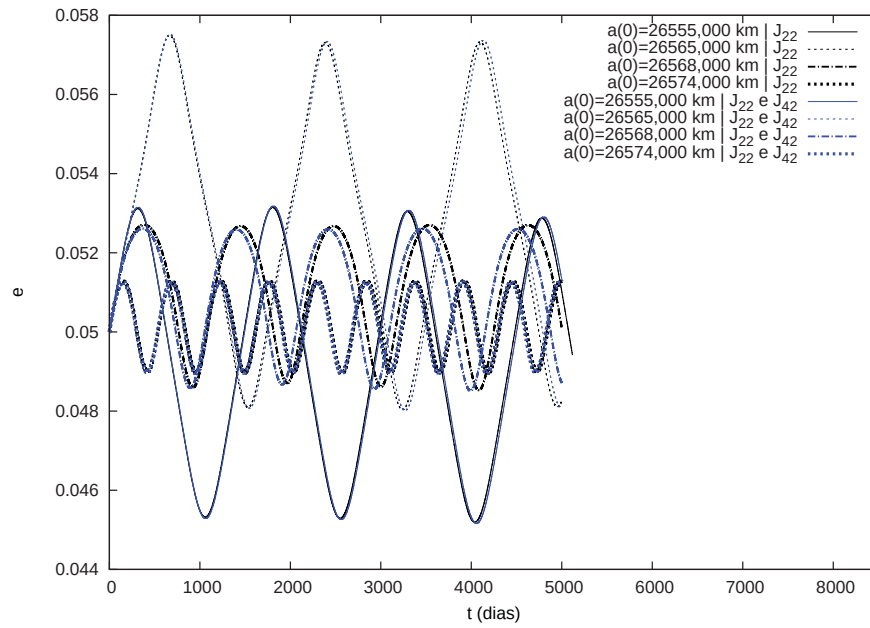


Figura 5.26: Comportamento no tempo da excentricidade para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.6.

Figuras 5.27 a 5.30 mostram o comportamento no tempo do semi-eixo maior, ângulo x_4 , argumento do perigeu e da excentricidade, de acordo a integração numérica das equações de movimento, (5.122), considerando três diferentes ângulos ressonantes juntos: ϕ_{2201} , ϕ_{2211} e ϕ_{2221} associados a J_{22} , e, três ângulos, ϕ_{4211} , ϕ_{4221} e ϕ_{4231} associados a J_{42} , com a mesma frequência dos ângulos ressonantes relacionados a J_{22} , mas com a fase diferente. As condições iniciais correspondentes às variáveis X_4 e Y_4 são definidas para $e_o = 0,001$, $I_o = 55^\circ$, e, a_o dadas na Tab. 5.7. As condições iniciais das variáveis x_4 e y_4 são 0° e 0° , respectivamente. A Tabela 5.7 mostra os valores de C_1 correspondentes às condições iniciais dadas.

Tabela 5.7: Valores da constante de integração C_1 para $e = 0,001$, $I = 55^\circ$ e valores diferentes de semi-eixo maior.

$a(0) \times 10^3(m)$	$C_1 \times 10^{11}(m^2/s)$
26555,000	-1,467543158
26561,700	-1,467728282
26562,400	-1,467747623
26563,500	-1,467778013
26565,000	-1,467819454

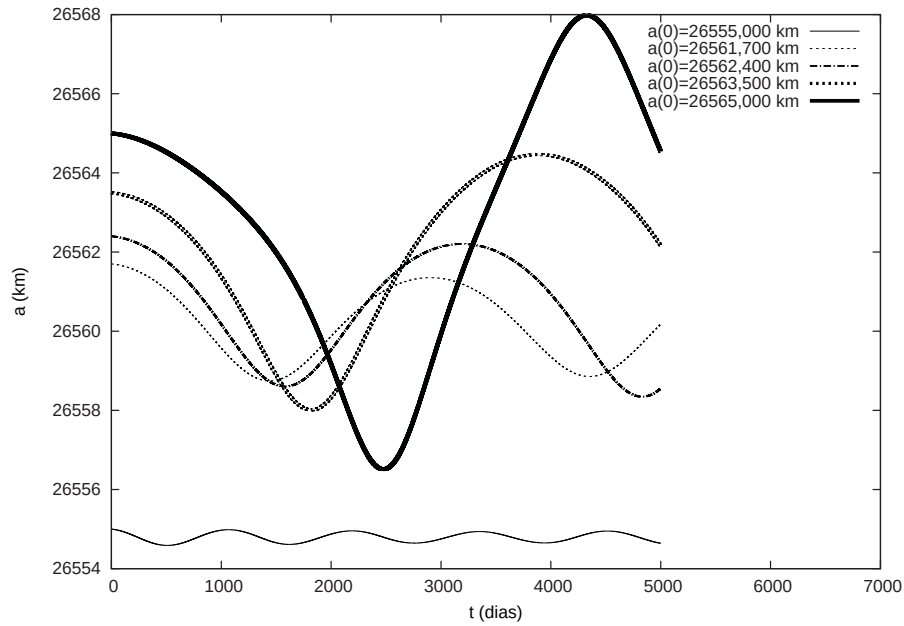


Figura 5.27: Comportamento no tempo do semi-eixo maior para diferentes valores de C_1 dados na Tabela 5.7.

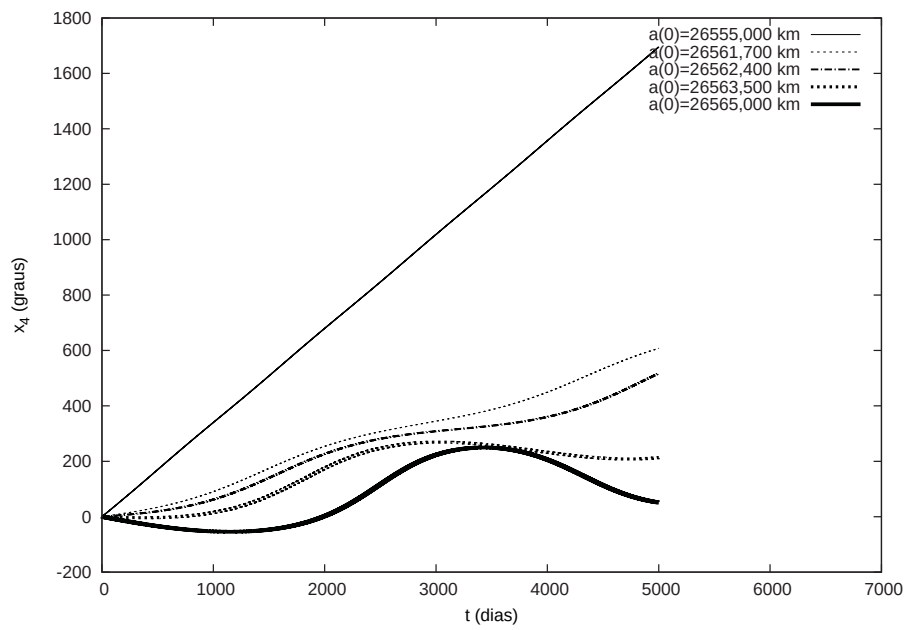


Figura 5.28: Comportamento no tempo do ângulo x_4 para diferentes valores de C_1 dados na Tabela 5.7.

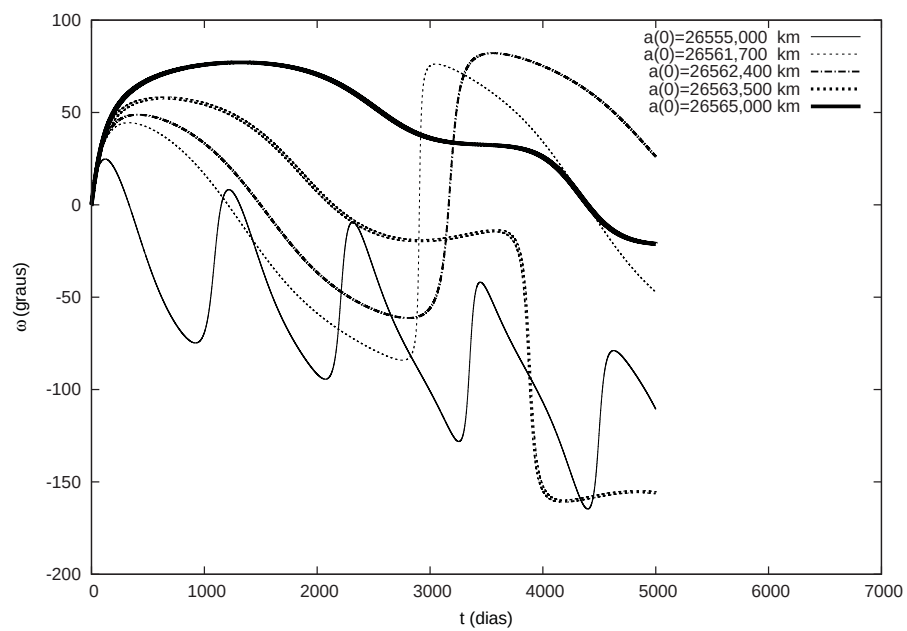


Figura 5.29: Comportamento no tempo do argumento do pericentro para diferentes valores de C_1 dados na Tabela 5.7.

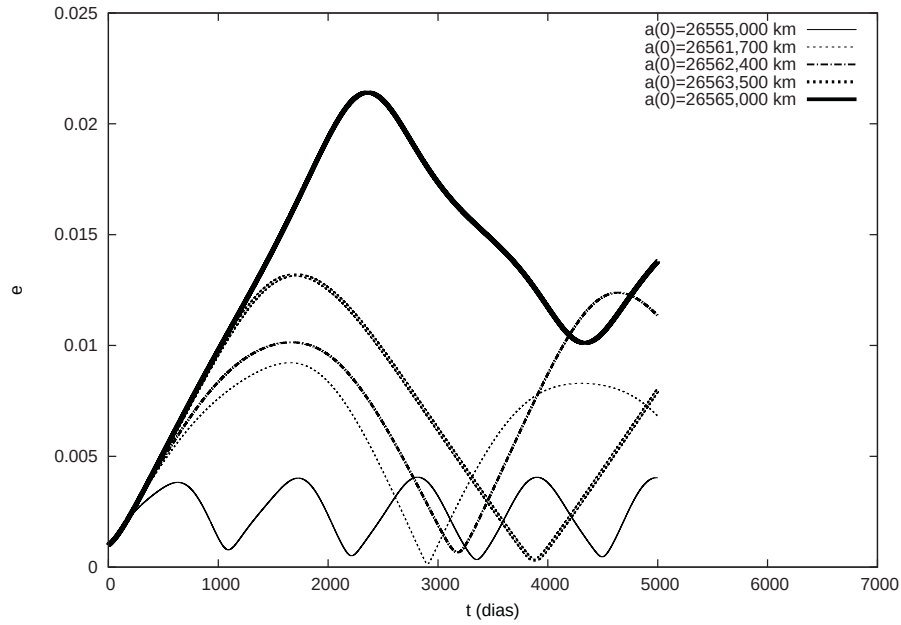


Figura 5.30: Comportamento no tempo da excentricidade para diferentes valores de C_1 dados na Tabela 5.7.

Analisando as Figs. 5.23 a 5.26, pode-se observar uma correção nas órbitas quando os termos relacionados ao harmônico tesseral J_{42} é adicionado ao modelo. Observando pela porcentagem, a contribuição das amplitudes dos termos $B_{4,4211}$, $B_{4,4221}$ e $B_{4,4231}$, em cada ângulo crítico estudado, é de cerca de 1,66% até 4,94%. De fato, nos estudos das perturbações no movimento de satélites artificiais, a precisão é importante, de forma que adicionando harmônicos zonais e tesserais diferentes ao modelo, pode-se ter uma melhor descrição a respeito do movimento orbital.

Figuras 5.31 a 5.34 mostram o comportamento no tempo do semi-eixo maior, ângulo x_4 , argumento do perigeu e da excentricidade, de acordo à integração numérica das equações de movimento, (5.122), considerando três ângulos ressonantes diferentes juntos; ϕ_{2201} , ϕ_{2211} e ϕ_{2221} associados a J_{22} e três ângulos, ϕ_{4211} , ϕ_{4221} e ϕ_{4231} associados a J_{42} . As condições iniciais correspondentes às variáveis X_4 e Y_4 são definidas para $e_o = 0,01$, $I_o = 55^\circ$, e, a_o dadas na Tab. 5.8. As condições iniciais das variáveis x_4 e y_4 são 0° e 60° , respectivamente. A Tabela 5.8 mostra os valores de C_1 correspondentes às condições iniciais dadas.

Tabela 5.8: Valores da constante de integração C_1 para $e = 0,01$, $I = 55^0$ e valores diferentes de semi-eixo maior.

$a(0) \times 10^3(m)$	$C_1 \times 10^{11}(m^2/s)$
26555,000	-1,467572370
26558,000	-1,467655265
26562,000	-1,467765786
26564,000	-1,467821043
26568,000	-1,467931552

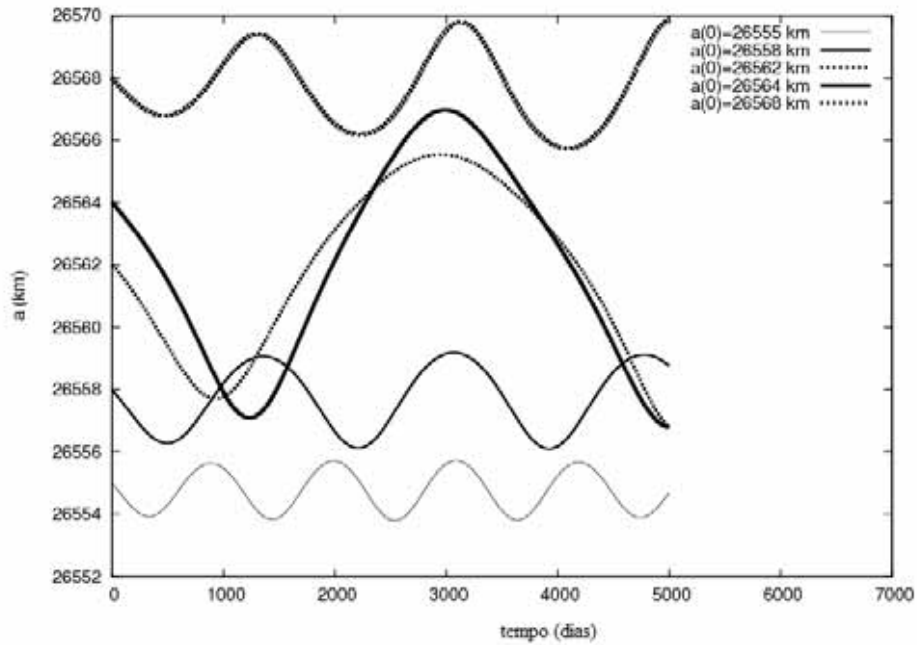


Figura 5.31: Comportamento no tempo do semi-eixo maior para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.8.

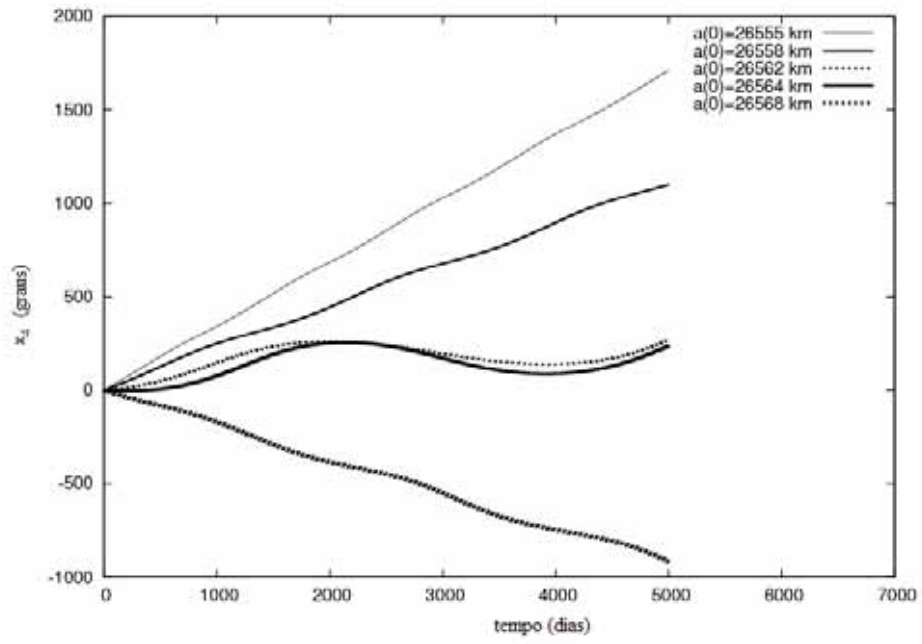


Figura 5.32: Comportamento no tempo do ângulo x_4 para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.8.

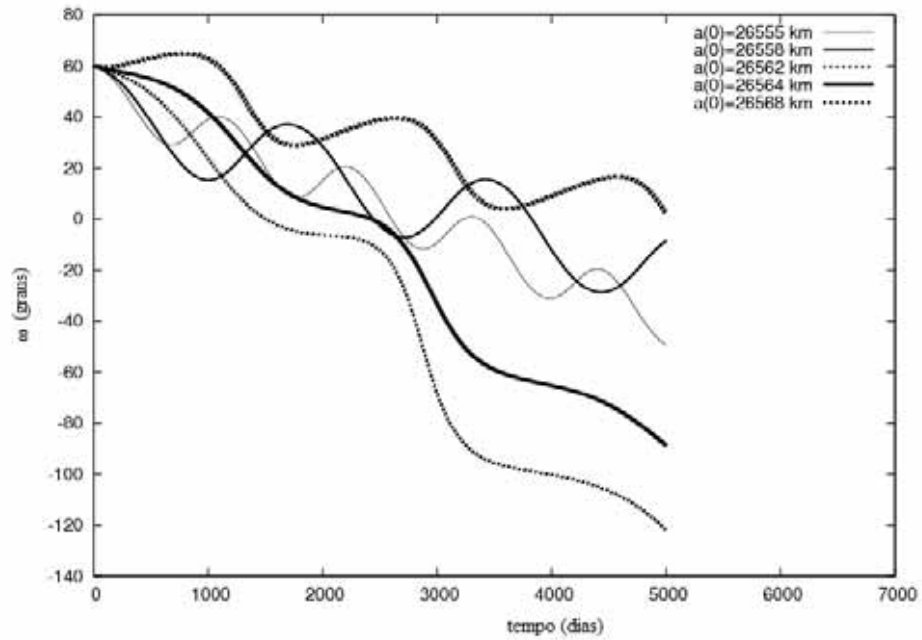


Figura 5.33: Comportamento no tempo do argumento do pericentro para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.8.

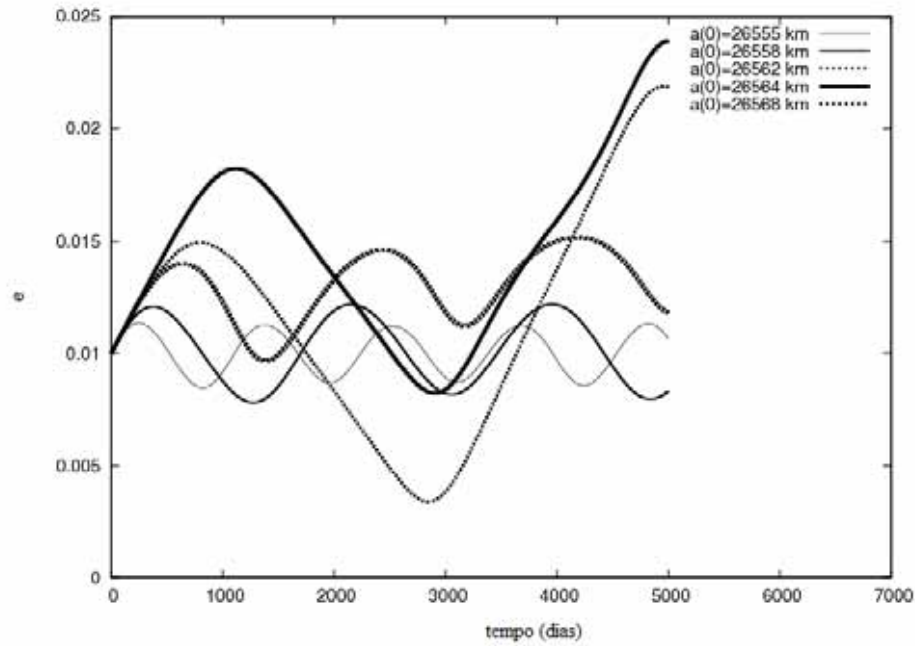


Figura 5.34: Comportamento no tempo da excentricidade para valores diferentes de C_1 dados na Tabela 5.8.

Analisando as Figs. 5.27 a 5.34, podem ser observados possíveis movimentos irregulares nas Figs. 5.27 a 5.30, especificamente considerando valores para $C_1 = -1,467778013 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467819454 \times 10^{11} m^2/s$, e nas Figs. 5.31 a 5.34, para $C_1 = -1,467765786 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467821043 \times 10^{11} m^2/s$. Estas curvas são analisadas pelos expoentes de Lyapunov em um tempo especificado, verificando possíveis movimentos regulares ou caóticos.

Figuras 5.35 e 5.36 mostram o comportamento no tempo dos expoentes de Lyapunov para dois casos diferentes, de acordo aos valores iniciais das Figs. 5.27 a 5.30 e as Figs. 5.31 a 5.34. O sistema dinâmico envolve os harmônicos zonais J_{20} e J_{40} , e os harmônicos tesserais J_{22} e J_{42} . O estudo dos expoentes de Lyapunov, desenvolvido nesta seção, usa o método da ortonormalização de Gram-Schmidt, decrito no presente trabalho. Na Fig. 5.35, os valores iniciais para C_1 , x_4 e y_4 são $C_1 = -1,467778013 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467819454 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 0^\circ$, respectivamente. Na Fig. 5.36, os valores iniciais para C_1 , x_4 e y_4 são $C_1 = -1,467765786 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467821043 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 60^\circ$, respectivamente. Em cada caso são usados dois valores diferentes para semi-eixo maior correspondendo às órbitas vizinhas mostradas anteriormente nas Figs. 5.27 a 5.30 e as Figs. 5.31 a 5.34.

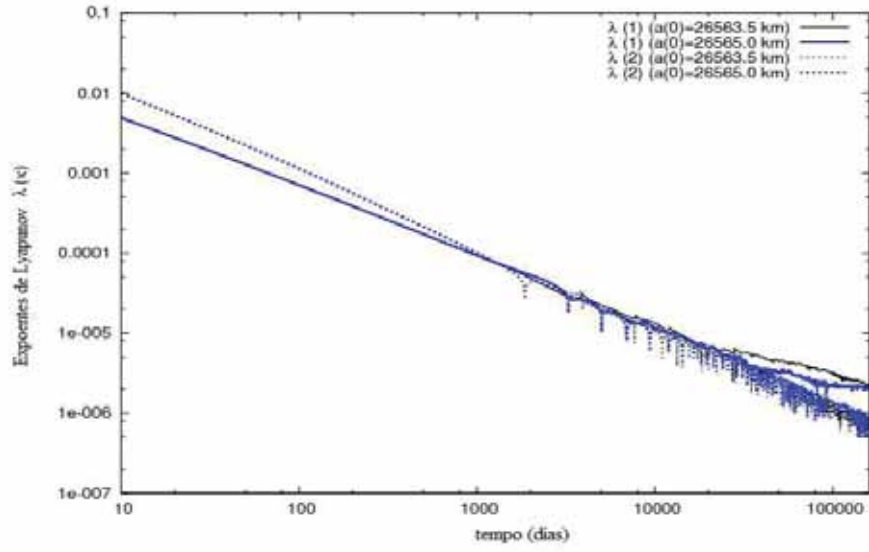


Figura 5.35: Expoentes de Lyapunov $\lambda(1)$ e $\lambda(2)$, correspondendo às variáveis X_4 e Y_4 , respectivamente, para $C_1 = -1,467778013 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467819454 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 0^\circ$.

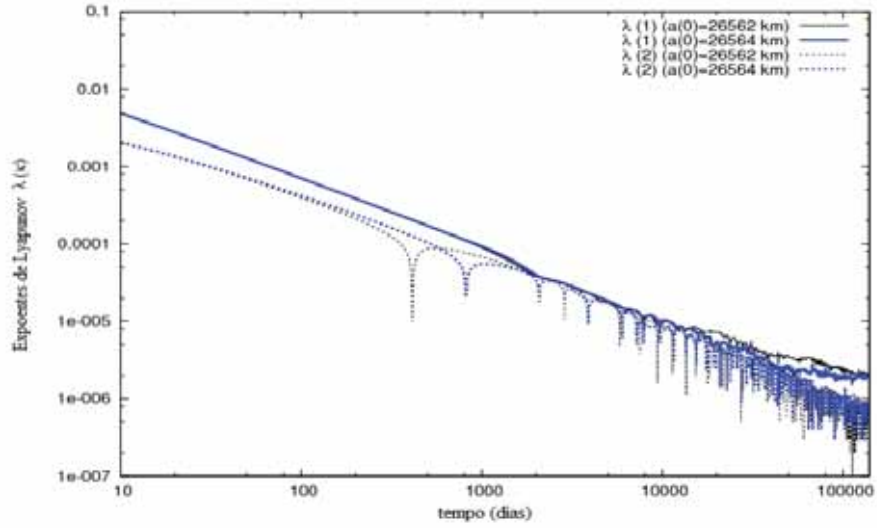


Figura 5.36: Expoentes de Lyapunov $\lambda(1)$ e $\lambda(2)$, correspondendo às variáveis X_4 e Y_4 , respectivamente, para $C_1 = -1,467765786 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467821043 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 60^\circ$.

As Figs. 5.35 e 5.36 mostram os expoentes de Lyapunov para órbitas vizinhas. O tempo usado nos cálculos dos expoentes de Lyapunov é de cerca de 150.000 dias. Para este tempo, pode ser observado na Fig. 5.35 que $\lambda(1)$, correspondendo ao valor inicial $a(0)=26565,0 \text{ km}$, tende a um valor positivo, evidenciando uma trajetória caótica. Por outro lado, analisando a mesma Fig. 5.35, $\lambda(1)$, correspondendo ao valor inicial $a(0)=26563,5 \text{ km}$, não mostra uma estabilização em torno de um valor positivo, neste tempo especificado. Provavelmente, o tempo não é suficiente para a estabilização em algum valor positivo, ou, $\lambda(1)$, valor inicial $a(0)=26563,5 \text{ km}$, tende a zero, evidenciando uma órbita regular. Analisando agora a Fig. 5.36, pode ser verificado que $\lambda(1)$, correspondendo ao valor inicial $a(0)=26564,0 \text{ km}$, tende a um valor positivo, o que difere de $\lambda(1)$, valor inicial $a(0)=26562,0 \text{ km}$.

Reescalando os eixos das Figs. 5.35 e 5.36, como descrito nas Figs. 5.37 e 5.38, respectivamente, a informação de que os expoentes de Lyapunov tendem a um valor positivo pode ser melhor visualizado.

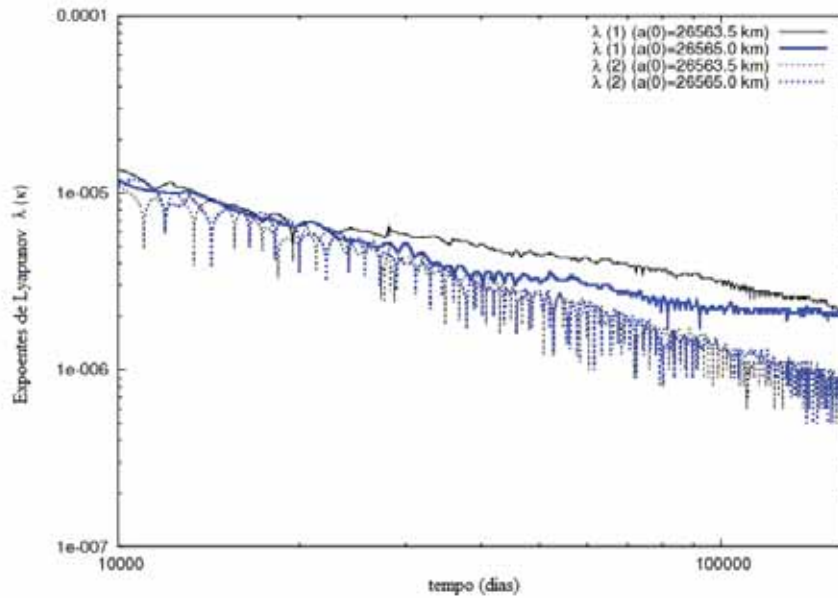


Figura 5.37: Expoente de Lyapunov $\lambda(1)$ e $\lambda(2)$, correspondendo às variáveis X_4 e Y_4 , respectivamente, para $C_1 = -1,467778013 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}$ e $C_1 = -1,467819454 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 0^\circ$.

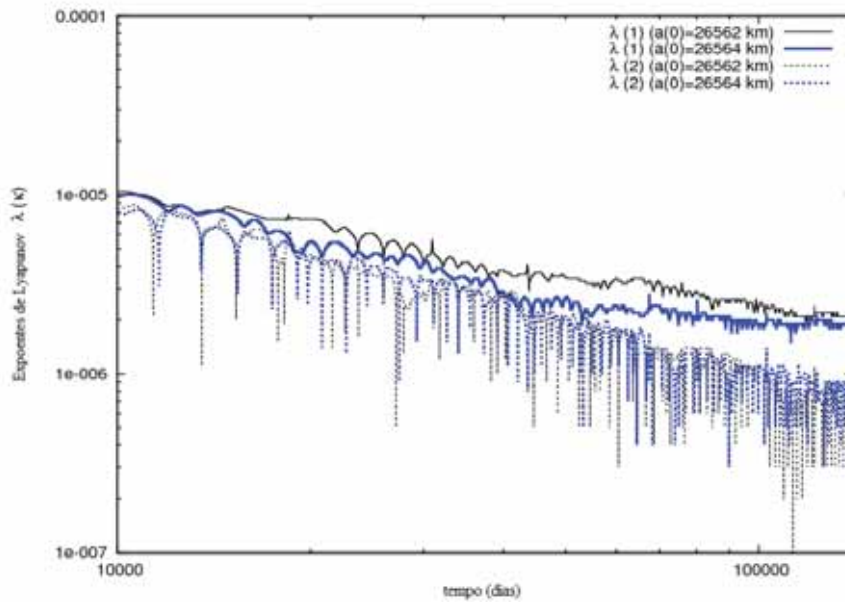


Figura 5.38: Expoentes de Lyapunov $\lambda(1)$ e $\lambda(2)$, correspondendo às variáveis X_4 e Y_4 , respectivamente, para $C_1 = -1,467765786 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467821043 \times 10^{11} m^2/s$, $x_4 = 0^\circ$ e $y_4 = 60^\circ$.

Comparando os métodos utilizados no presente trabalho para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, percebe-se que o método de Gram-Schmidt exige um tempo computacional maior do que o método do maior expoente de Lyapunov. No método de Gram-Schmidt, cada variável do problema estudado terá um expoente de Lyapunov correspondente, sendo que geralmente apenas um ou dois expoentes de Lyapunov indicarão o movimento caótico, se este existir. Claro que isto dependerá da quantidade de variáveis do sistema. Enquanto que no método do maior expoente de Lyapunov, este acaba sendo mais eficiente e identificando mais rápido o movimento caótico. De qualquer forma, os resultados dos métodos são compatíveis, sendo que a eficiência computacional é a grande diferença.

Capítulo 6

RESSONÂNCIA 14:1

Neste capítulo o sistema dinâmico gerado pela Hamiltoniana H_F é usado para estudar a ressonância 14:1. Neste caso, o sistema simplificado é considerado através do ângulo ressonante ϕ_{141461} , associado ao harmônico tesseral J_{1414} , com os coeficientes l e m definidos por $l=14$ e $m=14$.

As Eqs. (5.17) e (5.19) representam as equações de movimento em uma ressonância de comensurabilidade α .

Para o estudo da ressonância 14:1, as funções da inclinação e excentricidade são desenvolvidas analiticamente, porque estas funções não estão disponíveis no trabalho de Kaula (1966), como no caso dos ângulos ressonantes estudados para a ressonância 2:1.

Na Eq. (5.17), o termo $B_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2)$ é dado por

$$\begin{aligned} B_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2) &= \frac{\mu^{2p+k+2}}{X_2^{4p+2k+2}} r_e^{2p+k} J_{(2p+k)m} \\ &\times F_{(2p+k)mp}(X_2, C_1, C_2) \\ &\times G_{(2p+k)p(\alpha m)}(X_2, C_2), \end{aligned} \quad (6.1)$$

e, o termo $B_{2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2)$ é expresso por

$$B_{2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2) = \frac{\mu^{2j+2}}{X_2^{4j+2}} r_e^{2j} J_{2j,0} F_{2j,0,j}(X_2, C_1, C_2) G_{2j,j,0}(X_2, C_2). \quad (6.2)$$

Na Eq. (5.19), os termos $\frac{\partial(B_{2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2))}{\partial X_2}$ e $\frac{\partial(B_{2,(2p+k)mp(\alpha m)}(X_2, C_1, C_2))}{\partial X_2}$ são

$$\frac{\partial(B_{2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2))}{\partial X_2} = -\frac{4j+2}{X_2^{4j+3}} \mu^{2j+2} r_e^{2j} J_{2j,0} F_{2j,0,j} G_{2j,j,0}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu^{2j+2}}{X_2^{4j+2}} r_e^{2j} J_{2j,0} \left(\frac{\partial(F_{2j,0,j})}{\partial X_2} G_{2j,j,0} \right. \\
& \left. + F_{2j,0,j} \frac{\partial(G_{2j,j,0})}{\partial X_2} \right), \tag{6.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(B_{2,(2p+k)mp(\alpha m)})(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} &= - \frac{(4p+2k+2)}{X_2^{4p+2k+3}} \mu^{2p+k+2} r_e^{2p+k} J_{(2p+k)m} \\
&\times F_{(2p+k)mp} G_{(2p+k)p,(\alpha m)} \\
&+ \frac{\mu^{2p+k+2}}{X_2^{4p+2k+2}} r_e^{2p+k} J_{(2p+k)m} \\
&\times \left(\frac{\partial(F_{(2p+k)mp})}{\partial X_2} G_{(2p+k)p,(\alpha m)} \right. \\
&\left. + F_{(2p+k)mp} \frac{\partial(G_{(2p+k)p,(\alpha m)})}{\partial X_2} \right). \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Nas Eqs. (6.3) e (6.4), os termos relacionados com a função inclinação $\frac{\partial(F_{2j,0,j}(X_2, C_1, C_2))}{\partial X_2}$, $\frac{\partial(F_{(2p+k)mp}(X_2, C_1, C_2))}{\partial X_2}$, podem ser expressos como

$$\frac{\partial(F_{2j,0,j}(X_2, C_1, C_2))}{\partial X_2} = \frac{\partial(F_{2j,0,j})}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial X_2},$$

$$\frac{\partial(F_{(2p+k)mp}(X_2, C_1, C_2))}{\partial X_2} = \frac{\partial(F_{(2p+k)mp})}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial X_2}.$$

A inclinação $I = I(X_2, C_1, C_2)$ é

$$I = \arccos \left(\frac{m\alpha C_1 + mX_2}{kX_2 - C_2} \right). \tag{6.5}$$

e a derivada $\frac{\partial I(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2}$ é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} &= - \left(\frac{m}{kX_2 - C_2} - \frac{(m\alpha C_1 + mX_2)k}{(kX_2 - C_2)^2} \right) \\
&\times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(m\alpha C_1 + mX_2)^2}{(kX_2 - C_2)^2}}}. \tag{6.6}
\end{aligned}$$

A função inclinação é dada por (KAULA, 1966; GOLEBIWSKA et al., 2010; WNUK, 1988)

$$\begin{aligned}
F_{lmp}(I) &= (-1)^\delta \frac{(l+m)!}{2^l p! (l-p)!} \sum_{jj=jj1}^{jj2} (-1)^{jj} \begin{pmatrix} 2jj-2p \\ jj \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 2p \\ l-m-jj \end{pmatrix} c^{2l-\sigma} s^\sigma.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

com $\delta = E(\frac{l-m+1}{2})$, $E(\cdot)$ significa "parte inteira de", $jj1 = \max(0, l-m-2p)$, $jj2 = \min(l-m, 2l-2p)$, $c = \cos\left(\frac{I}{2}\right)$, $s = \sin\left(\frac{I}{2}\right)$, $\sigma = m-l+2p+2kk$ e $kk = E\left(\frac{l-m}{2}\right)$.

E o termo $\frac{\partial(F_{lmp})}{\partial I}$ é expresso por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F_{lmp})}{\partial I} &= -\frac{1}{2}(2l-\sigma)(-1)^\delta \frac{(l+m)!}{2^l p! (l-p)!} \sum_{jj=jj1}^{jj2} (-1)^{jj} \begin{pmatrix} 2jj-2p \\ jj \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 2p \\ l-m-jj \end{pmatrix} s^{2l-\sigma} s^\sigma + \frac{1}{2}\sigma(-1)^\delta \frac{(l+m)!}{2^l p! (l-p)!} \\
&\quad \times \sum_{jj=jj1}^{jj2} (-1)^{jj} \begin{pmatrix} 2jj-2p \\ jj \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2p \\ l-m-jj \end{pmatrix} c^{2l-\sigma} c^\sigma.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

A função inclinação usada nos termos seculares $F_{2j,0,j}(I)$ é dada por

$$\begin{aligned}
F_{2j,0,j}(I) &= (-1)^\delta \frac{(2j)!}{2^{2j} j! (j)!} \sum_{jj=jj1}^{jj2} (-1)^{jj} \begin{pmatrix} 2jj-2j \\ jj \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 2j \\ 2j-jj \end{pmatrix} c^{4j-\sigma} s^\sigma.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

e $\frac{\partial(F_{2j,0,j})}{\partial I}$ pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(F_{2j,0,j})}{\partial I} &= -\frac{1}{2}(4j-\sigma)(-1)^\delta \frac{(2j)!}{2^{2j} j! (j)!} \sum_{jj=jj1}^{jj2} (-1)^{jj} \begin{pmatrix} 2jj-2j \\ jj \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 2j \\ 2j-jj \end{pmatrix} s^{4j-\sigma} s^\sigma + \frac{1}{2}\sigma(-1)^\delta \frac{(2j)!}{2^{2j} j! (j)!} \\
&\quad \times \sum_{jj=jj1}^{jj2} (-1)^{jj} \begin{pmatrix} 2jj-2j \\ jj \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2j \\ 2j-jj \end{pmatrix} c^{4j-\sigma} c^\sigma.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

As derivadas relacionadas com a função excentricidade $\frac{\partial(G_{2j,j,0}(X_2, C_2))}{\partial X_2}$, $\frac{\partial(G_{(2p+k)p,(\alpha m)}(X_2, C_2))}{\partial X_2}$ podem ser reescritas como

$$\frac{\partial(G_{2j,j,0}(X_2, C_2))}{\partial X_2} = \frac{\partial(G_{2j,j,0})}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial X_2},$$

$$\frac{\partial(G_{(2p+k)p,(\alpha m-k)}(X_2, C_2))}{\partial X_2} = \frac{\partial(G_{(2p+k)p,(\alpha m-k)})}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial X_2}.$$

a excentricidade $e = e(X_2, C_2)$ é definida como

$$e(X_2, C_2) = \frac{1}{(m\alpha)X_2} \sqrt{X_2(m\alpha + k) - C_2} \sqrt{X_2(m\alpha - k) + C_2} \quad (6.11)$$

e a derivada $\frac{\partial e}{\partial X_2}$ é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial X_2} = & - \frac{\sqrt{X_2(m\alpha + k) - C_2} \sqrt{X_2(m\alpha - k) + C_2}}{m\alpha X_2^2} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{X_2(m\alpha - k) + C_2} (m\alpha + k)}{m\alpha X_2 \sqrt{X_2(m\alpha + k) - C_2}} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{X_2(m\alpha + k) - C_2} (m\alpha - k)}{m\alpha X_2 \sqrt{X_2(m\alpha - k) + C_2}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

A função excentricidade $G_{lpq}(e)$ é definida como (KAULA, 1966; GOLEBIWSKA et al., 2010)

$$G_{lpq}(e) = (-1)^{|q|} (1 + \beta^2)^l \beta^{|q|} \sum_{k=0}^{\infty} C_{lpqk} Q_{lpqk} \beta^{2k}, \quad (6.13)$$

com $k = l - 2p$, $\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$ e C_{lpqk} é

$$C_{lpqk} = \sum_{r=0}^h \binom{2p' - 2l}{h - r} \frac{(-1)^r}{r!} \binom{(l - 2p' + q')e}{2\beta}^r. \quad (6.14)$$

$$h = \begin{cases} k + q' & \text{quando } q' > 0; \\ k & \text{quando } q' < 0. \end{cases}$$

$$p' = \begin{cases} p & \text{quando } p \leq l/2; \\ l - p & \text{quando } p > l/2. \end{cases}$$

$$q' = \begin{cases} q & \text{quando } p \leq l/2; \\ -q & \text{quando } p > l/2. \end{cases}$$

o termo Q_{lpqk} é escrito como

$$Q_{lpqk} = \sum_{r=0}^{hh} \binom{-2p'}{hh-r} \frac{1}{r!} \binom{(l-2p'+q')e}{2\beta}^r, \quad (6.15)$$

sendo que,

$$hh = \begin{cases} k & \text{quando } q' > 0; \\ l - p & \text{quando } q' < 0. \end{cases}$$

A seguir são mostrados alguns resultados da integração numérica das Eqs. (5.17) e (5.19) envolvendo a ressonância 14:1.

6.1 Resultados da Ressonância 14:1

6.1.1 Estudo do Sistema Simplificado

As Figuras 6.1 e 6.2 mostram os espaços de fase, a versus ϕ_2 , para o ângulo crítico ϕ_{141461} , associado ao harmônico tesseral J_{1414} , de acordo a integração numérica das equações de movimento, (5.17) e (5.19). As condições iniciais, nas Figs. 6.1 e 6.2, para inclinações são 87° e 95° , respectivamente, e excentricidades são 0,019 e 0,005, respectivamente. Os valores iniciais do semi-eixo maior estão ao redor do semi-eixo crítico.

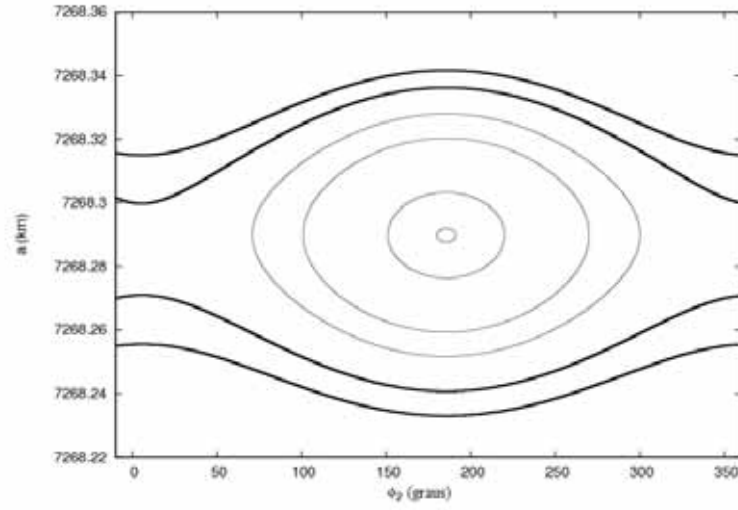


Figura 6.1: a versus ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 87^\circ$ e $e = 0,019$, respectivamente.

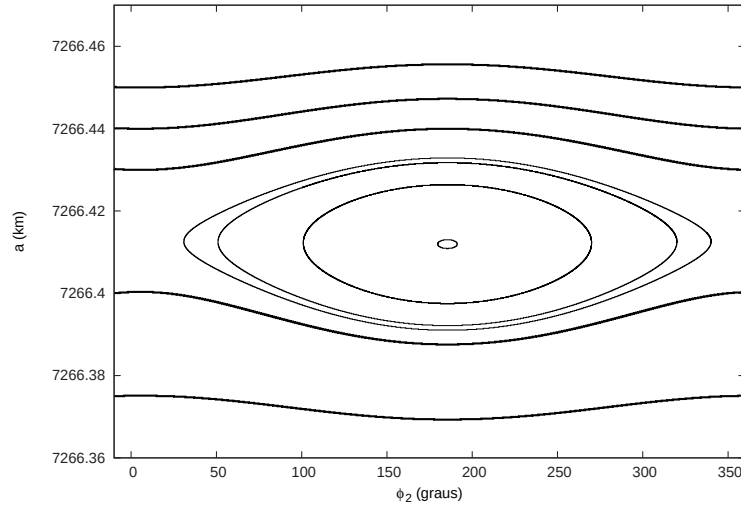


Figura 6.2: a versus ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 95^\circ$ e $e = 0,005$, respectivamente.

Figuras 6.3 a 6.6 mostram o comportamento no tempo do semi-eixo maior e do ângulo ϕ_2 , de acordo aos espaços de fase das Figuras 6.1 e 6.2.

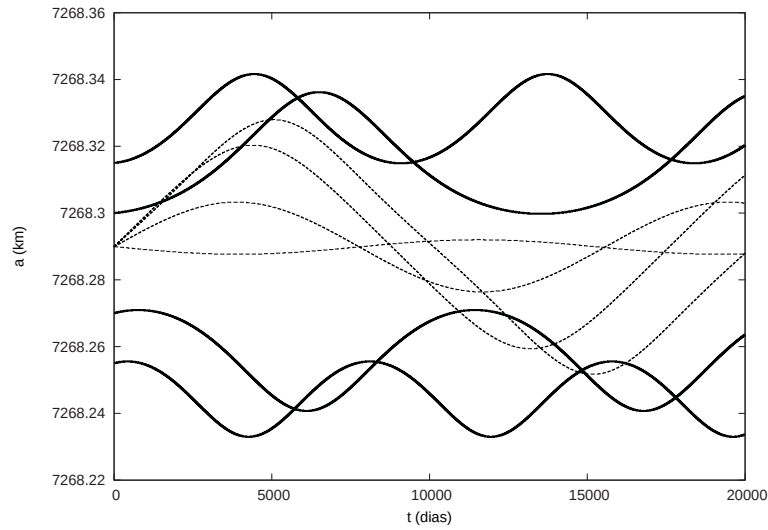


Figura 6.3: Comportamento no tempo do semi-eixo maior, considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 87^\circ$ e $e = 0,019$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com o espaço de fase mostrado na Figura 6.1.

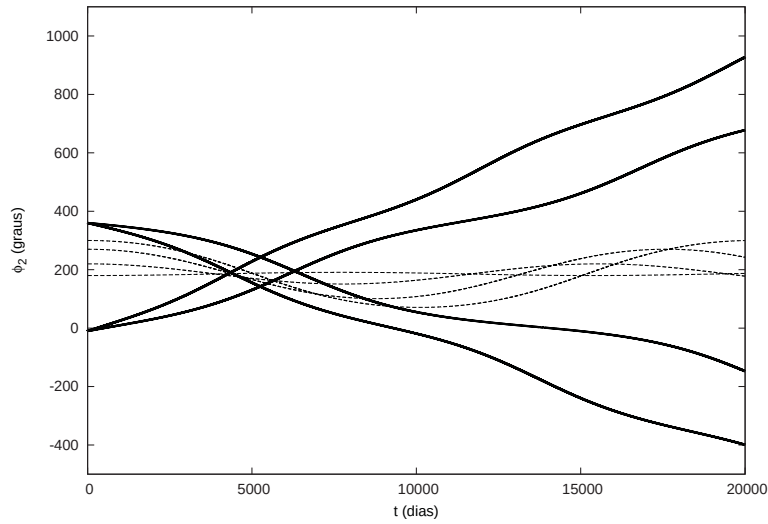


Figura 6.4: Comportamento no tempo do ângulo ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 87^\circ$ e $e = 0,019$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com o espaço de fase mostrado na Figura 6.1.

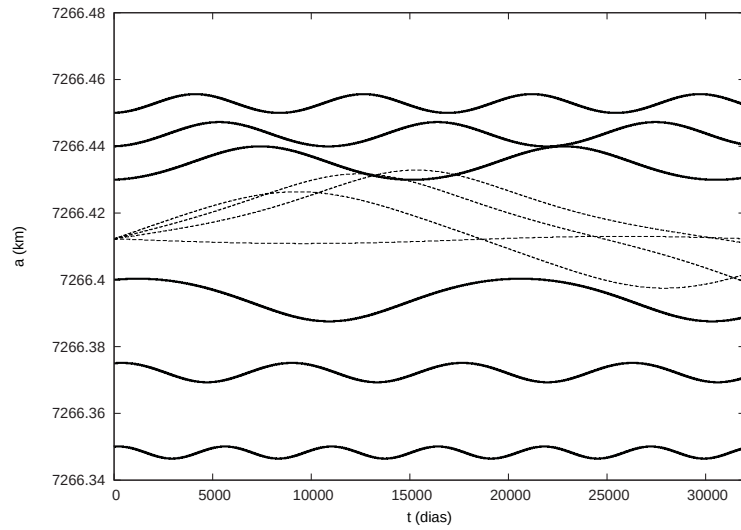


Figura 6.5: Comportamento no tempo do semi-eixo maior, considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 95^\circ$ e $e = 0,005$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com o espaço de fase mostrado na Figura 6.2.

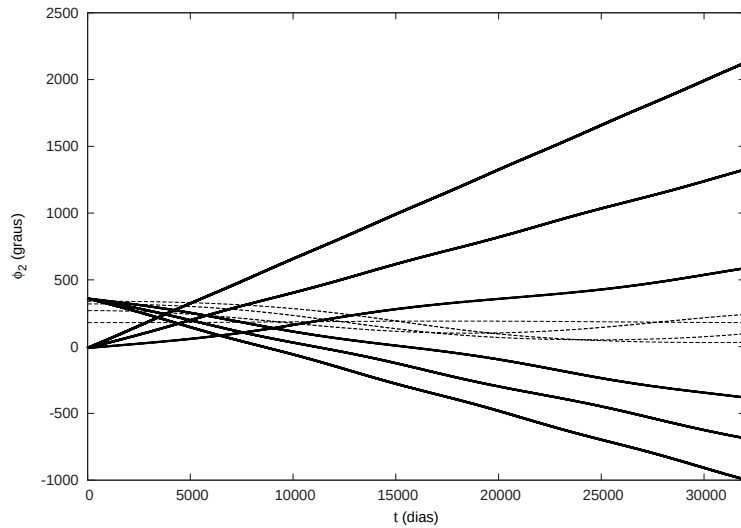


Figura 6.6: Comportamento no tempo do ângulo ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . As condições iniciais para inclinação e excentricidade são $I = 95^\circ$ e $e = 0,005$, respectivamente. As curvas mais escuras representam os movimentos de circulação, enquanto que as curvas mais claras representam os movimentos de libração, de acordo com o espaço de fase mostrado na Figura 6.2.

O semi-eixo maior crítico é obtido da seguinte condição

$$\frac{\mu^2}{X_2^3} - 14\omega_e - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial B_{2,2j,0,j,0}(X_2, C_1, C_2)}{\partial X_2} = 0. \quad (6.16)$$

As Figs. 6.1 a 6.6 mostram os espaços de fase, a versus ϕ_2 , o comportamento no tempo do semi-eixo maior e ângulo ϕ_2 , considerando o ângulo crítico ϕ_{141461} associado a J_{1414} . Por volta da ressonância 14:1, existem vários detritos espaciais orbitando a Terra, sem controle e arriscando o tempo de vida dos satélites artificiais em operação. O conhecimento de regiões regulares ou estáveis, na região de órbitas baixas, pode ser muito importante para garantir uma maior segurança para os movimento orbitais de satélites artificiais e, possivelmente, um consumo mais baixo de combustível com manobras orbitais se comparado com regiões instáveis.

As Figs. 6.1 e 6.2, referentes aos espaços de fase da ressonância 14:1, podem ser comparadas com as Figs. 5.1 e 5.2, referentes aos espaços de fase da ressonância 2:1, numa análise meramente espacial, percebendo que as regiões de libração da ressonância 14:1 são menores que as regiões de libração da ressonância 2:1. Este fato, pode significar que os satélites artificiais na ressonância 2:1, permanecem por um tempo maior em regiões estáveis, como pode ser entendido também que os objetos na ressonância 14:1 estão confinados numa pequena região, mesmo tendo objetos em órbitas caóticas. Uma análise mais criteriosa é necessária neste caso.

No próximo capítulo, os objetos catalogados TLE são utilizados nos estudos de movimentos orbitais ressonantes na região de órbitas baixas da Terra.

Capítulo 7

OBJETOS CATALOGADOS

A maior parte dos objetos orbitando a Terra são encontrados na região LEO porque esta possui uma grande quantidade de detritos espaciais. Existem aproximadamente 10000 objetos catalogados ao redor do planeta, sendo que os objetos não catalogados maiores do que 1 cm são estimados em algum valor entre 50000 e 600000 (OSIANDER; OSTDIEK, 2009; IKEDA et al., 2008).

Nos últimos anos, a região de órbitas baixas da Terra tem sido estudada a respeito da diminuição de detritos espaciais devido ao número crescente deste tipo de objeto. Estes aspectos englobam a observação, proteção à espaçonave e cuidados para evitar colisões (CHANGYIN et al., 2010; NISHIDA et al., 2009). O tamanho destes detritos variam de muitos metros a uma fração de um micrômetro em diâmetro (MECHISHNEK, 1995).

Os movimentos orbitais dos objetos catalogados podem ser analisados usando o grupo de elementos 2-linhas (TLE) do NORAD (SPACE TRACK, 2011, 2012).

No presente trabalho, os dados catalogados são utilizados na investigação de objetos em movimentos orbitais ressonantes, incluindo satélites artificiais e detritos espaciais. Neste estudo, os ângulos ressonantes que compõem o movimento orbital podem ser definidos e estudados separadamente.

Como resultado da simulação mostrada no Capítulo 3, envolvendo todos os objetos catalogados, a Tab. 7.1 mostra valores do coeficiente m e o número de objetos que possuem suas órbitas influenciadas pelo valor correspondente do coeficiente. É possível verificar que a maioria dos movimentos orbitais dos objetos estão relacionados com o coeficiente $m = 14$ considerando o valor do semi-eixo maior até $15000km$.

Tabela 7.1: Número de objetos pelo número do coeficiente m considerando o valor do semi-eixo maior até $15000km$

m	Número de objetos	m	Número de objetos
7	2	30	31
8	1	31	13
9	3	32	5
10	1	33	2
11	3	34	1
12	20	35	4
13	31	36	5
14	351	37	42
15	65	38	14
16	4	39	14
18	3	40	24
20	1	41	186
21	2	42	116
22	2	43	114
23	2	44	52
24	10	45	25
25	93	46	8
26	19	47	4
27	66	48	6
28	179	49	22
29	97	50	33

Na próxima seção, os movimentos orbitais de alguns satélites artificiais são investigados utilizando os dados TLE.

7.1 Estudo de Órbitas Ressonantes na Região LEO

Considerando os resultados da simulação mostrada no Capítulo 3, alguns satélites artificiais e detritos espaciais catalogados são estudados com respeito ao comportamento no tempo do semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, período ressonante e ângulo ressonante. Estes dados são analisados nesta seção observando os possíveis movimentos orbitais regulares e irregulares.

A Figura 7.1 mostra o semi-eixo maior versus período ressonante de objetos que satisfazem a condição $Pres > 300$ dias. Os objetos estão distribuídos pelo valor de semi-eixo maior em três regiões diferentes: 1) $a < 15000km$, 2) $15000km \leq a < 40000km$ e 3) $a \geq 40000km$.

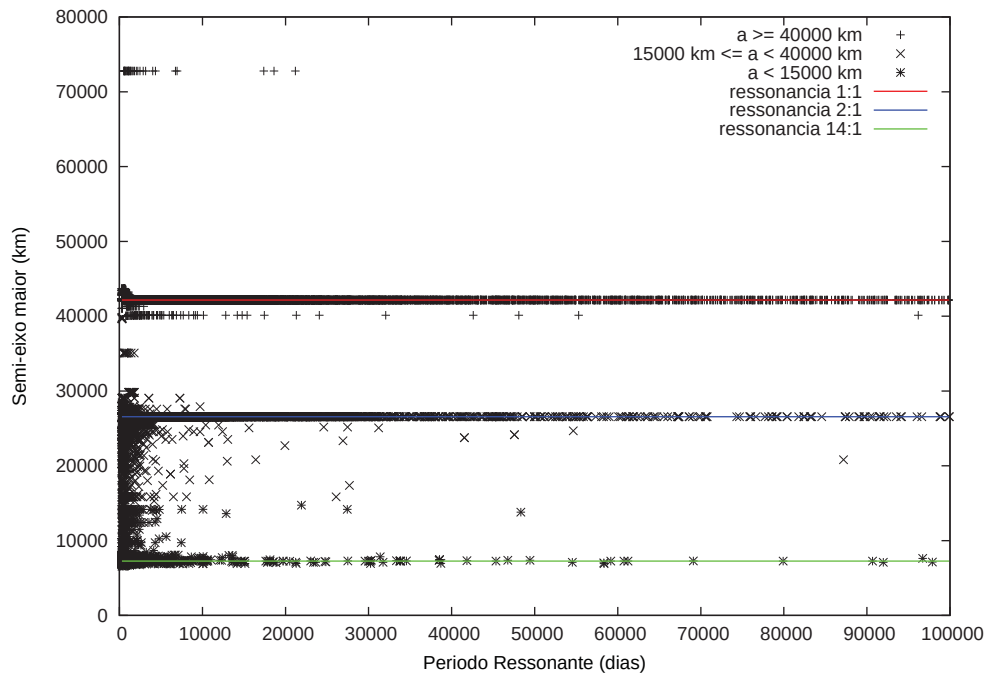


Figura 7.1: Semi-eixo maior versus período ressonante de objetos satisfazendo a condição $Pres > 300$ dias.

Analisando a Fig. 7.1 é possível verificar alguns objetos em ressonância profunda, em outras palavras, os movimentos orbitais destes objetos são influenciados pela ressonância por um longo tempo. Com o objetivo de estudar os movimentos orbitais destes objetos, quatro satélites artificiais catalogados são analisados. Dos dados TLE, os objetos são identificados pelos números 16181, 16369, 17527 e 19467.

As Figuras 7.2 a 7.13 mostram o comportamento no tempo do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação dos objetos 16181, 16369, 17527 e 19467. Observe que, para a construção das Figs. 7.2 a 7.13, do comportamento no tempo dos elementos orbitais são necessários dados observacionais de Janeiro de 2011 a Dezembro de 2012, disponíveis no website Space Track (SPACE TRACK, 2011, 2012). Após a obtenção dos dados TLE do NORAD, um novo arquivo (uma linha para cada conjunto de dados, ao invés, de duas linhas) é gerado aproveitando apenas os dados de interesse, no presente estudo, como o período observacional e os elementos orbitais, dados como o do coeficiente balístico, entre outros, são desprezados. Com o novo arquivo, correções são feitas nos elementos orbitais, de acordo a algum modelo que compense possíveis erros na observação, como o modelo SGP (HOOTS; ROEHRICH, 1980), por exemplo.

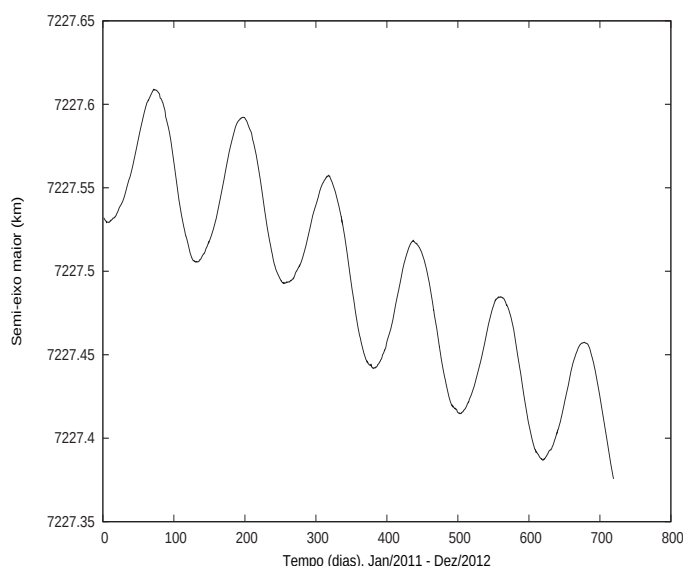


Figura 7.2: Comportamento no tempo do semi-eixo maior do objeto 16181 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

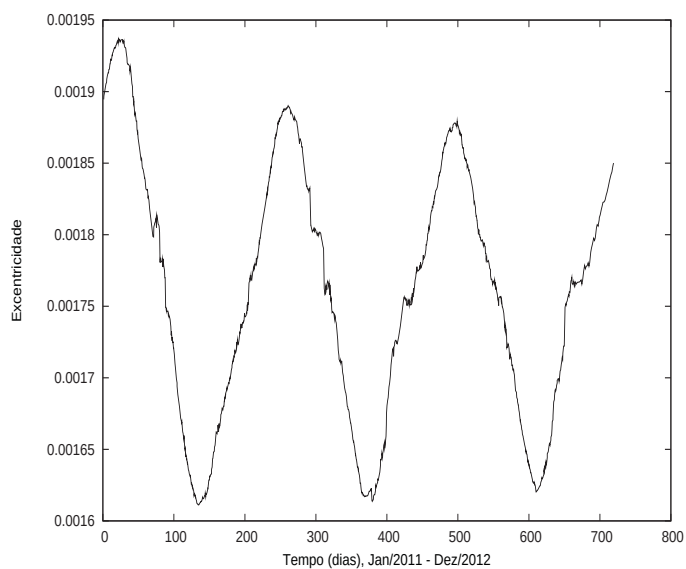


Figura 7.3: Comportamento no tempo da excentricidade do objeto 16181 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

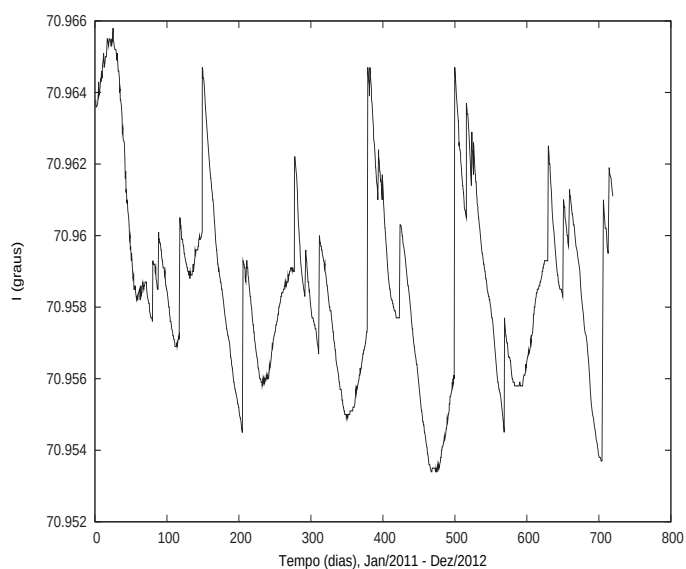


Figura 7.4: Comportamento no tempo da inclinação do objeto 16181 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

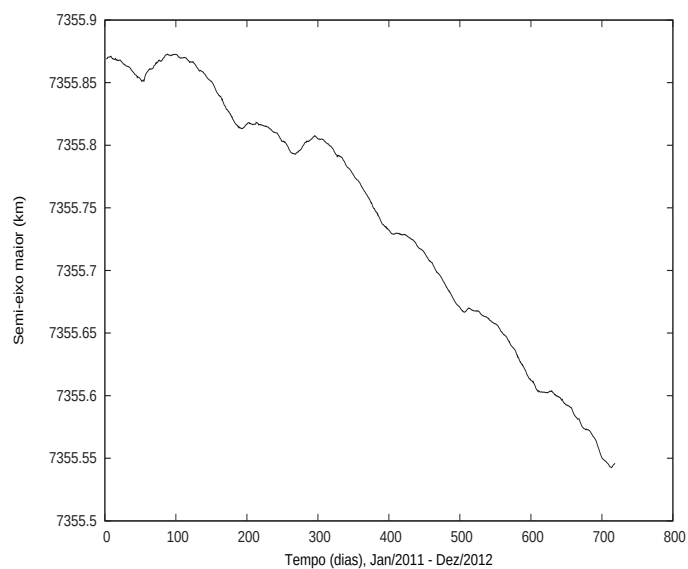


Figura 7.5: Comportamento no tempo do semi-eixo maior do objeto 16369 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

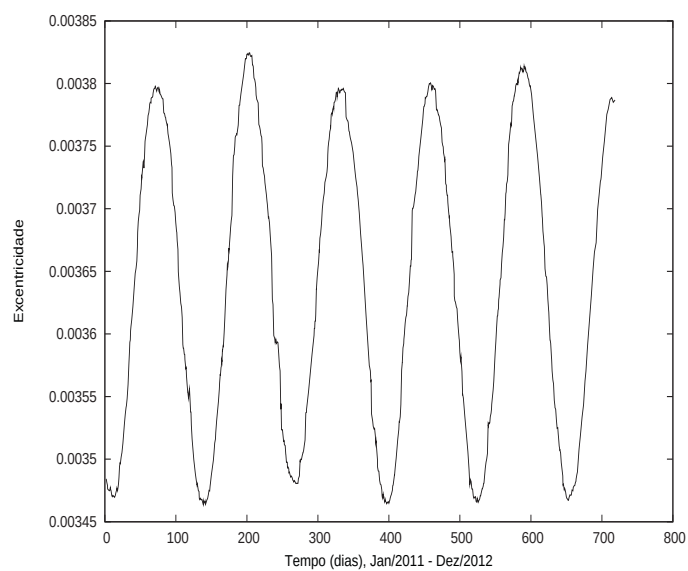


Figura 7.6: Comportamento no tempo da excentricidade do objeto 16369 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

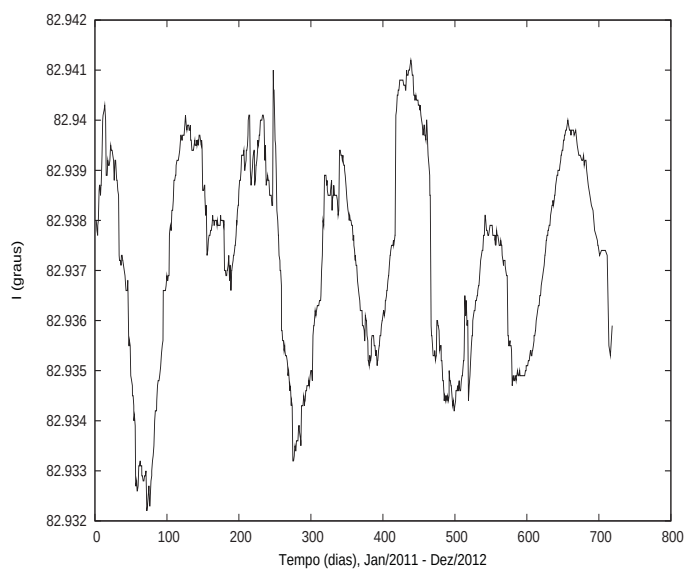


Figura 7.7: Comportamento no tempo da inclinação do objeto 16369 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

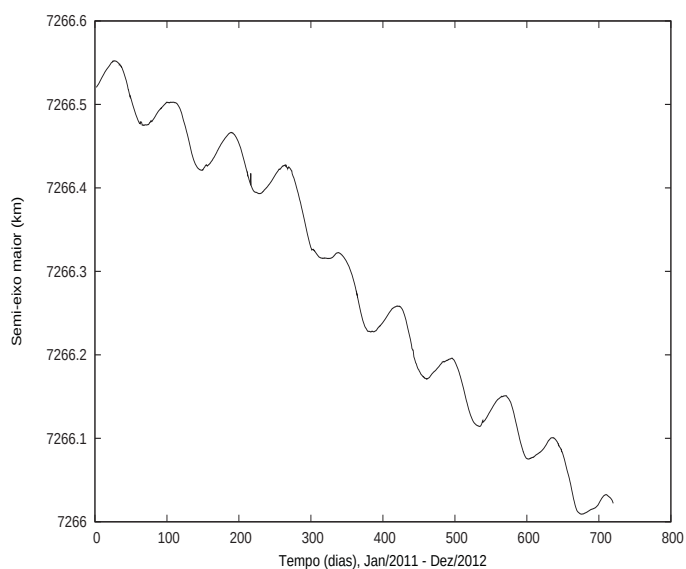


Figura 7.8: Comportamento no tempo do semi-eixo maior do objeto 17527 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

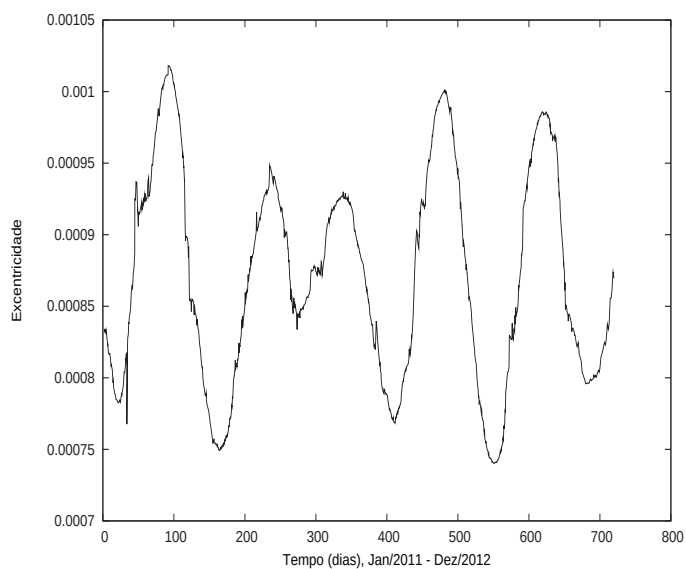


Figura 7.9: Comportamento no tempo da excentricidade do objeto 17527 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

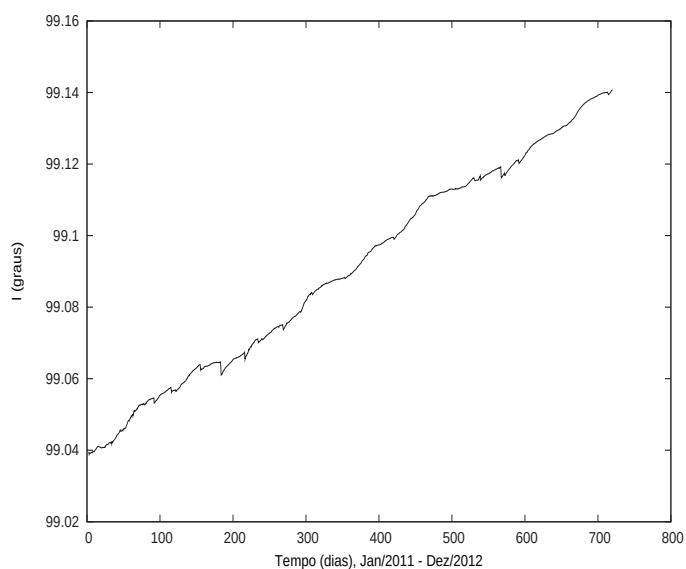


Figura 7.10: Comportamento no tempo da inclinação do objeto 17527 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

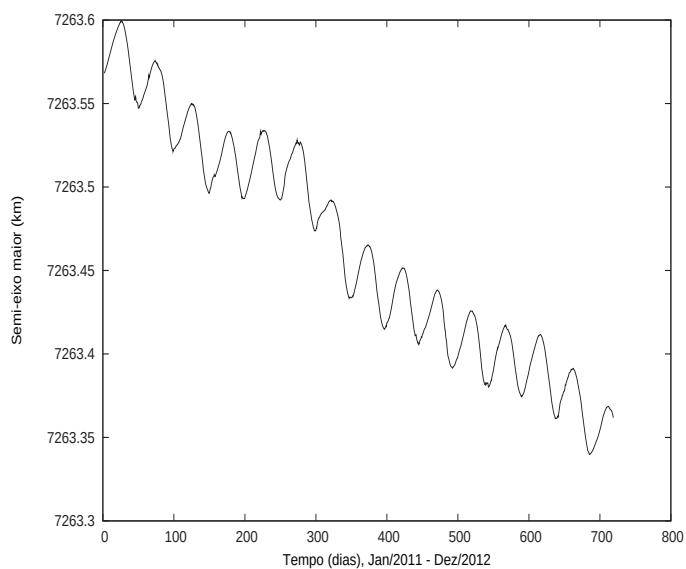


Figura 7.11: Comportamento no tempo do semi-eixo maior do objeto 19467 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

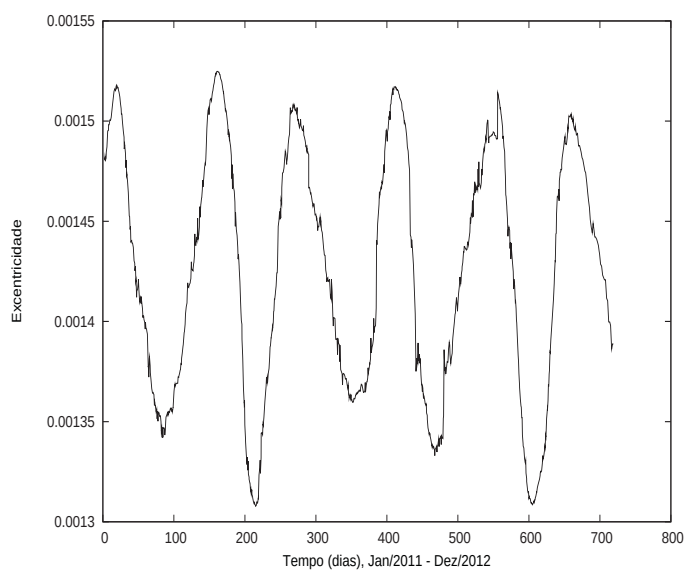


Figura 7.12: Comportamento no tempo da excentricidade do objeto 19467 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

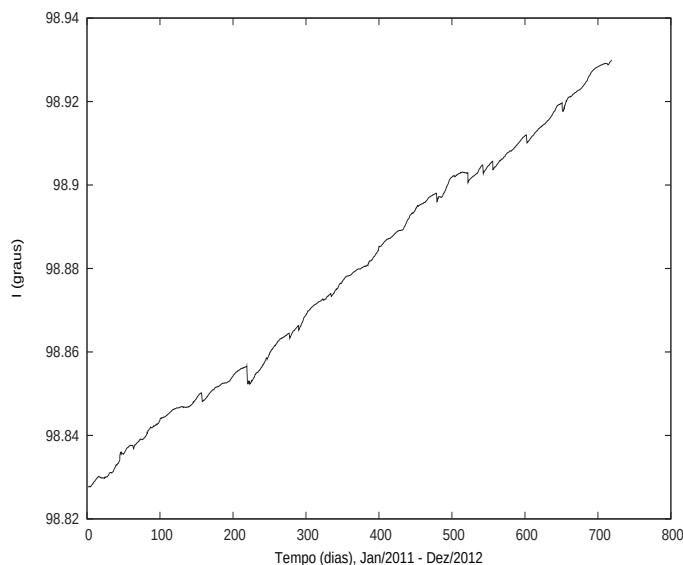


Figura 7.13: Comportamento no tempo da inclinação do objeto 19467 correspondendo a Janeiro/2011 - Dezembro/2012.

Observando o comportamento no tempo dos elementos orbitais dos objetos 16181, 16369, 17527 e 19467 nas Figs. 7.2 a 7.13, pode-se verificar possíveis movimentos irregulares em suas trajetórias. O comportamento no tempo da inclinação dos objetos 16181 e 16369 mostram irregularidades. Enquanto que no caso dos objetos 17527 e 19467, o comportamento no tempo da excentricidade parece irregular. Contudo, a análise a respeito dos ângulos ressonantes e períodos ressonantes, que compõem os movimentos, faz-se necessária para um melhor entendimento da influência da ressonância.

Assim, também é importante observar se o movimento orbital é influenciado por diferentes ângulos ressonantes. Em outras palavras, é verificado se o movimento orbital é devido a sobreposição de ressonâncias.

A Tabela 7.2 mostra ângulos ressonantes relacionados aos movimentos orbitais dos objetos 16181, 16369, 17527 e 19467, correspondendo ao período de Janeiro/2011 a Dezembro/2012.

Tabela 7.2: Ângulos ressonantes ϕ_{mkq} relacionados aos movimentos orbitais dos objetos 16181, 16369, 17527 e 19467.

Objeto	Coeficiente m	Coeficiente k	Coeficiente q
16181	14	0	1
16181	14	1	1
16181	28	1	2
16181	28	2	2
16181	42	2	3
16181	42	3	3
16369	41	8	3
16369	14	-40	1
16369	27	49	2
17527	14	1	1
17527	28	2	2
17527	42	3	3
17527	42	4	3
19467	14	2	1
19467	28	4	2
19467	42	6	3

Observando a Tab. 7.2, pode-se verificar que as dinâmicas orbitais dos objetos são influenciadas por diferentes ângulos ressonantes, sendo que o movimento orbital do objeto 16181 é influenciado simultaneamente por uma maior quantidade de ângulos ressonantes.

Se a comensurabilidade entre o movimento orbital do objeto e o planeta é definida pelo parâmetro α , pode-se dizer que a ressonância exata 14:1 é definida pela condição $\alpha = 1/14$. Desta forma, analisando a Tab. 7.2, verifica-se que os movimentos dos objetos 16181, 17527 e 19467 são influenciados pela ressonância exata 14:1, enquanto que o objeto 16369 é influenciado pelos ângulos ressonantes na vizinhança da ressonância exata.

Figuras 7.14 a 7.17 mostram o comportamento no tempo do período ressonante correspondente aos ângulos ressonantes apresentados na Tab. 7.2.

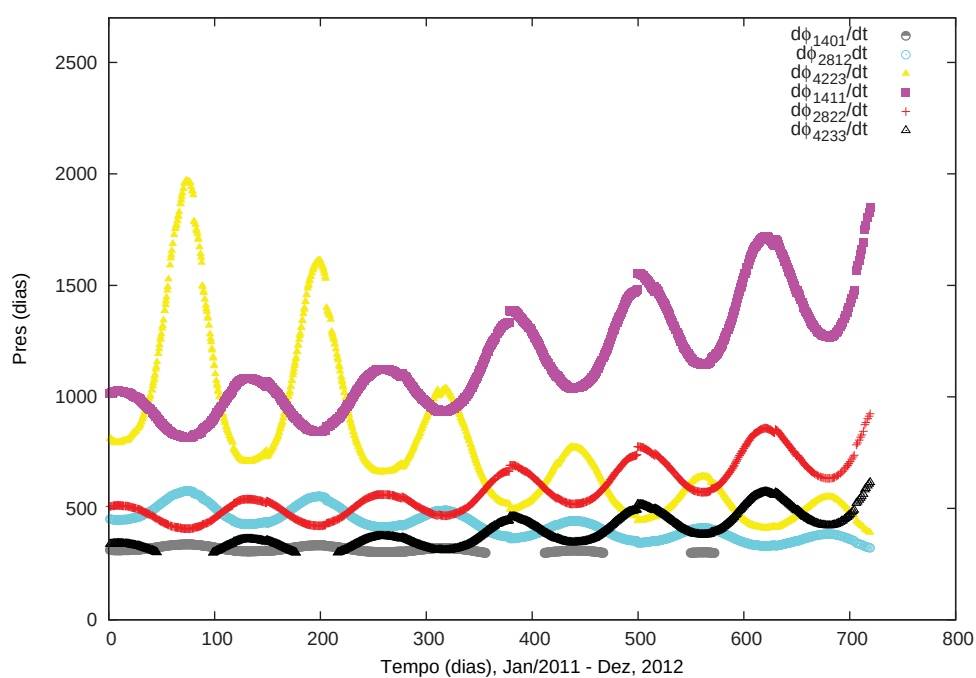


Figura 7.14: Comportamento no tempo do período ressonante correspondente ao movimento orbital do objeto 16181.

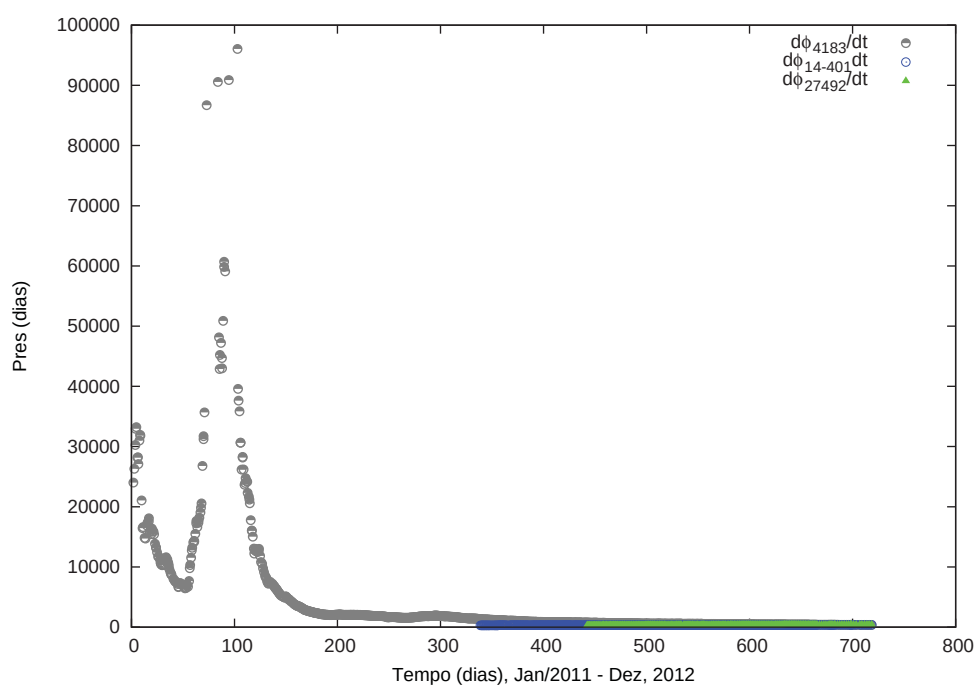


Figura 7.15: Comportamento no tempo do período ressonante correspondente ao movimento orbital do objeto 16369.

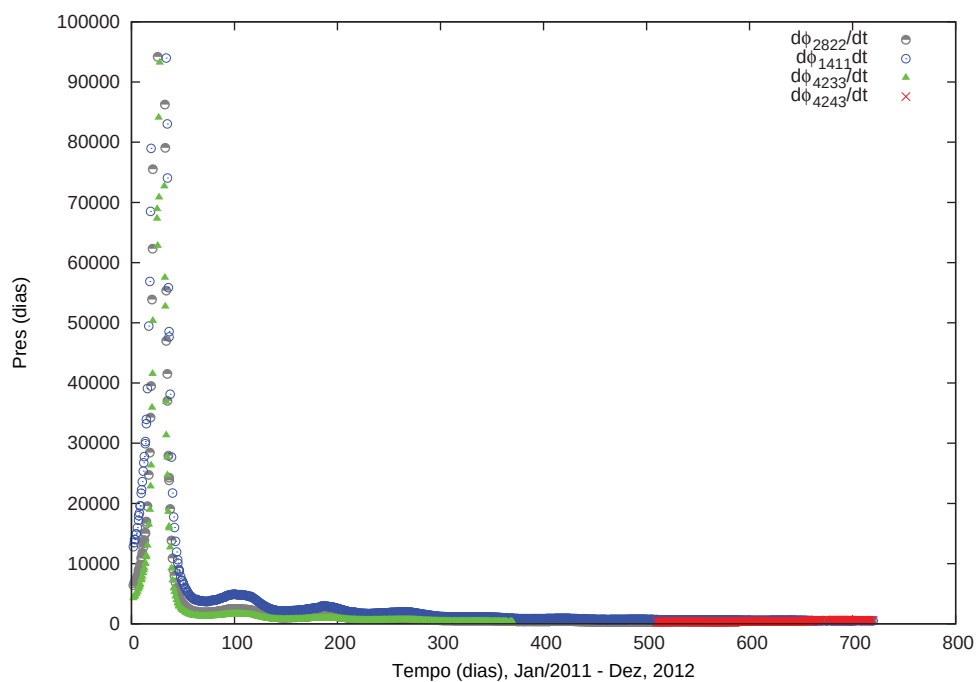


Figura 7.16: Comportamento no tempo do período ressonante correspondente ao movimento orbital do objeto 17527.

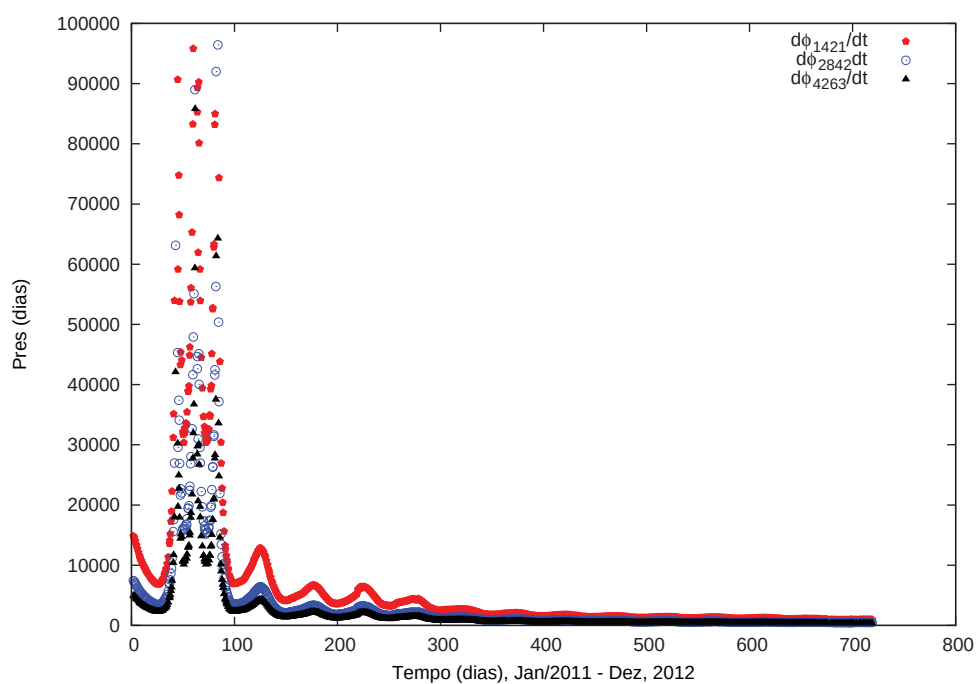


Figura 7.17: Comportamento no tempo do período ressonante correspondente ao movimento orbital do objeto 19467.

Analisando o comportamento no tempo do período ressonante nas Figs. 7.14 a 7.17 verifica-se que os ângulos ressonantes permanecem em ressonância profunda por alguns dias. A análise do período ressonante, baseia-se na ideia de que quanto maior o seu valor, maior a influência

da ressonância no movimento orbital do objeto, no período determinado. O movimento orbital do objeto 16181 é influenciado por cerca de seis ângulos ressonantes que, inicialmente apresentam valores do período ressonante menores do que o dos outros objetos mas, a influência da ressonância 14:1 parece aumentar com o tempo, principalmente através do ângulo ϕ_{1411} . Os movimentos orbitais dos objetos 16369, 17527 e 19467 possuem ângulos com períodos ressonantes que atingem valores acima de 10000 dias, nos primeiros 100 dias, indicando um período de ressonância profunda mas, nos dias seguintes, essa influência parece ser atenuada com a diminuição dos valores do período ressonante.

Continuando a análise sobre os movimentos irregulares, o comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ é estudado verificando se diferentes ângulos ressonantes descrevem a dinâmica orbital destes objetos ao mesmo momento. Este fato, pode indicar órbitas irregulares requerendo um sistema completo com todos os ângulos ressonantes como descrito na Tab. 7.2. Figuras 7.18 a 7.21 mostram o comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondendo aos ângulos ressonantes na Tab. 7.2.

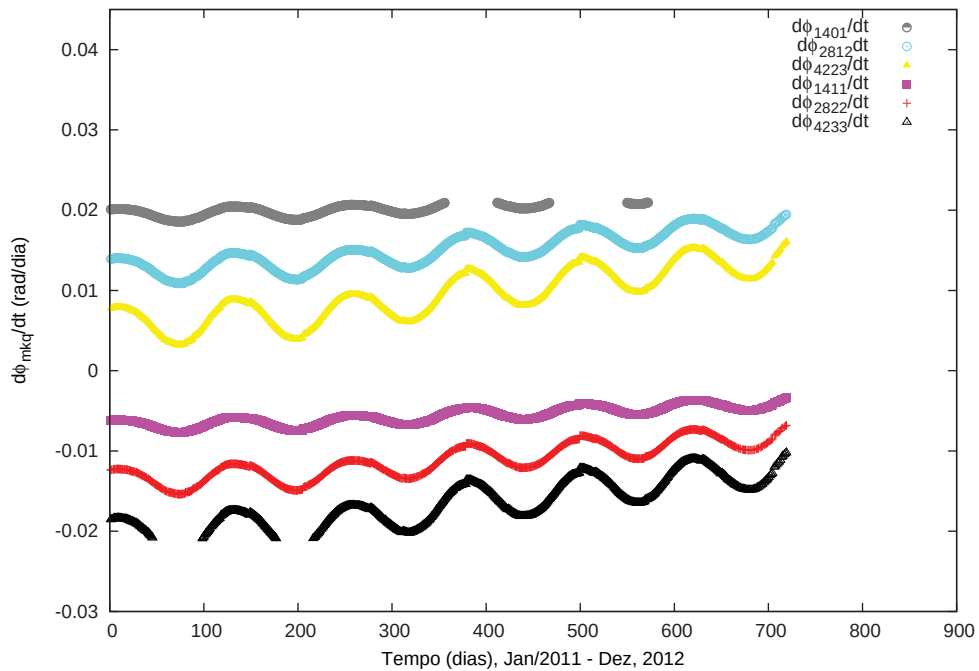


Figura 7.18: Comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondente ao movimento orbital do objeto 16181.

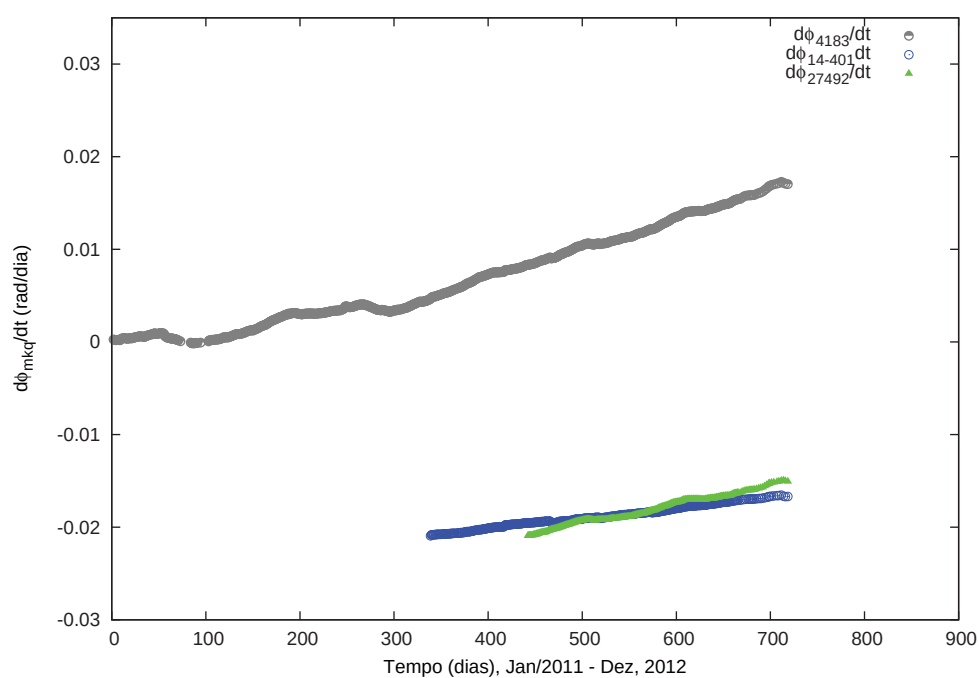


Figura 7.19: Comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondente ao movimento orbital do objeto 16369.

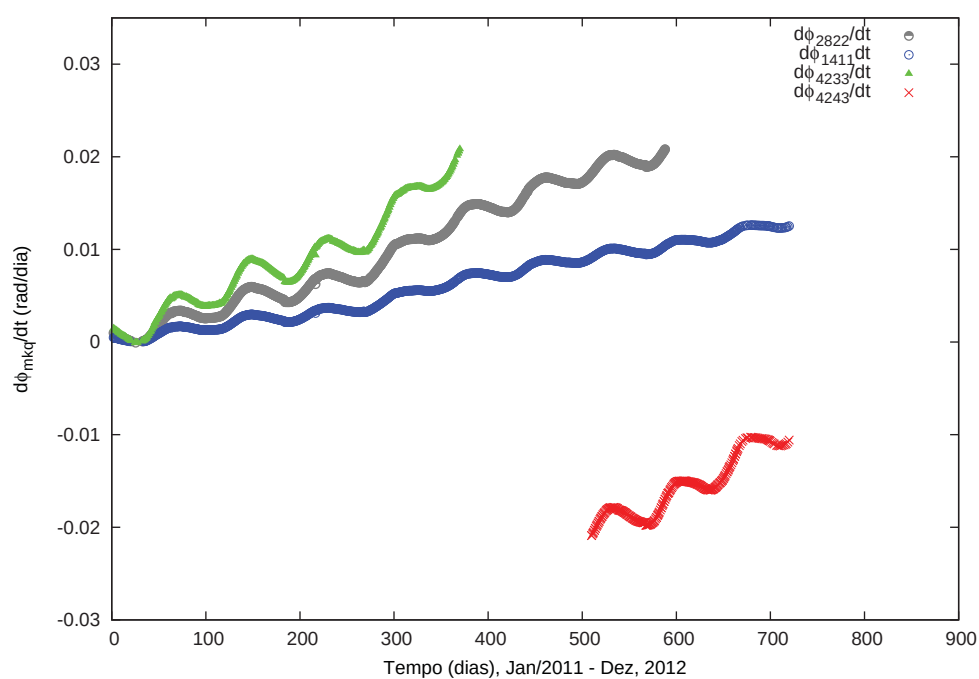


Figura 7.20: Comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondente ao movimento orbital do objeto 17527.

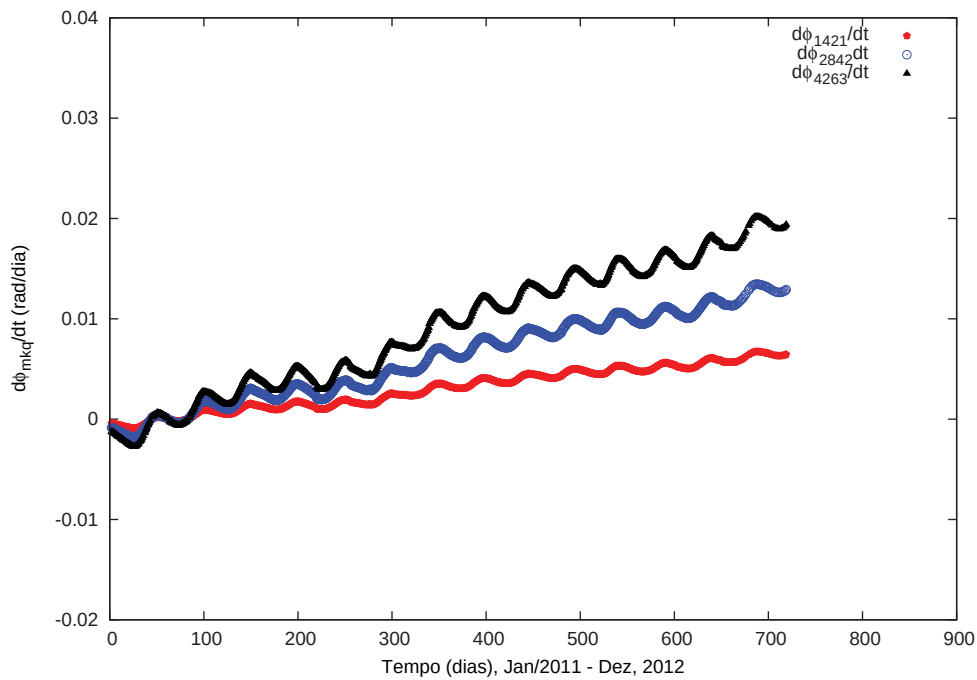


Figura 7.21: Comportamento no tempo de $\dot{\phi}_{mkq}$ correspondente ao movimento orbital do objeto 19467.

Analisando o comportamento temporal dos ângulos ressonantes $\dot{\phi}_{mkq}$ nas Figs. 7.18 a 7.21 é possível observar movimento orbital irregular, principalmente para os objetos 16181, 17527 e 19467. Durante cerca de 330 dias, o movimento orbital do objeto 16369 é governado por apenas um ângulo ressonante ϕ_{4183} , o que indica movimento regular mas, nos dias que seguem, novos ângulos ressonantes surgem, ϕ_{14-401} e ϕ_{27492} , podendo tornar o movimento irregular. Os movimento orbitais dos objetos 16181, 17527 e 19467 são influenciados pela ressonância exata 14:1 e eles necessitam de um sistema completo com diferentes ângulos ressonantes, os quais compõem seus movimentos. No entanto, o movimento orbital do objeto 16369 é definido por ângulos ressonantes na ressonância exata, ϕ_{14-401} , e na vizinhança da ressonância exata, ϕ_{4183} e ϕ_{27492} , o que pode indicar que o movimento orbital deste objeto está deixando de ser influenciado pela ressonância 14:1, ao longo do tempo.

Os resultados e discussões mostram a complexidade nas dinâmicas orbitais destes objetos causada pelos efeitos de ressonância. Além disso, o crescente número de detritos espaciais e colisões entre eles podem causar grandes problemas para missões de satélites artificiais.

Capítulo 8

CONCLUSÃO

Efeitos de ressonâncias estão presentes nas órbitas de diferentes corpos no Sistema Solar e podem contribuir de forma significativa para a variação dos elementos orbitais que definem sua posição. Em vista disso, o presente trabalho estuda as ressonâncias 2:1 e 14:1 que aglomeram satélites artificiais e detritos espaciais nas órbitas média e baixa da Terra, respectivamente.

As ressonâncias consideradas são definidas pela comensurabilidade entre o movimento médio do satélite artificial e o movimento de rotação da Terra. Sendo assim, na ressonância 2:1, por exemplo, o satélite realiza duas revoluções enquanto que a Terra completa uma.

Para o estudo das ressonâncias, sucessivas transformações canônicas são realizadas com o objetivo de escrever uma Hamiltoniana reduzida que contenha apenas termos seculares e ressonantes. Primeiramente, encontra-se uma Hamiltoniana que pode conter infinitos harmônicos zonais e tesserais, para que depois seja escrita de forma simplificada, contendo apenas os principais harmônicos zonais e tesserais que influenciam uma determinada ressonância.

O presente trabalho descreve órbitas de movimento regular, as quais podem ser estudadas pelo sistema dinâmico simplificado, com o estudo dos ângulos ressonantes separados e as órbitas com a influência de vários ângulos ressonantes, que podem ter movimento irregular e são descritas pelo sistema dinâmico completo, o qual considera os ângulos ressonantes juntos.

No estudo da ressonância 2:1, o comportamento dinâmico de três ângulos ressonantes, associados ao movimento de satélites artificiais são considerados. Na integração numérica, os ângulos ϕ_{2201} , ϕ_{2211} e ϕ_{2221} associados ao J_{22} , e, ϕ_{4211} , ϕ_{4221} e ϕ_{4231} associados ao J_{42} são estudados.

Na região de movimento regular, pode-se estudar o sistema dinâmico considerando cada ângulo crítico separadamente. A aparência do espaço de fase encontrado por integração numérica

se assemelha ao espaço de fase do pêndulo simples.

Simulações numéricas mostram os espaços de fase, ϕ_2 versus a , para diferentes inclinações 23° e 55° , e, para a mesma excentricidade, $e = 0,001$, considerando os harmônicos tesserais J_{22} e J_{42} para os ângulos críticos ϕ_{2201} e ϕ_{4211} , respectivamente. Observa-se que, os ângulos críticos ϕ_{4211} têm a mesma frequência do ângulo ϕ_{2201} com uma fase diferente. Estes resultados mostram que as amplitudes aumentam quando a inclinação varia de 23° a 55° .

Figuras 5.12 a 5.14 mostram as curvas $a_{max}(a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min}(a_{crit} - \Delta a)$ para os ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} , considerando diferentes inclinações e excentricidades. Nestes estudos, as possíveis regiões instáveis podem ser visualizadas pela região delimitada na intersecção entre as curvas $a_{max}(a_{crit} + \Delta a)$ e $a_{min}(a_{crit} - \Delta a)$ dos ângulos ressonantes ϕ_{2201} e ϕ_{2211} . O comportamento no tempo do semi-eixo maior, excentricidade e argumento do perigeu indicam movimentos orbitais regular e caótico, e, o comportamento no tempo da constante de integração C_2 e os expoentes de Lyapunov são usados como ferramenta para confirmar os movimentos irregulares.

Analisando os ângulos ressonantes ϕ_{2201} , ϕ_{2211} e ϕ_{2221} , pode-se verificar que as distâncias de separação entre as ressonâncias diminuem com o aumento da inclinação, indicando que a inclinação está se aproximando da inclinação crítica, $I = 63^\circ 26'$. Analisando os ângulos ressonantes ϕ_{4211} , ϕ_{4221} e ϕ_{4231} , $\dot{\omega}$ muda o sinal duas vezes, para as inclinações, 37° e 72° , observando uma situação diferente relacionada ao harmônico.

Nas simulações consideradas no trabalho, quatro casos mostram possíveis movimentos irregulares para $C_1 = -1,467778013 \times 10^{11} m^2/s$, $C_1 = -1,467819454 \times 10^{11} m^2/s$, $C_1 = -1,467765786 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467821043 \times 10^{11} m^2/s$. Estudando os expoentes de Lyapunov, dois casos mostram movimentos caóticos para $C_1 = -1,467819454 \times 10^{11} m^2/s$ e $C_1 = -1,467821043 \times 10^{11} m^2/s$.

O estudo dos expoentes de Lyapunov é importante para verificar possíveis movimentos irregulares, através da divergência de órbitas vizinhas. Esta análise é útil para trajetórias específicas mas, numa verificação mais ampla, as regiões em que transitam órbitas irregulares podem ser detalhadas usando seções de Poincaré.

Analisando a contribuição dos termos relacionados ao J_{42} é observado que, para o valor de $C_1 = -1,045724331 \times 10^{11} m^2/s$ as amplitudes dos termos $B_{4,4211}$, $B_{4,4221}$ e $B_{4,4231}$ são maiores que as dos outros valores de C_1 . Em outras palavras, para valores maiores de semi-eixo maior é observado uma menor contribuição dos termos relacionados ao harmônico tesseral J_{42} .

Dentro da região onde as ressonâncias são encontradas, o movimento pode ser caótico, mostrando sensibilidade às condições iniciais. Fora da região de junção das ressonâncias, as órbitas são em geral quase-periódicas.

No estudo de órbitas ressonantes na região LEO, o ângulo crítico ϕ_{141461} associado ao problema da ressonância 14:1 no movimento de satélites artificiais é investigado. Resultados mostram os espaços de fase, a versus ϕ_2 , e o comportamento no tempo do semi-eixo maior e do ângulo ϕ_2 para o ângulo crítico ϕ_{141461} , associado ao harmônico tesseral J_{1414} . As condições iniciais usadas para as inclinações são 87° e 95° e as excentricidades são 0,019 e 0,005, respectivamente. Os valores iniciais do semi-eixo maior são ao redor do semi-eixo crítico.

Analisando os objetos catalogados satisfazendo o critério estabelecido do período ressonante maior do que 300 dias, quatro satélites artificiais (16181, 16369, 17527 e 19467) são estudados observando características irregulares em suas órbitas. O comportamento no tempo dos elementos orbitais são usados para verificar as órbitas destes objetos.

O comportamento no tempo do período ressonante dos objetos mostram largas amplitudes, e conseqüentemente, os ângulos ressonantes alternam entre curta e profunda ressonância.

Vários ângulos ressonantes influenciam, simultaneamente, os movimentos orbitais dos objetos. O comportamento no tempo da inclinação, nos casos dos objetos 16181 e 16369, e o comportamento no tempo da excentricidade, nos casos dos objetos 17527 e 19467, confirmam as irregularidades em suas órbitas. A dinâmica orbital do objeto 16369 é primeiramente influenciado por um ângulo ressonante na vizinhança da ressonância 14:1 mas, depois de quase 330 dias, mais ângulos ressonantes surgem, podendo influenciar para que a sua órbita seja irregular.

O catálogo TLE dos objetos orbitando a Terra é uma ferramenta importante para estudar os movimentos orbitais de satélites artificiais e detritos espaciais.

O conhecimento de regiões regulares ou estáveis, por volta das ressonâncias 2:1 e 14:1, nas regiões de órbitas média e baixa da Terra, respectivamente, pode ser muito importante para garantir uma maior segurança para os movimento orbitais de satélites artificiais e, possivelmente, um consumo mais baixo de combustível com manobras orbitais se comparado com regiões instáveis.

8.1 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros cabe aprimorar o modelo analítico utilizando outras perturbações, além da causada pelo geopotencial. O uso dos dados de objetos catalogados pode ser mais explorado no intuito de comparar o modelo desenvolvido com os movimentos orbitais reais dos objetos orbitando a Terra.

A região de órbitas baixas da Terra possui a maior parte dos objetos catalogados, incluindo satélites artificiais e detritos espaciais, e merece atenção em relação às outras ressonâncias, além da 14:1 estudada no presente trabalho. Outros estudos importantes como a diminuição de detritos espaciais na região, proteção à espaçonave em operação, no intuito de evitar colisões com objetos sem controle e reentrada de objetos no planeta, também podem ser assuntos relacionados e pertinentes.

REFERÊNCIAS

- BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. **Fundamentals of Astrodynamics**. Dover Publications, Inc, New York, 1971.
- BLITZER, L. **Synchronous and Resonant Satellite Orbits Associated with Equatorial Ellipticity**. ARS Journal 32, p. 1016-1019, 1963.
- CHANGYIN, Z.; WENXIANG, Z.; ZENGYAO, H.; HONGBO, W. **Progress in space debris research**. Chinese Journal of Space Science 30, p. 516-518, 2010.
- CHIRIKOV, B. V. **A universal instability of many-dimensional oscillator systems**, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979.
- CHRISTIANSEN, F.; RUGHZ, H. H. **Computing Lyapunov spectra with continuous Gram - Schmidt orthonormalization**. Nonlinearity 10, p. 1063–1072, 1997.
- ELY, T. A.; HOWELL, K. C. **Long-term Evolution of Artificial Satellite Orbits due to Resonant Tesseral Harmonics**. Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 44, p. 167-190, 1996.
- FORMIGA, J. K. S.; VILHENA DE MORAES, R. **Dynamical systems: an integrable kernel for resonance effects**. Journal of Computational Interdisciplinary Sciences 1(2): p. 89-94, 2009.
- GARFINKEL, B. **The Disturbing Function for an Artificial Satellite**. Astron. Journal, Vol. 70, p. 688-704, 1965a.
- GARFINKEL, B. **Tesseral Harmonic Perturbations of an Artificial Satellite**. Astron. Journal, Vol. 70, p. 784-786, 1965b.
- GARFINKEL, B. **Formal Solution in the Problem of Small Divisors**. Astron. Journal, Vol. 71, p. 657-669, 1966.

- GEDEON, G. S. ; DIAL, O. L. **Along-track Oscillations of a Satellite due to Tesseral Harmonics**. AIAA Journal, Vol. 5, p. 593-595, 1967a.
- GEDEON, G. S.; DOUGLAS, B. C.; PALMITER, M. T. **Resonance Effects on Eccentric Satellite Orbits**. Journal of the Astronautical Sciences, Vol. XIV, p. 147-157, 1967b.
- GEDEON, G. S. **Tesseral Resonance Effects on Satellite Orbits**. Celestial Mechanics 1, p. 167-189, 1969.
- GEMAEL, C. **Introdução à geodésia física** Curitiba: Ed. da UFPR, 1999.
- GOLEBIWSKA, J.; WNUK, E.; WYTRZYSZCZAK, I. **Space debris observation and evolution predictions**, Software Algorithms Document (SAD), ESA PECS Project N° 98088, Astronomical Observatory of the Adam Mickiewicz University, Poznan, 2010.
- GROSSO, P. R. **Movimento Orbital de um Satélite Artificial em Ressonância 2:1**. Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1989.
- HOOTS, F. R.; ROEHRICH, R. L. **Models for Propagation of NORAD Element Sets**, Space-track Report N°. 3, 1980.
- IKEDA, H.; HANADA, T.; YASAKA, T. **Searching for lost fragments in GEO**. Acta Astronautica 63, p. 1312–1317, 2008.
- JUPP, A. **A Solution of the Ideal Resonance Problem for the Case of Libration**. Astron. Journal, Vol. 74, p. 35-43, 1969.
- KAULA, W. M. **Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy**. Blaisdel Publ. Co., Waltham, Mass, 1966.
- KLINKRAD, H. **Space Debris: Models and Risk Analysis**. Springer and Praxis Publishing, Berlin, 2006.
- KUGA, H. K.; RAO, K. R.; CARRARA, V. **Satélites Artificiais – Movimento Orbital**, Março 2000.
- KUGA, H. K. **Utilização das efemérides "2-lines" do NORAD no modelo orbital do satélite CBERS-1**, I Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, Issue 1, p. 925-930, 2002.

- LANE, M. T. **An Analytical Treatment of Resonance Effects on Satellite Orbits**. Celestial Mechanics, 42, p. 3-38, 1988.
- LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMANN, M. A., **Regular and Chaotic Dynamics**, 2^aed., New York: Springer-Verlag, 1992.
- LIMA JR., P. H. C. N. **Sistemas Ressonantes a Altas Excentricidades no Movimento de Satélites Artificiais**. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1998.
- LUCA, N. **A Astronáutica e seus Grandes Pioneiros**. Curitiba: Editora da UFPR, 1990.
- MECHISHNEK, M. J. **Overview of the Space Debris Environment**. AEROSPACE REPORT NO. TR-95(5231)-3, 1995.
- MORANDO, M. B. **Orbites de Resonance des Satellites de 24h**. Bull. Astron. 24, p. 47, 1963.
- NETO, A. G. S.; FERNANDES, S. S.; TERRA, M. O. **Estudo Numérico de Órbitas Ressonantes no Movimento de Satélites Artificiais**, DINCON, Bauru, p. 494-504, 2005.
- NETO, A. G. S. **Estudo de Órbitas Ressonantes no Movimento de Satélites Artificiais**. Tese de Mestrado, ITA, 2006.
- NISHIDA, S.; KAWAMOTO, S.; OKAWA, Y.; TERUI, F.; KITAMURA, S. **Space debris removal system using a small satellite**. Acta Astronautica 65, p. 95-102, 2009.
- ORLANDO, V.; LOPES, R. V. F. ; KUGA, H. K. **Flight dynamics team experience throughout four years of SCD1 in-orbit operations: main issues, improvements and trends**, in: Proceedings of XII International Symposium on Space Flight Dynamics, Darmstadt, Germany, ESOC, p. 433-437, 1997.
- OSIANDER, R.; OSTDIEK, P. **Introduction to Space Debris**. Handbook of Space Engineering, Archeology and Heritage, 2009.
- OSORIO, J. P. **Perturbações de Órbitas de Satélites no Estudo do Campo Gravitacional Terrestre**. Porto, Imprensa Portuguesa, 1973.
- QUN-HONG, L.; JIE-YAN, T. **Lyapunov exponent calculation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system with symmetrical rigid stops**, Chin. Phys. B, Vol. 20, No. 4, 2011.

- ROY, A. E. **Orbital Motion**. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 3rd ed. 1988.
- SAMPAIO, J. C.; VILHENA DE MORAES, R. **Estudo do Efeito de Maré Terrestre na Variação dos Elementos Orbitais**. DINCON' 2008.
- SAMPAIO, J. C. **Efeitos de Maré no Movimento Orbital de Satélites Artificiais**. Dissertação de Mestrado, UNESP - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2009.
- SAMPAIO, J. C.; WNUK, E.; VILHENA DE MORAES, R.; FERNANDES, S. S. **The Orbital Motion in the LEO Region: Study of the 14:1 Resonance**. Em: International Symposium on Orbit Propagation and Determination, Lille, França, 2011.
- SAMPAIO, J. C.; VILHENA DE MORAES, R.; FERNANDES, S. S. **The Orbital Dynamics of Synchronous Satellites: Irregular Motions in the 2:1 Resonance**. Mathematical Problems in Engineering, 2012a.
- SAMPAIO, J. C.; VILHENA DE MORAES, R. **Artificial Satellites: Resonance Effects Produced by Terrestrial Tide**. Journal of Aerospace Engineering, Sciences and Applications, Jan. – Mar., Vol. IV, No 1, 2012b.
- SAMPAIO, J. C.; WNUK, E.; VILHENA DE MORAES, R.; FERNANDES, S. S. **The Orbital Motion in the LEO Region: Objects in Deep Resonance**. Em: 39th COSPAR Scientific Assembly, Mysore, 2012c.
- SAMPAIO, J. C.; NETO, A. G. S.; FERNANDES, S. S.; VILHENA DE MORAES, R.; TERRA, M. O. **Artificial satellites orbits in 2:1 resonance: GPS constellation**. Acta Astronautica 81, p. 623–634, 2012d.
- SAMPAIO, J. C.; WNUK, E.; VILHENA DE MORAES, R.; FERNANDES, S. S. **Space Debris in Low Earth Orbits: Orbital Dynamics and Resonance Effects**. Em: 44th Meeting of the American Astronomical Society's Division for Planetary Sciences (DPS), Reno, 2012e.
- SANCHEZ, D. M.; YOKOYAMA, T.; BRASIL, P. I. O.; CORDEIRO, R. R. **Some Initial Conditions for Disposed Satellites of the Systems GPS and Galileo Constellations**. Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2009.

- SHIMADA, I.; NAGASHIMA, T. **A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems**. Progress of Theoretical Physics, Vol. 61, No. 6, 1979.
- SPACE TRACK. **Archives of the 2-lines elements of NORAD**. Disponível em: <www.space-track.org>, acessado em 2011 e 2012.
- VILHENA DE MORAES, R.; FITZGIBBON, K. T.; KONEMBA, M. **Influence of the 2:1 Resonance in the Orbits of GPS Satellites**. Adv. Space Res., COSPAR, Vol. 16, *Nº* 12, p. 37-40, Great Britain, 1995.
- VILHENA DE MORAES, R.; FORMIGA, J. K. S.; LIMA JR., P. H. C. N.; KUGA, H. K. **Orbital Perturbations : Resonance Effects**. Berlin, 2007.
- ZHOW, L.; LEHTO, H. J.; SUN, Y.; ZHENG, J. **The apsidal corotation in mean motion resonance: the 55 Cancri as an example**. Arxiv: 24 Jan. de 2004.
- WIESEL, W. E. **Continuous time algorithm for Lyapunov exponents**. Physical Review E, Vol. 47, No. 5, 1993.
- WNUK, E.. **The Inclination Function for the High Value of Indices**. ACTA Astronomica 38, p. 127-140, 1988.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

FERREIRA, L. D. D.; VILHENA DE MORAES, R. **GPS Satellites Orbits: Resonance**, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2009.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. Cambridge University Press, 1999.

APÊNDICE A

Dados TLE do NORAD

Neste Apêndice, os dados 2-linhas do NORAD (SPACE TRACK, 2011, 2012), mais conhecidos por TLE, são descritos, especificando cada parâmetro que é apresentado no arquivo de dados associado a um determinado objeto.

Os dados TLE podem ser comparados com o modelo de propagação de órbita do satélite artificial, por exemplo, como tentativa de melhor descrição do movimento.

Atualmente existem cerca de 10000 objetos catalogados, entre satélites artificiais e detritos espaciais (OSIANDER; OSTDIEK, 2009; IKEDA et al., 2008). Como pode ser visto no presente trabalho, grande parte desses objetos estão na região de órbitas baixas da Terra. No estudo de ressonâncias é verificado que a ressonância 14:1 tem grande importância na região LEO, por aglomerar a maior parte dos objetos em movimentos orbitais ressonantes. Com este intuito os objetos catalogados 16181, 16369, 17527 e 19467 são estudados no presente trabalho através dos comportamentos no tempo dos elementos orbitais, período ressonante e ângulo ressonante. A Figura A.1 mostra um dos dados TLE do objeto 16181, usado no trabalho, assim como a descrição de cada parâmetro encontrado nas 2 linhas.

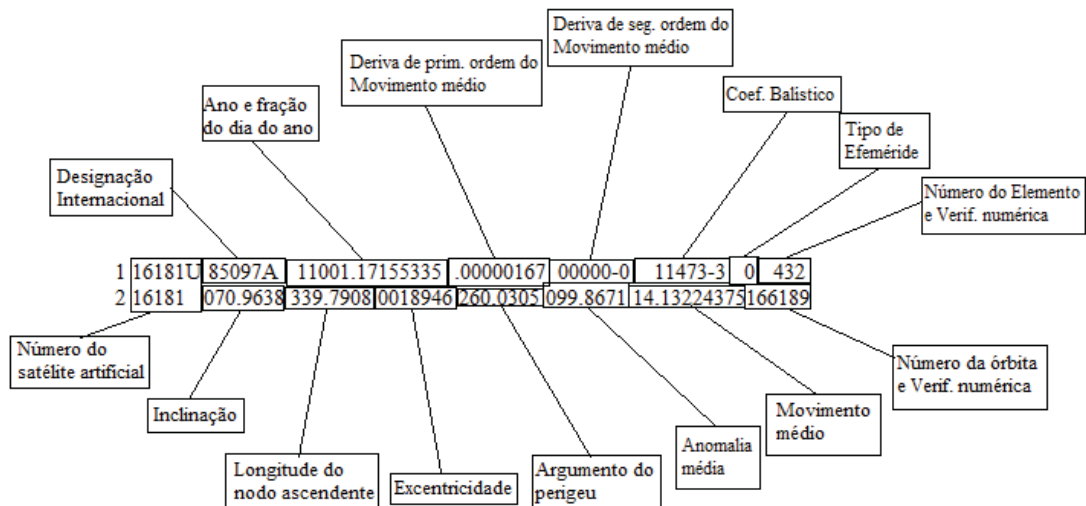


Figura A.1: Dados 2-linhas do NORAD do objeto 16181.

Na Figura A.1, pode-se visualizar que além do período, identificação do objeto, movimento médio e dos elementos keplerianos clássicos, como excentricidade, inclinação, longitude do nodo ascendente e argumento do perigeu, existem outros dados, como coeficiente balístico, por exemplo, que não são usados no presente texto, e que portanto são desprezados. Com isso, o arquivo de dados mostrado na Fig. A.1 é reescrito, aproveitando apenas os parâmetros que são estudados. É importante ressaltar que no website Space Track (SPACE TRACK, 2011, 2012), além dos dados Two-Line Elements, ou, elementos 2-linhas, podem ser encontrados também os arquivos Three-Line Elements, ou, elementos 3-linhas, porque ele tem a informação do nome do objeto em uma linha que antecede as duas linhas mostradas na Fig. A.1. No caso do objeto 16181, no arquivo Three-Line, aparece o nome "COSMOS 16197".

Os dados TLE, mostrados na Fig. A.1, são reescritos em apenas uma linha, como mostrado na Fig. A.2, considerando o número do satélite, o período da observação e os elementos orbitais.

Número do satélite artificial	Movimento médio	Inclinação	Longitude do nodo ascendente
16181	11001.17155335	14.13224375	18946
Ano e fração do dia do ano	Excentricidade	Argumento do perigeu	Anomalia média
	70.96380000	260.03050000	339.79080000
			99.86710000

Figura A.2: Os dados 2-linhas do NORAD do objeto 16181 são reescritos em 1 linha, considerando o número do satélite, o período da observação e os elementos orbitais.

A partir dos dados 1 linha, como mostrado na Fig. A.2, algumas correções nos elementos orbitais são feitas, considerando algum dos modelos SGP, que pode conter perturbações, como causadas pelo arrasto atmosférico, por exemplo, na tentativa de corrigir possíveis erros nas medições (HOOTS; ROEHRICH, 1980).

Com os dados, mostrados na Fig. A.2, agora corrigidos, o cálculo dos ângulos ressonantes e dos períodos ressonantes é feito, de acordo a Eq. (3.1). Veja a Fig. A.3, mostrando a identificação do objeto, o período, os elementos orbitais, o período ressonante e ângulo ressonante.

