

Tese de Livre-Docência

Amplitudes de Espalhamento:
dos Bósons de Calibre ao Gráviton

Autor: *Luiz Antonio Barreiro*

Rio Claro, 31 de janeiro de 2020.

530 Barreiro, Luiz Antonio
B271a Amplitudes de espalhamento : dos bósons de calibre ao
gráviton / Luiz Antonio Barreiro. - Rio Claro, 2020
112 f. : il., figs., tabs.

Livre docência - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

1. Física. 2. Amplitude de espalhamento. 3.
Supersimetria. 4. Teoria de cordas. 5. Matriz S. 6. Dualidades.
I. Título.

Amplitudes de Espalhamento: dos Bósons de Calibre ao Gráviton

Autor: *Luiz Antonio Barreiro*

Tese de Livre Docência

Banca: *Prof. Dr. Edson Denis Leonel* (UNESP/Rio Claro)
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (USP/São Paulo)
Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar (UNICAMP/Campinas)
Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto (USP/São Carlos)
Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos (UNESP/Rio Claro)

Instituição: Universidade Estadual Paulista
“Julio de Mesquita Filho”
Departamento de Física - IGCE

Rio Claro, 31 de janeiro de 2020.

Luiz Antonio Barreiro

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, minha esposa Lucimara, e meus filhos Bianca e Felipe pelo apoio e alegrias durante a realização deste trabalho. Em seguida a meu colega e amigo Prof. Ricardo Ivan Medina Bascur pelas discussões e muitas reuniões para chegarmos ao ponto que estamos. Aos colegas professores do departamento da física de Rio Claro por proporcionar um ambiente agradável que favorece ao desenvolvimento. Agradeço também ao Instituto de Ciências da UNIFEI que me permitiu o uso de seu cluster com os softwares necessários para os requerimentos desse trabalho.

“Trinta e um anos atrás, Dick Feynman me contou sobre sua versão da mecânica quântica 'A SOMA SOBRE CAMINHOS'. O elétron faz qualquer coisa que queira, ele disse. 'Vai em qualquer direção a qualquer velocidade, para a frente ou para trás no tempo, como quiser, e você soma as amplitudes e o resultado é a função de onda.' Eu disse para ele, 'Você está louco'... Mas ele não estava.”

Freeman John Dyson

Resumo

Algum tempo atrás, uma nova abordagem foi proposta para o método da matriz S para encontrar eficientemente os termos bosônicos do Lagrangiano de baixa energia e as respectivas amplitudes de espalhamento para a supercorda aberta [1]. Esta abordagem permite calcular os termos α'^N do Lagrangiano efetivo usando amplitudes de espalhamento de N -pontos de supercordas abertas com um número muito menor de termos que a abordagem convencional da matriz S . Posteriormente, utilizando a abordagem da matriz S revisada, foi possível chegar a uma derivação cinemática da fórmula encontrada pela primeira vez por Mafra, Schlotterer e Stieberger em arXiv: 1106.2645, usando o formalismo de Spinor Puro [2]. Nessa tese esses trabalhos são revistos e são utilizados para se encontrar, de uma forma simplificada as conhecidas relações KLT entre as amplitudes de espalhamento de grávitons e o quadrado de amplitudes de Yang-Mills. Além disso, foi possível obter relações inéditas não lineares entre amplitudes de Yang-Mills. A fim de alcançar estes resultados, fizemos uma análise cuidadosa da estrutura cinemática das amplitudes, encontrando uma derivação puramente cinemática das relações BCJ (para $N = 4, 5, 6$ e 7). Além disso, seguindo o espírito da abordagem revisada da matriz S , descobrimos várias bases KLT para as amplitudes de grávitons. Mostramos que partindo da conhecida amplitude de espalhamento de 3 grávitons e usando apenas análise dimensional, estrutura de polos das amplitudes (unitariedade em nível de árvore) e invariância de calibre, foi possível obter as relações KLT até $N=7$.

Abstract

Some time ago, a new approach was proposed for the S-matrix method to find efficiently the bosonic terms of the low energy effective Lagrangian and the respective scattering amplitudes for open superstring [1]. This approach allows one to compute the α'^N terms of the effective Lagrangian by using the N-point scattering amplitudes with a smaller number of terms than the conventional S-matrix approach. Subsequently, using the revisited S matrix approach, it was possible to arrive at a kinematic derivation of the formula first found by Mafra, Schlotterer, and Stieberger in arXiv: 1106.2645, using the pure Spinor formalism [2]. In this thesis, these works are reviewed and are used to find, in a simplified way, the known KLT relations between the gravitational scattering amplitudes and the square of Yang-Mills amplitudes. In addition, it was possible to obtain some not yet known non-linear relations between Yang-Mills amplitudes. In order to achieve these results, we performed a careful analysis of the kinematic structure of the amplitudes, finding a purely kinematic derivation of BCJ relations (for $N = 4, 5, 6$ and 7). Furthermore, following the spirit of the revisited S matrix approach, we have discovered various KLT bases for graviton amplitudes. We showed that, starting from the known 3 gravitons scattering amplitude and using only dimensional analysis, poles structure of the amplitudes (unitarity at tree level) and gauge invariance, it was possible to obtain the KLT relations up to $N = 7$.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão do Método da Matriz-S (Revisitado)	7
2.1	Propriedades das Amplitudes de Espalhamento de Bósons de Calibre . . .	7
2.1.1	Caso $N = 3$	9
2.1.2	Caso $N = 4$	10
2.1.3	Casos $N = 5$ e 6	13
2.2	Amplitudes de Espalhamento em Teoria de Supercordas	15
2.2.1	Relações de Unitaridade	15
2.2.2	Simetria Cíclica	16
2.2.3	Restrições nos fatores de momentum	18
3	Base para as Relações KLT	23
3.1	Breve revisão das Relações KLT	23
3.2	Estruturas Cinemáticas das Amplitudes em nível de árvore da Relatividade Geral	25
3.2.1	Convenção de escolha para termos $k_i \cdot Z_j \cdot k_l$	26
3.2.2	Convenção de Escolha para termos $(k_r \cdot Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot \dots \cdot Z_{j_p} \cdot k_s)$. . .	27
3.2.3	Convenção de Escolha para termos $Tr[Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot \dots \cdot Z_{j_k}]$	27
3.3	Termos Fatorizáveis e não-Fatorizáveis	29
3.4	Primeira abordagem para encontrar uma base para $\mathcal{W}_N$ (lado gravitacional)	30
3.4.1	Caso $N = 3$	31
3.4.2	Caso $N = 4$	33
3.4.3	Casos $N = 5$ e 6	34
3.5	Segunda abordagem para encontrar uma base para $\mathcal{W}_N$ (lado bósons de calibre)	36
3.5.1	Caso $N = 3$	36
3.5.2	Caso $N = 3$ com simetria esquerda-direita manifesta	39

3.5.3	Prova da equivalência entre os dois procedimentos de exigência de invariância no calibre	40
3.5.4	Caso $N = 4$	41
4	Derivação cinemática das relações KLT	45
4.1	Base KLT padrão	45
4.2	As relações KLT	47
4.2.1	Caso $N = 4$	48
4.2.2	Caso $N = 5$	50
5	Conclusões e Perspectivas	55
A	Planilha Mathematica Wolfram para cálculo da amplitude gravitacional de 4 pontos	57
B	Detalhes do Cálculo Cinemático para os casos $N=4$ e $N=5$	73
B.1	Caso $N = 4$	73
B.2	Caso $N = 5$	75
C	Algumas Relações de Unitariedade para Grávitons	81
C.1	Relação de Unitariedade para 4-grávitons	81
C.2	Relação de Unitariedade para 5-grávitons	81
C.3	Relação de Unitariedade para 6-grávitons	81
C.4	Relação de Unitariedade para 7-grávitons	82
C.5	Relação de Unitariedade para 8-grávitons	82
C.6	Relação de Unitariedade para 9-grávitons	83
C.7	Ausência de termos com um traço de número ímpar de Z 's	83
C.7.1	Caso de 6-gravitons	83

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de Feynman para a amplitude de espalhamento de 5 pontos . . .	16
2.2	Representação diagramática das amplitudes de Yang-Mills superssimétricas $A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5)$ e $A_{YM}(1, 3, 2, 4, 5)$ evidenciando a ordem dos polos devido ao número de propagadores entre os vértices.	17
3.1	Número de termos cinemáticos permitidos, considerando-se as convenções adotadas e as restrições utilizadas	29
4.1	Diagramas de Feynman trivalentes para as amplitudes de espalhamento de 4, 5 e 6 grávitons.	47
4.2	Diagramas Trivalentes para a amplitude de 4 pontos na Relatividade Geral.	49
B.1	Polos de segunda ordem em diagramas de 5 grávitons	75

Lista de Tabelas

2.1	Elementos do espaço vetorial de termos cinemáticos	8
2.2	Número de termos cinemáticos independentes presentes no espaço $\mathcal{V}_N$	9
2.3	Estruturas de polos contidos em cada amplitude de YM de pontos.	18
3.1	Termos cinemáticos não-fatorizáveis até $N=5$	30

Nomenclatura

- BCJ** A dualidade do BCJ foi uma dualidade escrita pela primeira vez por Zvi Bern, John Joseph Carrasco e Henrik Johansson em 2010. Essa dualidade descreve relações entre amplitudes de Yang-Mills. De fato, as amplitudes de Yang-Mills podem formar espaços vetoriais, de modo que qualquer amplitude de Yang-Mills pode ser escrita em termos de combinações lineares de outras amplitudes.
- C/C** Significa dualidade cor/cinemática. As amplitudes de bosons de calibre possuem uma parte cinemática e um termo de cor (traço das matrizes de Gellman). A dualidade C/C significa que o termo de cor fica substituído pela parte cinemática da amplitude. Dessa forma se obtém a parte cinemática ao quadrado que é idêntica à amplitude de gravitons, pelo menos para $N=3$ grávitons.
- KLT** As relações Kawai-Lewellen-Tye (KLT) derivadas da teoria das cordas nos dizem que as amplitudes gravitacionais perturbativas são o quadrado das amplitudes correspondentes na teoria de calibre.
- NS-NS** Representa um setor com condições de Neveu-Schwartz nos modos de movimento esquerdo e direito.
(Há duas extensões com particular importância na teoria das supercordas para uma superálgebra de Virasoro: a álgebra Ramond e a álgebra Neveu-Schwarz. Eles descrevem as simetrias de uma supercorda em dois setores diferentes, chamados setor de Ramond e setor de Neveu-Schwarz. Os campos fermiônicos na corda fechada podem ser periódicos ou anti-periódicos no círculo ao redor da corda. Os estados no setor de Ramond admitem condições periódicas, enquanto que no setor de Neveu-Schwarz admitem condições anti-periódicas).
- Tipo II** Teoria das cordas do tipo II é um termo unificado que inclui cordas do tipo IIA e cordas tipo IIB que diferem apenas pela projeção utilizada do grupo $SO(32)$
- YM** De maneira geral, teorias de calibre não abelianas são denominadas teorias de Yang-Mills (YM).

Introdução

A Lagrangiana efetiva de baixa energia na Teoria das Cordas é um assunto muito antigo, desde os primórdios da teoria, quando se tornou claro que, no limite de energias muito baixas, reproduz as amplitudes de espalhamento (em nível de árvore) da Relatividade Geral (RG) e Teorias de Yang-Mills (YM). Mais precisamente, era sabido que ela adiciona termos de correção α' aos Lagrangianas dessas teorias [3], onde α' é a constante fundamental da corda.

Em meados dos anos oitenta, após o entendimento de que as condições de consistência da Teoria das Cordas (invariância conforme) exigem que os extremos da ação efetiva de baixa energia estejam relacionados aos zeros da função beta do modelo Sigma[4, 5], novos interesses surgiram no cálculo exato dos primeiros termos de correção α' nas ações efetivas de baixa energia das supercordas[6, 5]. Um dos resultados surpreendentes que foi encontrado nessa época é que o lagrangiano de Born-Infeld (e sua correspondente versão supersimétrica, no caso de supercordas) é o limite de baixas energias do lagrangiano para cordas abertas abelianas, desde que $F_{\mu\nu}$ seja mantido constante [7, 5]. Este resultado foi reproduzido posteriormente, de forma independente, em [8, 9, 10]¹Infelizmente, no caso não abeliano, não há um resultado tão bom. Existe uma proposta de 'Traço Simetrizado' para o lagrangiano de Born-Infeld não abeliano[12], e esta proposta funciona de fato até ordem α'^2 , mas está claro, da seguinte identidade $[D, D]\cdot = [F, \cdot]$, que as derivadas covariantes são tão importantes quanto os termos sem derivadas e portanto não podem ser ignorados como na teoria abeliana [13, 14, 15, 16, 17, 18].

Outra abordagem que poderia ser usada para obter a ação efetiva de baixa energia é a simetria κ . Embora esta abordagem funcione no caso abeliano, foi visto em [19] que no caso não-abeliano ela falha já em ordem α'^3 . Assim, para o caso não-abeliano, além dos resultados obtidos em [20] e [21], não existe um resultado a toda ordem em α' (como a

¹Mais recentemente, usando uma estrutura de spinor puro, a teoria supersimétrica abeliana de Born-Infeld foi formulada por meio de um Lagrangiano polinomial que, além do termo livre, contém apenas termos de interação de 4 pontos[11].

ação de Born-Infeld no caso abeliano)^{2,3}.

Em meados da década de noventa, após a descoberta de que as D -branas participam da Teoria das Cordas como objetos não-perturbativos [23] e que ações efetivas da D -brana podem ser obtidas de forma equivalente por meio do limite de baixas energias de interações de supercordas abertas [24], novos interesses surgiram no cálculo de termos de baixa energia do lagrangiano efetivo (veja [25, 26, 16, 27, 28], por exemplo). Antes do trabalho em [18], a abordagem da matriz S para os termos de correção α' na ação efetiva de baixa energia tinha sido usada apenas com conhecimento de amplitudes de 4 pontos [14], o que já era insuficiente para determinar todos os termos α'^3 . Métodos alternativos, baseados principalmente na Supersimetria, surgiram para obter a lista completa de termos não-abelianos em cada ordem em α' , sempre que possível [15, 29, 17, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]. Em alguns casos, esses métodos obtiveram algum superinvariante em uma determinada ordem em α' , seja em componentes de campos [31, 32, 35, 36] ou em termos de supercampos [30, 33] (no caso $D = 4$). Em alguns outros casos, esses métodos só podiam obter alguns termos bosônicos e fermiônicos, como em [17], mas eram capazes de provar que existe um superinvariante único nessa ordem α' . A questão é que, para ir a ordens superiores em α' , esses métodos baseados em supersimetria geralmente requerem o conhecimento, em algum momento, de todos os termos bosônicos e fermiônicos do lagrangiano em uma ordem inferior em α' o que exige um enorme esforço computacional.

Na verdade, uma descrição completa em baixa energia da ação efetiva não depende apenas do lagrangiano de Dirac-Born-Infeld (que já descreve interações entre cadeias abertas e fechadas), mas também do lagrangiano de Wess-Zumino, que considera as interações entre cordas abertas e o setor Ramond-Ramond de cordas fechadas. Por exemplo, na introdução da referência [39] há uma boa revisão sobre o assunto, bem como nas referências [40, 41]. Um renascimento dos cálculos da matriz S para determinar os termos lagrangianos efetivos de baixa energia com D -brana (além dos termos de campo de calibre puros) e também para determinar os termos lagrangianos de Wess-Zumino são apresentados em [42, 43]. Assim, novas realizações vêm ocorrendo nos cálculos da matriz S envolvendo estados sem massa de Ramond-Ramond e supercordas abertas [22, 55, 42, 43, 56]. Vários resultados razoavelmente recentes sobre cálculos de supercordas abertas ou fechadas ou mistas, tem sido produzidos para toda ordem em α' , por E. Hatefi [57], bem como o estudo de Lagrangianos efetivos de baixas energias das supercordas [58, 59, 1],

Outros interessantes aspectos envolvendo as amplitudes de espalhamento são suas interrelações. Por exemplo, a correspondência entre amplitudes de supergravidade e supercordas [53] e uma compreensão mais profunda da expansão em α' em nível de árvore da amplitude da supercorda com base na amplitude de super Yang-Mills [60, 61, 62, 63],

²Os resultados em [20] e [21] foram obtidos usando amplitudes de 4 e 5 pontos e, portanto, apenas determinam os termos do Lagrangiano não-abelino que são sensíveis àquelas amplitudes de N -pontos. Por exemplo, os termos $\alpha'^4 F^6$ não estão presentes nessas referências.

³Um cálculo posterior e independente para os termos $D^{2n} F^4$ para toda ordem α' , foi feito em [22], considerando também a amplitude de 4 pontos da supercorda aberta.

entre outras coisas. Dentro dessa linha de pesquisa, um dos resultados mais importantes é a demonstração do fato que as subamplitudes de super Yang-Mills formam uma base para esse espaço, a qual é conhecida como base BCJ. Em outras palavras, qualquer subamplitude de super Yang-Mills pode ser escrita em termos de um conjunto bem definido (“vetores de base”) de subamplitudes de super Yang-Mills,

$$A_{SYM}(\mathcal{P}\{1, \dots, N\}) = \sum_{\sigma_N \in S_{N-3}} f^{\{\sigma_N\}}(s_{i,j}) A_{SYM}(1, \{2_\sigma, 3_\sigma, \dots, (N-2)_\sigma\}, N-1, N), \quad (1.1)$$

onde $s_{i,j} = 2k_i \cdot k_j$ são as variáveis de Mandelstam para o problema e $f^{\{\sigma_N\}}(s_{i,j})$ são funções polinomiais das variáveis de Mandelstam. $A_{SYM}(1, \{2_\sigma, 3_\sigma, \dots, (N-2)_\sigma\}, N-1, N)$ representa a amplitude de super Yang-Mills e a notação $\sigma_N = \{2_\sigma, 3_\sigma, \dots, (N-2)_\sigma\}$ representa uma permutação dos índices $\{2, 3, \dots, (N-2)\}$. A troca de índices representado por σ_N deve ser feita tanto nos momenta k_p como nas polarizações. Desse modo, o somatório em (1.1) tem $(N-3)!$ termos.

Com base nesse resultado, outro avanço notável é a fórmula obtida por Mafr-Schlotterer-Stieberger (MSS) para o espalhamento de N pontos (nível de árvore) de supercordas abertas sem massa e não-abelianas [52]:

$$\mathcal{A}_N = i(2\pi)^{10} \delta^{(10)}(k_1 + \dots + k_N) \left[\text{tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \dots \lambda^{a_N}) A(1, 2, \dots, N) + \left(\begin{array}{c} \text{permutações} \\ \text{não cíclicas} \end{array} \right) \right] \quad (1.2)$$

onde $A(1, \dots, N)$ é a subamplitude definida por

$$A(1, \dots, N) = \sum_{\sigma_N \in S_{N-3}} F^{\{\sigma_N\}}(\alpha') A_{SYM}(1, \{2_\sigma, 3_\sigma, \dots, (N-2)_\sigma\}, N-1, N), \quad (1.3)$$

onde as funções $F^{\{\sigma_N\}}(\alpha')$'s são conhecidos como fatores de momentum, os quais contêm as informações da expansão em α' das amplitudes de espalhamento ⁴ e são dados pela seguinte formula integral

$$F^{\{23\dots N-2\}}(\alpha') = \int_0^1 dx_{N-2} \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-3} \dots \int_0^{x_3} dx_2 \left(\prod_{i>j\geq 1}^{N-1} (x_i - x_j)^{2\alpha' k_i \cdot k_j} \right) \times \left\{ \prod_{p=2}^{N-2} \sum_{q=1}^{p-1} \left(\frac{2\alpha' k_p \cdot k_q}{x_p - x_q} \right) \right\}, \quad (1.4)$$

onde $x_1 = 0$ e $x_{N-1} = 1$ ⁵. Nesse caso, a troca de índices representado por σ_N deve ser feito em ambos, nos momenta k_p e nas variáveis x_p dentro das chaves. Isso ficará mais claro com o estudo de alguns casos mais a frente.

⁴Além de α' , os $F^{\{\sigma_N\}}(\alpha')$'s dependem dos produtos escalares $k_i \cdot k_j$ que podem ser escritos em termos de variáveis Mandelstam independentes deste amplitude de N pontos.

⁵In the expression in (1.4) x_N has already be taken to $+\infty$: that is why it does not appear on it.

A fórmula (1.3) foi derivada usando o formalismo Espinor Puro [64], que é manifestamente supersimétrico desde o início. A fórmula (1.3) é o resultado final (e simples) de um estudo elaborado envolvendo superespaço de espinor puro e sua estrutura de cohomologia [65], sendo aplicada inicialmente no cálculo de amplitudes de Super Yang-Mills e posteriormente estendido aos cálculos correspondentes em Teoria das supercordas abertas [52].

A fórmula (1.3) tem o mérito de esclarecer que a cinemática da amplitude de N-pontos de supercordas abertas, em qualquer ordem α' , é governada pela cinemática de Super Yang-Mills, isto é, da teoria em baixas energias. Também tem a virtude de identificar uma fórmula integral geral explícita, válida para qualquer $N \geq 3$, para todos os fatores de momentum $F^{\{\sigma_N\}}(\alpha')$ (eq.(1.4)).

Mais recentemente uma nova abordagem conseguiu reproduzir os resultados encontrados com a fórmula (1.3) usando simetrias e argumentos puramente cinemáticos. Essa abordagem ficou denominada de matriz - S 'revisitada' [1]. Ela foi chamada de 'revisitada' para distingui-la da 'convencional' porque consiste em uma maneira conveniente de lidar com os cálculos da matriz S. O procedimento leva em consideração uma importante restrição cinemática que surge nos cálculos das amplitudes de espalhamento de supercordas abertas, a saber, a ausência de termos $(\zeta \cdot k)^N$ na amplitude de espalhamento de N-pontos de bósons de calibre. Não se espera que esta restrição esteja presente nos cálculos correspondentes com cordas bosônicas abertas. Como será visto com mais detalhes nas próximas seções. De fato, é um resultado confirmado que a restrição não aparece nas amplitudes de 3 e 4 pontos e, com base em um argumento geral, não se espera que apareça em amplitudes bosônicas de N pontos. Para o caso superssimétrico, isso leva a um conjunto de condições que os coeficientes do Lagrangiano Efetivo devem obedecer, reduzindo enormemente o número de termos desconhecidos presentes naquele lagrangiano em uma dada ordem em α' . Estas condições são tais que, pelo menos até a ordem α'^4 , todos os termos bosônicos do Lagrangiano Efetivo podem ser determinados usando-se unicamente a conhecida amplitude de 4 pontos da supercorda aberta.

Uma descrição mais elaborada dessas idéias é apresentada na seção [Kinematical], onde será examinado o espaço das expressões cinemáticas de N-pontos que são invariantes de calibre na camada de massa e que não contêm termos $(\zeta \cdot k)^N$. É possível mostrar que esse é um espaço $(N - 3)!$ dimensional (pelo menos para $3 \leq N \leq 7$). Verifica-se então que uma base BCJ para as subamplitudes de Yang-Mills [67] pode de fato ser escolhida como base para este espaço. À luz desse importante resultado cinemático, a determinação das expressões explícitas das subamplitudes de supercordas abertas (para bósons de calibre) e das próprias relações BCJ torna-se simplesmente um problema de álgebra linear: conhecendo um vetor do espaço (isto é, uma dada subamplitude para a qual queremos uma expressão) e o que resta a fazer é encontrar os componentes desse vetor com relação à base do espaço vetorial. Esse cálculo é feito na seção 2.1, para as próprias relações BCJ (chegando ao mesmo resultado) das referências [49, ?] e também

na seção 2.2 para as subamplitudes de supercordas abertas (para bósons de calibre), chegando precisamente à parte bosônica de (1.3). Nessa seção são apresentados detalhes da aplicação desse método S-matrix revisitado para encontrar a expansão α' dos fatores de momentum $F^{\{\sigma_N\}}(\alpha')$ de (1.3).

Com base nas propriedades das subamplitudes de Yang-Mills supersimétricas de formarem uma base para o espaço vetorial BCJ mencionando nessa tese, será explorada uma extensão natural do requerimento de ausência dos termos $(\zeta \cdot k)^N$ e suas conseqüências, para o caso do Sistema Lagrangiano de Baixa Energia do setor NS-NS de teorias do Tipo II. De fato, veremos que esse resultado pode ser facilmente entendido por meio das relações KLT entre amplitudes de Yang-Mills e amplitudes gravitacionais.

Uma análise cuidadosa da cinemática envolvida nessas relações mostra que exigir que os termos $(\zeta \cdot k)^N$ estejam ausentes nas amplitudes de bósons de calibre de N-pontos da Teoria de Supercordas abertas implica que nas interações de gravitons em teorias do Tipo II, não devem conter os seguintes termos

$$(k \zeta k)^N \text{ or } (k \zeta \zeta k)^1 (k \zeta k)^{N-2} \quad (1.5)$$

Por exemplo, se considerarmos a amplitude de 3 pontos dos gravitons e / ou estados de Kalb-Ramond, as restrições em (1.5) implicam que termos como

$$(k_2 \zeta_1 k_2)(k_3 \zeta_2 \zeta_3 k_1) = (k_{2\mu} \zeta_1^{\mu\nu} k_{2\nu})(k_{3\rho} \zeta_2^{\rho\sigma} \zeta_{3\sigma\lambda} k_1^\lambda), \quad (1.6)$$

$$(k_2 \zeta_1 k_2)(k_3 \zeta_2 k_3)(k_1 \zeta_3 k_1) = (k_{2\mu} \zeta_1^{\mu\nu} k_{2\nu})(k_{3\rho} \zeta_2^{\rho\sigma} k_{3\sigma})(k_{1\lambda} \zeta_3^{\lambda\omega} k_{1\omega}), \quad (1.7)$$

não deve aparecer na amplitude. É fácil verificar se esses termos realmente aparecem na amplitude de 3 pontos no caso da Teoria das Cadeias Bosônicas Fechadas, em ordem α'^1 e α'^2 , respectivamente. O fato de que eles deveriam estar ausentes no caso supersimétrico implica que não deveria haver nenhum termo α'^1 e α'^2 no setor NS-NS do lagrangiano efetivo de baixa energia. das Teorias das Cordas do Tipo II, como é bem conhecido.

Assim, os principais resultados obtidos nessa tese estão relacionados ao fato da ausência dos termos $(\zeta \cdot k)^N$ e suas conseqüências nas propriedades das subamplitudes de Yang-Mills supersimétricas de formarem bases para um espaço vetorial. Consequentemente, é possível obter de uma maneira puramente cinemática, as relações KLT entre as amplitudes de grávitons e as amplitudes de Yang-Mills.

Revisão do Método da Matriz-S (Revisitado)

2.1 Propriedades das Amplitudes de Espalhamento de Bósons de Calibre

Esse capítulo será iniciado relembrando as propriedades das amplitudes de espalhamento. Se compararmos as subamplitudes de N-pontos de supercordas abertas e Yang-Mills (nível de árvore) para bósons de calibre, ambas as teorias sendo tratadas no calibre de Lorentz, do ponto de vista da estrutura de seus termos cinemáticos elas têm em comum a ausência de termos $(\zeta \cdot k)^N$. No primeiro caso, isso foi enfatizado em [1], juntamente com as fortes implicações que ele tem para determinar os termos bosônicos do Lagrangiano de baixa energia efetiva da teoria de uma forma muito simplificada e, no segundo caso, essa afirmação pode ser facilmente confirmada considerando as regras de Feynman na construção de amplitudes de espalhamento em nível de árvore[2]. Então, vamos considerar o espaço $\mathcal{V}_N$ de todas as expressões cinemáticas escalares de N -pontos construídas com as polarizações ζ_i e a momenta k_i de N bósons de calibre externos em uma teoria não-abeliana (como teoria de Supercordas abertas ou Yang-Mills, por exemplo). O momento e as polarizações devem satisfazer as seguintes condições:

$$\text{Conservação do Momentum:} \quad k_1^\mu + k_2^\mu + \dots + k_N^\mu = 0 . \quad (2.1)$$

$$\text{Camada de Massa:} \quad k_1^2 = k_2^2 = \dots = k_N^2 = 0 . \quad (2.2)$$

$$\text{Transversalidade (calibre de Lorentz):} \quad \zeta_i \cdot k_i = 0 , (i = 1, \dots, N) . \quad (2.3)$$

Com esses elementos básicos pode-se construir combinações lineares de termos cinemáticos tais como,

$$\begin{aligned}
T(1, 2, \dots, N) = & \alpha_1 (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1) \cdots (\zeta_N \cdot k_1) + \alpha_2 (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1) \cdots (\zeta_N \cdot k_2) + \cdots + \\
& + \beta_{1,1} (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) \cdots (\zeta_N \cdot k_1) + \beta_{1,2} (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) \cdots (\zeta_N \cdot k_2) + \cdots + \\
& + \beta_{2,1} (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot k_1) \cdots (\zeta_N \cdot k_1) + \beta_{2,2} (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot k_1) \cdots (\zeta_N \cdot k_2) + \cdots + \\
& \vdots \\
& + \lambda_{1,1} (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_5 \cdot k_1) \cdots (\zeta_N \cdot k_1) + \\
& + \lambda_{1,2} (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_5 \cdot k_1) \cdots (\zeta_N \cdot k_2) + \cdots + \\
& \vdots
\end{aligned}$$

onde os símbolos $\cdots$ ou $\vdots$ representam todas as possibilidades de combinações de índices. Cada termo deve conter necessariamente um número N de polarizações $\zeta_i (i = 1, 2, \dots, N)$, pois suas combinações lineares deverão produzir uma subamplitude de espalhamento de N pontos. Note na tabela 2.1 a distribuição de termos de acordo com seu coeficiente:

Coeficiente	Tipo de termos
α_i	$(\zeta \cdot k)^N$
$\beta_{i,j}$	$(\zeta \cdot \zeta)^1 (\zeta \cdot k)^{N-2}$,
$\lambda_{i,j}$	$(\zeta \cdot \zeta)^2 (\zeta \cdot k)^{N-4}$
$\vdots$	$\vdots$
$\omega_{i,i}$	$(\zeta \cdot \zeta)^{[N/2]} (\zeta \cdot k)^{N-2[N/2]}$

Tabela 2.1: Elementos do espaço vetorial de termos cinemáticos

onde a notação $[q]$ representa a parte inteira de q . De fato, deseja-se que “vetores” $T(1, 2, \dots, N)$ pertençam ao espaço $\mathcal{V}_N$ de subamplitudes de Yang-Mills de N pontos. Para que eles possam pertencer a esse espaço vetorial eles deverão obedecer às seguintes restrições

1. Não devem conter termos do tipo $(\zeta \cdot k)^N$;
2. Invariância de calibre na camada de massa: (2.4)
se qualquer $\zeta_i \rightarrow k_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) então $T(1, 2, \dots, N) = 0$

Para satisfazer o primeiro requerimento, todos os coeficientes α_i deverão ser nulos. Além disso, levando em conta a condição de transversalidade (2.3) e também a conservação de momentum (2.1), isto implica que para cada i ($= 1, 2, \dots, N$) existe a seguinte restrição:

$$\sum_{j \neq i}^N (\zeta_i \cdot k_j) = 0 . \quad (2.5)$$

Então, no final, para cada i existem apenas $(N - 2)$ termos $(\zeta_i \cdot k_j)$ independentes. Uma contagem do número de termos independentes é apresentada na tabela 2.2

N	Elemento de $\mathcal{V}_N$	Número de termos cinemáticos independentes
3	$T(1, 2, 3)$	$3 (\zeta \cdot \zeta)^1 (\zeta \cdot k)^1$
4	$T(1, 2, 3, 4)$	$24 (\zeta \cdot \zeta)^1 (\zeta \cdot k)^2, 3 (\zeta \cdot \zeta)^2$
5	$T(1, 2, 3, 4, 5)$	$270 \text{ mos } (\zeta \cdot \zeta)^1 (\zeta \cdot k)^3, 45 (\zeta \cdot \zeta)^2 (\zeta \cdot k)^1$
6	$T(1, 2, 3, 4, 5, 6)$	$3840 (\zeta \cdot \zeta)^1 (\zeta \cdot k)^4, 720 (\zeta \cdot \zeta)^2 (\zeta \cdot k)^2, 15 (\zeta \cdot \zeta)^3$
7	$T(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$	$65625 (\zeta \cdot \zeta)^1 (\zeta \cdot k)^5, 13125 (\zeta \cdot \zeta)^2 (\zeta \cdot k)^3, 525 (\zeta \cdot \zeta)^3 (\zeta \cdot k)^1$

 Tabela 2.2: Número de termos cinemáticos independentes presentes no espaço $\mathcal{V}_N$.

Para esclarecer melhor os detalhes desses espaços vetoriais $\mathcal{V}_N$, cosiderar-se-a alguns casos:

2.1.1 Caso $N = 3$

Nesse caso, seguindo os requerimentos descritos, pode-se escrever $T(1, 2, 3)$ como

$$T(1, 2, 3) = \lambda_1(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \lambda_2(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot \zeta_1) + \lambda_3(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2). \quad (2.6)$$

Se for imposta a invariância de calibre na camada de massa, ou seja, que $T(1, 2, 3)$ se anule quando $\zeta_1 \rightarrow k_1$, deve-se ter

$$\begin{aligned} T(1, 2, 3) \Big|_{\zeta_1=k_1} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_2(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1) + \lambda_3(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_2 \cdot k_1) &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda_2 + \lambda_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_2 &= -\lambda_3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Da mesma forma, demandando que $T(1, 2, 3)$ se anule quando $\zeta_2 \rightarrow k_2$ ou $\zeta_3 \rightarrow k_3$, encontra-se que

$$\lambda_3 = \lambda_1, \quad (2.8)$$

$$\lambda_1 = -\lambda_2. \quad (2.9)$$

Usando as condições (2.7), (2.8) e (2.9) fica claro que

$$\begin{aligned} T(1, 2, 3) &= \lambda_1 [(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) - (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot \zeta_1) + (\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)] \\ &= \lambda_1 [(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_1) + (\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)] \end{aligned}$$

Aqui foi utilizado o fato que $(\zeta_2 \cdot k_3) = -(\zeta_2 \cdot k_1)$. Usando as regras de Feynman na Lagrangiana de Yang-Mills, obtém-se [46]

$$A_{YM}(1, 2, 3) = 2g \left[(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_1) + (\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2) \right] = \frac{2g}{\lambda_1} T(1, 2, 3).$$

onde g é a constante de acoplamento da teoria de Yang-Mills. Portanto, de fato, $\mathcal{B}_3 = \{A_{YM}(1, 2, 3)\}$ forma uma base para o espaço $\mathcal{V}_3$ e a dimensão desse espaço é igual a 1.

2.1.2 Caso $N = 4$

Nesse caso, seguindo os requerimentos descritos acima, leva à seguinte expressão para $T(1, 2, 3, 4)$

$$\begin{aligned}
T(1, 2, 3, 4) = & \lambda_1(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + \lambda_2(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \lambda_3(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + \lambda_4(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \lambda_5(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + \lambda_6(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \lambda_7(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_1) + \lambda_8(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \lambda_9(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1) + \lambda_{10}(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2) + \\
& \lambda_{11}(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1) + \lambda_{12}(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2) + \\
& \lambda_{13}(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + \lambda_{14}(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \lambda_{15}(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_1) + \lambda_{16}(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \lambda_{17}(\zeta_2 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \lambda_{18}(\zeta_2 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_2) + \\
& \lambda_{19}(\zeta_2 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1) + \lambda_{20}(\zeta_2 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2) + \\
& \lambda_{21}(\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1) + \lambda_{22}(\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3) + \\
& \lambda_{23}(\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1) + \lambda_{24}(\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_3) + \\
& \rho_1(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) + \rho_2(\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) + \rho_3(\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) . \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Impondo então as invariâncias de calibre na camada de massa, encontra-se

$$\begin{aligned}
& T(1, 2, 3, 4) \Big|_{\zeta_1=k_1} = \\
& (\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_9)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\lambda_2 + \lambda_6)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& (\lambda_3 + \lambda_{10})(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + \lambda_4(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& (\lambda_7 + \lambda_{11})(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + \lambda_8(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \lambda_{12}(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{15} + \frac{1}{2}\lambda_{13}s + \rho_3 \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_4 \cdot k_1) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{16} + \frac{1}{2}\lambda_{14}s \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{19} + \frac{1}{2}\lambda_{17}s + \rho_2 \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_4)(\zeta_3 \cdot k_1) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{20} + \frac{1}{2}\lambda_{18}s \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_4)(\zeta_3 \cdot k_2) + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{23} + \frac{1}{2}\lambda_{21}s + \rho_1 \right] (\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot k_1) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{24} + \frac{1}{2}\lambda_{22}s \right] (\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot k_3) = 0. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

onde

$$s = (k_1 + k_2)^2 = 2k_1 \cdot k_2 \quad \text{e} \quad t = (k_1 + k_4)^2 = 2k_1 \cdot k_4 \quad (2.12)$$

são as variáveis de Mandelstam para o problema de 4 pontos. Como cada estrutura é linearmente independente da outra, obtém-se o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} \lambda_4 = 0, \lambda_8 = 0, \lambda_{12} = 0, \lambda_3 + \lambda_{10} = 0, \lambda_7 + \lambda_{11} = 0, \lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_9 = 0, \lambda_6 + \lambda_2 = 0, \\ 2\rho_1 + \lambda_{21}s - \lambda_{23}(s+t) = 0, 2\rho_2 + \lambda_{17}s - \lambda_{19}(s+t) = 0, 2\rho_3 + \lambda_{13}s - \lambda_{15}(s+t) = 0, \\ \lambda_{14}s - \lambda_{16}(s+t) = 0, \lambda_{18}s - \lambda_{20}(s+t) = 0, \lambda_{22}s - \lambda_{24}(s+t) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para a segunda invariância de calibre obtém-se

$$\begin{aligned} T(1, 2, 3, 4) \Big|_{\zeta_2=k_2} = \\ \lambda_1(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\lambda_2 + \lambda_{17})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\ + (\lambda_3 + \lambda_{13})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\lambda_4 + \lambda_{14} + \lambda_{18})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\ + \lambda_{19}(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \lambda_{15}(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\lambda_{16} + \lambda_{20})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2) \\ + \frac{1}{2} [\lambda_5s + \lambda_7t] (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_4 \cdot k_1) + \left[\frac{1}{2}(\lambda_6s + \lambda_8t) + \rho_2 \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\ + \frac{1}{2} \left\{ [\lambda_9s + \lambda_{11}t] (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_3 \cdot k_1) + \left[\frac{1}{2}(\lambda_{10}s + \lambda_{12}t) + \rho_3 \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_3 \cdot k_2) + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2}(\lambda_{21}s + \lambda_{22}t) + \rho_1 \right] (\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_2) + \frac{1}{2} [\lambda_{23}s + \lambda_{24}t] (\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_3) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

com a qual se obtém o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0, \lambda_{15} = 0, \lambda_{19} = 0, \lambda_2 + \lambda_{17} = 0, \lambda_3 + \lambda_{13} = 0, \lambda_4 + \lambda_{14} + \lambda_{18} = 0, \lambda_{16} + \lambda_{20} = 0, \\ 2\rho_1 + \lambda_{21}s + \lambda_{22}t = 0, 2\rho_2 + \lambda_6s + \lambda_8t = 0, 2\rho_3 + \lambda_{10}s + \lambda_{12}t = 0, \\ \lambda_5s + \lambda_7t = 0, \lambda_9s + \lambda_{11}t = 0, \lambda_{23}s + \lambda_{24}t = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

A terceira invariância de calibre produz

$$\begin{aligned}
& T(1, 2, 3, 4) \Big|_{\zeta_3=k_3} = \\
& -\lambda_{21}(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) - \lambda_{21}(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& + (\lambda_{13} - \lambda_{22})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\lambda_{14} - \lambda_{22})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& + (\lambda_5 - \lambda_{23})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\lambda_6 - \lambda_{23})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& + (\lambda_7 + \lambda_{15} - \lambda_{24})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_1) + (\lambda_8 + \lambda_{16} - \lambda_{24})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_3 t - \rho_1 \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_4 t - \rho_1 \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_9 + \frac{1}{2}\lambda_{10} t \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot k_1) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{11} + \frac{1}{2}\lambda_{12} t + \rho_3 \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot k_3) + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{17} + \frac{1}{2}\lambda_{18} t \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_2) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{19} + \frac{1}{2}\lambda_{20} t + \rho_2 \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_3) = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

o que demanda que os coeficientes devam satisfazer o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}
& 2\rho_3 - \lambda_{11}(s+t) + \lambda_{12}t = 0, \quad 2\rho_1 + \lambda_1(s+t) - \lambda_3t = 0, \quad 2\rho_2 - \lambda_{19}(s+t) + \lambda_{20}t = 0, \\
& \lambda_{13} - \lambda_{14} = 0, \quad \lambda_4t - \lambda_3t + \lambda_1(s+t) - \lambda_2(s+t) = 0, \quad \lambda_{10}t - \lambda_9(s+t) = 0, \\
& \lambda_{21} = 0, \quad \lambda_{23} - \lambda_6 = 0, \quad \lambda_{24} - \lambda_8 - \lambda_{16} = 0, \quad \lambda_7 - \lambda_8 + \lambda_{15} - \lambda_{16} = 0, \\
& \lambda_5 - \lambda_6 = 0, \quad \lambda_{22} - \lambda_{14} = 0, \quad \lambda_{18}t - \lambda_{17}(s+t) = 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Finalmente, a quarta invariância de calibre ($\zeta_4 \rightarrow k_4$) leva em

$$\begin{aligned}
& T(1, 2, 3, 4) \Big|_{\zeta_4=k_4} = \\
& - \left[(\lambda_9 + \lambda_{17} + \lambda_{21})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1) + (\lambda_{10} + \lambda_{18} + \lambda_{21})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2) + \right. \\
& (\lambda_{11} + \lambda_{17} + \lambda_{22})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1) + (\lambda_{12} + \lambda_{18} + \lambda_{22})(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2) + \\
& (\lambda_9 + \lambda_{19} + \lambda_{23})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1) + (\lambda_{10} + \lambda_{20} + \lambda_{23})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2) + \\
& \left. (\lambda_{11} + \lambda_{19} + \lambda_{24})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1) + (\lambda_{12} + \lambda_{20} + \lambda_{24})(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2) \right] + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1 t - \rho_1 \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_4 + \frac{1}{2}\lambda_3 t - \rho_1 \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_2) + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_6 + \frac{1}{2}\lambda_5 t - \rho_2 \right] \} (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot k_1) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_8 + \frac{1}{2}\lambda_7 t - \rho_2 \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot k_3) + \\
& \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{14} + \frac{1}{2}\lambda_{13} t - \rho_3 \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \left[-\frac{1}{2}(s+t)\lambda_{16} + \frac{1}{2}\lambda_{15} t - \rho_3 \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_3) = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

e produz o seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} - \lambda_{12} + \lambda_{19} - \lambda_{20} &= 0, \quad \lambda_{10} + \lambda_{11} - \lambda_{12} + \lambda_{17} + \lambda_{21} = 0, \quad \lambda_9 - \lambda_{10} - \lambda_{11} + \lambda_{12} = 0, \\
 \lambda_{11} - \lambda_{12} + \lambda_{17} - \lambda_{18} &= 0, \quad \lambda_{10} + \lambda_{20} + \lambda_{23} = 0, \quad \lambda_{12} + \lambda_{20} + \lambda_{24} = 0, \quad \lambda_{11} + \lambda_{17} + \lambda_{22} = 0, \\
 2\rho_1 - \lambda_1 t + \lambda_2(s+t) &= 0, \quad 2\rho_2 - \lambda_5 t + \lambda_6(s+t) = 0, \quad 2\rho_3 - \lambda_{15} t + \lambda_{16}(s+t) = 0, \\
 \lambda_3 t + (\lambda_2 - \lambda_4)(s+t) - \lambda_1 t &= 0, \quad \lambda_7 t + (\lambda_6 - \lambda_8)(s+t) - \lambda_5 t = 0, \\
 \lambda_{13} t + (\lambda_{16} - \lambda_{14})(s+t) - \lambda_{15} t &= 0. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

A solução conjunta dos sistemas de equações (2.13), (2.15), (2.17) and (2.19) resulta em

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad \lambda_8 = 0, \quad \lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{15} = 0, \quad \lambda_{19} = 0, \quad \lambda_{21} = 0, \\
 \lambda_7 &= -\lambda_{11} = \lambda_{16} = -\lambda_{20} = \lambda_{24}, \\
 \lambda_2 &= -\lambda_5 = -\lambda_6 = \lambda_9 = -\lambda_{17} = -\lambda_{23} = \lambda_{24} \frac{t}{s}, \\
 -\lambda_3 &= \lambda_{10} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = -\lambda_{18} = \lambda_{22} = \lambda_{24} \frac{s+t}{s}, \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

onde λ_{24} é completamente arbitrária. Escolhendo

$$\lambda_{24} = 4g^2 \lambda^{\{2\}} / t. \quad (2.21)$$

e usando as seguintes relações

$$u = -s - t, \quad (2.22)$$

$$(\zeta_4 \cdot k_3) = -(\zeta_4 \cdot k_1) - (\zeta_4 \cdot k_2), \quad (2.23)$$

encontra-se que

$$T(1, 2, 3, 4) = \lambda^{\{2\}} \cdot A_{YM}(1, \{2\}, 3, 4), \quad (2.24)$$

Portanto, $\mathcal{B}_4 = \{A_{YM}(1, 2, 3, 4)\}$ de fato forma uma base para o espaço $\mathcal{V}_4$ e a dimensão desse espaço também é igual a 1.

2.1.3 Casos $N = 5$ e 6

Fazendo a mesma análise que nos casos anteriores, a ausência do termos $(\zeta \cdot k)^N$ e a invariância de calibre na camada de massa levam aos seguintes resultados

$$T(1, 2, 3, 4, 5) = \lambda^{\{23\}} A_{YM}(1, \{2, 3\}, 4, 5) + \lambda^{\{32\}} A_{YM}(1, \{3, 2\}, 4, 5), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
T(1, 2, 3, 4, 5, 6) = & \\
= & \lambda^{\{234\}} A_{YM}(1, \{2, 3, 4\}, 5, 6) + \lambda^{\{324\}} A_{YM}(1, \{3, 2, 4\}, 5, 6) + \lambda^{\{243\}} A_{YM}(1, \{2, 4, 3\}, 5, 6) + \\
& \lambda^{\{342\}} A_{YM}(1, \{3, 4, 2\}, 5, 6) + \lambda^{\{423\}} A_{YM}(1, \{4, 2, 3\}, 5, 6) + \lambda^{\{432\}} A_{YM}(1, \{4, 3, 2\}, 5, 6)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

e

$$\begin{aligned}
T(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = & \lambda^{\{2345\}} A_{YM}(1, \{2, 3, 4, 5\}, 6, 7) + \lambda^{\{2354\}} A_{YM}(1, \{2, 3, 5, 4\}, 6, 7) + \\
& \lambda^{\{2435\}} A_{YM}(1, \{2, 4, 3, 5\}, 6, 7) + \dots + \lambda^{\{5432\}} A_{YM}(1, \{5, 4, 3, 2\}, 6, 7) ,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde os $\lambda^{\{\sigma_N\}}$'s são os fatores de momentum correspondentes, que podem depender das variáveis de Mandelstam adimensionais ($\alpha' s_i$ e $\alpha' t_j$) para cada espalhamento específico.

A principal conclusão dessa seção é que qualquer combinação de produtos de polarizações e momenta, que satisfaçam os requerimentos (2.4) pode ser escrita como uma combinação linear de amplitudes de Yang-Mills. Os coeficientes $\lambda^{\{\sigma_N\}}$'s são chamados de fatores de momentum e podem depender das respectivas variáveis de Mandelstam de cada espalhamento. Como exemplo, considere o caso de 4 pontos no qual é feita a seguinte identificação $T(1, 2, 3, 4) = A_{YM}(1, 3, 4, 2)$. De acordo com (2.24) podemos escrever

$$A_{YM}(1, 3, 4, 2) = \lambda \cdot A_{YM}(1, \{2\}, 3, 4) . \tag{2.28}$$

Comparando somente os termos $(\zeta \cdot \zeta)^1 (\zeta \cdot k)^2$ de cada lado da igualdade acima e levando em conta que

$$(\zeta_4 \cdot k_3) = -(\zeta_4 \cdot k_1) - (\zeta_4 \cdot k_2) , \tag{2.29}$$

$$(\zeta_1 \cdot k_4) = -(\zeta_1 \cdot k_2) - (\zeta_1 \cdot k_3) , \tag{2.30}$$

$$(\zeta_2 \cdot k_4) = -(\zeta_2 \cdot k_1) - (\zeta_2 \cdot k_3) , \tag{2.31}$$

$$(\zeta_3 \cdot k_4) = -(\zeta_3 \cdot k_1) - (\zeta_3 \cdot k_2) . \tag{2.32}$$

devido à conservação dos momenta (2.1) e à transversalidade (2.3), encontra-se que

$$A_{YM}(1, 3, 4, 2) = \frac{t}{u} A_{YM}(1, 2, 3, 4) . \tag{2.33}$$

que é justamente a relação BCJ entre essas duas amplitudes. De fato, o resultado (2.33) é um caso particular do resultado geral mostrado em (1.1). Assim, o método tem o mérito de obter as relações BCJ de forma puramente cinemática.

2.2 Amplitudes de Espalhamento em Teoria de Supercordas

Essa seção irá se concentrar na obtenção dos fatores de momentum (1.4), os quais podem ser obtidos considerando argumentos cinemáticos juntamente com a estrutura de polos das amplitudes de espalhamento e suas propriedades cíclicas. Já que as amplitudes de espalhamento em teoria de supercordas também obedecem as restrições descritas na seção anterior, automaticamente chega-se a conclusão que elas podem ser escritas em termos de uma base de amplitudes de Yang-Mills. Então, consegue-se obter, apenas com argumentos cinemáticos, a estrutura da expressão (1.3). De fato, será mostrado que os fatores de momentum (1.4) também podem ser obtidos com esses argumentos.

2.2.1 Relações de Unitaridade

No caso de bósons de calibre em teoria de supercordas, as relações de unitaridade de nível de árvore indicam que, no limite em que o momentum $k \rightsquigarrow 0$, a amplitude de N -pontos obedece [48]

$$\mathcal{A}(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_N, k_N) \sim i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\mathcal{A}^\mu(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_{m-1}, k_{m-1}; k) \mathcal{A}_\mu(-k; \zeta_m, k_m; \dots; \zeta_N, k_N)}{-k^2} \quad (2.34)$$

onde $\mathcal{A}^\mu$ e $\mathcal{A}_\mu$ são, respectivamente as subamplitudes de, m e $(N + 2 - m)$ -pontos e onde o polo de $\mathcal{A}(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_N, k_N)$ fica na variável de Mandelstam $k = (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})^2$

De acordo com (1.2) cada amplitude tem uma dependência que inclui um $i\delta$ que leva em conta a conservação do momentum. Substituindo essa dependência é possível calcular a integral D-dimensional e chegar em

$$A(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_N, k_N) \sim \frac{A^\mu(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_{m-1}, k_{m-1}; k) A_\mu(-k; \zeta_m, k_m; \dots; \zeta_N, k_N)}{(k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})^2}, \quad (2.35)$$

que é válida no limite

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} \rightsquigarrow 0$$

Aqui, A^μ and A_μ são subamplitudes nas quais o vetor de polarização correspondente foi removido::

$$A^\mu(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_{m-1}, k_{m-1}; k) = \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} A(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_{m-1}, k_{m-1}; \zeta, k), \quad (2.36)$$

$$A_\mu(-k; \zeta_m, k_m; \dots; \zeta_N, k_N) = \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A(\zeta, -k; \zeta_m, k_m; \dots; \zeta_N, k_N), \quad (2.37)$$

e

$$k^\mu = -(k_1^\mu + \dots + k_{m-1}^\mu) = k_m^\mu + \dots + k_N^\mu \quad (2.38)$$

Dependendo da escolha do m se obtém várias relações de unitaridade.

Como exemplo, considere o caso de 5 pontos, sendo $m = 3$. Consequentemente, a expressão (2.35) resulta em

$$A(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_5, k_5) \sim \frac{A^\mu(\zeta_1, k_1; \zeta_2, k_2; k) A_\mu(-k; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4; \zeta_5, k_5)}{(k_1 + k_2)^2}, \quad (2.39)$$

ou equivalentemente (camada de massa: $k_1^2 = k_2^2 = 0$)

$$A(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_5, k_5) \sim \frac{1}{2(k_1 \cdot k_2)} V_{(12)}^\mu V_{(345)\mu}, \quad (2.40)$$

onde

$$V_{(12)}^\mu = \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} A(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4; \zeta_5, k_5) \quad (2.41)$$

é o vértice de três pernas (contraído) de Yang-Mills, pois o vértice de 3 pernas na teoria de supercordas é idêntico ao de Yang-Mills. Por outro lado,

$$V_{(345)\mu} = \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4; \zeta_5, k_5) \quad (2.42)$$

é o vértice de quatro pernas (contraído) de supercordas. Assim, essa expressão tem uma clara interpretação em termos de diagramas de Feynman da figura

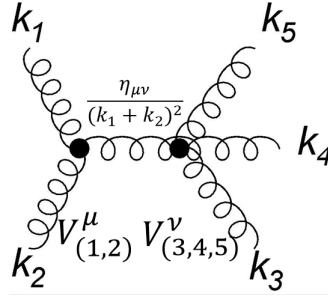


Figura 2.1: Diagrama de Feynman para a amplitude de espalhamento de 5 pontos

A principal lição a ser aprendida é que as amplitudes de espalhamento de bósons de calibre em teoria de supercordas de 5 pontos devem apresentar uma estrutura de polos simples. De maneira análoga, pode-se mostrar que as amplitudes de 6 pontos apresentam termos com polos de segunda ordem, as amplitudes de 7 pontos apresentam termos com polos de terceira ordem e assim sucessivamente. Ou seja a amplitude bosônica de N pontos em teoria de supercordas deve no máximo conter polos de ordem $N-4$.

2.2.2 Simetria Cíclica

Para uma melhor compreensão dos tipos de polos presentes nas amplitudes, se faz necessário mencionar uma importante propriedade das amplitudes, a **simetria cíclica**. As

amplitudes não se alteram por qualquer permutação cíclica dos índices, ou seja,

$$A(1, 2, 3, 4, \dots, N-1, N) = A(N, 1, 2, 3, \dots, N-2, N-1) = A(N-1, N, 1, 2, \dots, N-3, N-2) = \dots$$

Esse fato implicará no tipo de polos que a amplitude pode conter. Considere como exemplo novamente a amplitude de 5 pontos. Introduzindo a seguinte notação

$$\alpha_{ij} = 2 k_i \cdot k_j, \quad (2.43)$$

os únicos polos permitidos na amplitude bosônica de 5 pontos serão aqueles obtidos por permutações cíclicas dos índices

$$\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,5}, \text{ e } \alpha_{1,5}. \quad (2.44)$$

Esses polos serão denominados **polos físicos**.

Voltando à expressão (2.25) onde $T(1, 2, 3, 4, 5)$ é substituído pela amplitude de espalhamento de bosons em teoria de supercordas em nível de árvore, pode-se escrever

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \lambda^{\{23\}} A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5) + \lambda^{\{32\}} A_{YM}(1, 3, 2, 4, 5). \quad (2.45)$$

Por outro lado, as amplitudes de Yang-Mills da base tem a estrutura de polos que pode ser obtida de seus diagramas de Feynman, como mostrado na figura 2.2

Ordem dos polos	$A_{YM}(1,2,3,4,5)$	$A_{YM}(1,3,2,4,5)$
1		
2		

Figura 2.2: Representação diagramática das amplitudes de Yang-Mills superssimétricas $A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5)$ e $A_{YM}(1, 3, 2, 4, 5)$ evidenciando a ordem dos polos devido ao número de propagadores entre os vértices.

De fato, a partir desses diagramas e incluindo as permutações cíclicas, obtém-se a

estrutura de polos mostrada na tabela 2.3.

	primeira ordem	segunda ordem
$A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5)$	$\alpha_{12}, \alpha_{23},$ $\alpha_{34}, \alpha_{45}, \alpha_{15}$	$\alpha_{12}\alpha_{34}, \alpha_{23}\alpha_{45},$ $\alpha_{34}\alpha_{15}, \alpha_{45}\alpha_{12}, \alpha_{15}\alpha_{23}$
$A_{YM}(1, 3, 2, 4, 5)$	$\alpha_{13}, \alpha_{23},$ $\alpha_{24}, \alpha_{45}, \alpha_{15}$	$\alpha_{13}\alpha_{24}, \alpha_{23}\alpha_{45},$ $\alpha_{24}\alpha_{15}, \alpha_{45}\alpha_{13}, \alpha_{15}\alpha_{23}$

Tabela 2.3: Estruturas de polos contidos em cada amplitude de YM de pontos.

Como os fatores de momentum $\lambda^{\{23\}}$ e $\lambda^{\{32\}}$, juntamente com as amplitudes de YM superssimétricas devem produzir a amplitude bosônica de cordas, então esses fatores deverão ser escritos como uma expansão em α' . Assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \lambda^{\{23\}}(\alpha') = & 1 + \left(a_1 \alpha_{12} + a_2 \alpha_{23} + a_3 \alpha_{34} + a_4 \alpha_{45} + a_5 \alpha_{15} \right) \alpha' + \left(b_1 \alpha_{12}\alpha_{23} + b_2 \alpha_{12}\alpha_{34} + \right. \\ & b_3 \alpha_{12}\alpha_{45} + b_4 \alpha_{12}\alpha_{15} + b_5 \alpha_{23}\alpha_{34} + b_6 \alpha_{23}\alpha_{45} + b_7 \alpha_{23}\alpha_{15} + b_8 \alpha_{34}\alpha_{45} + \\ & b_9 \alpha_{34}\alpha_{15} + b_{10} \alpha_{45}\alpha_{15} + b_{11} \alpha_{12}^2 + b_{12} \alpha_{23}^2 + b_{13} \alpha_{34}^2 + b_{14} \alpha_{45}^2 + b_{15} \alpha_{15}^2 \left. \right) \alpha'^2 + \\ & \mathcal{O}(\alpha'^3), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \lambda^{\{32\}}(\alpha') = & \left(c_1 \alpha_{13} + c_2 \alpha_{23} + c_3 \alpha_{24} + c_4 \alpha_{45} + c_5 \alpha_{15} \right) \alpha' + \left(d_1 \alpha_{13}\alpha_{23} + d_2 \alpha_{13}\alpha_{24} + \right. \\ & d_3 \alpha_{13}\alpha_{45} + d_4 \alpha_{13}\alpha_{15} + d_5 \alpha_{23}\alpha_{24} + d_6 \alpha_{23}\alpha_{45} + d_7 \alpha_{23}\alpha_{15} + d_8 \alpha_{24}\alpha_{45} + \\ & d_9 \alpha_{24}\alpha_{15} + d_{10} \alpha_{45}\alpha_{15} + d_{11} \alpha_{13}^2 + d_{12} \alpha_{23}^2 + d_{13} \alpha_{24}^2 + d_{14} \alpha_{45}^2 + d_{15} \alpha_{15}^2 \left. \right) \alpha'^2 + \\ & \mathcal{O}(\alpha'^3). \end{aligned} \quad (2.47)$$

O fator 1 em $\lambda^{\{23\}}(\alpha')$ se deve ao fato que

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 0} A(1, 2, 3, 4, 5) = A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5)$$

2.2.3 Restrições nos fatores de momentum

A amplitude $A(1, 2, 3, 4, 5)$ deve satisfazer os seguinte requerimentos:

1. Ausência de polos ditos *não físicos*.
2. Estrutura analítica de polos físicos (polos de ordem N-4)
3. Invariancia Cíclica.

Todos esses requerimentos devem ser demandados a toda ordem em α' em $A(1, 2, 3, 4, 5)$.

1) Ausência de polos não-físicos

De acordo com a tabela 2.3, os únicos polos não-físicos só podem ser gerados por $A_{YM}(1, 3, 2, 4, 5)$. Esses polos são α_{13} e α_{24} . Além disso, os polos de segunda ordem

não devem aparecer. para que isso ocorra, inicialmente deve-se ter

$$\lambda^{\{32\}}(\alpha') = \alpha_{13}\alpha_{24} \alpha'^2 f^{\{32\}}[\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{45}, \alpha_{15}; \alpha'] , \quad (2.48)$$

onde $f^{\{32\}}[\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{45}, \alpha_{15}; \alpha']$ deve ser analítica nas suas variáveis. Comparando com (2.47) fica claro que deve-se ter

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 &= 0 \\ d_1 = d_3 = d_4 = \dots = d_{15} &= 0 \end{aligned}$$

O único coeficiente possivelmente não nulo até essa ordem é d_2 . O que leva em

$$\lambda^{\{32\}}(\alpha') = d_2 \alpha_{13}\alpha_{24} \alpha'^2 + \mathcal{O}(\alpha'^3) . \quad (2.49)$$

2) Estrutura dos polos físicos

Retoma-se aqui o resultado (2.40) escrito como

$$A(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_5, k_5) \sim \frac{1}{2(k_1 \cdot k_2)} V_{(12)}^\mu \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4; \zeta_5, k_5) , \quad (2.50)$$

nota-se que do lado direito temos uma amplitude de 4 pontos que pode ser escrita como em (2.24),

$$\begin{aligned} A(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4; \zeta_5, k_5) &= \lambda^{\{2\}}(2(k_1 + k_2) \cdot k_3, 2k_3 \cdot k_4; \alpha') \times \\ &\quad A_{YM}(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4; \zeta_5, k_5) , \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde foi introduzida a notação para deixar explícita as variáveis de Mandelstam. Usando o fato que

$$\lim_{\alpha_{12} \rightarrow 0} 2(k_1 + k_2) \cdot k_3 = \alpha_{45}$$

se esse resultado for substituído em (2.50), obtém-se

$$A(\zeta_1, k_1; \dots; \zeta_5, k_5) \sim \lambda^{\{2\}}(\alpha_{45}, \alpha_{34}; \alpha') \underbrace{\left[\frac{V_{(12)}^\mu}{\alpha_{12}} \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} A_{YM}(\zeta, k_1 + k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4; \zeta_5, k_5) \right]}_{A_{YM}(\zeta, k_1; \zeta_2, k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4; \zeta_5, k_5)} , \quad (2.52)$$

ou em notação simplificada

$$A(1, 2, 3, 4, 5) \sim \lambda^{\{2\}} A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5)$$

que é válida quando $\alpha_{12} \rightsquigarrow 0$. Comparando com (2.45) nesse limite, obtém-se que os fatores de forma de 4 e 5 pontos estão relacionados por

$$\lambda^{\{23\}}(0, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}, \alpha_{15}; \alpha') = \lambda^{\{2\}}(\alpha_{45}, \alpha_{34}; \alpha'). \quad (2.53)$$

Relações equivalente entre pares de fatores de forma das amplitudes de 5, 6, 7, 8,... também podem ser encontrados.

Sabendo que

$$\lambda^{\{2\}}(\alpha') = \alpha'^2 st \frac{\Gamma(\alpha' s) \Gamma(\alpha' t)}{\Gamma(1 + \alpha' s + \alpha' t)} = \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{k} \alpha'^k ((s+t)^k - s^k - t^k) \right\}, \quad (2.54)$$

encontra-se que

$$a_i = 0 \quad (i = 2, 3, 4, 5), \quad b_5 = b_6 = b_7 = 0, \quad b_8 = -\frac{\pi^2}{6} = -\zeta(2), \quad b_j = 0 \quad (j = 9, \dots, 15) \quad (2.55)$$

Portanto, a expansão em α' de $\lambda^{\{23\}}(\alpha')$ fica escrita como

$$\begin{aligned} \lambda^{\{23\}}(\alpha') &= 1 + (a_1 \alpha_{12}) \alpha' + \\ &\quad (b_1 \alpha_{12} \alpha_{23} + b_2 \alpha_{12} \alpha_{34} + b_3 \alpha_{12} \alpha_{45} + b_4 \alpha_{12} \alpha_{15} - \zeta(2) \alpha_{34} \alpha_{45}) \alpha'^2 + \mathcal{O}(\alpha'^3). \end{aligned} \quad (2.56)$$

3) Simetria cíclica

A invariância cíclica significa que $A(1, 2, 3, 4, 5) = A(2, 3, 4, 5, 1)$, então, utilizando (2.45) chega-se em

$$\begin{aligned} A(1, 2, 3, 4, 5) &= \lambda_{cycl}^{\{23\}}(\alpha') A_{YM}(2, 3, 4, 5, 1) + \lambda_{cycl}^{\{32\}}(\alpha') A_{YM}(2, 4, 3, 5, 1), \\ &= \lambda_{cycl}^{\{23\}}(\alpha') A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5) + \lambda_{cycl}^{\{32\}}(\alpha') A_{YM}(1, 2, 4, 3, 5), \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde foi utilizada a invariância cíclica das subamplitudes Yang-Mills e onde definiu-se $\lambda_{cycl}^{\{23\}}(\alpha')$ e $\lambda_{cycl}^{\{32\}}(\alpha')$ que representam respectivamente a substituição $\{k_1 \rightarrow k_2, k_2 \rightarrow k_3, \dots, k_5 \rightarrow k_1\}$ feita em $\lambda^{\{23\}}(\alpha')$ e $\lambda^{\{32\}}(\alpha')$.

Então, utilizando a relação (2.25) para $A_{YM}(1, 2, 4, 3, 5)$, que resulta em

$$A_{YM}(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{\alpha_{13} + \alpha_{23}}{\alpha_{35}} A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5) + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{35}} A_{YM}(1, 3, 2, 4, 5), \quad (2.58)$$

e substituindo em (2.57) obtém-se

$$\begin{aligned} A_b(1, 2, 3, 4, 5) &= \left\{ \lambda_{cycl}^{\{23\}}(\alpha') + \frac{\alpha_{13} + \alpha_{23}}{\alpha_{35}} \lambda_{cycl}^{\{32\}}(\alpha') \right\} A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5) + \\ &\quad \left\{ \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{35}} \lambda_{cycl}^{\{32\}}(\alpha') \right\} A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Por comparação com (2.45) chega-se às seguintes relações entre os fatores de momentum

$$\lambda^{\{23\}}(\alpha') = \lambda_{cycl}^{\{23\}}(\alpha') + \frac{\alpha_{13} + \alpha_{23}}{\alpha_{35}} \lambda_{cycl}^{\{32\}}(\alpha') , \quad (2.60)$$

$$\lambda^{\{32\}}(\alpha') = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{35}} \lambda_{cycl}^{\{32\}}(\alpha') , \quad (2.61)$$

Usando esses resultados pode-se escrever

$$a_1 = 0 , \quad b_1 = b_3 = 0 , \quad b_2 = -b_4 = d_2 = \zeta(2) , \quad (2.62)$$

que finalmente resulta em

$$\lambda^{\{23\}}(\alpha') = 1 + (\alpha_{12}\alpha_{34} - \alpha_{12}\alpha_{15} - \alpha_{34}\alpha_{45}) \zeta(2) \alpha'^2 + \mathcal{O}(\alpha'^3) , \quad (2.63)$$

$$\lambda^{\{32\}}(\alpha') = \zeta(2) \alpha_{13}\alpha_{24} \alpha'^2 + \mathcal{O}(\alpha'^3) . \quad (2.64)$$

Esse resultado é extremamente poderoso, pois com a informação da amplitude 4 pontos é possível construir, somente através de análise cinemática e unitariedade, além da imposição de simetria cíclica, todas as outras amplitudes de cordas. Devido às restrições computacionais, com esse processo foi possível atingir até ordem α'^9 para a amplitude de 4 pontos, ordem α'^7 para a amplitude de 5 pontos, ordem α'^5 para a amplitude de 6 pontos e ordem α'^4 para a amplitude de 7 pontos.

Aqui cabe uma observação bastante importante. A igualdade (2.53) representa relações entre coeficientes das amplitudes de 4 e 5 pontos. Assim, se não for assumida qualquer forma conhecida para o fator momentum de 4 pontos, como em (2.54), a medida que a ordem na expansão em α' vai aumentando, o fator de 4 pontos naturalmente gera restrições no fator de momentum de 5 pontos e vice-versa. Da mesma forma, o fator de 5 pontos gera restrições no de 6 pontos, assim como o de 6 pontos gera restrições no de 5 pontos. E isso vai ocorrendo à medida que a ordem α' vai aumentando. Dessa forma, alguns invariantes superssimétricos vão aparecendo naturalmente, que depois da comparação com (2.54), mostra-se que estão relacionados às funções zeta de Riemann. Espera-se encontrar novos invariantes, ainda desconhecidos, à medida que os cálculos puderem evoluir a ordens mais elevadas, inclusive alguns invariantes ligados às funções zeta multivaluadas.

Observou-se durante o processo de cálculo que o peso computacional (tempo de computação, uso de memória, etc.) cresce com $N!$ onde N é o número de pontos da amplitude a ser calculada.

Base para as Relações KLT

3.1 Breve revisão das Relações KLT

A partir da perspectiva da Teoria Quântica de Campos, as amplitudes gravitacionais são expressões enormes (devido ao fato de descreverem a interação das partículas de spin-2 e também ao fato de que o Lagrangiano da Relatividade Geral (RG) perturbativo contém um número muito maior de termos em cada ordem. As relações KLT representam o fato de que essas amplitudes podem ser *abreviadamente* escritas como uma soma do quadrado de amplitudes da teoria de calibre, tornando essa relação a maneira mais conveniente de calcular amplitudes gravitacionais em dimensões arbitrárias do espaço-tempo. Como exemplo, as relações KLT padrão para $N = 3, 4$ e 5 são dadas por

$$\mathcal{M}_3 = i \frac{\kappa}{2} \bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 3) A_{\text{YM}}(1, 2, 3), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{M}_4 = -i \left(\frac{\kappa}{2} \right)^2 \alpha_{12} \bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 3, 4) A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{M}_5 = i \left(\frac{\kappa}{2} \right)^3 [\alpha_{12} \alpha_{34} \bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 4, 3, 5) A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5) + \alpha_{13} \alpha_{24} \bar{A}_{\text{YM}}(3, 1, 4, 2, 5) A_{\text{YM}}(1, 3, 2, 4, 5)], \quad (3.3)$$

Do ponto de vista matemático, essa relação pode ser escrita como

$$\mathcal{M}_N = \beta_1^{(N)} \bar{A}_{\text{YM}}^{(1)} A_{\text{YM}}^{(1)} + \beta_2^{(N)} \bar{A}_{\text{YM}}^{(1)} A_{\text{YM}}^{(2)} + \dots + \beta_{(N-3)!}^{(N)} \bar{A}_{\text{YM}}^{((N-3)!)} A_{\text{YM}}^{((N-3)!)}, \quad (3.4)$$

onde $\{\bar{A}_{\text{YM}}^{(i)}\}$ and $\{A_{\text{YM}}^{(i)}\}$ correspondem a uma escolha arbitrária da base BCJ de dimensão $(N-3)!$. O coeficientes $\beta_i^{(N)}$'s são dependentes dos momenta que podem depois ser determinados exigindo unitaridade de $\mathcal{M}_N$. Na fórmula 3.4 ainda há um detalhe a ser esclarecido. Para se chegar às amplitudes gravitacionais correspondentes, que realmente dependem dos momenta dos grávitons k_μ^i 's e dos tensores de polarização $Z_{\mu\nu}^j$'s (as amplitudes gravitacionais originais não dependem de vetores de polarização), deve-se fatorar, para cada termo, os vetores de polarização, $\bar{\zeta}_\mu^j$'s e ζ_ν^j 's, que são independentes e então

fazer a substituição

$$\bar{\zeta}_\mu^j \zeta_\nu^j \rightarrow Z_{\mu\nu}^j \quad (3.5)$$

para todas as pernas externas na correspondente amplitude de grávitons. Considere como exemplo o caso de 3 pontos. De acordo com o que foi dito pode-se escrever

$$\mathcal{M}_3 = \frac{1}{4} Z_{\mu_1\nu_1}^1 Z_{\mu_2\nu_2}^2 Z_{\mu_3\nu_3}^3 \bar{A}_{\text{YM}}^{\mu_1\mu_2\mu_3}(1, 2, 3) A_{\text{YM}}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(1, 2, 3), \quad (3.6)$$

onde se levou em conta que

$$\begin{aligned} A_{\text{YM}}(1, 2, 3) &= 2g \left[(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot \zeta_1) + (\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2) \right] \\ &= 2g (\zeta_1)_{\mu_1} (\zeta_2)_{\mu_2} (\zeta_3)_{\mu_3} \underbrace{\left[k_2^{\mu_1} \eta^{\mu_2\mu_3} + k_3^{\mu_2} \eta^{\mu_1\mu_3} + k_1^{\mu_3} \eta^{\mu_1\mu_2} \right]}_{A_{\text{YM}}^{\mu_1\mu_2\mu_3}} \end{aligned}$$

e dessa forma se define

$$A_{\text{YM}}^{\mu_1\mu_2\mu_3}(1, 2, 3) = k_1^{\mu_3} \eta^{\mu_1\mu_2} + k_2^{\mu_1} \eta^{\mu_2\mu_3} + k_3^{\mu_2} \eta^{\mu_1\mu_3}.$$

Até agora, as provas existentes das relações KLT [6, 15, 16] não explicam, a partir de uma perspectiva da Relatividade Geral pura, qual é a razão pela qual suas amplitudes podem ser escritas de uma forma tão simples. Nessa seção da tese, isso será feito mostrando que as propriedades bem conhecidas de amplitudes de espalhamento, especialmente a invariância de calibre, são a razão pela qual uma amplitude da Relatividade Geral se decompõe em uma soma de produtos de amplitudes de YM. De fato, até amplitudes de 6 pontos, pôde-se provar que a invariância de calibre pura (difeomorfismos) é suficiente para justificar esta decomposição. Por razões computacionais, não foi possível testar invariância de calibre puro para amplitudes de ordem mais alta. Por sua vez, adicionando-se relações de unitariedade e a correta dimensão de massa das amplitudes, foi possível provar que essa decomposição em produtos de amplitudes de YM continua pelo menos até 9 pontos.

Terminamos esta breve revisão das relações KLT mencionando que, à primeira vista, parece haver alguma inconsistência na substituição na eq. (3.5) porque o lado esquerdo não é simétrico nos índices μ e ν enquanto a da direita, de fato, é (e mais ainda, a contração dos índices μ e ν leva a *zero* no lado direito, porque os $Z_{\mu\nu}^j$'s tem *traço nulo*, e isso não acontece no lado esquerdo do mesmo). Isto dá uma incompatibilidade entre o número de componentes independentes em ambos os lados de (3.5): em um espaço-tempo de D dimensões, o lado esquerdo contém $(D-2)^2$ componentes independentes, enquanto o lado direito contém $D(D-3)/2$ componentes independentes. De fato, essa diferença resulta em um bônus extra dessa análise, como resultado da resolução dessa incompatibilidade entre os dois lados, serão obtidas relações não lineares às quais as amplitudes de YM

devem obedecer. Essas relações não lineares em D-dimensões não são conhecidas antes desse trabalho.

Assim, a abordagem do problema utilizada nessa tese consiste em trabalhar no espaço cinemático de amplitudes de RG de uma maneira semelhante como foi feito na seção 2.1 com amplitudes YM na camada de massa e com amplitudes da teoria de supercordas abertas 2.2. Nesse desenvolvimento exige-se apenas invariância de calibre e unitaridade. Não há necessidade de fazer qualquer referência ao Lagrangiano da RG, portanto os diagramas de Feynman não são usados em nenhum momento. Também não é necessária uma referência à dualidade cor/cinemática (C/C).

3.2 Estruturas Cinemáticas das Amplitudes em nível de árvore da Relatividade Geral

Seguindo de perto as idéias das seções 2.1 e 2.2. Seja $\mathcal{W}_N$ o espaço de expressões cinemáticas escalares de N pontos construídas com tensores de polarização simétricos (de traços nulos) Z_i e momenta k_i de N grávitons externos. Esses tensores de polarização e momenta devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \text{Conservação do Momentum:} & \quad k_1^\mu + k_2^\mu + \dots + k_N^\mu = 0 \text{ .} \\ \text{Condição de Camada de massa:} & \quad k_1^2 = k_2^2 = \dots = k_N^2 = 0 \text{ .} \\ \text{Transversalidade (calibre):} & \quad Z_{\mu\nu}^i k_i^\mu = 0, (i = 1, \dots, N) \text{ .} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Restringimos ainda $\mathcal{W}_N$ tal que seus elementos M_N obedeçam às seguintes condições:

1. Eles são multilinear nos tensores de polarizações Z_i ($i = 1, 2, \dots, N$).
2. Eles não podem conter termos do tipo $(k \cdot Z \cdot k)^N$ e $(k \cdot Z \cdot k)^{N-2}(k \cdot Z \cdot Z \cdot k)^1$
3. Invariância de calibre: Se $Z_{\mu\nu}^i \rightarrow \alpha_\mu k_\nu^i + \alpha_\nu k_\mu^i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), então M_N se anula. Aqui α_μ é um vetor que obedece a condição $\alpha \cdot k^i = 0$.

Não é difícil verificar que a ausência dos termos $(\zeta \cdot k)^N$ nas amplitudes de YM resultam na condição 2.

Com base nessas restrições, primeiramente serão estabelecidos os tipos de termos cinemáticos presentes nas amplitudes da RG. Eles serão construídos usando-se as seguintes quantidades escalares

$$\text{Tr}(Z_i \cdot Z_j) = (Z_i)^\mu{}_\nu (Z_j)^\nu{}_\mu \text{ ,} \quad \text{Tr}(Z_i \cdot Z_j \cdot Z_l) = (Z_i)^\mu{}_\nu (Z_j)^\nu{}_\rho (Z_l)^\rho{}_\mu \text{ ,} \tag{3.8}$$

$$k_i \cdot Z_j \cdot k_l = k_{i\mu} (Z_j)^\mu{}_\nu k_l^\nu \text{ ,} \quad k_i \cdot Z_j \cdot Z_l \cdot k_m = k_{i\mu} (Z_j)^\mu{}_\nu (Z_l)^\nu{}_\rho k_m^\rho \text{ ,} \tag{3.9}$$

bem como generalizações delas para um maior número de tensores de polarização.

Na notação adotada nesse trabalho, há uma distinção sutil entre M_N e $\mathcal{M}_N$. O primeiro denota um elemento geral do espaço vetorial $\mathcal{W}_N$ (que sempre conterá um ou mais coeficientes arbitrários) enquanto o segundo, além de pertencer a este espaço, será de fato a amplitude da relatividade geral de N -pontos e, portanto, não conterá coeficientes arbitrários. É fácil ver que $\mathcal{W}_N$ é um espaço vetorial, uma vez que combinações lineares de seus elementos ainda pertencem a ele.

Devido às simetrias das quantidades escalares em (3.8) e (3.9) e as suas generalizações, será necessário estabelecer um número de critérios para a escolha dos elementos desse espaço vetorial para se evitar a repetição de um mesmo elemento. Isso será visto nas próximas subseções.

3.2.1 Convenção de escolha para termos $k_i \cdot Z_j \cdot k_l$

No que segue é interessante introduzir a notação

$$(Z_i \cdot k_j)_\mu = (Z_i)_{\mu\nu} k_j^\nu, \quad (3.10)$$

$$(Z_i \cdot Z_j)_{\mu\nu} = (Z_i)_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\beta} (Z_j)_{\beta\nu}. \quad (3.11)$$

Em princípio, para cada i e cada μ existem N termos $(Z_i \cdot k_j)_\mu$ possíveis (porque j varia de 1 até N). Mas tendo em conta a condição de transversalidade para grávitons (equivalente àquela para bósons de gauge 2.3)

$$Z_{\mu\nu}^j k_j^\mu = 0, \quad (3.12)$$

bem como a conservação do momento, então dados i e μ existem apenas $(N - 2)$ termos $(Z_i \cdot k_j)_\mu$ independentes restantes. Assim, no todo, há somente $N(N - 2)$ termos $(Z_i \cdot k_j)_\mu$ independentes (para um dado μ), o quais são escolhidos da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{llll} (Z_1 \cdot k_2)_\mu, & (Z_1 \cdot k_3)_\mu, & \dots, & (Z_1 \cdot k_{N-1})_\mu, \\ (Z_2 \cdot k_1)_\mu, & (Z_2 \cdot k_3)_\mu, & \dots, & (Z_2 \cdot k_{N-1})_\mu, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (Z_{N-1} \cdot k_1)_\mu, & (Z_{N-1} \cdot k_2)_\mu, & \dots, & (Z_{N-1} \cdot k_{N-2})_\mu, \\ (Z_N \cdot k_1)_\mu, & (Z_N \cdot k_2)_\mu, & \dots, & (Z_N \cdot k_{N-2})_\mu \end{array} \right\}, \quad (3.13)$$

Com efeito, para cada i ($= 1, 2, \dots, N - 1$) foi utilizada a condição transversalidade (3.12) para eliminar $(\zeta_i \cdot k_N)_\mu$ em termos das $(N - 2)$ estruturas $(\zeta_i \cdot k_j)_\mu$ remanentes ($j = 1, 2, \dots, N - 1$, com $j \neq i$). Na última linha (3.13), foi eliminado $(\zeta_N \cdot k_{N-1})_\mu$ em termos das estruturas $(\zeta_N \cdot k_j)_\mu$ remanentes, com ($j = 1, 2, \dots, N - 2$).

Com a convenção apresentada na eq.(3.13) os termos cinemáticos $(k_r \cdot Z_p \cdot k_q)$ serão

dados por

$$(k_r \cdot Z_p \cdot k_q) = \begin{cases} \text{Se } p = 1, 2, \dots, N-2, \\ \text{então } r \leq q \leq N-1 \text{ e } r \neq p, q \neq p. \\ \text{Se } p = N-1, N, \\ \text{então } r \leq q \leq N-2 \text{ e } r \neq p, q \neq p. \end{cases} \quad (3.14)$$

Como exemplo, considere o caso $N = 4$. A base a ser escolhida para os termos $(k \cdot Z \cdot k)$ será

$$\{ (k_2 \cdot Z_1 \cdot k_2), (k_2 \cdot Z_1 \cdot k_3), (k_3 \cdot Z_1 \cdot k_3), (k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1), (k_1 \cdot Z_2 \cdot k_3), (k_3 \cdot Z_2 \cdot k_3), \\ (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1), (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2), (k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2), (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1), (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2), (k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) \} . \quad (3.15)$$

3.2.2 Convenção de Escolha para termos $(k_r \cdot Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot \dots \cdot Z_{j_p} \cdot k_s)$

Uma vez tendo decidido trabalhar com as combinações momento-polarização dadas em (3.13) serão considerados os termos cinemáticos contendo p tensores de polarizações $(k_r \cdot Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot \dots \cdot Z_{j_p} \cdot k_s)$. Devido ao fato dos tensores de polarização serem simétricos, encontra-se que

$$(k_r \cdot Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot \dots \cdot Z_{j_p} \cdot k_s) = (k_s \cdot Z_{j_p} \cdot Z_{j_{p-1}} \cdot \dots \cdot Z_{j_1} \cdot k_r) . \quad (3.16)$$

Então se faz necessário escolher qual dessas expressões será utilizada na base. Nesse trabalho será considerado o seguinte critério:

$$\text{Se } \begin{cases} r = s \\ r \neq s \end{cases} \text{ o termo com menor valor do índice para } \begin{Bmatrix} Z \\ k \end{Bmatrix} \text{ fica a esquerda.} \quad (3.17)$$

Um par de exemplos de termos a serem substituídos é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} (k_2 \cdot Z_5 \cdot Z_7 \cdot Z_3 \cdot k_2) &\rightarrow (k_2 \cdot Z_3 \cdot Z_7 \cdot Z_5 \cdot k_2) \\ (k_4 \cdot Z_2 \cdot Z_1 \cdot Z_6 \cdot k_3) &\rightarrow (k_3 \cdot Z_6 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot k_4) \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2.3 Convenção de Escolha para termos $Tr[Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot \dots \cdot Z_{j_k}]$

Vamos considerar um grupo de k tensores de polarização, $\{Z_{j_1}, Z_{j_2}, \dots, Z_{j_k}\}$, de um processo de espalhamento de N grávitons, onde $1 < k \leq N$. Devido à propriedade cíclica do

traço, está claro que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Z_{j_k} \cdot Z_{j_1} \cdot \dots \cdot Z_{j_2} \cdot \dots \cdot Z_{j_{k-1}}) &= \text{Tr}(Z_{j_{k-1}} \cdot Z_{j_k} \cdot Z_{j_1} \cdot \dots \cdot Z_{j_{k-2}}) = \\ &\dots = \text{Tr}(Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot Z_{j_3} \cdot \dots \cdot Z_{j_k}) . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Mas como os Z_i 's são simétricos nos índices de espaço-tempo, também pode-se escrever

$$\text{Tr}(Z_{j_k} \cdot Z_{j_{k-1}} \cdot Z_{j_{k-2}} \cdot \dots \cdot Z_{j_2} \cdot Z_{j_1}) = \text{Tr}(Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot Z_{j_3} \cdot \dots \cdot Z_{j_{k-1}} \cdot Z_{j_k}), \quad (3.20)$$

Portanto, usando a propriedade cíclica (3.19) e em seguida a simetria dos tensores (3.20), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot Z_{j_3} \cdot \dots \cdot Z_{j_{k-1}} \cdot Z_{j_k}) &= \text{Tr}(Z_{j_k} \cdot Z_{j_1} \cdot Z_{j_2} \cdot \dots \cdot Z_{j_{k-2}} \cdot Z_{j_{k-1}}) \\ &= \text{Tr}(Z_{j_{k-1}} \cdot Z_{j_{k-2}} \cdot Z_{j_{k-3}} \cdot \dots \cdot Z_{j_1} \cdot Z_{j_k}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Desta forma, restam

$$\binom{N}{k} \frac{(k-1)!}{2} = \frac{N!}{2 k (N-k)!} \quad (3.22)$$

termos de traço com k tensores de polarização que são independentes.

O critério de escolha é feito de forma que ao escrever qualquer um desses termos de traço independentes com k tensores, é feito em duas etapas:

1. Usando (3.19) sempre será colocado em último lugar Z_j , onde j é o maior valor possível para o índice, ou seja, $j = \max(j_1, \dots, j_k)$.
2. Depois da primeira etapa será analisado o primeiro e o penúltimo índice. Se o primeiro índice for maior que o penúltimo, então será utilizado (3.21) para reordenar os elementos do traço.

Como exemplo considere o seguinte traço: $\text{Tr}[Z_5 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_1 \cdot Z_4]$. De acordo com as etapas 1 e 2, deve-se escrever as seguintes igualdades, respectivamente:

$$\text{Tr}[Z_5 \cdot Z_4 \cdot Z_3 \cdot Z_1 \cdot Z_2] = \text{Tr}[Z_4 \cdot Z_3 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_5] = \text{Tr}[Z_2 \cdot Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot Z_5]$$

Na primeira igualdade comparando-se o índice do primeiro e do último termo tem-se $5 > 2$, então é feita a troca cíclica. Depois, compara-se o primeiro com o penúltimo, $4 > 2$, então efetua-se a troca devido à simetria de Z (3.21).

Considerando as convenções adotadas, uma contagem dos diferentes termos cinemáticos possíveis inicialmente permitidos do elemento $M_N \in \mathcal{W}_N$, antes de exigir uma invariância de calibre na camada de massa, estão representados na tabela 3.1 (para $N = 3, 4, 5, \dots$):

N	Elementos de $\mathcal{W}_N$	Número de termos cinemáticos permitidos
3	M_3	$3 \text{ Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k), 3 (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k), 1 \text{ Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)$
4	M_4	$54 \text{ Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^2, 144 (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k)(k \cdot Z \cdot k),$ $48 (k \cdot Z \cdot Z \cdot k)^2, 12 \text{ Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k),$ $24 \text{ Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot Z \cdot k), 48(k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k),$ $3 \text{ Tr}^2(Z \cdot Z), 3 \text{ Tr}(Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z)$
5	M_5	$2160 \text{ Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^3, 9720 (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k)(k \cdot Z \cdot k)^2,$ $7290 (k \cdot Z \cdot Z \cdot k)^2(k \cdot Z \cdot k), 360 \text{ Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^2,$ $1620 \text{ Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot Z \cdot k)(k \cdot Z \cdot k),$ $3240 (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k)(k \cdot Z \cdot k)$ $2430 (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k)(k \cdot Z \cdot Z \cdot k), 90 \text{ Tr}^2(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k),$ $90 \text{ Tr}(Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k), 90 \text{ Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot Z \cdot k),$ $270 \text{ Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k), 540 (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k),$ $10 \text{ Tr}(Z \cdot Z) \text{ Tr}(Z \cdot Z \cdot Z), 12 \text{ Tr}(Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Figura 3.1: Número de termos cinemáticos permitidos, considerando-se as convenções adotadas e as restrições utilizadas

3.3 Termos Fatorizáveis e não-Fatorizáveis

Neste trabalho, é dito que um dado termo cinemático gravitacional é fatorizável se pode ser escrito como um produto de termos cinemáticos de bósons de calibre. Por exemplo, no caso $N = 3$ temos que

$$\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) = (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) \quad (3.23)$$

e também

$$(k_1 \cdot Z_3 \cdot Z_2 \cdot Z_1 \cdot k_2) = \frac{1}{2} (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2) (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \frac{1}{2} (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2), \quad (3.24)$$

onde cada tensor de polarização Z_j foi dividido como um produto de vetores de polarização de bósons de calibre (que obedecem à condição de transversalidade correspondente (2.3)):

$$Z_{\mu\nu}^j \rightarrow \bar{\zeta}_\mu^j \zeta_\nu^j, \quad (3.25)$$

o que é claramente o oposto da operação mencionada na eq. (3.5).

Observe que as fatorações em (3.23) e (3.24) obedecem à simetria esquerda-direita (os termos cinemáticos gravitacionais permanecem invariantes sob $\bar{\zeta}^j \leftrightarrow \zeta^j$ para todos os j 's possíveis).

Há versões ainda mais elaboradas de termos cinemáticos fatorizáveis que surgem para casos $N \geq 4$ e serão vistos nas seções correspondentes.

Quando lidamos com um termo cinemático fatorizável, nos referiremos ao primeiro fator

(escrito em termos de $\bar{\zeta}$'s) como fator de esquerda, e ao segundo fator (escrito em termos de ζ 's) como fator de direito.

Para cada $N \geq 3$ também existem termos cinemáticos que não podem ser escritos como um produto de termos cinemáticos do bóson de calibre. Por exemplo, não é difícil ver que o termo

$$\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3) \quad (3.26)$$

não é fatorizável.

Neste trabalho, serão chamados os termos como o de (3.26) como termos cinemáticos não-fatorizáveis. De fato, é possível provar, utilizando análise dimensional, invariância de calibre e unitariedade, que em um processo de espalhamento de N gravitons os únicos termos não fatorizáveis são aqueles que contêm traços de termos cinemáticos envolvendo o produto de um número ímpar de tensores de polarizações, os quais devem ser nulos. Dessa forma, pode-se estabelecer a seguinte restrição adicional

$$\text{Ausência de termos cinemáticos contendo } \text{Tr}(Z^{2p+1}) \equiv \underbrace{\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot \dots \cdot Z)}_{(2p+1) \text{ tensores}}, \quad (3.27)$$

Isso significa que a tabela 3.1 a seguir pode ser construída selecionando-se os termos não fatorizáveis da tabela (2.2):

N	Termos cinemáticos não-fatorizáveis
3	termos $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)$
4	termos $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)$
5	termos $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^2$, $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot Z \cdot k)$ e $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z)$
6	termos $\text{Tr}^2(Z \cdot Z \cdot Z)$, $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)\text{Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)$, $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot Z \cdot k)(k \cdot Z \cdot k)$, $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^3$ e $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.1: Termos cinemáticos não-fatorizáveis até $N=5$

3.4 Primeira abordagem para encontrar uma base para $\mathcal{W}_N$ (lado gravitacional)

Existem duas abordagens para procurar uma base para o $\mathcal{W}_N$. Ambas são baseados em invariância de calibre. A primeira é uma generalização direta da restrição considerada para as amplitudes do bóson de calibre em 2.4. Como será visto, para valores elevados de N (digamos $N \geq 7$) torna-se extremamente “impraticável”, pois requer a resolução de um grande número de equações que, apesar de lineares, contêm coeficientes que dependem de parâmetros (as variáveis independentes do Mandelstam). A exploração dessa abordagem ocorrerá através dos casos com número crescente de pontos na amplitude.

3.4.1 Caso $N = 3$

De acordo com a tabela em (2.2), M_3 é dado em termos de sete termos independentes (distribuídos ao longo de três estruturas cinemáticas diferentes), então M_3 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} M_3 = & \Theta_1 \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) + \Theta_2 \text{Tr}(Z_2 \cdot Z_3)(k_2 \cdot Z_1 \cdot k_2) + \Theta_3 \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_3)(k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1) + \\ & \lambda_1(k_1 \cdot Z_3 \cdot Z_2 \cdot Z_1 \cdot k_2) + \lambda_2(k_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_1 \cdot k_2) + \lambda_3(k_1 \cdot Z_2 \cdot Z_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) + \\ & b \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3) , \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3 são coeficientes que têm a mesma dimensão de massa, enquanto o coeficiente b tem duas unidades adicionais de dimensão de massa. Note que em princípio cada um dos coeficientes poderia ser uma combinação de produtos de momenta (variáveis de Mandelstam) como $k_i \cdot k_j$. Entretanto, para espalhamentos de 3 pontos de estados sem massa ocorre que

$$k_i \cdot k_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Portanto, os coeficientes $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3 devem ser adimensionais. Assim por uma simples análise dimensional, deve-se ter

$$b = 0 , \quad (3.29)$$

pois b só pode depender de algum $k_i \cdot k_j$, que por sua vez vimos que deve ser nulo. Essa já é uma demonstração que os termos com traço de número ímpar de tensores de polarização não deve contribuir.

Requerendo então a invariância calibre da amplitude M_3 com respeito ao estado externo 1, o que significa que ao fazer a substituição

$$Z_{\mu\nu}^1 \rightarrow \omega_\mu k_\nu^1 + \omega_\nu k_\mu^1 , \quad (3.30)$$

para um ω_μ arbitrário, que é um vetor D -dimensional obedecendo a condição $\omega \cdot k^1 = 0$, então M_3 deve se anular. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = & 2 \Theta_1(\omega \cdot Z_2 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) + 2 \Theta_3(\omega \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1) + \\ & + \lambda_1(k_2 \cdot \omega)(k_1 \cdot Z_3 \cdot Z_2 \cdot k_1) + \lambda_2(k_2 \cdot \omega)(k_1 \cdot Z_3 \cdot Z_2 \cdot k_1) + , \\ & + \lambda_3\{(k_1 \cdot Z_3 \cdot \omega)(k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1) + (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(\omega \cdot Z_2 \cdot k_1)\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde já foi usado (3.29) e também que $k_1 \cdot k_2 = 0$.

Usando $(k_1 \cdot Z_3 \cdot \omega) = (\omega \cdot Z_3 \cdot k_1)$ na eq.(3.31), devido ao fato que $Z_{\mu\nu}^3$ é um tensor

simétrico, e coletando os coeficientes da mesma estrutura cinemática obtém-se

$$2\Theta_1 + \lambda_3 = 0 \quad , \quad 2\Theta_3 + \lambda_3 = 0 \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad . \quad (3.32)$$

Similarmente, demandando a invariância de calibre de M_3 com respeito aos estados 2 e 3 encontra-se,

$$2\Theta_1 - \lambda_1 = 0 \quad , \quad -2\Theta_2 + \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \quad , \quad (3.33)$$

$$-2\Theta_2 - \lambda_2 = 0 \quad , \quad -2\Theta_3 - \lambda_2 = 0 \quad , \quad -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \quad . \quad (3.34)$$

A solução do sistema de equações lineares (3.32), (3.33) and (3.34), resulta em

$$\Theta_2 = \Theta_1 \quad , \quad \Theta_3 = \Theta_1 \quad , \quad \lambda_1 = 2\Theta_1 \quad , \quad \lambda_2 = -2\Theta_1 \quad , \quad \lambda_3 = -2\Theta_1 \quad . \quad (3.35)$$

Assim, na eq.(3.28) deve-se ter

$$\begin{aligned} M_3 = \Theta_1 \{ & \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) + \text{Tr}(Z_2 \cdot Z_3)(k_2 \cdot Z_1 \cdot k_2) + \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_3)(k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1) + \\ & 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot Z_2 \cdot Z_1 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_1 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_2 \cdot Z_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) \} \quad . \end{aligned} \quad (3.36)$$

É claro que a expressão em (3.36) pode ser reescrita como [45]

$$\begin{aligned} M_3 = \Theta_1 Z_{\lambda_1 \nu_1}^1 Z_{\lambda_2 \nu_2}^2 Z_{\lambda_3 \nu_3}^3 & \left[k_1^{\lambda_3} \eta^{\lambda_1 \lambda_2} + k_2^{\lambda_1} \eta^{\lambda_2 \lambda_3} + k_3^{\lambda_2} \eta^{\lambda_3 \lambda_1} \right] \\ & \times \left[k_1^{\nu_3} \eta^{\nu_1 \nu_2} + k_2^{\nu_1} \eta^{\nu_2 \nu_3} + k_3^{\nu_2} \eta^{\nu_3 \nu_1} \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.37)$$

ou

$$M_3 = \frac{\Theta_1}{4} Z_{\lambda_1 \nu_1}^1 Z_{\lambda_2 \nu_2}^2 Z_{\lambda_3 \nu_3}^3 A_{\text{YM}}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}(1, 2, 3) A_{\text{YM}}^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(1, 2, 3) \quad , \quad (3.38)$$

onde $A_{\text{YM}}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}(1, 2, 3)$ é a amplitude “parcial” de 3 pontos de Yang-Mills (na qual foram retirados os três vetores de polarização). Assim, partindo de (3.36) até (3.37), usando conservação de momentum e condição de transversalidade (3.12) e finalmente, usando *fatorização* descrita na seção 3.1, pode-se reescrever a eq.(3.38) como

$$M_3 = \frac{\Theta_1}{4} \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3) A_{\text{YM}}(1, 2, 3) \quad . \quad (3.39)$$

Portanto, encontra-se que $\mathcal{C}_3 = \{\bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3) A_{\text{YM}}(1, 2, 3)\}$ é de fato uma base para $\mathcal{W}_3$.

3.4.2 Caso $N = 4$

Considere $M_4 \in \mathcal{W}_4$. De acordo com a tabela (2.2) M_4 inicialmente contém 336 coeficientes, distribuídos ao longo de 8 estruturas cinemáticas diferentes,

$$\begin{aligned}
 M_4 = & \left\{ \lambda_1^{(4)} \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2] (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) + 53 \text{ termos } \text{Tr}[Z \cdot Z] (k \cdot Z \cdot k)^2 \right\} + \\
 & \left\{ \lambda_{55}^{(4)} (k_2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot k_1) (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) + 143 \text{ termos } (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k) (k \cdot Z \cdot k) \right\} + \\
 & \left\{ \lambda_{199}^{(4)} (k_2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot k_1) (k_1 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot k_1) + 47 \text{ termos } (k \cdot Z \cdot Z \cdot k)^2 \right\} + \\
 & \left\{ \lambda_{247}^{(4)} \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) + 11 \text{ termos } \text{Tr}[Z \cdot Z \cdot Z] (k \cdot Z \cdot k) \right\} + \\
 & \left\{ \lambda_{259}^{(4)} \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2] (k_1 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot k_1) + 23 \text{ termos } \text{Tr}[Z \cdot Z] (k \cdot Z \cdot Z \cdot k) \right\} + \\
 & \left\{ \lambda_{283}^{(4)} (k_2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot k_1) + 47 \text{ termos } (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k) \right\} + \\
 & \left\{ \lambda_{331}^{(4)} \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2] \text{Tr}[Z_3 \cdot Z_4] + 2 \text{ termos } \text{Tr}^2[Z \cdot Z] \right\} + \\
 & \left\{ \lambda_{334}^{(4)} \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4] + 2 \text{ termos } \text{Tr}[Z \cdot Z \cdot Z \cdot Z] \right\}. \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

Dentro dessas oito estruturas cinemáticas, a única que não admite uma fatorização é a que contém termos do tipo $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)$. Existem 12 termos independentes desse tipo. Eles tem o papel análogo ao termo $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3)$ de M_3 (eq.(3.28)). Como visto no final da subseção anterior, desta vez os coeficientes dos termos $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)$ não são trivialmente nulos, como aconteceu com o coeficiente b de M_3 .

Demandando a invariância de calibre de M_4 para cada uma das quatro pernas leva a um sistema contendo, inicialmente, 955 equações (que não são linearmente independentes). Este sistema é calculado na planilha Mathematica apresentada no apêndice A. Sua solução consiste em 134 coeficientes nulos e os restantes 202 dados apenas em termos de um parâmetro único (além de sua dependência nas variáveis de Mandelstam α_{12} e α_{14}), confirmando que $\dim(M_4) = 1$. Uma parte da solução é apresentada abaixo:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{334}^4 & \rightarrow -\frac{(\alpha_{12}^3 + 2\alpha_{14}\alpha_{12}^2 + \alpha_{14}^2\alpha_{12})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_{335}^4 \rightarrow -(-\alpha_{12}^2 - \alpha_{14}\alpha_{12})\lambda_{216}^4, \\
 \lambda_{336}^4 & \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^3 - \alpha_{14}\alpha_{12}^2)\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_{331}^4 \rightarrow -\frac{(\alpha_{12}^4 + 2\alpha_{14}\alpha_{12}^3 + \alpha_{14}^2\alpha_{12}^2)\lambda_{216}^4}{2\alpha_{14}^2}, \\
 \lambda_{333}^4 & \rightarrow -\frac{1}{2}(\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{14}\alpha_{12} + \alpha_{14}^2)\lambda_{216}^4, \lambda_{259}^4 \rightarrow 0, \lambda_{260}^4 \rightarrow -(-\alpha_{12} - \alpha_{14})\lambda_{216}^4, \\
 \lambda_{261}^4 & \rightarrow -\left(\frac{(\alpha_{12} + \alpha_{14})\alpha_{12}}{\alpha_{14}} + \alpha_{12} + \alpha_{14}\right)\lambda_{216}^4, \lambda_{262}^4 \rightarrow 0, \lambda_{263}^4 \rightarrow \alpha_{12}\lambda_{216}^4, \lambda_{264}^4 \rightarrow \alpha_{12}\lambda_{216}^4, \\
 \lambda_{266}^4 & \rightarrow 0, \lambda_{267}^4 \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^2 - \alpha_{14}\alpha_{12})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_{268}^4 \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^3 - 2\alpha_{14}\alpha_{12}^2 - \alpha_{14}^2\alpha_{12})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}^2}, \\
 \lambda_{269}^4 & \rightarrow -\frac{(\alpha_{12}^3 + \alpha_{14}\alpha_{12}^2)\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}^2}, \lambda_{270}^4 \rightarrow 0, \lambda_{271}^4 \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^3 - 2\alpha_{14}\alpha_{12}^2 - \alpha_{14}^2\alpha_{12})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}^2}, \\
 \lambda_{272}^4 & \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^3 - 2\alpha_{14}\alpha_{12}^2 - \alpha_{14}^2\alpha_{12})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}^2}, \lambda_{273}^4 \rightarrow 0, \lambda_{274}^4 \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^3 - \alpha_{14}\alpha_{12}^2)\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}^2}, \\
 \lambda_{276}^4 & \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^2 - \alpha_{14}\alpha_{12})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_{277}^4 \rightarrow 0, \lambda_{279}^4 \rightarrow 0, \lambda_{280}^4 \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^2 - 2\alpha_{14}\alpha_{12} - \alpha_{14}^2)\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{281}^4 &\rightarrow -(\alpha_{12} + \alpha_{14})\lambda_{216}^4, \lambda_{282}^4 \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^2 - \alpha_{14}\alpha_{12})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_1^4 \rightarrow 0, \lambda_2^4 \rightarrow 0, \lambda_3^4 \rightarrow 0, \\
\lambda_5^4 &\rightarrow -\frac{(\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{14}\alpha_{12} + \alpha_{14}^2)\lambda_{216}^4}{2\alpha_{14}^2}, \lambda_6^4 \rightarrow 0, \lambda_7^4 \rightarrow -\frac{\lambda_{216}^4}{2}, \lambda_8^4 \rightarrow 0, \lambda_9^4 \rightarrow 0, \lambda_{10}^4 \rightarrow -\frac{\lambda_{216}^4}{2}, \\
\lambda_{13}^4 &\rightarrow \frac{\alpha_{12}\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_{14}^4 \rightarrow -\frac{\lambda_{216}^4}{2}, \lambda_{15}^4 \rightarrow 0, \lambda_{16}^4 \rightarrow -\frac{\alpha_{12}^2\lambda_{216}^4}{2\alpha_{14}^2}, \lambda_{17}^4 \rightarrow 0, \lambda_{18}^4 \rightarrow 0, \lambda_{19}^4 \rightarrow -\frac{\lambda_{216}^4}{2}, \\
\lambda_{21}^4 &\rightarrow -\frac{(\alpha_{12} + \alpha_{14})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_{22}^4 \rightarrow -\frac{(-\alpha_{12}^2 - \alpha_{14}\alpha_{12})\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}^2}, \lambda_{23}^4 \rightarrow -\frac{(\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{14}\alpha_{12} + \alpha_{14}^2)\lambda_{216}^4}{2\alpha_{14}^2}, \\
\lambda_{332}^4 &\rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_{12}^2\lambda_{216}^4, \lambda_{265}^4 \rightarrow -\frac{\alpha_{12}^2\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_{275}^4 \rightarrow \alpha_{12}\lambda_{216}^4, \lambda_{278}^4 \rightarrow \frac{\alpha_{12}^2\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}}, \lambda_{24}^4 \rightarrow 0, \lambda_{26}^4 \rightarrow 0, \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\lambda_{242}^4 &\rightarrow \frac{\alpha_{12}^2\lambda_{216}^4}{\alpha_{14}^2}, \lambda_{243}^4 \rightarrow 0, \lambda_{244}^4 \rightarrow 0, \lambda_{245}^4 \rightarrow 0, \lambda_{246}^4 \rightarrow 0, \lambda_{247}^4 \rightarrow 0, \lambda_{248}^4 \rightarrow 0, \lambda_{249}^4 \rightarrow 0 \\
\lambda_{250}^4 &\rightarrow 0, \lambda_{251}^4 \rightarrow 0, \lambda_{252}^4 \rightarrow 0, \lambda_{253}^4 \rightarrow 0, \lambda_{254}^4 \rightarrow 0, \lambda_{255}^4 \rightarrow 0, \lambda_{256}^4 \rightarrow 0, \lambda_{257}^4 \rightarrow 0, \lambda_{258}^4 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Um detalhe importante é que, entre os 134 coeficientes nulos, há 12 deles que acompanham os termos cinemáticos $\text{Tr}[Z \cdot Z \cdot Z](k \cdot Z \cdot k)$, demonstrando que esse tipo de termo não aparece na amplitude. São aqueles apresentados nas últimas linhas da solução. De fato, no apêndice C são demonstrados com maiores detalhes que os termos que envolvem um número ímpar de tensores de polarização não aparecem na amplitude.

Verifica-se que, ao substituir a solução acima na eq. 3.40), M_4 pode ser fatorada como

$$M_4 = \beta_1^{(4)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4). \quad (3.41)$$

onde foi escrito $\beta_1^{(4)} = -\frac{\lambda_{216}^{(4)} \alpha_{12}^2}{4}$ para uniformizar esses resultados com os coeficientes KLT. Novamente, aqui encontra-se que $\mathcal{C}_4 = \{\bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4)\}$ forma-se uma base para $\mathcal{W}_4$.

3.4.3 Casos $N = 5$ e 6

O procedimento para $N > 4$ é exatamente o mesmo que foi apresentado nas subseções 3.4.1 e 3.4.2. Ressalta-se aqui que depois de resolver o sistema linear que vem da invariância de calibre exigente em todas as pernas, os coeficientes de todos os termos não factorizáveis se anulam. Para $N = 5$ e $N = 6$ a lista destes termos já foi dada na tabela 3.1. Assim, seguindo o procedimento anterior chega-se em

$$\begin{aligned}
M_5 &= A_{\text{YM}}(1, \{2, 3\}, 4, 5) \left[\beta_1^{(5)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{2, 3\}, 4, 5) + \beta_2^{(5)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 2\}, 4, 5) \right] + \\
&\quad A_{\text{YM}}(1, \{3, 2\}, 4, 5) \left[\beta_3^{(5)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 2\}, 4, 5) \right] \quad (3.42)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 M_6 = & A_{\text{YM}}(1, \{2, 3, 4\}, 5, 6) \left[\beta_1^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{2, 3, 4\}, 5, 6) + \beta_2^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{2, 4, 3\}, 5, 6) + \right. \\
 & \beta_3^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 2, 4\}, 5, 6) + \beta_4^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 2, 3\}, 5, 6) + \\
 & \left. \beta_5^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 4, 2\}, 5, 6) + \beta_6^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 3, 2\}, 5, 6) \right] + \\
 & A_{\text{YM}}(1, \{2, 4, 3\}, 5, 6) \left[\beta_7^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{2, 4, 3\}, 5, 6) + \right. \\
 & \beta_8^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 2, 4\}, 5, 6) + \beta_9^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 2, 3\}, 5, 6) + \\
 & \left. \beta_{10}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 4, 2\}, 5, 6) + \beta_{11}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 2, 3\}, 5, 6) \right] + \\
 & A_{\text{YM}}(1, \{3, 2, 4\}, 5, 6) \left[\beta_{12}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 2, 4\}, 5, 6) + \beta_{13}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 2, 3\}, 5, 6) \right. \\
 & \left. \beta_{14}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 4, 2\}, 5, 6) + \beta_{15}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 3, 2\}, 5, 6) \right] + \\
 & A_{\text{YM}}(1, \{4, 2, 3\}, 5, 6) \left[\beta_{16}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 2, 3\}, 5, 6) \right. \\
 & \left. \beta_{17}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 4, 2\}, 5, 6) + \beta_{18}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 3, 2\}, 5, 6) \right] + \\
 & A_{\text{YM}}(1, \{3, 4, 2\}, 5, 6) \left[\beta_{19}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{3, 4, 2\}, 5, 6) + \beta_{20}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 3, 2\}, 5, 6) \right] + \\
 & A_{\text{YM}}(1, \{4, 3, 2\}, 5, 6) \left[\beta_{21}^{(6)} \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{4, 3, 2\}, 5, 6) \right] \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

As chaves foram inseridas somente como uma lembrança dos índices a serem permutados.

De fato, demandando a invariância de gauge e utilizando unitaridade e análise dimensional, foi possível demonstrar, até $N=9$, que termos não fatorizáveis não aparecem na estrutura de M_N . De forma, $\mathcal{W}_N$, admite como base simples aquela construída pela “quadratura” da conhecida base BJC:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_N = & \left\{ \bar{A}_{\text{YM}}(1, \{\sigma_L(2), \sigma_L(3), \dots, \sigma_L(N-2)\}, N-1, N) \right. \\
 & \times A_{\text{YM}}(1, \{\sigma_R(2), \sigma_R(3), \dots, \sigma_R(N-2)\}, N-1, N) \\
 & \left. \sigma_L, \sigma_R \in S_{N-3} \ ; \ ||\sigma_L|| \leq ||\sigma_R|| \right\} \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

$\{\sigma_L(2), \sigma_L(3), \dots, \sigma_L(N-2)\}$ e $\{\sigma_R(2), \sigma_R(3), \dots, \sigma_R(N-2)\}$ denotam permutações dos índices $\{2, 3, \dots, (N-2)\}$ que definem a base BCJ. A desigualdade “ $||\sigma_L|| \leq ||\sigma_R||$ ” significa dizer que se rotula com um índice inteiro $||\sigma||$ cada uma das $(N-3)!$ permutações $\{\sigma_L(2), \sigma_L(3), \dots, \sigma_L(N-2)\}$ e que é então possível ordenar toda a lista de permutações de acordo com o valor numérico de $||\sigma||$, como visto nos resultados (3.42) e (3.43). Uma vez que existem $(N-3)!$ possíveis permutações de $\{\sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(N-2)\}$ em cada A_{YM} , e que o produto $\bar{A}_{\text{YM}} A_{\text{YM}}$ permanece invariante sob intercâmbio de diferentes permutações esquerda-direita ($\sigma_L \leftrightarrow \sigma_R$, $\sigma_L \neq \sigma_R$) a dimensão de $\mathcal{C}_N$ é precisamente

dada por

$$\dim(\mathcal{W}_N) = \frac{1}{2} (N-3)! ((N-3)! + 1) , \quad (3.45)$$

3.5 Segunda abordagem para encontrar uma base para $\mathcal{W}_N$ (lado bósons de calibre)

3.5.1 Caso $N = 3$

Começando considerando a versão simplificada de M_3 , isto é, a inicial dada pela eq.(3.28) mas que foi depois simplificada ao descobrir que o coeficiente b é nulo (eq.(3.29)). Seguindo a notação de fatoração da seção 3.1 (ou equivalentemente, a receita da eq.(3.25)) podemos então reescrever M_3 em termos de estruturas fatorizáveis como

$$\begin{aligned} M_3 = & \Theta_1(\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \Theta_2(\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \\ & \Theta_3(\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1) + \\ & \lambda_1 \left[\frac{1}{2} (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \frac{1}{2} (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) \right] + \\ & \lambda_2 \left[\frac{1}{2} (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1)(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \frac{1}{2} (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1) \right] + \\ & \lambda_3 \left[\frac{1}{2} (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1) + \frac{1}{2} (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) \right] . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Aqui vemos a razão para distinguir o nome dos coeficientes de M_3 : foram utilizados Θ_i 's para indicar aqueles que multiplicam termos cinemáticos gravitacionais que podem ser fatorados de uma maneira única enquanto foram utilizados λ_j 's para aqueles que podem ser fatorados de *duas* formas possíveis. O procedimento desta segunda abordagem consiste em três etapas. Na segunda e na terceira, é feito a exigência pela invariância de calibre de M_3 , na camada de massa. Como será visto, as equações obtidas são diferentes das encontradas em (3.32), (3.33) and (3.34), dentro da primeira abordagem, mas o sistema de equações, como um todo, é de fato equivalente ao encontrado na primeira abordagem

Etapa 1: Fatorando cada um dos termos cinemáticos da direita

Reescrevendo eq.(3.46), ao fatorar cada um dos três termos direitos $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot k)$ leva em

$$\begin{aligned} M_3 = & \left[\Theta_1 (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) + \frac{\lambda_1}{2} (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2) + \frac{\lambda_3}{2} (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1) \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \\ & \left[\frac{\lambda_1}{2} (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) + \Theta_2 (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2) + \frac{\lambda_2}{2} (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1) \right] (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \\ & \left[\frac{\lambda_3}{2} (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) + \frac{\lambda_2}{2} (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2) + \Theta_3 (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1) \right] (\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1) . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Observe que cada um dos colchetes em (3.47) consiste na expressão cinemática de 3 pontos

$$\bar{T}_3[\tau_1, \tau_2, \tau_3] = \tau_1(\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) + \tau_2(\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2) + \tau_3(\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1) , \quad (3.48)$$

avaliada em τ_1, τ_2 e τ_3 , de forma apropriada. Na verdade, pode-se reescrever (3.47) como

$$\begin{aligned} M_3 = & \bar{T}_3\left[\Theta_1, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_3}{2}\right] (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \bar{T}_3\left[\frac{\lambda_1}{2}, \Theta_2, \frac{\lambda_2}{2}\right] (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \\ & \bar{T}_3\left[\frac{\lambda_3}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \Theta_3\right] (\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1) . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Note, também, que $\bar{T}_3$ na eq.(3.48) é a expressão cinemática de 3 pontos mais geral na camada de massa, para bósons de calibre, que não contém termos $(\bar{\zeta} \cdot k)^3$ (a restrição bóson do calibre (2.4) for $N = 3$) [21].

Escrita em termos dos tensores de polarização do gráviton original Z_j 's, a eq.(3.49) é dada por:

$$\begin{aligned} M_3 = & \bar{T}_3^{\mu_1\mu_2\mu_3}\left[\Theta_1, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_3}{2}\right] (Z_1 \cdot Z_2)_{\mu_1\mu_2} (Z_3 \cdot k_1)_{\mu_3} + \\ & \bar{T}_3^{\mu_1\mu_2\mu_3}\left[\frac{\lambda_1}{2}, \Theta_2, \frac{\lambda_2}{2}\right] (Z_2 \cdot Z_3)_{\mu_2\mu_3} (Z_1 \cdot k_2)_{\mu_1} + \\ & \bar{T}_3^{\mu_1\mu_2\mu_3}\left[\frac{\lambda_3}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \Theta_3\right] (Z_3 \cdot Z_1)_{\mu_3\mu_1} (Z_2 \cdot k_1)_{\mu_2} , \end{aligned} \quad (3.50)$$

where

$$\bar{T}_3^{\mu_1\mu_2\mu_3}[\tau_1, \tau_2, \tau_3] = \tau_1 \eta^{\mu_1\mu_2} k_1^{\mu_3} + \tau_2 \eta^{\mu_2\mu_3} k_2^{\mu_1} + \tau_3 \eta^{\mu_3\mu_1} k_1^{\mu_2} \quad (3.51)$$

é a expressão que surge da retirada de $\bar{T}_3[\tau_1, \tau_2, \tau_3]$, dado em eq.(3.48), das polarizações $\bar{\zeta}_{\mu_1}^1, \bar{\zeta}_{\mu_2}^2$ e $\bar{\zeta}_{\mu_3}^3$, e onde $(Z_i \cdot Z_j)_{\mu\nu}$'s e $(Z_i \cdot k_j)_\mu$'s que aparecem em (3.50) são dados nas eqs.(3.11) e (3.10), respectivamente.

Etapa 2: Demandar invariância de calibre na camada de massa nos termos à esquerda

A proposta do procedimento nesta etapa consiste em exigir agora uma invariância de calibre de M_3 dado em eq.(3.49), com relação aos termos cinemáticos esquerdos (aqueles com $\bar{\zeta}$'s), isto é, independentemente dos cinemáticos direitos (que permanecem intocados, pelo menos nesta etapa). Isso significa que cada um dos três $\bar{T}_3$'s aparecendo na eq. (3.49) deve ser uma expressão invariante de calibre na camada de massa. Em outras palavras, os $\bar{T}_3$'s aparecendo em (3.49) devem, independentemente, se anular sempre que $\bar{\zeta}_j = k_j$ (para $j = 1, 2, 3$). Esse procedimento leva ao seguinte sistema de equações:

$$\bar{\zeta}_1 = k_1 \Rightarrow \begin{cases} \Theta_1 + \frac{\lambda_3}{2} = 0 \\ \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} = 0 \\ \frac{\lambda_3}{2} + \Theta_3 = 0 \end{cases} , \quad (3.52)$$

$$\bar{\zeta}_2 = k_2 \Rightarrow \begin{cases} \Theta_1 - \frac{\lambda_1}{2} = 0 \\ \frac{\lambda_1}{2} - \Theta_2 = 0 \\ \frac{\lambda_3}{2} - \frac{\lambda_2}{2} = 0 \end{cases} , \quad (3.53)$$

$$\bar{\zeta}_3 = k_3 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_3}{2} = 0 \\ -\Theta_2 - \frac{\lambda_2}{2} = 0 \\ -\frac{\lambda_2}{2} - \Theta_3 = 0 \end{cases} . \quad (3.54)$$

Como é bem sabido [21] a solução para este sistema consiste em que cada um dos $\bar{T}_3$'s em (3.49) é proporcional a $\bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3)$. As constantes de proporcionalidade são dadas respectivamente por $\Theta_1/2$, $\lambda_1/4$ and $\lambda_3/4$, therefore:

$$M_3 = \frac{1}{2} \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3) \left[\Theta_1 (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \frac{\lambda_1}{2} (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \frac{\lambda_3}{2} (\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1) \right], \quad (3.55)$$

ou simplesmente

$$M_3 = \frac{1}{2} \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3) T_3 \left[\Theta_1, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_3}{2} \right], \quad (3.56)$$

onde $T_3[\tau_1, \tau_2, \tau_3]$ é exatamente a mesma expressão de 3 pontos dada na eq.(3.48) mas para os vetores de polarização ζ_i 's no lugar de $\bar{\zeta}_i$'s.

Etapa 3: Demandar invariância de calibre na camada de massa nos termos à esquerda

A proposta do procedimento é agora exigir invariância de calibre somente com relação aos termos cinemáticos corretos em (3.56). Nós já sabemos que isso implica que o T_3 em (3.56) será proporcional a $A_{\text{YM}}(1, 2, 3)$ mas, para completar o procedimento, escrevemos explicitamente as equações:

$$\begin{aligned} \zeta_1 = k_1 &\Rightarrow \Theta_1 + \lambda_3/2 = 0, \\ \zeta_2 = k_2 &\Rightarrow \Theta_1 - \lambda_1/2 = 0, \\ \zeta_3 = k_3 &\Rightarrow -\lambda_1/2 - \lambda_3/2 = 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Esse sistema resulta em $\Theta_1 = -\lambda_3/2 = \lambda_1/2$, permitindo escrever em (3.55) que

$$M_3 = \frac{\Theta_1}{4} \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3) A_{\text{YM}}(1, 2, 3), \quad (3.58)$$

que está em exato acordo com (3.39).

3.5.2 Caso $N = 3$ com simetria esquerda-direita manifesta

Será considerado novamente o caso $N=3$ com simetria esquerda-direita escrita de forma explícita. Para se entender isso, considere como exemplo o seguinte caso que existem duas possibilidades que geram a mesma estrutura gravitacional

$$\begin{aligned}
 (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) &= (\bar{\zeta}_{1\mu} \bar{\zeta}_2^\mu)(\bar{\zeta}_{3\nu} k_1^\nu)(\zeta_2^\rho \zeta_{3\rho})(\zeta_{1\sigma} k_2^\sigma) \\
 &= k_2^\sigma \underbrace{\zeta_{1\sigma} \bar{\zeta}_{1\mu}}_{Z_{1\sigma\mu}} \underbrace{\bar{\zeta}_2^\mu \zeta_2^\rho}_{Z_2^{\mu\rho}} \underbrace{\zeta_{3\rho} \bar{\zeta}_{3\nu}}_{Z_{3\rho\nu}} k_1^\nu \\
 &= k_2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot k_1
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Considere agora o mesmo termo transformado pela simetria esquerda-direita

$$\begin{aligned}
 (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) &= (\bar{\zeta}_2^\mu \bar{\zeta}_{3\mu})(\bar{\zeta}_{1\nu} k_2^\nu)(\zeta_{1\rho} \zeta_2^\rho)(\zeta_{3\sigma} k_1^\sigma) \\
 &= k_2^\nu \underbrace{\bar{\zeta}_{1\nu} \zeta_{1\rho}}_{Z_{1\nu\rho}} \underbrace{\bar{\zeta}_2^\rho \zeta_2^\mu}_{Z_2^{\rho\mu}} \underbrace{\bar{\zeta}_{3\mu} \zeta_{3\sigma}}_{Z_{3\mu\sigma}} k_1^\sigma \\
 &= k_2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot k_1
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Escrevendo novamente M_3 em termos de elementos fatorizáveis, levando-se em conta a simetria esquerda-direita e fatorando cada um dos três termos $(\bar{\zeta} \cdot \bar{\zeta})(\bar{\zeta} \cdot k)$ em (3.46), pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 M_3 &= (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) [\Theta_1 (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \lambda_1(1 - l_1)(\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \lambda_3 l_3 (\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1)] + \\
 &\quad (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2) [\lambda_1 l_1 (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \Theta_2 (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \lambda_2(1 - l_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1)] + \\
 &\quad (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1) [\lambda_3(1 - l_3)(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1) + \lambda_2 l_2 (\zeta_2 \cdot \zeta_3)(\zeta_1 \cdot k_2) + \Theta_3 (\zeta_3 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_1)] ,
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

ou de forma equivalente,

$$\begin{aligned}
 M_3 &= (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) T_3 [\Theta_1, \lambda_1(1 - l_1), \lambda_3 l_3] + (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2) T_3 [\lambda_1 l_1, \Theta_2, \lambda_2(1 - l_2)] + \\
 &\quad (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1) T_3 [\lambda_3(1 - l_3), \lambda_2 l_2, \Theta_3] .
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Etapa 2: Demandar invariância de calibre na camada de massa nos termos cinemáticos à direita

Nas eqs.(3.61) ou (3.62), demandar que M_3 se anulem quando $\zeta_j = k_j$ (para $j = 1, 2, 3$), implica no seguinte sistema de equações:

$$\zeta_1 = k_1 \Rightarrow \begin{cases} \Theta_1 + \lambda_3 l_3 &= 0 \\ \lambda_1 l_1 + \lambda_2(1 - l_2) &= 0 \\ \lambda_3(1 - l_3) + \Theta_3 &= 0 \end{cases} , \tag{3.63}$$

$$\zeta_2 = k_2 \Rightarrow \begin{cases} \Theta_1 - \lambda_1(1 - l_1) = 0 \\ \lambda_1 l_1 - \Theta_2 = 0 \\ \lambda_3(1 - l_3) - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases}, \quad (3.64)$$

$$\zeta_3 = k_3 \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1(1 - l_1) - \lambda_3 l_3 = 0 \\ -\Theta_2 - \lambda_2(1 - l_2) = 0 \\ -\lambda_2 l_2 - \Theta_3 = 0 \end{cases}. \quad (3.65)$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtém-se

$$M_3 = \frac{1}{2} [\Theta_1 (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) + \lambda_1 l_1 (\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2) + \lambda_3(1 - l_3) (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_1)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1)] \\ \times A_{\text{YM}}(1, 2, 3), \quad (3.66)$$

ou simplesmente

$$M_3 = \frac{1}{2} \bar{T}_3 [\Theta_1, \lambda_1 l_1, \lambda_3(1 - l_3)] A_{\text{YM}}(1, 2, 3), \quad (3.67)$$

em direta analogia à eq.(3.56).

Etapa 3: Demandar invariância de calibre na camada de massa nos termos cinemáticos à esquerda

Agora é uma coisa imediata ver que, começando de (3.67) para chegar à expressão final de M_3 (eqs.(3.58) ou (3.39)) é suficiente exigir invariância do calibre com relação aos termos cinemáticos esquerdos de M_3 , em (3.67).

3.5.3 Prova da equivalência entre os dois procedimentos de exigência de invariância no calibre

Se for somadas cada uma das três equações de(3.52) com as correspondentes em (3.63) fácil ver que são recuperadas as três equações envolvendo $\{\Theta_1, \Theta_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, dados em eq.(3.32), da primeira abordagem. Da mesma forma, adicionando as equações em (3.53) e em (3.54), com as correspondentes em (3.64) e em (3.65), chegamos às três equações correspondentes em (3.33) and (3.34) da primeira abordagem, respectivamente. Esta informação é suficiente para verificar que exigindo invariância de calibre separada na camada de massa (ou seja, com relação às expressões cinemáticas esquerda e direita) recuperamos o mesmo sistema de equações encontradas exigindo invariância de calibre em relação ao conjunto expressão gravitacional (exigindo que M_3 se torne 0 quando $Z_{\mu\nu}^j \rightarrow \omega_\mu k_\nu^j + \omega_\nu k_\mu^j$ ($j = 1, 2, 3$)).

Além disso, é fácil verificar que, ao retornar a solução dos sistemas lineares em (3.32), (3.33) (3.34), dadas em (3.35), nas correspondentes eqs. $\{(3.52), (3.53), (3.54)\}$ e $\{(3.63), (3.64), (3.65)\}$ fica claro que $l_1 = l_2 = l_3 = 1/2$. Isto era esperado devido à simetria de M_3 em relação aos termos cinemáticos esquerdo e direito.

3.5.4 Caso $N = 4$

Nesse procedimento, envolvendo a fatorização em termos bósons de gauge, existem algumas possibilidades diferentes de se fazer a fatorização devido à simetria esquerda-direita. Existem termos com apenas uma possibilidade, termos com duas possibilidades e até termos com 4 possibilidades:

$$\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) = (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_1) (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) , \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_2 \cdot Z_4) &= l_{241}^{(2,1)} (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_3)(\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_4) (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) + \\ &\quad (1 - l_{241}^{(2,1)}) (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_4)(\bar{\zeta}_2 \cdot \bar{\zeta}_3) (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) , \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Z_3 \cdot Z_4)(k_2 \cdot Z_1 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_2 \cdot k_3) &= l_{54}^{(3,1)} l_{54}^{(3,2)} (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_4)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1) (\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_3) + \\ &\quad l_{54}^{(3,1)} (1 - l_{54}^{(3,2)}) (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_4)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_3) (\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_2 \cdot k_1) + \\ &\quad (1 - l_{54}^{(3,1)})(1 - l_{54}^{(3,2)}) (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_4)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_3)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_1) (\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_3) + \\ &\quad (1 - l_{54}^{(3,1)}) l_{54}^{(3,2)} (\bar{\zeta}_3 \cdot \bar{\zeta}_4)(\bar{\zeta}_1 \cdot k_3)(\bar{\zeta}_2 \cdot k_3) (\zeta_3 \cdot \zeta_4)(\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_2 \cdot k_1) , \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde os coeficientes $l_{241}^{(2,1)}$, $l_{54}^{(3,1)}$ and $l_{54}^{(3,2)}$ são completamente *arbitrarios* enquanto a invariância de calibre de M_4 não é demandada. Em seguida, serão seguidos os três passos da segunda abordagem já apresentada no caso $N = 3$.

Etapa 1: Fatorando cada um dos termos cinemáticos da direita

Considerando as restrições já vistas, esses cálculos tem início com uma expressão para M_4 , contendo 324 termos restantes, distribuídos ao longo de sete estruturas cinemáticas diferentes, em que cada uma delas é fatorizável:

$$\begin{aligned} M_4 &= \\ &\quad \{ \lambda_1^{(4,1)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) + \dots + \lambda_{24}^{(4,1)} \text{Tr}(Z_4 \cdot Z_1)(k_3 \cdot Z_2 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) + \\ &\quad \lambda_{25}^{(4,1)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)\text{Tr}(Z_3 \cdot Z_4) + \lambda_{26}^{(4,1)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_3)\text{Tr}(Z_2 \cdot Z_4) + \lambda_{27}^{(4,1)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_4)\text{Tr}(Z_2 \cdot Z_3) \} \\ &+ \{ \lambda_1^{(4,2)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2) + \dots + \\ &\quad \lambda_{241}^{(4,2)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot Z_2) + \lambda_{242}^{(4,2)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4) + \lambda_{243}^{(4,2)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_2 \cdot Z_4) \} \\ &+ \{ \lambda_1^{(4,3)} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2) + \dots + \lambda_{54}^{(4,3)} \text{Tr}(Z_4 \cdot Z_1)(k_1 \cdot Z_2 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2) \} . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Os $\lambda_i^{(4,1)}$'s ($i = 1, \dots, 27$) correspondem aos coeficientes dos termos cinemáticos gravitacionais que podem ser fatorados de uma maneira única (eles são o análogo do Θ_i 's, usados em M_3). Similarmente, os $\lambda_j^{(4,2)}$'s ($j = 1, \dots, 243$) correspondem aos coeficientes daqueles que podem ser fatorados de duas maneiras (análogo dos λ_j 's, usados em M_3). Os

$\lambda_k^{(4,3)}$'s ($k = 1, \dots, 54$) constitui um novo tipo de coeficientes que não estavam presentes em M_3 : eles vão multiplicando termos cinemáticos gravitacionais que podem ser fatorados de quatro maneiras ¹.

De fato, em vez de primeiro reescrever cada um dos 324 termos de eq. (3.71) em uma forma fatorada (de maneira similar à passada da equação (3.28) com $b = 0$ até a equação (3.47), para M_3) e, em seguida, fazendo a fatoração dos termos cinemáticos corretos em toda a expressão encontrada para M_4 (que, no caso de M_3 , levou a sua expressão escrita em termos de $\bar{T}_3$'s, na eq.(3.49)), será visto aqui que basta apenas considerar a fatorização de cada um dos 24 $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot k)^2$ e dos 3 $(\zeta \cdot \zeta)^2$:

$$\begin{aligned}
M_4 = & \bar{T}_4 \left[\lambda_1^{(4,1)}, \lambda_1^{(4,2)}(1 - l_1^{(2,1)}), \dots, \lambda_{17}^{(4,2)}(1 - l_{17}^{(2,1)}) \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) + \\
& \bar{T}_4 \left[\lambda_1^{(4,2)}l_1^{(2,1)}, \lambda_2^{(4,1)}, \dots, \lambda_{33}^{(4,2)}(1 - l_{33}^{(2,1)}) \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \vdots \\
& \bar{T}_4 \left[\lambda_{17}^{(4,2)}l_{17}^{(2,1)}, \lambda_{33}^{(4,2)}l_{33}^{(2,1)}, \dots, \lambda_{27}^{(4,1)} \right] (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3), \tag{3.72}
\end{aligned}$$

onde $\bar{T}_4[a_1, a_2, \dots, a_{27}]$ é a expressão cinemática de 4 pontos mais geral (para bósons de calibre) que não contém termos $(\bar{\zeta} \cdot k)^4$ [21]. Sua expressão explícita (dada em termos dos vetores de polarização ζ_j no lugar dos $\bar{\zeta}_j$) é dada por

$$\begin{aligned}
M_4 = & (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_1) \\
& \times T_4 [\lambda_1^{(4,1)}, \lambda_1^{(4,2)}l_1^{(2,1)}, \lambda_2^{(4,2)}l_2^{(2,1)}, \lambda_1^{(4,3)}l_1^{(3,1)}l_1^{(3,2)}, \lambda_3^{(4,2)}l_3^{(2,1)}, \dots] + \\
& (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_2) \\
& \times T_4 [\lambda_1^{(4,2)}(1 - l_1^{(2,1)}), \lambda_2^{(4,1)}, \lambda_1^{(4,3)}l_1^{(3,1)}(1 - l_1^{(3,2)}), \lambda_{18}^{(4,2)}l_{18}^{(2,1)}, \lambda_2^{(4,3)}l_2^{(3,1)}(1 - l_2^{(3,2)}), \dots] + \\
& (25 \text{ left factorized expressions}), \tag{3.73}
\end{aligned}$$

De fato, M_4 pode ser escrita em forma matricial abreviada como

$$M_4 = \bar{v}_4^T \mathbb{M}_4 v_4, \tag{3.74}$$

¹Esta classificação dos coeficientes é válida uma vez que os 12 b_l 's que inicialmente vão multiplicando os termos $\text{Tr}(Z \cdot Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)$ foram descartados. Se eles estivessem presentes, não faria sentido falar sobre os termos cinemáticos de M_4 sendo fatorizáveis uma, duas, quatro ou qualquer número de maneiras.

onde

$$v_4 = \begin{pmatrix} (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_1) \\ (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) \\ \vdots \\ (\zeta_4 \cdot \zeta_1)(\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2) \\ (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot \zeta_4) \\ (\zeta_1 \cdot \zeta_3)(\zeta_2 \cdot \zeta_4) \\ (\zeta_1 \cdot \zeta_4)(\zeta_2 \cdot \zeta_3) \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

e

$$\mathbb{M}_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(4,1)} & \lambda_1^{(4,2)} l_1^{(2,1)} & \lambda_2^{(4,2)} l_2^{(2,1)} & \dots \\ \lambda_1^{(4,2)} (1 - l_1^{(2,1)}) & \lambda_2^{(4,1)} & \lambda_1^{(4,3)} l_1^{(3,1)} (1 - l_1^{(3,2)}) & \dots \\ \lambda_2^{(4,2)} (1 - l_2^{(2,1)}) & \lambda_1^{(4,3)} (1 - l_1^{(3,1)}) (1 - l_1^{(3,2)}) & \lambda_3^{(4,1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Uma observação importante sobre $\mathbb{M}_4$, e mais geralmente sobre $\mathbb{M}_N$ é que é quase matriz simétrica. Com isto queremos dizer que, no que diz respeito à sua dependência de $\lambda_i^{(N,p)}$'s, $\mathbb{M}_4$, é uma matriz simétrica.

Etapa 2: Demandando a invariância do calibre nos termos cinemáticos esquerdos e resolvendo as equações

Step 2: Demandando a invariância do calibre nos termos cinemáticos esquerdos e resolvendo as equações

A solução do sistema de equações que vem da invariância de calibre que implica que cada um dos $\bar{T}_4$'s deve ser um múltiplo de $\bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4)$ [21]. De fato, obtém-se que

$$\begin{aligned} \bar{T}_4 [\lambda_1^{(4,1)}, \lambda_1^{(4,2)} (1 - l_1^{(2,1)}), \dots, \lambda_{17}^{(4,2)} (1 - l_{17}^{(2,1)})] &= \frac{\lambda_1^{(4,2)} (1 - l_1^{(2,1)})}{4} \alpha_{12}^2 \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4), \\ \bar{T}_4 [\lambda_1^{(4,2)} l_1^{(2,1)}, \lambda_2^{(4,1)}, \dots, \lambda_{33}^{(4,2)} (1 - l_{33}^{(2,1)})] &= \frac{\lambda_2^{(4,1)}}{4} \alpha_{12}^2 \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4), \\ &\vdots \\ \bar{T}_4 [\lambda_{17}^{(4,2)} l_{17}^{(2,1)}, \lambda_{33}^{(4,2)} l_{33}^{(2,1)}, \dots, \lambda_{27}^{(4,1)}] &= \frac{\lambda_{33}^{(4,2)} l_{33}^{(2,1)}}{4} \alpha_{12}^2 \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Observe que nas equações acima nós escolhemos o segundo argumento de cada $\bar{T}_4$ como o coeficiente de proporcionalidade entre ele e $\bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4)$ (além do fator $\alpha_{12}^2/4$). Para sermos consistentes, também manteremos esse critério na próxima etapa.

Assim, se obtém

$$M_4 = \frac{\alpha_{12}^2}{4} \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) T_4 [\lambda_1^{(4,2)} (1 - l_1^{(2,1)}), \lambda_2^{(4,1)}, \dots, \lambda_{33}^{(4,2)} l_{33}^{(2,1)}]. \quad (3.78)$$

Etapa 3: Demandando a invariância do calibre nos termos cinemáticos direitos e resolvendo as equações

A exigência da invariância de calibre nos termos cinemáticos direitos em (3.78) implicará que o fator T_4 deve se anular quando $\zeta_j \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Em analogia a (3.77) chega-se em

$$T_4 \left[\lambda_1^{(4,2)}(1 - l_1^{(2,1)}), \lambda_2^{(4,1)}, \dots, \lambda_{33}^{(4,2)} l_{33}^{(2,1)} \right] = \frac{\lambda_2^{(4,1)}}{4} \alpha_{12}^2 A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) \quad (3.79)$$

e portanto,,

$$M_4 = \frac{\lambda_2^{(4,1)}}{16} \alpha_{12}^2 \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) , \quad (3.80)$$

que concorda exatamente com (3.41).

Derivação cinemática das relações KLT

4.1 Base KLT padrão

Uma vez provado no capítulo anterior que o $\mathcal{C}_N$, dado na eq. (3.44), é uma base para o $\mathcal{W}_N$, o que resta a fazer é encontrar os coeficientes dos elementos de base no caso de $\mathcal{M}_N$ e, em seguida, fazer uma mudança de base BCJ nas amplitudes

$$\begin{aligned} & \{ \bar{A}_{\text{YM}}(1, \sigma(2), \dots, \sigma(N-2), N-1, N) \} \rightarrow \\ & \rightarrow \{ A_{\text{YM}}(\sigma(2), \dots, \sigma(j_N-1), 1, N-1, \sigma(j_N), \dots, \sigma(N-2)) \}; \end{aligned} \quad (4.1)$$

a fim de chegar ao formato original das relações KLT propostas por Kawai, Lewellen e Tye (veja equações (3.1) a (3.3)). Na expressão (4.1) tem-se

$$j_N = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1. \quad (4.2)$$

onde os colchetes representam a parte inteira.

Outra possibilidade para chegar às relações do KLT consiste em escolher como um conjunto gerador dos elementos de $\mathcal{W}_N$, em vez de $\mathcal{C}_N$, o seguinte:

$$A_{\text{YM}}(1, \sigma(2), \dots, \sigma(N-2), N-1, N) \otimes \bar{A}_{\text{YM}}(\sigma(2), \dots, \sigma(j_N-1), 1, N-1, \sigma(j_N), \dots, \sigma(N-2))$$

O conjunto acima contém, por construção, os produtos de amplitudes que aparecem no formato original das relações KLT. Entretanto, expande $\mathcal{W}_N$, pois para $N \geq 5$ é linearmente dependente, já que contém $[(N-3)!]^2$ elementos. Como sera visto nos cálculos explícitos feitos para $5 \leq N \leq 7$, a redundância na combinação linear dos elementos deste conjunto é eliminada se exigir que $\mathcal{M}_N$ obedeça a simetria de índice esquerda-direita. Será utilizada essa rota alternativa porque, em comparação com a primeira (e mais óbvia), como um bônus extra, ela leva às relações não lineares obedecidas pelas amplitudes parciais de YM.

Então, nesta seção, adota-se como ponto de partida a seguinte expressão para a amplitude N -pontos gravitacional:

$$\mathcal{M}_N = \sum_{\sigma, \tau \in S_{N-3}} \beta_{\sigma, \tau}^{(N)} A(1, \sigma(2), \dots, \sigma(N-2), N-1, N) \times \bar{A}_{\text{YM}}(\tau(2), \dots, \tau(j_N-1), 1, N-1, \tau(j_N), \dots, \tau(N-2)) \quad (4.3)$$

onde os $\beta_{\sigma, \tau}^{(N)}$ são as incógnitas (dependentes de momentum). A solução para este formato leva àquela considerada originalmente por Kawai, Lewellen e Tye. Os benefícios de usar o formato na equação (4.3) são basicamente dois. A primeira é que, de acordo com Ref. [13], para este formato a relação KLT contém o número mínimo de coeficientes não nulos. E o segundo é que os $\beta_{\sigma, \tau}^{(N)}$ consistirão em polinômios que dependem das variáveis de Mandelstam, ou seja, eles não conterão nenhum polo (todos os polos de $\mathcal{M}_N$ serão contabilizados pelos pólos das amplitudes YM's).

A sutileza é que $\mathcal{M}_N$ pertence a $\mathcal{W}_N$, cuja dimensão é $(N-3)!((N-3)!+1)/2$, enquanto na eq. (4.4) existem $[(N-3)!]^2$ desconhecidos. Isto significa que para $N \geq 5$ os $\beta_{\sigma, \tau}^{(N)}$ não serão todos independentes, ou dito de outro modo, não haverá uma solução única para eles. Na verdade, os resultados mostrarão que a solução geral para os $\beta_{\sigma, \tau}^{(N)}$ em (4.3) é dado por

$$\vec{\beta}^{(N)} = \vec{\beta}_{KLT}^{(N)} + \sum_{j=1}^{N^*} c_j \vec{\beta}_{YMN}^{(N,j)} \quad (4.4)$$

onde vetor $\vec{\beta}^{(N)} = \vec{\beta}_i^{(N)} \{i = 1, 2, \dots, [(N-3)!]^2\}$, $\vec{\beta}_{KLT}^{(N)}$ é a conhecida solução KLT, $\vec{\beta}_{YMN}^{(N,j)}$ representam termos que resultam nas relações não lineares de YM e c_j são coeficientes arbitrários. O somatório vai de 1 até

$$N^* = \frac{1}{2}(N-3)!((N-3)!-1), \quad (4.5)$$

de modo que $\vec{\beta}_{YMN}^{(N,j)}$ só é gerado a partir de $N \geq 5$.

A fim de descobrir que a solução da eq. (4.3) é dada pela eq. (4.4), será adotada uma abordagem cinemática, da mesma forma como foi feito nos capítulos anteriores para as amplitudes de bósons de calibre, de modo a se derivar uma fórmula fechada em nível de árvore. amplitudes de supercordas abertas [referência3] e também derivar as relações do BJC. Já foi visto que, uma vez que a base BCJ foi identificada para as amplitudes de YM e das amplitudes de cordas abertas, os coeficientes desconhecidos nas expressões para essas amplitudes foram determinados comparando os coeficientes dos termos $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot k)^{N-2}$ com as amplitudes da base do BCJ. No caso presente, a ideia é que, pelo menos até $N = 9$, que o $\mathcal{M}_N$ pode ser escrito como na equação (4.3). Consideraremos os termos $\text{Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^{N-2}$ em âmbos os lados da equação (4.3) e isso nos dará um sistema de equações para $\beta_{\sigma, \tau}^{(N)}$'s cuja solução será dada por (4.4). No lado gravitacional de (4.3), os termos $\text{Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^{N-2}$ surgem apenas nos diagramas de Feynman trivalentes associados a

$\mathcal{M}_N$, ou seja, os construídos usando apenas vértices de 3 pontos GR (veja a Figura 4.1). Isso acontece porque, dentre os muitos diagramas distintos de Feynman, os trivalentes são

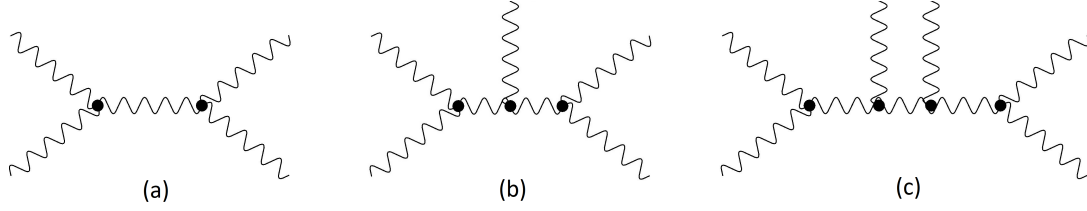


Figura 4.1: Diagramas de Feynman trivalentes para as amplitudes de espalhamento de 4, 5 e 6 grávitons.

os únicos cujas unidades de momento contribuem como $k^{2(N-2)}$ no numerador de $\mathcal{M}_N$. Ainda mais, uma vez que a expressão de $\mathcal{M}_3$ seja conhecida, demandando unitaridade recursivamente, todos os termos $\text{Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^{N-2}$ de $\mathcal{M}_N$ podem ser determinados.

4.2 As relações KLT

O caso das relações KLT com $N = 3$ é imediato desde uma simples comparação das eqs. (3.36) ou (3.39) revelam que o único coeficiente desconhecido Θ_1 pode ser simplesmente identificado com a constante de acoplamento da Relatividade Geral.

Então, nesta seção, vamos considerar apenas a derivação das relações KLT para $4 \leq N \leq 7$.

Além disso, como um subproduto, para $N \geq 5$ obteremos relações não-lineares para as amplitudes de YM que foram encontradas pela primeira vez em [49] por outro método. A novidade de nossa derivação é que ela é válida para D arbitrário, enquanto a de [49] é válida apenas para $D = 4$.

Determinaremos os coeficientes ainda desconhecidos das relações KLT por meio de uma abordagem cinemática, da mesma forma como foi feito em [21] para derivar uma fórmula fechada para as amplitudes de supercordas abertas em nível de árvore [52] e também para o BJC. relações. Nesse trabalho, uma vez que a base BCJ foi identificada para as amplitudes das amplitudes abertas e YM, então os coeficientes desconhecidos nas expressões para essas amplitudes foram determinados comparando os coeficientes de termos $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot k)^{N-2}$ com os das amplitudes da base do BCJ.

No caso presente, a ideia é que $\mathcal{M}_N$, pertence ao espaço vetorial gerado pela base $\mathcal{C}_N$ dada em eq.(3.44), então o que resta a fazer é determinar os coeficientes de $\mathcal{M}_N$ com relação a essa base. Faremos isso examinando os termos $\text{Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^{N-2}$ em ambos os lados da relação KLT correspondente. Esses termos cinemáticos surgem apenas nos diagramas trivalentes de Feynman de $\mathcal{M}_N$, ou seja, os construídos usando apenas vértices de 3 pontos GR. Isto acontece porque, entre os muitos diagramas distintos de Feynman, os trivalentes são os únicos que as unidades de momento contribuem como $k^{2(N-2)}$ no numerador de $\mathcal{M}_N$ [?].

Para conveniência posterior, primeiro trabalharemos encontrando os coeficientes das relações KLT escritas no formato que foi proposto pela primeira vez no artigo KLT original [45], que é o mesmo que usamos na eq.(3.1). A passagem desse formato para o que vem da base $\mathcal{C}_N$ é apenas um passo adicional que consiste em usar as relações conhecidas do BCJ para algumas das amplitudes do YM.

A expressão da relação KLT para N arbitrário, escrita no formato original do KLT, é encontrada nas referências [69, 70], então é possível checar os resultados aqui obtidos com os das referências.

Para explicar com detalhes suficientes o nosso procedimento cinemático, seera feito o caso $N = 4$. Para $5 \leq N \leq 7$ apenas sera apresentado as principais fórmulas que levam à determinação dos coeficientes KLT, com os detalhes feitos em um apêndice.

4.2.1 Caso $N = 4$

Do que já foi visto, eq. (3.80), pode-se escrever

$$\mathcal{M}_4 = \gamma_1^{(4)} A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) \bar{A}_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4), \quad (4.6)$$

Entretanto, a partir de (4.3), com o formato KLT original (veja eq.(3.1)):

$$\mathcal{M}_4 = \beta_1^{(4)} A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) \bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 3, 4), \quad (4.7)$$

onde a relação BCJ a ser usada para passar de (4.6) para (4.7) $A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) = (k_1 \cdot k_3)/(k_1 \cdot k_4) A_{\text{YM}}(2, 1, 3, 4)$. De fato, é possível ver que, para determinar $\beta_1^{(4)}$, não é necessário encontrar todos os termos $\text{Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^2$ bastam os termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ em âmbos os lados da eq.(4.7).

Novamente será um procedimento dividido em três etapas

Etapa 1: Determinação dos termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ em $\mathcal{M}_4$

A expressão completa para esses termos é dada por

$$\mathcal{M}_4 \Big|_{\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2} = -i \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) \left\{ \left(\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{13}} \right) (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - \frac{2}{\alpha_{12}} (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2) + \left(\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{14}} \right) (k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) \right\}. \quad (4.8)$$

No apêndice B.1 é apresentada uma explicação de como chegar a essa expressão a partir de relações de unitaridade. Aqui é somente mencionado que estes termos surgem apenas nos três diagramas trivalentes da amplitude de 4 pontos do GR (mostrada na figura 4.2),

então eles podem ser determinados exigindo unitariedade de $\mathcal{M}_4$ com respeito para cada um dos seus pólos, como visto no apêndice.

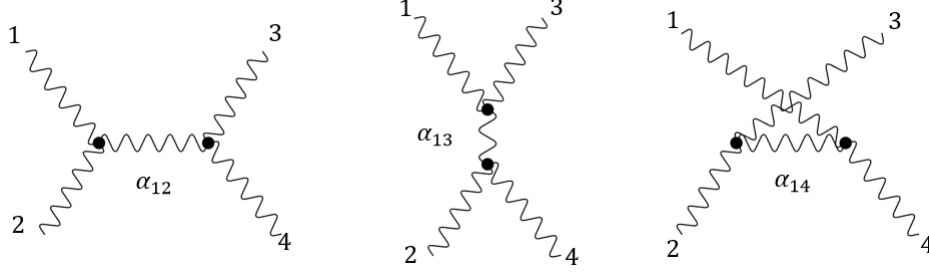


Figura 4.2: Diagramas Trivalentes para a amplitude de 4 pontos na Relatividade Geral.

Etapa 2: Determinação dos termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ em $A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4)\bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 3, 4)$

$A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4)\bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 3, 4)$ corresponde à parte cinemática do lado direito da relação KLT (4.7). Espera-se que os termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ nesse produto tensorial seja igual, a menos de um fator global, com aquele na eq.(4.8). A única maneira de gerar esses termos cinemáticos nesse produto é considerando os termos $(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta_3 \cdot k_i)(\zeta_4 \cdot k_j)$ e $(\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_m)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_m)$ em $A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4)$ e $\bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 3, 4)$, respectivamente. Esses termos poderiam ser encontrados considerando os diagramas trivalentes na amplitude de 4 pontos de YM como acabou-se de fazer no caso gravitacional, mas já que a expressão de $A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4)$ é muito bem conhecido na literatura,

$$A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) = -\frac{4i}{\alpha_{12}\alpha_{14}} K(\zeta_1, k_1; \zeta_2, k_2; \zeta_3, k_3; \zeta_4, k_4) , \quad (4.9)$$

(onde o fator cinemático K pode ser encontrado em [46], por exemplo) sua expressão é escrita aqui sem dar mais detalhes :

$$\begin{aligned} A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4) \Big|_{(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta \cdot k)^2} &= -2i(\zeta_1 \cdot \zeta_2) \left[\frac{1}{\alpha_{12}} (\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) - \left(\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{14}} \right) (\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) \right] \\ \bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 3, 4) \Big|_{(\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta} \cdot k)^2} &= -2i(\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2) \left[\frac{1}{\alpha_{12}} (\bar{\zeta}_3 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_1) - \left(\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{13}} \right) (\bar{\zeta}_3 \cdot k_1)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_2) \right] \end{aligned}$$

No momento de fazer o produto tensorial de ambas as expressões acima, será utilizado que

$$\begin{aligned} (\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2) &\rightarrow \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) , \\ (\zeta_3 \cdot k_1)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_1) &\rightarrow (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) , \\ (\zeta_3 \cdot k_1)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_2) &\rightarrow (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2) , \end{aligned} \quad (4.12)$$

e expressões similares para $(\zeta_4 \cdot k_i)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_j)$.

Usando então que $\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} = 0$ o resultado é

$$\left. \{A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4)\bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 3, 4)\} \right|_{\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2} = \frac{4}{\alpha_{12}} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) \left\{ \left(\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{13}} \right) (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - \frac{2}{\alpha_{12}} (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2) + \left(\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{14}} \right) (k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) \right\}. \quad (4.13)$$

Etapa 3: Determinação de $\beta_1^{(4)}$

Finalmente, substituindo $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$, encontrado nas eqs.(4.8) e (4.13), em ambos os lados da eq.(4.7), encontra-se

$$\beta_1^{(4)} = -\frac{i}{4} \alpha_{12}. \quad (4.14)$$

Assim, essa relação se torna a relação KLT em (3.2) em acordo com [45, 69, 70].

4.2.2 Caso $N = 5$

No caso de $N = 5$ a eq. (4.3) fica escrita como

$$\mathcal{M}_5 = A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5) \left[\beta_1^{(5)} \bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 4, 3, 5) + \beta_2^{(5)} \bar{A}_{\text{YM}}(3, 1, 4, 2, 5) \right] + A_{\text{YM}}(1, 3, 2, 4, 5) \left[\beta_3^{(5)} \bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 4, 3, 5) + \beta_4^{(5)} \bar{A}_{\text{YM}}(3, 1, 4, 2, 5) \right]. \quad (4.15)$$

Etapa 1: Determinação dos termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$ em $\mathcal{M}_5$

A expressão completa para esses termos é dada na equação.(B.19) do apêndice B.2, começando com

$$\left. \mathcal{M}_5 \right|_{\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3} = \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) \times \left\{ \frac{(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)((k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 2(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + (k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3))}{\alpha_{14}\alpha_{23}} + \frac{(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)((k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) + 2(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) + (k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3))}{\alpha_{15}\alpha_{23}} + \frac{(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)((k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1) + 2(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) + (k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3))}{\alpha_{13}\alpha_{24}} + \dots \right\}.$$

No Apêndice B.2 é explicado como se obtém essa expressão.

Etapa 2: Determinação dos termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$ presentes no produto A e $\bar{A}$

Utilizando a lista completa de termos $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot k)^3$ de $A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5)$ a partir da eq.(D.7) da ref.[21]. Assim, copiando na eq.(B.20) do Apendice B.2. Seleccionando somente os termo $(\zeta_1 \cdot \zeta_2)(\zeta \cdot k)^3$ obtém-se

$$\begin{aligned}
& A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5) \Big|_{(\zeta_1 \cdot \zeta_2)^1 (\zeta \cdot k)^3} = \\
& = 2\sqrt{2}i (\zeta_1 \cdot \zeta_2) \left\{ -\left(\frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}}\right)(\zeta_5 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_5)(\zeta_4 \cdot k_2) - \right. \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} \right)(\zeta_5 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{23}} + \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{34}\alpha_{15}} + \frac{1}{\alpha_{45}\alpha_{12}} \right)(\zeta_5 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_5) + \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{23}} + \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{34}\alpha_{15}} + \frac{1}{\alpha_{45}\alpha_{12}} \right)(\zeta_5 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + \\
& \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}}(\zeta_5 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_5)(\zeta_4 \cdot k_1) - \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} \right)(\zeta_5 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_5) - \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} \right)(\zeta_5 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{45}\alpha_{12}} \right)(\zeta_5 \cdot k_2)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) - \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}}(\zeta_5 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_4 \cdot k_2) + \\
& \left. \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \right)(\zeta_5 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) \right\}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Por permutação dos índices em $A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5)$ (eq.(B.20)) pode-se obter as outras expressões da amplitude

$$\begin{aligned}
& A_{\text{YM}}(1, 3, 2, 4, 5) \Big|_{(\zeta_1 \cdot \zeta_2)^1 (\zeta \cdot k)^3} = \\
& = 2\sqrt{2}i (\zeta_1 \cdot \zeta_2) \left\{ -\left(\frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{23}} + \frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{24}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}}\right)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_1) - \right. \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{23}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \right)(\zeta_5 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_3) - \\
& \left. \left(\frac{1}{\alpha_{45}\alpha_{23}} \right)(\zeta_5 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1) + \dots \right\}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 4, 3, 5) \Big|_{(\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)^1 (\bar{\zeta} \cdot k)^3} = 2\sqrt{2}i (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2) \left\{ -\left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{35}}\right)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_5 \cdot k_1) - \right. \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{34}} \right)(\bar{\zeta}_5 \cdot k_1)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_3) - \\
& \left. \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{35}} + \frac{1}{\alpha_{14}\alpha_{35}} \right)(\bar{\zeta}_5 \cdot k_3)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_1) + \dots \right\}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\bar{A}_{\text{YM}}(3, 1, 4, 2, 5) \Big|_{(\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2)^1 (\bar{\zeta} \cdot k)^3} = 2\sqrt{2}i (\bar{\zeta}_1 \cdot \bar{\zeta}_2) \left\{ -\left(\frac{1}{\alpha_{45}\alpha_{35}}\right)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_5 \cdot k_1) - \right. \\ \left. \left(\frac{1}{\alpha_{14}\alpha_{35}}\right)(\bar{\zeta}_5 \cdot k_3)(\bar{\zeta}_3 \cdot k_2)(\bar{\zeta}_4 \cdot k_1) + \dots \right\}. \quad (4.19)$$

Substituindo (4.16)-(4.19) em (4.15) e expandindo o produto tensorial em expressões cinemáticas de produtos de polarizações com e sem barra, são geradas estruturas cinemáticas como em (4.16)

Etapa 3: Comparação dos coeficientes dos termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$

A comparação das seis estruturas cinemáticas mencionadas em ambos os lados da expressão para $\mathcal{M}_5$ resulta em um sistema de 6 equações lineares para $\beta_1^{(5)}$, $\beta_2^{(5)}$, $\beta_3^{(5)}$ e $\beta_4^{(5)}$, escritas como:

1) Estrutura $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}}\right)\beta_1^{(5)} + \\ & \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{24}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}}\right)\beta_2^{(5)} + \\ & \left(\frac{8}{\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}}\right)\beta_3^{(5)} + \\ & -\left(\frac{8}{\alpha_{15}\alpha_{24}^2\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}}\right)\beta_4^{(5)} = \\ & = -\frac{8i}{\alpha_{15}\alpha_{23}} - \frac{8i}{\alpha_{15}\alpha_{24}} - \frac{8i}{\alpha_{12}\alpha_{35}} - \frac{8i}{\alpha_{24}\alpha_{35}} - \frac{8i}{\alpha_{12}\alpha_{45}} - \frac{8i}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \end{aligned}$$

2) Estrutura $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{34}^2} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{34}^2} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{34}} + \frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{34}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{45}}\right)\beta_1^{(5)} + \\ & \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{34}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{45}}\right)\beta_2^{(5)} = -\frac{8i}{\alpha_{15}\alpha_{23}} - \frac{8i}{\alpha_{12}\alpha_{34}} - \frac{8i}{\alpha_{15}\alpha_{34}} - \frac{8i}{\alpha_{12}\alpha_{45}} - \frac{8i}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \end{aligned}$$

3) Estrutura $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3)$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}}\right)\beta_1^{(5)} + \\ & \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}}\right)\beta_2^{(5)} + \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}}\right)\beta_3^{(5)} + \\ & \left(\frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}}\right)\beta_4^{(5)} = -\frac{8i}{\alpha_{14}\alpha_{23}} - \frac{8i}{\alpha_{12}\alpha_{35}} - \frac{8i}{\alpha_{14}\alpha_{35}} - \frac{8i}{\alpha_{12}\alpha_{45}} - \frac{8i}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \end{aligned}$$

4) Estrutura $Tr(Z_1 \cdot Z_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{34}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{34}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{34}\alpha_{35}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{34}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_1^{(5)} + \\
& - \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{34}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{24}\alpha_{34}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_2^{(5)} \\
& + \left(\frac{8}{\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{24}\alpha_{34}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{15}\alpha_{24}\alpha_{34}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_3^{(5)} \\
& - \left(\frac{8}{\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_4^{(5)} = -\frac{16i}{\alpha_{15}\alpha_{23}} - \frac{16i}{\alpha_{12}\alpha_{45}} - \frac{8i}{\alpha_{23}\alpha_{45}}
\end{aligned}$$

5) Estrutura $Tr(Z_1 \cdot Z_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{16}{\alpha_{12}^2\alpha_{35}\alpha_{45}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{16}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_1^{(5)} + \\
& - \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{24}\alpha_{35}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{24}\alpha_{35}} + \frac{16}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_2^{(5)} \\
& + \left(\frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} - \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}} - \frac{8}{\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_3^{(5)} \\
& - \left(\frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{24}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} - \frac{64}{\alpha_{23}\alpha_{24}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_4^{(5)} = \frac{16i}{\alpha_{12}\alpha_{35}} + \frac{16i}{\alpha_{12}\alpha_{45}} + \frac{16i}{\alpha_{23}\alpha_{45}}
\end{aligned}$$

6) Estrutura $Tr(Z_1 \cdot Z_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{34}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{34}\alpha_{35}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{34}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{34}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}^2\alpha_{35}\alpha_{45}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{34}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{16}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_1^{(5)} + \\
& - \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} - \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{34}\alpha_{45}} - \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} - \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_2^{(5)} \\
& + \left(\frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_2^{(5)} \\
& + \left(\frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{34}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{34}\alpha_{35}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{8}{\alpha_{12}\alpha_{14}\alpha_{35}\alpha_{45}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) \beta_3^{(5)} + \\
& - \left(\frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{23}\alpha_{35}} + \frac{8}{\alpha_{14}\alpha_{23}\alpha_{35}\alpha_{45}} \right) = \frac{16i}{\alpha_{12}\alpha_{45}} + \frac{16i}{\alpha_{23}\alpha_{45}}
\end{aligned}$$

A resolução desse sistema, levando-se em conta as relações entre as variáveis de Man-

delstam, resulta em

$$\beta_1^{(5)} = -\frac{1}{4}\alpha_{12}\alpha_{34} + \beta_4^{(5)}F_1^{(5)}(s_{ij}), \quad \beta_2^{(5)} = -\frac{1}{4}\alpha_{13}\alpha_{24} + \beta_4^{(5)}F_2^{(5)}(s_{ij}), \quad \beta_3^{(5)} = \beta_4^{(5)}F_3^{(5)}(s_{ij}), \quad (4.20)$$

para um $\beta_4^{(5)}$ arbitrário, onde $F_1^{(5)}(s_{ij})$, $F_2^{(5)}(s_{ij})$ e $F_3^{(5)}(s_{ij})$ são respectivamente dados por

$$\begin{aligned} F_1^{(5)}(s_{ij}) &= \frac{\alpha_{12}\alpha_{34}(\alpha_{15} + \alpha_{45})}{\alpha_{15}\alpha_{23}(\alpha_{34} + \alpha_{45}) + \alpha_{12}(\alpha_{15}\alpha_{34} + (\alpha_{23} + \alpha_{34})\alpha_{45})}, \\ F_2^{(5)}(s_{ij}) &= -\frac{\alpha_{13}\alpha_{24}(\alpha_{15} + \alpha_{45})}{\alpha_{15}\alpha_{23}(\alpha_{34} + \alpha_{45}) + \alpha_{12}(\alpha_{15}\alpha_{34} + (\alpha_{23} + \alpha_{34})\alpha_{45})}, \\ F_3^{(5)}(s_{ij}) &= \frac{(\alpha_{15} - \alpha_{34})(\alpha_{14}\alpha_{45} + \alpha_{12}(\alpha_{15} + \alpha_{45})) - \alpha_{12}\alpha_{15}\alpha_{23}}{\alpha_{15}\alpha_{23}(\alpha_{34} + \alpha_{45}) + \alpha_{12}(\alpha_{15}\alpha_{34} + (\alpha_{23} + \alpha_{34})\alpha_{45})}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Substituindo esses resultados de volta em (4.15), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5 &= -\frac{1}{4}\alpha_{12}\alpha_{34} A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5)\bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 4, 3, 5) + \\ &\quad -\frac{1}{4}\alpha_{13}\alpha_{24} A_{\text{YM}}(1, 3, 2, 4, 5)\bar{A}_{\text{YM}}(3, 1, 4, 2, 5) + \\ &\quad \beta_4^{(5)}[A_{\text{YM}}(1, 3, 2, 4, 5)\bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 4, 3, 5) + F_1^{(5)}A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5)\bar{A}_{\text{YM}}(2, 1, 4, 3, 5) + \\ &\quad + F_2^{(5)}A_{\text{YM}}(1, 3, 2, 4, 5)\bar{A}_{\text{YM}}(3, 1, 4, 2, 5) + F_3^{(5)}A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5)\bar{A}_{\text{YM}}(3, 1, 4, 2, 5)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Em princípio não é surpresa que a eq. (4.22) não apresenta uma solução única para os $\beta_i^{(5)}$'s, como mostrado em (4.22) já que a simetria esquerda-direita (veja eqs. (3.59) e (3.60)) que permite uma liberdade de escolha para os l_i 's em (3.61), dessa forma amplitudes gravitacionais de 5 pontos pertencem ao espaço de dimensão 3 (veja formula (3.45)).

Como $\mathcal{M}_5$ é uma amplitude de espalhamento da Relatividade Geral na camada de massa, ela não pode depender de um parâmetro arbitrário $\beta_4^{(5)}$, então o termo no colchete em (4.22) deve ser zero, levando à uma relação não linear para as amplitudes de YM. Depois de substituir as expressões conhecidas de $F_1^{(5)}$, $F_2^{(5)}$ and $F_3^{(5)}$ nesta relação não linear, podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} &A(1, 2, 3, 4, 5) [\alpha_{12}\alpha_{34}(\alpha_{15} + \alpha_{45})\bar{A}(2, 1, 4, 3, 5) - \\ &\quad ((\alpha_{15}\alpha_{23}(\alpha_{24} + \alpha_{45}) + \alpha_{13}(\alpha_{15}\alpha_{24} + (\alpha_{23} + \alpha_{24})\alpha_{45}))\bar{A}(3, 1, 4, 2, 5)] + \\ &A(1, 3, 2, 4, 5) [((\alpha_{15}\alpha_{23}(\alpha_{34} + \alpha_{45}) + \alpha_{12}(\alpha_{15}\alpha_{34} + (\alpha_{23} + \alpha_{34})\alpha_{45}))\bar{A}(2, 1, 4, 3, 5) - \\ &\quad \alpha_{13}\alpha_{24}(\alpha_{15} + \alpha_{45})\bar{A}(3, 1, 4, 2, 5)] = 0 \end{aligned}$$

Outras relações podem ser obtidas considerando-se outros $\beta_{i's}^{(5)}$ arbitrários. Esse resultado é válido para um espaço-tempo com $d + 1$ dimensões, sendo d qualquer.

Conclusões e Perspectivas

Nesse trabalho foi apresentada uma derivação da relação KLT de forma puramente cinemática, e considerando-se as simetrias das amplitudes de grávitons e Yang-Mills. Os detalhes maiores estão divididos entre o Capítulo 4 e o apêndice B.

Como em nenhuma parte dos cálculos houve necessidade de se utilizar alguma dimensão específica, os cálculos apresentados nesse trabalho são válidos em qualquer dimensão.

É importante mencionar que de certa forma a superssimetria está presente nesses cálculos, mas não de forma manifesta. De fato, implicitamente a computação de uma amplitude de bósons de calibre de N-pontos leva em conta a condição de ausência de termos $(\zeta \cdot k)^N$ na amplitude. Essa restrição leva à seguinte restrição na amplitude de grávitons:

$$\text{Ausência de termos } (k \cdot Z \cdot k)^N \text{ e termos } (k \cdot Z \cdot k)^{N-2}(k \cdot Z \cdot Z \cdot k)^1$$

Somente desconsiderando esses termos nas amplitudes gravitacionais é que foi possível encontrar as relações KLT. De fato, além da ausência desses termos foi possível ver, requerendo apenas a invariância de calibre na camada de massa, que estruturas cinemáticas não fatoráveis em termos de amplitudes de Yang-Mills não aparecem nas amplitudes gravitacionais.

Fazendo uso de relações de unitariedade, simetria bosônica e invariância de calibre, esse resultado foi possível de ser provado até termos da amplitude de 9 pontos.

A análise cinemática feita para se chegar nas relações KLT, naturalmente gera um espaço vetorial composto pelo quadrado das subamplitudes de Yang-Mills, o qual tem dimensão $(N-3)!((N-3)!+1)/2$. De fato, após identificar os produtos das subamplitudes de YM como base, então é possível utilizar a própria base BCJ para gerar várias possibilidades para as relações KLT.

De fato, no procedimento aqui utilizado, desenvolvido em [54] para gerar a fórmula MSS (1.3) para as amplitudes de teoria de cordas, no caso dos grávitons gera uma arbitrariedade, mas que permite obter relações entre amplitudes de Yang-Mills ainda desconhecidas, denominadas de relações não lineares de Yang-Mills.

Como futuros trabalhos, espera-se que, dentro dessa abordagem cinemática, para as amplitudes em teorias de supercordas, considerando a ordem α'^8 em diante seja possível obter os coeficientes ainda desconhecidos como aqueles que têm dependência nas funções zeta multivaluadas. Também espera-se, usando a superssimetria, que a restrição $(\zeta \cdot k)^N$, repassada para férmions, resultando na ausência de termos

$$(\bar{u}\not{k}u)^{[N/2]}(\zeta \cdot k)^{(N-2[N/2])}$$

onde u representa o espinor, $\not{k} = k_\mu \gamma^\mu$, sendo γ^μ as matrizes de Dirac e $[N/2]$ representa a parte inteira de $N/2$, ajude a entender o espalhamento envolvendo férmions.



Planilha Mathematica Wolfram para cálculo da amplitude gravitacional de 4 pontos

```
(* Amplitude gravitacional de 4 pontos *)
(* Subrotinas *)
solve[matrix_]:=Block[{Ared=RowReduce[Join[matrix[[1]],
{ConstantArray[0,Length[matrix[[1,1]]]]}],FirstPos,
matsize=Length[matrix[[1,1]]],
FirstPos=Flatten[Position[# ,x_ /; x!=0,1,1]&/@Ared[[1;;
(Position[Ared,ConstantArray[0,matsize],1,1][[1,1]]-1)]]];
Table[nn=FirstPos[[lk]]];
matrix[[2,nn]]->-matrix[[2,nn+1;;-1]].Ared[[lk,nn+1;;-1]],
{lk,1,Length[FirstPos]}];
coesS[vec_]:=Block[{vec1,vec2,vec3,xxx},
sumxxx=ConstantArray[xxx,Length[vec]];
vec1=2(vec+sumxxx)/.Plus->List;vec2={};
Do[vec2=Union[vec2,vec1[[i]]],{i,1,Length[vec1]}];
vec3=Union[(Drop[(#/.Times->List),1]/.List->Times)&/@(vec2)];
Delete[vec3,Position[vec3,xxx]];
matrixCoefs[x1_,x2_]:=Block[{equations=x1,coesTot=x2},
Transpose[Coefficient[equations,#]&/@coesTot]];

permut4=Permutations[{1,2,3,4}];
Length[permut4]
(* Estruturas Cinemáticas *)
kM=4;
(* kZk *)
FkZk[i_,j_,l_]:=Block[{} ,If[i<l,ToExpression[StringJoin
["k",ToString[i],".Z",ToString[j],
```

```

".k", ToString[l]]], ToExpression[StringJoin["k", ToString[l],
".Z", ToString[j], ".k", ToString[i]]]]]
Do[Do[FkZk[i, j, j] = 0; FkZk[j, j, i] = 0, {i, 1, kM}],
{j, 1, kM}];
Do[FkZk[i, kM, kM - 1] = Expand[-Sum[FkZk[i, kM, j],
{j, 1, kM - 2}]], {i, 1, kM - 1}];
Do[FkZk[kM - 1, kM, i] = Expand[-Sum[FkZk[j, kM, i],
{j, 1, kM - 2}]], {i, 1, kM - 1}];
FkZk[kM - 1, kM, kM - 1] = Expand[-Sum[FkZk[j, kM, kM - 1],
{j, 1, kM - 2}]];
Do[Do[FkZk[i, j, kM] = Expand[-Sum[FkZk[i, j, l],
{1, 1, kM - 1}]], {i, 1, kM}], {j, 1, kM}];
Do[Do[FkZk[kM, i, j] = Expand[-Sum[FkZk[l, i, j],
{1, 1, kM - 1}]], {i, 1, kM}], {j, 1, kM}];
(* wZk *)
FwZk[j_, l_] := ToExpression[StringJoin["w.Z",
ToString[j], ".k", ToString[l]]];
Do[FwZk[j, j] = 0, {j, 1, kM}];
FwZk[kM, kM - 1] = Expand[-Sum[FwZk[kM, j], {j, 1, kM - 2}]];
Do[FwZk[j, kM] = Expand[-Sum[FwZk[j, l], {1, 1, kM - 1}]],
{j, 1, kM}];
(* kZZk *)
FkZZk[i_, j_, o_, l_] := Block[{ }, If[j < o, ToExpression
[StringJoin["k", ToString[i], ".Z", ToString[j],
".Z", ToString[o], ".k", ToString[l]]], ToExpression
[StringJoin["k", ToString[l], ".Z", ToString[o],
".Z", ToString[j], ".k", ToString[i]]]]]
Do[Do[Do[FkZZk[i, l, j, j] = 0; FkZZk[j, j, l, i] = 0, {i, 1, kM}],
{j, 1, kM}], {l, 1, kM}];
Do[Do[FkZZk[i, l, kM, kM - 1] = Expand[-Sum[FkZZk[i, l, kM, j],
{j, 1, kM - 2}]], {i, 1, kM - 1}], {l, 1, kM - 1}];
Do[Do[FkZZk[kM - 1, kM, i, l] = Expand[-Sum[FkZZk[j, kM, i, l],
{j, 1, kM - 2}]], {i, 1, kM - 1}], {l, 1, kM - 1}];
Do[Do[Do[FkZZk[i, o, j, kM] = Expand[-Sum[FkZZk[i, o, j, l],
{1, 1, kM - 1}]], {i, 1, kM}], {j, 1, kM}], {o, 1, kM}];
Do[Do[Do[FkZZk[kM, i, o, j] = Expand[-Sum[FkZZk[l, i, o, j],
{1, 1, kM - 1}]], {i, 1, kM}], {j, 1, kM}], {o, 1, kM}];
(* wZZk *)
FwZZk[j_, m_, l_] := ToExpression[StringJoin["w.Z",
ToString[j], ".Z", ToString[m], ".k", ToString[l]]];

```

```

Do[Do[FwZZk[l,j,j]=0,{j,1,kM}},{l,1,kM}];
Do[FwZZk[l,kM,kM-1]=Expand[-Sum[FwZZk[l,kM,j],
{j,1,kM-2}]],{l,1,kM-1}];
Do[Do[FwZZk[o,j,kM]=Expand[-Sum[FwZZk[o,j,l],
{l,1,kM-1}]],{j,1,kM}},{o,1,kM}];
(* kZZZk *)
FkZZZk[i_,j_,o_,p_,l_]:=Block[{},If[j<p,ToExpression
[StringJoin["k",ToString[i],".Z",ToString[j],
".Z",ToString[o],".Z",ToString[p],".k",ToString[l]]],
ToExpression[StringJoin["k",ToString[l],
".Z",ToString[p],".Z",ToString[o],".Z",ToString[j],
".k",ToString[i]]]]];
Do[Do[Do[Do[FkZZZk[i,l,m,j,j]=0;FkZZZk[j,j,m,l,i]=0,{i,1,kM}],
{j,1,kM}},{l,1,kM}},{m,1,kM}];
Do[Do[Do[If[j!=1,FkZZZk[i,j,l,kM,kM-1]=
Expand[-Sum[FkZZZk[i,j,l,kM,o],
{o,1,kM-2}]]],{i,1,kM-1}},{j,1,kM-1}},{l,1,kM-1}];
Do[Do[Do[If[i!=1,FkZZZk[kM-1,kM,i,l,j]=
Expand[-Sum[FkZZZk[o,kM,i,l,j],
{o,1,kM-2}]]],{i,1,kM-1}},{j,1,kM-1}},{l,1,kM-1}];
Do[Do[Do[Do[FkZZZk[i,n,o,j,kM]=
Expand[-Sum[FkZZZk[i,n,o,j,l],{l,1,kM-1}]],
{i,1,kM}},{j,1,kM}},{n,1,kM}},{o,1,kM}];
Do[Do[Do[Do[FkZZZk[kM,i,n,o,j]=
Expand[-Sum[FkZZZk[l,i,n,o,j],{l,1,kM-1}]],
{i,1,kM}},{j,1,kM}},{n,1,kM}},{o,1,kM}];
(* wZZZk *)
FwZZZk[j_,o_,m_,l_]:=ToExpression[StringJoin["w.Z",ToString[j],
".Z",ToString[o],".Z",ToString[m],".k",ToString[l]]];
Do[Do[Do[FwZZZk[l,m,j,j]=0,{j,1,kM}},{l,1,kM}},{m,1,kM}];
Do[Do[If[j!=1,FwZZZk[j,l,kM,kM-1]=Expand[-Sum[FwZZZk[j,l,kM,o],
{o,1,kM-2}]]],{j,1,kM-1}},{l,1,kM-1}];
Do[Do[Do[FwZZZk[n,o,j,kM]=
Expand[-Sum[FwZZZk[n,o,j,l],{l,1,kM-1}]],
{j,1,kM}},{n,1,kM}},{o,1,kM}];
(* kZZZZk *)
FkZZZZk[i_,j_,o_,p_,q_,l_]:=
Block[{},If[j<q,ToExpression[StringJoin[
"k",ToString[i],".Z",ToString[j],
".Z",ToString[o],".Z",ToString[p],".Z",

```

```

ToString[q], ".k", ToString[l]]],
ToExpression[StringJoin["k", ToString[l], ".Z", ToString[q],
".Z", ToString[p], ".Z", ToString[o], ".Z",
ToString[j], ".k", ToString[i]]]]]
Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZk[i, l, m, o, j, j]=0;
FkZZZZk[j, j, o, m, l, i]=0, {i, 1, kM}],
{j, 1, kM}], {l, 1, kM}], {m, 1, kM}], {o, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[If[j!=1!=m, FkZZZZk[i, j, l, m, kM, kM-1]=
Expand[-Sum[FkZZZZk[i, j, l, m, kM, o], {o, 1, kM-2}]]], {i, 1, kM-1}],
{j, 1, kM-1}], {l, 1, kM-1}];, {m, 1, kM-1}];
Do[Do[Do[Do[If[i!=1!=m, FkZZZZk[kM-1, kM, i, l, m, j]=
Expand[-Sum[FkZZZZk[o, kM, i, l, m, j], {o, 1, kM-2}]]], {i, 1, kM-1}],
{j, 1, kM-1}], {l, 1, kM-1}], {m, 1, kM-1}];
Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZk[i, m, n, o, j, kM]=
Expand[-Sum[FkZZZZk[i, m, n, o, j, l], {l, 1, kM-1}]]], {i, 1, kM}], {j, 1, kM}],
{m, 1, kM}], {n, 1, kM}], {o, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZk[kM, i, m, n, o, j]=
Expand[-Sum[FkZZZZk[l, i, m, n, o, j],
{l, 1, kM-1}]]], {i, 1, kM}], {j, 1, kM}], {m, 1, kM}], {n, 1, kM}], {o, 1, kM}];
(* kZZZZZk *)
FkZZZZZk[i_, j_, o_, p_, q_, r_, l_]:=Block[{ },
If[j<r, ToExpression[StringJoin["k", ToString[i], ".Z", ToString[j],
".Z", ToString[o], ".Z", ToString[p], ".Z", ToString[q], ".Z", ToString[r],
".k", ToString[l]]], ToExpression[StringJoin["k", ToString[l],
".Z", ToString[r], ".Z", ToString[q], ".Z", ToString[p], ".Z", ToString[o],
".Z", ToString[j], ".k", ToString[i]]]]]
Do[Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZZk[i, l, m, o, p, j, j]=0;
FkZZZZZk[j, j, p, o, m, l, i]=0, {i, 1, kM}],
{j, 1, kM}], {l, 1, kM}], {m, 1, kM}], {o, 1, kM}], {p, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[If[j!=1!=m!=n, FkZZZZZk[i, j, l, m, n, kM, kM-1]=
Expand[-Sum[FkZZZZZk[i, j, l, m, n, kM, o], {o, 1, kM-2}]]],
{i, 1, kM}], {j, 1, kM}], {l, 1, kM}], {m, 1, kM}], {n, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[If[i!=1!=m!=n, FkZZZZZk[kM-1, kM, i, l, m, n, j]=
Expand[-Sum[FkZZZZZk[o, kM, i, l, m, n, j], {o, 1, kM-2}]]],
{i, 1, kM}], {j, 1, kM}], {l, 1, kM}], {m, 1, kM}], {n, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZZk[i, m, n, o, p, j, kM]=
Expand[-Sum[FkZZZZZk[i, m, n, o, p, j, l], {l, 1, kM-1}]]],
{i, 1, kM}], {j, 1, kM}],
{m, 1, kM}], {n, 1, kM}], {o, 1, kM}], {p, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZZk[kM, i, m, n, o, p, j]=

```

```

Expand[Sum[FkZZZZZk[l, i, m, n, o, p, j], {l, 1, kM-1}]],
{i, 1, kM}, {j, 1, kM},
{m, 1, kM}, {n, 1, kM}, {o, 1, kM}, {p, 1, kM}];
FkZZZZZk[2, 3, 2, 1, 4, 5, 1] - FkZZZZZk[1, 5, 4, 1, 2, 3, 2]
(* kZZZZZZk *)
FkZZZZZZk[i_, j_, o_, p_, q_, s_, r_, l_] := Block[{ },
If[j < r, ToExpression
[StringJoin["k", ToString[i], ".Z", ToString[j],
".Z", ToString[o],
".Z", ToString[p], ".Z", ToString[q], ".Z", ToString[s],
".Z", ToString[r],
".k", ToString[l]]], ToExpression[StringJoin["k", ToString[l],
".Z", ToString[r], ".Z", ToString[s], ".Z", ToString[q],
".Z", ToString[p],
".Z", ToString[o], ".Z", ToString[j], ".k", ToString[i]]]]]
Do[Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZZZk[i, l, m, o, p, q, j, j] = 0;
FkZZZZZZk[j, j, q, p, o, m, l, i] = 0, {i, 1, kM}, {j, 1, kM},
{l, 1, kM}, {m, 1, kM},
{o, 1, kM}, {p, 1, kM}, {q, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[Do[If[j != l != m != n != p,
FkZZZZZZk[i, j, l, m, n, p, kM, kM-1] =
Expand[Sum[FkZZZZZZk[i, j, l, m, n, p, kM, o], {o, 1, kM-2}]]],
{i, 1, kM}, {j, 1, kM}, {l, 1, kM}, {m, 1, kM}, {n, 1, kM}, {p, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[Do[If[i != l != m != n, FkZZZZZZk[kM-1, kM, i, l, m, n, p, j] =
Expand[Sum[FkZZZZZZk[o, kM, i, l, m, n, p, j], {o, 1, kM-2}]]],
{i, 1, kM}, {j, 1, kM}, {l, 1, kM}, {m, 1, kM}, {n, 1, kM}, {p, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZZZk[i, m, n, o, p, q, j, kM] =
Expand[Sum[FkZZZZZZk[i, m, n, o, p, q, j, l], {l, 1, kM-1}]],
{i, 1, kM}, {j, 1, kM},
{m, 1, kM}, {n, 1, kM}, {o, 1, kM}, {p, 1, kM}, {q, 1, kM}];
Do[Do[Do[Do[Do[Do[Do[FkZZZZZZk[kM, i, m, n, o, p, q, j] =
Expand[Sum[FkZZZZZZk[l, i, m, n, o, p, q, j], {l, 1, kM-1}]],
{i, 1, kM}, {j, 1, kM},
{m, 1, kM}, {n, 1, kM}, {o, 1, kM}, {p, 1, kM}, {q, 1, kM}];
FkZZZZZZk[2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 1] - FkZZZZZZk[1, 6, 5, 4, 1, 2, 3, 2]
(* TrZZ *)
FTrZZ[i_, j_] := Block[{ }, If[i < j, ToExpression[StringJoin[
"tr[Z", ToString[i], ".Z", ToString[j], ""]],
ToExpression[StringJoin["tr[Z", ToString[j], ".Z",
ToString[i], ""]]]] FTrZZ[3, 2]

```

```
(* TrZZZ *)
FTrZZZ[i_ , j_ , m_] := Block[{ lista , min , pos , lista1 }, lista = {i , j , m};
min = Min[ lista ]; pos = Position[ lista , min ][[1]][[1]];
lista1 = lista ; lista1 [[1]] = lista [[ pos ]]; Do[ pos2 = pos + ii - 1;
If[ pos + ii > 4, pos2 = pos + ii - 4]; lista1 [[ ii ]] = lista [[ pos2 ]], { ii , 2 , 3 }];
If[ lista1 [[2]] < lista1 [[3]] ,
ToExpression[ StringJoin[" tr [Z", ToString[
lista1 [[1]]], ".Z", ToString[ lista1 [[2]]],
".Z", ToString[ lista1 [[3]]], "]" ]], ToExpression[ StringJoin[" tr [Z",
ToString[ lista1 [[1]]], ".Z", ToString[ lista1 [[3]]],
".Z", ToString[ lista1 [[2]]], "]" ]]]]
FTrZZZ[5 , 4 , 2]
(* TrZZZZ *)
FTrZZZZ[i_ , j_ , m_ , n_] := Block[{ lista , min , pos , lista1 },
lista = {i , j , m , n};
min = Min[ lista ]; pos = Position[ lista , min ][[1]][[1]];
lista1 = lista ; lista1 [[1]] = lista [[ pos ]]; Do[ pos2 = pos + ii - 1;
If[ pos + ii > 5,
pos2 = pos + ii - 5]; lista1 [[ ii ]] = lista [[ pos2 ]], { ii , 2 , 4 }];
If[ lista1 [[2]] < lista1 [[4]] ,
ToExpression[ StringJoin[" tr [Z", ToString[ lista1 [[1]]],
".Z", ToString[ lista1 [[2]]],
".Z", ToString[ lista1 [[3]]], ".Z", ToString[ lista1 [[4]]], "]" ]],
ToExpression[ StringJoin[" tr [Z", ToString[ lista1 [[1]]],
".Z", ToString[ lista1 [[4]]], ".Z", ToString[ lista1 [[3]]], ".Z",
ToString[ lista1 [[2]]], "]" ]]]] FTrZZZZ[3 , 4 , 2 , 1]
(* TrZZZZZ *)
FTrZZZZZ[i_ , j_ , m_ , n_ , l_] := Block[{ lista , pos , lista1 , minimo },
lista = {i , j , m , n , l}; minimo = Min[ lista ];
pos = Position[ lista , minimo ][[1]][[1]];
lista1 = lista ; lista1 [[1]] = lista [[ pos ]]; Do[ pos2 = pos + ii - 1;
If[ pos + ii > 6, pos2 = pos + ii - 6]; lista1 [[ ii ]] = lista [[ pos2 ]], { ii , 2 , 5 }];
If[ lista1 [[2]] < lista1 [[5]] ,
ToExpression[ StringJoin[" tr [Z", ToString[ lista1 [[1]]],
".Z", ToString[ lista1 [[2]]],
".Z", ToString[ lista1 [[3]]], ".Z", ToString[ lista1 [[4]]],
".Z", ToString[ lista1 [[5]]], "]" ]],
ToExpression[ StringJoin[" tr [Z", ToString[ lista1 [[1]]],
".Z", ToString[ lista1 [[5]]], ".Z", ToString[ lista1 [[4]]],
".Z", ToString[ lista1 [[3]]], ".Z", ToString[ lista1 [[2]]], "]" ]]]]
```

```

FTrZZZZZ[5,4,6,2,3]
(* TrZZZZZZ *)
FTrZZZZZZ[i_,j_,m_,n_,l_,o_]:=Block[{lista,pos,lista1,minimo},
  lista={i,j,m,n,l,o};minimo=Min[lista];
  pos=Position[lista,minimo][[1]][[1]];
  lista1=lista;lista1[[1]]=lista[[pos]];Do[pos2=pos+ii-1;
  If[pos+ii>7,pos2=pos+ii-7];lista1[[ii]]=lista[[pos2]],{ii,2,6}];
  If[lista1[[2]]<lista1[[6]],ToExpression[StringJoin["tr[Z",
  ToString[lista1[[1]]],".Z",ToString[lista1[[2]]],
  ".Z",ToString[lista1[[3]]],".Z",ToString[lista1[[4]]],".Z",
  ToString[lista1[[5]]],".Z",ToString[lista1[[6]]],"]"]],
  ToExpression[StringJoin["tr[Z",ToString[lista1[[1]]],".Z",
  ToString[lista1[[6]]],".Z",ToString[lista1[[5]]],
  ".Z",ToString[lista1[[4]]],".Z",ToString[lista1[[3]]],".Z",
  ToString[lista1[[2]]],"]"]]]]
FTrZZZZZZ[5,4,1,6,2,3]
(* Estruturas possíveis na amplitude de 4 pontos
A.      Não fatorizável
1.      Tr[ZZZ]kZk

B.      Fatorizáveis
1.      Tr[ZZZZ]
2.      Tr[ZZ]Tr[ZZ]
3.      Tr[ZZ]kZZk
4.      Tr[ZZ]kZk kZk
5.      kZZZZk
6.      kZZZk kZk
7.      kZZk kZZk

C.      Estrutura ausentes pela restrição (kZk)^N e (kZZk) (kZk)^(N-2)
8.      kZZk kZk kZk
9.      kZk kZk kZk kZk *)
(* A1. kZkTr[ZZZ] *)
perm4={};Do[If[permut4[[i]][[2]]<permut4[[i]][[4]],
AppendTo[perm4,{permut4[[i]][[1]],permut4[[i]][[2]],
permut4[[i]][[3]],permut4[[i]][[4]]}],{i,1,Length[permut4]}];
Length[perm4]
moms=Tuples[{1,2,3},2];
Length[moms]
Clear[pos]

```

```

pos=ConstantArray[{0},Length[moms]*Length[perm4]];
l=0;Do[Do[If[moms[[i]][[1]]!=perm4[[j]][[1]]\[And]perm4[[j]][[1]]!=
moms[[i]][[2]],l=l+1;pos[[l]]={moms[[i]][[1]],
perm4[[j]][[1]],moms[[i]][[2]],perm4[[j]][[2]],perm4[[j]][[3]],
perm4[[j]][[4]]}],{j,1,Length[perm4]},{i,1,Length[moms]}];
pos=Union[pos];
If[pos[[1]]=={0},pos=Delete[pos,{1}]];
Length[pos]
list=FkZk[#[[1]],#[[2]],#[[3]]]FTrZZZ[#[[4]],#[[5]],#[[6]]]&/@pos;
Length[list]
list=Union[coesS[Expand[list]]];
Length[list]
B1=list;
(* B1. Tr[ZZZZ] *)
(* *** estrutura Tr[ZZZZ] ***** *)
termos={};Do[If[permut4[[i]][[1]]<permut4[[i]][[4]]
\[And]permut4[[i]][[2]]<permut4[[i]][[4]],
AppendTo[termos,FTrZZZ[permut4[[i]][[1]],permut4[[i]][[2]],
permut4[[i]][[3]],permut4[[i]][[4]]]],
{i,1,Length[permut4]}];
termos=Union[termos];
Length[termos]
A1=termos;
(* B2. Tr[ZZ]Tr[ZZ] *)
(* *** estrutura Tr[ZZ]Tr[ZZ] ***** *)
termos={};Do[If[permut4[[i]][[1]]<permut4[[i]][[2]]
\[And]permut4[[i]][[3]]<permut4[[i]][[4]],
AppendTo[termos,FTrZZ[permut4[[i]][[1]],permut4[[i]][[2]]
FTrZZ[permut4[[i]][[3]],permut4[[i]][[4]]]],
{i,1,Length[permut4]}];
termos=Union[termos];
Length[termos]
A2=termos;
(* B3. kZZkTr[ZZ] *)
perm4={};Do[If[permut4[[i]][[1]]<permut4[[i]][[2]]
\[And]permut4[[i]][[3]]<permut4[[i]][[4]],
AppendTo[perm4,{permut4[[i]][[1]],permut4[[i]][[2]],
permut4[[i]][[3]],permut4[[i]][[4]]}],
{i,1,Length[permut4]}];
Length[perm4]

```

```

moms=Tuples[{1,2,3},2];
Length[moms]
Clear[pos]
pos=ConstantArray[{0},Length[moms]*Length[perm4]];
l=0;Do[Do[If[moms[[i]][[1]]!=perm4[[j]][[1]]
\[And]perm4[[j]][[2]]!=moms[[i]][[2]],l=l+1;
pos[[l]]={moms[[i]][[1]],perm4[[j]][[1]],perm4[[j]][[2]],
moms[[i]][[2]],perm4[[j]][[3]],
perm4[[j]][[4]]},{j,1,Length[perm4]},{i,1,Length[moms]}}];
pos=Union[pos];
If[pos[[1]]=={0},pos>Delete[pos,{1}]];
Length[pos]
list=FkZZk[#[[1]],#[[2]],#[[3]],#[[4]]]FTrZZ[#[[5]],#[[6]]]&/@pos;
Length[list]
list=Union[coesS[Expand[list]]];
Length[list]
A3=list;
(* B4. kZkkZkTr[ZZ] *)
perm4={};Do[If[permut4[[i]][[1]]<permut4[[i]][[2]]
\[And]permut4[[i]][[3]]<permut4[[i]][[4]],
AppendTo[perm4,{permut4[[i]][[1]],permut4[[i]][[2]],
permut4[[i]][[3]],permut4[[i]][[4]]}],
{i,1,Length[permut4]}];
Length[perm4]
moms=Tuples[{1,2,3},4];
Length[moms]
Clear[pos]
pos=ConstantArray[{0},Length[moms]*Length[perm4]];
l=0;Do[Do[If[moms[[i]][[1]]!=perm4[[j]][[1]]\[And]perm4[[j]][[1]]!=
moms[[i]][[2]]\[And]moms[[i]][[3]]!=
perm4[[j]][[2]]\[And]perm4[[j]][[2]]!=moms[[i]][[4]],l=l+1;
pos[[l]]={moms[[i]][[1]],perm4[[j]][[1]],
moms[[i]][[2]],moms[[i]][[3]],perm4[[j]][[2]],moms[[i]][[4]],
perm4[[j]][[3]],perm4[[j]][[4]]},
{i,1,Length[moms]},{j,1,Length[perm4]}}];
pos=Union[pos];
If[pos[[1]]=={0},pos>Delete[pos,{1}]];
Length[pos]
pos[[1]]
list=FkZk[#[[1]],#[[2]],#[[3]]]FkZk[#[[4]],#[[5]],#[[6]]]

```

```

FTrZZ[#[[7]],#[[8]]]&/@pos;
Length[list]
list=Union[coesS[Expand[list]]];
Length[list]
A4=list;
(* B5. kZZZZk *)
perm4={};Do[If[permut4[[i]][[1]]<permut4[[i]][[4]],
AppendTo[perm4,{permut4[[i]][[1]],
permut4[[i]][[2]],permut4[[i]][[3]],permut4[[i]][[4]]}],
{i,1,Length[permut4]}];
Length[perm4]
moms=Tuples[{1,2,3},2];
Length[moms]
Clear[pos]
pos=ConstantArray[{0},Length[moms]*Length[perm4]];
l=0;Do[Do[If[moms[[i]][[1]]!=perm4[[j]][[1]]
\[And]perm4[[j]][[4]]!=moms[[i]][[2]],l=l+1;
pos[[l]]=moms[[i]][[1]],perm4[[j]][[1]],perm4[[j]][[2]],
perm4[[j]][[3]],perm4[[j]][[4]],
moms[[i]][[2]]},{i,1,Length[moms]}},{j,1,Length[perm4]}];
pos=Union[pos];
If[pos[[1]]=={0},pos>Delete[pos,{1}]];
Length[pos]
pos[[1]]
list=FkZZZZk[#[[1]],#[[2]],#[[3]],#[[4]],#[[5]],#[[6]]]&/@pos;
Length[list]
list=Union[coesS[Expand[list]]];
Length[list]
A5=list;
(* B6. kZkkZZZk *)
perm4={};Do[If[permut4[[i]][[2]]<permut4[[i]][[4]],
AppendTo[perm4,{permut4[[i]][[1]],
permut4[[i]][[2]],permut4[[i]][[3]],permut4[[i]][[4]]}],
{i,1,Length[permut4]}];
Length[perm4]
moms=Tuples[{1,2,3},4];
Length[moms]
Clear[pos]
pos=ConstantArray[{0},Length[moms]*Length[perm4]];
l=0;Do[Do[If[moms[[i]][[1]]!=perm4[[j]][[1]]\[And]perm4[[j]][[1]]!=

```

```

moms[[i]][[2]][And]moms[[i]][[3]]!=
perm4[[j]][[2]][And]perm4[[j]][[4]]!=moms[[i]][[4]],l=1+1;pos[[1]]=
{moms[[i]][[1]],perm4[[j]][[1]],
moms[[i]][[2]],moms[[i]][[3]],perm4[[j]][[2]],perm4[[j]][[3]],
perm4[[j]][[4]],moms[[i]][[4]]},
{i,1,Length[moms]}},{j,1,Length[perm4]};
pos=Union[pos];
If[pos[[1]]=={0},pos>Delete[pos,{1}]];
Length[pos]
pos[[1]]
list=FkZk[#[[1]],#[[2]],#[[3]]]
FkZZZk[#[[4]],#[[5]],#[[6]],#[[7]],#[[8]]]&/@pos;
Length[list]
list=Union[coesS[Expand[list]]];
Length[list]
A6=list;
(* B7. kZZkkZZk *)
perm4={};Do[If[permut4[[i]][[1]]<permut4[[i]][[2]]\[And]
permut4[[i]][[3]]<permut4[[i]][[4]]\[And]permut4[[i]][[1]]
<permut4[[i]][[3]],AppendTo[perm4,{permut4[[i]][[1]],
permut4[[i]][[2]],permut4[[i]][[3]],permut4[[i]][[4]]}],
{i,1,Length[permut4]};
Length[perm4]
moms=Tuples[{1,2,3},4];
Length[moms]
Clear[pos]
pos=ConstantArray[{0},Length[moms]*Length[perm4]];
l=0;Do[Do[If[moms[[i]][[1]]!=perm4[[j]][[1]]\[And]perm4[[j]][[2]]
!=moms[[i]][[2]]\[And]moms[[i]][[3]]!=perm4[[j]][[3]]
\[And]perm4[[j]][[4]]!=moms[[i]][[4]],l=1+1;pos[[1]]={moms[[i]][[1]],
perm4[[j]][[1]],perm4[[j]][[2]],moms[[i]][[2]],
moms[[i]][[3]],perm4[[j]][[3]],perm4[[j]][[4]],moms[[i]][[4]]},
{i,1,Length[moms]}},{j,1,Length[perm4]};
pos=Union[pos];
If[pos[[1]]=={0},pos>Delete[pos,{1}]];
Length[pos]
pos[[1]]
list=FkZZk[#[[1]],#[[2]],#[[3]],#[[4]]]
FkZZk[#[[5]],#[[6]],#[[7]],#[[8]]]&/@pos;
Length[list]

```

```

list=Union[coesS[Expand[list]]];
Length[list]
A7=list;
(* Unindo Estruturas *)
Strucs=Union[A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,B1];
Length[Strucs]
(* Transformações de gauge *)
(* Funções iniciais *)
base={s13->s12-s14,s23->s14,s24->s12-s14,s34->s12};
sep[x_]:=ToExpression[StringPartition[ToString[x],1][[2]]];
mand[kx_,ky_]:=Block[{x,y,m},x=sep[kx];y=sep[ky];If[x<y,
m=ToExpression[StringJoin["s",ToString[x],ToString[y]]],
m=ToExpression[StringJoin["s",ToString[y],ToString[x]]]];
If[x==y,m=0];m/.base]
mandw[kx_]:=Block[{x},x=sep[kx];If[x==kM,m=Sum[ToExpression
[StringJoin["w.k",ToString[n]]],{n,1,kM-1}],m=w.kx];m]
(* Introdução de coeficientes *)
listCoe[x_,n_]:=Block[{Ax=x,name=n,coef},
coef=ConstantArray[0,Length[Ax]];
Do[coef[[i]]=ToExpression[StringJoin["A",ToString[name],
"n",ToString[i]]],{i,1,Length[Ax]}];
coef]
(* tr(Z1.Z2.Z3.Z4) *)
C1=listCoe[A1,1];
GZZA1[ZZ_,kk_]:=Expand[A1.C1/.{tr[Zx_.Zy_.Zz_.ZZ]:>
FwZZZk[sep[Zx],sep[Zy],sep[Zz],sep[kk]]+
FwZZZk[sep[Zz],sep[Zy],sep[Zx],sep[kk]],tr[Zx_.Zy_.ZZ.Zz_]:>
FwZZZk[sep[Zz],sep[Zx],sep[Zy],sep[kk]]+
FwZZZk[sep[Zy],sep[Zx],sep[Zz],sep[kk]],tr[Zx_.ZZ.Zy_.Zz_]:>
FwZZZk[sep[Zy],sep[Zz],sep[Zx],sep[kk]]+
FwZZZk[sep[Zx],sep[Zz],sep[Zy],sep[kk]],tr[ZZ.Zx_.Zy_.Zz_]:>
FwZZZk[sep[Zx],sep[Zy],sep[Zz],sep[kk]]+
FwZZZk[sep[Zz],sep[Zy],sep[Zx],sep[kk]]}];
Length[GZZA1[Z3,k3]]
(* tr(Z1.Z4) tr(Z2.Z3) *)
C2=listCoe[A2,2];
GZZA2[ZZ_,kk_]:=Expand[A2.C2/.{tr[Zx_.ZZ]:>2
FwZk[sep[Zx],sep[kk]],
tr[ZZ.Zy_]:>2 FwZk[sep[Zy],sep[kk]]}];
Length[GZZA2[Z3,k3]]

```

```
( * k1.Z3.Z4.k1 tr (Z1.Z2) *)
C3=listCoe [A3,3];
GZZA3[ZZ_,kk_]:=Expand[A3.C3/.{tr [ZZ . Zx_]:>2
FwZk[sep [Zx],sep [kk]],
tr [Zx_ . ZZ ]:>2FkZk[sep [Zx],sep [kk]],
x_ .ZZ. Zy_ . y_ :>mand[x,kk] FkZk[sep [Zy],sep [y]] +
mandw[x] FkZk[sep [kk]],
sep [Zy],sep [y]],x_ . Zy_ . ZZ. y_ :>
mand[y,kk]FkZk[sep [Zy],sep [x]] + mandw[y]
FkZk[sep [kk],sep [Zy],sep [x]]}];
Length[GZZA3[Z3 ,k3]]
( * k1.Z3.k1 k1.Z4.k1 tr (Z1.Z2) *)
C4=listCoe [A4,4];
GZZA4[ZZ_,kk_]:=Expand[A4.C4/.{tr [ZZ . Zx_]:>2
FkZk[sep [Zx],sep [kk]],tr [Zx_ .ZZ]:>2
FkZk[sep [Zx],sep [kk]],x_ .ZZ. y_ :>
mand[x,kk]mandw[y] +mandw[x] mand[kk,y]}}];
Length[GZZA4[Z3 ,k3]]
( * k2.Z1.Z2.Z3.Z4.k1 *)
C5=listCoe [A5,5];
GZZA5[ZZ_,kk_]:=Expand[A5.C5/.{x_ . ZZ . Zx_ . Zy_ . Zz_ .
y_ :>mand[x,kk]
FkZZZk[sep [Zx],sep [Zy],sep [Zz],sep [y]]+ mandw[x]
FkZZZk[sep [kk],sep [Zx],sep [Zy],sep [Zz],sep [y]],
x_ . Zx_ .ZZ. Zy_ . Zz_ . y_ :>FkZk[sep [Zx],sep [x]]
FkZZk[sep [kk],sep [Zy],sep [Zz],sep [y]] +
FkZZk[sep [Zy],sep [Zz],sep [y]]
FkZk[sep [kk],sep [Zx],sep [x]],x_ .Zx_ .Zy_ .ZZ. Zz_ .y_ :>
FkZZk[sep [Zy],sep [Zx],sep [x]]
FkZk[sep [kk],sep [Zz],sep [y]] +
FkZk[sep [Zz],sep [y]] FkZZk[sep [kk],sep [Zy],sep [Zx],sep [x]],
x_ . Zx_ . Zy_ . Zz_ .ZZ. y_ :>FkZZZk[sep [Zz],sep [Zy],sep [Zx],sep [x]]
mand[y,kk] + mandw[y]
FkZZZk[sep [kk],sep [Zz],sep [Zy],sep [Zx],sep [x]]}];
Length[GZZA5[Z3 ,k3]]
( * k1.Z4.k1 k1.Z2.Z1.Z3.k1 *)
C6=listCoe [A6,6];
GZZ6[ZZ_,kk_]:=Expand[A6.C6/.{x_ .ZZ. Zx_ . Zy_ . y_ :>
mand[x,kk] FkZZk[sep [Zx],sep [Zy],sep [y]]+
mandw[x] FkZZk[sep [kk],sep [Zx],sep [Zy],sep [y]],x_ .Zx_ .ZZ. Zy_ .y_ :>
```

```

FkZk[sep[Zx], sep[x]]
FkZk[sep[kk], sep[Zy], sep[y]] + FkZk[sep[Zy], sep[y]]
FkZk[sep[kk], sep[Zx], sep[x]],
x_ . Zx_ . Zy_ . ZZ. y_ :>FkZZk[sep[Zy], sep[Zx], sep[x]]
mand[y, kk] + mandw[y] FkZZk[sep[kk], sep[Zy], sep[Zx], sep[x]]];
GZZA6[ZZ_, kk_] := Expand[GZZ6[ZZ, kk] /. {x_ . ZZ. y_ :>mand[x, kk] mandw[y] + mandw[x]
mand[kk, y]}];
Length[GZZA6[Z3_, k3]]
(* k1 . Z3 . Z4 . k1 k2 . Z1 . Z2 . k1 *)
C7=listCoe[A7, 7];
GZZA7[ZZ_, kk_] := Expand[A7.C7 /. {x_ . ZZ. Zy_ . y_ :>mand[x, kk]
FkZk[sep[Zy], sep[y]] +
mandw[x] FkZk[sep[kk], sep[Zy], sep[y]], x_ . Zy_ . ZZ. y_ :>mand[y, kk]
FkZk[sep[Zy], sep[x]] +
mandw[y] FkZk[sep[kk], sep[Zy], sep[x]]}];
Length[GZZA7[Z3_, k3]]
(* Tr[Z2 . Z3 . Z4] k2 . Z1 . k2 *)
C8=listCoe[B1, 8];
GZZ8[ZZ_, kk_] := Expand[B1.C8 /. {tr[Zx_ . Zy_ . ZZ]:>
FkZZk[sep[Zx], sep[Zy], sep[kk]]+
FkZZk[sep[Zy], sep[Zx], sep[kk]], tr[Zy_ . ZZ. Zz_]:>
FkZZk[sep[Zz], sep[Zy], sep[kk]]+
FkZZk[sep[Zy], sep[Zz], sep[kk]], tr[ZZ . Zy_ . Zz_]:>
FkZZk[sep[Zy], sep[Zz], sep[kk]]+
FkZZk[sep[Zz], sep[Zy], sep[kk]]}];
GZZA8[ZZ_, kk_] := Expand[GZZ8[ZZ, kk] /. {x_ . ZZ. y_ :>mand[x, kk]
mandw[y] + mandw[x] mand[kk, y]}];
Length[GZZA8[Z3_, k3]]
(* Imposição de Invariância de Calibre *)
name={};Cs={};Do[AppendTo[name, StringJoin["GZZA", ToString[i]]];
AppendTo[Ces, ToExpression[StringJoin["C", ToString[i]]], {i, 1, 8}];
coefs=Catenate[Ces];
(* Variação de Gauge Z1 *)
param="[Z1, k1]";
strucsF={};expres=0;Do[expr=ToExpression[StringJoin[name[[i]], param]];
expres=expres+expr;
Csto1=#->1&/@Cs[[i]];strucs=
Union[expr /. Plus->List /. Csto1 /. {s12->1, s14->1}];
Do[If[NumberQ[strucs[[j]]][[1]],
strucs[[j]]=strucs[[j]]/strucs[[j]][[1]],

```

```
{j,1,Length[strucs]}}];strucsF=Union[strucsF,strucs],{i,1,8}];
Eqs1=Union[Coefficient[expres,strucsF]];
(* Variação de Gauge Z2 *)
param="[Z2,k2]";
strucsF={};expres=0;Do[expr=ToExpression[
StringJoin[name[[i]],param]];
expres=expres+expr;Csto1=#->1&/@Cs[[i]];
strucs=Union[expr/.Plus->List/.Csto1/.{s12->1,s14->1}];
Do[If[NumberQ[strucs[[j]][[1]]],strucs[[j]]=strucs[[j]]/
strucs[[j]][[1]],{j,1,Length[strucs]}}];
strucsF=Union[strucsF,strucs],{i,1,8}];
Eqs2=Union[Coefficient[expres,strucsF]];
(* Variação de Gauge Z3 *)
param="[Z3,k3]";
strucsF={};expres=0;Do[expr=ToExpression[StringJoin[
name[[i]],param]];expres=expres+expr;
Csto1=#->1&/@Cs[[i]];
strucs=Union[expr/.Plus->List/.Csto1/.{s12->1,s14->1}];
Do[If[NumberQ[strucs[[j]][[1]]],strucs[[j]]=
strucs[[j]]/strucs[[j]][[1]],
{j,1,Length[strucs]}}];
strucsF=Union[strucsF,strucs],{i,1,8}];
Eqs3=Union[Coefficient[expres,strucsF]];
(* Variação de Gauge Z4 *)
param="[Z4,k4]";
strucsF={};expres=0;Do[expr=ToExpression[
StringJoin[name[[i]],param]];expres=expres+expr;
Csto1=#->1&/@Cs[[i]];
strucs=Union[expr/.Plus->List/.Csto1/.{s12->1,s14->1}];
Do[If[NumberQ[strucs[[j]][[1]]],strucs[[j]]=
strucs[[j]]/strucs[[j]][[1]],
{j,1,Length[strucs]}}];
strucsF=Union[strucsF,strucs],{i,1,8}];
Eqs4=Union[Coefficient[expres,strucsF]];
(* Resolvendo Sistema *)
Eqs=Union[Eqs1,Eqs2,Eqs3,Eqs4];
solution=Solve[Eqs==0,coefs];
(* mudando para a notação da tese *)
substCoes={};Do[AppendTo[substCoes,C1[[i]]->
Subsuperscript[w,333+i,(4)],
```

```
{i, 1, Length[C1]]]
Do[AppendTo[substCoes, C2[[i]] -> Subsuperscript[1, 330+i, (4)]],
{i, 1, Length[C2]}];
Do[AppendTo[substCoes, C3[[i]] -> Subsuperscript[1, 258+i, (4)]],
{i, 1, Length[C3]}];
Do[AppendTo[substCoes, C4[[i]] -> Subsuperscript[1, 0+i, (4)]],
{i, 1, Length[C4]}];
Do[AppendTo[substCoes, C5[[i]] -> Subsuperscript[1, 282+i, (4)]],
{i, 1, Length[C5]}];
Do[AppendTo[substCoes, C6[[i]] -> Subsuperscript[1, 54+i, (4)]],
{i, 1, Length[C6]}];
Do[AppendTo[substCoes, C7[[i]] -> Subsuperscript[1, 198+i, (4)]],
{i, 1, Length[C7]}];
Do[AppendTo[substCoes, C8[[i]] -> Subsuperscript[1, 246+i, (4)]],
{i, 1, Length[C8]}];
(* dimensões associadas *)
Mat=matrixCoefs[Eqs, coefs];
Length[Mat]
Length[Mat[[1]]]
MatrixRank[Mat]
solution /. substCoes
```



Detalhes do Cálculo Cinemático para os casos N=4 e N=5

B.1 Caso $N = 4$

i) Determinação do residuo no canal α_{12}

Aqui será utilizada a relação de unirariedade

$$\mathcal{M}_4 \Big|_{\alpha_{12} \rightarrow 0} \sim \frac{\mathcal{M}_3^{\mu\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) \mathcal{M}_{3\mu\nu}(-k; Z_3, k_3; Z_4, k_4)}{2 \alpha_{12}}, \quad (\text{B.1})$$

onde $k^\mu = -k_1^\mu - k_2^\mu = k_3^\mu + k_4^\mu$ e onde

$$\mathcal{M}_3^{\mu\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) = \frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}} \mathcal{M}_3(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z, k), \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{M}_{3\mu\nu}(-k; Z_3, k_3; Z_4, k_4) = \frac{\partial}{\partial Z^{\mu\nu}} \mathcal{M}_3(Z, -k; Z_3, k_3; Z_4, k_4). \quad (\text{B.3})$$

A expressão de $\mathcal{M}_3(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3)$ é dada em eq.(3.36). Assim, na eq.(B.1) encontra-se

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4 \Big|_{\alpha_{12} \rightarrow 0} \sim & \frac{1}{2 \alpha_{12}} \left[\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) k_1^\mu k_1^\nu + (k_2 \cdot Z_1 \cdot k_2) Z_2^{\mu\nu} + (k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1) Z_1^{\mu\nu} + \right. \\ & 2 (k_2 \cdot Z_1 \cdot Z_2)^{(\mu} k_1^{\nu)} - 2 (k_1 \cdot Z_2)^{(\mu} (k_1 \cdot Z_2)^{\nu)} - 2 k_1^{(\mu} (k_1 \cdot Z_2 \cdot Z_1)^{\nu)} \left. \right] \times \\ & \left[\text{Tr}(Z_3 \cdot Z_4) k_{3\mu} k_{3\nu} + (k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4) Z_{4\mu\nu} + (k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) Z_{3\mu\nu} + \right. \\ & 2 (k_4 \cdot Z_3 \cdot Z_4)_{(\mu} k_{3\nu)} - 2 (k_3 \cdot Z_4)_{(\mu} (k_3 \cdot Z_4)_{\nu)} - 2 k_{3(\mu} (k_3 \cdot Z_4 \cdot Z_3)_{\nu)} \left. \right] \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

Expandindo o produto de tensores e mantendo somente os termos $\text{Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^2$ em

(B.4), chega-se em

$$\mathcal{M}_4 \Big|_{\alpha_{12} \rightarrow 0}^{Tr(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^2} \sim \frac{1}{2 \alpha_{12}} \left[\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) \left\{ (k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) + (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) - \right. \right. \\ \left. \left. 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3) \right\} + \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_3) \left\{ (k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) \right\} + \right. \\ \left. \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_4) \left\{ (k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4) \right\} + \right. \\ \left. \text{Tr}(Z_2 \cdot Z_3) \left\{ (k_2 \cdot Z_1 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) \right\} + \right. \\ \left. \text{Tr}(Z_2 \cdot Z_4) \left\{ (k_2 \cdot Z_1 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4) \right\} + \right. \\ \left. \text{Tr}(Z_3 \cdot Z_4) \left\{ (k_2 \cdot Z_1 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_2 \cdot k_3) + (k_3 \cdot Z_1 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1) - \right. \right. \\ \left. \left. 2(k_2 \cdot Z_1 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_2 \cdot k_3) \right\} \right] . \quad (\text{B.5})$$

Então, selecionando somente os termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ finalmente encontra-se

$$\mathcal{M}_4 \Big|_{\alpha_{12} \rightarrow 0}^{Tr(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2} \sim \frac{1}{2 \alpha_{12}} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) \left\{ (k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) + (k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) - \right. \\ \left. 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3) \right\} . \quad (\text{B.6})$$

Escrevendo os termos $(k \cdot Z \cdot k)$ na base especificada na seção 3.2 (see eq.(3.15)), e eliminando apropriadamente os momenta em (B.6) finalmente chega-se em

$$\mathcal{M}_4 \Big|_{\alpha_{12} \rightarrow 0}^{Tr(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2} \sim \frac{1}{2 \alpha_{12}} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) \left\{ (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) + (k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) - \right. \\ \left. 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2) \right\} . \quad (\text{B.7})$$

ii) Determinação da lista completa de termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ em $\mathcal{M}_4$:

Inicia-se determinando o residuo de $\mathcal{M}_4$ nos canais α_{13} e α_{14} . A vantagem de determinar primeiramente os termos $\text{Tr}(Z \cdot Z)(k \cdot Z \cdot k)^2$ que vão com o polo α_{12} em (B.5), pois para determinar os outros termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ basta utilizar a simetria bosônica de $\mathcal{M}_4$ ou seja, basta fazer as trocas dos índices $2 \leftrightarrow 3$ e $2 \leftrightarrow 4$, respectivamente. Após isso, basta selecionar somente os termos com $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ para se chegar em

$$\mathcal{M}_4 \Big|_{\alpha_{13} \rightarrow 0}^{Tr(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2} \sim \frac{\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)}{2 \alpha_{13}} , \quad (\text{B.8})$$

$$\mathcal{M}_4 \Big|_{\alpha_{14} \rightarrow 0}^{Tr(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2} \sim \frac{\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)}{2 \alpha_{14}} . \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, coletando as expressões em (B.7), (B.8) e (B.9) para encontrar a lista completa de termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^2$ em $\mathcal{M}_4$, dada na eq. (4.8) do corpo do texto principal.

B.2 Caso $N = 5$

Cálculos Preliminares para se chegar à expressão dos termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$ de $\mathcal{M}_5$

Seguindo o mesmo raciocínio do caso $N = 4$ case, primeiro deve-se demandar unitariedade em polos específicos de $\mathcal{M}_5$ e depois, exigindo a simetria bosônica de $\mathcal{M}_5$ e intercambiando os índices das pernas apropriadamente, serão encontrados os termos restantes contendo $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$.

i) Determinação do resíduo of the α_{12} and the α_{45} poles:

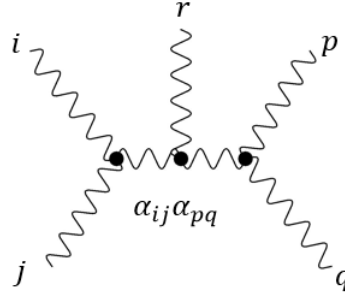


Figura B.1: Polos de segunda ordem em diagramas de 5 grávitons

Usando a relação de unitariedade para $\alpha_{12} \rightarrow 0$ e para $\alpha_{45} \rightarrow 0$ obtém-se

$$\mathcal{M}_5 \Big|_{\substack{\alpha_{12} \rightarrow 0 \\ \alpha_{45} \rightarrow 0}} \sim \frac{\mathcal{M}_3^{\mu\nu}(1; 2; k) \mathcal{M}_{3\mu\nu}^{\rho\sigma}(-k; 3; k') \mathcal{M}_{3\rho\sigma}(-k'; 4; 5)}{(2\alpha_{12}) (2\alpha_{45})}, \quad (\text{B.10})$$

onde $k^\mu = -k_1^\mu - k_2^\mu = k_3^\mu + k_4^\mu + k_5^\mu$ e $k'^\mu = k_4^\mu + k_5^\mu = -k_1^\mu - k_2^\mu - k_3^\mu$.

Em (B.10) está se denotando

$$\mathcal{M}_3^{\mu\nu}(1; 2; k) = \frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}} \mathcal{M}_3(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z, k), \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{M}_{3\mu\nu}^{\rho\sigma}(-k; 3; k') = \frac{\partial^2}{\partial Z'_{\rho\sigma} \partial Z^{\mu\nu}} \mathcal{M}_3(Z, -k; Z_3, k_3; Z', k'), \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{M}_{3\rho\sigma}(-k'; 4; 5) = \frac{\partial}{\partial Z'^{\rho\sigma}} \mathcal{M}_3(Z', -k'; Z_4, k_4; Z_5, k_5). \quad (\text{B.13})$$

Usando a expressão conhecida para $\mathcal{M}_3$ (see eq.(3.36)) encontra-se

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^{\mu\nu}(1; 2; k) = & \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) k_1^\mu k_1^\nu + (k_2 \cdot Z_1 \cdot k_2) Z_2^{\mu\nu} + (k_1 \cdot Z_2 \cdot k_1) Z_1^{\mu\nu} + \\ & 2 (k_2 \cdot Z_1 \cdot Z_2)^{(\mu} k_1^{\nu)} - 2 (k_1 \cdot Z_2)^{(\mu} (k_2 \cdot Z_1)^{\nu)} - 2 k_1^{(\mu} (k_1 \cdot Z_2 \cdot Z_1)^{\nu)}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{3\mu\nu}{}^{\rho\sigma}(-k; 3; k') &= \delta_{\mu}^{(\rho} \delta_{\nu}^{\sigma)} \{ (k_4 + k_5) \cdot Z_3 \cdot (k_4 + k_5) \} + Z_{3\mu\nu} (k_3 + k_4 + k_5)^\rho (k_3 + k_4 + k_5)^\sigma + \\
&Z_3^{\rho\sigma} (k_4 + k_5)_\mu (k_4 + k_5)_\nu - (k_3 + k_4 + k_5)_{(\rho} \delta_{\mu}^{\sigma)} \{ (k_4 + k_5) \cdot Z_3 \}_{\nu} - \\
&(k_3 + k_4 + k_5)_{(\rho} \delta_{\nu}^{\sigma)} \{ (k_4 + k_5) \cdot Z_3 \}_{\mu} + (k_4 + k_5)_\mu (k_3 + k_4 + k_5)_{(\rho} Z_3^{\sigma)}_{\nu} + \\
&(k_4 + k_5)_\nu (k_3 + k_4 + k_5)_{(\rho} Z_3^{\sigma)}_{\mu} - \{ (k_4 + k_5) \cdot Z_3 \}^{(\rho} \delta_{\mu}^{\sigma)} (k_4 + k_5)_{\nu} - \\
&\{ (k_4 + k_5) \cdot Z_3 \}^{(\rho} \delta_{\nu}^{\sigma)} (k_4 + k_5)_{\mu} , \tag{B.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{3\rho\sigma}(-k'; 4; 5) &= \text{Tr}(Z_4 \cdot Z_5) k_{4\rho} k_{4\sigma} + (k_5 \cdot Z_4 \cdot k_5) Z_{5\rho\sigma} + (k_4 \cdot Z_5 \cdot k_4) Z_{4\rho\sigma} + \\
&2 (k_5 \cdot Z_4 \cdot Z_5)_{(\rho} k_{4\sigma)} - 2 (k_4 \cdot Z_5)_{(\rho} (k_5 \cdot Z_4)_{\sigma)} - 2 k_{4(\rho} (k_4 \cdot Z_5 \cdot Z_4)_{\sigma)} , \tag{B.16}
\end{aligned}$$

onde foi adotada a convenção

$$A^{(\mu} B^{\nu)} = \frac{1}{2} (A^\mu B^\nu + A^\nu B^\mu) . \tag{B.17}$$

para a smetrização $(\mu\nu)$ sobre os índices de espaço-tempo. Com essas expreções pode-se determinar o resíduo do polo duplo $\alpha_{12}\alpha_{45}$

ii) Determinação dos termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$ em $\mathcal{M}_5$:

No resíduo o interesse está somente nos termos do tipo $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$ os quais tem uma expressão da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_5 \Bigg|_{\substack{\alpha_{12} \rightarrow 0 \\ \alpha_{45} \rightarrow 0}}^{Tr(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3} \sim \frac{-i}{\alpha_{12}\alpha_{45}} \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) \left\{ (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)((k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) + (34 \text{ termos}) \right\} . \tag{B.18}$$

A expressão completa é apresentada na seção B.2.

Explicit expression of the $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$ terms of $\mathcal{M}_5$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_5 \Big|_{\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3} &= \text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2) \times \\
&\left(\frac{(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)((k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 2(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + (k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3))}{\alpha_{14}\alpha_{23}} + \right. \\
&\frac{(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)((k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) + 2(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) + (k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3))}{\alpha_{15}\alpha_{23}} + \\
&\frac{(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)((k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1) + 2(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) + (k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3))}{\alpha_{13}\alpha_{24}} + \\
&\frac{(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)((k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) + 2(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4) + (k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4))}{\alpha_{15}\alpha_{24}} + \\
&\frac{(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)((k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1) + 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3) + (k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3))}{\alpha_{13}\alpha_{25}} + \\
&\left. \frac{(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)((k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4) + (k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4))}{\alpha_{14}\alpha_{25}} + \right. \\
&\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} (2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) - \\
&2(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - \\
&2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) + (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) + \\
&(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) - 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4) + \\
&(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4) + (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4)) - \\
&\frac{(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(2(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) - (k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) - (k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4))}{\alpha_{15}\alpha_{34}} \\
&\left. \frac{(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)(2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3) - (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) - (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4))}{\alpha_{25}\alpha_{34}} \right) \\
&\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{35}} (2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 4(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) + \\
&4(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
&2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) + \\
&4(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4) + 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4) - \\
&(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - \\
&2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - \\
&2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - \\
&(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - \\
& 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) - 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) - \\
& 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3) - \\
& (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3) - (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4) - (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4) - \\
& (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4)) + \\
& \frac{1}{\alpha_{14}\alpha_{35}}(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)((k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) + (k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) + \\
& 2(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& 2(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + 2(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& (k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3) + (k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{24}\alpha_{35}}(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)((k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_4)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_4) + \\
& (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3) + (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_4 \cdot Z_3 \cdot k_4)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}}(2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 4(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2) - \\
& (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - \\
& (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - \\
& (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) - \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) - 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) - \\
& (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) - (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3) - (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3) - \\
& (k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{13}\alpha_{45}}(k_1 \cdot Z_3 \cdot k_1)(2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) - (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - \\
& 2(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) - \\
& (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) + 2(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) - \\
& (k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) - (k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}}(k_2 \cdot Z_3 \cdot k_2)(2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) + 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_2) + \\
& 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_2)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) + 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_3)(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_3) - \\
& (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_4 \cdot k_3) - \\
& (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_2) - 2(k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_2 \cdot Z_5 \cdot k_3) - \\
& (k_1 \cdot Z_5 \cdot k_1)(k_3 \cdot Z_4 \cdot k_3) - (k_1 \cdot Z_4 \cdot k_1)(k_3 \cdot Z_5 \cdot k_3)) .
\end{aligned}$$

(B.19)

iii) Determinação dos termos $\text{Tr}(Z_1 \cdot Z_2)(k \cdot Z \cdot k)^3$ em $A\bar{A}$:

A lista completa de termos $(\zeta \cdot \zeta)(\zeta \cdot k)^3$ em $A_{\text{YM}}(1, 2, 3, 4, 5)$, obtidos da equação.(D.7)

da ref.[21], é a seguinte:

$$\begin{aligned}
& A_{YM}(1, 2, 3, 4, 5) \Big|_{(\zeta \cdot \zeta)^1 (\zeta \cdot k)^3} = \\
& = 8 \left[(\zeta_2 \cdot \zeta_3) \left\{ - \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \right) (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_1)(\zeta_5 \cdot k_3) - \right. \right. \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{15}} \right) (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_3) + \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{34}\alpha_{15}} + \frac{1}{\alpha_{45}\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{23}} \right) (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_3)(\zeta_5 \cdot k_1) + \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{34}\alpha_{15}} + \frac{1}{\alpha_{45}\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{23}} \right) (\zeta_1 \cdot k_2)(\zeta_4 \cdot k_3)(\zeta_5 \cdot k_2) + \\
& \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_1)(\zeta_5 \cdot k_2) - \left(\frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{15}} \right) (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_1) - \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{15}} \right) (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_3) + \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{34}\alpha_{15}} + \frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{23}} \right) (\zeta_1 \cdot k_3)(\zeta_4 \cdot k_3)(\zeta_5 \cdot k_2) - \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{15}} (\zeta_1 \cdot k_4)(\zeta_4 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_3) + \\
& \left. \left(\frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{15}} + \frac{1}{\alpha_{34}\alpha_{15}} \right) (\zeta_1 \cdot k_4)(\zeta_4 \cdot k_3)(\zeta_5 \cdot k_2) \right\} + \\
& (\zeta_1 \cdot \zeta_4) \left\{ - \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_5 \cdot k_1) - \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_5 \cdot k_2) - \right. \\
& - \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_5 \cdot k_3) - \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \right) (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_1) - \\
& \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \right) (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_2) - \left(\frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{45}} + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} \right) (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_3) + \\
& \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_5 \cdot k_1) + \frac{1}{\alpha_{12}\alpha_{34}} (\zeta_2 \cdot k_1)(\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_5 \cdot k_2) + \\
& \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_5 \cdot k_1) + \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_5 \cdot k_2) + \\
& \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{45}} (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_1)(\zeta_5 \cdot k_3) - \left(\frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{15}} + \frac{1}{\alpha_{15}\alpha_{34}} \right) (\zeta_2 \cdot k_3)(\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_5 \cdot k_1) + \\
& \left. \frac{1}{\alpha_{23}\alpha_{15}} (\zeta_2 \cdot k_4)(\zeta_3 \cdot k_2)(\zeta_5 \cdot k_1) - \frac{1}{\alpha_{34}\alpha_{15}} (\zeta_2 \cdot k_4)(\zeta_3 \cdot k_4)(\zeta_5 \cdot k_1) \right\} \Big] + \\
& + (\text{ permutações cíclicas })
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Algumas Relações de Unitariedade para Grávitons

C.1 Relação de Unitariedade para 4-grávitons

Há um tipo de relação quando $(k_1 + k_2)^2 \rightarrow 0$

$$M_4 \xrightarrow{(k_1+k_2)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(3)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) M_{(3)\mu,\nu}(-k; Z_3, k_3; Z_4, k_4)}{(k_1 + k_2)^2} \quad (\text{C.1})$$

onde $M_{(3)}^{\mu,\nu}$ é a subamplitude na qual o correspondente tensor de polarização foi removido pela seguinte operação

$$M_{(3)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) = \frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}} M_3(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z, k). \quad (\text{C.2})$$

C.2 Relação de Unitariedade para 5-grávitons

Novamente, há um tipo de relação quando $(k_1 + k_2)^2 \rightarrow 0$

$$M_5 \xrightarrow{(k_1+k_2)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(3)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) M_{(4)\mu,\nu}(-k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; Z_5, k_5)}{(k_1 + k_2)^2} \quad (\text{C.3})$$

e novamente foi definido $M_{(4)\mu,\nu}$ pela seguinte operação

$$M_{(4)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; k) = \frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}} M_4(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; Z, k). \quad (\text{C.4})$$

C.3 Relação de Unitariedade para 6-grávitons

Novamente, há um tipo de relação quando $(k_1 + k_2)^2 \rightarrow 0$

$$M_6 \xrightarrow{(k_1+k_2)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(3)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) M_{(5)\mu,\nu}(-k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6)}{(k_1 + k_2)^2} \quad (\text{C.5})$$

e outra subamplitude $M_{(5)\mu,\nu}$ é definida pela seguinte operação

$$M_{(5)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; Z_4, k_4; k) = \frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}} M_5(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; Z_4, k_4; Z, k). \quad (C.6)$$

Contudo, há outras relações unitárias quando $(k_1 + k_2 + k_3)^2 \rightarrow 0$

$$M_6 \xrightarrow{(k_1+k_2+k_3)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(4)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; k) M_{(4)\mu,\nu}(-k; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6)}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \quad (C.7)$$

C.4 Relação de Unitariedade para 7-grávitons

Para a amplitude dos 7-gravitons, também temos dois tipos de relações unitárias. O primeiro é obtido quando $(k_1 + k_2)^2 \rightarrow 0$

$$M_7 \xrightarrow{(k_1+k_2)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(3)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) M_{(6)\mu,\nu}(-k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7)}{(k_1 + k_2)^2} \quad (C.8)$$

e o segundo é obtido quando $(k_1 + k_2 + k_3)^2 \rightarrow 0$,

$$M_7 \xrightarrow{(k_1+k_2+k_3)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(4)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; k) M_{(5)\mu,\nu}(-k; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7)}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \quad (C.9)$$

A subamplitude $M_{(6)\mu,\nu}$ é definida por

$$M_{(6)\mu,\nu}(k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7) = \frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}} M_6(Z, k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7). \quad (C.10)$$

C.5 Relação de Unitariedade para 8-grávitons

Nesse caso, temos três tipos de relações unitárias:

$$M_8 \xrightarrow{(k_1+k_2)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(3)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) M_{(7)\mu,\nu}(-k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7; Z_8, k_8)}{(k_1 + k_2)^2} \quad (C.11)$$

$$M_8 \xrightarrow{(k_1+k_2+k_3)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(4)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; k) M_{(6)\mu,\nu}(-k; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7; Z_8, k_8)}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \quad (C.12)$$

$$M_8 \xrightarrow{(k_1+k_2+k_3+k_4)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(5)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; Z_4, k_4; k) M_{(5)\mu,\nu}(-k; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7; Z_8, k_8)}{(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2} \quad (C.13)$$

onde foi definida a subamplitude

$$M_{(7)\mu,\nu}(k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; \dots; Z_8, k_8) = \frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}} M_7(Z, k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; \dots; Z_8, k_8). \quad (C.14)$$

C.6 Relação de Unitariedade para 9-grávitons

Da mesma forma que no caso anterior, temos três tipos de relações unitárias:

$$M_9 \xrightarrow{(k_1+k_2)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(3)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; k) M_{(8)\mu,\nu}(-k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7; Z_8, k_8; Z_9, k_9)}{(k_1 + k_2)^2} \quad (\text{C.15})$$

$$M_9 \xrightarrow{(k_1+k_2+k_3)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(4)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; k) M_{(7)\mu,\nu}(-k; Z_4, k_4; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7; Z_8, k_8; Z_9, k_9)}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \quad (\text{C.16})$$

$$M_9 \xrightarrow{(k_1+k_2+k_3+k_4)^2 \rightarrow 0} \frac{M_{(5)}^{\mu,\nu}(Z_1, k_1; Z_2, k_2; Z_3, k_3; Z_4, k_4; k) M_{(6)\mu,\nu}(-k; Z_5, k_5; Z_6, k_6; Z_7, k_7; Z_8, k_8; Z_9, k_9)}{(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2} \quad (\text{C.17})$$

onde foi definida a sub-amplitude

$$M_{(8)\mu,\nu}(k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; \dots; Z_9, k_9) = \frac{\partial}{\partial Z^{\mu\nu}} M_8(Z, k; Z_3, k_3; Z_4, k_4; \dots; Z_9, k_9). \quad (\text{C.18})$$

C.7 Ausência de termos com um traço de número ímpar de Z's

Os casos de 4 e 5 grávitons já foram analisados no corpo do texto.

C.7.1 Caso de 6-gravitons

Para a amplitude de 6-gravitons, os termos que não podem estar presentes na amplitude são:

1. $Tr[ZZZ](kZk)^3;$
2. $Tr[ZZZ](kZk)(kZZk);$
3. $Tr[ZZZ]Tr[ZZZ];$
4. $Tr[ZZZ](kZZZk);$
5. $Tr[ZZZ]Tr[ZZ](kZk);$
6. $Tr[ZZZZZ](kZk);$

Termo 1 - $Tr[ZZZ](kZk)^3$

As an example of the first term, we have

$$T_1 = Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \sum_{i \leq j=1}^5 \sum_{l \leq m=1}^5 \sum_{n \leq o=1}^5 a_{i,j,l,m,n,o} (k_i \cdot Z_4 \cdot k_j) (k_l \cdot Z_5 \cdot k_m) (k_n \cdot Z_6 \cdot k_o).$$

Por análise dimensional, os coeficientes $a_{i,j,l,m,n,o}$ devem depender do momento como $1/(k \cdot k)^2$ o que implica que termos como T_1 participariam a relação unitária (C.5), mas sabemos que nem $M_{(3)}$ nem $M_{(5)}$ contém $Tr[Z_i \cdot Z_j \cdot Z_k]$. Portanto, todos os coeficientes $a_{i,j,l,m,n,o}$ devem ser nulos e um termo como $Tr[ZZZ](kZk)^3$ não aparece em M_6 .

Termo 2 - $Tr[ZZZ](kZk)(kZZk)$

Como um exemplo do segundo termo, temos

$$T_1 = Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \sum_{i \leq j=1}^5 \sum_{l \leq m=1}^5 a_{i,j,l,m} (k_i \cdot Z_4 \cdot k_j) (k_l \cdot Z_5 \cdot Z_6 \cdot k_m).$$

Pela mesma análise dimensional feita no termo anterior, podemos concluir que todos os coeficientes $a_{i,j,l,m}$ devem ser nulos e um termo com $Tr[ZZZ](kZk)(kZZk)$ não aparece em M_6 .

Termo 3 - $Tr[ZZZ]Tr[ZZZ]$

Termos como $Tr[ZZZ]Tr[ZZZ]$, em princípio, poderiam participar de relações unitárias (C.5) ou (C.5). No entanto, mostrou-se que os termos com $Tr[ZZZ]$ estão ausentes em $M_{(3)}$ ou $M_{(5)}$. Portanto, $Tr[ZZZ]Tr[ZZZ]$ pode participar de relações unitárias. Assim, seus coeficientes devem ser numéricos (novamente sem quaisquer estruturas adimensionais como $k_i \cdot k_j / k_l \cdot k_m$), e cada termo deve ser multiplicado por $k_i \cdot k_j$. Um termo típico é

$$T = Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] Tr[Z_4 \cdot Z_5 \cdot Z_6] \sum_{i=1}^5 a_i B_i$$

onde B_i é a base de 6 pontos definida como

$$B_i = \{\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,5}, \alpha_{5,6}, \alpha_{1,6}, \beta_{1,2,3}, \beta_{2,3,4}, \beta_{3,4,5}\}. \quad (C.19)$$

Simetria de Bose A amplitude M_6 também deve respeitar a invariância sob permutações arbitrárias entre as pernas externas (simetria de Bose), em particular a transformação cíclica dos índices “1”, “2” e “3”. Assim

$$\begin{aligned} T - T(1 \circlearrowleft_3^2) &= Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] Tr[Z_4 \cdot Z_5 \cdot Z_6] \times \\ &\times [(a_1 + a_2 + a_6 + a_8) \alpha_{1,2} + (-a_1 + 2a_2 - a_3 - a_9) \alpha_{2,3} + (a_3 - a_8) \alpha_{3,4} + \\ &- a_9 \alpha_{4,5} - (a_3 + a_8) \alpha_{5,6} + (2a_6 + a_9) \alpha_{1,6} \\ &+ (-a_2 + a_3 + a_9) \beta_{1,2,3} + (a_3 + 2a_8) \beta_{2,3,4} + (-a_6 + a_9) \beta_{3,4,5}] = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo as equações obtidas, encontra-se

$$a_3 = 0, a_8 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, a_6 = 0, \text{ and } a_9 = 0.$$

Então a expressão resultante é

$$T = \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \text{Tr}[Z_4 \cdot Z_5 \cdot Z_6] (a_4 \alpha_{4,5} + a_5 \alpha_{5,6} + a_7 \beta_{1,2,3}).$$

Se impusermos uma simetria de Bose por transformação cíclica dos índices “4”, “5” e “6”, obtém-se $a_4 = a_5 = 0$, e finalmente

$$T = \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \text{Tr}[Z_4 \cdot Z_5 \cdot Z_6] (a_7 \beta_{1,2,3}). \quad (\text{C.20})$$

Invariância de Calibre Considerando uma transformação de calibre no número de perna 6 em (C.20), obtém-se

$$\begin{aligned} T|_{(Z_6)_{\mu\nu}=\omega_\mu(k_6)_\nu+\omega_\nu(k_6)_\mu} &= a_7 \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] (\omega \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot k_6 + k_6 \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot \omega) \beta_{1,2,3} \\ &= a_7 \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \beta_{1,2,3} \times \\ &\quad \times (\omega \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + (k_1 + k_2 + k_3 + k_5) \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot \omega). \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

No entanto, M_6 tem também termos com a estrutura $\text{Tr}[ZZZ] (k \cdot Z \cdot Z \cdot Z \cdot k)$, que, após uma variação de calibre, geram alguns termos como aqueles em (C.21). Estes termos têm a seguinte forma

$$S = \text{Tr}[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \left\{ \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{i,j} k_i \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot Z_6 \cdot k_j + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 d_{i,j} k_i \cdot Z_6 \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot k_j \right\}, \quad (\text{C.22})$$

e depois de uma variação de calibre, temos

$$\begin{aligned} S|_{(Z_6)_{\mu\nu}=\omega_\mu(k_6)_\nu+\omega_\nu(k_6)_\mu} &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{i,j} [k_i \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot k_6 (\omega \cdot k_j) + k_i \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot \omega (k_6 \cdot k_j)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 d_{i,j} [(\omega \cdot k_i) k_6 \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot k_j + (k_6 \cdot k_i) \omega \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot k_j]. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Invariância de medida implica que quando as expressões em (C.21) e (C.23) são somadas, obte-se um resultado nulo. Neste caso, os coeficientes devem obedecer às seguintes relações

$$\begin{aligned} a_7 &= 0, \quad c_{1,1} = c_{1,5}, \quad c_{1,2} = c_{1,5}, \quad c_{1,3} = c_{1,5}, \quad c_{1,4} = c_{1,5}, \\ c_{2,1} &= c_{2,5}, \quad c_{2,2} = c_{2,5}, \quad c_{2,3} = c_{2,5}, \quad c_{2,4} = c_{2,5}, \\ c_{3,1} &= c_{3,5}, \quad c_{3,2} = c_{3,5}, \quad c_{3,3} = c_{3,5}, \quad c_{3,4} = c_{3,5}, \\ c_{5,1} &= c_{5,5}, \quad c_{5,2} = c_{5,5}, \quad c_{5,3} = c_{5,5}, \quad c_{5,4} = c_{5,5}, \\ d_{1,1} &= d_{5,1}, \quad d_{2,1} = d_{5,1}, \quad d_{1,2} = d_{5,2}, \quad d_{2,2} = d_{5,2}, \quad d_{1,3} = d_{5,3}, \\ d_{2,3} &= d_{5,3}, \quad d_{1,4} = d_{5,4}, \quad d_{2,4} = d_{5,4}, \quad d_{3,1} = d_{5,1}, \quad d_{3,2} = d_{5,2}, \\ d_{3,3} &= d_{5,3}, \quad d_{3,4} = d_{5,4}, \quad d_{4,1} = d_{5,1}, \quad d_{4,2} = d_{5,2}, \quad d_{4,3} = d_{5,3}, \quad d_{4,4} = d_{5,4} \end{aligned}$$

O resultado importante é que $a_7 = 0$. Portanto, termos como $Tr[ZZZ]Tr[ZZZ]$ não aparecem em M_6 .

Termo 4 - $Tr[ZZZ](kZZZk)$

Já foi provado que termos como $Tr[Z_1 Z_2 Z_3](k_i \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot Z_6 \cdot k_j)$ e $Tr[Z_1 Z_2 Z_3](k_i \cdot Z_6 \cdot Z_4 \cdot Z_5 \cdot k_j)$ estão ausentes. Considere agora $Tr[Z_1 Z_2 Z_3](k_i \cdot Z_4 \cdot Z_6 \cdot Z_5 \cdot k_j)$:

$$T = Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 e_{i,j} k_i \cdot Z_4 \cdot Z_6 \cdot Z_5 \cdot k_j.$$

Invariância de Calibre Variação de calibre de T resulta em

$$T|_{(Z_6)_{\mu\nu}=\omega_\mu(k_6)_\nu+\omega_\nu(k_6)_\mu} = Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 e_{i,j} [(k_i \cdot Z_4 \cdot k_6)(\omega \cdot Z_5 \cdot k_j) + (k_i \cdot Z_4 \cdot \omega)(k_6 \cdot Z_5 \cdot k_j)].$$

Essa variação do medidor também recebe contribuições de termos como

$$S = Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \sum_{j=1}^5 \{f_j Tr[Z_4 \cdot Z_6](k_6 \cdot Z_5 \cdot k_j) + g_j Tr[Z_5 \cdot Z_6](k_j \cdot Z_4 \cdot k_6)\}. \quad (C.24)$$

De modo que

$$S|_{(Z_6)_{\mu\nu}=\omega_\mu(k_6)_\nu+\omega_\nu(k_6)_\mu} = 2Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \sum_{j=1}^5 \{f_j (\omega \cdot Z_4 \cdot k_6)(k_6 \cdot Z_5 \cdot k_j) + g_j (\omega \cdot Z_5 \cdot k_6)(k_j \cdot Z_4 \cdot k_6)\}.$$

Então, para obedecer a invariância de calibre, deve-se que impor

$$Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3] \left\{ \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 e_{i,j} [(k_i \cdot Z_4 \cdot k_6)(\omega \cdot Z_5 \cdot k_j) + (k_i \cdot Z_4 \cdot \omega)(k_6 \cdot Z_5 \cdot k_j)] + \sum_{j=1}^5 [f_j (\omega \cdot Z_4 \cdot k_6)(k_6 \cdot Z_5 \cdot k_j) + g_j (\omega \cdot Z_5 \cdot k_6)(k_j \cdot Z_4 \cdot k_6)] \right\} = 0$$

A única solução possível é

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = g_1 = g_2 = g_3 = g_5 = e_{1,2} = e_{1,3} = e_{1,4} = e_{2,3} = e_{2,4} = e_{3,4} = 0.$$

Portanto, não temos termos como $Tr[Z_1 Z_2 Z_3](k_i \cdot Z_4 \cdot Z_6 \cdot Z_5 \cdot k_j)$.

Termo 5 - $Tr[ZZZ]Tr[ZZ](kZk)$

Já foi mostrado que os termos apresentados em (C.24) estão ausentes. Então, considere o termo restante

$$T = Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3]Tr[Z_4 \cdot Z_5] \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{i,j} k_i \cdot Z_6 \cdot k_j, \quad (C.25)$$

Sabemos que termos com $Tr[ZZZ]$ não podem participar de relações unitárias, portanto todos os coeficientes $a_{i,j}$ são numéricos.

Simetria de Bose Se for imposta a simetria de Bose, considerando as transformações cíclicas dos índices “1”, “2” e “3” e separadamente “4” e “5”, obtém-se as seguintes relações entre os coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= a_{3,3}, a_{1,2} = a_{2,3}, a_{1,3} = a_{2,3}, \\ a_{1,4} &= a_{3,4}, a_{2,2} = a_{3,3}, a_{2,4} = a_{3,4} \text{ and } a_{4,4} = a_{3,4}. \end{aligned} \quad (C.26)$$

Invariância de Calibre Agora, exigindo invariância de bitola em relação à perna 6, obtém-se

$$a_{2,3} = a_{3,3} = a_{3,4} = 0. \quad (C.27)$$

Usando as relações (C.26) e (C.27) em (C.25) nós obtémos $T = 0$, mostrando que todos os termos do tipo $Tr[ZZZ]Tr[ZZ](kZk)$ não aparecem em M_6 .

Termo 6 - $Tr[ZZZZZ](kZk)$

48/5000 Uma expressão particular para esse tipo de termo é

$$T = Tr[Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdot Z_5] \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i}^4 a_{i,j} k_i \cdot Z_6 \cdot k_j. \quad (C.28)$$

Simetria de Bose Se for imposta a simetria de Bose, considerando as transformações cíclicas dos índices “1”, “2”, “3”, “4” e “5”, obtém-se as seguintes relações entre os coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= a_{2,2}, a_{1,4} = 2a_{1,1} - a_{2,2}, a_{4,4} = a_{1,1}, a_{1,3} = a_{1,1} - a_{2,2} + a_{3,3}, \\ a_{2,4} &= a_{1,1} + a_{2,2} - a_{3,3}, \text{ and } a_{2,3} = -a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}. \end{aligned} \quad (C.29)$$

Invariância de Calibre Agora, novamente exigindo invariância de calibre em relação à perna 6, obtém-se

$$a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = a_{3,4} = 0. \quad (C.30)$$

Usando as relações (C.29) e (C.30) em (C.25) obtém-se $T = 0$, mostrando que todos os termos como $Tr[ZZZZZ](kZk)$ não aparecem em M_6 .

Devido às restrições computacionais, as demonstrações puderam ser feitas até $N=9$, o que foi feito de forma análoga ao que foi apresentado nesse apêndice.

Referências Bibliográficas

- [1] L. A. Barreiro and R. Medina, *Revisiting the S-matrix approach to the open superstring low energy effective lagrangian*, *J. High Energy Phys.* **10** (2012) 108 [arXiv:1208.6066].
- [2] L. A. Barreiro and R. Medina, *RNS derivation of N-point disk amplitudes from the revisited S-matrix approach*, *Nucl. Phys. B* **886** (2014) 870 [arXiv:1310.5942].
- [3] J. Scherk, J. H. Schwarz, *Dual models for nan-hadrons*, *Nucl. Phys. B* **81** (1974) 118.
- [4] C.G. Callan Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry, D. Friedan, *Strings in Background Fields*, *Nucl. Phys. B* **262** (1985) 593.
- [5] A.A. Tseytlin, *Vector field effective action in the open superstring theory*, *Nucl. Phys. B* **276** (1986) 391; Erratum-ibid: *Nucl. Phys. B* **291** (1987) 876.
- [6] D.J. Gross and E. Witten, *Superstring modifications of Einstein's equations*, *Nucl. Phys. B* **277** (1986) 1.
- [7] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Nonlinear electrodynamics from quantized strings*, *Phys. Lett. B* **163** (1985) 123.
- [8] A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi and S. A. Yost, *Open strings in background gauge fields*, *Nucl. Phys. B* **280** (1987) 599.
- [9] E. Bergshoeff, E. Sezgin, C. N. Pope and P. K. Townsend, *The Born-Infeld action from conformal invariance of the open superstring*, *Phys. Lett. B* **188** (1987) 70.
- [10] R. G. Leigh, *Dirac-Born-Infeld action from Dirichlet sigma model*, *Mod. Phys. Lett. A* **4** (1989) 2767.
- [11] M. Cederwall, A. Karlsson, *Pure spinor superfields and Born-Infeld theory*, *J. High Energy Phys.* **1111** (2011) 134 [arXiv:1109.0809].

- [12] A.A. Tseytlin, *On non-abelian generalization of Born-Infeld action in string theory*, *Nucl. Phys. B* **501** (1997) 41, [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9701125>].
- [13] Y. Kitazawa, *Effective lagrangian for the open superstring from a 5-point function*, *Nucl. Phys. B* **289** (1987) 599.
- [14] A. Bilal, *Higher-derivative corrections to the non-abelian Born-Infeld action*, *Nucl. Phys. B* **618** (2001) 21 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0106062>].
- [15] A. Refolli, A. Santambrogio, N. Terzi and D. Zanon, *F^5 contributions to the non-abelian Born-Infeld action from a supersymmetric Yang-Mills five-point function*, *Nucl. Phys. B* **613** (2001) 64 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0105277>]; Erratum-
ibid: *Nucl. Phys. B* **648** (2003) 453.
- [16] P. Koerber and A. Sevrin, *The non-abelian Born-Infeld action through order α'^3* , *J. High Energy Phys.* **10** (2001) 003 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0108169>];
- [17] A. Collinucci, M. De Roo and M.G.C. Eenink, *Supersymmetric Yang-Mills theory at order α'^3* , *J. High Energy Phys.* **06** (2002) 024 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0205150>].
- [18] F. Brandt, F. Machado and R. Medina, *The open superstring 5-point amplitude revisited*, *J. High Energy Phys.* **07** (2002) 071 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0208121>].
- [19] E.A. Bergshoeff, A. Bilal, M. de Roo and A. Sevrin, *Supersymmetric non-abelian Born-Infeld revisited*, *J. High Energy Phys.* **0107** (2001) 029 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0105274>].
- [20] O. Chandia and R. Medina, *4-point effective actions in open and closed superstring theory*, *J. High Energy Phys.* **0311** (2003) 003 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0310015>].
- [21] L. A. Barreiro and R. Medina, *5-field terms in the open superstring effective action*, *JHEP* **05**(03) 055 [[hep-th/0503182](http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0503182)].
- [22] E. Hatefi, *On effective actions of BPS branes and their highest derivative corrections*, *jhep10052010* 080 [[arXiv:1003.0314](http://arxiv.org/abs/1003.0314)].
- [23] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9510017>].
- [24] E. Witten, *Bound states of strings and p-branes*, *Nucl. Phys. B* **460** (1996) 35, [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9510135>].
- [25] N. Wyllard, *Derivative corrections to D-brane actions with constant background fields*, *Nucl. Phys. B* **598** (2001) 247 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0008125>].

- [26] O. Andreev, *More about partition function of open bosonic string in background fields and string theory effective action*, *Phys. Lett. B* **513** (2001) 207 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0104061>] .
- [27] P. Koerber and A. Sevrin, *The non-abelian D-brane effective action through order α'^4* , *J. High Energy Phys.* **10** (2002) 046 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0208044>].
- [28] M. De Roo and M.G.C. Eenink, *The effective action for the 4-point functions in abelian open superstring theory*, *J. High Energy Phys.* **0308** (2003) 036 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0307211>].
- [29] L. De Fossé, P. Koerber and A. Sevrin, *The uniqueness of the nonabelian Born-Infeld action*, *Nucl. Phys. B* **603** (2001) 413 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0103015>].
- [30] D. T. Grasso, *Higher order contributions to the effective action of $N=4$ super Yang-Mills*, *J. High Energy Phys.* **0211** (2002) 012 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0210146>].
- [31] M. Cederwall, B.E.W. Nilsson and D. Tsimpis, *$D=10$ super Yang-Mills at α'^2* , *J. High Energy Phys.* **07** (2001) 042 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0104236>].
- [32] M. Cederwall, B.E.W. Nilsson and D. Tsimpis, *The structure of maximally supersymmetric Yang-Mills theory: constraining higher-order corrections*, *J. High Energy Phys.* **06** (2001) 034 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0102009>];
- [33] J. M. Drummond, P.J. Heslop, P. S. Howe and S.F. Kerstan, *Integral invariants in $N=4$ SYM and the effective action for coincident D-branes*, *J. High Energy Phys.* **0308** (2003) 016 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0305202>].
- [34] D. Grasso, *Higher order contributions to the effective action of $N=2$ super Yang-Mills*, *J. High Energy Phys.* **0409** (2004) 054 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0407264>].
- [35] M. Movshev, A. Schwarz, *Supersymmetric deformations of maximally supersymmetric gauge theories. I*, [[arXiv:0910.0620](https://arxiv.org/abs/0910.0620)].
- [36] P. S. Howe, U. Lindström, L. Wulff, *$D=10$ supersymmetric Yang-Mills theory at α'^4* , *J. High Energy Phys.* **1007** (2010) 028, [[arXiv:1004.3466](https://arxiv.org/abs/1004.3466)].
- [37] P. Koerber and A. Sevrin, *Testing the α'^3 term in the non-abelian open superstring effective action*, *J. High Energy Phys.* **09** (2001) 009 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0109030>].
- [38] P. Koerber, *Abelian and non-abelian D-brane effective actions*, *Fortsch. Phys.* **52**(2004), 871 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0405227>].

- [39] E. Hatefi, *On higher derivative corrections to Wess-Zumino and tachyonic actions in Type II B Super String Theory*, [arXiv:1203.1329].
- [40] M. R. Garousi, E. Hatefi, *On Wess-Zumino terms of Brane-Antibrane systems*, *Nucl. Phys. B* **800** (2008) 502 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/07105875>].
- [41] M. R. Garousi, E. Hatefi, *More on WZ action of non-BPS branes*, *J. High Energy Phys.* **0903** (2009) 008 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0812.4216>].
- [42] E. Hatefi, I. Y. Park, *More on closed string induced higher derivative interactions on D-branes*, to be published on *Phys. Rev. D*, [arXiv:1203.5553].
- [43] E. Hatefi, *Universality in all-order α' corrections to BPS/non-BPS brane world volume theories*, [arXiv:1205.5079].
- [44] A. Collinucci, M. De Roo and M.G.C. Eenink, *Derivative corrections in 10-dimensional super-Maxwell theory*, *J. High Energy Phys.* **0301** (2003) 039 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0212012>].
- [45] H. Kawai, D. C. Lewellen and S. -H. H. Tye, *A relation between tree amplitudes of closed and open strings* *Nucl. Phys. B* **269** (1986) 1.
- [46] J. H. Schwarz, *Superstring Theory*, *Phys. Rept.* **89** (1982) 233.
- [47] M.B. Green, J.H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring theory*, vol. 1: *Introduction*, Cambridge, UK: Univ. Pr. 1987. Cambridge monographs on mathematical physics.
- [48] J. Polchinski, *String theory*, vol. 1: *An introduction to the bosonic string*, Cambridge, UK: Univ. Pr. 1998.
- [49] N. E. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, P. Vanhove, *Minimal basis for gauge theory amplitudes*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 161602, [arXiv:0907.1425].
- [50] S. Stieberger, *Open and closed vs. pure open string disk amplitudes*, [arXiv:0907.2211].
E. Remiddi and J.A.M. Vermaseren, *Harmonic polylogarithms*, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 725 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/9905237>].
- [51] J. A. M. Vermaseren, *Harmonic sums, Mellin transforms and Integrals*, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** (1999), 2037 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-ph/9806280>].
- [52] C. R. Mafra, O. Schlotterer, S. Stieberger, *Complete N-Point Superstring Disk Amplitude II. Amplitude and Hypergeometric Function Structure*, [arXiv:1106.2646].
- [53] D. Oprisa, S. Stieberger, *Six gluon open superstring disk amplitude, multiple hypergeometric series and Euler-Zagier sums*, [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0509042>].

- [54] L. A. Barreiro and R. Medina, *Higher N -point Amplitudes in Open Superstring Theory*, **PoS IC2006**(2006) 038, [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0611349>].
- [55] M. R. Garousi, *T -duality of the Riemann curvature corrections to supergravity*, [arXiv:1208.4459].
- [56] M. R. Garousi, *Tree-level S -matrix elements from S -duality*, *J. High Energy Phys.* **1204** (2012) 140 [arXiv:1201.2556].
- [57] E. Hatefi, *Selection rules, RR couplings on non-BPS branes and their all order α' corrections in type IIA(B) superstring theories*, [arXiv:1307.3520]; *All order α' higher derivative corrections to non-BPS branes of type IIB superstring theory*, *J. High Energy Phys.* **1307** (2013) 002 [arXiv:1304.3711]; *Closed string Ramond-Ramond proposed higher derivative interactions on fermionic amplitudes in IIB*, [arXiv:1302.5024]; *On D -brane anti D -brane effective actions and their corrections to all orders in α'* , *JCAP***19** (2013) 011 [arXiv:1211.5538]; *Shedding light on new Wess-Zumino couplings with their corrections to all orders in α'* , *J. High Energy Phys.* **1304** (2013) 070 [arXiv:1211.2413].
- [58] M. R. Garousi, *Ricci curvature corrections to type II supergravity*, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 025006 [arXiv:1210.4379].
- [59] M. R. Garousi, *T -duality of the Riemann curvature corrections to supergravity*, *Phys. Lett. B* **718** (2013) 1481 [arXiv:1208.4459].
- [60] O. Schlotterer and S. Stieberger, *Motivic multiple zeta values and superstring amplitudes*, [arXiv:1205.1516].
- [61] J. Broedel, O. Schlotterer and S. Stieberger, *Polylogarithms, multiple zeta values and superstring amplitudes*, [arXiv:1304.7267].
- [62] J. Broedel, O. Schlotterer, S. Stieberger and T. Terasoma *All order α' expansion of superstring trees from the Drinfeld associator*, [arXiv:1304.7304].
- [63] S. Stieberger, *Closed superstring amplitudes, single-valued multiple zeta values and Deligne associator*, [arXiv:1310.3259].
- [64] N. Berkovits, *Super-Poincaré covariant quantization of the superstring*, *J. High Energy Phys.* **0004** (2000) 18 [<http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/0001035>].
- [65] C. R. Mafra, O. Schlotterer, S. Stieberger and D. Tsimpis, *A recursive method for SYM n -point tree amplitudes*, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 126012 [arXiv:1012.3981].
- [66] H. Kawai, D. C. Lewellen and S. -H. H. Tye, *A relation between tree amplitudes of closed and open strings*, *Nucl. Phys. B* **269** (1986) 1.

-
- [67] Z. Bern, J.J.M. Carrasco, H. Johansson, *New relations for gauge theory amplitudes*, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 085011 [arXiv:0805.3993].
 - [68] N. E. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, P. Vanhove, *Minimal basis for gauge theory amplitudes*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 161602, [arXiv:0907.1425].
 - [69] S. Stieberger, *Open and closed vs. pure open string disk amplitudes*, [arXiv:0907.2211].
N.E.J. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, B. Feng and T. Sondergaard, *Gravity and Yang-Mills amplitude relations*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 107702 [arXiv:1005.4367].
 - [70] N.E.J. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, B. Feng and T. Sondergaard, *Proof of gravity and Yang-Mills amplitude relations*, *J. High Energy Phys.* **09** (2010) 067 [arXiv:1007.3111].
 - [71] H. Elvang, Y-t Huang, *Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*, 1st edition, Cambridge, UK: Univ. Pr. 2015 [arXiv:1308.1697].