

RESSALVA

Alertamos para ausência das páginas pré-textuais, não incluídas pelo(a) autor(a) no arquivo original.

SOLITONS AND GRAVITATION

ABSTRACT

Topological defects have a large number of applications in diverse areas of physics, chemistry and other areas of natural sciences. Particularly, in Quantum Field Theory (QFT), some very interesting and important features of nonlinear models can be studied by means of topological solutions. As a matter of fact, the most part of the QFT systems are intrinsically nonlinear and, as a consequence, naturally may present topological configurations. This work treat some systems of interacting scalar fields in $(1 + 1)$ dimensions which present solitonic configurations. This is done by introducing an approach to obtain the general solution of the orbit connecting the vacua of some particular models. These solutions can be applied to the case of cosmological scenarios, where our universe is taken as a domain wall in an extra dimension. The study of these solutions and its consequences could play a fundamental importance in the construction of the cosmological scenarios and in the understanding of the universe.

KEY-WORDS: Topological defects, Domain Walls, Branes, Bloch Branes, Bulk particles.

Índice

1	Introdução	12
2	Sistemas com dois campos interagentes	16
2.1	Considerações iniciais	16
2.2	Introdução	16
2.3	O método	18
2.4	Aplicação do procedimento	20
2.5	Extensão da Metodologia	27
3	Extensão dos sistemas com dois campos	31
3.1	Considerações iniciais	31
3.2	Introdução	31
3.3	Descrição do método	32
3.4	Aplicação do mecanismo	34
3.5	Descrição ilustrativa	37
3.6	Considerações finais	43
4	O Universo homogêneo em expansão	44
4.1	Introdução	44
4.2	Universo em grande escala	45
4.3	O modelo	47
4.4	Etapas evolutivas do universo	51
4.5	Enigmas Cósmicos	52
4.5.1	O problema do horizonte	52
4.5.2	O problema da singularidade	52

4.5.3	O problema da matéria escura	52
4.5.4	Relíquias cósmicas	52
4.6	Modelando a energia escura com escalares	53
4.7	Considerações finais	54
5	Teoria de campos e cosmologia	55
5.1	Quebra de simetria em teorias de gauge	55
5.2	Teorias de gauge não abelianas	57
5.3	Quebra espontânea de simetria	58
5.4	Considerações finais	61
6	Defeitos topológicos	63
6.1	Considerações iniciais	63
6.2	Introdução	63
6.3	Topologia dos defeitos	64
6.4	Paredes de domínio	65
6.5	Dinâmica da Parede de Domínio	66
6.5.1	Ação para a parede de domínio	66
6.5.2	Paredes em um universo em expansão	68
6.6	Interação com partículas	69
6.7	Considerações finais	70
7	Branas Bloch críticas e degeneradas	71
7.1	Introdução	71
7.2	Soluções analítica para dois campos escalares interagentes acoplados à gravidade.	73
7.3	Soluções solitônicas e fatores de deformação correspondentes	79
7.4	Paredes Bloch	80
7.5	Paredes Bloch degeneradas	81
7.6	Paredes Bloch críticas	84
7.7	Estabilidade e modos zero	86
7.8	Cosiderações oportunas	89

8	Universos acelerados	91
8.1	Introdução	91
8.2	Um modelo não linear para dois campos escalares interagentes	92
8.3	Soluções solitônicas	93
8.3.1	Soluções isoladas: Kink tipo I	93
8.4	Kinks tipo II	94
8.4.1	Kinks duplos	95
8.4.2	Dois kinks	96
8.5	Paredes de domínio e universos acelerados	97
8.6	Considerações oportunas	102
9	Conclusões e comentários	103
A	Flutuações dos campos escalares e tensoriais	105
B	D-Branas	109
B.1	Propriedades básicas	110
	Referências	112

Lista de Figuras

2-1	Perfil típico do kink tipo B (para $\lambda = \mu$). A linha pontilhada corresponde ao campo $\chi_+(x)$ e a linha sólida corresponde ao campo $\phi_+(x)$. Ambas soluções são calculadas para $c_0 = -2$	24
2-2	Perfil típico do kink tipo A para $\lambda = \mu$ e $c_0 = -2$. A linha pontilhada corresponde ao campo $\chi_+(x)$ e a linha sólida corresponde ao campo $\phi_+(x)$	24
2-3	A função sigma, para $M = 4$ como uma função do campo χ , como definido na equação (87).	30
7-1	Fator de deformação presente na referência [56] com parâmetros: $r = 0.05$ (linha sólida cheia), 0.1 (linha pontilhada) e 0.3 (linha sólida menos densa) (figura da esquerda). Fator de deformação para o caso onde: $a = 1, \lambda = \mu, c_0 \neq -2$ e $c_0 = -2.00001$ (linha sólida espessa); -2.005 (linha pontilhada); -3.0 (linha sólida menos densa) (figura da direita).	82
7-2	Fator de deformação para o caso onde: $a = 1, \lambda = 4\mu, c_0 \neq \frac{1}{16}$ e $c_0 = \frac{1}{16.0001}; \frac{1}{17}; \frac{1}{200}$. Observe a aparência dos dois picos, sinalizando uma estrutura rica para o modo zero.	83
7-3	Fator de deformação para o caso onde: $\lambda = 4\mu, c_0 = \frac{1}{16}, \mu = 1, a = 0.6$ (linha sólida cheia), $a = 1.2$ (linha pontilhada) e o caso onde $a = 2$ e $\mu = 0.2$	84
7-4	Densidade de energia da referência [56] $a = 0.05$ e 0.30 (figura da esquerda). Densidade de energia para o caso onde: $a = 1, \lambda = \mu = 1, c_0 \neq -2$ e $c_0 = -2.00001; -4.0$ (figura da direita).	84
7-5	Comparação do potencial estabilidade da referência [56] (figura da esquerda) com $a = 0.05; 0.1; 0.3$ e o caso onde $\lambda = \mu, a = 1$ e $c_0 = -2.001; -2.1; -2.5$	85

7-6	Potencial estabilidade para o caso onde $c_0 = \frac{1}{16.0001}$ com $a = 1$ (linha pontilhada), e $a = 1.2$ (linha sólida).	85
7-7	Potencial estabilidade típico para o caso crítico, para ambos os casos em que $\lambda = \mu$ e $\lambda = 4\mu$	89
8-1	Configurações típicas das soluções solitônicas em função de x para o caso onde $\lambda = \mu$ ($a = 1$), quando c_0 está próximo (distante) do valor crítico, $c_0 = -2$ neste caso, representada pela linha sólida (tracejada). O campo χ está representado pelas linhas mais espessas e o campo ϕ pelas linhas menos densas.	95
8-2	Densidade de energia para o caso onde $\lambda = 4\mu$, onde c_0 está próximo (distante) do valor crítico, $c_0 = \frac{1}{16}$ nesta situação, solução representada pela linha (sólida) tracejada. Pode-se observar a aparência da estrutura de parede dupla.	96
8-3	Comparação entre os potenciais efetivos tipo parede de domínio para o caso de Brito e colaboradores (linha sólida densa) e os sólitons degenerados quando c_0 está distante do valor crítico (linha sólida menos densa), quando c_0 está próximo ao valor crítico (linha tracejada densa) e no ponto crítico, que neste caso é $c_0 = -2$, (linha tracejada menos densa), em que todas as configurações são para o caso onde $\lambda = \mu$	100
8-4	Comparação dos potenciais efetivos tipo parede de domínio para o caso $\lambda = 4\mu$. A linha sólida mais densa representa o caso crítico ($c_0 = \frac{1}{16}$). As outras curvas correspondem ao caso que c_0 está distante do valor crítico (linha tracejada densa) e próximo à ele (linha sólida menos densa). . . .	101

Aos meus pais

*Mesmo que a aurora da dúvida apresente pela ciência e razão estritamente humanas
Jesus histórico é o próprio Jesus Deus que nos acompanha para Emaús, nos recordando,
pelo espírito Santo, as sagradas escrituras e revelando sua realidade.*

“Os discípulos de Emaús” (Lucas 24,13).

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Ao meu pai e à minha mãe que abraçaram o desafio do matrimônio no trabalho, na fé, na esperança e na Eucaristia.

Agradeço a Deus por ter trabalhado com o professor Dr. Álvaro de Souza Dutra. São raras as pessoas que acumulam tantas virtudes.

Aos professores do grupo de partículas e campos da Unesp-Campus de Guaratinguetá: Dr. Antônio S. de Castro e especialmente aos professores: Dr. Álvaro de Souza Dutra, Dr. Marcelo B. Hott e Dr. Denis Dalmazi meus formadores e orientadores durante muitas etapas desta tese.

Ao Instituto de Física Teórica da Unesp-(IFT-SP), onde pude completar minha formação, aos professores e em especial ao professor Dr. Nathan J. Berkovits.

Aos funcionários do curso de pós-graduação, pela convivência durante o tempo de trabalho: Cristina, Elisa, Regina e Sidney.

À reitoria da Unesp, ao programa de pós-graduação em Física da Unesp-Campus de Guaratinguetá e às agências de fomento à pesquisa pelo apoio.

À secretaria de Educação do Estado de São Paulo pelo apoio do programa Bolsa Mestrado.

Deus lhes pague.

RESUMO

Defeitos topológicos têm um grande número de aplicações em diversas áreas da física, química e outras áreas da ciência natural. Particularmente, em Teoria Quântica de Campos (TQC), algumas propriedades importantes e interessantes de modelos não lineares podem ser estudadas por soluções topológicas.

A maior parte de sistemas (TQC) são intrinsicamente não lineares e, como consequência, naturalmente devem apresentar configurações solitônicas.

Este trabalho trata alguns sistemas de campos escalares interagentes em $(1 + 1)$ dimensões que apresentam soluções solitônicas. Isto é realizado por meio de um método para se obter a solução geral da órbita que conecta o vácuo de alguns modelos particulares.

Essas soluções podem ser aplicadas para o caso de cenários cosmológicos, onde o universo é tratado como uma parede de domínio em uma dimensão extra. O estudo dessas soluções e suas consequências poderiam ter uma importância fundamental na construção de cenários cosmológicos e no entendimento do universo.

PALAVRAS-CHAVE: Defeitos Topológicos, Paredes de Domínio, Branas, Branas Bolch, Partículas Massivas.

Capítulo 1

Introdução

Não fosse o sucesso da teoria quântica de campos (TQC) em descrever e interpretar as partículas como campos quantizados, tratar os processos de espalhamento, concordar com as medidas da eletrodinâmica quântica (EDQ) e oferecer orientação para o entendimento das interações fortes via cromodinâmica quântica (CDQ), a sua aplicabilidade no tratamento dos campos básicos de matéria da natureza poderia sinalizar a existência de uma forma mais satisfatória de se trabalhar. Não só, naturalmente, pela necessidade de se eliminar divergências das teorias por extensos cálculos e diversos métodos de renormalização mas mesmo pela expectativa de um ferramental mais completo e quiçá simples para se trabalhar com teorias quânticas que incorporassem eventualmente todos os campos da natureza.

No sentido de que teorias clássicas de campo não lineares ofereçam soluções que representem configurações estáveis com energia bem definida tais características podem ser relevantes para a física de partículas.

Além de as teorias de gauge não abelianas serem não lineares, soluções solitônicas emergem dos campos de gauge conforme a topologia espacial e/ou espaço-temporal. Existe também a expectativa que essas soluções possam ser úteis na modelagem do confinamento de quarks.

Devido ao fato da quebra espontânea de simetria estar presente na supersimetria e em teorias de grande unificação (TGU) acredita-se que também lá estejam presentes objetos

topológicos.

Em teoria de cordas não se tem a liberdade de se adicionar campos para aferir observáveis locais (analogamente como em processos eletrofracos que são usados para se averiguar sistemas fortemente interagentes): usa-se as próprias cordas ou outros objetos (D-branas) e sólitons.

D-branas são objetos estendidos e em certo sentido são defeitos topológicos que em teorias de supercordas, por exemplo, têm a propriedade de atuar como condições de contorno [1].

A importância dos *defeitos topológicos* na teoria quântica de campos se dá por várias razões, como a possibilidade de que teorias não perturbativas sejam estruturalmente mais complexas e ricas, o que é a certo modo característico de teorias perturbativas. Por exemplo, o espectro de partículas elementares carregadas pode ser ampliado por partículas solitônicas portadoras de carga magnética, com uma *carga topológica* associada em contraste com a carga usual de Noether. O espectro também pode conter *dyons* que são partículas que carregam carga elétrica e magnética. Em um espaço-tempo com $(3 + 1)$ dimensões, objetos topológicos estendidos, cordas e paredes de domínio também podem estar presentes. Tais defeitos topológicos podem estar sob a forma de $(d - 1)$ -branas com $d = 1, 2, 3$ onde d é a dimensão do volume de mundo envolvido pelo sólito. A presença desses objetos em modelos físicos tem implicações em escalas microscópicas e escalas cósmicas [2].

Skyrme apresentou a primeira solução tridimensional de um defeito topológico proveniente de uma teoria de campo não linear e propôs que tais soluções tivessem aplicação potencial em física de partículas [3]. A idéia original era explorar a natureza de partícula dos estados solitônicos e prescrever uma descrição do espectro observável dos estados excitados das partículas. Ao mesmo tempo que esta idéia era proposta fenomenologicamente uma das características fundamentais dos defeitos aparecia como um produto de quebras espontâneas de simetrias que gerava uma variedade com vácuos degenerados. Um outro fato importante é que os estados quânticos dessas soluções topológicas completavam o espectro de partículas da teoria na forma de diversos setores suplementares. Nambu [4] foi um dos pioneiros na antecipação desta interpretação e aplicação de soluções

topológicas em teoria quântica de campos inclusive na sugestão do significado cosmológico dos defeitos como está refletido em suas próprias palavras: “ *If my view is correct, the universe may have a kind of domain structure. In one part of the universe you may have one preferred direction of the axis; in another part, the direction of the axis may be different* ”.

Antes, porém, que estas especulações pudessem ser levadas a sério, o emprego de soluções topológicas deveria ser estabelecida no cenário das teorias de campos renormalizáveis não obstante fosse também necessário o desenvolvimento de suas aplicações no entendimento das transições de fase. Um importante passo em tais direções foi a descoberta de soluções topológicas no modelo padrão e na teoria de Yang-Mills [5][6].

Por outro lado as implicações cosmológicas da quebra espontânea de simetria foram apontadas por Kirzhnits [7]. Posteriormente Weinberg notou a possibilidade da formação de uma parede de domínio na transição de fase no universo primordial [8]. Everett, Zel’dovich e colaboradores foram os primeiros a considerar quantitativamente as implicações potenciais das paredes de domínios no contexto gravitacional, seus efeitos gravitacionais e suas interações com a matéria [9].

A existência de tais estruturas de domínio - paredes de domínio, cordas, monopolos e texturas - dependem da topologia da variedade de vácuo e suas classificações podem ser feitas por meio das teorias de homotopia, conforme descrito por Kibble [10]. Zel’dovich e Khlopov bem como Preskill consideraram as consequências da produção de monopolos em teorias de grande unificação, mostrando que as densidades de monopolo eram tipicamente altas [11].

Por outro lado as cordas cósmicas proporcionam um espectro de flutuações viável para a formação das galáxias como foi apontado por Zel’dovich e Vilenkin. O estudo das implicações cosmológicas de cordas e de outros objetos topológicos se tornou uma área de substancial interesse desde então [12].

Em $(1 + 1)$ dimensões, teorias de campo não lineares, apresentam uma variedade de defeitos topológicos e aplicações. Essas soluções podem aparecer em presença de um ou mais campos e podem ser obtidas exatamente. Neste sentido é necessário o desenvolvi-

mento de métodos que possam simplificar as equações de campo e possivelmente resolvê-las analiticamente. Nessa direção de Souza Dutra apresenta um conjunto de soluções gerais para algumas classes de dois campos solitônicos interagentes [13] e posteriormente expande essa classe de soluções exatas [14], conforme será exposto nos Capítulos 2 e 3.

No Capítulo 4 será apresentada uma breve revisão dos elementos básicos da cosmologia padrão e de alguns problemas característicos que podem ter implicações e propriedades físicas das configurações topológicas. Essa revisão servirá para induzir uma possível abordagem conectiva, ainda que específica, sob o ponto de vista da proposta do nosso trabalho, entre gravitação e alguns elemento da teoria de campos.

No Capítulo 5 revisamos alguns tratamentos da teoria de campos, mais especificamente a quebra de simetria, que podem ser contextualizados às fases evolutivas do universo e à quebra de simetria em TGU que potencialmente podem conter defeitos topológicos.

No Capítulo 6 descrevemos a dinâmica de configurações topológicas como as paredes de domínio e suas interações por exemplo com partículas escalares que possivelmente possam descrever modelos que tentam explicar a expansão do universo.

O conjunto de soluções apresentado nos Capítulos 2 e 3 traz novas possibilidades para o tratamento de objetos topológicos como branas com estrutura interna no contexto da interação entre dois campos escalares acoplados à gravidade em espaços-tempo deformados, com uma dimensão extra como será tratado no Capítulo 7. Como será visto no Capítulo 8 essas soluções também estão presentes em cenários onde o universo é tratado como uma parede de domínio $3d$ embebida em um espaço-tempo Minkowskiano em $(4 + 1)$ dimensões com consequentes propriedades para universos acelerados pela colisão de partículas massivas excitadas com as paredes.

A proposta do presente trabalho é explorar esse conjunto de soluções topológicas exatas no contexto da teoria de campos e analisar suas propriedades e consequências nos cenários cosmológicos.

Capítulo 2

Sistemas com dois campos interagentes

2.1 Considerações iniciais

Neste capítulo apresentamos algumas classes de modelos que correspondem a equações não lineares de primeira ordem acopladas que ao serem tratadas linearmente podem ser resolvidas completamente, ao contrário do que ocorre com o *método da órbita tentativa*. É interessante observar que alguns importantes modelos físicos, por hora, o problema de ladrilhar um plano com um conjunto de defeitos e algumas propriedades poliméricas fazem parte dos modelos os quais essa técnica pode ser empregada.

2.2 Introdução

Uma rápida observação da história da Física nos permite concluir que a maior parte dos sistemas físicos naturais pode ser estudada pelo uso de equações diferenciais lineares com suas úteis propriedades como o princípio da superposição.

Entretanto, existe uma classe de importantes sistemas físicos que apresentam uma não linearidade intrínseca, que tem sido objeto de crescente interesse da comunidade científica

[15]-[30]. Em razão da não linearidade, em geral pode-se perder a propriedade de se obter soluções completas. Felizmente vem sendo possível simplificar e obter resultados confiáveis para alguns sistemas físicos por meio naturalmente de aproximações, teorias efetivas e modelos fenomenológicos. Particularmente importantes sistemas descritos pela teoria quântica de campos são intrinsecamente não lineares, bem como o modelo padrão e a cromodinâmica quântica que se apresentam como exemplos clássicos. Explorando com certa profundidade tais sistemas ou ainda modelos não lineares ao menos ao nível de árvore vê-se uma importância crescente das soluções solitônicas, apropriadas por terem importantes características como por exemplo comportamento topológico, energia finita e localizada e uma extensa variedade de aplicações [31]-[34]. O caráter topológico dessas configurações de campo que são obtidas por um método relativamente simples, tem se mostrado adequado para o tratamento de algumas soluções e modelos da teoria de campos e também no contexto das teorias de unificação como supercordas.

Um dos programas em se tratando de modelos não lineares com campos interagentes é o de se encontrar soluções clássicas exatas, particularmente sólitons. Em sistemas em $1+1$ dimensões em que equações diferenciais de segunda ordem possam ser reduzidas às soluções correspondentes de equações de primeira ordem pode-se obter uma equação diferencial relacionando dois campos acoplados e que, uma vez resolvida, a solução conduz a uma órbita geral conectando os vácuos do modelo. Sistemas físicos com estas características são conhecidos como sólitons topológicos (BPS) Bolgomol'nyi-Prasad-Sommerfield [35]. De fato, os métodos conhecidos como “órbita tentativa” nasceram historicamente como consequência da dificuldade intrínseca de se obter um método geral de solução para equações diferenciais não lineares.

A mais ou menos duas décadas atrás Rajaraman [36] introduziu um procedimento desta natureza para o tratamento de teorias relativísticas com campos escalares acoplados em $1+1$ dimensões. Este procedimento era independente do modelo e poderia ser usado para tratar soluções de modelos arbitrários com campos escalares acoplados em $1+1$ dimensões. Entretanto o método é limitado em termos da generalidade das soluções obtidas e convenientemente apropriada somente para alguns casos particulares, no entanto, importantes [37]. Alguns anos mais tarde Bazeia e colaboradores [38] aplicaram o procedimento desenvolvido por Rajaraman para casos especiais onde as soluções das equações

diferenciais de segunda ordem não lineares são equivalentes às soluções das equações de primeira ordem não lineares acopladas correspondentes. Nesta direção Bazeia e colaboradores aplicaram apropriadamente suas soluções a estensa variedade de sistemas naturais, desde polímeros a paredes de domínio.

Neste capítulo trataremos de um procedimento geral e que pode ser aplicado a sistemas como aqueles descritos em [38], conhecidos como soluções topológicas BPS.

Além desse fato nossa análise explorará o fato que muitos sistemas estudados em [38]-[43] podem ser mapeados em uma equação diferencial linear de primeira ordem a qual pode ser resolvida fornecendo uma solução geral para o sistema. Naturalmente uma série de propriedades e consequências surgem dessas soluções gerais.

2.3 O método

Sistemas não lineares característicos de ambientes BPS podem ser descritos por

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - V(\phi, \chi), \quad (2.1)$$

de modo que o potencial possa ser escrito em termos de um superpotencial do tipo:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right)^2. \quad (2.2)$$

A energia dos estados BPS pode ser obtido a partir de:

$$E_B = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2 \right], \quad (2.3)$$

o que conduz à

$$E_B = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} - W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} - W_\chi \right)^2 + 2 \left(W_\chi \frac{d\chi}{dx} + W_\phi \frac{d\phi}{dx} \right) \right], \quad (2.4)$$

e finalmente

$$E_B = |W(\phi_j, \chi_j) - W(\phi_i, \chi_i)|, \quad (2.5)$$

onde ϕ_i e χ_i são os i -ésimos estados de vácuo do modelo [40].

Assim, soluções com mínima energia de equações diferenciais de segunda ordem para soluções estáticas em 1+1 dimensões, podem ser obtidas através das equações não lineares de primeira ordem acopladas correspondentes

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi(\phi, \chi), \quad (2.6)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = W_\chi(\phi, \chi) \quad (2.7)$$

onde

$$W_\phi \equiv \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad (2.8)$$

e

$$W_\chi \equiv \frac{\partial W}{\partial \chi}. \quad (2.9)$$

É interessante observar que as soluções BPS tendem para os estados de vácuo assintoticamente. Em outras palavras é o próprio vácuo agente de uma espécie de condição de contorno das equações BPS.

Alternativamente ao procedimento usual da órbita tentativa [38]-[43], é interessante notar a seguinte relação possível

$$\frac{d\phi}{W_\phi} = dx = \frac{d\chi}{W_\chi}, \quad (2.10)$$

de modo que temos

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}, \quad (2.11)$$

em consequência de uma simetria translacional.

Esta relação permite o desacoplamento das equações (2.6) e (2.7). Assim uma vez desacoplada esta equação não linear de primeira ordem pode ser geralmente resolvida ao menos numericamente.

2.4 Aplicação do procedimento

Especificamente consideraremos um modelo que pode ser usado para simular uma série de sistemas [40]. De fato para esta situação a equação (2.11) pode ser mapeada em uma equação diferencial linear da qual é possível obter uma solução geral.

Neste caso o superpotencial é escrito como

$$W(\phi, \chi) = -\lambda\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3 + \mu\phi\chi^2, \quad (2.12)$$

e a equação (2.11) apresenta a forma

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{\lambda(\phi^2 - 1) + \mu\chi^2}{2\mu\phi\chi}. \quad (2.13)$$

Fazendo uma transformação de campos

$$\phi^2 = \rho + 1, \quad (2.14)$$

a equação (2.13) pode ser escrita como

$$\frac{d\rho}{d\chi} - \frac{\lambda}{\mu\chi}\rho = \chi, \quad (2.15)$$

uma típica equação diferencial linear não homogênea. É interessante observar que a solução particular de (2.15) corresponde ao resultado usualmente presente na literatura [40].

A solução geral é facilmente obtida resultando em

$$\rho(\chi) = \phi^2 - 1 = c_0\chi^{\frac{\lambda}{\mu}} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\chi^2, \quad (2.16)$$

para

$$\lambda \neq 2\mu, \quad (2.17)$$

e

$$\phi^2 - 1 = \chi^2[\ln(\chi) + c_1], \quad (2.18)$$

para

$$\lambda = 2\mu, \quad (2.19)$$

onde c_0 e c_1 são constantes arbitrárias de integração.

É interessante ressaltar que esta última situação particular não foi levada em consideração na literatura até onde sabemos. De agora em diante nós substituiremos estas soluções na equação (2.6) e a resolveremos para obtermos uma solução geral para o sistema. Em geral não é possível resolver χ em termos ϕ a partir das soluções acima, mas o contrário é sempre possível.

Ao substituírmos $\phi(\chi)$ na equação para o campo χ , temos

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\mu\chi \sqrt{1 + c_0\chi^{\frac{\lambda}{\mu}} - \left(\frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\right)\chi^2}, \quad (2.20)$$

com

$$\lambda \neq 2\mu, \quad (2.21)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\mu\chi \sqrt{1 + \chi^2 [\ln(\chi) + c_1]}, \quad (2.22)$$

com

$$\lambda = 2\mu. \quad (2.23)$$

Embora não tenhamos uma solução explícita para as equações acima, pode-se verificar entretanto, numericamente que tais soluções são sempre de uma mesma classe.

Apesar disso, algumas classes de soluções podem ser escritas em uma forma fechada. Este fato está intimamente relacionado aos valores da constante de integração c_0 . Ao tratarmos o sistema quando $c_0 = 0$ pode-se resolvê-lo analiticamente para qualquer valor de λ , a menos do caso $\lambda = 2\mu$. Neste caso então teremos

$$\chi_+(x) = \frac{2e^{2\mu(x-x_0)}}{1 - ce^{4\mu(x-x_0)}}, \quad (2.24)$$

e

$$\chi_-(x) = \frac{2e^{2\mu(x-x_0)}}{c - e^{4\mu(x-x_0)}}, \quad (2.25)$$

onde

$$c \equiv -\frac{\mu}{\lambda - 2\mu}. \quad (2.26)$$

Para tal escolha de parâmetros a solução sempre se anula nos contornos

$$x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.27)$$

Como uma consequência a correspondente solução tipo kink para o campo ϕ será dada por

$$\phi_+(x) = \pm \frac{ce^{4\mu(x-x_0)} + 1}{ce^{4\mu(x-x_0)} - 1}, \quad (2.28)$$

e

$$\phi_-(x) = \pm \frac{c + e^{4\mu(x-x_0)}}{c - e^{4\mu(x-x_0)}}, \quad (2.29)$$

que em essência são equivalentes às soluções presentes em [40], em termos de $\tanh(x)$.

Existem alguns casos particulares

$$c_0 \neq 0, \quad (2.30)$$

em que a integração pode ser feita analiticamente. Para o caso $\lambda = \mu$, temos as seguintes soluções

$$\chi_+(x) = \frac{4e^{2\mu(x-x_0)}}{[c_0e^{2\mu(x-x_0)} - 1]^2 - 4e^{4\mu(x-x_0)}}, \quad (2.31)$$

e

$$\chi_-(x) = \frac{4e^{4\mu(x-x_0)}}{[e^{2\mu(x-x_0)} - c_0]^2 - 4}, \quad (2.32)$$

onde devemos impor em ambas soluções que

$$c_0 \leq -2, \quad (2.33)$$

com objetivo de eliminar as singularidades dos campos. Além do mais, a condição

$$c_0 \neq -2, \quad (2.34)$$

permite que os campos se anulem quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Por outro lado as soluções correspondentes para o campo $\phi(x)$ são

$$\phi_+(x) = \frac{(c_0^2 - 4)e^{4\mu(x-x_0)} - 1}{[c_0 e^{2\mu(x-x_0)} - 1]^2 - 4e^{4\mu(x-x_0)}}, \quad (2.35)$$

e

$$\phi_-(x) = \frac{4 - c_0^2 + e^{4\mu(x-x_0)}}{[e^{2\mu(x-x_0)} - c_0]^2 - 4}. \quad (2.36)$$

Aqui, é oportuno comentarmos o bônus obtido da solução completa da equação (2.6) para o caso especial de $c_0 = -2$. Para este valor da constante de integração uma inesperada solução tipo kink emerge. De fato, tal solução não seria obtida para $c_0 = 0$ necessariamente.

Nesta solução o campo χ é um kink com os seguintes limites assintóticos

$$\chi_+(-\infty) = 0, \quad (2.37)$$

e

$$\chi_+(\infty) = 1; \quad (2.38)$$

para ϕ ,

$$\phi_+(-\infty) = -1, \quad (2.39)$$

e

$$\phi_+(\infty) = 0, \quad (2.40)$$

e correspondentemente

$$\chi_-(-\infty) = 1, \quad (2.41)$$

$$\chi_-(\infty) = 0, \quad (2.42)$$

e

$$\phi_-(-\infty) = 0, \quad (2.43)$$

$$\phi_-(\infty) = 1, \quad (2.44)$$

que pode ser visto de um exemplo do perfil típico deste kink da figura 2.1, que iremos classificar como kink tipo B, em contraste com outros casos onde o campo χ não tem um

perfil kink, classificados como kink tipo A, da figura 2.2.

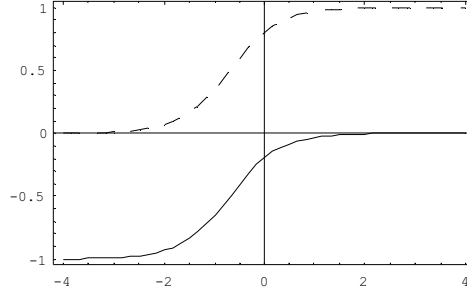


Figura 2-1: Perfil típico do kink tipo B (para $\lambda = \mu$). A linha pontilhada corresponde ao campo $\chi_+(x)$ e a linha sólida corresponde ao campo $\phi_+(x)$. Ambas soluções são calculadas para $c_0 = -2$.

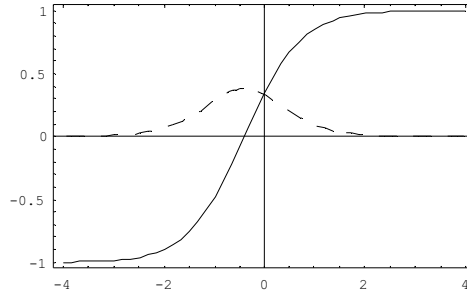


Figura 2-2: Perfil típico do kink tipo A para $\lambda = \mu$ e $c_0 = -2$. A linha pontilhada corresponde ao campo $\chi_+(x)$ e a linha sólida corresponde ao campo $\phi_+(x)$.

Uma observação relevante à escolha da constante de integração revela a forma da equação (2.20) proporcional a

$$\chi |1 - \chi| = \zeta \chi (1 - \chi), \quad (2.45)$$

onde ζ é a função sinal definida como

$$\zeta \equiv \frac{(1 - \chi)}{|1 - \chi|}, \quad (2.46)$$

quando $c_0 = -2$. Esta função adquire valores ± 1 , com $\zeta = +1$ para as condições de contorno $0 \leq \chi \leq 1$ para as soluções presentes em (2.31) e (2.32), que nesta situação

representa um sistema mais simples de se resolver. De fato a translação

$$\chi = \beta + \frac{1}{2}, \quad (2.47)$$

recupera um superpotencial BPS para o modelo “ $\lambda\phi^4$ ” em (2.45)

$$\zeta\chi(1-\chi) = -(\beta^2 - \frac{1}{4}). \quad (2.48)$$

Podemos ainda estender a mesma análise para a situação

$$\lambda = 4\mu. \quad (2.49)$$

Agora as soluções se apresentam na forma

$$\chi_+(x) = -\frac{2e^{2\mu(x-x_0)}}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}e^{4\mu(x-x_0)} + 1\right]^2 - 4c_0e^{8\mu(x-x_0)}}}, \quad (2.50)$$

e

$$\chi_-(x) = -\frac{4e^{2\mu(x-x_0)}}{\sqrt{[1 + 2e^{4\mu(x-x_0)}]^2 - 16c_0}}, \quad (2.51)$$

que se comportam assintoticamente como no caso anterior, $\lambda = \mu$, para os kinks tipo A.

Em outras palavras, desde que

$$c_0 \neq \frac{1}{16}, \quad (2.52)$$

somente o campo ϕ será um kink.

De forma semelhante ao caso anterior, para evitarmos singularidades intermediárias, devemos impor que

$$c_0 \leq \frac{1}{16}, \quad (2.53)$$

de forma que as soluções para o campo ϕ se apresentarão como

$$\phi_+(x) = \frac{4 + (16c_0 - 1)e^{8\mu(x-x_0)}}{[2 + e^{4\mu(x-x_0)}]^2 - 16c_0e^{8\mu(x-x_0)}}, \quad (2.54)$$

e

$$\phi_-(x) = \frac{16c_0 + 4e^{8\mu(x-x_0)} - 1}{[1 + 2e^{4\mu(x-x_0)}]^2 - 16c_0}. \quad (2.55)$$

Uma escolha particular para o parâmetro de integração

$$c_0 = \frac{1}{16}, \quad (2.56)$$

gera o kink tipo B, com os seguintes comportamentos assintóticos:

$$\chi_+(-\infty) = 0, \quad (2.57)$$

$$\chi_+(+\infty) = -2, \quad (2.58)$$

e

$$\phi_+(+\infty) = 0, \quad (2.59)$$

$$\phi_+(-\infty) = 1, \quad (2.60)$$

e, correspondentemente,

$$\chi_-(-\infty) = -2, \quad (2.61)$$

$$\chi_-(\infty) = 0, \quad (2.62)$$

e

$$\phi_-(-\infty) = 0, \quad (2.63)$$

$$\phi_-(\infty) = 1. \quad (2.64)$$

Neste ponto é apropriado calcularmos a energia destas duas espécies de configurações solitônicas. Para isto usamos o superpotencial (2.12) e o substituímos na equação (2.5), o que resulta para os kinks do tipo A a energia

$$E_A^{BPS} = \frac{4}{3}\lambda, \quad (2.65)$$

e para os casos

$$\lambda = \mu \text{ e } \lambda = 4\mu, \quad (2.66)$$

a energia para os kinks do tipo B

$$E_B^{BPS} = \frac{2}{3}\lambda. \quad (2.67)$$

Tais soluções poderiam ser interpretadas como sendo dois tipos de torções em uma cadeia, representada através de um grupo ortogonal de coordenadas ϕ e χ , tal que no plano (ϕ, χ) , o kink tipo A corresponda a uma torção completa no intervalo $(-1, 0)$ a $(0, 0)$ e o tipo B corresponda a metade da torção, onde o sistema se configura no intervalo $(-1, 0)$ a $(0, 1)$, para o caso em que $(\lambda = \mu)$.

2.5 Extensão da Metodologia

Utilizando esta metodologia que nos permite encontrar tais classes de configurações topológicas, na descrição seguinte, como uma extensão da análise, considere um modelo mais geral que contemple um número de casos particulares que também estão presentes na literatura, incluídas as configurações encontradas anteriormente, cujo superpotencial possa ser escrito como

$$W(\phi, \chi) = \frac{\mu}{2}\phi^N\chi^2 + G(\phi), \quad (2.68)$$

e que conduza às seguintes equações

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\frac{dG(\phi)}{d\phi} + \frac{\mu}{2}N\phi^{(N-1)}\chi^2}{\mu\phi^N\chi}, \quad (2.69)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \mu\phi^N\chi, \quad (2.70)$$

onde N é qualquer número real. Naturalmente a forma do superpotencial (2.68) que em particular nos interessa é aquele que seja renormalizável e que conduza às equações BPS que possam ser tratadas analiticamente, embora o procedimento seja aplicável também às situações em que tenhamos que lançar mão de métodos numéricos para obtermos as soluções. A equação correspondente de dependência do campo ϕ em função do campo χ é dada por

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{\frac{dG(\phi)}{d\phi} + \frac{\mu}{2}N\phi^{(N-1)}\chi^2}{\mu\phi^N\chi}. \quad (2.71)$$

Ao redefinirmos o campo ϕ

$$\sigma \equiv \phi^2, \quad (2.72)$$

obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = N\chi + \frac{2G_\phi(\sigma)}{\mu\sigma^{\frac{N-1}{2}}}\frac{1}{\chi}, \quad (2.73)$$

onde

$$G_\phi(\sigma) \equiv \frac{dG(\phi)}{d\phi} \Big|_{\sigma=\phi^2}. \quad (2.74)$$

Naturalmente, embora não seja provável que a equação (2.73) seja exata e arbitrariamente solúvel, eventualmente para aquelas que assim o forem podemos obter sólitons exatos duplos. Por hora, considere o caso especial onde

$$G_\phi(\sigma) \equiv \frac{dG(\phi)}{d\phi} \Big|_{\sigma=\phi^2} = \frac{2(a_0 + a_1\sigma + a_2\sigma^2)}{\mu}\sigma^{\frac{N-1}{2}}. \quad (2.75)$$

A solução será dada por uma combinação de funções de Bessel que, uma vez substituída na equação para o campo χ , conduz a uma solução dificilmente exata, além da presença de algumas singularidades na solução. No entanto, para fim de aplicação, um caso particular daquela equação, onde

$$a_2 = 0, \quad (2.76)$$

nos permite obter as soluções arbitrárias seguintes

$$\sigma(\chi) = -\frac{a_0}{a_1} - \frac{N\mu\chi^2}{2(\mu - a_1)} + c_I\chi^{\frac{2a_1}{\mu}}, \quad (2.77)$$

com

$$G(\phi) = \frac{\mu\phi^N}{2} \left[\frac{a_0}{N} + \frac{a_1}{(N+2)}\phi^2 \right], \quad (2.78)$$

com o seguinte potencial

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\phi^{2(N-1)}a_1^2\phi^4 + 2a_1N\mu\phi^2\chi^2 + a_0^2 + \mu^2\chi^2(4\phi^2 + N^2\chi^2) + 2a_0(a_1\phi^2 + N\mu\chi^2), \quad (2.79)$$

com c_I sendo uma constante de integração arbitrária, e a_0 e a_1 são constantes que caracterizam o sistema físico, de modo que a solução para o campo ϕ pode ser dada como

$$\phi = \pm \sqrt{-\frac{a_0}{a_1} - \frac{N\mu\chi^2}{2(\mu - a_1)} + c_I \chi^{\frac{2a_1}{\mu}}}, \quad (2.80)$$

possibilitando resolver a seguinte equação

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm \mu \left[-\frac{a_0}{a_1} - \frac{N\mu\chi^2}{2(\mu - a_1)} + c_I \chi^{\frac{2a_1}{\mu}} \right]^{\frac{N}{2}} \chi, \quad (2.81)$$

e agora, o tratamento de vários modelos que aparecem na literatura como casos particulares do sistema tratado acima.

Nesse ponto é interessante salientar que se $N = 1$, recupera-se os modelos I, II e III, de [40], e o modelo I de [38]. O caso onde $N = 2$ é equivalente ao modelo II em [38] e o modelo considerado em [42].

É pertinente salientar que essas soluções para modelos de dois campos exatamente solúveis podem ser generalizadas convenientemente a partir do superpotencial

$$W_{NM}(\phi, \chi) \equiv G(\phi) + \frac{\mu}{M} \phi^N \chi^M, \quad (2.82)$$

onde $G(\phi)$ é da mesma forma apresentada anteriormente. O mesmo tratamento para se chegar a equação (2.73) conduz a

$$\frac{d\sigma(\chi)}{d\chi} = \left(\frac{2a_1}{\mu} \right) \sigma(\chi) \chi^{(1-M)} + \left(\frac{2N}{M} \right) \chi, \quad (2.83)$$

onde

$$\sigma \equiv \phi^2 + \left(\frac{a_0}{a_1} \right), \quad (2.84)$$

que uma vez resolvida resulta em

$$\sigma_M(\chi) = e^{-\left[\frac{2a_1\chi^{(2-M)}}{\mu(M-2)} \right]} (c_1 + \Sigma), \quad (2.85)$$

onde $\Sigma = \frac{1}{M(M-2)} \left[2^{\frac{M}{M-2}} N \chi^2 \Gamma \left(-\frac{2}{M-2}, -\frac{2a_1\chi^{(2-M)}}{\mu(2-M)} \right) \right] \left(\frac{a_1\chi^{(2-M)}}{\mu(2-M)} \right)^{\left(\frac{2}{M-2} \right)}$, c_1 é uma constante

arbitrária de integração e

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{(a-1)} e^{-t} dt, \quad (2.86)$$

é a função gama incompleta. Naturalmente o caso considerado nesta análise é obtido pela escolha de $M = 2$. Por outro lado, pode-se obter soluções simples para valores particulares do parâmetro M como, por exemplo, $M = 4$, cuja solução pode ser escrita como

$$\sigma_4(\chi) = \frac{N}{4} \chi^2 + e^{-\frac{a_1}{\mu \chi^2}} \left[c_1 + \frac{N a_1}{4\mu} \text{Ei} \left(\frac{a_1}{\mu \chi^2} \right) \right], \quad (2.87)$$

onde $\text{Ei}(z)$ é a função exponencial

$$\text{Ei}(z) \equiv - \int_{-z}^\infty t^{(a-1)} e^{-t} dt. \quad (2.88)$$

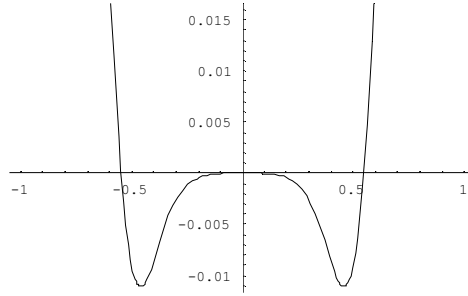


Figura 2-3: A função sigma, para $M = 4$ como uma função do campo χ , como definido na equação (2.87).

Pode-se observar da figura 2.3 que a menos de uma pequena região próxima à origem, a solução é assintoticamente semelhante ao caso onde $M = 2$. Esta expressão não apresenta indícios de singularidade e tende a zero quando o campo χ assim também o fizer. Entretanto uma etapa da análise que pode ser realizada é aquela que conduz à solução de

$$\frac{d\chi}{dx} = \mu \chi^{(M-1)} (\pm)^N \left[- \left(\frac{a_0}{a_1} \right) + \sigma_M(\chi) \right]^{\frac{N}{2}}, \quad (2.89)$$

que embora possa não ser tratável analiticamente, permite a aplicação deste procedimento para uma variedade de sistemas.

Capítulo 3

Extensão dos sistemas com dois campos

3.1 Considerações iniciais

Este capítulo, versará sobre uma maior abrangência da atuação do método introduzido no Capítulo 2 onde equações não lineares de primeira ordem acopladas podem ser reduzidas a um sistema linear e, conseqüentemente, serem resolvidas completamente. As conseqüências gerais de tal extensão podem representar novas perspectivas à luz de problemas hoje conhecidos da cosmologia, da gravitação e da teoria quântica de campos.

3.2 Introdução

Apesar da incomum presença de sistemas governados por equações não lineares, a sua importância tem se manifestado no crescente aparecimento de problemas que tratam dessa malha de sistemas conforme indicações das referências pertinentes ao Capítulo 2.

Embora em alguns casos, em conseqüência da não linearidade, perca-se o controle sobre uma solução completa do problema, o entendimento e reformulação dos setores não lineares podem trazer novas perspectivas quanto a solução geral.

Este Capítulo tratará da extensão da demonstração feita no Capítulo 2, que é proveniente de sistemas típicos em $1+1$ dimensões, nos quais equações diferenciais de segunda ordem podem ser reduzidas à solução das equações de primeira ordem correspondentes.

Nesta direção mostrar-se-á a possibilidade de se estender a abrangência de aplicabilidade da potencial correspondência entre sistemas não lineares e lineares, levando em conta situações onde o potencial do sistema não possa eventualmente ser escrito em termos de um superpotencial como usualmente supõem-se ser necessário.

Naturalmente, advindas deste novo ponto de vista que essas possíveis soluções para sistemas não lineares inclusive apresenta, perspectivas a respeito das consequências e possíveis aplicações podem vir a ser muito oportunas e proveitosas.

3.3 Descrição do método

O procedimento convencional para se tratar soluções BPS [35] para sistemas não lineares usualmente particulariza [38]-[43] a forma da densidade lagrangiana como em (2.1) impondo que o potencial deva ser escrito em termos de um superpotencial $W(\phi, \chi)$ de tal maneira que sua forma seja a apresentada em (2.2). Assim a energia funcional das configurações estáticas pode ser calculada apropriadamente resultando em (2.3) e que conduz à equação (2.4) e finalmente, considerando a energia mínima das configurações de campo tem-se a relação (2.5) onde ϕ_i e χ_i são os i -ésimos estados de vácuo do modelo [40].

Neste caso pode-se ver que as soluções com energia mínima de equações diferenciais de segunda ordem para soluções estáticas em $(1+1)$ dimensões podem ser resolvidas através das equações acopladas de primeira ordem não lineares correspondentes dadas pelas relações (2.6) e (2.7).

É interessante frisar que as soluções BPS convergem assintoticamente para os estados de vácuo. Em outras palavras os estados de vácuo atuam como condições de contorno implícitas das equações BPS.

O procedimento agora é expandir a classe de modelos não lineares com soluções exatas,

sujeitando o potencial a uma condição menos restritiva.

Pode-se, então, usar que

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(A(\phi, \chi))^2 + \frac{1}{2}(B(\phi, \chi))^2. \quad (3.1)$$

Como consequência a energia funcional pode então ser escrita como

$$E_B = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} - A \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} - B \right)^2 + 2 \left(B \frac{d\chi}{dx} + A \frac{d\phi}{dx} \right) \right], \quad (3.2)$$

onde B denota a energia de Bogomol'nyi.

Pode-se notar, como já observado, que as configurações com energia mínima são tais que os campos obedecem as equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = A(\phi, \chi), \quad (3.3)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = B(\phi, \chi).$$

Isto ocorre em virtude dessas equações implicarem na energia funcional

$$E_B = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right], \quad (3.4)$$

que é positiva definida de modo que a energia mínima das configurações de campo obedecem a (3.3). Além do mais, a fim de garantir que as equações (3.3) obedecem às equações diferenciais de segunda ordem

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = V_\phi(\phi, \chi), \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = V_\chi(\phi, \chi)$$

deve-se propor as seguintes restrições às funções arbitrárias $A(\phi, \chi)$ e $B(\phi, \chi)$

$$A_\chi(\phi, \chi) = B_\phi(\phi, \chi). \quad (3.6)$$

A menos deste vínculo e do fato que a energia topológica será mais complicada nos cálculos, esta situação mais geral pode agora ser estudada usando o procedimento usual da órbita tentativa [38]-[43] ou, a solução direta da equação de órbita como foi visto no Capítulo 2. Observando que (3.3) pode ser escrita como

$$\frac{d\phi}{A} = dx = \frac{d\chi}{B}, \quad (3.7)$$

onde o elemento espacial diferencial é um tipo de invariante. Então obtém-se que

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{A(\phi, \chi)}{B(\phi, \chi)}. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é em geral uma equação diferencial não linear relacionando os campos escalares do modelo. Então, ao resolvê-la completamente, a função $\phi(\chi)$ pode ser usada para eliminar-se um dos campos de forma a desacoplar as equações (2.6) e (2.7).

Finalmente, esta equação diferencial de primeira ordem não linear desacoplada pode ser resolvida em geral, ao menos numericamente.

3.4 Aplicação do mecanismo

A fim de se explorar as vantagens e possibilidades do presente método, considere por exemplo as seguintes funções A e B que definem o potencial

$$A(\phi, \chi) \equiv \frac{\alpha_1}{2}\phi^2 + \frac{\beta_1}{2}\chi^2 + \gamma_1\phi\chi + \delta_1\phi + \epsilon_1\chi + \zeta_1, \quad (3.9)$$

$$B(\phi, \chi) \equiv \frac{\alpha_2}{2}\phi^2 + \frac{\beta_2}{2}\chi^2 + \gamma_2\phi\chi + \delta_2\phi + \epsilon_2\chi + \zeta_2. \quad (3.10)$$

Como requer a condição (3.6) para que as funções A e B sejam válidas é necessário que

$$\beta_1 = \gamma_2, \quad (3.11)$$

$$\gamma_1 = \alpha_2 \quad (3.12)$$

e

$$\epsilon_1 = \delta_2. \quad (3.13)$$

Ao tentar-se construir um superpotencial das funções A e B no espírito que se procede usualmente, conclui-se que não seja possível o fazer univocamente, predominantemente devido à diferenças entre os termos dependentes de um campo.

Por hora, entretanto, como uma situação ilustrativa pode-se considerar os seguintes superpotenciais alternativos

$$W_1 \equiv \int Ad\phi = \frac{\alpha_1}{6}\phi^3 + \frac{\beta_1}{2}\chi^2\phi + \frac{\gamma_1\phi^2\chi}{2} + \frac{\delta_1\phi^2}{2} + \epsilon_1\chi\phi + \zeta_1\phi, \quad (3.14)$$

$$W_2 \equiv \int Bd\chi = \frac{\alpha_2}{2}\phi^2\chi + \frac{\beta_2}{6}\chi^3 + \frac{1}{2}\gamma_2\phi\chi^2 + \delta_2\phi\chi + \frac{\epsilon_2\chi^2}{2} + \zeta_2\chi, \quad (3.15)$$

conduzindo às respectivas equações de primeira ordem BPS

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_{1\phi}}{W_{1\chi}} = \frac{A(\phi, \chi)}{\beta_1\phi\chi + \frac{1}{2}\gamma_1\phi^2 + \epsilon_1\phi} = \frac{A(\phi, \chi)}{\left[B(\phi, \chi) - \left(\frac{\beta_2}{2}\chi^2 + \epsilon_2\chi + \zeta_2\right)\right]}. \quad (3.16)$$

O mesmo procedimento aplicado em (3.16) é empregado para o superpotencial W_2 para se obter

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{A(\phi, \chi) - \left(\frac{\alpha_1}{2}\phi^2 + \delta_1\phi + \zeta_1\right)}{B(\phi, \chi)}. \quad (3.17)$$

Então, como pode ser visto das equações acima, pode-se ao menos estender o procedimento usual BPS pela introdução de funções arbitrárias com dependência apenas de um dos campos interagentes.

Ainda num panorama ilustrativo, os parâmetros funcionais podem ser restringidos a

$$\gamma_1 = \beta_2 = \delta_1 = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \zeta_2 = 0, \quad (3.18)$$

o que conduz à

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{A(\phi, \chi)}{B(\phi, \chi)} = \frac{\frac{\alpha_1}{2}\phi^2 + \frac{\beta_1}{2}\chi^2 + \zeta_1}{\beta_1\phi\chi}, \quad (3.19)$$

e que após uma redefinição de campo

$$\sigma \equiv \phi^2 + \frac{2}{\alpha_1} \zeta_1, \quad (3.20)$$

fornece a seguinte equação diferencial linear [13]

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = \frac{\alpha_1}{\beta_1 \chi} \sigma + \beta_1 \chi, \quad (3.21)$$

e finalmente a seguinte equação de órbita exata

$$\phi^2 = c_0 \chi^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} + \frac{\beta_1^2}{2\beta_1 - \alpha_1} \chi^2 - \frac{2\zeta_1}{\alpha_1}, \quad (3.22)$$

com c_0 sendo uma constante arbitrária de integração.

Neste caso o potencial do sistema é dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{\alpha_1^2}{8} \phi^4 + \frac{\alpha_1 \zeta_1}{2} \phi^2 + \frac{\beta_1^2}{8} \chi^4 + \frac{\beta_1 \zeta_1}{2} \chi^2 + \frac{\beta_1(2\beta_1 + \alpha_1)}{4} \phi^2 \chi^2 + \frac{\zeta_1^2}{2}, \quad (3.23)$$

o qual é, oportuno salientar, comparável com o discutido por Boya e Casahorran alguns anos atrás [37], e pode ser escrito, identificando apropriadamente os campos e potenciais

$$\sigma \equiv \phi, \quad (3.24)$$

$$\rho \equiv \chi \quad (3.25)$$

$$V_{BC}(\phi, \chi) = \frac{1}{4} \phi^4 - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \chi^4 + \frac{(f-d)}{2} \chi^2 + \frac{d}{2} \phi^2 \chi^2 + \frac{1}{4}, \quad (3.26)$$

dos quais pode-se mapear as constantes do dois modelos a fim de, se possível, observar em quais circunstâncias os modelos virão a ser equivalentes.

Da inspeção dos potenciais acima conclui-se que

$$\alpha_1 = \sqrt{2}, \quad (3.27)$$

$$\zeta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (3.28)$$

$$\beta_1 = \pm\sqrt{2\lambda}, \quad (3.29)$$

e também deve-se levar em conta uma restrição sobre os parâmetros originais em V_{BC}

$$d = \sqrt{\lambda}2(\sqrt{\lambda} \pm 1), \quad (3.30)$$

$$f = 2\lambda, \quad (3.31)$$

o que vincula estes dois parâmetros, de maneira que

$$d = f \pm \frac{\sqrt{f}}{2}. \quad (3.32)$$

É importante ressaltar neste ponto que um sistema do tipo considerado em [37] possa não ser eventualmente discutido pela sistemática BPS [13], [38]-[43], entretanto neste mesmo trabalho Boya e Casahorran apresentaram uma cuidadosa análise da estabilidade solitônica, mostrando que sob certas circunstâncias tais sistemas são estáveis sob perturbações lineares. O que é incluído sob o ponto de vista da abrangência que estamos propondo ao menos pela fixação de apropriados vínculos, ou quando não há objeção a respeito destes.

Surpreendentemente, em um cenário similar àquele que o superpotencial gera configurações topológicas [13], pode-se mostrar que há soluções adicionais além das obtidas em [37], ao menos sob as restrições mencionadas acima. Essas soluções têm no mínimo uma propriedade curiosa de serem tipo kink para ambos os campos, em contraste com as configurações típicas em [37].

Um aspecto globalmente benéfico deste procedimento é a analiticidade com que se pode processar sistemas não lineares.

3.5 Descrição ilustrativa

Considerando agora um modelo um pouco mais geral, em que

$$\gamma_1 = \beta_2 = \delta_1 = \epsilon_2 = \zeta_2 = 0, \quad (3.33)$$

e usando a transformação de campo similar à usada no caso tratado na seção anterior, tem-se a seguinte equação diferencial linear

$$\frac{d\sigma}{d\chi} = \left[\frac{\alpha_1\sigma + \beta_1\chi^2 + 2\epsilon_1\chi}{(\beta_1\chi + \epsilon_1)} \right], \quad (3.34)$$

que uma vez resolvida conduz à exata equação de órbita conectando os dois campos,

$$\sigma(\chi) = \left[\frac{2\epsilon_1^2 + 2\alpha_1\epsilon_1\chi + \alpha_1\beta_1\chi^2}{\alpha_1(2\beta_1 - \alpha_1)} \right] + c_0(\beta_1\chi + \epsilon_1)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}, \quad (3.35)$$

para

$$\alpha_1 \neq 2\beta_1, \quad (3.36)$$

e

$$\sigma(\chi) = \frac{\epsilon_1^2}{2\beta_1^2} + c_1(\beta_1\chi + \epsilon_1)^2 + \frac{(\beta_1\chi + \epsilon_1)^2}{\beta_1^2} \ln(\beta_1\chi + \epsilon_1), \quad (3.37)$$

para

$$\alpha_1 = 2\beta_1, \quad (3.38)$$

com c_0 e c_1 constantes arbitrárias de integração.

Ao se substituir essas soluções em uma das equações (3.3) e resolvê-la, então se obtém uma solução geral para o sistema. Em geral não é possível resolver χ em termos de ϕ das soluções acima, mas o contrário é sempre garantido.

Então será substituído $\phi(\chi)$ na equação para o campo χ . No entanto, para o caso

$$\alpha_1 = 2\beta_1,$$

é menos provável obtermos uma solução exata. Assim nesta situação [13] é adequado trabalhar-se com o caso onde

$$\alpha_1 \neq 2\beta_1.$$

Ao realizar-se a substituição descrita em uma das relações (3.3) tem-se a equação

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm(\beta_1\chi + \epsilon_1) \sqrt{\frac{2\epsilon_1^2 + 2\alpha_1\epsilon_1\chi + \alpha_1\beta_1\chi^2}{\alpha_1(2\beta_1 - \alpha_1)} + c_0(\beta_1\chi + \epsilon_1)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} - \frac{2\zeta_1}{\alpha_1}}. \quad (3.39)$$

Em geral a expressão (3.39) não possui uma solução explícita, entretanto uma análise numérica revela uma mesma classe para o perfil das soluções.

Neste sentido, algumas classes de soluções podem ser escritas em uma forma explícita fechada. O programa é tratar o sistema quando c_0 é igual a zero, porque nesta situação pode-se resolver analiticamente o sistema para qualquer valor dos parâmetros, a menos do caso (3.38) citado anteriormente.

Em direção de angariar uma solução explícita exata, para o caso que a situação requer, reescalando as variáveis espaciais

$$x = \beta_1 y, \quad (3.40)$$

reconhecendo a equação de Ricatti

$$\frac{d\varphi}{dy} = a \left(\varphi^2 + \frac{B^2}{4A} - C \right), \quad (3.41)$$

e fazendo uma transformação dos campos

$$\varphi \equiv \sqrt{A\chi^2 + B\chi + C}, \quad (3.42)$$

obtem-se que

$$\frac{d\chi}{dy} = a \left(\chi + \frac{B}{2A} \right) \sqrt{A\chi^2 + B\chi + C}. \quad (3.43)$$

Considerando as seguintes identificações

$$A \equiv \frac{\beta_1}{(2\beta_1 - \alpha_1)}, \quad (3.44)$$

$$B \equiv \frac{2\epsilon_1}{(2\beta_1 - \alpha_1)}, \quad (3.45)$$

$$C \equiv \frac{2}{\alpha_1} \left[\frac{\epsilon_1^2}{(2\beta_1 - \alpha_1)} - \zeta_1 \right], \quad (3.46)$$

somos capazes de conectar as equações (3.39) e (3.43) o que nos permite obter a solução procurada, pelo uso da solução da equação de Ricatti (3.41) e pela substituição em

$$\chi_{\pm} \equiv \frac{1}{2A} \left[-B \pm \sqrt{B^2 - 4A(C - \varphi^2)} \right], \quad (3.47)$$

com

$$A \neq 0 \quad (3.48)$$

ou

$$\chi \equiv \frac{(\varphi^2 - C)}{B}, \quad (3.49)$$

com

$$A = 0, \quad (3.50)$$

e

$$B \neq 0. \quad (3.51)$$

Embora esta segunda hipótese não seja estritamente relacionada ao modelo em questão pelo menos no que se refere às restrições dos parâmetros, em um sistema apropriado, deve-se levar em conta a seguinte forma da equação de Ricatti

$$\frac{d\varphi}{dy} = \pm 2 \left(\varphi^2 - C - \frac{\epsilon_1 B}{\beta_1} \right), \quad (3.52)$$

que com uma transformação de campo

$$\varphi \equiv \sqrt{B\chi + C}, \quad (3.53)$$

pode ser escrita como

$$\frac{d\chi}{dy} = \pm \left(\chi + \frac{\epsilon_1}{\beta_1} \right) \sqrt{B\chi + C}. \quad (3.54)$$

O tratamento visa obter a solução de (3.41). Por uma questão de completeza é oportuno salientar que apesar de conhecida, esta equação será mapeada por uma equação linear da qual a solução da equação diferencial de primeira ordem não linear acoplada, originalmente proposta, virá como uma consequência de transformações dos campos.

Executando uma transformação de campo

$$\varphi = \pm \sqrt{b} + \frac{1}{\Omega}, \quad (3.55)$$

onde

$$b \equiv \frac{B^2}{4A} - C \quad (A \neq 0), \quad (3.56)$$

temos que

$$\frac{d\Omega}{dy} = a(1 \pm 2\sqrt{b}\Omega), \quad (3.57)$$

da qual obtemos a solução

$$\varphi(y) = \pm\sqrt{b} - \frac{2\sqrt{b}}{\pm 1 - e^{-2a\sqrt{b}(y-y_0)}}, \quad (3.58)$$

com y_0 , uma constante arbitrária de integração.

Levando em conta uma possível singularidade na solução, deve-se escolher um sinal negativo na solução acima.

A função finalmente obtida agora pode ser expressa por uma configuração com típico perfil kink

$$\varphi(y) = \sqrt{b} \tanh \left[a\sqrt{b}(y - y_0) \right]. \quad (3.59)$$

Entretanto, a menos que o campo φ nas equações (3.47) e (3.49) tenha comportamento linear, a solução para estes campos nunca será tipo kink, e sim terá um comportamento tipo lump.

Este comportamento que é reflexo da condição

$$c_0 = 0, \quad (3.60)$$

tratada em [13], confirma sua presença também neste caso mais geral.

Salutar frisar que se

$$\epsilon_1 \neq 0, \quad (3.61)$$

há uma remanescente possibilidade neste sistema mais geral, que não estava presente no caso particular considerado em [13]. Para este caso, considera-se soluções em uma situação especial onde o equação de campo χ possa ser escrita em uma apropriada forma

polinomial. Isto pode ser feito requerendo que

$$B \equiv \sqrt{AC}, \quad (3.62)$$

e neste caso então tem-se

$$\frac{d\chi}{dy} = a \left(\chi + \frac{\epsilon_1}{\beta_1} \right) \sqrt{A\chi^2 + B\chi + C} = a \left(\chi + \frac{B}{2A} \right) \left(\sqrt{A}\chi + \sqrt{C} \right), \quad (3.63)$$

e finalmente

$$\frac{d\chi}{dy} = a\sqrt{A}(\chi'^2 - b'), \quad (3.64)$$

onde

$$\chi' = \chi + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C}{A}} + \frac{\epsilon_1}{\beta_1} \right) \quad (3.65)$$

e

$$b' \equiv \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{C}{A}} - \frac{\epsilon_1}{\beta_1} \right)^2 \quad (3.66)$$

com a solução tipo kink

$$\chi = \sqrt{b'} \tanh \left[a\sqrt{Ab'}(y - y_0) \right] - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{C}{A}} + \frac{\epsilon_1}{\beta_1} \right). \quad (3.67)$$

É oportuno ressaltar que a solução (3.67) conduzirá à solução tipo B [38], em que ambos os campos χ e ϕ apresentam uma configuração tipo kink, ao passo que (3.47) e (3.49) correspondem às soluções usualmente obtidas na literatura [38], [39]-[43], isto é uma solução tipo A em que o campo χ apresenta uma configuração lump e o campo ϕ uma configuração kink.

Conforme observado na referência [13], para o caso

$$c_0 \neq 0, \quad (3.68)$$

pode-se, ao menos para certas relações entre os parâmetros do potencial, obter uma solução analítica para a solução kink tipo B. Isto pode ser feito por uma especial fixação dos parâmetros arbitrários de integração c_0 . Por hora, para o modelo considerado, tem-se

a liberdade

$$\alpha_1 = \beta_1 \quad (3.69)$$

e depois de um arranjo entre os termos na equação (3.63) concluímos que a condição necessária para se garantir a forma polinomial para a equação do campo χ é satisfeita se para c_0

$$B + c_0\beta_1 = \sqrt{A(C + c_0\epsilon_1)}. \quad (3.70)$$

Uma similar situação poderia ser considerada para o caso onde

$$\alpha_1 = 4\beta_1, \quad (3.71)$$

e que conduziria às mesmas conclusões a respeito da geração de configurações de kinks tipo B através de uma conveniente escolha de c_0 .

3.6 Considerações finais

A extensão do procedimento recentemente sugerido por de Souza Dutra em seu trabalho original [13], no sentido de ampliar a classe de modelos de campos não lineares acoplados pode ter configurações solitônicas *exatas* em 1+1 dimensões. Este fato nos permite, em certas circunstâncias, a inclusão de uma classe de modelos como aqueles estudados por Boya e Casahorran [37]. Neste momento é interessante ressaltar que esta classe de modelos que foram analisados pelo procedimento sugerido por de Souza Dutra não poderia ser considerada em uma abordagem usual baseada na presença de um superpotencial [38]-[43], além do bônus de que modelos similares aos considerados no presente tratamento e recentemente considerados na literatura levarem em conta a quebra de Lorentz [44], [45].

Capítulo 4

O Universo homogêneo em expansão

4.1 Introdução

Os dados observacionais que se acumularam na cosmologia de medida ou precisão formam a base para construção de um modelo descritivo do universo. O modelo do *Big Bang* que descreve a evolução do universo desde os primeiros *centésimos* de segundo aos dias de hoje é a teoria mais bem testada pelo crivo observacional [46], [47]. Talvez este fato se escore em um princípio no qual se baseia o modelo: **o princípio cosmológico**. Este princípio atesta que o universo é o mesmo em todas as direções de qualquer ponto do espaço, isto é, é *homogêneo* e *isotrópico* [48][49]. Não obstante este princípio ocupe um status de postulado existem consideráveis evidências da homogeneidade e isotropia do universo incluindo a medida da distribuição das galáxias e a uniformidade observada *da radiação cósmica de fundo*, prevista pela teoria e que fornece a temperatura atual do universo em cerca de $3K$ [50].

A proposta deste capítulo é introduzir pedagogicamente alguns pontos da cosmologia padrão que podem potencialmente ser tratados pela abordagem da teoria de campos.

4.2 Universo em grande escala

Das quatro interações da natureza, duas atuam em pequenas distâncias: a fraca e a forte. Apesar do eletromagnetismo poder atuar a longas distâncias, o campo pode ser neutralizado já que a força pode ser repulsiva ou atrativa. A gravitação pelo contrário não pode ser compensada pois é sempre atrativa e a grandes distâncias é a interação dominante. Esta é a razão pela qual pode-se tratar a cosmologia com a gravitação.

O elemento de linha para qualquer espaço-tempo consistente com o princípio cosmológico pode ser escrito na forma de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2, \quad (4.1)$$

onde t é o tempo, $a(t)$ é o fator de escala responsável pela expansão das dimensões do espaço e dl^2 representa o elemento de linha em um espaço tridimensional de curvatura constante. Em coordenadas esféricas (4.1) tem a forma

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.2)$$

onde a constante de curvatura k é determinada pela topologia espacial e geometria do universo

$$k > 0, S^3 \text{ fechado} \quad (4.3)$$

$$k = 0, R^3 \text{ plano} \quad (4.4)$$

$$k < 0, H^3 \text{ aberto} \quad (4.5)$$

A tri-esfera S^3 é compacta mas H^3 tri-espaço de curvatura constante negativa é infinita e topologicamente equivalente ao tri-espaço Euclidiano R^3 .

A homogeneidade da matéria presente no universo implica que suas linhas de fluxo na forma de fluido, devido ao fato de serem grandes as escalas tratadas, estão ao longo das trajetórias constante (r, θ, ϕ) de forma que podem ser tratadas como coordenadas comotoras. Entretanto as distâncias físicas são determinadas ao se multiplicar as distâncias

comóveis pelo fator de escala $a(t)$.

É conveniente introduzir uma coordenada temporal, chamado tempo conforme τ e definido por

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}, \quad (4.6)$$

de forma que a métrica (4.1) possa ser escrita como

$$ds^2 = a^2(\tau) [d\tau^2 - dl^2]. \quad (4.7)$$

Uma variedade de efeitos cinemáticos derivam imediatamente das métricas (4.1) e (4.2). Considere duas partículas comóveis separadas por uma distância l . Pode-se notar que l aumentará proporcionalmente a $a(t)$. Haverá uma velocidade recessional correspondente

$$v = Hl, \quad (4.8)$$

onde o parâmetro de Hubble H (ou constante de Hubble) é

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.9)$$

onde $\dot{a}$ denota $\frac{da}{dt}$. A relação (4.8) é conhecida empiricamente como a lei de Hubble: a observação de que as galáxias distantes estão se afastando de nós com velocidades proporcionais às suas distâncias. O valor medido para o parâmetro H atualmente é de

$$H_0 \approx (50 - 100) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (4.10)$$

com uma certa incerteza proveniente das escalas cosmológicas

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}, \quad (4.11)$$

onde h é o fator adimensional com a função de incorporar a incerteza na medida de H_0 e Mpc denota o megaparsecs onde um parsec equivale a aproximadamente 3.26 anos-luz. Uma outra implicação da métrica (4.2) é que a luz com frequência ν sofrerá um desvio

para o vermelho através do efeito Doppler usual

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = -\frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.12)$$

e conseqüentemente a frequência decairá segundo

$$\nu(t) \propto a(t)^{-1}, \quad (4.13)$$

de forma que as linhas espectrais de uma galáxia distante permitem uma medida de sua relativa distância e idade. Tal desvio para o vermelho z pode ser definido como

$$1 + z \equiv \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\nu_e}{\nu_0}, \quad (4.14)$$

onde t_e é o tempo que a radiação foi emitida à uma frequência ν_e e o subscrito 0 denota a quantidade medida nos presentes dias.

4.3 O modelo

O fator de escala $a(t)$ na métrica (4.1) obedece às equações de Einstein. O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ para a distribuição de matéria presente deve possuir as mesmas simetrias que a métrica FRW (4.2) de maneira que tenha a forma de um fluido perfeito [46]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (4.15)$$

onde a densidade de energia ρ e pressão p são funções do tempo t , u^μ é a quadri-velocidade da matéria comóvel, isto é, $u^0 = 1$ e $u^i = 0$ e $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo. A conservação local da energia

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (4.16)$$

implica que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (4.17)$$

onde $T^{\mu\nu}_{;\nu}$ denota a derivada covariante de $T^{\mu\nu}$. O segundo termo em (4.17) responde pela diluição da densidade de energia à medida que o universo se expande ao contrário do terceiro termo que representa o trabalho realizado pela pressão do fluido.

Para uma completa especificação da evolução de (4.17) deve-se considerar a equação de estado para a matéria $p = p(\rho)$. Se o universo está preenchido com *sugeira* ou matéria não relativística com pressão negligenciável $p \ll \rho$ então (4.17) implicará que

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (4.18)$$

Por outro lado para a radiação a equação de estado apropriada é aquela de um gás ideal relativístico $p = \frac{\rho}{3}$, de forma que a densidade varia da seguinte maneira

$$\rho \propto a^{-4}, \quad (4.19)$$

naturalmente podendo levar em conta as correções do desvio para o vermelho. Desde que a matéria que medimos em grande parte é não relativística, inevitavelmente dominará a densidade de energia de um universo em expansão

$$\frac{\rho_m}{\rho_r} \propto a. \quad (4.20)$$

Das equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

onde G representa a constante de Newton, $R_{\mu\nu}$ e R representam o tensor de Ricci e o escalar de curvatura respectivamente apresentados no Apêndice A, obtém-se as equações de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (4.22)$$

que conjuntamente à (4.17) e à equação de estado determinam a evolução. Para a radiação com $p = \frac{\rho}{3}$ de (4.22) em um universo *plano* ($k = 0$) a dependência em t do fator de escala será

$$a(t) \propto t^{1/2}, \quad (4.23)$$

e

$$\rho_{crit} = \frac{3}{32\pi G t^2}, \quad (4.24)$$

para densidade crítica de energia de um universo plano, cujo valor está entre aquele correspondente a um universo aberto e fechado num tempo t . Assim podemos definir um parâmetro de densidade adimensional

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (4.25)$$

em que $\Omega < 1$, $\Omega = 1$, e $\Omega > 1$ correspondem a universos abertos, planos e fechados respectivamente.

Para um universo plano dominado por matéria cuja pressão pode ser negligenciada, o fator de escala tem a forma

$$a(t) \propto t^{2/3}, \quad (4.26)$$

e novamente de (4.22)

$$\rho_{crit} = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (4.27)$$

para a densidade crítica.

Uma observação importante com respeito a solução $\Omega = 1$ é que todos os universos irão rapidamente divergir por um excesso relativamente pequeno na densidade. Isto pode ser visto considerando a versão temporal conforme de (4.17) e (4.22). Na era da matéria dominante por exemplo podemos encontrar a relação

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \Omega (\Omega - 1), \quad (4.28)$$

a partir das relações (4.17), (4.22) e (4.25). Considerando que $\frac{da}{d\tau} > 0$ em um universo em expansão se $\Omega > 1$ então $\frac{d\Omega}{d\tau} > 0$ e portanto $\Omega \rightarrow \Omega > 1$. Por outro lado $\Omega < 1$ implica que $\frac{d\Omega}{d\tau} < 0$ e $\Omega \rightarrow 0$ e o universo adquirirá uma curvatura dominante.

A gigantesca escala de tempo da evolução cosmológica e os dados observacionais recentes sugerem Ω muito próximo da unidade. A partir das curvas de rotação para

galáxias espirais pode-se estimar a densidade de massa associada com a matéria luminosa

$$\Omega_{\text{matéria visível}} \lesssim 0.01. \quad (4.29)$$

Entretanto há uma evidência considerável que as curvas de rotação estendem-se uniformemente a uma auréola invisível implicando que Ω tenha uma maior magnitude, além do que estudos dinâmicos em escalas de aglomerados de galáxias, como Virgem, similarmente sugerem que

$$\Omega_{\text{aglomerado}} \approx 0.1 - 0.2. \quad (4.30)$$

No entanto existem algumas evidências de que um universo em grande escala sobreviva em um fundo suave $\Omega_0 \approx 1$, o que poderia indicar que uma significativa parte da energia total do universo esteja sob a forma de energia escura. A matéria escura deve ser principalmente não bariônica, neutrinos massivos ou estar sob outras formas mais exóticas de matéria.

Em um estágio inicial do universo inflacionário, porém, Ω está excepcionalmente próximo da unidade. Pode-se observar de (4.28) que Ω sempre poderá ser obtido com certa precisão no início do universo assumindo que $\Omega \sim 1$ presentemente como em (4.30).

A partir de uma expansão em (4.26) a idade do universo medida de uma singularidade inicial ($a = 0$) será

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}. \quad (4.31)$$

Usando H_0 de (4.10) estima-se que o universo tenha 20 bilhões de anos, o que é corroborado pela datação de radio-isótopos do sistema solar bem como o tempo de vida de aglomerados estelares.

Os modelos (FRW) tem um alcance restrito ao horizonte cosmológico de sinais luminosos dentro da distância radial

$$d_H = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (4.32)$$

que para um universo plano na era da radiação é

$$d_H = 2t, \quad (4.33)$$

enquanto que na era da matéria

$$d_H = 3t. \quad (4.34)$$

4.4 Etapas evolutivas do universo

Uma descrição relativamente coerente com os dados observacionais a partir dos elementos padrões da cosmologia alcança um universo *recém nascido* com cerca de $10^{-43}s$. Intervalos de tempo inferiores a este penetram a barreira de Planck com energias da ordem de $10^{19}GeV$ onde uma teoria unificada das interações da natureza incluindo a gravidade quântica parece ser a ferramenta apropriada e crucial. A $10^{-35}s$ tem-se a quebra de simetria das teorias de grande unificação (TGU), $G \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ a uma escala de energia da ordem de $10^{15}GeV$, bem como inflação, criação da matéria bariônica, monopolos, cordas cósmicas e outros *defeitos topológicos*. A $10^{-11}s$ e a uma escala de energia da ordem de 10^3GeV ocorre a transição eletrofraca $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)$. A $10^{-6}s$ e a uma escala de energia de $1GeV$ ocorre a transição Quark-Hadron e a $1s$ com meros $1MeV$ ocorre então a formação dos elementos, formação das galáxias (3minutos, $1eV$), quasares e sistemas solares (15 bilhões de anos e $1meV$).

Esta descrição do universo explica satisfatoriamente a lei de expansão de Hubble, a radiação cósmica de fundo além de estabelecer elementos básicos para o entendimento da estrutura de formação do universo em grande escala. Este modelo fornece uma descrição adequada da história do universo a partir do instante $t = \frac{1}{100}s$. No entanto se o mesmo modelo for extrapolado para a singularidade em $t = 0$ (Big Bang) somos forçados a assumir e acreditar que o universo possuía um estado inicial especial com algumas propriedades aparentemente desconhecidas.

4.5 Enigmas Cósmicos

4.5.1 O problema do horizonte

Este problema está inserido no contexto da homogeneidade e isotropia do universo em larga escala e particularmente trata da radiação cósmica de fundo. Antenas de microndas apontadas em direções opostas recebem radiações de regiões que nunca estiveram em contato causal. Entretanto a temperatura da radiação destas duas regiões é a mesma ao menos em 1 parte em 10^4 . O modelo dá conta deste fato somente assumindo de forma não natural que o universo primordial era altamente homogêneo e isotrópico em escalas muito maiores que o horizonte causal.

4.5.2 O problema da singularidade

A singularidade cosmológica em $t = 0$ corresponde ao estado de energia infinita e sinaliza um possível fracasso da relatividade geral. Esta pode ser uma indicação que a gravidade quântica provavelmente seja necessária para o entendimento do estado inicial do universo.

4.5.3 O problema da matéria escura

Argumentos da história térmica do universo indicam fortemente que matéria não bariônica domina o universo se $\Omega \approx 1$. Apesar de muitos candidatos para a matéria escura a sua exata natureza ainda permanece desconhecida.

4.5.4 Relíquias cósmicas

Transição de fase e outros processos no universo primordial podem ter criado defeitos topológicos, partículas exóticas e mini buracos negros. Um exemplo poderia ser a produção de monopólos que parece ser uma inevitável predição das teorias de grande unificação.

4.6 Modelando a energia escura com escalares

Como foi discutido neste capítulo, dados observacionais corroboram a expansão *acelerada* do universo, o que tem afetado consideravelmente a cosmologia moderna. Dentre os possíveis agentes responsáveis pela expansão acelerada do universo está a energia escura que representa uma parte significativa da energia total do universo. A maneira mais simples de levamos em conta a energia escura é incluímos um termo constante nas equações de Einstein (4.21) que recebe o nome de *constante cosmológica*. Por outro lado podemos considerar também modelos (FRW) (4.1) que podem ser descritos por campos escalares como ocorre na *quintessência* [51]. Esses modelos para a (FRW) cosmologia com um campo escalar podem ser descritos pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4}R + L(\phi, \partial_\mu \phi) \right), \quad (4.35)$$

onde g é o determinante da métrica, L é a densidade de lagrangiana e ϕ é o campo escalar. O elemento de linha é dado por (4.1). Considerando (4.15), o tensor energia momento é dado por

$$T_\nu^\mu = (\rho, -p, -p, -p). \quad (4.36)$$

Usando (4.2), as equações de Einstein (4.21) e (4.9) temos

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.37)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \left(\frac{\rho + 3p}{3} \right). \quad (4.38)$$

A equação de movimento para o campo escalar depende da densidade de lagrangiana $L(\phi, \partial_\mu \phi)$

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (4.39)$$

Dessa forma a densidade de energia e pressão são dados respectivamente por

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V, \quad (4.40)$$

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V, \quad (4.41)$$

e a equação de movimento para o campo escalar tem a forma

$$\ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} + V_{\phi} = 0, \quad (4.42)$$

onde V_{ϕ} representa $\frac{dV}{d\phi}$. Este procedimento implementa simplificadamente o tratamento da energia escura através de campos escalares.

4.7 Considerações finais

Este capítulo procurou apresentar os ingredientes básicos usados pela cosmologia padrão para tratar alguns problemas cujos entendimentos e tratamentos podem ser úteis e ampliados em outros cenários que possivelmente admitam soluções topológicas.

Capítulo 5

Teoria de campos e cosmologia

Dados observacionais e técnicas experimentais de observação da *história do universo* corroboram que o universo é marcado por fases distintas ao longo de sua evolução. Na tentativa dessa descrição a cosmologia foi gradualmente adquirindo elementos da teoria de campos adequados para a descrição e entendimentos dos paradigmas cosmológicos. No espírito de tal abordagem é natural supor que universo tenha passado por etapas de *transição de fase*, caracterizadas por uma forma peculiar de matéria e energia. Nesse sentido parece haver uma correspondência entre as transições de fase do universo e as quebras espontâneas de simetrias correspondentes à descrição dos campos fundamentais nas escalas de energia características das etapas do universo.

5.1 Quebra de simetria em teorias de gauge

Em teorias de partículas elementares a quebra espontânea de simetria é descrita em termos de campos escalares usualmente chamados de **campos de Higgs**. O vácuo da teoria é caracterizado por um valor esperado diferente de zero para o campo de Higgs

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \eta e^{i\theta} \quad (5.1)$$

e assim o estado de vácuo da teoria $|0\rangle$ não exibe as simetrias que mantêm o modelo invariante sob transformações de grupo. Podemos expor algumas peculiaridades da que-

bra de simetria em teoria de gauge utilizando o modelo de Higgs abeliano que descreve a eletrodinâmica escalar

$$L = \overline{D}_\mu \overline{\phi} D^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

onde ϕ é um campo escalar complexo e a derivada covariante é dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (5.3)$$

A barra denota o operador derivada covariante e o campo adjuntos. O tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$ é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (5.4)$$

onde A_μ é campo de gauge, e é o acoplamento de gauge e $V(\phi)$ pode ser da forma

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\overline{\phi} \phi - \eta^2)^2, \quad (5.5)$$

com λ e η constantes. O modelo (5.5) é invariante sob transformações locais de grupo $U(1)$:

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x). \quad (5.6)$$

Uma vez ocorrendo a quebra espontânea de simetria podemos representar o campo ϕ da conveniente forma

$$\phi = \eta + \frac{\phi_1}{\sqrt{2}}, \quad (5.7)$$

que uma vez substituído em (5.2) resulta em

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_1^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 A_\mu A^\mu + L_{int}, \quad (5.8)$$

onde

$$\mu = \sqrt{\lambda} \eta \text{ e } M = \sqrt{2} e \eta \quad (5.9)$$

e L_{int} inclui termos de ordem mais alta em ϕ_1 e A_μ . A quebra de simetria de gauge resulta então em um campo vetorial massivo e em uma partícula escalar com massa $\sqrt{\lambda} \eta$.

5.2 Teorias de gauge não abelianas

A quebra de simetria pode ocorrer em teoria abelianas as quais são invariantes sob transformações de gauge de um grupo arbitrário G . Essas transformações podem ser implementadas na n -ésima componente de um campo escalar ϕ_i através da ação de uma representação do grupo G ,

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = D_{ij}(g)\phi_j, \quad (5.10)$$

onde $D(g)$ é uma matriz $n \times n$ e $g \in G$. Uma representação é um mapeamento de G para operadores D agindo no espaço vetorial circundado pelos campos ϕ_i e que preservam o grupo multiplicação

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2). \quad (5.11)$$

Elementos de um grupo de Lie G (dimensão N) pode ser escrito na forma

$$g = \exp(-i\omega_a L^a), \quad (5.12)$$

onde ω_a são números reais arbitrários e L^a são os N geradores do grupo que satisfazem

$$[L^a, L^b] = -if_{abc}L^c, \quad (5.13)$$

onde f_{abc} são as constantes de estrutura do grupo G . Uma representação N -dimensional pode ser gerada pelas próprias constantes de estrutura

$$(T^a)_{bc} = -if_{abc}, \quad (5.14)$$

chamada de representação adjunta.

Os elementos de G que correspondem a transformações que mantêm o campo $\phi_0 (\neq 0)$ inalterado formam um grupo H , um subgrupo de G . Em termos da representação $D(g)$ de G o subgrupo H será

$$H = \{g \in G / D(g)\phi_0 = \phi_0\}. \quad (5.15)$$

Todos os geradores de H , t^α aniquilam ϕ_0 ,

$$t^\alpha \phi_0 = 0. \quad (5.16)$$

O vácuo

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \phi_0 \quad (5.17)$$

pode ser degenerado. Os valores esperados de ϕ em outros vácuos são da forma

$$D(g)\phi_0, \quad (5.18)$$

para algum $g \in G$. Dessa maneira pode-se definir uma variedade do vácuo equivalente M que pode ser identificado com o *espaço coset*

$$M = \frac{G}{H}. \quad (5.19)$$

A topologia de M desempenha um papel importante na determinação e estudo da natureza de *defeitos topológicos* [52].

5.3 Quebra espontânea de simetria

A transformação dos campos, que podem ser ou não abelianos, sob um determinado grupo de simetria, pode *esconder* uma quebra da simetria na forma de um valor esperado para o vácuo diferente de zero. Esse mecanismo pode ser relevante para teorias que descrevam campos de gauge massivos, bósons de Goldstone ou ainda campos de unificação. As propriedades que emergem das simetrias remanescentes permitem que o tratamento teórico, por exemplo, das interações dos campos se beneficie e explore outras possíveis abordagens de descrição dos modelos.

O modelo de grande unificação $SO(10)$ pode gerar outros subgrupos

$$SO(10) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} SU(5) \text{ (Georgi-Glashow)} \\ SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \text{ (Pati-Salam)} \end{array} \right\}, \quad (5.20)$$

pela quebra de simetria com um campo de Higgs na representação espinorial **126**. Nesta representação o grupo $SO(10)$ pode ser mapeado no grupo $Spin(10)$, cujos geradores podem ser definidos como

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2i} [\Gamma_j, \Gamma_k], j, k = 1, 2, \dots, 10, \quad (5.21)$$

onde Γ_j são as matrizes de Dirac em dez dimensões. Estas são as matrizes 32×32 que podem ser construídas do produto direto das matrizes de Pauli σ_k . Cada família de férmions de mão direita pertence a uma representação espinorial em 16 dimensões denotada por **16**. Estas famílias transformam-se sob a simetria $SU(5) \times U(1)_P \in Spin(10)$, admitindo a decomposição $SU(5)$

$$\mathbf{16} \rightarrow 1_5 + 10_1 + 5_{-3} \quad (5.22)$$

onde os subscritos são autovalores do operador

$$P = \sigma_{12} + \sigma_{34} + \sigma_{56} + \sigma_{78} + \sigma_{910}. \quad (5.23)$$

A quebra de simetria na representação de Higgs formada de produtos diretos de 16 e do seu conjugado $\overline{16}$

$$(\mathbf{16} \times \mathbf{16})_S = \mathbf{10} + \mathbf{126} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{16} \times \overline{\mathbf{16}} = \mathbf{1} + \mathbf{45} + \mathbf{210}, \quad (5.25)$$

onde o subscrito S denota o produto simétrico. A decomposição pertinente para análise das propriedades da quebra de simetria deste modelo seria

$$\mathbf{126} \rightarrow 1_{10} + 10_6 + 50_2 + \overline{5}_2 + \overline{45}_{-2} + \overline{15}_{-6} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{45} \rightarrow \overline{10}_4 + 24_0 + 1_0 + 10_{-4} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{10} \rightarrow \overline{5}_2 + 5_{-2}. \quad (5.28)$$

A quebra de simetria se dá primeiramente com um campo de Higgs na representação

espinorial **126** adquirindo um valor esperado para o vácuo diferente de zero ϕ_{126} na direção da componente 1_{10} . Fenomenologicamente isto ocorre em uma escala de massa em torno de 10^{16} e 10^{17} GeV , seguido de outro Higgs na representação adjunta **45** adquirindo um valor esperado para o vácuo de aproximadamente 10^{14} GeV . Finalmente, na escala eletrofraca, um campo de Higgs adicional na representação **10** adquire um valor esperado para o vácuo diferente de zero segundo o esquema geral

$$Spin(10) \xrightarrow{126} SU(5) \times Z_2 \quad (5.29)$$

$$Spin(10) \xrightarrow{45} SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times Z_2 \quad (5.30)$$

$$Spin(10) \xrightarrow{10} SU(3)_c \times U(1)_Q \times Z_2 \quad (5.31)$$

A simetria Z_2 mantida que emerge no primeiro estágio de (5.29) é gerada por rotações de 2π na direção P , isto é, por $\exp(2\pi i P/10)$. Isto é porque $\exp(2\pi i P/5)$ está contido em $SU(5)$ enquanto $\exp(2\pi i P/10)$ não está. A hipercarga Y pertence a 24_0 de **45** e comuta com rotações por $\exp(2\pi i P/10)$, enquanto que a representação **10** não possui componente em (5.28) com autovalor $P = 0$. Alternativamente, pode-se introduzir um estágio anterior de quebra de simetria com um campo de Higgs adicional na representação **45** ou **210**

$$Spin(10) \rightarrow SU(5) \times U(1)_P, \quad (5.32)$$

precedendo a seqüência dada em (5.29) a (5.31).

A quebra de simetria Pati-Salam se dá pela quebra de $SO(10)$ primeiro com um campo de Higgs na representação **54** e em seqüência com os campos ϕ_{126} e ϕ_{10} :

$$Spin(10) \xrightarrow{54} \left(\frac{Spin(6) \times Spin(4)}{Z_2} \right) \times Z_2^C \quad (5.33)$$

$$Spin(10) \xrightarrow{126} SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times Z_2 \quad (5.34)$$

$$Spin(10) \xrightarrow{10} SU(3)_c \times U(1)_Q \times Z_2 \quad (5.35)$$

onde pode-se destacar o isomorfismo local

$$Spin(6) \times Spin(4) \cong SU(4) \times SU(2) \times SU(2) \quad (5.36)$$

A simetria Z_2 é fatorada em (5.33) porque globalmente o subgrupo não é um produto direto: $Spin(4)$ e $Spin(6)$ têm uma intersecção não trivial. A simetria discreta global Z_2^C em (5.33) é gerada pelo operador de conjugação de carga C . Subsequentemente isto é quebrado por um campo de Higgs **126** e outra simetria Z_2 emerge como em (5.29) à (5.31).

O mecanismo de quebra espontânea de simetria apresentado neste capítulo pode ajudar a compor cenários cosmológicos consistentes com as previsões da cosmologia padrão como aquelas a respeito das fases do universo descritas no Capítulo 4. Ainda que consideremos escalas de grande unificação, 10^{16} GeV, a quebra de simetria pode manter a consistência desses modelos através de mecanismos equivalentes àqueles apresentados em (5.29) a (5.35). Essa consistência seria conduzida por setores como (5.8) ligados a subgrupos gerados pelos grupos de unificação. Em sistemas que podem conter transições de fase com simetria $\tilde{U}(1) \times U(1)$ [53]

$$L = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) + D_\mu\phi^*D^\mu\phi + D_\mu\chi^*D^\mu\chi - V(\phi, \chi), \quad (5.37)$$

onde $D_\mu\chi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\chi$ e $D_\mu\phi = (\partial_\mu + ig\tilde{A}_\mu)\phi$, ϕ e χ são os campos de Higgs e A_μ e $\tilde{A}_\mu$ são os campos de gauge, podem existir outras simetrias tais como $Z_2 \times U(1)$ e $Z_2 \times Z_2$ de acordo com a forma de (5.37) e que podem estar presentes em mecanismos de quebra de simetria como aqueles apresentados neste Capítulo.

Modelos em que o elemento central do grupo pertença a simetria $Z_2 \times Z_2$, por exemplo, poderiam suportar cenários, no contexto de teorias de unificação, que modelam o universo com defeitos topológicos como paredes de domínio [54].

5.4 Considerações finais

As etapas evolutivas do universo são marcadas por fases distintas. Algumas dessas fases devem ter sido caracterizadas por quebras de simetria cujas propriedades e características estão presentes nos casos exemplificados neste capítulo. Algumas etapas podem conter defeitos topológicos com importante papel em cenários que tentam descrever a evolução

do universo.

Capítulo 6

Defeitos topológicos

6.1 Considerações iniciais

A proposta deste capítulo é apresentar algumas propriedades e características peculiares de soluções topológicas, manifestando-as mais explicitamente em cenários cosmológicos.

6.2 Introdução

A não linearidade de alguns modelos em teoria quântica de campos pode originar soluções que dependendo da dimensionalidade e da topologia da variedade exibe uma variedade de formas e aplicações, por exemplo, no tratamento fenomenológico de várias áreas da física. Essas soluções são conhecidas como defeitos topológicos que em uma dimensão, por exemplo, apresenta uma forma característica proveniente do modelo de Goldstone

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial_\mu \phi) - V(\phi), \quad (6.1)$$

com $V(\phi)$ dado por (5.5), cuja equação de campo tem a solução

$$\phi(x) = \eta \tanh \left(\left(\frac{\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \eta x \right). \quad (6.2)$$

Os defeitos topológicos também podem aparecer como: *cordas*, *monopolos*, *paredes de domínio*, *texturas* e outras formas que podem ser relevantes dependendo da física e do modelo em consideração.

A energia do modelo (6.1) para uma solução $\phi(\mathbf{x})$ em D -dimensões é

$$E = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right] = I_1 + I_2, \quad (6.3)$$

onde a integral sobre todo o espaço converge e I_1 e I_2 incorporam os termos gradiente e potencial respectivamente. Considere por hora uma reescalonamento na coordenada $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \rightarrow \alpha \mathbf{x}$, de forma que a energia seja agora

$$E_\alpha = \alpha^{2-D} I_1 + \alpha^{-D} I_2. \quad (6.4)$$

Uma vez que $V(\phi)$ é não negativo para estes modelos, qualquer solução não trivial será instável para $D \geq 2$. Uma visão heurística para este fato é a diluição dimensional de (6.3). No entanto ao encontrarmos uma forma de nos evadir das dimensões extras (por processos de compactificação por exemplo) podemos, por exemplo, recriar as condições iniciais nos modelos que descrevem o início do universo. Esta é uma forma que a princípio permitiria a construção de mini laboratórios de cosmologia.

6.3 Topologia dos defeitos

Os defeitos topológicos podem também aparecer em modelos onde a simetria contínua é quebrada. Um exemplo simples é a quebra de simetria $U(1)$ conforme abordado na seção (5.1). Assim a topologia da variedade de vácuos M determina que defeitos podem aparecer em uma quebra particular de simetria. Paredes de domínio, por exemplo, podem se formar se M possui subgrupos desconectados, cordas podem se formar se M não é simplesmente conexo (isto é contém loops irreduzíveis) e monopolos podem se formar se M contém superfícies indeformáveis. As propriedades relevantes da variedade M são convenientemente melhor estudadas usando a teoria de homotopia. O n -ésimo grupo de homotopia $\pi_n(M)$ classifica qualitativamente mapeamentos distintos da esfera S^n (n

dimensional) em uma variedade M . Um grupo de homotopia não trivial ou grupo fundamental, por exemplo, indica que M não é simplesmente conectado e portanto sinaliza a existência potencial de cordas. Em geral, defeitos topológicos de uma particular dimensionalidade em um dado modelo pode ser classificado por elementos de um grupo homotópico apropriado da variedade.

<i>defeito</i>	<i>dimensão</i>	<i>classificação</i>
Paredes de domínio	2	$\pi_0(M)$
Cordas	1	$\pi_1(M)$
Monopolos	0	$\pi_2(M)$
Texturas	-	$\pi_3(M)$

Tabela 6.1 - Classificação topológica dos defeitos com grupos de homotopia $\pi_n(M)$

A tabela (6.1) sintetiza a correspondência entre alguns defeitos topológicos e os grupos de homotopia.

6.4 Paredes de domínio

Paredes de domínio têm origem em modelos com quebra espontânea de simetria discreta. O modelo geralmente envolve um conjunto de campos escalares reais ϕ_i com uma lagrangiana da forma

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 - V(\phi), \quad (6.5)$$

onde o potencial $V(\phi)$ tem um conjunto discreto de mínimos degenerados. Pode-se considerar que o mínimo do potencial seja igual a zero.

Uma parede plana ortogonal ao eixo z é descrita por funções $\phi_i(z)$ interpolando entre dois mínimos diferentes em $z \rightarrow \pm\infty$. Esta configuração de campo é invariante com respeito a boosts de Lorentz no plano xy indicando que apenas o movimento transversal da parede tem significado físico. As funções $\phi_i(z)$ satisfazem as equações

$$\phi_i''(z) - \frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0. \quad (6.6)$$

Levando em conta (6.5) o tensor energia-momento da parede

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_i - g_{\mu\nu} L, \quad (6.7)$$

tem a forma

$$T_\mu^\nu(z) = \phi'^2(z) \text{diag}(1, 1, 1, 0). \quad (6.8)$$

O fato que $T_3^3 = 0$ é uma consequência da lei de conservação

$$\partial_z T_3^3 = 0, \quad (6.9)$$

e o fato de que as componentes remanescentes de T_μ^ν sejam proporcionais a δ_μ^ν é devido à invariância tangencial de Lorentz da parede. A densidade superficial de energia da parede será dada por

$$\sigma = \int dz \phi'^2(z), \quad (6.10)$$

e de (6.8) pode-se observar que a tensão da parede nas duas direções tangenciais é também igual a σ .

6.5 Dinâmica da Parede de Domínio

6.5.1 Ação para a parede de domínio

Em muitas situações de interesse cosmológico a largura de uma parede de domínio pode ser negligenciada uma vez comparada com suas dimensões tangenciais e a parede pode ser tratada como uma superfície infinitamente fina. A história espaço-temporal da parede pode então ser representada por uma folha de mundo tridimensional

$$x^\mu = x^\mu(\zeta^a), \quad a = 0, 1, 2. \quad (6.11)$$

A ação que descreve a dinâmica da parede pode ser derivada de uma ação cuja forma é característica e comum na teoria de campo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L, \quad (6.12)$$

com L dado por (6.5).

Na vizinhança da folha de mundo é conveniente usar as coordenadas ζ^a e z , onde z é a distância normal à superfície (6.11). A métrica nestas coordenadas tem a forma

$$ds^2 = \gamma_{ab} d\zeta^a d\zeta^b - dz^2, \quad (6.13)$$

onde γ_{ab} é a métrica da folha de mundo

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu} x_{,a}^\mu x_{,b}^\nu. \quad (6.14)$$

e $x_{,a}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^a}$. O elemento de volume nas novas coordenadas será então

$$\sqrt{-g} d^4x = \sqrt{\gamma} d^3\zeta dz, \quad (6.15)$$

onde $\gamma = \det(\gamma_{ab})$. Observando que no limite de uma parede infinitamente fina todos os campos que aparecem na lagrangiana L dependem somente da direção z , obtem-se

$$S = -\sigma \int d^3\zeta \sqrt{\gamma}, \quad (6.16)$$

onde a constante σ é dada por

$$\sigma = - \int L dz. \quad (6.17)$$

A variação de (6.16) com respeito a métrica $g_{\mu\nu}$ dá o tensor energia-momento da parede

$$T^{\mu\nu} \sqrt{-g} = -2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \sigma \int d^3\zeta \delta^{(4)}[x - x(\zeta)] \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} x_{,a}^\mu x_{,b}^\nu. \quad (6.18)$$

6.5.2 Paredes em um universo em expansão

Uma análise perturbativa na parede pode ser feita considerando o modelo de um universo em expansão

$$ds^2 = a^2(\tau)(d\tau^2 - d\mathbf{x}^2). \quad (6.19)$$

Assumindo que a parede não é afetada pela perturbação está no plano xy , pode-se usar o gauge

$$\zeta^0 = \tau, \quad \zeta^1 = x, \quad \zeta^2 = y. \quad (6.20)$$

O movimento da parede é então descrito por uma função singular $z(x, y, \tau)$ e a ação (6.16) assume a forma

$$S = -\sigma \int \int \int d\tau dx dy a^3(\tau) \sqrt{\gamma_0}, \quad (6.21)$$

onde

$$\gamma_0 = 1 - \dot{z}^2 + z_x'^2 + z_y'^2, \quad z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ e} \quad (6.22)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial \tau}. \quad (6.23)$$

A equação do movimento correspondente será então

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\gamma_0^{-\frac{1}{2}} \dot{z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_0^{-\frac{1}{2}} z'_x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma_0^{-\frac{1}{2}} z'_y \right) = 0. \quad (6.24)$$

Supondo a expansão

$$a(\tau) \propto \tau^\alpha, \quad (6.25)$$

obtem-se a seguinte equação linearizada para pequenas perturbações

$$\ddot{z} + 3\alpha\tau^{-1} \dot{z} - z''_{xx} - z''_{yy} = 0. \quad (6.26)$$

A solução desta equação que é bem comportada quando $\tau \rightarrow 0$ é uma superposição de ondas da forma

$$z = A\tau^{-\nu} J_\nu(k\tau) \exp(ik_x x + ik_y y), \quad (6.27)$$

onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ e $\nu = \frac{(3\alpha-1)}{2}$.

6.6 Interação com partículas

Paredes de domínio também podem produzir espalhamento de partículas. O caso mais simples de partículas interagindo com uma parede é aquele referente ao modelo $\lambda\phi^4$. Considere que um campo χ descreva partículas acopladas ao campo ϕ da parede através da relação

$$L_{int} = -\frac{1}{2}\tilde{\lambda}\phi^2\chi^2, \quad (6.28)$$

onde $\tilde{\lambda}$ distingue-se do auto-acoplamento λ do campo ϕ . Com um *Ansatz* de ondas planas

$$\chi = \chi(z) \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y), \quad (6.29)$$

a equação de campo para $\chi(z)$ pode ser escrita como

$$\chi'' + k_z^2 - U(z)\chi = 0, \quad (6.30)$$

onde $k_z^2 = \omega^2 - k_x^2 - k_y^2 - m_\chi^2$ e m_χ é a massa de χ . O potencial $U(z)$ é dado por

$$U(z) = \tilde{\lambda} [\phi^2(z) - \eta^2] = -\tilde{\lambda}\eta^2 \cosh^{-2} \left[\left(\frac{\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \eta z \right], \quad (6.31)$$

onde $\phi(z)$ é a solução da parede de domínio para o modelo $\lambda\phi^4$. A equação (6.30) pode ser resolvida exatamente. O coeficiente de reflexão para as partículas χ tem a forma

$$R = \frac{\cos^2 \beta}{\sinh^2 \alpha + \cos^2 \beta}, \quad (6.32)$$

com

$$\alpha = \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi k_z}{\eta}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{8\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.33)$$

Se o comprimento de onda da partícula é muito menor que a largura da parede, $k_z \gg \delta^{-1} \sim \sqrt{\lambda} \eta$, então $\alpha \gg 1$, e o coeficiente de reflexão é exponencialmente pequeno, enquanto que no limite oposto com $k_z \rightarrow 0$, $R \approx 1$ e todas as partículas são refletidas.

Em cenários cosmológicos em que o universo é modelado como uma parede de domínio os mecanismos descritos neste Capítulo podem ser aplicados diretamente, por exemplo,

em modelos que tentam explicar a expansão do universo. Como foi feito detalhadamente em ([55]) usando-se as equações (4.37) e (4.42) sob o ponto de vista do tratamento apresentado neste Capítulo foi possível obter a forma do fator de escala $a(t)$, responsável pela expansão do universo. Neste sentido o coeficiente de reflexão para as partículas que aceleram o universo (6.33) está relacionado com o modelo (6.5) que se está considerando.

6.7 Considerações finais

Este capítulo observou que apropriadamente podemos utilizar algumas propriedades dos defeitos topológicos em modelos que possam conceber cenários cosmológicos com campos de partículas escalares.

Capítulo 7

Branas Bloch críticas e degeneradas

Em um recente estudo, Bazeia e Gomes [56] reportaram a aparência de branas espessas com estrutura interna, induzida por um parâmetro que controla a interação entre dois campos escalares acoplados à gravidade em $(4 + 1)$ dimensões em um espaço-tempo deformado e com uma dimensão extra. Este capítulo destacará a implementação de um controle sobre a espessura das branas sem a necessidade de mudança do parâmetro de potencial mas pela variação de um parâmetro associado a degenerescência da parede de domínio. Um outro aspecto enfatizado neste mesmo contexto é a existência de soluções qualitativamente diferentes e novas para um valor crítico do parâmetro de degenerescência que poderiam ser chamadas de branas Bloch críticas.

7.1 Introdução

Uma análise mais abrangente de modelos efetivos não lineares, ao menos ao nível clássico, revela uma crescente importância de soluções solitônicas e suas variedades de aplicações [31]-[34], [56] e [57]. Soluções tipo sólitons em teoria quântica de campos descrevem, por exemplo, monopólos, vórtices magnéticos, instantons em cromodinâmica quântica, cordas cósmicas e paredes de domínio magnéticas. Encontrar soluções clássicas exatas, particularmente sólitons é um dos problemas em modelos não lineares com campos interagentes. Como foi apontado por R. Rajaraman e E. Weinberg [58], em tais modelos não

lineares pode existir mais de uma solução clássica independente do tempo e cada uma delas corresponde a diferentes famílias de estados quânticos que podem ser construídos ao se perturbar aquelas soluções clássicas. Assim, importantes questões surgem quando estamos tratando modelos não lineares. Outro ponto importante desta análise é como encontrar diferentes soluções solitônicas e quais consequências e aplicações tais soluções podem trazer. Ambas questões podem ser consideradas em um problema específico conhecido como branas espessas que vem recebendo nos últimos anos considerável atenção [56], [59]-[77]. A idéia é mostrar que o trabalho recentemente publicado [56], possui, de fato, uma extensão de soluções solitônicas e, em consequência, a brana resultante pode apresentar uma estrutura muito rica, como por exemplo um parâmetro que controle sua degenerescência [24],[78], capaz de produzir estruturas com paredes duplas e correspondentemente uma brana Bloch espessa denominada brana Bloch degenerada. De fato, Bazeia e colaboradores [79] introduziram um modelo com um campo escalar com propriedades semelhantes às encontradas em soluções de paredes duplas e branas espessas [61], onde o controle de espessura da brana é feito através de um ajuste fino entre os parâmetros auto interagentes do potencial. Por outro lado, podemos considerar a possibilidade de controlar a espessura e a correspondente distância entre as paredes, além de eventualmente, ser possível uma solução no valor crítico do parâmetro de degenerescência com diferentes e interessantes comportamentos para a brana.

Como foi visto no Capítulo 2, sistemas com equações diferenciais não lineares de segunda ordem com dois campos escalares relativísticos interagentes podem ser tratados pelo método das órbitas tentativas, pertinente para análise de tais sistemas [36], [80]. Por outro lado de Souza Dutra apresentou um método para se encontrar soluções solitônicas adicionais para aqueles casos especiais cujas soluções solitônicas são BPS [13], e que posteriormente foi estendido para modelos mais gerais [37], [14], conforme exposto no Capítulo 3.

Como vem sendo observado, as soluções solitônicas BPS têm encontrado aplicações numa extensa variedade de sistemas naturais cuja dinâmica pode ser aproximadamente descrita por modelos não lineares no contexto da teoria quântica de campos, com campos escalares interagentes em $(1 + 1)$ dimensões [23],[81]. Tais modelos, entretanto, podem ser generalizados pela inclusão na densidade de lagrangiana de alguns termos mínimos

que possam quebrar a simetria de Lorentz e/ou CPT.

Na orientação da importância de se analisar as consequências de soluções solitônicas adicionais em um dado modelo não linear, é possível que aqueles modelos com quebra de simetria de Lorentz em $(1 + 1)$ dimensões exibam soluções adicionais cuja energia *BPS* são menores que aquelas encontradas em [44] e que ao menos modelos mais gerais com quebra de Lorentz em $(1 + 1)$ dimensões que admitam soluções solitônicas possam ser construídos [45].

Ao descrevermos as propriedades e consequências que se originam de sistemas com soluções solitônicas clássicas usando o método descrito na referência [13], um aspecto importante é devido ao fator de deformação numa forma geral, usualmente presente na métrica, que pode ser considerado para cada grupo de soluções variadas encontradas e que poderão ser construídas. A consideração a respeito da estabilidade e os modos zero de cada grupo de soluções solitônicas no contexto de cenários que utilizem branas para modelar o universo bem como aplicabilidade dessa classe de soluções são aspectos importantes dessa discussão.

Algumas características e propriedades básicas desses objetos conhecidos como branas são apresentadas introdutoriamente no Apêndice B.

7.2 Soluções analítica para dois campos escalares interagentes acoplados à gravidade.

Considere a ação de uma teoria da gravidade em cinco dimensões acoplada com dois campos escalares reais que pode ser representada por [68]

$$S = \int d^4x dr \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) - V(\phi, \chi) \right], \quad (7.1)$$

onde

$$g \equiv \det(g_{ab}), \quad (7.2)$$

com o espaço quadridimensional tendo invariância de Poincaré

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = e^{2A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (7.3)$$

com

$$a, b = 0, \dots, 4, \quad (7.4)$$

onde r é a dimensão extra, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski usual e a função exponencial presente no elemento de linha é conhecida como fator de deformação. A hipótese usual a respeito do fator de deformação é sua dependência em relação apenas a dimensão extra r , bem como a mesma dependência dos campos escalares considerados. Sob estas considerações, podemos determinar as equações de movimento resultantes para o sistema (7.1) como em [56],[68]

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + 4\frac{dA}{dr}\frac{d\chi}{dr} = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \chi}, \quad (7.5)$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + 4\frac{dA}{dr}\frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \phi}, \quad (7.6)$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -\frac{2}{3} \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right], \quad (7.7)$$

e

$$\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right] - \frac{1}{3}V(\phi, \chi). \quad (7.8)$$

As equações (7.5) e (7.6) são as equações de movimento correspondentes aos campos ϕ e χ . As equações (7.7) e (7.8) são provenientes das componentes temporal e espacial das equações de Einstein (4.21).

O grupo de equações acopladas de segunda ordem não lineares tem um conjunto correspondente de equações diferenciais de primeira ordem cujas soluções também fazem parte daquelas, que pode ser escrito como

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi}, \quad (7.9)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi}, \quad (7.10)$$

e

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{2}{3}W(\phi, \chi), \quad (7.11)$$

desde que o potencial $V(\phi, \chi)$ esteja restrito a uma classe de potenciais que possam ser escritos em termos de um tipo de superpotencial

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{4}{3}W(\phi, \chi)^2 \right]. \quad (7.12)$$

É interessante observar que uma vez de posse das soluções das duas equações de primeira ordem para os campos escalares interagentes é relativamente simples a tarefa de se determinar o fator de deformação $A(r)$. No sentido de criarmos um ambiente familiar para esta análise é importante tratarmos de um exemplo concreto que, quando possível, possa ter soluções exatas analíticas [70]. Podemos considerar alguns modelos recentemente apresentados na literatura como um modelo cujo superpotencial é equivalente àquele usado por Bazeia e colaboradores [56] e que eventualmente possa contribuir com algumas propriedades interessantes cujas soluções em particular, por exemplo, permitem o controle do comportamento do fator de deformação sem restringir os parâmetros do potencial.

O superpotencial que podemos considerar é escrito como

$$W(\phi, \chi) = \phi \left[\lambda \left(\frac{\phi}{3} - a^2 \right) + \mu \chi^2 \right], \quad (7.13)$$

com a apropriada equivalência àquele considerado em [56] pela conveniente escolha dos parâmetros

$$a = 1, \quad (7.14)$$

$$\lambda = -1 \quad (7.15)$$

e

$$\mu = -r. \quad (7.16)$$

As etapas que se seguem incluem a solução explícita das equações diferenciais de primeira ordem empregando-se para tal o método descrito no Capítulo 2, embora também o poderíamos fazê-lo pela aplicação do método das órbitas tentativas [23], [36]. Deste

ponto de vista podemos notar que é possível escrever a relação

$$\frac{d\phi}{W_\phi} = dr = \frac{d\chi}{W_\chi}, \quad (7.17)$$

onde o elemento diferencial dr é um tipo de invariante. A relação (7.17) conduz à seguinte equação diferencial

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}, \quad (7.18)$$

que em geral é não linear e permite relacionar os campos escalares do modelo. Conforme foi discutido no Capítulo 2 o ponto interessante aqui é que, uma vez que seja possível resolver (7.18) completamente para um dado modelo, a função $\phi(\chi)$, que na realidade será a equação para a órbita geral, poderá eliminar um dos campos desacoplando as equações diferenciais de primeira ordem e as unificando. Finalmente, as equações diferenciais de primeira ordem não lineares desacopladas podem ser resolvidas em geral ao menos numericamente. Pela substituição das derivadas do superpotencial (7.13) com respeito aos campos em (7.18) tem-se

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{\lambda(\phi^2 - a^2) + \mu\chi^2}{2\mu\phi\chi}, \quad (7.19)$$

que pode ser reescrita como uma equação diferencial linear

$$\frac{d\rho}{d\chi} - \frac{\lambda}{\mu\chi} = \chi, \quad (7.20)$$

redefinindo os campos

$$\rho = \phi^2 - a^2. \quad (7.21)$$

Agora, as soluções gerais são facilmente obtidas como

$$\rho(\chi) = \phi^2 - a^2 = c_0\chi^{\frac{\lambda}{\mu}} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\chi^2, \quad (7.22)$$

para

$$\lambda \neq 2\mu, \quad (7.23)$$

e

$$\rho(\chi) = \phi^2 - a^2 = \chi [\ln(\chi) + c], \quad (7.24)$$

para

$$\lambda = 2\mu, \quad (7.25)$$

onde c_0 e c_1 são constantes arbitrárias de integração. Ao se substituir as soluções (7.22) e (7.24), por exemplo na equação diferencial para o campo χ , obtemos a seguinte equação diferencial para o campo $\chi(r)$,

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm 2\mu\chi \sqrt{a^2 + c_0\chi^{\frac{\lambda}{\mu}} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\chi^2}, \quad (7.26)$$

para

$$\lambda \neq 2\mu,$$

e

$$\frac{d\chi}{dr} = \pm 2\mu\chi \sqrt{a^2 + \chi^2 [\ln(\chi) + c_1]}, \quad (7.27)$$

para

$$\lambda = 2\mu.$$

Em geral uma solução explícita para as equações (7.26) e (7.27) pode não ser possível, no entanto, pode-se verificar numericamente que as soluções pertencem a uma mesma classe e algumas delas podem ser escritas em termos funções analíticas elementares, e em alguns casos pode ser possível obter vários tipos de soluções solitônicas como aquelas que foram obtidas no Capítulo 2.

Para o caso do fator de deformação, presente no conjunto de equações de primeira ordem originárias do superpotencial, é necessário computarmos a função $A(r)$ pela integração de (7.11). Considerando a extensa variedade de situações que envolvam o fator de deformação, pode ser mais conveniente expressá-la de uma forma geral em termos do próprio campo do que em função de variáveis espaciais, o que poderia permitir considerações qualitativas com respeito a seu comportamento. Esta idéia de forma mais concreta pode ser empregada pela manipulação adequada das equações de órbita (7.22) e (7.24) para $A(r)$ a fim de o escrevermos como função do campo $\chi(r)$, de forma que ao se eliminar a dependencia de $A(\phi, \chi)$ pelo uso da equação de órbita ($\phi \equiv \phi(\chi)$), se obtenha

$$\frac{dA(r)}{dr} = \frac{dA(\chi)}{d\chi} \frac{d\chi}{dr} = \frac{dA(\chi)}{d\chi} \frac{\partial W(\phi(\chi), \chi)}{\partial \chi} = -\frac{2}{3}W(\phi(\chi), \chi) \quad (7.28)$$

que conduz a

$$\frac{dA(\chi)}{d\chi} = -\frac{2}{3} \frac{W(\phi(\chi), \chi)}{W_\chi(\phi(\chi), \chi)}, \quad (7.29)$$

onde

$$W_\chi(\phi(\chi), \chi) \equiv \frac{\partial W(\phi(\chi), \chi)}{\partial \chi}. \quad (7.30)$$

Ao substituírmos o superpotencial do modelo considerado (7.13) obtém-se

$$\frac{dA(\chi)}{d\chi} = -\frac{1}{3\mu\chi} \left[\lambda \left(\frac{\phi(\chi)^2}{3} - a^2 \right) + \mu\chi^2 \right], \quad (7.31)$$

e que depois de algumas simples manipulações usando a equação de órbita conduz a

$$\frac{dA(\chi)}{d\chi} = \left(\frac{2a^2}{9} \right) \chi^{-1} - \frac{2}{9} \left(\frac{\lambda - 3\mu}{\lambda - 2\mu} \right) \chi - \frac{\lambda c_0}{9\mu} \chi^{\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)}, \quad (7.32)$$

para

$$\lambda \neq 2\mu,$$

e

$$\frac{dA(\chi)}{d\chi} = \left(\frac{2\lambda a^2}{9\mu} \right) \chi^{-1} - \frac{(3\mu + \lambda c_1)}{9\mu} \chi^2 - \frac{1}{3\mu} \chi \ln(\chi), \quad (7.33)$$

para

$$\lambda = 2\mu.$$

Finalmente ao fazermos a integração sobre o campo χ , obtemos

$$A(\chi) = \alpha_0 + \left(\frac{2\lambda a^2}{9} \right) \ln(\chi) - \frac{1}{9} \left(\frac{\lambda - 3\mu}{\lambda - 2\mu} \right) \chi^2 - \frac{c}{9} \chi^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}, \quad (7.34)$$

para

$$\lambda \neq 2\mu,$$

e

$$A(\chi) = \alpha_1 + \left(\frac{2a^2}{9} \right) \ln(\chi) - \frac{(3\mu + \lambda c_1)}{18\mu} \chi^2 - \frac{1}{6\mu} \chi^2 \left(\ln(\chi) - \frac{1}{2} \right), \quad (7.35)$$

para

$$\lambda = 2\mu,$$

onde α_0 e α_1 são constantes arbitrárias de integração escolhidas convenientemente de

forma a garantir que $A(r = 0) = 0$. É importante destacar que as soluções (7.34) e (7.35) são completamente gerais para este modelo e, como consequência, pode ser usada para o fator de deformação para uma escolha arbitrária dos parâmetros do potencial mesmo para casos onde as soluções não possam ser encontradas através de funções analíticas elementares. Este procedimento pode ser comparado ao caso tratado em [56] para o qual

$$\chi(y) = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2\text{sech}(2ry)}, \quad (7.36)$$

e correspondentemente

$$A(y) = \frac{1}{9r} [(1 - 3r)] \tanh(2ry)^2 - 2 \ln(\cosh(2ry)) \quad (7.37)$$

onde foram usadas as variáveis originais e parâmetros definidos em [56], que é precisamente o resultado obtido por integração direta nas variáveis espaciais.

Por estes resultados encontrados é clara a sensibilidade do fator de deformação ao campo χ . Por exemplo, quando $\chi(r)$ varia suavemente em uma dada região o mesmo ocorrerá com $A(r)$. De certa maneira, podemos prever o comportamento do fator de deformação pelo comportamento de χ .

7.3 Soluções solitônicas e fatores de deformação correspondentes

Com o objetivo de explorar com mais amplitude o alcance das soluções características da equação (7.26), podemos partir daquelas soluções resultantes do modelo (7.13) bem como da obtenção explícita do fator de deformação para cada conjunto de soluções solitônicas nos cenários de modelos de branas, conforme discorrem alguns trabalhos na literatura [56].

Embora este programa leve em conta o procedimento descrito até agora, o modelo (7.13) admite um conjunto especial de soluções que eventualmente não podem ser obtidas pelo método aqui descrito e que, pela particularidade, poderiam ser chamadas de soluções

isoladas, uma vez que se caracteriza pelo congelamento de um campo,

$$\bar{\chi}_I(r) = 0, \quad (7.38)$$

de modo a não fazer sentido escrever a equação diferencial (7.19) para este caso e, consequentemente, considerar portanto qualquer estrutura interna para a brana [56]. Apesar disso o sistema admite uma solução solitônica dada por

$$\bar{\phi}_I(r) = \pm a \tanh(\lambda ar), \quad (7.39)$$

onde os sinais referem-se às soluções kink e anti-kink respectivamente e que podemos considerar em menor detalhe aqui uma vez que o modelo é efetivamente de um campo e a proposta inicial é fazer a análise de soluções não triviais para dois campos.

7.4 Paredes Bloch

O tipo característico usual de paredes de domínio, conhecido como paredes Bloch [56] pode ser obtido no espírito da metodologia proposta até agora. O conjunto de soluções pode ser obtida ao termos $c_0 = 0$ na expressão (7.26). Neste caso a equação pode ser resolvida analiticamente para quaisquer valores de λ e μ , desde que $\lambda > 2\mu$ para que se obtenha solução real. Tal situação conduz à seguinte solução para o campo $\chi(r)$

$$\chi_{BW}(r) = a \sqrt{\frac{\lambda - 2\mu}{\mu}} \operatorname{sech}(2\mu ar), \quad (7.40)$$

que apresenta o comportamento topológico

$$\chi_{BW}(r)_{r \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0. \quad (7.41)$$

A correspondente solução tipo kink para o campo ϕ é dada por

$$\phi_{BW} = \pm a \tanh(2\mu ar), \quad (7.42)$$

que conecta os vácuos do potencial. Neste caso o fator de deformação da configuração é semelhante ao originado na situação considerada pela equação (7.37). Essas estruturas são chamadas de paredes Bloch para se distinguirem de outros tipos de estruturas similares que podem aparecer no mesmo modelo.

Algumas soluções que podem ser exploradas se apresentam em diferentes intervalos dos parâmetros do potencial quando comparadas com aquelas que consideradas em [56]. Por exemplo quando $\lambda = \mu$, em termos dos parâmetros usados em [56], corresponderia a $r = 1$. Entretanto o intervalo característico daquelas soluções seria

$$0 < r < \frac{1}{2}. \quad (7.43)$$

7.5 Paredes Bloch degeneradas

Outras soluções solitônicas podem ser encontradas para valores diferentes de zero da constante de integração c_0 . No Capítulo 2 foi observado que ao menos em três particulares casos a equação (7.26) pode ser resolvida analiticamente. Para $c_0 < -2$ e $\lambda = \mu$ foi encontrado que as soluções para o campo $\chi(r)$ são soluções tipo lump que se anulam assintoticamente quando $r \rightarrow \pm\infty$. Por outro lado o campo $\phi(r)$ exibe um perfil tipo kink.

Estas soluções clássicas se apresentam como

$$\tilde{\chi}_{DBW}^{(1)}(r) = \frac{2a}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\mu ar) - c_0}, \quad (7.44)$$

e

$$\tilde{\phi}_{DBW}^{(1)}(r) = a \frac{\sqrt{c_0^2 - 4} \sinh(2\mu ar)}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\mu ar) - c_0}, \quad (7.45)$$

para

$$\lambda = \mu, c_0 < -2, \quad (7.46)$$

e seu fator de deformação será, então dado por

$$e^{2A(r)} = N_\alpha \left[\frac{2a}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\mu ar) - c_0} \right]^{\left(\frac{4a^2}{9}\right)} e^\Upsilon \quad (7.47)$$

onde $\Upsilon = \frac{2a[c_0^2 - 4a - c_0 \sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\mu ar)]}{9(\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\mu ar) - c_0)^2}$ e N_α é escolhido apropriadamente para garantir que

$$e^{2A(0)} = 1, \quad (7.48)$$

para se tratar o gráfico convenientemente.

Um interessante aspecto destas soluções é que, para alguns valores de $c_0 < -2$, $\tilde{\phi}_{DBW}^{(1)}(r)$ exibe um perfil de kink duplo. Podemos falar então da formação de uma estrutura dupla de parede estendida ao longo da dimensão espacial. Na figura 7.1 pode-se contrastar o caso estudado em [56] para algumas configurações típicas dos fatores de deformação no caso em que $\lambda = \mu$ quando c_0 está próximo e distante de valores críticos, $c_0 = -2$, no presente caso.

É interessante notar que o comportamento da métrica vincula-se ao intervalo de valores críticos das constantes de integração c_0 , como a aparência de uma região plana mais pronunciada, onde a métrica se comportaria tipicamente de forma minkowskiana. De fato este setor "minkowskiano" se alarga a medida que c_0 se aproxima do valor crítico.

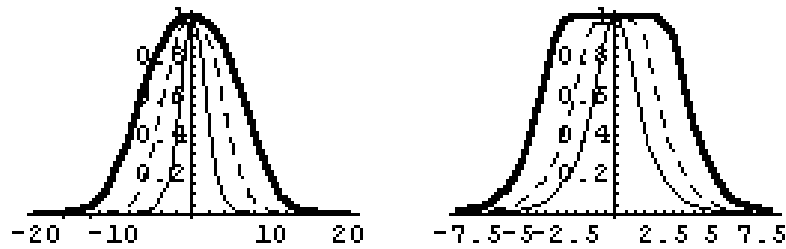


Figura 7-1: Fator de deformação presente na referência [56] com parâmetros: $r = 0.05$ (linha sólida cheia), 0.1 (linha pontilhada) e 0.3 (linha sólida menos densa) (figura da esquerda). Fator de deformação para o caso onde: $a = 1, \lambda = \mu, c_0 \neq -2$ e $c_0 = -2.00001$ (linha sólida espessa); -2.005 (linha pontilhada); -3.0 (linha sólida menos densa) (figura da direita).

Um comportamento semelhante é também observado nas soluções clássicas. Neste

caso o campo $\chi(r)$ tem um perfil tipo lump dado por

$$\tilde{\chi}_{DBW}^{(2)}(r) = -\frac{2a}{\sqrt{\sqrt{1-16c_0} \cosh(4\mu ar) + 1}}, \quad (7.49)$$

e a solução para o campo $\phi(x)$

$$\tilde{\phi}_{DBW}^{(2)}(r) = \sqrt{1-16c_0} \frac{\sinh(4\mu ar)}{\sqrt{1-16c_0} \cosh(4\mu ar) + 1}, \quad (7.50)$$

para

$$\lambda = 4\mu, c_0 < \frac{1}{16} \quad (7.51)$$

e o fator de deformação correspondente é dado por

$$e^{2A(r)} = N_\alpha \Xi^{\left(\frac{16a^2}{9}\right)} \exp \left\{ -\frac{4a^2}{9} \left[\frac{1 + 32a^2c_0 + \sqrt{1-16c_0} \cosh(4\mu ar)}{(\sqrt{1-16c_0} \cosh(4\mu ar) + 1)^2} \right] \right\} \quad (7.52)$$

onde $\Xi = \frac{-2a}{\sqrt{\sqrt{1-16c_0} \cosh(4\mu ar) + 1}}$ e N_α como antes, convenientemente escolhido de forma que se tenha $e^{2A(0)} = 1$.

Nesta situação $\tilde{\phi}_{DBW}^{(2)}(r)$ também apresenta um perfil de kink duplo para alguns valores de c_0 . Conforme pode ser observado da figura 7.2, originam-se dois picos no extremo da região plana e quando c_0 se aproxima do valor crítico $c_0 = \frac{1}{16}$, observa-se um distanciamento entre os dois picos no fator de deformação.

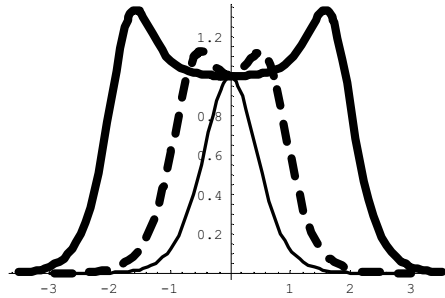


Figura 7-2: Fator de deformação para o caso onde: $a = 1, \lambda = 4\mu, c_0 \neq \frac{1}{16}$ e $c_0 = \frac{1}{16.0001}, \frac{1}{17}, \frac{1}{200}$. Observe a aparência dos dois picos, sinalizando uma estrutura rica para o modo zero.

7.6 Paredes Bloch críticas

A extensão e amplitude que a possibilidade apresentada para soluções completas e analíticas do ponto de vista do procedimento BPS e da teoria de campos, suscita uma análise quantitativa e qualitativa de profunda riqueza e propriedade para várias observações na natureza. Uma classe interessante de soluções solitônicas analíticas da equação (7.26) podem existir quando se tem $\lambda = \mu$ com parâmetro crítico $c_0 = -2$ e para $\lambda = 4\mu$ com parâmetro crítico $c_0 = \frac{1}{16}$. O que tais soluções revelam, é que ambos os campos $\chi(r)$ e $\phi(r)$ apresentam um perfil tipo kink e o fator de deformação apresenta um comportamento notável que pode ser visto na figura 7.3, onde é evidente a existência de duas regiões “tipo Minkowski ” separadas por uma transição. Este argumento é reforçado pelo comportamento da densidade de energia das configurações solitônicas, conforme pode ser observado na figura 7.4, bem como também do potencial estabilidade conforme se observa das figuras 7.5 e 7.6.

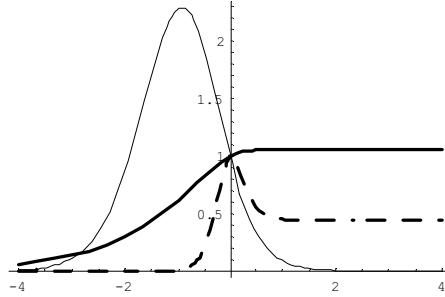


Figura 7-3: Fator de deformação para o caso onde: $\lambda = 4\mu$, $c_0 = \frac{1}{16}$, $\mu = 1$, $a = 0.6$ (linha sólida cheia), $a = 1.2$ (linha pontilhada) e o caso onde $a = 2$ e $\mu = 0.2$.

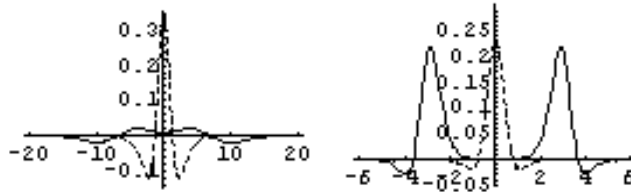


Figura 7-4: Densidade de energia da referência [56] $a = 0.05$ e 0.30 (figura da esquerda). Densidade de energia para o caso onde: $a = 1$, $\lambda = \mu = 1$, $c_0 \neq -2$ e $c_0 = -2.00001$; -4.0 (figura da direita).

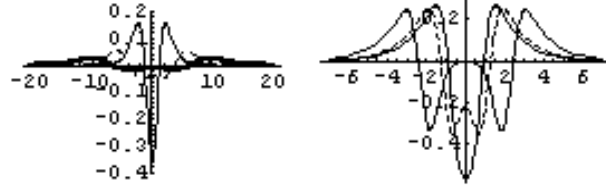


Figura 7-5: Comparação do potencial estabilidade da referência [56] (figura da esquerda) com $a = 0.05; 0.1; 0.3$ e o caso onde $\lambda = \mu$, $a = 1$ e $c_0 = -2.001; -2.1; -2.5$.

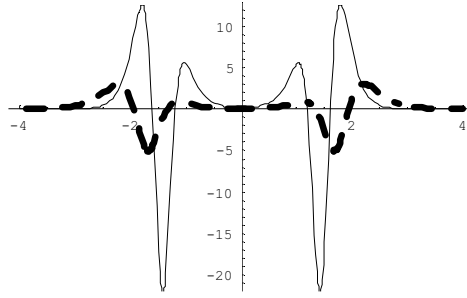


Figura 7-6: Potencial estabilidade para o caso onde $c_0 = \frac{1}{16.0001}$ com $a = 1$ (linha pontilhada), e $a = 1.2$ (linha sólida).

Este conjunto de soluções poderiam ser chamadas de paredes Bloch críticas. Para a seguinte escolha de parâmetro e da contante de integração $\lambda = \mu$, $c_0 = -2$, a solução clássica para os campos $\chi(r)$ e $\phi(r)$ pode ser escrita como

$$\chi_{CBW}^{(1)}(r) = \frac{a}{2} [1 \pm \tanh(\mu ar)] \quad (7.53)$$

e

$$\phi_{CBW}^{(1)}(r) = \frac{a}{2} [\tanh(\mu ar) \mp 1]. \quad (7.54)$$

O fator de deformação correspondente então será

$$e^{2A(r)} = N_\alpha \left[\frac{a}{2} [1 \pm \tanh(\mu ar)] \right]^{\left(\frac{2a^2}{9}\right)} e^\Lambda, \quad (7.55)$$

onde $\Lambda = -\frac{a^2}{9} \{ [1 \pm \tanh(\mu ar)]^2 + \frac{c_0}{a} [1 \pm \tanh(\mu ar)] \}$. Para $c_0 = \frac{1}{16}$ e $\lambda = 4\mu$, o conjun-

to seguinte de paredes de domínio será obtido

$$\tilde{\chi}_{CBW}^{(2)}(x) = -\sqrt{2}a \frac{\cosh(\mu ar) \pm \sinh(\mu ar)}{\sqrt{\cosh(2\mu ar)}}, \quad (7.56)$$

e

$$\tilde{\phi}_{CBW}^{(2)}(x) = \frac{a}{2}(1 \mp \tanh(2\mu ar)). \quad (7.57)$$

O fator de deformação, neste caso, será dado por

$$e^{2A(r)} = N_\alpha \left[\frac{-ae^{\pm\mu ar}}{\sqrt{\cosh(2\mu ar)}} \right]^{\left(\frac{16a^2}{9}\right)} e^\Pi \quad (7.58)$$

$$\text{onde } \Pi = -\frac{2a^2}{9} \tanh(2\mu ar) [16a^2 c_0 \tanh(2\mu ar) \mp (1 + 32a^2 c_0)].$$

7.7 Estabilidade e modos zero

Em geral ao se levar em conta um conjunto completo de flutuações da métrica em torno das soluções clássicas em um modelo onde a gravidade está acoplada a escalares, uma análise perturbativa da métrica pode ser menos direta. Este fato se deve a um sistema relativamente complexo de equações diferenciais não lineares de segunda ordem acopladas [56],[68],[70]. Entretanto existe um setor onde as flutuações da métrica se desacoplam dos escalares, são transversais, isto é, projetadas em um plano perpendicular à direção de propagação e cujo traço é nulo. Uma descrição do procedimento usado nesse tratamento é dada no Apêndice A.

Ao se perturbar a métrica

$$ds^2 = e^{2A(r)}(\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (7.59)$$

de onde após algumas manipulações algébricas chega-se à

$$\frac{d^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\bar{h}_{\mu\nu}}{dr} - e^{-2A} \partial_\rho \partial^\rho \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (7.60)$$

onde

$$\bar{h}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu\lambda\rho} h^{\lambda\rho}, \quad (7.61)$$

e $P_{\mu\nu\lambda\rho}$ é o operador de projeção, que está apresentado no Apêndice A.

Após redefinirmos a perturbação métrica

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{3}{2}A} \psi_{\mu\nu}, \quad (7.62)$$

e transformarmos a variável

$$z = \int e^{-A(r)} dr, \quad (7.63)$$

obtemos, após substituírmos (7.62) e (7.63) em (7.60), um tipo de equação de Schrödinger

$$-\frac{d^2 \psi_{\mu\nu}}{dz^2} + U_{eff}(z) \psi_{\mu\nu} = k^2 \psi_{\mu\nu}, \quad (7.64)$$

onde o potencial efetivo é definido como

$$U_{eff}(r) = \frac{9}{4} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{d^2 A}{dr^2}, \quad (7.65)$$

de forma que a equação diferencial (7.64) possa ser fatorada como

$$a^\dagger a \psi_{\mu\nu}(z) \equiv \left(-\frac{d}{dz} + \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \left(\frac{d}{dz} + \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \psi_{\mu\nu}(z) = k^2 \psi_{\mu\nu}, \quad (7.66)$$

onde devido à estrutura supersimétrica da equação diferencial para o modo zero e uma vez que o termo k^2 é positivo definido ou zero não haverá solução cujos autovalores sejam negativos [75], de forma que o sistema seja estável sob estas condições. Nesta altura da análise calcula-se a solução de modo zero devido ao fato relevante que ela garante a existência do graviton quadridimensional sem massa [56],[59],[61],[70]. Entretanto é pertinente e interessante observar que a forma do modo zero do sistema é semelhante ao fator de deformação de modo que é natural cogitar-se uma possível relação entre eles, e mais que isso, essas duas quantidades podem realmente apresentar a mesma forma genérica.

Com esta idéia, considerando a equação (7.60), e uma redefinição da função $\bar{h}_{\mu\nu}$ como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = e^{-2A(r)} \xi_{\mu\nu}(r), \quad (7.67)$$

obtemos a seguinte equação

$$\frac{d^2 \xi_{\mu\nu}}{dr^2} - 2 \left(\frac{d^2 A}{dr^2} + 2 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 \right) \xi_{\mu\nu} + k^2 e^{-2A} \xi_{\mu\nu} = 0, \quad (7.68)$$

que, para o caso do modo zero ($k^2 = 0$) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{d}{dr} + 2 \frac{dA}{dr} \right) \left(\frac{d}{dr} - 2 \frac{dA}{dr} \right) \xi_{\mu\nu} = 0, \quad (7.69)$$

e finalmente obtemos a forma da solução do modo zero, a menos naturalmente do fator de normalização

$$\xi_{\mu\nu}^{(0)} = N_0 e^{2A(r)}. \quad (7.70)$$

Uma outra extensão de nossa análise refere-se ao potencial estabilidade, que em razão de uma eventual dificuldade em relação a expressão do fator de deformação escrito possivelmente em uma forma analítica fechada da transformação de variável $r = r(z)$, pode ser mantido em função da variável original r , de forma que

$$\frac{dA}{dz} = e^A \frac{dA}{dr}, \quad (7.71)$$

conforme procedimento empregado na referência [71]. Assim o potencial efetivo pode ser escrito como

$$U_{eff}(r) = \frac{3}{4} e^{2A} \left(2 \frac{d^2 A}{dr^2} + 5 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 \right). \quad (7.72)$$

É claro que este potencial efetivo (7.72) é exatamente aquele (7.65), somente que na variável z , de forma que o primeiro fosse reescalado. No entanto a forma geral e características em ambas variáveis são as mesmas. O potencial de estabilidade é representado nas figuras 7.5 a 7.7. Na figura 7.5 é interessante analisar o componente de um dos casos degenerados apresentados como aqueles tratados na referência [56]. Já a figura 7.6, mostra a estrutura do potencial na situação onde duas regiões interativas são separadas

por uma força aproximadamente nula. E finalmente, na figura 7.7, pode-se observar que aqueles potenciais separados recombina-se em um.

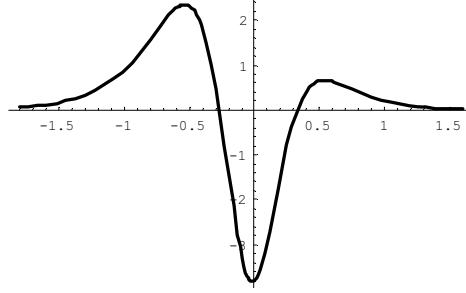


Figura 7-7: Potencial estabilidade típico para o caso crítico, para ambos os casos em que $\lambda = \mu$ e $\lambda = 4\mu$.

A idéia essencial aqui é apresentar uma possível situação que, além de rica, carrega em si uma série de propriedades relevantes e provenientes de um conjunto completo de soluções que naturalmente, como consequência, fornecem informações sobre a estrutura do fator de deformação e sobre o cenário de modelos de branas.

Podemos citar por exemplo o fato destas soluções permitirem o controle, por meio de um parâmetro que não se encontra no potencial $V(\phi, \chi)$, da região em que a métrica é aproximadamente plana. Além do mais, em um dado caso crítico, existem duas dessas regiões, separadas por uma região de transição.

7.8 Cosiderações oportunas

Modelos que apresentam interações entre dois campos escalares acoplados à gravidade em $(4, 1)$ dimensões em um espaço-tempo deformado, com uma dimensão extra podem conter propriedades e informações importantes concedidas por uma classe geral de soluções solitônicas, que em essência resulta de uma motivante investigação com respeito ao modelo analisado no trabalho [56]. Um número de propriedades interessantes foram descobertas pelo tratamento empregado em nossa análise, como por exemplo um tipo de parede de domínio extrema do tipo I, como classificado em [57], ao se tratar das paredes de domínio críticas, assim denominadas, conforme é mostrado na figura 7.3.

Uma consequência que surge naturalmente das soluções gerais que apresentamos é o controle da espessura das paredes de domínio por um parâmetro externo (particularmente o potencial com campo escalar), que pode ser feito sem comprometimento dos parâmetros do potencial alternativamente ao realizado em alguns modelos [56],[61].

É surpreendente a possibilidade de podermos controlar a forma do espaço-tempo sem nenhuma intervenção ad-hoc, mas naturalmente, pela previsão dos resultados do tratamento aplicado, como a aparência de uma região plana controlável no fator de deformação, onde poderíamos falar de uma região com métrica Minkowski, como pode ser visto das figuras 7.2 e 7.4. De fato na figura 7.4 onde a densidade de energia está plotada, vê-se claramente que quando $c_0 = -2.00001$ a região onde a densidade de energia aparece está fora da região minkowskiana, o que eventualmente poderia indicar a possibilidade de um mecanismo de confinamento para as partículas escalares naquela região.

Capítulo 8

Universos acelerados

Considerando um cenário onde nosso universo possa ser modelado como uma parede de domínio $3d$ embebida em um espaço-tempo de Minkowski com $(4 + 1)$ dimensões, como originalmente tratado na literatura [55], este capítulo irá explorar a existência das classes de soluções solitônicas e suas consequências para universos com aceleração proporcionada por colisões de excitações de partículas massivas com paredes. Algumas dessas soluções poderiam ter, neste cenário, papel fundamental em processos iniciais de expansão do universo.

8.1 Introdução

É possível uma investigação mais ampla das soluções clássicas encontradas na referência [13] em modelos não lineares de dois campos escalares interagentes em $(1 + 1)$ dimensões [82], como aqueles tratados no Capítulo 7. Em especial pode-se analisar as consequências que aquelas soluções adicionais podem trazer para o cenário de universos acelerados. Este cenário foi recentemente considerado na literatura por Brito e colaboradores [55] e está dentro do contexto de dimensões extras [60], [62]-[67] e [83]. Nossa análise é baseada no procedimento descrito em [55] e explora uma classe de soluções solitônicas degeneradas [78] no cenário de expansão mostrando que para um valor crítico do parâmetro de degenerescência a reflexão de partículas massivas sobre a parede se torna total, o

que acontece para as partícula mais leves e que, em razão disto, devam ter sido criadas primeiro.

O modelo a ser tratado bem como o procedimento introduzido nos Capítulos 2 e 7 para se encontrar soluções solitônicas clássicas proporcionará uma exploração da variedade de soluções solitônicas encontradas até agora com suas respectivas energias (BPS). Uma discussão sobre a influência de cada conjunto de soluções solitônicas no contexto de universos acelerados por estados quânticos (partículas massivas) e alguns comentários sobre o impacto de algumas dessas soluções solitônicas no processo de expansão original do universo serão feitas.

8.2 Um modelo não linear para dois campos escalares interagentes

O modelo que estamos considerando já foi apresentado anteriormente por ocasião do estudo de soluções solitônicas BPS [82]. Tal modelo consiste de dois campos reais escalares interagentes em $(1 + 1)$ dimensões e de certa forma é remanescente de outros modelos [58], [37] e pode ser descrito pela densidade de lagrangiana (2.1) onde o potencial é dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2 + (2\mu^2 + \lambda \mu)\phi^2\chi^2 - \lambda \mu a^2 \chi^2 + \frac{1}{2}\mu^2\chi^4. \quad (8.1)$$

A propriedade que distingue este modelo é sua possibilidade de ser escrito em termos de um superpotencial como em (2.2) onde o superpotencial é dado por (7.13).

Portanto as soluções clássicas com energia mínima para as equações de movimento estáticas são

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (8.2)$$

e

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \chi}, \quad (8.3)$$

equivalentes às soluções clássicas estáticas com energia mínima para as equações diferenciais de primeira ordem (2.6) e (2.7) onde o primo significa a derivada com respeito a

coordenada espacial e $W_\phi(W_\chi)$ denota a derivada parcial de $W(\phi, \chi)$ com respeito aos campos $\phi(\chi)$. A energia mínima (energia BPS) do sistema é dada por (2.5).

É importante ressaltar que as soluções BPS dirigem-se para os estados de vácuo assintoticamente. Em outras palavras os estados de vácuo atuam, como condições de contorno implícitas das equações BPS. O modelo que particularmente estamos tratando possui dois mínimos absolutos degenerados em $\phi = \pm a, \chi = 0$.

De agora em diante, procederemos como nos Capítulos 2 e 7 a fim de obtermos as equações diferenciais de primeira ordem para o campo $\chi(x)$

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\mu\chi\sqrt{a^2 + c_0\chi^{\lambda/\mu} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\chi^2}, \quad \lambda \neq 2\mu, \quad (8.4)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\mu\chi\sqrt{a^2 + \chi^2[\ln(\chi) + c_1]}, \quad \lambda = 2\mu. \quad (8.5)$$

que são exatamente as equações (7.26) e (7.27) onde a variável r foi trocada por x por conveniência.

8.3 Soluções solitônicas

Soluções particulares da equação (8.4) podem ser obtidas, destacando algumas soluções solitônicas para o modelo em tratamento (8.1) bem como suas energias BPS. As propriedades dessas soluções se encaixam adequadamente no contexto das soluções obtidas por Brito e colaboradores em [55] e a abrangência desse conjunto de soluções cria novas perspectivas no estudo e entendimento de modelos que neste cenário descrevem o universo.

8.3.1 Soluções isoladas: Kink tipo I

A fim de podermos explorar as propriedades das soluções obtidas no Capítulo 7 neste novo contexto, podemos classificá-las de acordo com sua forma e parâmetros. Um conjunto de

soluções clássicas é aquele caracterizado por

$$\bar{\chi}_I(x) = 0, \quad (8.6)$$

de forma que a equação (2.6) admite a seguinte solução solitônica dada por

$$\bar{\phi}_I(x) = \pm a \tanh(\lambda a x), \quad (8.7)$$

onde os sinais $+$ e $-$ referem-se às soluções kink e anti-kink respectivamente. Essas são exatamente as soluções encontradas em (7.38) e (7.39) onde trocamos r por x . A energia BPS pode facilmente ser obtida das expressões (2.5) e (7.13), dada por

$$E_B = \frac{4}{3} \lambda a^3. \quad (8.8)$$

8.4 Kinks tipo II

Esse conjunto de soluções é caracterizado por $c_0 = 0$ na expressão (8.4). Neste caso a equação pode ser resolvida analiticamente para quaisquer valores de λ e μ . para $\lambda > 2\mu$, obtem-se a seguinte solução para o campo $\chi(x)$

$$\chi_{IIA}(x) = a \sqrt{\frac{\lambda - 2\mu}{\mu}} \operatorname{sech}(2\mu a x), \quad (8.9)$$

que é chamada de solução tipo lump. Esta solução se anula assintoticamente quando $x \rightarrow \pm\infty$. A solução kink correspondente é dada por

$$\phi_{IIA}(x) = \pm a \tanh(2\mu a x), \quad (8.10)$$

que conecta o vácuo do modelo. Neste caso a energia BPS é novamente dada por (8.8). Essas soluções são as mesmas encontradas em (7.40) e (7.42) para os campos $\chi(x)$ e $\phi(x)$ respectivamente em que $r \rightarrow x$.

8.4.1 Kinks duplos

Essas soluções admitem valores arbitrários para a constante de integração $c_0 \neq 0$, conectam o vácuo do modelo e também apresentam energia BPS dada por (8.8)

$$\tilde{\chi}_{IIA}^{(1)}(x) = \frac{2a}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\mu ax) - c_0}, \quad \text{para} \quad \lambda = \mu, \quad c_0 < -2, \quad (8.11)$$

e

$$\tilde{\phi}_{IIA}^{(1)}(x) = a \frac{\sqrt{c_0^2 - 4} \sinh(2\mu ax)}{\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\mu ax) - c_0}, \quad \text{para} \quad \lambda = \mu, \quad c_0 < -2. \quad (8.12)$$

Essas soluções são aquelas encontradas em (7.44) e (7.45) com $r \rightarrow x$.

Na figura 8.1 encontram-se alguns perfis típicos de soluções solitônicas para o caso onde $\lambda = \mu$, em que ambas soluções apresentam c_0 próximo ao seu valor crítico, $c_0 = -2$ neste caso, e valores distantes dele. Ambas as situações encontram-se representadas na figura. Uma observação importante é que a distância entre as paredes aumenta quando c_0 se aproxima do seu valor crítico. Para o valor crítico de c_0 a estrutura dupla da parede tende a desaparecer fundindo-se em uma única parede.

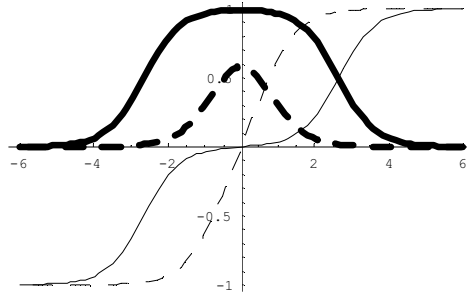


Figura 8-1: Configurações típicas das soluções solitônicas em função de x para o caso onde $\lambda = \mu$ ($a = 1$), quando c_0 está próximo (distante) do valor crítico, $c_0 = -2$ neste caso, representada pela linha sólida (tracejada). O campo χ está representado pelas linhas mais espessas e o campo ϕ pelas linhas menos densas.

Para outros parâmetros encontramos outras soluções para o campo $\chi(x)$

$$\tilde{\chi}_{IIA}^{(2)}(x) = -\frac{2a}{\sqrt{\sqrt{1 - 16c_0} \cosh(4\mu ax) + 1}}, \quad \text{para} \quad \lambda = 4\mu, \quad c_0 < 1/16, \quad (8.13)$$

e para o campo $\phi(x)$

$$\tilde{\phi}_{IIA}^{(2)}(x) = \sqrt{1 - 16c_0}a \frac{\sinh(4\mu ax)}{\sqrt{1 - 16c_0} \cosh(4\mu ax) + 1}, \quad \text{para} \quad \lambda = 4\mu, \quad c_0 < 1/16. \quad (8.14)$$

conforme apresentadas em (7.49) e (7.50) onde podemos notar que a distância entre as paredes aumenta a medida que c_0 se aproxima do seu valor crítico, no caso $c_0 = \frac{1}{16}$. No valor crítico de c_0 , a estrutura de parede dupla colapsa-se. Na figura 8.2 é mostrado o comportamento da densidade de energia onde é proeminente a aparência das paredes duplas quando $c_0 = \frac{1}{16}$. Ambas soluções apresentam novamente energia (BPS) dada por (8.8).

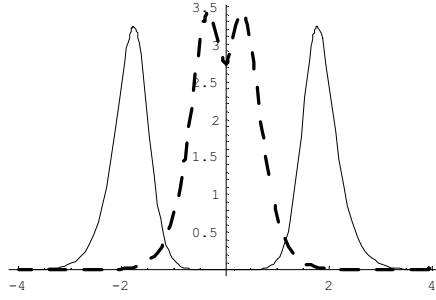


Figura 8-2: Densidade de energia para o caso onde $\lambda = 4\mu$, onde c_0 está próximo (distante) do valor crítico, $c_0 = \frac{1}{16}$ nesta situação, solução representada pela linha (sólida) tracejada. Pode-se observar a aparência da estrutura de parede dupla.

8.4.2 Dois kinks

Muitas soluções solitônicas analíticas interessantes foram obtidas para os valores dos parâmetros $\lambda = \mu$ e $c_0 = -2$ e também para $\lambda = 4\mu$ e $c_0 = \frac{1}{16}$ na equação (7.26). A novidade em tais casos é o fato de ambos os campos $\chi(x)$ e $\phi(x)$ apresentarem um perfil tipo kink e uma energia BPS que é metade daquela encontrada para os kinks do tipo IIA em (8.8). Para efeito de distinção, este conjunto de soluções pode ser classificado como kinks do tipo IIB. Para $\lambda = \mu$ e $c_0 = -2$ a solução clássica encontrada para o campo $\chi(x)$ em (7.53) é

$$\chi_{IIB}^{(1)}(x) = \frac{a}{2}(1 \pm \tanh(\mu a x)), \quad (8.15)$$

e a solução correspondente para o campo $\phi(x)$ é

$$\phi_{IIB}^{(1)}(x) = \frac{a}{2}(\tanh(\mu ax) \mp 1), \quad (8.16)$$

como a encontrada em (7.54). Já para os valores dos parâmetros $c_0 = \frac{1}{16}$ e $\lambda = 4\mu$ o seguinte conjunto de kinks do tipo IIB obtidos são

$$\chi_{IIB}^{(2)}(x) = -\sqrt{2}a \frac{\cosh(\mu ax) \pm \sinh(\mu ax)}{\sqrt{\cosh(2\mu ax)}}, \quad (8.17)$$

e

$$\phi_{IIB}^{(2)}(x) = \frac{a}{2}(1 \mp \tanh(2\mu ax), \quad (8.18)$$

que se referem às equações obtidas em (7.56) e (7.57) respectivamente.

Para as soluções tipo kink do tipo IIB a energia BPS encontrada é

$$E_{(IIB)} = \frac{2}{3}\lambda a^3, \quad (8.19)$$

que é metade da energia encontrada para as soluções tipo kink do tipo I e IIA.

As soluções tipo IIB também conectam o vácuo do modelo, mas nestas circunstâncias podemos interpretar estas soluções como representando dois tipos de torção numa cadeia representada por meio de um conjunto ortogonal de coordenadas ϕ e χ . Dessa forma no plano (ϕ, χ) os kinks tipo I e IIA correspondem a uma torção completa indo de $(-1, 0)$ a $(0, 0)$ enquanto que o tipo IIB corresponde à metade da torção, onde o sistema vai de $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ no caso onde $(\lambda = \mu)$ por exemplo.

8.5 Paredes de domínio e universos acelerados

Um problema físico moderno, com importância e relativamente intrigante é o de modelar as observações da expansão acelerada do universo. Por outro lado, dados recentes de observações com precisão detalhada indica que uma parte relevante da energia do universo seria um tipo de *energia escura* [84]. De fato a *energia escura* seria responsável supostamente pela aceleração. Como consequência, muitos autores procuram ampliar

seus entendimentos destes modelos e aprofundar-se em tais problemáticas. Uma possibilidade muito interessante nesta direção é associar os modelos que eventualmente incluam a aceleração do universo e a energia escura ao cenário conhecido como “*mundos brana*” [67]. Como citado anteriormente em um trabalho recente Brito e colaboradores [55] conceberam um cenário onde nosso universo é modelado com uma parede de domínio $3d$ embebida no espaço-tempo de Minkowski $5d$ onde a colisão elástica de partículas massivas com paredes de domínio $3d$ seria responsável pela aceleração do universo.

O modelo considerado neste programa origina-se em uma teoria para a supergravidade em $(4 + 1)$ dimensões por meio de uma compactificação dimensional da supergravidade em dimensões mais altas. As equações de campo estáticas em $(1 + 1)$ dimensões para os campos escalares desta teoria são justamente aquelas correspondentes a um modelo não linear com campos escalares interagentes também em $(1 + 1)$ dimensões, equações (8.2) e (8.3).

Considerando um conjunto mais geral de soluções estáticas apresentadas no Capítulo 7 e classificadas nas seções 8.3 e 8.4 podemos analisar o comportamento dessas soluções no cenário idealizado na referência [55] onde partículas massivas, que são flutuações quânticas em torno das soluções clássicas, colidem com uma parede de domínio $3d$ representada pela solução kink do tipo IIA da equação (8.10). A idéia essencial é mostrar que esta situação pode ser estendida ao cenário considerado em [55] e que a partir de uma solução completa que possa ser obtida, consequências importantes podem surgir neste cenário.

Podemos fazer uma perturbação linear do campo $\chi(r, t)$ em torno das soluções clássicas, isto é

$$\chi(r, t) = \bar{\chi}(r) + \zeta(r, t) \quad \text{e} \quad \phi(r, t) = \bar{\phi}(r), \quad (8.20)$$

onde $\bar{\chi}(r)$ e $\bar{\phi}(r)$ são soluções clássicas (campos de fundo) e $\zeta(r, t)$ é o campo das flutuações quânticas. Pela expansão da ação até termos quadráticos nos campos quânticos obtem-se as equações de campo para as flutuações quânticas

$$\partial_\mu \partial^\mu \zeta + \bar{V}_{\chi\chi}(r) \zeta = 0, \quad (8.21)$$

isto é, o campo quântico obedece a uma equação de Klein-Gordon com potencial efetivo

$\bar{V}_{\chi\chi}(r)$ que é obtido levando-se em conta a segunda derivada do potencial dado em (8.1) com respeito a $\chi(r)$ e substituindo-se as soluções clássicas $\bar{\chi}(r)$ e $\bar{\phi}(r)$

$$\bar{V}_{\chi\chi}(x) = 2(2\mu^2 + \lambda \mu)\bar{\phi}^2 + 6\mu^2\bar{\chi}^2 - 2\lambda \mu a^2. \quad (8.22)$$

Ao considerarmos porém nosso modelo em 5 dimensões e que o campo quântico possa ser expandido em termos de ondas planas nas coordenadas do espaço-tempo, isto é

$$\zeta(r, t) = \zeta(r) \exp[-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \quad (8.23)$$

onde $\zeta(r)$ está em função da coordenada extra, obtemos então a seguinte equação do tipo Schrödinger

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \bar{V}_{\chi\chi}(r)\right) \zeta(r) = \varepsilon \zeta(r), \quad (8.24)$$

onde $\varepsilon = \omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ em que estamos considerando as soluções estáticas obtidas no Capítulo 7 como função agora da dimensão extra. Tudo se passa com um modelo em 5 dimensões, mas considerando as soluções estáticas em somente uma dimensão, denotada por r .

Neste ponto da nossa análise é oportuno verificarmos as eventuais consequências das soluções solitônicas obtidas pela metodologia apresentada no cenário da aceleração do universo como descrito na referência [55]. Partindo-se das soluções estáticas dadas pelas equações (8.11) e (8.12) e substituindo-as no potencial efetivo expresso pela equação (8.22), obtem-se a seguinte equação do tipo Schrödinger para as flutuações quânticas

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}^{(IIA-1)}(r)\right) \zeta(r) = \varepsilon \zeta(r), \quad (8.25)$$

onde

$$V_{eff}^{(IIA-1)}(r) = 6\mu^2 a \frac{(c_0^2 - 4) \sinh^2(2\mu a r) + 4}{\left(\sqrt{c_0^2 - 4} \cosh(2\mu a r) - c_0\right)^2} - 2\mu^2 a^2, \quad (8.26)$$

e quando $c_0 = -2$, o potencial efetivo se torna ($a = \mu = \lambda = 1$)

$$V_{eff}^{(IIB-1)}(r) = (1 + 3 \tanh^2(r)). \quad (8.27)$$

É oportuno ressaltar que para o caso analisado em [55] o potencial efetivo tem a forma

$$V_{eff}^{(IIA)}(r) = 4\mu a^2 - 4\mu a^2 \left(4 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \text{sech}^2(2\mu a r). \quad (8.28)$$

Pode-se observar que se $\lambda = 4\mu$ este potencial efetivo se torna constante de tal forma que não existirá reflexão uma vez que as partículas massivas ficam livres. Este fato levanta uma questão importante e natural: é este comportamento um caráter realístico intrínseco ao sistema ou será simplesmente uma manifestação particular e característica da solução? De fato, como será visto adiante, as outras soluções não possuem este comportamento e o coeficiente de reflexão para esta escolha particular dos parâmetros do potencial é sempre maior. Na figura 8.3 pode ser visto o comportamento do potencial efetivo proveniente das soluções paredes de domínio em 4 situações: o caso estudado por Brito e colaboradores e para o caso das soluções solitônicas degeneradas quando c_0 está distante do valor crítico, próximo a ele, e no ponto crítico $c_0 = -2$. Da mesma figura 8.3 também podemos perceber que ao menos na aparência dois potenciais são bem comportados, para c_0 próximo do valor crítico. O caso onde o coeficiente de reflexão é maior seria provavelmente o caso estudado em [55]. De fato, um resultado mais evidente aparece para o caso onde os parâmetros do potencial são tais que $\lambda = 4\mu$.

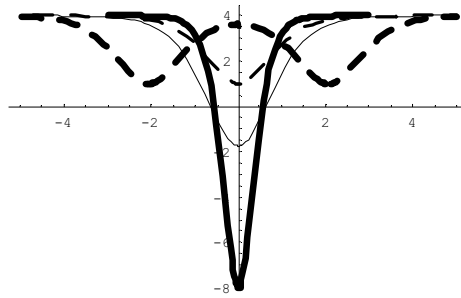


Figura 8-3: Comparação entre os potenciais efetivos tipo parede de domínio para o caso de Brito e colaboradores (linha sólida densa) e os sólitons degenerados quando c_0 está distante do valor crítico (linha sólida menos densa), quando c_0 está próximo ao valor crítico (linha tracejada densa) e no ponto crítico, que neste caso é $c_0 = -2$, (linha tracejada menos densa), em que todas as configurações são para o caso onde $\lambda = \mu$.

Substituindo as equações (8.13) e (8.14) na equação (8.22) pode-se verificar que as flutuações quânticas do campo $\chi(r, t)$ satisfazem a equação de Schrödinger efetiva (8.24)

com um potencial efetivo dado por

$$V_{eff}^{(IIA-2)}(r) = 12\mu^2 a^2 \frac{(1 - 16c_0) \sinh^2(4\mu a r) + 2}{(\sqrt{1 - 16c_0} \cosh(4\mu a r) + 1)} - 8\mu^2 a^2, \quad (8.29)$$

e quando $c_0 = \frac{1}{16}$, o potencial efetivo correspondente é dado por

$$V_{eff}^{(IIB-2)}(r) = \mu^2 a^2 \operatorname{sech}^2(2\mu a r) [2 + 5 \cosh(4\mu a r) \pm 3 \sinh(2\mu a r)]. \quad (8.30)$$

Como pode ser observado das equações (8.29) e (8.30), para este caso a solução analisada em [55] tem um potencial efetivo constante

$$V_{eff}^{(IIA)}(r) = 4\mu a^2, \quad (8.31)$$

de forma a não proporcionar nenhuma reflexão das partículas massivas. Em contraste com isso as soluções apresentadas são tais que o coeficiente de reflexão aumenta à medida que c_0 se aproxima do seu valor crítico, como pode ser visto na figura 8.4. Realmente, para o caso limite, o potencial efetivo toma a forma do potencial degrau de forma a garantir que as partículas massivas com energia cinética abaixo de um certo valor limite certamente serão refletidas na barreira de extensão infinita.

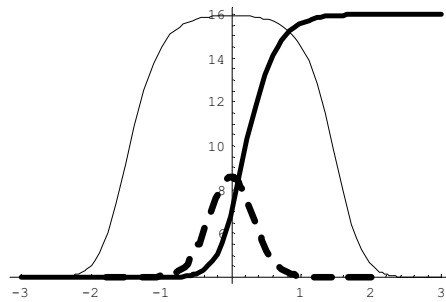


Figura 8-4: Comparação dos potenciais efetivos tipo parede de domínio para o caso $\lambda = 4\mu$. A linha sólida mais densa representa o caso crítico ($c_0 = \frac{1}{16}$). As outras curvas correspondem ao caso que c_0 está distante do valor crítico (linha tracejada densa) e próximo à ele (linha sólida menos densa).

8.6 Considerações oportunas

Pudemos traçar uma análise da eventual extensão das soluções apresentadas nas seções anteriores, 8.3 e 8.4 no cenário de “mundos branas”. Mais especificamente tentamos analisar o possível impacto de um conjunto geral de soluções solitônicas sobre o coeficiente de reflexão das partículas massivas colidindo com paredes de domínio $3d$ conforme originalmente foi exposto na referência [55]. É interessante observarmos que quando os parâmetros do potencial são tais que $\lambda = 4\mu$ o potencial efetivo interagente com as partículas massivas possui um coeficiente de reflexão arbitrariamente maior, dependendo do valor do parâmetro de degenerescência c_0 . Por outro lado, uma situação bastante marcante é aquela em que c_0 atinge seu valor crítico. Neste caso, o potencial efetivo se torna um tipo de potencial degrau tal que as partículas massivas com energia menor que aquela do degrau serão sempre refletidas de forma a reproduzir então um efeito máximo na direção de aceleração do universo. É oportuno ressaltar também que esta situação específica, como observado no Capítulo 2, origina-se de uma solução kink tipo B que apresenta uma energia menor que a solução do tipo A, de forma a poderem ser produzidos mais facilmente e como consequência poderiam ser as responsáveis pela maior parte da expansão inflacionária inicial.

De forma a deixar, nesta análise, uma abertura aplicativa para as soluções, que podem ser obtidas de forma completa e analítica, conforme exposto neste capítulo, seria conveniente tentar esboçar algumas conclusões a esse respeito. A existência de soluções de paredes duplas que são degeneradas através do parâmetro c_0 e o fato de que a distância entre as paredes aumenta à medida que c_0 se aproxima do valor crítico, e ao considerarmos a possibilidade de modelarmos nosso universo por meio dessas soluções tipo paredes de domínio, torna-se possível pensar na construção de um procedimento onde o valor de c_0 dependa de alguns parâmetros dinâmicos de tal forma que a expansão do universo pudesse ser entendida e descrita por esse mecanismo hipotético.

Capítulo 9

Conclusões e comentários

É surpreendente a possibilidade de podermos tratar teorias de campo não lineares exatamente. Este fato decorre da existência de algumas classes de sistemas intrinsecamente não lineares, como foi visto no capítulo 2, e que permeiam uma variedade de modelos físicos que se estendem desde a (TQC) à Cosmologia.

Muitos desses modelos, curiosamente, obedecem às equações BPS e podem ser classificados de acordo com a topologia do espaço-tempo. Em alguns desses sistemas em $(1 + 1)$ dimensões, as equações diferenciais de segunda ordem podem ser reduzidas à equações de primeira ordem BPS correspondentes de forma que a equação diferencial obtida relacionando dois campos acoplados forneça a órbita entre os vácuos do sistema. A extensão da aplicabilidade do método depende, naturalmente, da complexidade do sistema, entretanto, um tratamento apropriado pode conduzir a soluções topológicas exatas, conforme exposto no capítulo 3.

Defeitos topológicos também estão inseridos no contexto da cosmologia e parecem ser relevantes no tratamento de alguns de seus problemas e na análise que compoem um modelo descritivo do universo na abordagem dos capítulos 4, 5 e 6. Em uma outra perspectiva, modelos de campos escalares acoplados à gravidade em espaços-tempo deformados parece ser um cenário rico para aplicação de soluções topológicas. Recentes avanços nas teorias de física de altas energias têm apresentado estruturas de defeitos como paredes de domínio e campos escalares de matéria que acoplados à gravidade compõem

o cenário da teoria de branas, que em especial representa uma seara onde os métodos desenvolvidos neste trabalho podem ser aplicados, conforme foi mostrado nos capítulos 7 e 8.

Os resultados provenientes do tratamento BPS, desenvolvidos até agora e utilizados na eventual descrição de modelos físicos pode representar um passo interessante e prático no entendimento da natureza e que revela, por sua simplicidade, sua beleza.

Apêndice A

Flutuações dos campos escalares e tensoriais

As equações (7.5) à (7.8) e (7.59) e (7.60) podem ser obtidas utilizando-se as equações de Einstein para a ação (7.1) e performando uma perturbação na métrica (7.2) representada por um campo tensorial perturbativo $h_{\mu\nu}(x, y)$. Uma análise perturbativa com respeito aos campos escalares ϕ e χ também pode ser realizada considerando $\phi \rightarrow \phi + \epsilon\tilde{\phi}$ e $\chi \rightarrow \chi + \epsilon\tilde{\chi}$, onde $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(x, y)$ e $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}(x, y)$ a fim de representar as respectivas perturbações. A variável x representa (x^0, x^1, x^2, x^3) e $x^4 = y$ identifica a dimensão extra que no capítulo 7 é denotada por r , e a variação da ação em relação aos campos escalares e a métrica é relevante até a segunda ordem em ϵ a fim de se obter as equações para as flutuações.

A variação da ação (7.1) e as equações de Einstein (4.21) correspondentes fornecem as respectivas equações de movimento

$$\partial^\mu \frac{\delta L}{\delta [\partial_\mu \phi(\chi)]} - \frac{\delta L}{\delta \phi(\chi)} = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde L é a densidade de lagrangiana o tensor de Ricci correspondente a métrica g_{ab} é

$$R_{\mu\nu} = e^{2A}(4A'^2 + A'')\eta_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

e

$$R_{44} = -4A'^2 - 4A'', \quad (\text{A.3})$$

com

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \quad (\text{A.4})$$

e os símbolos de Christoffel dados por

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \equiv \frac{1}{2} g^{k\nu} (g_{\nu\mu;\lambda} + g_{\nu\lambda;\mu} - g_{\lambda\mu;\nu}), \quad (\text{A.5})$$

em que $g_{\mu\nu;\lambda} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$. Os primos denotam derivadas com respeito a variável y . Os índices a e b da métrica referem-se as suas respectivas componentes: 0, 1, 2, 3, 4.

O exame das equações que governam as flutuações dos campos escalares e dos campos tensoriais em torno das soluções clássicas de campo de fundo provenientes das equações de movimento da ação (7.1) prescreve um gauge e os modos de excitação são característicos de um campo escalar sem massa em espaços curvos. A forma do *graviton* em quatro dimensões em tais condições é particularmente simples. A análise pode ser estendida em relação a estabilidade dos modos de excitação provenientes da equação de Schrödinger para um problema de mecânica quântica supersimétrica.

Estabelecendo um *gauge axial* como vínculo, o que se assemelha um pouco a $A_3 = 0$ em eletrodinâmica:

$$h_{\mu 5} = 0, \quad (\text{A.6})$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$. A métrica total pode ser expressa sob a forma

$$ds^2 = e^{2A(r)} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (\text{A.7})$$

de onde se pode obter o tensor de Ricci. As equações de flutuações a ordem zero fornecem as equações (A.2) e (A.3) enquanto que em primeira ordem pode-se encontrar a partir de (A.5) e (A.4)

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= e^{2A} \left(\frac{1}{2} \partial_r^2 + 2A' \partial_r + A'' + 4A'^2 \right) h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} e^{2A} A' \partial_y (\eta^{kl} h_{kl}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{kl} (\partial_\mu \partial_\nu h_{kl} - \partial_\mu \partial_k h_{\nu l} - \partial_\nu \partial_k h_{\mu l}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$R_{44}^{(1)} = -\frac{1}{2} (\partial_y^2 + 2A' \partial_y) \eta^{kl} h_{kl}, \quad (\text{A.9})$$

e

$$R_{\nu 5}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta^{kl} \partial_y (\partial_k h_{\nu l} - \partial_\nu h_{kl}). \quad (\text{A.10})$$

As equações de Einstein podem ser expressas na forma das equações de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} g_{\mu\nu} T^\alpha_\alpha \quad (\text{A.11})$$

onde o tensor energia-momentum em primeira ordem tem a seguinte forma

$$\bar{T}_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{2}{3} e^{2A} \left[2\tilde{\phi} \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \phi} + 2\tilde{\chi} \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right] \eta_{\mu\nu} + 2V(\phi, \chi) h_{\mu\nu}, \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{T}_{55}^{(1)} = 4\phi' \tilde{\phi}' + \frac{4}{3} \left[\tilde{\phi} \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \phi} + \tilde{\chi} \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right] \quad (\text{A.13})$$

e

$$\bar{T}_{\nu 5}^{(1)} = 2\phi' \partial_\nu \tilde{\phi}. \quad (\text{A.14})$$

A análise perturbativa que resulta na equação de movimento para as flutuações escalares $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\chi}$ pode ser realizada por meio de uma expansão de L até a segunda ordem em ϵ para as flutuações escalares e tensoriais e para o potencial $V(\phi, \chi)$ o que fornece

$$e^{-2A} \square \tilde{\phi} - 4A' \tilde{\phi}' - \tilde{\phi}'' + \tilde{\phi} \frac{\partial^2 V(\phi, \chi)}{\partial \phi^2} + \tilde{\chi} \frac{\partial^2 V(\phi, \chi)}{\partial \phi \partial \chi} = \frac{1}{2} \phi' \eta^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} \quad (\text{A.15})$$

para $\tilde{\phi}$ e

$$e^{-2A} \square \tilde{\chi} - 4A' \tilde{\chi}' - \tilde{\chi}'' + \tilde{\chi} \frac{\partial^2 V(\phi, \chi)}{\partial \phi^2} + \tilde{\phi} \frac{\partial^2 V(\phi, \chi)}{\partial \phi \partial \chi} = \frac{1}{2} \chi' \eta^{\mu\nu} h'_{\mu\nu}. \quad (\text{A.16})$$

Em função das equações (7.7) e (7.8) a equação $R_{\mu\nu}^{(1)} = \bar{T}_{\mu\nu}^{(1)}$ simplifica para

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + e^{2A} \left(\frac{1}{2} \partial_y^2 + 2A' \partial_y \right) h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{kl} (\partial_\mu \partial_\nu h_{kl} - \partial_\mu \partial_k h_{\nu l} - \partial_\nu \partial_k h_{\mu l}) \\ & + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} e^{2A} A' \partial_y (\eta^{kl} h_{kl}) + \frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} e^{2A} \left[2\tilde{\phi} \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \phi} + 2\tilde{\chi} \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial \chi} \right] \\ & = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A descrição da gravidade linearizada na forma das equações de flutuação da métrica é desenvolvida no setor transversal e sem traço, onde a gravidade se desacopla do campo de matéria. Para isso $h_{\mu\nu}$ se transforma como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu kl} h^{kl}, \quad (\text{A.18})$$

onde o projetor é dado por

$$P_{\mu\nu kl} = \frac{1}{2} (\pi_{\mu k} \pi_{\nu l} + \pi_{\mu l} \pi_{\nu k}) - \frac{1}{3} \pi_{\mu\nu} \pi_{kl} \quad (\text{A.19})$$

com

$$\pi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad (\text{A.20})$$

o que reduz as equações de flutuação da métrica para

$$\bar{h}_{\mu\nu}'' + 4A'\bar{h}_{\mu\nu}' = e^{-2A}\square\bar{h}_{\mu\nu}. \quad (\text{A.21})$$

Apêndice B

D-Branas

Alguns desenvolvimentos vem sendo realizados recentemente para se construir modelos físicos realísticos a partir de teorias de unificação. Elementos da teoria de cordas que podem conter observáveis dos campos de gauge e escalares, por exemplo, são as chamadas D-branas.

Apesar de muitas aplicações e formas que esses elementos podem se apresentar, discutiremos algumas de suas propriedades a partir de uma motivação originalmente diferente, porém, de interesse ativo que será brevemente discorrido a seguir.

Enquanto a atividade em teorias de unificação, especialmente na teoria de supercordas estava a todo vapor, um pequeno grupo de teóricos se dedicava a uma questão um pouco inusitada: se estamos substituindo partículas pontuais 0-dimensionais por cordas unidimensionais, porque não usarmos membranas bidimensionais ou em geral objetos $(d-1)$ -dimensionais, $(d-1)$ -branas? Uma vez que as supercordas podem ter $D \leq 10$ dimensões espaço-temporais há uma série de possibilidades para esses objetos estendidos com dimensões $d < D$.

Os progressos em super $(d-1)$ -branas, no entanto, estavam sendo lentos pela crença que a simetria κ crucial para as superpartículas Green-Schwars ($d=1$) [85] e para as supercordas ($d=2$) [86] não poderia ser generalizada para $d > 2$. Entretanto, uma mudança neste fato ocorreu quando Hughes e colaboradores [87] mostraram que a simetria κ poderia, de fato, ser generalizada e empregada na construção de uma 3-brana manifes-

tando um espaço-tempo supersimétrico $D = 6$, $N = 1$ com invariância κ no volume de mundo.

Sob um outro ponto de vista, no entanto, algumas branas podem ser vistas como sólitons conforme a abordagem de Strominger [88] que mostra que supergravidade $D = 10$ acoplada a super Yang-Mills, que é o limite da teoria de campos da corda heterótica [89], admite como solução uma 5-brana heterótica. Esta 5-brana é um soliton genuíno e não singular em todo o espaço carregando uma carga magnética topológica g_6 . Uma parte fundamental dessa construção é a presença de um instanton Yang-Mills em 4 direções transversais à 5-brana. Algumas consequências desse tratamento proporcionam uma interpretação solitônica da conjectura a respeito da dualidade corda $\longleftrightarrow$ 5-brana [90].

B.1 Propriedades básicas

Uma Dp -brana é um objeto estendido com p dimensões espaciais. Na teoria de cordas bosônicas onde o número de dimensões espaciais é 25, uma $D25$ -brana denota um espaço em que se estende esse objeto. Na presença de uma D -brana os pontos finais de cordas abertas devem estar sobre a brana. Este requisito impõe um número de condições de contorno de Dirichlet no movimento desses pontos.

Nem todos objetos estendidos em teoria de cordas são D -branas. Cordas, por exemplo, são 1-brana porque têm uma dimensão espacial mas não são $D1$ -branas. Branas com p dimensões espaciais são chamadas em geral de p -branas. Uma 0-brana é um tipo de partícula. Somente a linha de mundo de uma partícula é unidimensional, o volume de mundo de uma p -brana é $(p+1)$ -dimensional. Destas $p+1$ dimensões, uma é a dimensão temporal e as outras p são dimensões espaciais.

Na presente introdução d denotará o número de dimensões espaciais na teoria e D o número total de dimensões espaço-temporais e a abordagem focará o caso mais simples de branas, as Dp -branas que são hiperplanos com p dimensões em um espaço d -dimensional. Como especificar tais hiperplanos? Precisamos de $(d-p)$ condições. Em três dimensões espaciais ($d = 3$), uma 2-brana ($p = 2$) é um plano especificado por uma condição ($d-p = 3-2 = 1$). Por exemplo, $z = 0$, especifica o plano (x, y) . Similarmente, uma

corda ao longo do eixo z ($p = 1$) é especificada por duas condições ($d - p = 3 - 1 = 2$): $x = 0$ e $y = 0$. Assim o número de condições é tanto quanto o número de coordenadas espaciais normais à brana.

Considere um grupo de coordenadas tangenciais ao volume de mundo da brana. Este grupo inclui a coordenada temporal e p coordenadas espaciais. O segundo grupo inclui $(d - p)$ coordenadas normais ao volume de mundo da brana

$$\underbrace{x^0, x^1, \dots, x^p}_{Dp \text{ coordenadas tangenciais}} \quad \underbrace{x^{p+1}, x^{p+2}, \dots, x^d}_{Dp \text{ coordenadas espaciais}} . \quad (\text{B.1})$$

A localização da Dp -brana é especificada fixando valores das coordenadas normais à brana

$$x^a = \bar{x}^a, \quad a = p + 1, \dots, d. \quad (\text{B.2})$$

Da mesma forma as coordenadas das cordas $X^\mu(\tau, \sigma)$ podem ser agrupadas como

$$\underbrace{X^0, X^1, \dots, X^p}_{Dp \text{ coordenadas tangenciais}} \quad \underbrace{X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^d}_{Dp \text{ coordenadas espaciais}} . \quad (\text{B.3})$$

Uma vez que os pontos finais da corda aberta devem estar sobre a Dp -brana as coordenadas normais à brana devem satisfazer as condições de contorno de Dirichlet

$$X^a(\tau, \sigma) \big|_{\sigma=0} = X^a(\tau, \sigma) \big|_{\sigma=\pi} = \bar{x}^a, \quad a = p + 1, \dots, d. \quad (\text{B.4})$$

Os pontos finais da corda aberta podem se mover livremente ao longo das direções tangenciais à brana. Em função disto as coordenadas da corda tangenciais à D-brana satisfazem as condições de contorno de Neumann

$$X^{m'}(\tau, \sigma) \big|_{\sigma=0} = X^{m'}(\tau, \sigma) \big|_{\sigma=\pi} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p. \quad (\text{B.5})$$

A apropriada separação de coordenadas tangenciais e normais em (B.3) é também um agrupamento de coordenadas que satisfazem as condições de contorno de Neumann (N)

e Dirichlet (D) respectivamente

$$\underbrace{X^0, X^1, \dots, X^p}_{\text{coordenadas } N} \underbrace{X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^d}_{\text{coordenadas } D}.$$

Essas são algumas características e propriedades básicas das Dp -branas.

Referências

- [1] J. Polchinski, hep-th/9611050 (1997).
- [2] M. J. Duff, Ramzi R. Khuri e J. X. Lu, hep-th/9412184 (1994).
- [3] T.H.R. Skirme, Proc. Roy. Soc. A **262** (1961) 233.
- [4] Y. Nambu, Proceedings of Int. Conf. on Elementary Particles (1966).
- [5] H.B. Nielsen P. Olesen, Nucl. Phys. B **61**, (1973) 45.
- [6] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **79**, (1974) 276.
- [7] D.A. Kirzhnits, JETP Lett. **15**, (1972) 745.
- [8] S. Weinberg Phys. Rev. D **9**, (1974) 3357.
- [9] A.E. Everet, Phys. Rev. D **10**, (1974) 3161.
- [10] T.W.B. Kibble, J. Phys. A **9**, (1976) 1387.
- [11] J. Preskill, Phys. Rev. Lett. **43**, (1979) 1365.
- [12] A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **46**, (1981) 1496.
- [13] A. de Souza Dutra, Phys. Lett. B **626** (2005) 249.
- [14] A. de Souza Dutra and A. C. F. de Amaro Jr, Phys. Lett. B **642** (2006) 274.
- [15] E. Witten, Nucl. Phys. B **249** (1985) 557.
- [16] J. Morris, Phys. Re. D **49** (1004) 1105.

- [17] J. Morris, Phys. Rev. D **51** (1995) 697.
- [18] J. D. Edelstein, M. L. Trobo, F. A. Brito, D. Bazeia, Phys. Rev. D **57** (1998) 7561.
- [19] G. J. Cheetham, E. J. Copeland, T. S. Evans, R. J. Rivers, Phys. Rev. D **47** (1993) 5316.
- [20] G. Dvali, M. Shifman, Phys. Lett. B **396** (1997) 64; G. Dvali, M. Shifman, Phys. Lett. B **407** (1997) 452, Erratum.
- [21] A. B. Adib, C. A. S. Almeida, Phys. Rev. E **64** (2001) 037701.
- [22] R. de Lima Rodrigues, P. B. da Silva Filho, A. N. Vaidya, Phys. Rev. D **58** (1998) 125023.
- [23] D. Bazeia, Braz. J. Phys. **32** (2002) 869.
- [24] M. Eto, N Sakai, Phys. Rev. D **68** (2003) 125001.
- [25] A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, P. Giacconi, R. Soldati, J. High Energy Phys. **0307** (2003) 063.
- [26] P. Sutcliffe, Phys. Rev. D **68** (2003) 085004.
- [27] J. A. R. Cembranos, A. Dobado, A. L. Maroto, Phys. Rev. D **70** (2004) 096001.
- [28] T. House, A. Lukas, Phys. Rev. D **71** (2005) 046006.
- [29] Z. W. Chong, H. Lü, C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. B **614** (2005) 96.
- [30] C. D. Fosco, G. Torroba, Phys. Lett. B **620** (2005) 174.
- [31] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [32] Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University, Cambridge, England, 1994).
- [33] T. Vachaspati, *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2006).
- [34] D. Walgraef, *Spatio-Temporal Pattern Formation* (Springer-Verlag, Berlin, 1997).

- [35] M. K. Prasad, C. M. Soomerfield, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760;
E. B. Bolgomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449.
- [36] R. Rajaraman, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 200.
- [37] L. J. Boya, J. Casahorran, Phys. Rev. A **39** (1989) 4298.
- [38] D. Bazeia, M. J. dos Santos, R. F. Ribeiro, Phys. Lett. A **208** (1995) 84.
- [39] D. Bazeia, F. A. Brito, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1094.
- [40] D. Bazeia, F. A. Brito, Phys. Rev. D **61** (2000) 105019.
- [41] D. Bazeia, R.F. Ribeiro, M. M. Santos, Phys. Rev. E **54** (1996) 2943.
- [42] D. Bazeia, E. Ventura, Chem. Phys. Lett. **303** (1999) 341.
- [43] D. Bazeia, V. B. P. Leite, B.H.B. Lima, F. Moraes, Chem. Phys. Lett. **340** (2001) 205.
- [44] M. N. Barreto, D. Bazeia e R. Menezes, Phys. Rev. D **73** (2006) 065015.
- [45] A. de Souza Dutra, M. Hott e F. A. Barone, Phys. Rev. D **73**, (2006) 065015.
- [46] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (1972) (Wiley, New York).
- [47] Ya.B. Zel'dovich e I. D. Novikov, *Relativistic Astrophysics Vol. 2*, (1983), (University of Chicago Press).
- [48] P. J. E. Peebles, *Physical Cosmology*, (1971), (Princeton University Press).
- [49] E. W. Kolb e M. S. Turner, *The Early Universe*, (1990), (Addison-Wesley, Redwood City, California).
- [50] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, (1993), (Princeton University Press).
- [51] J. Frieman, C. Hill, A. Stebbins, I. Waga, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2077.
- [52] T.W.B. Kibble, J. Phys. A **9** (1976) 1287.

- [53] E. Witten, Nucl. Phys. B **249** (1985) 557.
- [54] A. Lukas, B. A. Ovrut, K. S. Stelle e D. Waldram, Phys. Rev. D **59** (1999) 086001.
- [55] F. A. Brito, F. F. Cruz and J. F. N. Oliveira, Phys. Rev. D **71**, 083516 (2005).
- [56] D. Bazeia and A. R. Gomes, J. High Energy Phys. **05** (2004) 012.
- [57] M. Cvetič and H. H. Soleng, Phys. Rep. **282** (1997) 159.
- [58] R. Rajaraman e E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **11** (1975) 2950.
- [59] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370.
L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690.
- [60] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429** (1998) 263.
- [61] D. Bazeia, J. Furtado and A. R. Gomes, JCAP **02** (2004) 002.
- [62] G. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, Phys. Lett. B **485** (2000) 208.
- [63] G. Dvali and G. Gabadadze, Phys. Rev. D **63** (2001) 065007.
- [64] M. Bander, Phys. Rev. D **69** (2004) 043505.
- [65] P. S. Apostopoulos and N. Tetradis, Phys. Rev. D **71** (2005) 043506.
- [66] P. S. Apostopoulos and N. Tetradis, Phys. Lett. B **633** (2006) 409.
- [67] C. Bogdanos and K. Tamvakis, Phys. Lett. B **646** (2007) 39.
- [68] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, Phys. Rev. D **62** (2000) 046008.
- [69] O. DeWolfe, J. Erlich, C. Gorjean and T. J. Hollowood, Nucl. Phys. B **584** (2000) 359.
- [70] M. Gremm, Phys. Lett. B **478** (2000) 434.
- [71] A. Campos, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 141602.
- [72] A. Melfo, N. Pantoja and A. Skrzewski, Phys. Rev. D **67** (2003) 105003

- [73] F. A. Brito, F. F. Cruz and J. F. N. Oliveira, Phys. Rev. D **71**, 083516 (2005).
- [74] K. Skenderis and P. K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 191301.
- [75] V. I. Afonso, D. Bazeia and L. Losano, Phys. Lett. B **634** (2006) 526.
- [76] M. Giovannini, Phys. Rev. D **75** (2006) 087505.
- [77] M. Giovannini, Phys. Rev. D **74** (2007) 064023.
- [78] M. A. Shiffman and M. B. Voloshin, Phys. Rev. D **57** (1998) 2590.
- [79] D. Bazeia, J. Menezes and R. Menezes, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 241601.
- [80] D. Bazeia, M. J. dos Santos and R. F. Ribeiro, Phys. Lett. A **208** (1995) 84. D. Bazeia, W. Freire, L. Losano and R. F. Ribeiro, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945 (2002).
- [81] A. A. Izquierdo, M. A. G. Leon and J. M. Guillarte, Phys. Rev. D **65** (2002) 085012.
- [82] D. Bazeia, M. J. dos Santos e R. F. Ribeiro, Phys. Lett. A **208** (1995) 84. D. Bazeia, W. Freire, L. Losano e R. F. Ribeiro, Mod. Phys. Lett. A **17**, 1945 (2002).
- [83] L. Randall e R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690.
- [84] A. G. Riess, et al., Astron. J. **116** (1998) 1009.
S. Perlmutter, et al., Astron. J. **517** (1999) 565.
A. G. Riess, et al., Astron. J. **607** (2004) 665.
- [85] W. Siegel, Phys. Lett. B **128** (1983) 397.
- [86] M. B. Green e J. Schwars, Phys. Lett. B **136** (1984) 367.
- [87] J. Hughes, J. Liu e J. Polchinski, Phys. Lett. B **180** (1986) 370.
- [88] A. Strominger, Nucl. Phys. B **343** (1990) 167.
- [89] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec e R. Rohm, Nucl. Phys. B **256** (1985) 253.
- [90] C. Montonen e D. Olive, Phys. Lett. B **72** (1977) 117.