UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARCEL DE BRITTO GONÇALVES

Aspectos em Teoria Clássica de Campos : Teoremas de Noether

Guaratinguetá
2025

Marcel de Britto Gonçalves

Aspectos em Teoria Clássica de Campos : Teoremas de Noether

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Bacharelado em Física da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estatual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Bacharelado em Física .

Orientador: Profº Dr. Júlio Marny Hoff da Silva
Coorientador:

Guaratinguetá
2025

Gonçalves, Marcel de Britto
G635a Aspectos em teoria clássica de campos : teoremas de Noether / Marcel de Britto Gonçalves - Guaratinguetá, 2025.
38 f : il.

Bibliografia: f. 38

Trabalho de Graduação em Física (Bacharelado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

1. Teoria de campos (Física). 2. Teorema de Noether. 3. Simetria (Física). 4. Mecânica analítica. I. Título.

CDU 530.145

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARCEL DE BRITTO GONÇALVES

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **"GRADUANDO EM BACHARELADO EM FÍSICA "**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM BACHARELADO EM FÍSICA

Profº Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Profº Dr. Júlio Marny Hoff da Silva
Orientador/UNESP-FEG

Documento assinado digitalmente
gov.br
SAULO HENRIQUE PEREIRA
Data: 24/06/2025 09:44:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profº Dr. Saulo Henrique Pereira
UNESP-FEG

Documento assinado digitalmente
gov.br
ALESSANDRO LUIZ RIBEIRO DOS SANTOS
Data: 05/07/2025 10:15:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profº Dr. Alessandro Luiz Ribeiro dos
UNESP-FEG

Junho , 2025

DADOS CURRICULARES

MARCEL DE BRITTO GONÇALVES

NASCIMENTO 15/09/2001 - São Paulo / SP

FILIAÇÃO José Mecias Gonçalves
Selma de Britto Gonçalves

2019 / 2023 Curso de Graduação em Física - Bacharelado
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá - UNESP

Dedico este trabalho aos meus amados familiares, fontes inesgotáveis de apoio e amor e a todos que, de certa forma, me auxiliaram a continuar minha graduação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda a minha família por acreditar em mim, pelo incentivo constante na realização deste trabalho e por torcer sempre pelas minhas conquistas. Agradeço em especial ao meu avô materno, Wilkie (*in memoriam*), por sempre ter me apoiado e zelado por mim até mesmo em nosso último contato. Seus ensinamentos, músicas e jeito de viver foram o que me ajudou também a encarar a vida de forma mais leve, e assim conseguir terminar minha graduação. Foi um dos maiores pilares da minha formação.

Com grande honra agradeço ao meu orientador, Júlio Marny Hoff da Silva, por ter aceitado me guiar durante o desenvolvimento desse trabalho. Desde o meu primeiro ano de graduação tive inúmeras aulas com esse esplêndido professor que sempre conseguia reviver o brilho que eu sentia ao estudar física, por mais difíceis que fossem os dias.

Às minhas irmãs Sofia e Érica, minha enorme gratidão que sequer cabe em meu peito. Foram vocês que redefiniram meu conceito de amor e cumplicidade, estando ao meu lado desde os momentos mais difíceis que tive que passar na minha vida até os dias de hoje, por sempre estarem ao meu lado me defendendo, incentivando e aconselhando. Sem vocês eu não conseguiria existir nesse mundo.

Agradeço a minha tia Ester por ter me ensinado sobre matemática desde pequeno. Foi a partir desses primeiros incentivos que se brotou a fagulha pelos números em meu coração, que posteriormente se tornaria uma chama que busca desvendar os segredos do universo.

À toda família Amoribunda, república que me deu o primeiro contato com a vida universitária, meu coração se enche de alegria e meus olhos de lágrimas quando relembro dos momentos que passamos juntos. Serei eternamente grato por sempre me motivarem a continuar meus estudos e por todas as conversas e sorrisos jogados fora na sala, momentos de conversas fúteis que acabam aliviando nossas mentes dos estresses que a faculdade causa. É imensurável todo o companheirismo que recebo dos moradores atuais e ex-moradores. É um enorme prazer pertencer à esta família, minha segunda casa, guardo todos em meu coração.

Por último, o agradecimento de maior valia. Obrigado aos meus pais, José Mecias e Selma, por cada suor derramado proveniente do esforço para me dar condições de estudar nesta faculdade e por todas as lágrimas de saudade também derramadas pelo filho caçula estudar longe de casa. Por mais que nossa relação tenha se conturbado tempos atrás, vocês, junto às minhas irmãs, são quem eu mais amo nesse mundo e serei eternamente grato por tudo que fizeram e fazem a mim.

“Nature is relentless and unchangeable, and it is indifferent as to whether its hidden reasons and actions are understandable to man or not.“

(Galileo Galilei)

RESUMO

Este projeto é destinado ao estudo dos teoremas de Noether, que nos mostram a relação entre as leis de conservação e propriedades de simetria através de elegantes abordagens sobre as invariâncias da teoria. A abordagem utilizada é de fácil manipulação e bastante generalizada, visto que o funcional da ação contém informações sobre todo o sistema incluindo as condições de contorno do mesmo. O conhecimento sobre os teoremas é imprescindível para o desenvolvimento teórico em uma variedade de sistemas, como nas áreas de estudo de campos clássicos e quânticos assim como áreas de estudo de partículas.

palavras-chave: Grupo de Poincaré; Campos; Invariância; Transformação Local; Transformação Global.

ABSTRACT

This project is designated for the study of Noether's theorems, which reveal the relationship between conservation laws and symmetry properties through elegant approaches to the invariances of the theory. The approach used is easily manipulable and quite generalized, given that the action functional contains information about the entire system, including its boundary conditions. Understanding these theorems is essential for theoretical development in a variety of systems, such as classical and quantum field studies, as well as particle physics.

keywords: Poincaré Group; Fields; Invariance; Local Transformation; Global Transformation.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MN	Mecânica Newtoniana
MA	Mecânica Analítica
TRR	Teoria da Relatividade Restrita
GP	Grupo de Poincaré
TN	Teorema de Noether

LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Tensor Métrico de Minkowski
$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$	Matriz de Transformação de Lorentz
$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$	Derivada parcial covariante com relação à x^μ
$\partial_\mu \phi(x)$	Derivada parcial do campo ϕ (x) com relação à x^μ

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA 12
1.1 Considerações sobre os capítulos 12

2 CONCEITOS BÁSICOS ESTRUTURANTES 14
2.1 Fundamentos da Mecânica Analítica 14
2.2 Revisão Básica de Grupos 14
2.2.1 O Grupo de Poincaré 15
2.2.2 O Grupo de Lorentz 16

3 FORMALISMO GERAL 19
3.1 Lagrangiana Relativística 20
3.2 Cálculo Variacional 20

4 TEOREMAS DE NOETHER 26
4.1 O Primeiro Teorema de Noether 27
4.2 Invariância de Poincaré 29
4.2.1 Translações 29
4.2.2 Transformações de Lorentz 30
4.3 O Segundo Teorema de Noether 32

5 CONCLUSÃO 37

REFERÊNCIAS 38

1 INTRODUÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Na história da física teórica, poucas formulações conseguiram atingir, com tanto rigor matemático, a complexidade conceitual e a importância física que o Teorema de Noether apresenta. Proposto no começo do século XX, esse teorema estabelece uma conexão fundamental entre as simetrias contínuas de um sistema e as leis de conservação que governam sua evolução. Num momento em que a física clássica já tinha suas bases bem firmes, com as leis de Newton, Maxwell e Lagrange, o Teorema de Noether trouxe uma nova perspectiva. Ele mostrou que a matemática das simetrias é uma ferramenta essencial para entender as leis naturais de forma mais profunda.

Amalie Emmy Noether, autora desta contribuição significativa para a física, foi uma figura crucial que teve de lidar com diversos desafios sociais de sua época, principalmente devido à opressão que as mulheres sofriam, não só no ambiente acadêmico (como, por exemplo, a proibição de ocupar formalmente cargos que lhe permitissem lecionar) mas na sociedade como um todo. No entanto, sobressaiu-se pela sua notável habilidade analítica e pela unicidade das suas concepções em álgebra abstrata. Sua contribuição com seu teorema se deu em um período de grande agitação científica impulsionado pela proposição da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein. Naquele período, surgia um dilema conceitual central na física: como conciliar a teoria da gravitação de Einstein com os princípios clássicos de conservação de energia e momento. Foi neste contexto que Noether expôs seu primeiro teorema fundamental: qualquer simetria contínua e diferenciável de uma ação física invariante está associada a uma quantidade conservada. Portanto, estabeleceu-se uma profunda correspondência entre transformações invariantes e leis de conservação, mostrando o vínculo profundo entre propriedades geométricas e os comportamentos físicos de sistemas dinâmicos.

1.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS CAPÍTULOS

Ao longo deste trabalho, veremos conceitos importantes de simetrias em um sistema físico arbitrário. A teoria de grupos, principalmente os grupos de Lorentz e Poincaré, exercem um papel importantíssimo no desenvolvimento da Teoria Clássica de Campos, base para efetuar os cálculos para encontrar determinadas simetrias, por exemplo, dentre outras, simetria por translação.

Serão abordados rapidamente alguns conceitos de Mecânica Analítica a fim de contextualizar a mudança das coordenadas generalizadas $q^j(t)$ para coordenadas de campos $\phi_i(x)$, sendo $x = x^\mu$ as coordenadas do espaço-tempo. Esta é uma abordagem simples porém de muita importância, visto que explicita a troca de um sistema discreto para um sistema contínuo com infinitos graus de liberdade.

As simetrias para as novas coordenadas serão estudadas pelo desenvolvimento de uma teoria de extrema importância para o mundo físico e que garante abordagens polidas e elegantíssimas, o Teorema de Noether. Será observado este teorema para transformações chamadas "globais" e "locais".

No capítulo 2, veremos os conceitos básicos necessários para a compreensão de todo algebrismo utilizado nesse trabalho, sendo explicado sucintamente sobre alguns fundamentos da mecânica clássica e sobre definição básica de grupos, em específico os grupos de Poincaré e Lorentz. Já no capítulo 3 abordaremos em detalhes o formalismo utilizado em teoria clássica de campos, como a própria

definição de um campo clássico, a mudança para uma lagrangiana relativística escrita em termos dos campos e suas primeiras derivadas juntamente com a ação sendo um funcional dos campos, o cálculo variacional dos sistemas de coordenadas do espaço-tempo e dos campos e as equações de movimento para os campos. Por fim, no capítulo 4 será dissertado sobre o desenvolvimento das transformações infinitesimais dos parâmetros locais e globais a fim de explicitar o conteúdo dos Teoremas de Noether, tal que seja estudado sobre as correntes de Noether relacionadas às invariâncias de Poincaré e suas respectivas quantidades conservadas.

Neste trabalho, usei como base principalmente as notas para um curso de campos clássicos (ALDROVANDI; PEREIRA, 2006) e os livros (RYDER, 1996), (FELSAGER, 1983) e (LEMOS, 2013).

2 CONCEITOS BÁSICOS ESTRUTURANTES

Para uma manipulação mais simples (porém mais generalizada), e consequentemente mais elegante do que a Mecânica Newtoniana (MN) nos propõe, esse capítulo trará as noções introdutórias sobre Mecânica Analítica (MA), visto que o projeto utilizará posteriormente uma notação lagrangiana similar. Veremos também alguns conceitos da Teoria da Relatividade Restrita (RR), a fim de familiarizar o leitor, principalmente, com a notação tensorial.

2.1 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ANALÍTICA

As principais diferenças entre a MN e a MA são que todos sistemas da MA são escritos em termos de coordenadas generalizadas q^j que descrevem completamente o estado do próprio sistema (visto que, uma vez que as condições iniciais do sistema são dadas, o estado é fixado a cada momento) e também, diferentemente da MN que é caracterizada por quantidades vetoriais, o método de Lagrange visa fornecer as equações de movimento em função de quantidades escalares como a lagrangiana ($\mathcal{L}$): $\mathcal{L} = T - V$, sendo T a energia cinética e V a energia potencial do sistema.

Portanto, a partir do desenvolvimento da ação

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q^j, \dot{q}^j, t\right) dt, \tag{2.1}$$

utilizando o Princípio de Mínima Ação ou Princípio de Hamilton (será melhor abordado no próximo capítulo), as equações de movimento de uma partícula são obtidas pela equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = 0 \ , \ \ j = 1, ..., n \tag{2.2}$$

Essas equações se mantém para qualquer sistema de coordenadas generalizadas arbitrárias, onde cada componente satisfaz uma equação de Euler-Lagrange apropriada.

Por $\mathcal{L}$ ser definida a menos de uma derivada temporal total das funções de coordenadas e do tempo, pode-se escrever $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ tal que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df(q,t)}{dt} \tag{2.3}$$

e tanto $\mathcal{L}'$ quanto $\mathcal{L}$ levam às mesmas equações. Desse modo, dois sistemas físicos são equivalentes quando há uma transformação das coordenadas cujas lagrangianas diferem apenas por uma derivação total.

2.2 REVISÃO BÁSICA DE GRUPOS

Para começar a abordagem dessa seção, é necessário definir que transformações matemáticas são operações que alteram a representação de sistemas físicos (objeto, equação, etc.) em um espaço

matemático. Exemplo de transformação: uma matriz de rotação atuando sobre um espaço vetorial é a representação de uma transformação pertencente ao grupo de rotações.

As transformações que aparecem na Física, em sua maioria, pertencem a um determinado grupo. Postulam-se então quatro definições algébricas para grupos arbitrários. Desse modo, um conjunto de transformações é organizado em um grupo arbitrário G tal que:

1. A transformação identidade pertence ao conjunto, tal que:

$$I \cdot T_k = T_k \cdot I = T_k \ , \ \forall T_k \in G. \tag{2.4}$$

2. Dadas duas matrizes T_1 e T_2, e o produto $T_1 \cdot T_2$ também é uma transformação que pertence ao conjunto:

$$T_1 \cdot T_2 = T_3 \in G. \tag{2.5}$$

3. Para cada transformação T, haverá uma inversa $T^{-1} \in G$, tal que:

$$T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = I. \tag{2.6}$$

4. A associatividade se mantém para todas as triplas T_1, T_2, T_3 de membros:

$$(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3). \tag{2.7}$$

Para formar um grupo arbitrário é necessário que todos os quatro postulados acima se satisfaçam. Note que, em geral, $T_1 \cdot T_2 \neq T_2 \cdot T_1$. No entanto, quando $T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$, é dito que o grupo é um grupo abeliano ou comutativo. Caso contrário tem-se um grupo não-abeliano ou não-comutativo.

2.2.1 O Grupo de Poincaré

Por definição, as transformações do Grupo de Poincaré (GP) são transformações contínuas que mantém intervalos entre dois eventos invariante.

Dado um referencial inercial $S = S(x, y, z, ct)$ e outro referencial inercial $S' = S'(x', y', z', ct')$, há uma quantidade invariante com relação à distância entre dois pontos arbitrários do espaço-tempo, s^2 e s'^2:

$$s^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \tag{2.8}$$

$$s'^2 \equiv \eta_{\mu\nu} x^{\mu'} x^{\nu'} = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2, \tag{2.9}$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo, postulada na TRR como constante, e a métrica de Minkowski definida como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Sob notação tensorial, afirmar que transformações cujos intervalos entre dois eventos é invariante é reescrever as equações (2.8) e (2.9) como:

$$s^2 = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = s'^2. \tag{2.11}$$

Infinitesimalmente, para melhor visualização, as relações acima escritas para a distância entre dois pontos será reescrita por:

$$\begin{aligned} ds &= ds' \\ \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta &= \eta_{\mu\nu} dx^{\mu'} dx^{\nu'} \\ &= \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

de onde se infere a seguinte relação:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta}, \tag{2.13}$$

sendo $\frac{dx^{\mu'}}{dx^\alpha} \equiv \Lambda^\mu{}_\alpha$ a matriz de transformação de Lorentz. Dessa forma, pode-se dizer que a invariância do tensor métrico de Minkowski η por transformações entre referênciais inerciais define uma simetria.

O Grupo de Poincaré é composto pelas transformações de Lorentz e translações, sendo a lei de transformação que o define dada por

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{2.14}$$

onde o intervalo se manterá invariante se, e somente se,

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta. \tag{2.15}$$

No caso em que a translação seja nula ($a^\mu = 0$), a equação (2.14) se torna

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{2.16}$$

regressando justamente ao subgrupo formado pelas matrizes Λ, que é o denominado Grupo de Lorentz.

2.2.2 O Grupo de Lorentz

Os elementos do grupo de Lorentz são as matrizes Λ que deixam o tensor η invariante, ou seja que satisfazem a condição (na forma matricial)

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda. \tag{2.17}$$

Pode-se manipular a relação de forma a multiplicar por η^{-1} pela esquerda e Λ^{-1} pela direita de modo a se obter

$$\begin{aligned} \eta^{-1}\eta\Lambda^{-1} &= \eta^{-1}\Lambda^{T}\eta\Lambda\Lambda^{-1} \\ \Lambda^{-1} &= \eta^{-1}\Lambda^{T}\eta, \end{aligned} \tag{2.18}$$

provando então a propriedade de pseudo-ortogonalidade das matrizes Λ. Explicitando-se os índices tem-se que

$$\begin{aligned} \Lambda_{\nu}{}^{\mu} &= \eta^{\mu\alpha}(\Lambda^{T})_{\alpha}{}^{\beta}\eta_{\beta\nu} \\ \Lambda_{\nu}{}^{\mu} &= (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

isto é, a matriz inversa seja igual à própria transposta.

A fim de encontrar os geradores do Grupo de Lorentz, nos restringiremos apenas às transformações de Lorentz infinitesimais

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + w^{\mu}{}_{\nu}. \tag{2.20}$$

Substituindo (2.20) na equação (2.17) tem-se

$$(\delta^{\mu}_{\nu} + w^{\mu}{}_{\nu})\eta_{\mu\sigma}(\delta^{\sigma}_{\rho} + w^{\sigma}{}_{\rho}) = \eta_{\nu\rho} + w_{\nu\rho} + w_{\rho\nu}, \tag{2.21}$$

tal que, desprezando termos de segunda ordem em w, obtém-se

$$w_{\nu\rho} = -w_{\rho\nu}. \tag{2.22}$$

Esta relação retorna seis parâmetros independentes, podendo-se escrever as relações das matrizes geradoras da transformação como $[J_{\alpha\beta}]^{\mu}{}_{\nu}$

$$[J_{\alpha\beta}]^{\mu}{}_{\nu} = i\left(\delta^{\mu}{}_{\beta}\eta_{\alpha\nu} - \delta^{\mu}{}_{\alpha}\eta_{\beta\nu}\right), \tag{2.23}$$

de forma que as matrizes de Lorentz podem ser escritar na forma exponencial

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \left[e^{\frac{i}{2}w^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}}\right]^{\mu}{}_{\nu}, \tag{2.24}$$

de maneira que agora a transformação de Lorentz satisfaça:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = \left[e^{\frac{i}{2}w^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}}\right]^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}. \tag{2.25}$$

No entanto, vale ressaltar que o mapeamento exponencial nem sempre existe.Neste caso, estamos tratando de elementos pertencentes ao Grupo de Lie Conexo, isto é, cada elemento do grupo é caracterizado por um número finito de parâmetros tais que todos os elementos do grupo estão conectados à identidade por uma sequência contínua de elementos do grupo. Ainda, dois elementos distintos correspondem a dois conjuntos distintos de valores de parâmetros. Em suma, podemos entender que os elementos do grupo dependem dos parâmetros de maneira suave, e portanto diferenciável. Assim, não é só possível construir o mapeamente exponencial para o Grupo de Lie Conexo como também

podemos reescrevê-lo como uma expansão de qualquer de seus elementos em uma representação em série de Taylor tal que a estrutura geral fica:

$$\Lambda(w) = \mathbb{I} + w \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right|_{w=0} + \frac{ww}{2!} \left.\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial w^2}\right|_{w=0} + \cdots , \tag{2.26}$$

com

$$\left.\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right._{w=0} = iJ, \tag{2.27}$$

sendo J os geradores do grupo.

3 FORMALISMO GERAL

O Capítulo 2 apresentou uma revisão sobre o conhecimento base que é necessário para o desenvolvimento que veremos. Neste capítulo, será apresentado o formalismo matemático e físico do trabalho para se entender os Teoremas de Noether (TN).

Diferentemente de como foi realizado na subseção 2.1, a abordagem lagrangiana a ser feita não dependerá mais explicitamente das coordenadas generalizadas, mas sim de campos ϕ. A definição de "campos clássicos" é:

> “Fields - used to describe systems with a continuous infinity of degrees of freedom - belong to certain function spaces, which we could call ‘configuration spaces’ - just the spaces of those degrees of freedom.” (ALDROVANDI; PEREIRA, 2006, p. 50).

Isto é, é necessário uma infinidade contínua de informações para definir o estado do sistema caracterizado pelo campo; os "espaços de funções" consistem em todas as possíveis funções matemáticas (que atribuem um valor a cada ponto do espaço-tempo) que podem ser usadas para descrever o campo; o espaço de configuração (funções) é justamente o espaço definido pelos graus de liberdade.

É praticamente um pré-requisito que um campo tenha um comportamento bem-definido sob transformações para se achar uma lagrangiana $\mathcal{L}(\vec{\phi}, \partial_\mu \vec{\phi})$ invariante que descreva o sistema físico, e um campo será bem-definido se pertencer a um espaço cuja representação é definida. No caso dos campos admissíveis para este trabalho, que serão os campos relativísticos, se diz que o campo pertence à representação do Grupo de Poincaré.

Sob uma transformação, um campo ϕ é transformado em outro campo ϕ' pertencente ao mesmo espaço de ϕ e que representa, no novo referencial, a mesma configuração representada por ϕ no referencial original. Ou seja, independentemente dos diferentes observadores atrelados a diferentes referenciais inerciais, as equações de campos devem ser válidas e iguais em qualquer referencial inercial. É nesse sentido que a configuração é invariante na TRR.

Ainda sobre a definição de campo, um campo pode ser descrito por uma função individual ϕ ou por um conjunto de funções ϕ_i que podem ser vistas como componentes de um único campo, arranjados em um vetor coluna, como por exemplo, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_i)^T$. No entanto, a representação de campos não se prende apenas a vetores, mas também por tensores e outras estruturas mais complexas.

Um fato muito importante na abordagem lagrangiana é que toda simetria da lagrangiana é, também, uma simetria das equações de movimento. Portanto, se a lagrangiana é invariante sob transformações de simetria, então os campos terão a mesma simetria! Em particular, como definido anteriormente, a lagrangiana dos campos relativísticos serão invariantes sob transformações de Poincaré, pois o comportamento do sistema não deve depender do referencial inercial utilizado para observá-lo. Matematicamente falando, deveriamos ver o espaço-tempo como um espaço-afim, não um espaço vetorial; o espaço de Minkowski não tem "origem preferida".

3.1 LAGRANGIANA RELATIVÍSTICA

É importante ressaltar nesse subtópico que a lagrangiana deve ser invariante sob transformações de Poincaré para que garanta a invariância das equações de Euler-Lagrange e os campos são os graus de liberdade do próprio sistema, portanto fornecem informações sobre as suas propriedades.

> "A Poincaré transformation is a symmetry transformation for any field theory, where the Lagrangian density is a scalar field constructed entirely out of the fields and their first order derivatives. If ϕ_α is a solution to the equations of motion, we can transform it into another solution by applying a Poincaré transformation." (FELSAGER, 1983, p. 607).

Como dito anteriormente, a lagrangiana não terá mais dependência explícita das coordenadas espaciais e temporais, que são apenas parâmetros, o que leva ao coração da Teoria de Campos: O estado do sistema é caracterizado completamente pelos campos e suas primeiras derivadas (ou gradientes). Vale notar que não serão consideradas as derivadas de ordem superior porque levam à equações de ordem superior que exigiriam informações além dos campos e suas velocidades para descrever completamente o sistema!

Assim, novamente, dado um conjunto de campos $\{\phi_i(x)\}$, a densidade de lagrangiana será

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right], \tag{3.1}$$

onde $\phi(x) = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_i\}$ e $\partial_\mu \phi(x) = \{\partial_\mu \phi_1(x), \partial_\mu \phi_2(x), \ldots, \partial_\mu \phi_i(x)\}$.
No entanto, como é definida até um gradiente, a densidade de lagrangiana não precisa ser um invariante sob transformações de Poincaré necessariamente mas sim sua integral.

Apesar deste projeto requerer campos relativísticos, essas considerações são válidas também para teorias não-relativísticas, como resultado da substituição do GP pelo Grupo de Galileu.

3.2 CÁLCULO VARIACIONAL

Com o propósito de encontrar uma ação funcional dos campos que descreva completamente o sistema, será utilizado o Princípio variacional de Hamilton, adaptando o caso utilizado de partículas da mecânica clássica para um caso contínuo a fim de chegar às equações de campo.

Como definido na equação (3.1), a presença de derivações espaciais $\partial_\mu \phi(x)$ reflete o princípio de interações locais: A lagrangiana deverá depender em cada ponto do espaço-tempo dos valores dos campos e suas primeiras derivadas numa vizinhança infinitesimalmente próxima do ponto. Dessa forma, a lagrangiana é dita ser local.
Logo, diferentemente da equação (2.1) assimilada à mecânica clássica, a ação será dada agora por

$$A\left[\phi\right] = \int_{\mathcal{R}} d^4x \ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{3.2}$$

atentando-se ao fato de que a lagrangiana agora é uma função implícita das coordenadas x^μ.
A integração acima cobre toda a região espaço-temporal ocupada pelo sistema físico descrito pelas equações de campos. Portanto, nos termos de campos, a região é definida pelas condições de contorno

do campo em questão. Assim dizendo, a ação se torna um funcional da configuração do campo ϕ e depende apenas do domínio espaço-temporal ocupado pelo sistema.

A fim de se chegar nas equações de movimento do campo através do Princípio de Hamilton, que afirma que o movimento real do sistema é aquele cuja a ação é mínima, é necessário encontrar um campo que minimize a ação. Para essa finalidade, é necessário impor as condições de contorno do sistema. Realizando variações como

$$\begin{cases} x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu, \\ \phi_i(x) \to \phi_i{}'(x) = \phi_i(x) + \overline{\delta}\phi_i(x), \end{cases} \tag{3.3}$$

serão impostas as seguintes condições para o sistema: no contorno de $\mathcal{R}$ para um dado tempo t_1 e t_2, a variação funcional do campo $\overline{\delta}\phi_i$ e das coordenadas δx^μ serão, ambas, nulas.

É importante ressaltar que a variação funcional do campo $\overline{\delta}\phi_i$ é a comparação de ϕ' com relação à ϕ no mesmo ponto x^μ do espaço-tempo, sendo a variação total do campo, $\delta\phi_i(x)$, dada por:

$$\phi_i{}'(x') = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x). \tag{3.4}$$

Pode-se expandir a equação (3.4) com relação às transformações de coordenadas da equação (3.3) de modo que

$$\phi_i{}'(x') = \phi_i{}'(x + \delta x) \approx \phi_i{}'(x) + \partial_\mu \phi_i{}'(x)\delta x^\mu, \tag{3.5}$$

desenvolvendo uma aproximação do segundo termo tal que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi_i{}'(x)\delta x^\mu &= \partial_\mu \phi_i(x)\delta x^\mu + \partial_\mu \overline{\delta}\phi_i(x)\delta x^\mu \\ &\approx \partial_\mu \phi_i(x)\delta x^\mu. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Logo, com as considerações acima feitas, relacionando $\delta\phi_i(x)$ com $\overline{\delta}\phi_i(x)$ de maneira que

$$\begin{aligned} \delta\phi_i(x) - \overline{\delta}\phi_i(x) &= \phi_i{}'(x') - \phi_i(x) - \phi_i{}'(x) + \phi_i(x) \\ &= \phi_i{}'(x + \delta x) - \phi_i{}'(x) \\ &= \phi_i{}'(x') - \phi_i{}'(x), \end{aligned} \tag{3.7}$$

conclui-se:

$$\delta\phi_i(x) = \overline{\delta}\phi_i(x) + \partial_\mu \phi_i(x)\delta x^\mu. \tag{3.8}$$

Em outras palavras, a variação total do campo pode ser vista como uma combinação entre mudanças na forma funcional do campo (primeiro termo) com a variação nas coordenadas (segundo termo).

Ainda, a fim de analisar o comportamento da ação, será examinado o comportamento das variações $\delta(\partial_\mu\phi_i(x))$ e $\overline{\delta}(\partial_\mu\phi_i(x))$ ao agirem nas derivadas dos campos . Portanto, analisando a partir do método de iteração, utilizando regra da cadeia e trucamento dos termos em primeira ordem, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}}\left(x^{\nu\prime} - \delta x^{\nu}\right)\\ \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}} &= \delta^{\nu}{}_{\mu} - \frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Isoladamente, a aplicação de $\partial_{\mu'}$ é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} &= \left(\delta^{\nu}{}_{\mu} - \frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\mu\prime}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\\ \partial_{\mu'} &= \partial_{\mu} - \partial_{\mu'}\delta x^{\nu}\partial_{\nu}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Assim, a derivada ∂_{μ} na equação (3.8) é

$$\begin{aligned}\partial_{\mu}[\delta\phi_i(x)] &= \partial_{\mu}\left(\overline{\delta}\phi_i(x) + \delta x^{\nu}\partial_{\nu}\phi_i(x)\right)\\ &= \partial_{\mu}\overline{\delta}\phi_i(x) + \delta x^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i(x) + (\partial_{\mu}\delta x^{\nu})\partial_{\nu}\phi_i(x).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Por outro lado, atuando a expressão (3.10) na equação (3.8), relembrando que $\delta\phi_i(x) = \phi'_i(x') - \phi_i(x)$ e obtendo apenas termos de primeira ordem, temos que

$$\begin{aligned}\partial_{\mu'}[\delta\phi'_i(x')] &= (\partial_{\mu} - \partial_{\mu'}\delta x^{\nu}\partial_{\nu})(\phi_i(x) + \overline{\delta}\phi_i(x) + \delta x^{\lambda})\partial_{\phi i}(x))\\ &\approx \partial_{\mu}\phi_i(x) + \partial_{\mu}\overline{\delta}\phi_i(x) + \delta x^{\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}\phi_i(x),\end{aligned} \tag{3.12}$$

obtendo-se a relação

$$\delta\left[\partial_{\mu}\phi_i(x)\right] = \partial_{\mu}\overline{\delta}\phi_i(x) + \delta x^{\lambda}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}\phi_i(x). \tag{3.13}$$

Portanto, subtraindo as equações (3.11) e (3.13), chega-se na relação de comutação:

$$\left[\partial_{\mu}, \delta\right]\phi_i(x) = [\partial_{\mu}(\delta x^{\lambda})]\partial_{\lambda}\phi_i(x). \tag{3.14}$$

Com tal relação, é notável a não comutação das operações δ e ∂_{μ}.

Aplicando agora a equação (3.8) em $\partial_{\mu}\phi_i(x)$, temos

$$\delta(\partial_{\mu}\phi_i(x)) = \overline{\delta}(\partial_{\mu}\phi_i(x)) + \delta x^{\nu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\phi_i(x). \tag{3.15}$$

Escrevendo a comutação da maneira $\left[\partial_{\mu}, \delta\right]\phi_i(x) = \partial_{\mu}(\delta\phi_i(x)) - \delta(\partial_{\mu}\phi_i(x))$ de modo a substituir os termos encontrados nas equações (3.11) e (3.15), ficamos com

$$\begin{aligned}&\partial_{\mu}(\delta\phi_i(x)) - \delta(\partial_{\mu}\phi_i(x)) = \partial_{\mu}\overline{\delta}\phi_i(x) + \delta x^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_i(x) + \partial_{\mu}(\delta x^{\nu})\partial_{\nu}\phi_i(x) - \overline{\delta}(\partial_{\mu}\phi_i(x)) - \delta x^{\nu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\phi_i(x)\\ &\partial_{\mu}(\delta\phi_i(x)) - \delta(\partial_{\mu}\phi_i(x)) = \partial_{\mu}(\delta x^{\nu})\partial_{\nu}\phi_i(x) + \partial_{\mu}\overline{\delta}\phi_i(x) - \overline{\delta}(\partial_{\mu}\phi_i(x)),\end{aligned} \tag{3.16}$$

obtendo-se, a partir de (3.14), a relação

$$\left[\partial_{\mu}, \delta\right]\phi_i(x) = \left[\partial_{\mu}, \delta\right]\phi_i(x) + \left[\partial_{\mu}, \overline{\delta}\right]\phi_i(x), \tag{3.17}$$

onde se explicita a relação de comutação $\left[\partial_\mu, \overline{\delta}\right] \phi_i(x) = 0$ de forma a garantir a igualdade

$$\overline{\delta}(\partial_\mu \phi_i(x)) = \partial_\mu(\overline{\delta}\phi_i(x)). \tag{3.18}$$

Em outras palavras, evidenciando a comutação entre variações a ponto fixo e derivadas usuais, a mudança na forma funcional da derivada de $\phi_i(x)$ é a derivada da mudança na forma funcional de $\phi_i(x)$. Tal resultado é esperado visto a existência de operação que ocorre no espaço das coordenadas enquanto outra acontece no espaço funcional dos campos.

Na ação integral, as variações (3.3) e (3.4) agem simultâneamente transformando o volume de integração e a densidade de lagrangiana, visível na alteração da equação (3.2) pelo cálculo de $\delta A[\phi]$:

$$\begin{aligned} \delta A\left[\phi\right] &= \int_{\Re} \delta(d^4x\ \mathcal{L}) \\ &= \int_{\Re} \left[d^4x \delta\mathcal{L} + \delta(d^4x)\mathcal{L}\right]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Analisando o primeiro termo da equação (3.19), deve-se lembrar que $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ é um funcional que, portanto, utilizando o conjunto de transformações (3.3) e (3.4), poderá ser escrita como:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \overline{\delta}\mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\overline{\delta}\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\overline{\delta}(\partial_\mu\phi_i) + \delta x^\mu \partial_\mu\mathcal{L}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

lembrando da comutação entre $\overline{\delta}$ e ∂_μ. Realizando o cálculo de integração por partes, obtém-se que:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\overline{\delta}\phi_i + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\overline{\delta}\phi_i\right] - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\overline{\delta}\phi_i + \delta x^\mu\partial_\mu\mathcal{L}. \tag{3.21}$$

Analisando agora o segundo termo da equação (3.19), que é justamente a variação do elemento do quadrivolume, sua transformação é fixada pelo jacobiano

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x, \tag{3.22}$$

sendo $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ o determinante do jacobiano explicitamente, dado por

$$\left|\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{0\prime}}{\partial x^0} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x^{0\prime}}{\partial x^3} \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial x^{3\prime}}{\partial x^0} & & & \frac{\partial x^{3\prime}}{\partial x^3} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x^0+\delta x^0)}{\partial x^0} & \cdots & \cdots & \frac{\partial(x^0+\delta x^0)}{\partial x^3} \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial(x^3+\delta x^3)}{\partial x^0} & & & \frac{\partial(x^3+\delta x^3)}{\partial x^3} \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Para uma aproximação de primeira ordem, o determinante do jacobiano é

$$\left|\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu}\right| = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\delta x^0}{\partial x^0} & \cdots & \cdots & 1+\frac{\partial\delta x^0}{\partial x^3} \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1+\frac{\partial\delta x^3}{\partial x^0} & & & 1+\frac{\partial\delta x^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \approx 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu). \tag{3.24}$$

Retornando à equação (3.22), temos

$$\begin{aligned} d^4x' &\approx [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)]d^4x \\ &= d^4x + \partial_\mu(\delta x^\mu)d^4x. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Portanto, o segundo termo da equação (3.19) é reescrito como:

$$\delta(d^4x) = \partial_\mu(\delta x^\mu)d^4x. \tag{3.26}$$

Dessa maneira, tem-se o necessário para reformular a equação (3.19) de maneira a ser utilizada para encontrar as equações de movimento do campo. Assim, com as considerações (3.21) e (3.26), (3.19) é reescrita da seguinte forma:

$$\delta A\left[\phi\right] = \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}\overline{\delta}\phi_i - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\overline{\delta}\phi_i + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\overline{\delta}\phi_i\right] + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)\right\}. \tag{3.27}$$

Utilizando que $\partial_\mu(\delta x^\mu \mathcal{L}) = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta x^\mu)$, somam-se entre si os dois primeiros termos e os termos de divergência total, de modo que

$$\delta A\left[\phi\right] = \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\overline{\delta}\phi_i + \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\overline{\delta}\phi_i + \mathcal{L}\delta x^\mu\right]\right\}. \tag{3.28}$$

A integral dos termos de divergência total é reescrita, utilizando o Teorema de Gauss generalizado para 4 dimensões, como uma integral de superfície sobre $\partial\mathcal{R}$, resultando em

$$\delta A\left[\phi\right] = \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\overline{\delta}\phi_i\right\} + \int_{\partial\mathcal{R}} d\sigma^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\overline{\delta}\phi_i + \mathcal{L}\delta x^\mu\right]. \tag{3.29}$$

Foi definido no início da presente subseção que, com as condições de contorno do sistema, as variações $\overline{\delta}\phi_i$ e δx^μ seriam nulas. Portanto, devido aos termos de variação nula em $\partial\mathcal{R}$ a segunda integral em (3.29) se anula diretamente, restando

$$\delta A\left[\phi\right] = \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\overline{\delta}\phi_i\right\}. \tag{3.30}$$

Pelo Princípio da Minima Ação (Hamilton) que estabelece que os estados físicos são caracterizados por um extremo da ação dado por transformações nos graus de liberdade no espaço funcional, afirma-se então que $\delta A\left[\phi\right] = 0$. No entanto, no interior do sistema a variação $\overline{\delta}\phi_i$ é arbitrária e, portanto, o termo entre chaves deve ser sempre nulo, levando à relação

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right) = 0, \tag{3.31}$$

sendo essa a equação de Euler-Lagrange para os campos ϕ_i.

É importante ressaltar que a equação (3.30) é válida sempre que se mantém as condições de contorno inicialmente estabelecidas e, consequentemente, a equação (3.31) implica um extremo do

funcional da ação. Também, como citado no início da subseção 3.1, sendo ϕ_i soluções para suas respectivas equações de Euler-Lagrange, podemos transformar esses campos em outras soluções aplicando uma transformação de Poincaré que deixa a lagrangiana igualmente invariante.

A fim de encontrar a equação fundamental que nos proporcionará o desenvolvimento e estudo dos Teoremas de Noether relatando simetrias lagrangianas às cargas conservadas, a equação (3.28) será reescrita como

$$\delta A\left[\phi\right] = \int_{\mathbb{R}} d^4x \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \overline{\delta}\phi_i + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \overline{\delta}\phi_i + \mathcal{L}\delta x^\mu \right] \right\}, \tag{3.32}$$

sendo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right). \tag{3.33}$$

A equação acima é chamada derivada funcional da lagrangiana em relação ao campo, e assume valor nulo sempre que os campos satisfazem as equações de Euler-Lagrange. Por vezes se torna mais conveniente utilizar a derivada funcional ao lidarmos com transformações de simetria, pois permite reformular a variação da ação de maneira mais elegante e sistemática. No próximo capítulo, utilizaremos este mesmo formalismo para estudar os Teoremas de Noether e observar como as simetrias do sistema se relacionam com quantidades físicas conservadas.

4 TEOREMAS DE NOETHER

A grosso modo, a importância do estudo do Teorema de Noether (TN) na Teoria Clássica de Campos advêm da conexão estabelecida entre as propriedades de simetrias e quantidades conservadas que são propostas na teoria e são de grande valor para o mundo físico! Relembrando os conceitos acima citados, simetrias são transformações que deixam um determinado sistema físico invariante sob estas mesmas transformações, vide o exemplo a simetria da ação $\delta A = 0$ vista anterioremente que é proveniente da invariância da lagrangiana sob transformações do GP.
Quando as equações de movimento são obtidas através do Princípio de Hamilton, é possível estabelecer uma relação entre as simetrias e as integrais de movimento que nos levarão às cargas conservadas.

Será suposto agora que as transformações que serão trabalhadas são transformações contínuas e conectadas à identidade. Isto é, grupos de transformações que podem ser obtidas através da adição de uma contribuição infinitesimal à identidade e que retorne um determinante da matriz próximo de $+1$ serão considerados contínuos e conectados com a identidade
($|I + \delta W| \approx 1 \ , \ \delta W \ll 1$).
Além do mais, será adicionado ao desenvolvimento feito até o presente momento sobre o variacional da ação do sistema os parâmetros de transformação de um grupo de Lie.

Logo, antes de abordar diretamente tal extensão, como dito na seção 3, é necessário definir que os campos $\phi_i(x)$ pertencem à representação matricial de um grupo de Lie arbitrário que é constituido justamente pelas transformações contínuas e conectadas com a identidade. Portanto, teremos que

$$\phi_i{}'(x') = \left[e^{w^a T_a}\right]_{ij} \phi_j(x), \tag{4.1}$$

tal que T_a sejam os geradores da transformação (que percentencem a um conjunto $\{T_a\}$ de matrizes $N \times N$ arbitrárias, onde $a = 1, 2, \ldots, n$), e w^a sejam os parâmetros de transformação.

As matrizes geradoras da transformação T_a, quando exponenciadas, pertencem a grupo de Lie e portanto devem respeitar as regras de comutação que constituem a álgebra deste grupo. As regras de comutação são dadas por:

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c, \tag{4.2}$$

sendo $f_{ab}{}^c$ a constante de estrutura do grupo. A partir da relação $[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a$, pode-se notar facilmente a antissimetria da constante de estrutura

$$\begin{aligned} -[T_a, T_b] &= -(T_a T_b - T_b T_a) = T_b T_a - T_a T_b \\ -[T_a, T_b] &= [T_b, T_a] \\ -f_{ab}{}^c T_c &= f_{ba}{}^c T_c. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ademais, os geradores satisfazem a identidade de Jacobi:

$$[[T_a, T_b], T_c] + [[T_c, T_a], T_b] + [[T_b, T_c], T_a] = 0. \tag{4.4}$$

O estudo do TN a ser realizado aqui será dividido de forma a depender dos parâmetros de transformação. Será caracterizado como "Primeiro Teorema de Noether"(1º TN) aquele referente às transformações globais, isto é, com parâmetros de transformação iguais para todos os pontos do espaço-tempo (para essa afirmação, diz-se que os parâmetros de transformação w^a serão constantes). Será caracterizado também como "Segundo Teorema de Noether"(2º TN) aquele referente às transformações locais, isto é, com parâmetros de transformação que variam ponto a ponto no sistema (para essa afirmação, se diz que os parâmetros de transformação serão funções dependentes das coordenadas do espaço-tempo : $w^a = w^a(x)$).

4.1 O PRIMEIRO TEOREMA DE NOETHER

A fim de chegar nas conclusões do 1º TN, os parâmetros de transformação utilizados no momento, como comentado, serão constantes. Para transformações infinitesimais $w^a \longrightarrow \delta w^a$, e considerando apenas aproximações de primeira ordem, tem-se

$$\begin{aligned} \phi_i{}'(x') &\approx \left[\delta_{ij} + \delta w^a (T_a)_{ij}\right] \phi_j(x) \\ &= \phi_i(x) + \delta w^a (T_a)_{ij} \phi_j(x), \end{aligned} \tag{4.5}$$

o que resulta na variação total do campo sendo uma combinação dos parâmetros de transformação e os campos:

$$\delta\phi_i(x) = \delta w^a (T_a)_{ij} \phi_j(x). \tag{4.6}$$

Nos termos dos parâmetros de transformação, em primeira ordem, as variações (3.3) e (3.4) serão reescritas como

$$\delta x^\mu = \frac{\delta x^\mu}{\delta w^a} \delta w^a, \tag{4.7}$$

$$\delta\phi_i(x) = \frac{\delta\phi_i(x)}{\delta w^a} \delta w^a. \tag{4.8}$$

Ao relacionar as equações (4.6) e (4.8), obtem-se que

$$(T_a)_{ij}\phi_j(x) = \frac{\delta\phi_i(x)}{\delta w^a}. \tag{4.9}$$

A variação do campo a ponto fixo x será dada agora por

$$\begin{aligned} \overline{\delta}\phi_i(x) &= \delta\phi_i(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi_i(x), \\ &= \left[\frac{\delta\phi_i(x)}{\delta w^a} - \frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x^\mu}\frac{\delta x^\mu}{\delta w^a}\right] \delta w^a = \frac{\overline{\delta}\phi_i(x)}{\delta w^a}\delta w^a. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por fim, com as novas relações das variações (4.7), (4.8) e (4.10), a equação (3.32) será reescrita em termos dos parâmetros de transformação:

$$\delta A\left[\phi\right] = \int_{\mathcal{R}} d^4x \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\frac{\overline{\delta}\phi_i}{\delta w^a} + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\frac{\overline{\delta}\phi_i}{\delta w^a} + \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta w^a}\right]\right\} \delta w^a. \tag{4.11}$$

Portanto, para que haja invariância da ação sob uma transformação global, i.e. , uma transformação de simetria ($\delta A = 0$), visto que os parâmetros de transformação são constantes e arbitrários, todo o termo entre chaves da equação (4.11) deve ser nulo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \frac{\overline{\delta} \phi_i}{\delta w^a} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\overline{\delta} \phi_i}{\delta w^a} + \mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta w^a} \right] = 0. \tag{4.12}$$

A equação (4.12), sempre válida desde que haja uma simetria do funcional da ação, seja para campos que satisfaçam ou não as equações de Euler-Lagrange, diz explicitamente que, para o caso em que haja uma invariância da ação sob transformações globais de um grupo de dimensão N, haverá N combinações lineares das derivadas das lagrangianas que se reduzirão às divergências.
Definindo uma quadricorrente chamada "Corrente de Noether", ${J_a}^\mu$, por

$${J_a}^\mu \equiv - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\overline{\delta} \phi_i}{\delta w^a} + \mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta w^a} \right], \tag{4.13}$$

para campos $\phi_i(x)$ que são soluções da equação de Euler-Lagrange $\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} = 0 \right)$ obtem-se a relação

$$\partial_\mu {J_a}^\mu = 0, \tag{4.14}$$

que é justamente a divergência nula da quadricorrente. Essa relação explicita que, partindo da simetria, haverá uma corrente conservada (derivada da transformação de simetria da ação) para cada grupo gerador que resultará em uma carga conservada - como citado no começo da seção.

Logo, para observar a relação da simetria com as integrais de movimento, primeiro se faz necessário considerar um volume arbitrário do espaço-tempo Ω tal que suas propriedades se assemelham à $\mathbb{R}^{1+3}$ e seja limitado por duas superfícies tipo-espaço Ω_1 e Ω_2.
Ao integrar (4.14), independente do tempo (contorno suposto estar no infinito), a integração se reduz a

$$\int_\Omega d^3x \ \frac{\partial {J_a}^0}{\partial t} = \int_\Omega d^3x \ (\nabla \cdot \mathbf{J}). \tag{4.15}$$

Utilizando o Teorema do Divergente, recairemos em uma integral sobre a superfície de contorno. Supondo que a corrente espacial se anule nos contornos no infinito, tem-se que

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega d^3x \ {J_a}^0 = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \hat{n} \ dA = 0. \tag{4.16}$$

Logo, assume-se uma carga de Noether para cada parâmetro *a*

$$Q_a = \int_\Omega d^3x \ {J_a}^0, \tag{4.17}$$

que, a cada parâmetro *a*, se conserva no tempo:

$$\frac{d}{dt} Q_a = 0. \tag{4.18}$$

Tais cargas, por não terem dependência temporal, são chamadas de constante de movimento.

4.2 INVARIÂNCIA DE POINCARÉ

Foi dito que os campos físicos de interesse nesse trabalho devem ter um comportamento bem-definido e serem invariantes sob transformações de Poincaré, isto é, invariantes sob translações do espaço-tempo e sob as transformações de Lorentz. Portanto, existe uma ou mais quantidades conservadas (i.e. combinações dos campos e suas primeiras derivadas que são invariantes sob transformações) a serem estudadas para tais simetrias.
É justamente essa importantíssima consequência do princípio variacional utilizado que resulta no TN e que será abordado com mais detalhe nas seguintes subseções, conservação de energia, momento, momento angular.

4.2.1 Translações

Considere uma translação infinitesimal de forma

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + \delta x^{\mu} \\ &= x^{\mu} + \frac{\delta x^{\mu}}{\delta a^{\alpha}} \delta a^{\alpha}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Para translações as próprias coordenadas x^{μ} são parâmetros, de modo que $\frac{\delta x^{\mu}}{\delta a^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\alpha}$. Com isso, de modo análogo à equação (3.8), pode-se escrever o funcional do campo em função dos parâmetros como

$$\overline{\delta}\phi_i(x) = \left[\frac{\delta \phi_i(x)}{\delta a^{\alpha}} - \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\delta x^{\mu}}{\delta a^{\alpha}} \right] \delta a^{\alpha}, \tag{4.20}$$

e devido às invariâncias dos campos sob translações, $\frac{\delta \phi_i}{\delta a^{\alpha}} = 0$,

$$\begin{aligned} &\overline{\delta}\phi_i(x) = -\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\delta x^{\mu}}{\delta a^{\alpha}} \delta a^{\alpha} = -\partial_{\mu}\phi_i(x) \delta^{\mu}_{\alpha} \delta a^{\alpha} \\ &\overline{\delta}\phi_i(x) = -\partial_{\alpha}\phi_i(x) \delta a^{\alpha}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Portanto, a corrente de Noether (4.13) associada à invariância sob translações será escrita por

$$\Theta_{\alpha}{}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)} \partial_{\alpha}\phi_i - \delta^{\mu}_{\alpha}\mathcal{L}, \tag{4.22}$$

ou

$$\begin{aligned} \Theta^{\lambda\mu} &= \eta^{\alpha\lambda} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)} \partial_{\alpha}\phi_i - \delta^{\mu}_{\alpha}\mathcal{L} \right] \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi_i)} \partial^{\lambda}\phi_i - \eta^{\lambda\mu}\mathcal{L}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Em Teoria de Campos, o objeto da equação (4.23) é chamado de "Tensor de Densidade de Energia-Momento Canônico". A carga conservada associada será

$$P^{\lambda} = \int d^3x \Theta^{\lambda 0}(x), \tag{4.24}$$

onde, por questões de covariância, e o fato do momento linear ser associado às invariâncias sob translações espaciais, P^λ é estabelecido como o quadrimomento e $\Theta^{\lambda 0}$ sua densidade de espaço. Num caso particular, P^0 corresponde justamente à hamiltoniana cujo Θ^{00} representa a densidade de energia.

Logo, pode-se concluir que as invariâncias relacionadas às translações são as componentes do quadrimomento e as correntes de Noether relacionadas às invariâncias sob translações contituem o tensor de densidade de energia-momento.

Pode-se reescrever a corrente de Noether geral (4.13), utilizando (3.8), de forma

$$J_a{}^\mu = -\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\frac{(\delta\phi_i - \delta x^\mu \partial_\mu \phi_i)}{\delta w^a} + \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta w^a}\right] \tag{4.25}$$

e utilizando a relação $\frac{\delta x^\mu}{\delta w^a} = \frac{\delta x^\mu}{\delta a^\alpha}\frac{\delta a^\alpha}{\delta x^\mu}\frac{\delta x^\mu}{\delta w^a}$, tem-se que

$$J_a{}^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\frac{\delta \phi_i}{\delta w^a} + \Theta_\alpha{}^\mu \frac{\delta x^\alpha}{\delta w^a}. \tag{4.26}$$

4.2.2 Transformações de Lorentz

Considerando agora as transformações de Lorentz na forma exponencial e desprezando os termos de segunda ordem ou superiores tem-se

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \left[e^{\frac{i}{2}\delta w^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta}}\right]^\mu{}_\nu x^\nu \\ &\approx x^\mu + \frac{i}{2}\delta w^{\alpha\beta}\left[J_{\alpha\beta}\right]^\mu{}_\nu x^\nu, \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde $\left[J_{\alpha\beta}\right]^\mu{}_\nu$ são os geradores da matriz cujos elementos obedecem a relação (2.23)

$$\left[J_{\alpha\beta}\right]^\mu{}_\nu = i\left(\delta^\mu{}_\alpha \eta_{\beta\nu} - \delta^\mu{}_\beta \eta_{\alpha\nu}\right). \tag{4.28}$$

Utilizando a notação $x^\nu = \eta^{\nu\lambda}x_\lambda$, obtem-se a relação

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu - \frac{1}{2}\delta w^{\alpha\beta}\left(\delta^\mu{}_\alpha \eta_{\beta\nu} - \delta^\mu{}_\beta \eta_{\alpha\nu}\right)\eta^{\nu\lambda}x_\lambda \\ &= x^\mu - \frac{1}{2}\left(\delta w^{\mu\lambda} - \delta w^{\lambda\mu}\right)x_\lambda, \end{aligned} \tag{4.29}$$

que, devido ao caráter antissimétrico dos parâmetros de transformação $\delta w^{\mu\lambda} = -\delta w^{\lambda\mu}$ e, realizando também a troca no índice mudo $\lambda \leftrightarrow \nu$, tem-se que

$$x'^\mu = x^\mu + \delta w^{\mu\nu}x_\nu \tag{4.30}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\delta x^\mu}{\delta w^{\alpha\beta}} &= \frac{\delta w^{\mu\nu}x_\nu}{\delta w^{\alpha\beta}} \\ &= \left(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha\right)x_\nu \\ &= \delta^\mu_\alpha x_\beta - \delta^\mu_\beta x_\alpha. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Assim, a corrente de Noether relacionada às transformações de Lorentz é

$$M^{\mu}{}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\frac{\overline{\delta}\phi_i}{\delta w^{\alpha\beta}} - \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta w^{\alpha\beta}}, \tag{4.32}$$

conhecida justamente como "Tensor Densidade de Corrente de Momento Angular Total".
Utilizando as relações (4.10), (4.22) e (4.31), obtemos $M^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ na forma

$$\begin{aligned} M^{\mu}{}_{\alpha\beta} &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\left[\frac{\delta\phi_i}{\delta w^{\alpha\beta}} - \frac{\partial\phi_i}{\partial x^\mu}\frac{\delta x^\mu}{\delta w^{\alpha\beta}}\right] - \mathcal{L}\frac{\delta x^\mu}{\delta w^{\alpha\beta}} \\ &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\frac{\delta\phi_i}{\delta w^{\alpha\beta}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\alpha\phi_i x_\beta - \mathcal{L}\delta^\mu_\alpha x_\beta - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\beta\phi_i x_\alpha + \mathcal{L}\delta^\mu_\beta x_\alpha, \end{aligned} \tag{4.33}$$

a partir da qual

$$M^{\mu}{}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\frac{\delta\phi_i}{\delta w^{\alpha\beta}} + \Theta_\alpha{}^\mu x_\beta - \Theta_\beta{}^\mu x_\alpha. \tag{4.34}$$

A segunda parte da equação (4.34), definida por

$$L^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv \Theta_\alpha{}^\mu x_\beta - \Theta_\beta{}^\mu x_\alpha, \tag{4.35}$$

é presente em todos os campos, também conhecida como "Tensor Densidade de Momento Angular Orbital".
Já a primeira parte da equação, definida por

$$S^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i}\frac{\delta\phi_i}{\delta w^{\alpha\beta}}, \tag{4.36}$$

é o "Tensor de Densidade de Spin", aparecendo somente quando o campo não é um singleto de Lorentz, ou seja, quando o campo não é um invariante sob transformações de Lorentz. Caso o campo seja um singleto de Lorentz, $\frac{\delta\phi_i}{\delta w^{\alpha\beta}} = 0$ e portanto a densidade de spin é nula.

Logo, tem-se que (4.34) é:

$$M^{\mu}{}_{\alpha\beta} = L^{\mu}{}_{\alpha\beta} + S^{\mu}{}_{\alpha\beta}. \tag{4.37}$$

A partir das relações de conservação onde $\partial_\mu\Theta_\alpha{}^\mu = 0$ e $\partial_\mu M^{\mu}{}_{\alpha\beta} = 0$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu M^{\mu}{}_{\alpha\beta} &= \partial_\mu\left(L^{\mu}{}_{\alpha\beta} + S^{\mu}{}_{\alpha\beta}\right) = 0 \\ &= \partial_\mu(\Theta_\alpha{}^\mu x_\beta - \Theta_\beta{}^\mu x_\alpha) + \partial_\mu S^{\mu}{}_{\alpha\beta} = 0 \\ \partial_\mu S^{\mu}{}_{\alpha\beta} &= \partial_\mu(\Theta_\beta{}^\mu x_\alpha) - \partial_\mu(\Theta_\alpha{}^\mu x_\beta), \end{aligned} \tag{4.38}$$

e utilizando a regra da cadeia e a notação $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x^\mu} = \eta_{\alpha\mu}$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu S^{\mu}{}_{\alpha\beta} &= \Theta_\beta{}^\mu\eta_{\alpha\mu} - \Theta_\alpha{}^\mu\eta_{\beta\mu} \\ \partial_\mu S^{\mu}{}_{\alpha\beta} &= \Theta_{\beta\alpha} - \Theta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Logo, é visível que a parte antissimetrica do Tensor de Densidade de Energia-Momento Canônico

mede exatamente a quebra de conservação da corrente de spin.

4.3 O SEGUNDO TEOREMA DE NOETHER

Um fato importantíssimo para começar essa subseção é lembrar que, durante todo o desenvolvimento realizado anteriormente, não foram utilizadas as condições de contorno para chegar na conclusão da equação (3.32) que se refere à variação global da ação do sistema. Por esse motivo, caso seja feito o cálculo em algum sub-domínio interior ao sistema, a equação (3.32) retornará justamente a variação da ação naquele interior.

No entanto, será suposto que a ação deve ser um extremo em cada sub-domínio do sistema sob transformações de simetria. Ou seja, a ação deve permanecer invariante perante transformações nas pequenas regiões ao redor de cada ponto do sistema. É justamente por essa suposição que se diz ter "simetria local" e $\delta A = 0$ num volume arbitrário dentro do sistema.

Portanto, para manter a invariância da ação, é necessário que todo o conteúdo no integrando seja nulo em qualquer lugar, ou seja

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} \overline{\delta} \phi_i + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \overline{\delta} \phi_i + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0. \tag{4.40}$$

A partir da equação acima consegue-se reobter, a parâmetros de transformação constantes, a relação (4.12) e o TN referente a ele.

No entanto, a abordagem que será introduzida agora envolve considerar os parâmetros de transformação como funções do espaço-tempo (que variam de ponto a ponto) e, ao invés de usar diferenciação funcional, serão utilizadas derivações funcionais de tal maneira que

$$\frac{\delta A\left[\phi\right]}{\delta w^a(y)} = \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta \phi_i(x)} \frac{\overline{\delta} \phi_i(x)}{\delta w^a(y)} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \frac{\overline{\delta} \phi_i}{\delta w^a(y)} + \mathcal{L} \frac{\delta x^\mu}{\delta w^a(y)} \right]. \tag{4.41}$$

Para os parâmetros de transformações dependentes das coordenadas do sistema é necessário utilizar características das teorias de calibre. Como meio de se ter uma teoria invariante cuja lei de transformação seja útil, é adicionado um "novo tipo" de campo chamado "campo de calibre" cujas transformações locais não afetam fisicamente o estado físico do sistema. Este trabalho não focará no estudo das teorias de calibre mas sim em suas consequências!

A partir dessas teorias, obtemos dois tipos de campos chamados "campos fonte" e os "potenciais de gauge" (campos de calibre). Os campos fonte (tal como elétrons) são campos de matéria que geram os campos de calibre ($\vec{E}, \vec{B}$).

Como estudamos até então, os campos fonte se transformam pela relação

$$\overline{\delta} \phi(x) = \delta w^a(x) T_a \phi(x), \tag{4.42}$$

sendo T_a a matriz geradora, enquanto os campos de calibre se transformam

$$\overline{\delta} A^a{}_\mu(x) = f^a{}_{bc} \delta w^b(x) A^c{}_\mu(x) - \partial_\mu \delta w^a(x). \tag{4.43}$$

Em ambos os casos, campos e parâmetros estão no mesmo ponto. Com isso, para a abordagem que é utilizada, a notação para a variação funcional do campo com relação aos parâmetros a se usar é

$$\frac{\overline{\delta}\phi(x)}{\delta w^a(y)} = \delta^4(x-y)T_a\phi(x), \tag{4.44}$$

a fim de reescrever os campos de calibre (4.43) de maneira a

$$\frac{\overline{\delta}A^a{}_\mu(x)}{\delta w^b(y)} = f^a{}_{bc}\delta^4(x-y)A^c{}_\mu(x) - \delta^a_b\partial_\mu\delta^4(x-y), \tag{4.45}$$

tal que os "δ's"garantem a localidade acima citada para a simetria local. Portanto, para qualquer ponto y interior ao sistema, o termo de divergência é nulo e tem-se que

$$\frac{\delta A\left[\phi,A\right]}{\delta w^a(y)} = \int d^4x \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi(x)}\frac{\overline{\delta}\phi(x)}{\delta w^a(y)} + \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_\mu(x)}\frac{\overline{\delta}A^a{}_\mu(x)}{\delta w^a(y)} \right\}. \tag{4.46}$$

Aplicando as relações encontradas em (4.44) e (4.45), tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{\delta A\left[\phi,A\right]}{\delta w^a(y)} &= \int d^4x \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi(x)}\delta^4(x-y)T_a\phi(x) + \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_\mu(x)}\left[f^a{}_{bc}\delta^4(x-y)A^c{}_\mu(x) - \delta^a_b\partial_\mu\delta^4(x-y)\right] \right\} \\ &= \frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta\phi(y)}T_a\phi(x) + \frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta A^b{}_\mu(y)}f^a{}_{bc}A^c{}_\mu(y) - \int d^4x \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_\mu(x)}\delta^a_b\partial_\mu\delta^4(x-y) \right\}.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Pode-se manipular a última integral de forma

$$-\int d^4x \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_\mu(x)}\partial_\mu\delta^4(x-y) \right\} = -\int d^4x \left\{ \partial_\mu\left(\delta^4(x-y)\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_\mu(x)}\right) - \delta^4(x-y)\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_\mu(x)} \right\}, \tag{4.48}$$

de modo que o termo de divergência total se anula e portanto

$$-\int d^4x \left\{ \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_\mu(x)}\partial_\mu\delta^4(x-y) \right\} = \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta A^a{}_\mu(y)}. \tag{4.49}$$

Posto isso, a equação (4.47) se desenvolve para

$$\frac{\delta A\left[\phi,A\right]}{\delta w^a(y)} = \frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta\phi(y)}T_a\phi(x) + \frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta A^b{}_\mu(y)}f^a{}_{bc}A^c{}_\mu(y) + \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta A^a{}_\mu(y)}. \tag{4.50}$$

Foi suposto anteriormente para o 2º TN que na presença de uma simetria local, relacionada a um grupo de N geradores,

$$\frac{\delta A\left[\phi\right]}{\delta w^a(y)} = 0, \tag{4.51}$$

haverá então N relações independentes entre as derivações da lagrangiana e suas derivações

$$\frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta A^b{}_\mu(y)}f^a{}_{bc}A^c{}_\mu(y) + \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta A^a{}_\mu(y)} = -\frac{\delta\mathcal{L}(y)}{\delta\phi(y)}T_a\phi(x). \tag{4.52}$$

É importante ressaltar que não foram utilizadas as equações de movimento e que as relações de (4.52) são extremamente importantes, pois se mantém válidas independentemente das soluções do sistema, refletindo as simetrias do espaço de possíveis estados do sistema físico.
Como comentado anteriormente, o intuito não é abranger o estudo das teorias de calibre, mas sim comentar sobre algumas consequências interessantes dessas teorias. Portanto, definindo um objeto

$$J_a{}^{\mu}(x) = -\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_{\mu}(x)}, \tag{4.53}$$

reescreve-se a expressão (4.52) de forma

$$-f^{ab}{}_{c}\,A^{c}{}_{\mu}(x)J_b{}^{\mu}(x) - \partial_\mu J_a{}^{\mu}(x) = -\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi(x)}T_a\phi(x), \tag{4.54}$$

em que se consegue manipular o primeiro termo da equação seguindo

$$\begin{aligned} -f^{ab}{}_{c}\,A^{c}{}_{\mu}(x)J_b{}^{\mu}(x) &= -f_{abc}\,A^{c}{}_{\mu}(x)J^{b\mu}(x) \\ &= -f_{acb}\,A^{b}{}_{\mu}(x)J^{c\mu}(x) \\ &= f_{abc}\,A^{b}{}_{\mu}(x)J^{c\mu}(x), \end{aligned} \tag{4.55}$$

de modo a se chegar na seguinte solução:

$$-\left(\partial_\mu J_a{}^{\mu}(x) - f_{abc}\,A^{b}{}_{\mu}(x)J^{c\mu}(x)\right) = -\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi(x)}T_a\phi(x). \tag{4.56}$$

Pode-se enxergar, a grosso modo, o lado esquerdo de (4.56) como um operador total agindo sobre J,

$$D_\mu J_a{}^{\mu}(x) = \partial_\mu J_a{}^{\mu}(x) - f_{abc}\,A^{b}{}_{\mu}(x)J^{c\mu}(x), \tag{4.57}$$

tal que se torna perceptível a equação (4.56) como:

$$D_\mu J_a{}^{\mu}(x) = \frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta\phi(x)}T_a\phi(x). \tag{4.58}$$

O operador total do lado esquerdo é, na verdade, uma divergência covariante enquanto no lado direito da equação aparece um fator resultante das equações de Euler-Lagrange que, para soluções das equações de campos, se torna nula. Nas teorias de calibre, J é uma corrente produzida pelos campos fonte.
Logo, um resultado simples para lagrangianas que são soluções das equações de campos seria que a "corrente J" tem divergência nula

$$D_\mu J_a{}^{\mu}(x) = 0. \tag{4.59}$$

No entanto, apesar do resultado acima, o 2ºTN não lida com quantidades conservadas via derivação usual, mas estabelece restrições às possíveis fontes, de maneira que só haverá cargas conservadas sob a condição adicional que as transformações locais se transformem de forma constante fora do sistema.

Portanto, quando são levados em conta transformações locais, não se observa mais uma quantidade conservada para cada gerador, mas sim uma condição de vínculo que é a corrente $J_a{}^{\mu}(x) = -\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_{\mu}(x)}$

que tem derivada covariante nula.

Temos um exemplo clássico do Segundo Teorema de Noether que decorre da teoria do eletromagnetismo. Sabemos que a lagrangiana do campo eletromagnético, acoplado a uma corrente conservada, é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu, \tag{4.60}$$

sendo $F_{\mu\nu}$ o tensor de campo eletromagnético, A_μ o potencial vetor e J^μ a densidade de corrente, onde o tensor de campo eletromagnético obedece a seguinte relação:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.61}$$

Sabemos também que a lagrangiana (4.60) é invariante sob a chamada *transformação de gauge local*

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \tag{4.62}$$

sendo $\Lambda(x)$ uma função arbitrária e diferenciável do espaço-tempo. É visível também que tal transformação se trata de uma simetria local, visto que depende de parâmetros que variam ponto a ponto, e foi dito anteriormente que "quando são levados em conta transformações locais, não se observa mais uma quantidade conservada para cada gerador, mas sim uma condição de vínculo", o que nos sugere que devemos obter uma condição de vínculo devido à simetria de gauge imposta ao sistema.

No entanto, não é evidente dizer que a lagrangiana (4.60) é invariante pela transformação de simetria (4.62), mas verifica-se diretamente que o tensor $F_{\mu\nu}$ é invariante por (4.62)

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu(A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)) - \partial_\nu(A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu\partial_\nu\Lambda(x) - \partial_\nu\partial_\mu\Lambda(x) \\ F'_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

e portanto, conclui-se que $\delta F_{\mu\nu} = 0$. Porém, para afirmar a invariância da lagrangiana, deve-se calcular também $\delta(A_\mu J^\mu)$, termo que merece certo cuidado ao ser analisado. Para calcular a invariância do segundo termo da lagrangiana (4.60), deve-se lembrar o que foi citado anteriormente na equação (4.53) e também como calcular a derivada funcional na equação (3.33). Assim, podemos calcular a corrente J^μ

$$J^\mu = -\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right)\right], \tag{4.64}$$

tal que seu primeiro termo é dado por

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= \frac{\partial}{\partial A_\mu}\left(-\frac{1}{4}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + A_\alpha J^\alpha\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha \delta_{\mu\beta} - \partial_\beta \delta_{\mu\alpha}) + \delta_{\mu\alpha} J^\alpha \\ &= \partial_\alpha(\partial^\alpha A^\mu - \partial^\mu A^\alpha) + J^\mu \\ &= \partial_\alpha F^{\alpha\mu} + J^\mu,\end{aligned} \tag{4.65}$$

e, para o segundo termo de (4.64),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{2}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta} - \delta_{\nu\beta}\delta_{\mu\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu) \\ &= F^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{4.66}$$

portanto, substituindo as relações encontradas em (4.65) e (4.66) em (4.64), obtemos que

$$J^\mu = -\left[\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + J^\mu - \partial_\nu F^{\mu\nu}\right] = -\left[-2\partial_\nu F^{\mu\nu} + J^\mu\right], \tag{4.67}$$

logo, evidencia-se a relação

$$J^\mu = \partial_\nu F^{\mu\nu}, \tag{4.68}$$

que é justamente a equação de movimento do campo eletromagnético. É notável que, devido à antissimetria do tensor $F^{\mu\nu}$, se aplicarmos $\partial_\mu\partial_\nu$ na equação (4.61), concluiremos que

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \tag{4.69}$$

ou seja, a corrente associada ao campo satisfaz a equação de continuidade. Portanto, com o resultado obtido em (4.69), pode-se finalmente calcular a derivada covariante da corrente como explicitada em (4.57):

$$D_\mu J_a{}^\mu(x) = \partial_\mu J_a{}^\mu(x) - f_{abc} A^b{}_\mu(x) J^{c\mu}(x). \tag{4.70}$$

No entanto, deve-se saber neste caso que a simetria utilizada para o eletromagnetismo pertence a um grupo abeliano, e assim o coeficiente de estrutura f_{abc} é nulo. Logo, conclui-se que

$$D_\mu J_a{}^\mu(x) = \partial_\mu J_a{}^\mu(x) = 0, \tag{4.71}$$

mas vale ressaltar que o coeficiente de estrutura não é nulo em todos os casos. Deste modo, temos que esta condição de vínculo surge através de uma restrição imposta pela simetria de gauge escolhida, justamente o que foi proposto de acordo com o Segundo Teorema de Noether.

5 CONCLUSÃO

Ao decorrer deste trabalho, demonstramos como simetrias são de extrema importância na Física para entender diversos conceitos.

Fazendo-se uma revisão básica dos grupos utilizados, pôde-se examinar a invariância das transformações de referenciais inerciais pelo Grupo de Poincaré e também definir propriedades importantes das matrizes de transformação de Lorentz como sua ortogonalidade e sua representação exponencial.

Utilizando o teorema de Noether para analisar as simetrias dos campos, tal teorema foi de grandissíssima importância pela razão de não depender do grupo de transformação em que se trabalha (a simetria provém da invariância de qualquer grupo, não especificamente o de Poincaré como se foi trabalhado), nem o sistema de coordenadas considerado.

Quando consideramos a expressão do grupo de transformação, foram vistas novas expressões para o teorema de Noether. Quando as transformações feitas foram globais, com os parâmetros de transformação constantes, observou-se uma expressão para a corrente de Noether diferente para cada gerador de grupo tal que se associa uma carga conservada a cada gerador de grupo. Quando as transformações feitas foram locais com os parâmetros de transformação sendo funções dependentes das coordenadas espaço-temporais, não observou-se mais uma quantidade conservada mas sim uma condição de vínculo imposta às possíveis fontes, de modo que a condição de vínculo fosse tal que, definida uma corrente $J_a{}^{\mu}(x) = -\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta A^a{}_{\mu}(x)}$, sua derivada covariante fosse nula.

REFERÊNCIAS

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. **Notes for a Course on Classical Fields**. São Paulo: Instituto de Física Teórica, 2006.

FELSAGER, B. **Geometry, Particles and Fields**. Odense: Springer, 1983.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Fisica, 2013.

RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. Canterbury: Cambridge University Press, 1996.