

TRANSFORMADAS INTEGRAIS, MODELAGEM FRACIONÁRIA E O SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

Arianne Vellasco Gomes

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU
São Paulo - Brasil
Fevereiro – 2014

**TRANSFORMADAS INTEGRAIS, MODELAGEM FRACIONÁRIA E
O SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA**

Arianne Vellasco Gomes

Orientador: Prof. Dr. **Rubens de Figueiredo Camargo**

Co-orientador: Prof. Dr. **Paulo Fernando de Arruda Mancera**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU
São Paulo - Brasil
Fevereiro – 2014

Ficha Catalográfica

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÉC. AQUIS. TRATAMENTO DA INFORM.
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CAMPUS DE BOTUCATU - UNESP
BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: ROSEMEIRE APARECIDA VICENTE - CRB 8/5651

Gomes, Arianne Vellasco.

Transformadas integrais, modelagem fracionária e o sistema de Lotka-Volterra / Arianne Vellasco Gomes. - Botucatu, 2013

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências de Botucatu

Orientador: Rubens de Figueiredo Camargo

Coorientador: Paulo Fernando de Arruda Mancera

Capes: 10104003

1. Cálculo fracionário. 2. Volterra, Equações de. 3. Biomatemática.
4. Laplace, Transformadas de.

Palavras-chave: Cálculo fracionário; Derivada Fracionária de Caputo; Modelagem matemática; Sistema de Lotka-Volterra.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família que me ensinou a nunca desistir dos meus sonhos! E ao meu amigo Rubens que me ajudou de forma inestimável!

Vocês tornaram isto possível!

Agradecimentos

Fazer mestrado é uma experiência enriquecedora, que nos prova a cada momento. Mas chegando ao fim percebo o quanto amadureci como pessoa e ‘pesquisadora’ e sei que nada disso teria sido possível sem a ajuda de algumas pessoas especiais que, direta ou indiretamente me apoiaram a todo instante, não me deixando desistir de um sonho, dentre elas destaco:

Primeiramente a Deus que proporcionou tal oportunidade, dando-me direcionamento e força.

Ao Prof. Dr. Rubens de Figueiredo Camargo pelos dois anos de paciência; pela esplêndida orientação e pelo valioso conhecimento transmitido durante estes anos. Como ele sabe, é o meu espelho! Inspirou-me por tempos... é minha referência profissional e pessoal! Sendo assim é muito bom tê-lo como meu orientador, pois aprender com o melhor não é para qualquer um! Obrigada por ter acreditado que eu era capaz mesmo quando eu desacreditava.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Paulo Fernando de Arruda Mancera, pelas brilhantes discussões e pelas ideias fornecidas no desenvolvimento do projeto. Agradeço pela orientação, paciência perante minhas dificuldades, sinceridade, alegria e pelos ‘puxões de orelha’ que só me fizeram crescer profissionalmente.

Ao Prof. Dr. Alexys Bruno Alfonso por ter contribuído de forma indispensável com suas valiosas discussões no decorrer do mestrado.

Aos professores doutores Francesco Mainardi (Universidade de Bologna, Itália), José Antonio Tenreiro Machado (Instituto de Engenharia do Porto, Portugal) e Edmundo Capelas de Oliveira pelas importantes discussões e sugestões.

A Profa. Dra Emília de Mendonça Rosa Marques por ter me encora-

jado a fazer mestrado, dando apoio; por ser mais que uma orientadora de iniciação, ser exemplo de pessoa, conselheira e amiga.

A todos colegas do departamento de Matemática da UNESP de Bauru e do departamento de Bioestatística da UNESP de Botucatu, pelos anos de companheirismo.

Aos meus pais, Adriana Vellasco e Marcio R. Gomes, por terem acreditado no meu potencial, desde criança, me dando educação; por terem sido exemplos de vida; pela paciência e incentivo durante toda a minha jornada estudantil e profissional. A vocês sou eternamente grata.

A minha irmã Andreza Vellasco por dias de companheirismo.

A minha vó Cleide L. Lucato por ter se preocupado comigo, dando apoio durante toda a minha vida.

A todos que por um descuido não mencionei.

A CAPES por ter financiado parte dos estudos.

Divido com vocês a alegria e experiência.

Não venci sozinha! Obrigada a todos!

Sumário

	Página
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xi
RESUMO	xii
SUMMARY	xiii
1 CONTEXTO HISTÓRICO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO	6
1.1 Contribuições	6
1.2 Contribuições de Riemann e Liouville	10
2 CONCEITOS PRELIMINARES	12
2.1 Funções especiais	12
2.1.1 Função gama	12
2.1.2 Gráfico da função gama	17
2.1.3 Função beta	18
2.1.4 Função de Mittag-Leffler clássica	20
2.1.5 Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros	20
2.1.6 Comportamento gráfico da Função de Mittag-Leffler	22
2.1.7 Função de Gel'fand-Shilov	26
2.2 Transformada de Laplace	26
2.2.1 Linearidade	27
2.2.2 Convolução	27

2.2.3	Transformada de Laplace Inversa	27
2.2.4	Transformadas de Laplace	29
2.2.5	Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler	30
2.2.6	Transformada de Laplace da função de Gel'fand-Shilov	30
3	INTEGRAL FRACIONÁRIA	31
3.1	Definição da integral fracionária	31
3.1.1	Transformada de Laplace na integral fracionária	33
3.1.2	Exemplos de Integral fracionária	34
3.2	A lei dos expoentes para integrais fracionárias	35
4	DERIVADA FRACIONÁRIA	36
4.1	Derivada fracionária de Riemann-Liouville	36
4.1.1	Exemplos da derivada fracionária de Riemann-Liouville	37
4.2	Derivada fracionária de Caputo	39
4.2.1	Exemplos da derivada fracionária de Caputo	39
4.2.2	Gráficos da derivada de potência	41
4.3	Transformada de Laplace da derivada	43
4.3.1	Transformada de Laplace da derivada de ordem n	43
4.3.2	Transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville	43
4.3.3	Transformada de Laplace da derivada de Caputo	44
4.3.4	Lei dos expoentes	44
4.4	Caputo versus Riemann-Liouville	45
5	MODELAGEM	49
5.1	Crescimento bacteriano	50
5.2	Equação logística	52
6	SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA	56
6.1	Sistema de Lotka-Volterra clássico	57
6.2	Sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado	60

7 APLICAÇÕES	63
7.1 Análise geral do sistema de Lotka-Volterra	63
7.2 Modelagem: Broca versus Vespa	67
7.2.1 Análise no modelo de Lotka-Volterra	67
8 ANÁLISE DO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA PRÓXIMO AO PONTO DE EQUILÍBRIO	72
9 CONCLUSÕES	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

Lista de Figuras

	Página
1 Gráfico da função gama, $D(f) = \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$	17
2 Gráfico da função $\frac{1}{\Gamma(z)}$	18
3 Gráfico da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, com valores de $\alpha > 0$	23
4 Gráfico da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, com $0 < \alpha < 1$	23
5 Gráfico de $E_\alpha(x^\alpha)$, com $0 < \alpha \leq 1$. Neste pode-se perceber que quando $\alpha \rightarrow 1$ recuperamos a função exponencial.	24
6 Gráfico de $E_\alpha(x^\alpha)$, com $1 < \alpha \leq 2$	24
7 Gráfico de $E_\alpha(-x^\alpha)$, com $0 < \alpha \leq 1$	25
8 Gráfico de $E_\alpha(-x^\alpha)$, com $1 < \alpha \leq 2$	25
9 Contorno de Bromwich.	28
10 Contorno de Bromwich modificado.	29
11 Gráfico da $D^{\frac{1}{2}}f(t)$, para $f(t)$ na forma de potências de t.	42
12 Gráfico da $D^{\frac{3}{4}}f(t)$, para $f(t)$ na forma de potências de t.	42
13 Solução da equação (64), em P(t), com $0.93 \leq \alpha \leq 1$	56
14 Solução da equação (64), em P(t), com $0.6 \leq \alpha \leq 1$	56
15 Gráfico do sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado, para diferentes valores dos parâmetros.	65
16 Gráfico do sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado para valores do parâmetro β e $\alpha = 1$ fixo.	66
17 Gráfico do sistema não-linearizado de Lotka-Volterra	68
18 Gráfico do sistema de Lotka-Volterra fracionário, onde faz-se variar os dois parâmetros.	70

19	Gráfico do sistema de Lotka-Volterra fracionário, onde varia-se apenas o parâmetro β	71
20	Gráfico do sistema de Lotka-Volterra construído com $\alpha = \beta = 1$ e valores aproximados do ponto crítico.	73
21	Gráficos do sistema de Lotka-Volterra construídos com valor próximo do ponto crítico e com variação de α e β	73
22	Gráficos do sistema de Lotka-Volterra construídos com valor próximo do ponto crítico e com variação de β e $\alpha = 1$	74
23	Gráfico do sistema de Lotka-Volterra construído com $\alpha = \beta = 1$ e valores um pouco mais longe, mas ainda próximo, do ponto crítico.	75
24	Gráficos do Sistema de Lotka-Volterra construídos com valor um pouco mais longe, mas ainda próximo, do ponto crítico e com variação de α e β	75
25	Gráficos do Sistema de Lotka-Volterra construídos com valor um pouco mais longe, mas ainda próximo, do ponto crítico e com variação de β e $\alpha = 1$	76

Lista de Tabelas

Página

- | | | |
|---|---|----|
| 1 | Tabela para valores reais da função gama obtida por integração numérica | 15 |
|---|---|----|

TRANSFORMADAS INTEGRAIS, MODELAGEM FRACIONÁRIA E O SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

Autora: ARIANNE VELLASCO GOMES

Orientador: Prof. Dr. RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Co-orientador: Prof. Dr. PAULO FERNANDO DE ARRUDA MANCERA

RESUMO

Este trabalho trata do Cálculo Fracionário e suas aplicações em problemas biológicos. Nas aplicações nos concentramos no sistema de Lotka-Volterra clássico e fracionário, para depois analisar o controle biológico da praga da cana-de-açúcar. Como trabalho futuro, propomos analisar as aplicações do sistema de Lotka-Volterra fracionário em problemas reais do câncer, com saturação de crescimento tumoral enfocando tratamento quimioterápico.

INTEGRAL TRANSFORMS, FRACTIONAL MODELING AND LOTKA-VOLTERRA SYSTEM

Author: ARIANNE VELLASCO GOMES

Adviser: Prof. Dr. RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Co-adviser: Prof. Dr. PAULO FERNANDO DE ARRUDA MANCERA

SUMMARY

This work is about Fractional Calculus and its applications in biological problems. In the applications we focus on the classical Lotka-Volterra system and into the corresponding fractional order version to examine the biological control of sugar cane's pest. As future work, we analyze the fractional system in real problems of cancer, with saturation of tumor growth with a focus on chemotherapy.

Introdução

Estudar modelagem matemática aplicada à Biologia é, segundo (Yeagers et al., 1996), entender e explorar a relação natural existente entre a Biologia e a Matemática, para ele, tais disciplinas estão inter-relacionadas, de forma que a biologia traz problemas reais em palavras e a Matemática cria caminhos de interpretação através de métodos e modelos matemáticos, o que possibilita manipulações algébricas e soluções na linguagem do mundo real.

A interação entre as ciências tem-se mostrado muito promissora. Em um artigo publicado na revista Plos Biology, o biólogo matemático Joel E. Cohen afirma que ‘a matemática é o novo microscópio da Biologia, só que melhor; e que a Biologia será a nova física da matemática, só que melhor’, ou seja, além dos modelos matemáticos darem novo poder de resolução para as análises biológicas, as perguntas das ciências da vida acabam modelando uma nova base para a matemática, (Cohen, 2004).

Dessa forma, nosso objetivo é estudar métodos de resolver equações diferenciais que busquem entender o processo físico que se acredita ser inerente à equação estudada. Iniciando com modelos simples, pois acreditamos que construir e compreender modelos simples são o primeiro e fundamental passo para se estudar e compreender modelos mais complexos e próximos da realidade. Contudo, a arte de obter uma equação diferencial cuja solução descreva bem a realidade traz consigo uma enorme dificuldade, nas palavras de Albert Einstein ‘Toda nossa ciência, medida contra a realidade, é primitiva e infantil e ainda assim é a coisa mais preciosa que temos’. Exemplificando, a dengue é um problema de difícil modelagem pois, não tem relação somente com o ciclo de vida do mosquito transmissor, também estão

envolvidas variáveis como políticas governamentais de saneamento e a intensidade das chuvas. Este tipo de dificuldade é verificada em praticamente todas as áreas do conhecimento como, por exemplo, na economia, mercado de ações, previsão do tempo, dentre outros. De maneira geral, quanto mais próximos estamos de descrever perfeitamente um fenômeno, mais complexas são as equações relativas a ele.

Neste contexto, pode-se introduzir o cálculo de ordem não-inteira, tradicionalmente conhecido como fracionário, que visa refinar a descrição de fenômenos naturais. A maneira canônica de utilizar essa poderosa ferramenta é substituir a derivada de ordem inteira da equação diferencial ordinária ou parcial, que descreve um determinado fenômeno, por uma de ordem não-inteira. A teoria do Cálculo fracionário surgiu em 1695, através de uma indagação de L'Hôpital para seu amigo Leibniz, sobre a interpretação de $D^n = d^n f(x)/dx^n$ se n fosse um número fracionário; de onde obteve uma resposta profética de que este seria um paradoxo com importantes aplicações. A partir deste fato, vários matemáticos como Euler, Laplace, Abel, Liouville, Riemann, e outros, se interessaram e deram contribuições na construção do formalismo do cálculo de ordem arbitrária.

Até o século passado, o cálculo fracionário teve enfoque apenas na matemática pura, mas a partir de 1970, aproximadamente, com a utilização das derivadas fracionárias em equações diferenciais para refinar a descrição de fenômenos naturais, houve grande avanço em suas aplicações. Podemos citar algumas aplicações, das inúmeras presentes na literatura, tais como, probabilidade, biomatemática, psicologia, funções especiais, mecânica dos fluidos, fenômenos de transporte e redes elétricas (de Figueiredo Camargo et al., 2007, 2008; Camargo, 2009; Podlubny, 1999).

Além disso, hoje em dia a derivada fracionária já possui, em casos particulares, interpretações físicas como, por exemplo, Oldhan e Spanier descobriram que para $n = 1/2$ existe o significado de difusão num meio semi-infinito, já outro matemático, Alan Méhauté, afirma que algumas propriedades físicas ligadas a irreversibilidade e ao fluxo de energia estão diretamente associadas ao cálculo de ordem não inteira (de Souza de Jesus, 2007).

Dessa forma, neste trabalho¹, além de estudarmos as origens históricas do cálculo fracionário, as funções especiais, a metodologia das transformadas integrais de Laplace, e suas definições, temos como principal objetivo estudar o sistema de Lotka-Volterra, que além de descrever as interações entre uma população de presas e uma população de predadores, pode descrever uma série de aplicações em biologia, como por exemplo, os modelos parasita-hospedeiro, crescimento de plantas e as interações planta-herbívoros, genética de populações e teoria dos jogos evolucionários, evoluções dinâmicas de mutualismo, controle biológico de pragas, de maneira geral equações ecológicas tanto para o sistema de árvore quanto para sistemas de ciclo (Camargo, 2009).

Entretanto, este modelo possui algumas restrições, do ponto de vista da modelagem. Pensando especificamente no sistema presa-predador, o sistema apresenta as seguintes simplificações: 1) a população de presas cresce exponencialmente na ausência do predador; 2) a população de predadores morre de fome na ausência da presa (não caçando outra espécie); 3) predadores podem comer uma quantidade ilimitada de presas e 4) não há complexidade ambiental (as duas populações vivem próximas). A fim de amenizar os efeitos destas simplificações, propomos e resolvemos a versão fracionária do sistema de Lotka-Volterra modificado, isto é, substituímos as derivadas de ordem um presentes no sistema por derivadas fracionárias, no sentido de Caputo, de ordem α e β com $\alpha, \beta \leq 1$, e com isso obtemos uma descrição mais precisa dos eventos por ele modelados.

Feito isso, analisaremos algumas aplicações do sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado em problemas reais, tais como crescimento bacteriano, um modelo entre a broca e a vespa na cana-de-açúcar, dentre outros, onde analisamos qual a ordem das derivadas que tornam a descrição do problema mais precisa. Como trabalho futuro pretende-se estudar o tratamento quimioterápico com desenvolvimento das populações é logístico.

¹Ressalta-se que os exemplos apresentados são originais.

Estrutura da dissertação

Organizamos este documento da seguinte forma:

- No capítulo um, ‘Contexto Histórico Do Cálculo Fracionário’, fizemos um levantamento histórico sobre o cálculo fracionário, apresentamos sua origem, as contribuições de alguns matemáticos e as definições mais aceitas.
- No capítulo dois, ‘Conceitos Preliminares’, iniciamos apresentando as funções especiais tais como, a função gama, entendendo como esta função generaliza o conceito de fatorial para números não inteiros; a função beta, entendendo a ligação desta com a função gama; a função de Mittag-Leffler, que pode ser vista como a generalização fracionária da função exponencial e, por fim, estudamos a função Gel’fand-Shilov, de grande importância para definição da integral fracionária; em seguida, visando as aplicações, estudamos a transformada integral de Laplace, suas definições e teorema de convolução.
- No capítulo três, ‘Integral Fracionária’, realizamos um estudo sobre a integral fracionária de Riemann-Liouville, apresentando suas principais propriedades.
- No capítulo quatro, ‘Derivada Fracionária’, efetuamos um estudo sobre as derivadas fracionárias, iniciando com a definição de Riemann-Liouville, depois passando para a definição de Caputo, apresentando suas principais propriedades, leis e transformadas.
- No capítulo cinco, ‘Modelagem’, damos início à modelagem matemática, crescimento bacteriano e equação logística.
- No capítulo seis, ‘Sistema de Lotka-Volterra’, apresentamos um estudo sistemático sobre o sistema clássico de Lotka-Volterra, para depois fazermos sua generalização fracionária, que será útil em resolução de problemas advindos de várias áreas da ciência.

- No capítulo sete, ‘Aplicações’, apresentamos uma análise geral do cálculo fracionário aplicado no sistema de Lotka-Volterra, e mostramos uma aplicação no controle biológico de pragas.
- Por fim, no capítulo oito, ‘Conclusões’, encontram-se as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

1 CONTEXTO HISTÓRICO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Nesta seção mostramos as contribuições de alguns matemáticos na construção da história do cálculo fracionário. Convém mencionar que neste momento vamos apenas apresentar as definições (Camargo, 2009).

1.1 Contribuições

Dando continuidade ao cálculo de ordem inteira, ramo da análise matemática, estudaremos o chamado ‘cálculo fracionário’ que surgiu de um questionamento de L’Hôpital [1661 - Guillaume François Antonie L’Hôpital - 1704], em 30 de setembro de 1695, sobre a existência de derivadas de ordem não inteira. Este enviou uma correspondência ao Leibniz [1646 - Gottfried Wilhelm Leibniz - 1716], criador da notação do cálculo diferencial, onde questionava o significado da expressão $D^n y \equiv d^n y / dx^n$ quando $n = 1/2$. De forma profética Leibniz introduz o conceito de cálculo fracionário ao responder que $D^{1/2} x = x\sqrt{dx} : x$, onde afirmou ser um paradoxo que poderia originar bons resultados futuros (Camargo, 2009).

Em 1730, Euler [1707 - Leonhard Paul Euler - 1783], interessado no cálculo fracionário, escreveu que para resolver as derivadas de ordem arbitrária poderiam utilizar de interpolações na derivada (Camargo, 2009).

De forma indireta, Lagrange [1736 - Joseph Louis Lagrange - 1813] contribuiu para o desenvolvimento do cálculo fracionário, mesmo com a não validade da lei para qualquer função y , com n e m arbitrários, ao introduzir a lei dos expoentes:

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y.$$

Sabe-se que em notação moderna o ponto é substituído pela justaposição; lembrando que o ponto não representa multiplicação, e sim composição de derivadas, ou seja, aplica-se a derivada de ordem m na derivada de ordem n da função.

Após estes feitos, Laplace [1749 - Pierre Simon de Laplace - 1827], em 1812, definiu a derivada fracionária através de uma integral e Lacroix [1765 - Silvestre François Lacroix - 1843] publicou, em 1819, um livro de cálculo de 700 páginas, onde dedicou menos de duas páginas na obtenção da fórmula para derivada fracionária de um polinômio $y = x^m$, tornando-se o primeiro a mencionar derivadas fracionárias em texto científico, expressa por:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = D^n x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n},$$

em que n é um número natural, m é um número inteiro e $n \leq m$. Reescrevendo a função acima de forma a obter a derivada de ordem fracionária, utilizando a função gama ² e substituindo $n = \alpha$ e $m = \beta$, com α e β números não inteiros, temos:

$$D^n x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} = D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \quad (1)$$

Com a finalidade de particularizar a equação acima, utilizou-se valores de grande recorrência em cálculos futuros, substituimos $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$:

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-1/2+1)} x^{1-1/2} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2}.$$

Substituindo $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,886270$, temos:

$$D^{\frac{1}{2}} x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \quad (2)$$

O estudo das derivadas de ordem fracionária não escapou da atenção de Fourier [1768 - Jean Baptista Joseph Fourier - 1830], que em 1822 generalizou a derivada arbitrária, com u positivo ou negativo, da forma:

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos \left[p(x - \alpha) + \frac{u\pi}{2} \right] dp. \quad (3)$$

²A definição da função gama pode ser vista no capítulo 2.

Apesar de existirem vários matemáticos contribuindo para a construção de uma teoria sólida do cálculo fracionário, tem-se que todos se dedicaram exclusivamente ao estudo do cálculo fracionário e não em suas aplicações. Desta forma, Abel [1802 - Niels Henrik Abel - 1829], em 1823, apresentou a primeira aplicação do cálculo fracionário. Ele fez um estudo sobre o problema da tautócrona ou isócrona, em que *buscava determinar a curva tal que o tempo de descida de um corpo abandonado sobre ela e sujeito à ação da gravidade seja o mesmo independentemente do ponto onde este seja abandonado*, (Camargo, 2009). A modelagem feita foi:

$$\tau = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt, \quad (4)$$

em que τ é o tempo de descida.

Liouville [1809 - Joseph Liouville - 1882], após compreender os estudos de Fourier e Abel, procurou dar uma definição generalizada para as derivadas fracionárias, de forma que ν pode ser real ou complexo, natural ou fracionário e u arbitrário. A equação seguinte ficou conhecida como primeira fórmula de Liouville para a derivada fracionária:

$$D^u e^{ax} = a^u e^{ax}, \text{ se } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \text{ faz-se:}$$

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}. \quad (5)$$

Entretanto, esta definição se restringe a algumas funções. Liouville encontrou uma segunda definição, que apesar de ser mais ampla a classe de funções que abrange, ainda exclui algumas funções do tipo x^{-a} com $a > 0$. A segunda fórmula apresentada por Liouville tem integral para $x > 0$ e $a > 0$:

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu} du = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-(a+\nu)}. \quad (6)$$

Como a derivada de uma constante calculada pelo método de Lacroix pode não ser nula, necessitou de um estudo mais detalhado para que o formalismo do cálculo fracionário não fosse inconsistente. Com isso, surgiram questionamentos:

‘qual é a interpretação geométrica da derivada fracionária?’, sabendo que a definição clássica da derivada mede a taxa de variação da função e que no caso da derivada de uma constante esta pode não se aplicar. William Center investigou o valor da derivada de uma constante, resolvendo através do método de Lacroix e do método de Liouville. Center utilizou x^0 com o intuito de representar as funções constantes.

Segundo Lacroix substituindo $\alpha = 1/2$ e $\beta = 0$, temos:

$$\begin{aligned} D^\alpha x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha} = D^{1/2} x^0 = \frac{\Gamma(0 + 1)}{\Gamma(0 - 1/2 + 1)} x^{0 - 1/2} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)} x^{-1/2} \\ &= \frac{x^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \neq 0. \end{aligned}$$

Utilizando a definição de Liouville substituiu $\alpha = 1/2$ e $\beta = 0$ e depois aplicou o limite de $a \rightarrow 0^+$, concluindo que $\lim_{a \rightarrow 0^+} \Gamma(a) = \infty$:

$$\begin{aligned} D^{1/2} x^0 &= \frac{(-1)^{1/2} \Gamma(a + 1/2)}{\Gamma(a)} x^{-(a+1/2)} = \lim_{a \rightarrow 0^+} D^{1/2} x^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{(-1)^{1/2} \Gamma(a + 1/2)}{\Gamma(a)} x^{-(a+1/2)} = 0 \end{aligned}$$

Assim, Center verificou que os resultados através dos dois métodos são diferentes, não concluindo qual era a solução correta, onde afirmou que quando resolverem a questão do $\frac{d^\alpha x^0}{dx^\alpha}$ terão a resolução do dilema (Camargo, 2009).

Numa abordagem histórica podemos perceber que apesar das pesquisas apresentadas acima, houve pouca publicação entre 1900 e 1970. A repercussão do cálculo fracionário teve início nas conferências. A primeira internacional, por iniciativa da University of New Haven em 1974, Estados Unidos da América, patrocinado pela Fundação Nacional de Ciência, divulgando a teoria mundialmente, desencadeando vários trabalhos. A segunda internacional foi organizada pela University of Strathclyde, Glasgow, na Escócia em 1984, em que o questionamento da possível interpretação geométrica da derivada fracionária chamou atenção de muitos pesquisadores. A terceira conferência internacional foi realizada na Universidade de Nihon, em Tóquio, Japão em 1989, em que foi proposto este problema: *O que é a dimensão fracionária do metrô de Tóquio* Com isto o interesse pelo cálculo fracionário

foi evoluindo e inúmeras conferências que abordam como tema principal o cálculo de ordem não inteira foram realizadas em diversos países (Camargo & Capelas-Oliveira, 2014).

Inclusive no ano de 2013 ocorreu, na UNESP de Bauru, o primeiro simpósio brasileiro do Cálculo fracionário organizado por Rubens de Figueiredo Camargo em homenagem ao Professor Edmundo Capelas de Oliveira.

1.2 Contribuições de Riemann e Liouville

Em 1892, após a morte de Riemann [1826 - Georg Friedrich Bernard Riemann - 1866], foram encontrados manuscritos que foram publicados em *Gesammelte Werke*, que apresentava seu interesse pelo cálculo fracionário desde a graduação, onde sugeriu uma generalização para a série de Taylor e para as derivadas de ordem arbitrária (Oliveira, 2010; Podlubny, 1999; Camargo, 2009).

$$J^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{(\nu-1)} f(t) dt + \Psi(x).$$

Ele escolheu o símbolo J^ν para representar as integrais fracionárias e o símbolo D^ν para as derivadas fracionárias. Ao introduzir a função Ψ para controlar a ambiguidade no limite inferior da integral, Riemann tornou a definição muito complexa. Laurent, em 1878, baseando-se na integral de Cauchy encontrou uma definição para a integral fracionária, que coincide com a proposta de Abel, no caso em que $\nu = \frac{1}{2}$ e com a versão de Riemann sem a função complementar:

$${}_c J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{(\nu-1)} f(t) dt \quad \text{Re}(\nu) > 0.$$

com c e x sendo os limites de integração e ν a ordem da integração.

Já na definição de Liouville o limite inferior é $c = -\infty$,

$${}_{-\infty} J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{(\nu-1)} f(t) dt, \quad \text{Re}(\nu) > 0.$$

Das equações acima, a versão mais utilizada atualmente é aquela em que o limite inferior, c , é zero. Neste trabalho, será chamada de integral fracionária

de Riemann-Liouville:

$${}_0J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{(\nu-1)} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0. \quad (7)$$

2 CONCEITOS PRELIMINARES

O desenvolvimento do cálculo fracionário depende de um profundo conhecimento das funções inerentes a ele. Dentre as principais relacionadas, estudaremos a função gama, entendendo como esta função generaliza o conceito de fatorial para números não inteiros; a função de Gel'fand-Shilov, de grande importância para entender, em detalhes, definição da integral fracionária e, vamos utilizar estes conhecimentos para introduzir a função de Mittag-Leffler. Esta função pode ser vista como a generalização fracionária da função exponencial e tem, no estudo das equações diferenciais fracionárias, a mesma importância que a função exponencial tem para o estudo das equações diferenciais clássicas. Por fim, faremos uma breve apresentação da transformada de Laplace, pois é de extrema importância para o desenvolvimento do cálculo fracionário e de algumas das definições das funções especiais (Debnath, 2003), (de Figueiredo Camargo, 2005), (de Figueiredo Camargo et al., 2007), (de Figueiredo Camargo et al., 2008), (de Figueiredo Camargo et al., 2009b), (de Figueiredo Camargo et al., 2009c), (de Figueiredo Camargo et al., 2009a), (Camargo, 2009), (Podlubny, 1999), (Soubhia et al., 2010), Capelas-Oliveira & Mariorino (2003).

2.1 Funções especiais

2.1.1 Função gama

A função especial gama, também conhecida como função de Euler de segunda espécie, foi desenvolvida ao estudarem uma forma de generalizar a função fatorial (Capelas-Oliveira, 2006).

A função gama pode ser apresentada através de várias formas: por

limite como fez Gauss; produto infinito como Weierstrass ou por integral imprópria como Euler (Capelas-Oliveira, 2006).

Neste trabalho optamos por utilizar a definição por integral imprópria para o número complexo $z = x + iy$, com $Re(z) > 0$, da seguinte forma (Capelas-Oliveira, 2006):

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (8)$$

Substituindo z por $z + 1$ encontramos sua principal propriedade:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (9)$$

Justificativa da equação (9):

De fato

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt.$$

Fazendo a integração por partes: $dv = e^{-t} dt \rightarrow v = -e^{-t} + c$ e $u = t^z \rightarrow du = z t^{z-1} dt$, obtemos:

$$\Gamma(z + 1) = -e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

O primeiro termo da última equação é zero e a integral é $\Gamma(z)$, onde chegamos na seguinte expressão:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

E, para mostrarmos que esta propriedade é uma generalização do fatorial, substituiremos $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$. Disso segue que:

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) = n(n - 1)\Gamma(n - 1) \\ &= n(n - 1)(n - 2)\Gamma(n - 2) = \dots = \\ &= n(n - 1)(n - 2)\dots(n - (n - 1))\Gamma(n - (n - 1)) \\ &= n(n - 1)(n - 2)\dots(1)\Gamma(1) = n!\Gamma(1) \\ &= n! \end{aligned}$$

Dessa forma, fica evidente que a função gama é uma generalização do fatorial, para números não inteiros.

Note que a função gama é uma função definida para z complexo com $Re(z) > 0$. Logo, existe para números fracionários no argumento, por exemplo:

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{1/2-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt, \text{ substituindo } t = x^2 \text{ e } dt = 2x dx \\ &= \int_0^\infty x^{-1} e^{-x^2} 2x dx = 2 \int_0^\infty x^{-1} e^{-x^2} x dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Seja $I = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$, temos que:

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-y^2} dy \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2} e^{-x^2} dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+x^2)} dx dy.$$

Introduzindo as coordenadas polares, $y = r \sin(\theta) \rightarrow y^2 = r^2 \sin^2(\theta)$ e $x = r \cos(\theta) \rightarrow x^2 = r^2 \cos^2(\theta)$, temos que $x^2 + y^2 = r^2$ e o Jacobiano é:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \quad (10)$$

Assim, segue-se:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+x^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-(r^2)} dr d\theta.$$

Substituindo $u = r^2$ com $du = 2r dr$, temos:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-(u)} du d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} e^{-(u)}\right) \Big|_0^\infty d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Contudo,

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

portanto,

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Tabela 1. Tabela para valores reais da função gama obtida por integração numérica

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
0.1	9.513508	1.3	0.8974707	2.5	1.329340	3.7	4.170651
0.2	4.590844	1.4	0.8872640	2.6	1.429624	3.8	4.694175
0.3	2.991569	1.5	0.886270	2.7	1.544685	3.9	5.299331
0.4	2.218160	1.6	0.8935152	2.8	1.676491	4.0	6.000000
0.5	1.772454	1.7	0.9086385	2.9	1.827356	4.1	6.812623
0.6	1.489192	1.8	0.9313840	3.0	2.000000	4.2	7.756690
0.7	1.298055	1.9	0.9617661	3.1	2.197620	4.3	8.855343
0.8	1.164230	2.0	1.000000	3.2	2.423966	4.4	10.13610
0.9	1.068629	2.1	1.046486	3.3	2.683437	4.5	11.63173
1.0	1.000000	2.2	1.101803	3.4	2.981207	4.6	13.38128
1.1	0.9513508	2.3	1.166712	3.5	3.323351	4.7	15.43141
1.2	0.9181688	2.4	1.242170	3.6	3.717023	4.8	17.83787

Deste segue que $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma(5/2) = \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ e assim por diante. Na tabela 1 encontramos, para valores reais, o respectivo valor da função gama.

Sabemos que a função gama é definida no plano complexo com a parte real positiva, agora ampliaremos seu domínio para todo o plano complexo, com uma continuação analítica, exceto nos pontos singulares que mostraremos a seguir.

Relembrando, podemos reescrever a exponencial através do desenvolvimento de Mclaurin: $e^{-t} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$, com isto a equação (8) se equivale a:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

Primeiro faremos a substituição $u = \frac{t}{n}$, em seguida, considerando que f e g são diferenciáveis, faremos uso da integração por partes, n vezes:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{(n-1)} u^z du = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-u)^{(n-2)} u^{(z+1)} du = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n(n-1)(n+2)}{z(z+1)(z+2)} \int_0^1 (1-u)^{(n-3)} u^{(z+2)} du = \\ &\vdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n(n-1)(n+2)\dots 1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)} \int_0^1 (1-u)^{(n-n)} u^{(z+n-1)} du. \end{aligned}$$

E, como $\int_0^1 (1-u)^{(n-n)} u^{(z+n-1)} du = \frac{1}{z+n}$, concluimos que:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n!}{z(z-1)(z+2)\dots(z+n)} \quad (11)$$

Assim, a equação (11) é uma continuação analítica da definição (8), exceto nos pontos $z = 0, -1, -2, -3, \dots, -n$ que, claramente, possui polos simples³.

³Definição: suponha Ω um subconjunto aberto do plano complexo C , a é um elemento de Ω e

2.1.2 Gráfico da função gama

Apresenta-se nesta seção o gráfico da função gama, ver figura (1).

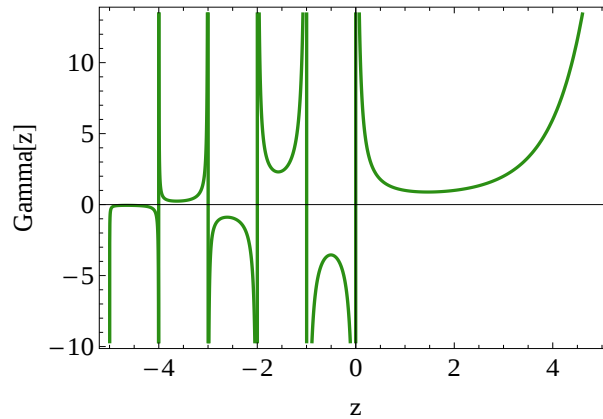


Figura 1 - Gráfico da função gama, $D(f) = \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$

A função Gama está definida para todo z complexo tal que $z \neq 0, -1, -2, \dots$. Analogamente a função $\frac{1}{\Gamma(z)}$ se anula nos pontos $0, -1, -2, \dots$, conforme mostra a figura a seguir (2).

$f : \Omega - a \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa. Se existir uma função holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e um inteiro não negativo n tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$ para todo z em $\Omega - a$, então a é denominado um polo de f . O menor número n satisfazendo a condição acima é chamada ordem do polo. Um polo de ordem 1 é chamado polo simples, (Rodrigues-Jr & de Oliveira, 2006).

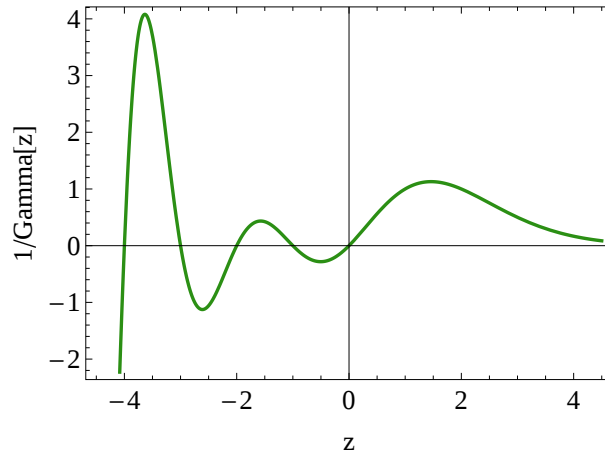


Figura 2 - Gráfico da função $\frac{1}{\Gamma(z)}$

2.1.3 Função beta

Euler definiu a função beta, $B(p, q)$, também conhecida como função de Euler de primeira espécie, com $Re(p) > 0$ e $Re(q) > 0$, a partir da integral definida (Capelas-Oliveira, 2006), (Camargo, 2009):

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{(a-1)}(1-t)^{(b-1)} dt. \quad (12)$$

Em algumas resoluções utiliza-se esta definição através de outra relação, obtida através da substituição $t = \sin^2 \theta$, $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$.

$$B(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2(a-1)} (1 - \sin^2 \theta)^{(b-1)} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

utilizando $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2(a-1)+1} (\cos \theta)^{2(b-1)+1} d\theta,$$

$$\Rightarrow B(a, b) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2a-1} (\cos \theta)^{2b-1} d\theta. \quad (13)$$

Euler, brilhantemente, construiu uma relação entre a função beta e a função gama através da seguinte expressão:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (14)$$

Justificativa da equação 14:

Iniciaremos representando a função beta através da definição gama.

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \right) \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} dx \right), \quad \operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b) > 0$$

Fazendo a substituição $t = u^2$ e $x = v^2$, $dt = 2u du$, $dx = 2v dv$ temos:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Gamma(a)\Gamma(b) &= \left(\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2(a-1)} 2u du \right) \left(\int_0^\infty e^{-v^2} v^{2(b-1)} 2v dv \right) = \\ &= 4 \left(\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2(a-1)+1} e^{-v^2} v^{2(b-1)+1} du dv \right) = \\ &= 4 \left(\int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-u^2} u^{2a-1} e^{-v^2} v^{2b-1}) du dv \right). \end{aligned}$$

introduzindo as coordenadas polares, $y = r \sin(\theta) \rightarrow y^2 = r^2 \sin^2(\theta)$
e $x = r \cos(\theta) \rightarrow x^2 = r^2 \cos^2(\theta)$ temos que $x^2 + y^2 = r^2$ e que o Jacobiano é r .
Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(b) &= 4 \left(\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty (r \cos \theta)^{2a-1} (r \sin \theta)^{2b-1} e^{-r^2} r dr d\theta \right) \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r^{2a-1} (\cos \theta)^{(2a-1)} r^{2b-1} (\sin \theta)^{2b-1} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{(2a-1)} (\sin \theta)^{2b-1} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(a+b)-1} dr, \end{aligned}$$

utilizando a equação (13), temos:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 2 \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(a+b)-1} dr \right) B(a, b),$$

e trocando $t = r^2$ obtemos:

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 2 \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{(a+b)-1} dt \right) B(a, b).$$

Logo, podemos escrever

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = B(a, b)\Gamma(a + b), \quad (15)$$

e isolando $B(a, b)$ chega-se na equação (14).

2.1.4 Função de Mittag-Leffler clássica

Mittag-Leffler⁴, em 1902, propôs a seguinte generalização para a função exponencial⁵, (Moschen, 2006):

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (16)$$

Esta função é hoje conhecida como função de Mittag-Leffler que, como vamos ver, é uma das funções especiais mais importantes para o Cálculo Fracionário, desempenhando para este um papel similar ao da função exponencial para o cálculo usual (Moschen, 2006).

Claramente, se substituirmos α por 1, na equação (16), recuperamos a função exponencial, isto é,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (17)$$

2.1.5 Função de Mittag-Leffler de dois parâmetros

Agarwal, há mais de cinquenta anos, generalizou a função de Mittag-Leffler utilizando dois parâmetros, que em geral é real ou complexo. Esta ficou conhecida por função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, α e β , (Oliveira, 2010),(Capelas-Oliveira, 2006),(Camargo, 2009):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (18)$$

Ao substituir β por 1 voltamos a função de Mittag-Leffler de um parâmetro $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.

A generalização original de Agarwal é dada por $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+\frac{\beta-1}{\alpha}}}{\Gamma(\beta + \alpha n)}$, entretanto usa-se a definição (18).

⁴Atribui-se a não existência do prêmio Nobel de Matemática a uma desavença amorosa entre Nobel e Mittag-Leffler, (de Araújo Corrêa, 1999).

⁵Esta é uma função complexa, dependendo de um parâmetro também complexo. Caso a função seja real, utilizaremos $E_{\alpha}(x)$ ou $E_{\alpha}(t)$ no lugar de $E_{\alpha}(z)$.

Da equação (18), segue-se:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (19)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (20)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \quad (21)$$

e em geral (Podlubny, 1999):

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{(m-1)}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right]. \quad (22)$$

De fato a função de Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial, dessa forma podemos generalizar as funções seno e cosseno:

$$E_2(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z \quad (23)$$

$$zE_{2,2}(-z^2) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{\Gamma(2n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z \quad (24)$$

Uma importante relação entre as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros é dada por:

$$xE_{\alpha,\alpha+1}(x) = E_{\alpha}(x) - 1 \quad (25)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
xE_{\alpha, \alpha+1}(x) &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \\
&= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} \\
&= x \left[\frac{x^0}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right] \\
&= x \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right] \\
&= \frac{x}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \\
&= -1 + 1 + \frac{x}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \\
&= -1 + \frac{x^0}{\Gamma(0\alpha + 1)} + \frac{x}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \\
&= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\
&= E_{\alpha}(x) - 1.
\end{aligned}$$

2.1.6 Comportamento gráfico da Função de Mittag-Leffler

Posto que, a função de Mittag-Leffler é tão importante para o cálculo fracionário quanto à função exponencial é para o cálculo usual, é necessário compreender que a função de Mittag-Leffler generaliza a função exponencial e por isso, em alguns casos, a equação diferencial de ordem não inteira pode descrever melhor fenômenos naturais do que a de ordem inteira.

E para ilustrar, esta seção apresenta alguns gráficos da função de Mittag-Leffler clássica⁶. Estes gráficos foram feitos com o programa *Mathematica 9.0*.

⁶Como vamos ver na equação (53) a função $E_{\alpha}(t^{\alpha})$ goza da importante propriedade $\frac{d^{\alpha} E_{\alpha}(z^{\alpha})}{dt^{\alpha}} = E_{\alpha}(z^{\alpha})$

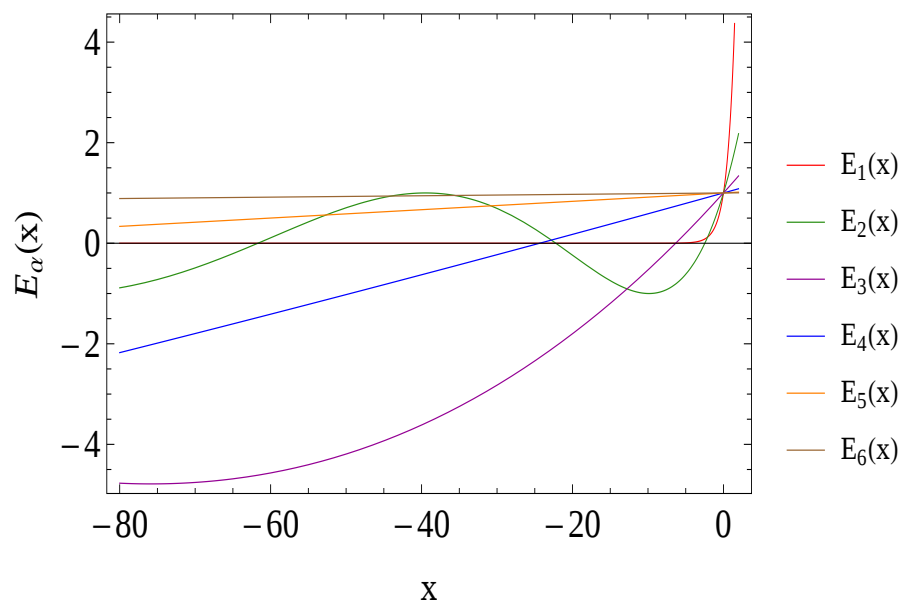


Figura 3 - Gráfico da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, com valores de $\alpha > 0$.

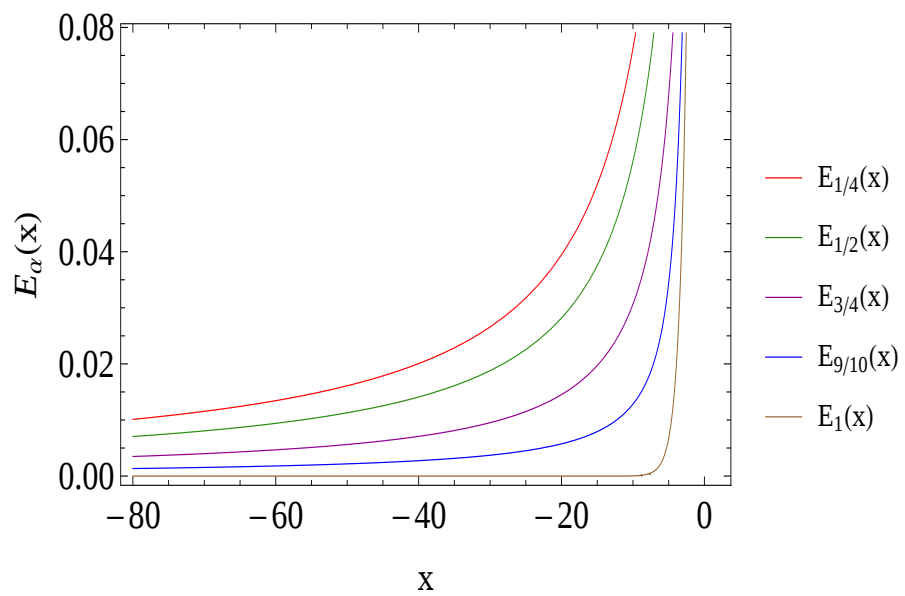


Figura 4 - Gráfico da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, com $0 < \alpha < 1$.

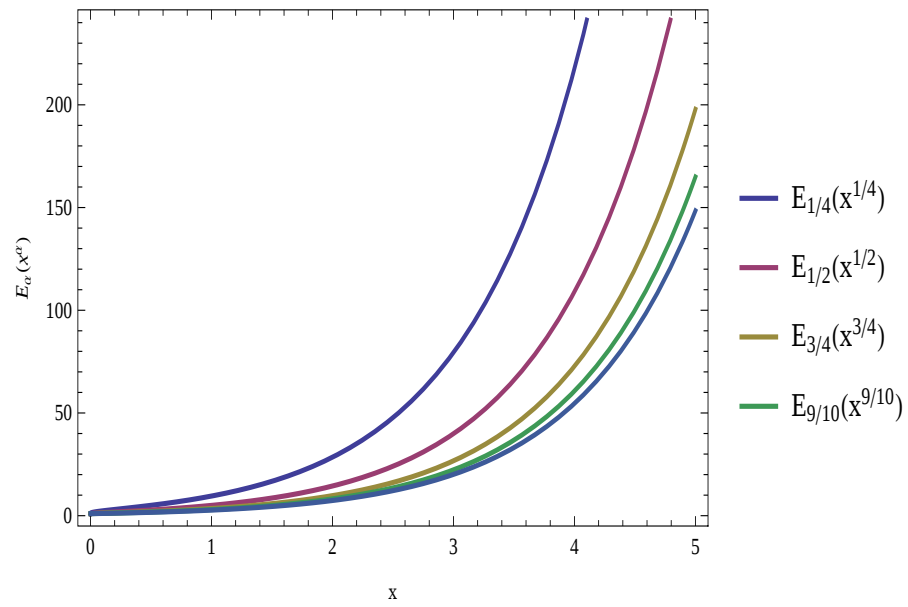


Figura 5 - Gráfico de $E_\alpha(x^\alpha)$, com $0 < \alpha \leq 1$. Neste pode-se perceber que quando $\alpha \rightarrow 1$ recuperamos a função exponencial.

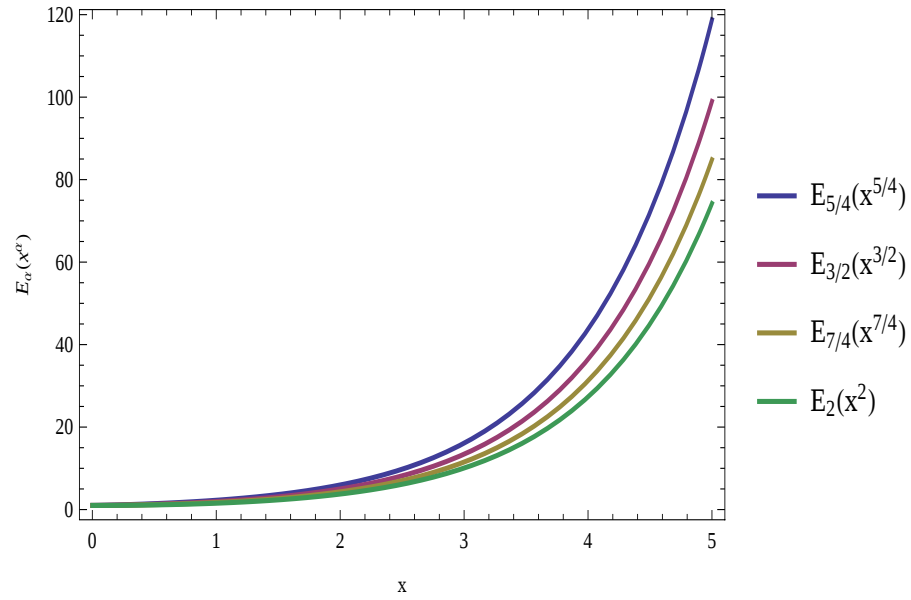


Figura 6 - Gráfico de $E_\alpha(x^\alpha)$, com $1 < \alpha \leq 2$.

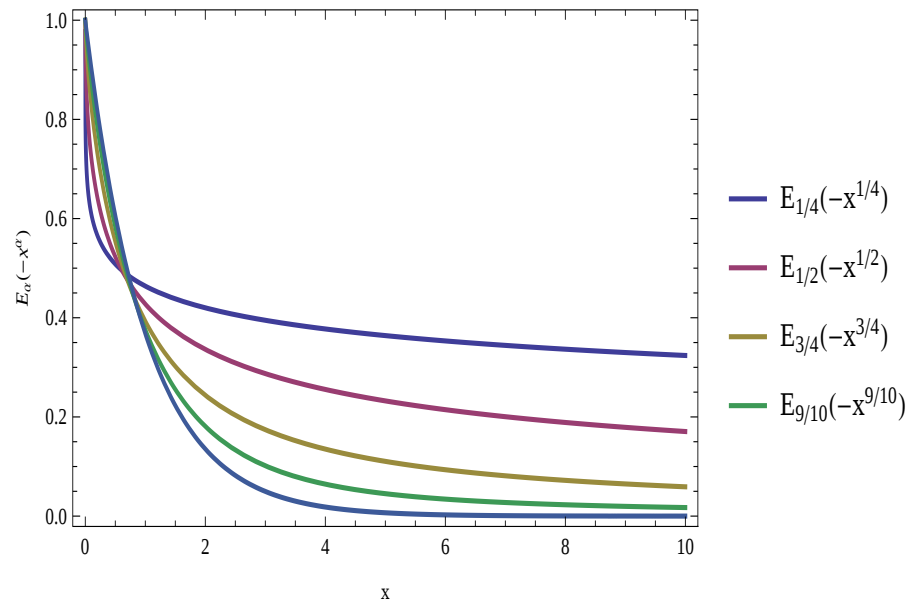


Figura 7 - Gráfico de $E_\alpha(-x^\alpha)$, com $0 < \alpha \leq 1$.

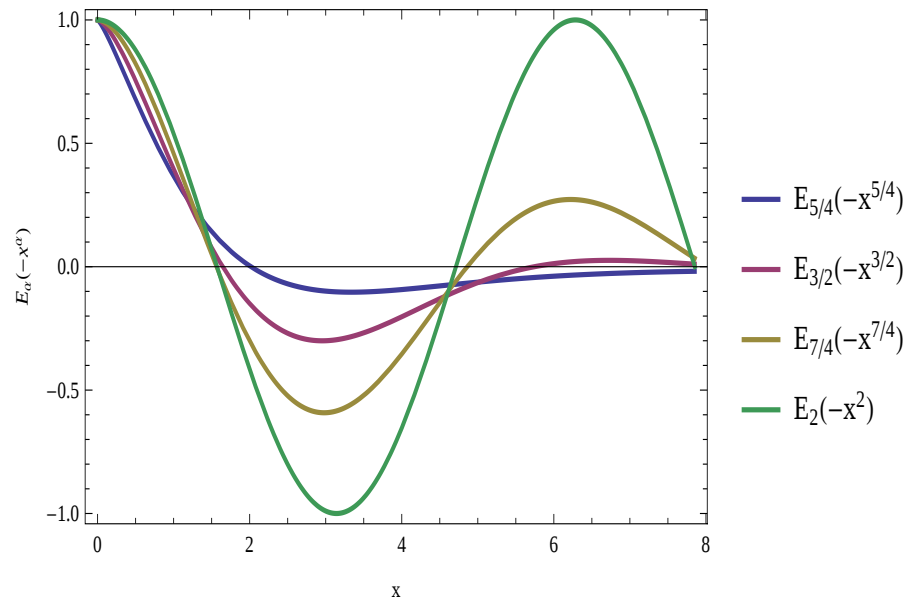


Figura 8 - Gráfico de $E_\alpha(-x^\alpha)$, com $1 < \alpha \leq 2$.

Nos gráficos são observados diferentes valores da função ao variar α . A medida que α se aproxima de 1, nos aproximamos da função exponencial. Para

valores de $\alpha \leq 4$, a função torna-se praticamente reta, ou seja, a inclinação da reta diminui. Nota-se também que a função tem comportamento semelhante quando há variação entre $0 < \alpha < 1$. No gráfico de $E_\alpha(-x^\alpha)$ quando $1 < \alpha \leq 2$ percebe-se que a função ao se aproximar de $\alpha = 2$ torna-se cada vez mais semelhante a função cosseno.

2.1.7 Função de Gel'fand-Shilov

Em 1964, os matemáticos Gel'fand [1913- Israel Moiseevich Gelfand - 2009] e Shilov [1917 - Georgi Evgenevich Shilov - 1975] escreveram um livro intitulado *Generalized Functions*, Gel'fand & Shilov (1964), em que apresentaram a definição de uma função. Atualmente, esta ficou conhecida como função de Gel'fand-Shilov, em homenagem aos autores (Mainardi, 2010).

A função de Gel'fand-Shilov é definida para $n \in \mathbb{N}$ e para $\nu \notin \mathbb{Z}$,

$$\Phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0; \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad \Phi_\nu(t) = \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \geq 0; \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

2.2 Transformada de Laplace

Seja $f(t)$ uma função definida no intervalo $0 \leq t < \infty$. Definimos a transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $F(s)$ ou por $\mathfrak{L}[f(t)]$, a partir da integral⁷:

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (26)$$

na qual s , chamado *parâmetro da transformada*, é tal que $\text{Re}(s) > 0$ (Camargo, 2009).

⁷Como a Transformada de Laplace está definida para $t < 0$ não é injetora.

2.2.1 Linearidade

A transformada de Laplace é uma operação linear, isto é, para quaisquer função $g(t)$ e $h(t)$ cujas transformadas de Laplace existem, e quaisquer constantes a e b , tem-se:

$$\mathfrak{L}[ag(t) + bh(t)] = a\mathfrak{L}[g(t)] + b\mathfrak{L}[h(t)].$$

A transformada de Laplace é linear por ser definida através de integrais que são operadores lineares (Laus, 2005).

2.2.2 Convolução

Sejam $h(t)$ e $g(t)$ duas funções cujas Transformadas de Laplace existem e são dadas por $H(s)$ e $G(s)$, respectivamente, no intervalo $[0, \infty)$. Definimos a convolução de $h(t)$ e $g(t)$, denotada por $(h * g)(t)$ como sendo:

$$h(t) * g(t) = (h * g)(t) = \int_0^t h(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (27)$$

e, esta satisfaz a propriedade comutativa:

$$h(t) * g(t) = \int_0^t h(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t g(t - \tau)h(\tau)d\tau = g(t) * h(t).$$

A transformada de Laplace da convolução de duas funções no tempo é o produto das transformada de Laplace das duas funções, ou seja, se $\mathfrak{L}[g(t)] = G(s)$ e $\mathfrak{L}[h(t)] = H(s)$ então:

$$\mathfrak{L}[g(t) * h(t)] = G(s)H(s). \quad (28)$$

se $g(t) = 0$ para $t < 0$ e $h(t) = 0$ para $t < 0$ (Laus, 2005; Camargo, 2009).

2.2.3 Transformada de Laplace Inversa

Como dito na introdução, após utilizarmos a metodologia da transformada de Laplace em um problema descrito por uma equação diferencial e condições iniciais, precisamos recuperar a sua solução original, e para isso utilizamos a transformada de Laplace inversa apresentada a seguir:

Definição⁸: Seja $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a transformada de Laplace da função $f(t)$. Então $\mathfrak{L}^{-1}[F(s)]$ é a transformada de Laplace inversa. Assim $\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ é dada por (Camargo, 2009; Laus, 2005):

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma+i\cdot\infty}^{\gamma-i\cdot\infty} F(s)e^{st}ds & \text{se } t > 0; \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (29)$$

A integração deve ser feita na reta $s = \gamma$ no plano complexo. Deve se escolher γ , de forma que as singularidades estejam à sua esquerda, ou seja, $Re(s) > \gamma$. A integração é feita mediante o contorno de Bromwich, como é mostrado na figura⁹ (9), quando o integrando não tem pontos de ramificação¹⁰ e através do contorno de Bromwich modificado, como é mostrado na figura¹¹ (10), caso contrário (Camargo, 2009).

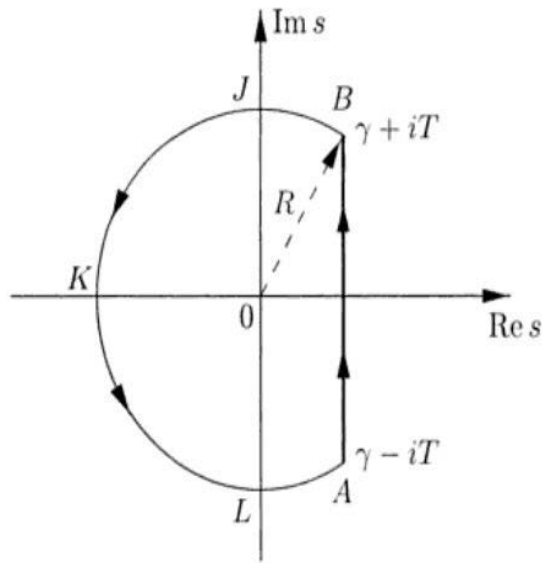


Figura 9 - Contorno de Bromwich.

⁸De fato, o que apresentamos aqui é o resultado de um teorema, de Figueiredo Camargo (2005).

⁹Figura retirada de Capelas-Oliveira (2006).

¹⁰Os ponto de ramificação de funções com mais de um ramo são ponto singulares, (Rodrigues-Jr & de Oliveira, 2006).

¹¹Figura retirada de Capelas-Oliveira (2006).

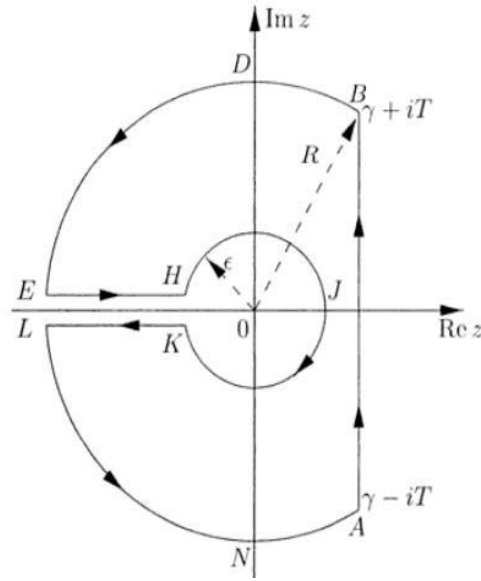


Figura 10 - Contorno de Bromwich modificado.

Convolação: Aplicando a transformada de Laplace inversa na equação (28) temos:

$$\mathfrak{L}^{(-1)}[F \cdot G] = f * g.$$

2.2.4 Transformadas de Laplace

Nesta seção apresentaremos as transformadas de Laplace e a respectiva inversa de algumas funções:

$$\mathfrak{L}[t^\mu] = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{s^{(\mu+1)}} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(\mu + 1)}{s^{(\mu+1)}} \right] = t^\mu, \quad (30)$$

$$\mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - a} \right] = e^{at}, \quad (31)$$

$$\mathfrak{L}[t^{\mu-1} e^{at}] = \frac{\Gamma(\mu)}{(s - a)^\mu} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(\mu)}{(s - a)^\mu} \right] = t^{\mu-1} e^{at}, \quad (32)$$

$$\mathfrak{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + a^2} \right] = \cos(at), \quad (33)$$

$$\mathfrak{L}[\text{sen}(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{a}{s^2 + a^2} \right] = \text{sen}(at). \quad (34)$$

2.2.5 Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler

Para obtermos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler, primeiro lembraremos da equação (30). Assim,

$$\mathfrak{L}[t^k e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st} t^k e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} t^k dt = \frac{\Gamma(n+1)}{(a-s)^{k+1}}.$$

Utilizando o mesmo procedimento vamos calcular a transformada de Laplace da função $t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)] &= \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{(at^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} e^{-st} t^{\beta-1} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} t^{\alpha k} \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1+\alpha k} dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \left(\frac{\Gamma(\beta + \alpha k)}{s^{\beta+\alpha k}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{s^{\beta+\alpha k}} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{s^{\alpha k}}. \end{aligned}$$

A soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica com razão q , tal que $-1 < q < 1$ é $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, logo

$$\mathfrak{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)] = \frac{1}{s^\beta} \frac{1}{1 - \frac{a}{s^\alpha}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}.$$

E, temos que sua transformada inversa pode ser escrita, com $Re(s) > 0$ e $Re(\beta) > 0$, como:

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a} \right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha).$$

2.2.6 Transformada de Laplace da função de Gel'fand-Shilov

A transformada de Laplace da função de Gel'fand-Shilov é:

$$\mathfrak{L}[\Phi_\nu(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{t^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} dt.$$

Seja $st = u$, então $du = sdt$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[\Phi_\nu(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{(-u)} \left(\frac{u}{s}\right)^{(\nu-1)} \frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)s^\nu} \int_0^\infty e^{-u} u^{(\nu-1)} du = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu)s^\nu}.\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\mathfrak{L}[\Phi_\nu(t)] = s^{-\nu}. \quad (35)$$

3 INTEGRAL FRACIONÁRIA

Na seção anterior introduzimos as funções especiais como a função de Mittag Leffler e Gel'fand Shilov, que serão importantes no desenvolvimento do cálculo fracionário.

Neste capítulo apresentaremos a teoria do cálculo fracionário para integrais. Iniciaremos com a definição da integral fracionária de Riemann-Liouville, que como vamos ver, é a generalização do operador integral usual.

3.1 Definição da integral fracionária

Inicialmente, vamos utilizar a notação J para o operador integral para definir $J^0 f(t) = f(t)$. Dessa forma, para $n \in \mathbb{N}$ e $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função integrável, definimos:

$$Jf(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1.$$

Assim

$$J^2 f(t) = J[Jf(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1,$$

$$J^3 f(t) = J[J^2 f(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} f(t_3) dt_3 dt_2 dt_1.$$

Dessa forma podemos definir a integral de ordem n como

$$J^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \cdots dt_3 dt_2 dt_1. \quad (36)$$

Lema: Se $G(x, t)$ é uma função contínua em $[c, b] \times [c, b]$ com $c < x < b$, então temos que:

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} G(x_1, t) dt = \int_c^x dt \int_t^x G(x_1, t) dx_1,$$

em particular para $G(x_1, t) = f(t)$, temos:

$$\int_c^x \int_c^{x_1} f(t) dx_1 dt = \int_c^x \int_t^x f(t) dt dx_1.$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em Stewart (2009).

Teorema: Através da convolução¹² de Laplace, uma função integrável $f(t)$ pode ser reescrita como:

$$J^n f(t) = \Phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \Phi_\nu(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau. \quad (37)$$

Demonstração do teorema:

Por indução em ν .

Para $\nu = 1$ temos que

$$Jf(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{1-1}}{(1-1)!} f(\tau) d\tau = \Phi_1(t) * f(t).$$

Agora basta mostrar que se $J^\nu f(t) = \Phi_\nu(t) * f(t)$ então $J^{\nu+1} f(t) = \Phi_{\nu+1}(t) * f(t)$.

Por hipótese de indução temos:

$$J^{\nu+1} f(t) = J[J^\nu f(t)] = J[\Phi_\nu(t) * f(t)] = \int_0^t \Phi_\nu(u) * f(u) du,$$

$$J^{\nu+1} f(t) = \int_0^t \int_0^u \frac{(u - \tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f(\tau) d\tau du.$$

¹²Ver seção 2.2.

De fato, pelo lema (3.1), podemos mudar a ordem de integração, da forma:

$$J^{\nu+1}f(t) = \int_0^t \left[\int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} f(\tau) du \right] d\tau.$$

e, calculando a integral entre colchetes, temos:

$$J^{\nu+1}f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^\nu}{\nu!} f(\tau) d\tau = \Phi_{\nu+1}(t) * f(t),$$

que era o desejado.

Tendo em vista este resultado, podemos agora utilizar a generalização da função fatorial pela função gama para generalizar a ordem da integral.

Definição da integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville:

Seja $f(t)$ uma função integrável. Definimos a integral de ordem ν de $f(t)$, denotada por $J^\nu f(t)$, por

$$J^\nu f(t) = \Phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau) d\tau. \quad (38)$$

Tomamos o limite inferior sendo 0, mas existem as chamadas funções da classe de Liouville, onde o limite inferior é $-\infty$, e as chamadas funções da classe de Riemann¹³, onde limite inferior é uma constante c .

3.1.1 Transformada de Laplace na integral fracionária

Aplicando a transformada de Laplace na integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville através da convolução, teremos pela equação (35):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[J^\nu f(t)] &= \mathfrak{L}[\Phi_\nu(t)] * \mathfrak{L}[f(t)], \\ &= s^{-\nu} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

e, através da definição (26), temos:

$$\mathfrak{L}[J^\nu f(t)] = s^{-\nu} F(s), \nu > 0. \quad (39)$$

¹³Destacamos que não há na literatura unanimidade com relação a estas nomenclaturas.

E, com a definição de integral de ordem fracionária pode-se reescrever as equações (30 - 34), com $\nu, \mu > 0$:

$$\mathfrak{L}[J^\nu t^\mu] = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{(\mu+\nu+1)}} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{(\mu+1+\nu)}} \right] = J^\nu t^\mu, \quad (40)$$

$$\mathfrak{L}[J^\nu e^{at}] = \frac{1}{s^\nu(s-a)} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\nu(s-a)} \right] = J^\nu e^{at}, \quad (41)$$

$$\mathfrak{L}[J^\nu t^{\mu-1} e^{at}] = \frac{\Gamma(\mu)}{s^\nu(s-a)^\mu} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(\mu)}{s^\nu(s-a)^\mu} \right] = J^\nu t^{\mu-1} e^{at}, \quad (42)$$

$$\mathfrak{L}[J^\nu \cos(at)] = \frac{1}{s^\nu(s^2+a^2)} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\nu(s^2+a^2)} \right] = J^\nu \cos(at), \quad (43)$$

$$\mathfrak{L}[J^\nu \sin(at)] = \frac{a}{s^\nu(s^2+a^2)} \implies \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{a}{s^\nu(s^2+a^2)} \right] = J^\nu \sin(at). \quad (44)$$

3.1.2 Exemplos de Integral fracionária

1. $J^\nu t^\mu$

Neste primeiro exemplo calcularemos a integral de ordem arbitrária, $\nu \in \mathbb{R}$, da função t^μ , com $\mu > -1$, utilizando a definição de integral fracionária por meio de convolução.

$$\begin{aligned} J^\nu t^\mu &= \Phi_\nu(t) * t^\mu \\ &= t^\mu * \Phi_\nu(t) \\ &= \int_0^t \Phi_\nu(t-\tau) \tau^\mu d\tau \\ &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(\nu-1)} \tau^\mu}{\Gamma(\nu)} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \left[t \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) \right]^{(\nu-1)} \tau^\mu d\tau \end{aligned}$$

Sendo $u = \frac{\tau}{t}$, $du = \frac{d\tau}{t}$ temos:

$$\begin{aligned}
 J^\nu t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 [t(1-u)]^{(\nu-1)} (tu)^\mu t du \\
 &= \frac{t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-u)^{(\nu-1)} u^\mu du \\
 &= \frac{t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu)} B(\mu+1, \nu) \\
 &= \frac{t^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu+1)},
 \end{aligned}$$

portanto,

$$J^\nu t^\mu = \frac{t^{\mu+\nu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} \quad (45)$$

Pode-se perceber que a solução da integral fracionária tem como caso particular o resultado da integração de ordem inteira.

2. $J^\nu K$

Se na função t^μ , do exercício anterior, substituirmos $\mu = 0$, ou seja, $t^0 = K$, com $\nu > 0$, teremos que a integral de uma constante é:

$$J^\nu K = \frac{K t^{(0+\nu)} \Gamma(0+1)}{\Gamma(0+\nu+1)} = \frac{K t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.$$

3. $J^\alpha t^1$:

$$J^\nu t^1 = \frac{t^{(1+\nu)} \Gamma(1+1)}{\Gamma(1+\nu+1)} = \frac{t^{(1+\nu)} \Gamma(2)}{\Gamma(\nu+2)} = \frac{t^{(1+\nu)}}{\Gamma(\nu+2)}.$$

3.2 A lei dos expoentes para integrais fracionárias

No cálculo de ordem inteira é comum trabalharmos com os operadores das integrais e das derivadas, principalmente nas leis de comutação e soma de expoentes para $m, n \in \mathbb{N}$,

$$J^m J^n = J^{m+n}, D^m D^n = D^{m+n}.$$

Na teoria do cálculo fracionário modificou-se estas propriedades de forma que m, n se tornassem fracionários, e para demonstrar a chamada *lei dos expoentes para integrais fracionárias* utilizaram a transformada de Laplace e o produto

de convolução. A demonstração encontra-se em Camargo (2009).

Teorema: Sendo J o operador integral fracionária, $\alpha, \beta \geq 0$ temos que

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}, \quad (46)$$

ou seja, a chamada propriedade de semigrupo e conseqüentemente a propriedade comutativa, $J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha$, são satisfeitas (Camargo, 2009).

4 DERIVADA FRACIONÁRIA

A definição do cálculo de ordem inteira tem uma representação natural, onde $D^n f(x)$ significa a derivada de ordem n da função $f(x)$, sendo $D = \frac{d}{dx}$ o operador diferencial e n um número natural. Agora representaremos a derivada fracionária como D^β , com $Re(\beta) > 0$.

Nesta sessão apresentaremos a definição da derivada de Caputo e a definição da derivada de Riemann-Liouville para o operador fracionário, D^β , além de apresentarmos a lei dos expoentes para a derivada fracionária.

Ressaltamos que a escolha do operador fracionário dependerá do problema abordado, no nosso caso utilizaremos, nos próximos capítulos, a definição de Caputo, por ser mais conveniente quando estamos estudando equações diferenciais com condições iniciais, conforme vamos ver mais adiante (Camargo, 2009).

4.1 Derivada fracionária de Riemann-Liouville

A derivada fracionária de Riemann-Liouville, com a unificação das definições de integração fracionária e derivação de ordem inteira, foi definida de forma que a derivada de ordem fracionária é a derivada de ordem inteira de uma determinada integral de ordem fracionária, ou seja, definida como a operação inversa, à

esquerda, da integração (Podlubny, 1999; Camargo, 2009).

Definição: Sejam $\beta \in \mathbb{C}$ com $Re(\beta) > 0$, n o menor inteiro maior que $Re(\beta)$, isto é, $n - 1 < Re(\beta) \leq n$ e $\nu = n - \beta$, podemos escrever $0 < Re(\nu) \leq 1$. Definimos a derivada de ordem β de $f(x)$, para $x > 0$, por¹⁴ (Camargo, 2009):

$${}_0D_x^\beta f(x) = D^n[J^\nu f(x)]. \quad (47)$$

Os subscritos 0 e x representam os limites de integração, mas é importante ressaltar que quando não os usarmos, ficará subentendida esta notação; o símbolo D^n é a derivada usual de ordem n inteira e J^ν é a integral de Riemann-Liouville de ordem ν .

Vamos denotar por I o operador identidade, e com $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$D^n J^n = I \text{ e } J^n D^n \neq I. \quad (48)$$

Perceba que $J_0^n D_t^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \neq I$, com $t > 0$. Sabemos que D^n é o operador inverso à esquerda de J^n , dessa forma a derivada fracionária de Riemann-Liouville, ${}_0D_x^\beta f(x)$ com $\beta > 0$ é definida como o operador inverso à esquerda de J^β .

A derivada fracionária é definida em termos da integral fracionária, desta forma ela leva em consideração o comportamento da função desde o instante inicial até o presente, logo a derivada fracionária não é um operador local, o que proporciona uma excelente descrição para efeitos de memória e propriedades hereditárias (Camargo, 2009).

4.1.1 Exemplos da derivada fracionária de Riemann-Liouville

Nesta seção vamos apresentar o cálculo da derivada fracionária de polinômios e vamos ilustrar com alguns casos particulares.

¹⁴Utilizando a definição da integral de ordem zero, visto na seção 3.1, se $\alpha = n$ teremos como caso particular a derivada de ordem inteira, ou seja, $D^\beta f(x) = D^n[J^{n-n} f(x)] = D^n[J^0 f(x)] = D^n f(x)$.

1. $D^\beta t^x$ Neste primeiro exemplo vamos calcular a derivada de ordem β da função t^x , utilizando a definição (47):

$$\begin{aligned}
D^\beta t^x &= D^n [J^\nu t^x] = D^n \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(\nu+x)}}{\Gamma((x+\nu)+1)} \right] = D^{n-1} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(\nu+x-1)(\nu+x)}}{\Gamma(x+\nu)(\nu+x)} \right] \\
&= D^{n-2} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(\nu+x-2)(\nu+x-1)}}{\Gamma((x+\nu-1)+1)} \right] = D^{n-2} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(\nu+x-2)(\nu+x-1)}}{(x+\nu-1)\Gamma(x+\nu-1)} \right] \\
&= D^{n-3} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(\nu+x-3)(\nu+x-2)}}{\Gamma((x+\nu-2)+1)} \right] = D^{n-3} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(\nu+x-3)(\nu+x-2)}}{(\nu+x-2)\Gamma(x+\nu-2)} \right] \\
&\vdots \\
&= \frac{\Gamma(x+1)t^{(\nu+x-n)}}{\Gamma(x+\nu-n+1)}.
\end{aligned}$$

Substituindo $\beta = n - \nu$ teremos:

$$D^\beta t^x = \frac{\Gamma(x+1)t^{(x-\beta)}}{\Gamma(x-\beta+1)}, \beta > 0, x > -1, t > 0. \quad (49)$$

Pode-se perceber que a solução da derivada fracionária tem como caso particular o resultado da derivação de ordem inteira, isto é,

$$D^n x^m = \frac{\Gamma(m+1)t^{m-n}}{\Gamma(m-n+1)} = \frac{m!t^{m-n}}{(m-n)!}. \quad (50)$$

2. $D^\alpha t^3$

$$D^\alpha t^3 = \frac{\Gamma(3+1)t^{(3-\alpha)}}{\Gamma(3-\alpha+1)} = \frac{\Gamma(4)t^{(3-\alpha)}}{\Gamma(-\alpha+4)} = \frac{6t^{(3-\alpha)}}{\Gamma(-\alpha+4)}.$$

3. $D^\beta t^0$

$$D^\beta t^0 = \frac{\Gamma(0+1)t^{(0-\beta)}}{\Gamma(0-\beta+1)} = \frac{\Gamma(1)t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} = \frac{1}{t^\beta \Gamma(1-\beta)} \neq 0,$$

com $\beta > 0, t > 0$.

4. $D^{\frac{3}{2}} t^2$

$$D^{\frac{3}{2}} t^2 = \frac{\Gamma(2+1)t^{(2-\frac{3}{2})}}{\Gamma(2-\frac{3}{2}+1)} = \frac{\Gamma(3)t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{4t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}.$$

4.2 Derivada fracionária de Caputo

A derivada fracionária de Riemann-Liouville foi muito importante para o desenvolvimento de outras teorias do cálculo fracionário. Mas entre as abordagens de generalização das notações preferimos a de Caputo pois esta incorpora os valores iniciais da função o que será útil nas aplicações. A derivada de ordem não-inteira de Caputo, obviamente, é similar a de Riemann-Liouville, trocando-se apenas a integral pela derivada e vice-versa. Veremos nesta sessão a definição de Caputo com detalhes (Camargo, 2009; Podlubny, 1999).

Definição: Seja $\beta \in \mathbb{C}$ com $Re(\beta) > 0$, isto é, $n-1 < Re(\beta) \leq n$ e n o menor inteiro maior que $Re(\beta)$ e $\nu = n - \beta$, ou seja, $0 < Re(\nu) \leq 1$. Assim, definimos a derivada, segundo Caputo, de ordem β de $f(x)$, com $x > 0$, por¹⁵ (Camargo, 2009):

$$D_*^\beta f(t) = J^\nu[D^n f(t)] = \Phi_\nu(t) * D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\beta+1-n}} d\tau. \quad (51)$$

O símbolo D_*^β é a derivada de ordem β segundo Caputo, entretanto em nosso trabalho adotaremos o símbolo D^β para representá-la, após esta seção. (Camargo, 2009).

Observação: Para utilizarmos a definição de Caputo consideraremos que a integrabilidade da derivada de ordem n da função é garantida.

4.2.1 Exemplos da derivada fracionária de Caputo

Nos exemplos seguintes consideraremos $D_*^\beta t^x = D^\beta t^x$.

1. $D_*^\beta t^x$

Neste primeiro exemplo vamos calcular a derivada de ordem β da função t^x ,

¹⁵Utilizando a definição da integral de ordem zero, visto na seção 3.1, se $\alpha = n$ teremos como caso particular a derivada de ordem inteira, ou seja, $D_*^\beta f(t) = J^{n-n}[D^n f(t)] = J^0[D^n f(t)] = D^n f(x)$.

utilizando a definição da derivada fracionária de Caputo, com $x > -1$ e $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
D_*^\beta t^x &= J^\nu [D^n t^x] \text{ (usando equação (49))} \\
&= J^\nu \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(x-n)}}{\Gamma(x-n+1)} \right] \\
&= J^{\nu-1} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(x-n+1)}}{(x-n+1)\Gamma(x-n+1)} \right] = J^{\nu-1} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(x-n+1)}}{\Gamma(x-n+2)} \right] \\
&= J^{\nu-2} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(x-n+2)}}{(x-n+2)\Gamma(x-n+2)} \right] = J^{\nu-2} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(x-n+2)}}{\Gamma(x-n+3)} \right] \\
&= J^{\nu-3} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(x-n+3)}}{(x-n+3)\Gamma(x-n+3)} \right] = J^{\nu-3} \left[\frac{\Gamma(x+1)t^{(x-n+3)}}{\Gamma(x-n+4)} \right] \\
&\vdots \\
&= \frac{\Gamma(x+1)t^{(x-n+\nu)}}{\Gamma(x-n+\nu+1)}
\end{aligned}$$

Podemos reescrever a equação anterior utilizando que $\beta = n - \nu$:

$$D_*^\beta t^x = \frac{\Gamma(x+1)t^{(x-\beta)}}{\Gamma(x-\beta+1)}. \quad (52)$$

Percebe-se que a derivada fracionária de Caputo tem como caso particular o resultado da derivada de ordem inteira e que a derivada de potência pela forma de Caputo ou de Riemann-Liouville são idênticas.

2. $D_*^\beta t^0$

$$\begin{aligned}
J^\nu D^1 t^0 &= J^\nu 0 = \Phi_\nu(t) * 0 = \mathfrak{L}[\Phi_\nu(t)] * \mathfrak{L}[0] \\
&= s^{-\nu} \int_0^\infty e^{-st} 0 dt = s^{-\nu} \int_0^\infty 0 dt \\
&= s^{-\nu}(0)|_0^\infty = 0.
\end{aligned}$$

3. De posse da equação (52) podemos justificar a utilização de $E_\alpha(t^\alpha)$:

A principal propriedade da função exponencial é que ela coincide com a sua derivada, ou seja, $\frac{de^x}{dx} = e^x$. Contudo, a derivada de ordem α da função de

Mittag-Leffler, $E_\alpha(x)$ não coincide com a função, de fato:

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha E_\alpha(z)}{dx^\alpha} &= \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1) z^{k-n}}{\Gamma(\alpha k + 1) \Gamma(k - n + 1)} \\ &\neq E_\alpha(z)\end{aligned}$$

Porém, a derivada de ordem α de $E_\alpha(x^\alpha)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha E_\alpha(z^\alpha)}{dx^\alpha} &= \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \frac{(z^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha n + 1) z^{\alpha n - \alpha}}{\Gamma(\alpha n - \alpha + 1) \Gamma(\alpha n + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\alpha n - \alpha}}{\Gamma(\alpha n - \alpha + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(\alpha(n-1) + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{\Gamma(\alpha t + 1)}\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d^\alpha E_\alpha(z^\alpha)}{dx^\alpha} = E_\alpha(z^\alpha). \quad (53)$$

Dessa forma, a generalização fracionária mais conveniente para a função exponencial é $E_\alpha(x^\alpha)$, e não $E_\alpha(x)$. Além disso:

$$E_1(z^1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

4.2.2 Gráficos da derivada de potência

Como apresentado a derivada de uma potência via formulação de Caputo ou Riemann-Liouville nos leva ao mesmo resultado. Dessa forma, apresentamos nesta seção dois gráficos de potências, (11), (12), em que variamos a ordem da derivada. Nestes nota-se comportamentos semelhantes ao variar a ordem da taxa de derivação.

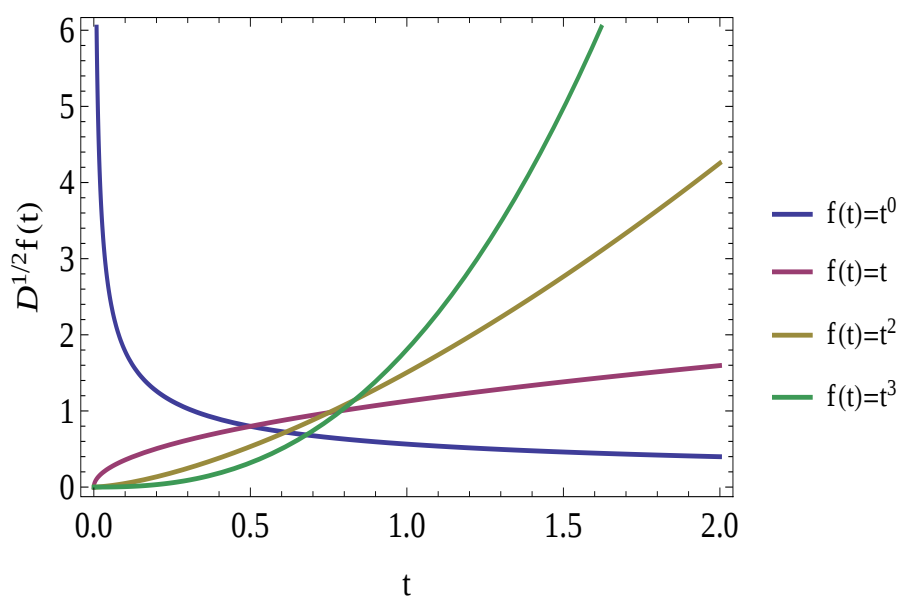


Figura 11 - Gráfico da $D^{\frac{1}{2}}f(t)$, para $f(t)$ na forma de potências de t .

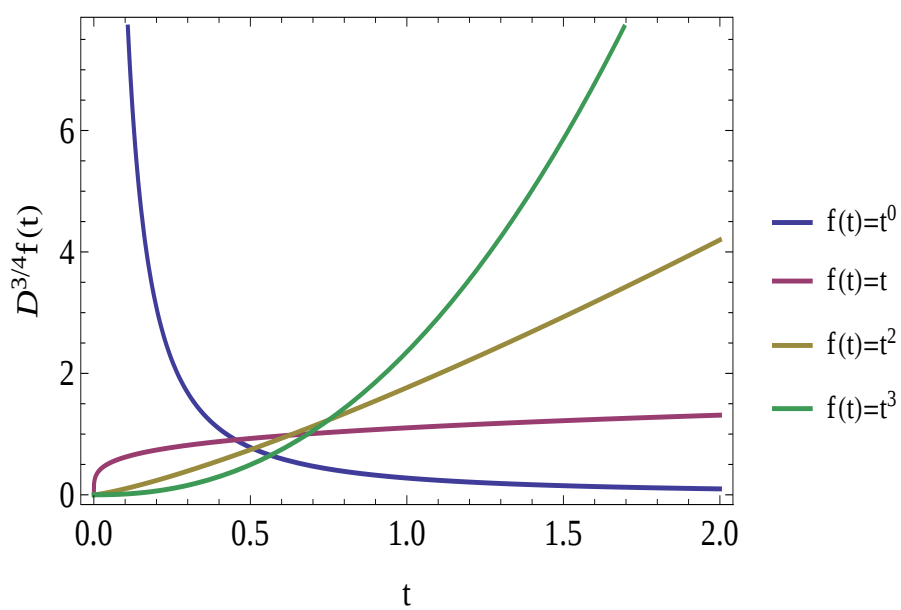


Figura 12 - Gráfico da $D^{\frac{3}{4}}f(t)$, para $f(t)$ na forma de potências de t .

4.3 Transformada de Laplace da derivada

4.3.1 Transformada de Laplace da derivada de ordem n

Para calcular a transformada de Laplace de derivadas de ordem n , vamos considerar que a função $f(t)$ e sua derivada $Df(t)$ são funções definidas em $[0, \infty)$, integráveis e de ordem exponencial, (Camargo, 2009).

Assim teremos a derivada de ordem um:

$$\mathfrak{L}[Df(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = f(t)e^{-st}|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = sF(s) - F(0). \quad (54)$$

A derivada de ordem dois:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[D^2 f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t) dt = f'(t)e^{-st}|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\ &= -f'(0) + (f(t)e^{-st})|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= -f'(0) + s(-f(0) + sF(s)) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

E sucessivamente até a derivada de ordem n :

$$\mathfrak{L}[D^n f(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0) = s^n F(s) - \sum_{j=1}^n s^{n-j} f^{(j-1)}(0). \quad (55)$$

4.3.2 Transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville

A transformada de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville necessita de condições iniciais em termos da integral $J^{m-\alpha}$ e de suas derivadas de ordem $k = 1, 2, 3, \dots, m-1$, (Camargo, 2009).

Segue sua transformada:

$$\mathfrak{L}[D^\beta f(t)] = s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k J^{(m-\beta)} f(0^+) s^{(m-1-k)}. \quad (56)$$

E sua transformada inversa com $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$ e $m-1 < \beta < m$:

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k J^{(m-\beta)} f(0^+) s^{(m-1-k)} \right] = D^\beta f(t). \quad (57)$$

4.3.3 Transformada de Laplace da derivada de Caputo

A transformada de Laplace aplicada na derivada de Caputo, ao contrário da derivada de Riemman-Liouville, é mais conveniente por necessitar de condições iniciais dadas na função e por ser essencial o conhecimento de suas derivadas de ordem inteira, que são fisicamente interpretáveis, (Camargo, 2009).

Consideremos $n - 1 < \beta < n$.

$$\mathfrak{L}[D^\beta f(t)] = \mathfrak{L}[J^{n-\beta} D^n f(t)] = \mathfrak{L}[\Phi_{n-\beta}(t) * D^n f(t)] = \mathfrak{L}[\Phi_{n-\beta}(t)] \mathfrak{L}[D^n f(t)].$$

Utilizando o resultado da equação (35) e da equação (55) teremos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[D^\beta f(t)] &= s^{\beta-n} \left[s^n F(s) - \sum_{j=1}^n s^{n-j} f^{(j-1)}(0) \right] \\ &= s^\beta F(s) - \sum_{j=1}^n s^{\beta-j} f^{(j-1)}(0). \end{aligned}$$

4.3.4 Lei dos expoentes

É comum no cálculo de ordem inteira trabalharmos com os expoentes, leis de comutatividade e aditividade; vimos também em (46) que tais leis se aplicam para integrais fracionárias, entretanto, nas derivadas de ordem não inteiras, tais propriedades não são satisfeitas. Separaremos a não aplicabilidade da lei em dois casos (Camargo, 2009):

$$(a) \quad D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) \neq D^{\alpha+\beta} f(t).$$

$$(b) \quad D^\alpha D^\beta g(t) \neq D^\beta D^\alpha g(t) = D^{\alpha+\beta} g(t).$$

Para exemplificar (a) utilizaremos a função $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ e $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ assim,

$$D^{\frac{1}{2}} f(t) = 0, \quad D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} f(t) = 0 \neq D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f(t) = -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}.$$

Para exemplificar (b) utilizaremos a função $g(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{3}{2}$. Calculando temos que $D^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $D^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}} = 0$, logo,

$$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}} = 0 \neq D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{3}{2}} = D^{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}f(t) = \frac{-t^{\frac{3}{2}}}{4}.$$

Agora, reescrevemos a lei dos expoentes de forma que envolveremos a definição dos operadores:

Lema: Seja $f(t) = t^\lambda \eta(t)$ ou $f(t) = t^\lambda \ln t \eta(t)$, na qual $\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ com raio de convergência¹⁶ R , então para $0 \leq t < R$, as seguintes fórmulas são válidas:

1. $\mu \geq 0$ e $0 \leq \nu \leq \mu \implies D^\nu J^\mu f(t) = J^{\mu-\nu} f(t)$.
2. $\mu \geq 0$ e $\nu > \mu \implies D^\nu J^\mu f(t) = D^{\mu-\nu} f(t)$.
3. $0 \leq \mu < \lambda + 1$ e $\nu \geq 0 \implies D^\nu D^\mu f(t) = D^{\mu+\nu} f(t)$.

4.4 Caputo versus Riemann-Liouville

Antes de apresentarmos as modelagens fracionárias, vamos ressaltar as diferenças entre as definições de Caputo e Riemann-Liouville.

De maneira geral, numa função $f(t)$ em que pode-se aplicar a integral e a derivada fracionária, nota-se que o resultado final se altera ao comutar a integral fracionária com a derivada, ou seja:

$$D^\beta f(t) = D^m [J^{m-\beta}] f(t) \neq J^{m-\beta} [D^m f(t)] = D_*^\beta f(t).$$

Como vimos em (1) e (52), as derivadas de potências não constante para ambas as definições coincidem, isto é,

$$D^\beta t^x = D_*^\beta t^x = \frac{\Gamma(x+1)t^{(x-\beta)}}{\Gamma(x-\beta+1)}. \quad (58)$$

¹⁶Dada uma série de potências, existe R na qual a série converge para $|x - c| < R$ (no interior do intervalo de raio R com centro em c) e diverge fora dele. Este valor é denominado de raio de convergência, (Stewart, 2009).

Entretanto, isto não ocorre para potências constantes, como pode ser visto em (3) e (2), pois na definição de Caputo primeiro calculamos a derivada de ordem inteira para depois a integral fracionária, em contraste com a derivada de Riemann-Liouville.

$$D_*^\beta t^0 = 0 \neq \frac{1}{t^\beta \Gamma(1-\beta)} = D^\beta t^0. \quad (59)$$

Outro importante aspecto de diferença entre as definições é na metodologia das transformadas de Laplace, pois para resolver equações diferenciais de ordem não-inteira precisamos aplicar a transformada de Laplace e recuperar a solução através da sua transformada de Laplace inversa.

Mas como vimos em (4.3.2) a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville é dada em termos da integral fracionária, que ainda não é fisicamente interpretável, em geral, e de suas derivadas de ordem inteira; o que dificulta a resolução de problemas que não apresentam todos os dados necessários para sua solução, por isso não é muito conveniente em alguns problemas. Já a transformada de Laplace da derivada de Caputo, como vimos em (4.3.3), se torna mais útil em alguns tipos de problemas, principalmente os que possuem condições iniciais dadas na função e por depender apenas das derivadas de ordem inteira que são fisicamente interpretáveis.

E, para melhor compreender a diferença dos métodos no desenvolvimento do cálculo fracionário, vamos resolver um problema retirado de Stewart (2009):

Exemplo: A modelagem da intensidade da corrente elétrica $I(t)$ em um circuito elétrico simples é dado por:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t). \quad (60)$$

Onde,

- $E(t)$ = voltagem em volt (V).
- $I(t)$ = intensidade da corrente elétrica medida em amper (A) em t .
- R = resistência elétrica medida em ohm (Ω).

- L = indutância medida em henry (H).

Dessa forma propõe-se, para $R = 12\Omega$, $L = 4H$ e $E(t) = 60V$, encontrar uma expressão para a corrente elétrica em um circuito onde o interruptor é ligado em $t = 0$.

Resolução da equação diferencial de primeira ordem

Substituindo os valores dados no exercício, temos que a equação (60) torna-se:

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 15 - 3I. \quad (61)$$

Do enunciado, sabe-se que o interruptor é ligado a $t = 0$, então temos um problema de valor inicial $I(0) = 0$.

Assim resolvemos a equação mediante separação de variáveis, para $15 - 3I \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dI}{15 - 3I} &= \int dt, \\ -\frac{1}{3} \ln |15 - 3I| &= t + C \end{aligned}$$

onde C é a constante de integração;

Introduzindo a notação $\pm e^{-3C} = k$, temos:

$$15 - 3I = \pm e^{-3C} e^{-3t} \iff 15 - 3I = k e^{-3t}.$$

Substituindo a condição inicial encontra-se o valor de $k = 15$, de onde segue-se a expressão desejada:

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}.$$

Resolução da versão fracionária segundo Caputo

Na versão fracionária segundo Caputo substitui-se a taxa de variação de ordem um presente na equação, dada no exercício, por uma de ordem $0 < \alpha \leq 1$. Depois, aplica-se a transformada de Laplace na equação, para obter uma equação algébrica.

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha I(t)}{dt^\alpha} &= 15 - 3I(t) \\
\mathfrak{L}\left[\frac{d^\alpha I(t)}{dt^\alpha}\right] &= \mathfrak{L}[15 - 3I(t)] \\
s^\alpha I(s) - s^{\alpha-1}I(0) &= \frac{15}{s} - 3\mathfrak{L}[I(t)],
\end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$I(s) = 15 \left(\frac{s^{-1}}{s^\alpha + 3} \right) + I(0) \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 3} \right).$$

Para recuperar a solução do problema de partida utiliza-se a transformada de Laplace inversa:

$$\mathfrak{L}^{-1}[I(s)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[15 \left(\frac{s^{-1}}{s^\alpha + 3} \right) + I(0) \left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 3} \right)\right],$$

de onde segue-se, pela linearidade da transformada inversa,

$$I(t) = I(0)E_\alpha(-3t^\alpha) + 15t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-3t^\alpha).$$

Substituindo a condição inicial $I(0) = 0$, temos:

$$I(t) = 15t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-3t^\alpha).$$

Para validar tais cálculos, vamos analisar a equação fracionária, tomando o limite de α tendendo a 1,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 1} I(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} 15t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-3t^\alpha) = 15tE_{1,2}(-3t^1) \\
&= 15t \left(\frac{e^{-3t}}{-3t} \right) = 5 - 5e^{-3t}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se que a solução fracionária tem como caso particular a solução da equação diferencial de ordem inteira.

Resolução da versão fracionária segundo Riemann-Liouville

Na versão fracionária segundo Riemann-Liouville a metodologia utilizada é a mesma que na derivada de Caputo, ou seja, inicialmente substitui-se a taxa

de variação de ordem um presente na equação, dada no exercício, por uma de ordem $0 < \alpha \leq 1$, que neste caso implicará em $m = 1$ na sua transformada de Laplace. Em seguida, aplica-se a transformada de Laplace na equação, para obter uma equação algébrica e resolvê-la. Então, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha I(t)}{dt^\alpha} &= 15 - 3I(t) \\
\mathfrak{L} \left[\frac{d^\alpha I(t)}{dt^\alpha} \right] &= \mathfrak{L}[15 - 3I(t)] \\
\mathfrak{L} \left[\frac{d^\alpha I(t)}{dt^\alpha} \right] &= \mathfrak{L}[15] - \mathfrak{L}[3I(t)] \\
s^\alpha I(s) - J^\alpha f(0^+) &= \frac{15}{s} - 3\mathfrak{L}[I(t)] \\
s^\alpha I(s) + 3\mathfrak{L}[I(t)] &= J^\alpha f(0^+) + \frac{15}{s} \\
I(s)(s^\alpha + 3) &= J^\alpha f(0^+) + \frac{15}{s} \\
I(s) &= \frac{sJ^\alpha f(0^+) + 15}{s(s^\alpha + 3)}.
\end{aligned}$$

Entretanto, não consegue-se resolver a equação algébrica, pois $I(s)$ fica em termos de integral fracionária que não é fisicamente interpretável, ou seja, este exemplo é de difícil solução por derivada de Riemann-Liouville.

E é por este motivo que deve-se analisar cada problema quanto a qual definição utilizar. Em nossos problemas futuros utilizaremos a definição de Caputo, por envolver o conhecimento de condições iniciais dadas na função e de suas derivadas de ordem inteira, fisicamente interpretáveis.

5 MODELAGEM

De início, estudamos o significado do termo ‘modelagem matemática’, depois sua prática teórica. A palavra ‘modelo’ é polissêmica, dependendo de sua

abordagem. No nosso caso, seu significado será a representação de algo que os seres humanos fazem sobre a realidade. A modelagem é o método de fazer o modelo e, de fato, um depende do outro para ter sentido (Greca & dos Santos, 2005; da Cunha, 1989; D’Ambrósio, 1996)

Assim, o amplo conhecimento dos modelos mais básicos é o primeiro, e fundamental passo, para se estudar problemas mais complexos e realistas, pois a construção, bem como a compreensão, de um processo complexo é alcançada, em geral, através da compreensão de modelos mais elementares. Dessa forma, introduziremos o uso de cálculo fracionário por meio de exemplos, crescimento bacteriano e o sistema logístico, onde serão apresentadas as diferenças entre uma abordagem usual e uma abordagem com cálculo fracionário do mesmo modelo.

5.1 Crescimento bacteriano

Sabe-se que as bactérias são seres simples, unicelulares, invisíveis a olho nu e muito numerosos e que nem todos os tipos prejudicam os seres vivos. Algumas são de extrema importância para os seres humanos, pois pode-se produzir drogas terapêuticas, alguns tipos de alimentos como o pão, o vinagre, o chocolate, dentre outros, e são imprescindíveis para manter o equilíbrio do organismo, fazer a digestão e impedir a invasão de bactérias prejudiciais ao organismo ou vírus, dentre outros (Pereira, 2003).

As bactérias se multiplicam muito rápido em condições ambientais favoráveis por possuírem um desenvolvimento simples, por processos assexuais, tornando-as numerosas. Sabendo que uma população em um determinado instante t , $P(t)$, tem uma taxa de crescimento ou decrescimento proporcional á sua população pode-se associar a equação diferencial:

$$\frac{dp}{dt} = kP(t) \implies \ln P(t) = kt + \ln C \implies P(t) = Ce^{kt},$$

fazendo $t = 0$, teremos que $P(0) = C$, assim,

$$P(t) = P(0)e^{kt}. \tag{62}$$

Entretanto, a proliferação depende de vários fatores ambientais, tais como o alimento (os mais importantes são: o carbono, o hidrogênio, o nitrogênio, o oxigênio e o fósforo), a temperatura (as bactérias psicrófilas¹⁷ entre 20 - 35 °C; as mesófilas¹⁸ entre 30 - 45 °C; as termófilas entre 45 - 70 °C), a umidade (entre 0,999 e 0,998), o pH (a maioria das bactérias possuem pH próximo da neutralidade ou ligeiramente alcalino (6,8 - 7,5)) e o oxigênio, e ainda pode ser comprometido, se existirem outras bactérias ou fungos competindo por alimentos ou espaço, Pereira (2003). Ou seja, se considerarmos que as condições não são totalmente ideais, teremos que os cálculos anteriores não são totalmente apropriados. Dessa forma, para tornar o problema mais real, isto é, supondo que o crescimento não seja tão acentuado, podemos considerar que a ordem da taxa de crescimento seja um número entre $0 < \alpha \leq 1$. Assim recorreremos ao cálculo fracionário para descrever a equação diferencial:

$$\frac{d^\alpha P(t)}{d^\alpha t} = kP(t), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Utilizando a transformada de Laplace podemos escrever:

$$\mathfrak{L} \left[\frac{d^\alpha P(t)}{d^\alpha t} \right] = \mathfrak{L}[kP(t)] \implies s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}P(0) = kF(s),$$

com solução dada por:

$$F(s)(s^\alpha - k) = s^{\alpha-1}P(0) \implies F(s) = \frac{s^{\alpha-1}P(0)}{s^\alpha - k}. \quad (63)$$

Para recuperarmos a solução do problema na variável t utilizaremos a transformada de Laplace inversa e a equação (63):

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1}P(0)}{s^\alpha - k} \right] = P(0)E_{\alpha,1}(kt^\alpha) = P(0)E_\alpha(kt^\alpha).$$

Para validar tais cálculos, vamos analisar o crescimento tomando o limite de α tendendo a 1,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} P(0)E_\alpha(kt^\alpha) = P(0)E_1(kt) = e^{kt}P(0).$$

¹⁷As bactérias psicrófilas apresentam crescimento ótimo em temperaturas baixas, (Pereira, 2003).

¹⁸As bactérias mesófilas apresentam crescimento ótimo em temperaturas comuns na superfície da Terra e nos organismos animais, (Pereira, 2003).

Uma vez que a solução fracionária tem como caso particular a solução de ordem inteira, podemos concluir que a solução fracionária nos fornece uma descrição generalizada do fenômeno, que pode ser, inclusive mais precisa.

5.2 Equação logística

A equação diferencial descrita no item anterior é inapropriada quando a população é muito grande, pois, em alguns casos, existem efeitos que inibirão o crescimento populacional, tais como a alta procura por alimento e combustível, ou até mesmo a poluição ao meio ambiente.

Em 1837, o matemático e biólogo belga Verhulst [1804 - Pierre François Verhulst - 1849], pensando em modelos matemáticos que pudessem suprir tais necessidades, que completassem a teoria do crescimento exponencial de Malthus [1766 - Thomas Robert Malthus - 1834], e que descrevesse a população humana de alguns países da época como França, Bélgica, Rússia e Inglaterra, (Varela et al., 2002); estudou uma equação não-linear que descrevia um ambiente capaz de sustentar até certa quantidade de indivíduos (capacidade de suporte k). Esta teoria foi publicada em 1838 e ficou conhecida como equação logística, sua solução como função logística, e a expressão gráfica como curva logística:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)k[1 - P(t)]. \quad (64)$$

Aplicando a propriedade distributiva na equação acima teremos $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t) - kP^2(t)$, onde pode-se interpretar o termo $-kP^2(t)$ como sendo o fator de inibição. Esta equação modela satisfatoriamente alguns tipos de bactérias, protozoários, moscas-de-frutas (*Drosophila*), pulga d'água (*Daphnia*), que vivem em ambiente desfavoráveis ao crescimento exponencial, além de modelar a difusão de uma epidemia, gerenciamento de fontes renováveis, evolução da resistência a pesticidas, controle ecológico de pestes, e até mesmo de inovação tecnológica (Fisher & Pry, 1971; Varela et al., 2002).

Para resolver esta equação recorreremos ao método de Bernoulli [1654

- Jakob Bernoulli - 1705], onde substituiremos $v(t) = P^{1-2}(t) = P^{-1}(t)$ e $v'(t) = -P^{-2}(t)P'(t)$.

$$\begin{aligned}
 P'(t) - kP(t) &= -kP^2(t) \Rightarrow \frac{P'(t)}{P^2(t)} - \frac{kP(t)}{P^2(t)} = -\frac{kP^2(t)}{P^2(t)} \\
 &\Rightarrow -P'(t)P^{-2}(t) + kP^{-1}(t) = k \Rightarrow v'(t) + kv = k \\
 &\Rightarrow v' = k(1-v) \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = k(1-v) \Rightarrow \frac{dv}{(1-v)} = kdt \\
 &\Rightarrow -\ln(1-v) = kt + \ln(c) \Rightarrow \ln(1-v) = -kt + \ln(c) \\
 &\Rightarrow e^{\ln(1-v)} = e^{-kt+\ln(c)} \Rightarrow 1-v = e^{-kt}c \\
 &\Rightarrow v = -e^{-kt}c + 1.
 \end{aligned}$$

Para encontrarmos o valor da constante faremos $t = 0$,

$$v(0) = -e^{-k0}c + 1 \Rightarrow c = 1 - v(0).$$

Retornando à equação diferencial obtemos:

$$v = -e^{-kt}c + 1 \Rightarrow v = -e^{-kt}[v(0) - 1] + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{P(t)} = -e^{-kt} \left[\frac{1}{P(0)} - 1 \right] + 1,$$

de onde segue-se para a solução

$$P(t) = \frac{1}{-e^{-kt} \left[\frac{1}{P(0)} - 1 \right] + 1}.$$

Entretanto, a teoria de Verhulst que descreve o crescimento de populações sujeito apenas a restrições ambientais tem suas falhas para descrever outros modelos como em Varalta et al. (2013). Esta modelagem não é adequada para casos em que o recurso é abundante, ou seja, a população crescerá ilimitadamente, sem nenhuma capacidade suporte, isto ocorre em alguns casos como no crescimento de tumor (maligno) onde células invadem os tecidos e órgãos espalhando-se desordenadamente para outras áreas, (Rodrigues & Mancera, 2011). Dessa forma, para tornar o problema mais real, isto é, supondo que o crescimento não seja acelerado, podemos supor que a ordem da taxa de crescimento seja um número entre $0 < \alpha \leq 1$, assim vamos aplicar a transformada de Laplace na equação, obtendo uma equação

algébrica, resolver esta equação e, através da transformada de Laplace inversa, vamos recuperar a solução do problema de partida¹⁹.

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} &= k(1 - v) \\
\mathfrak{L}\left[\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha}\right] &= \mathfrak{L}[k(1 - v)] \\
\mathfrak{L}\left[\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha}\right] &= \mathfrak{L}[k] - \mathfrak{L}[kv] \\
s^\alpha V(s) - s^{\alpha-1}v(0) &= \frac{k}{s} - k\mathfrak{L}[v] \\
s^\alpha V(s) - s^{\alpha-1}v(0) &= \frac{k}{s} - kV(s) \\
s^\alpha V(s) + kV(s) &= \frac{k}{s} + s^{\alpha-1}v(0) \\
V(s)[s^\alpha + k] &= \frac{k}{s} + s^{\alpha-1}v(0) \\
V(s) &= \frac{k + s^\alpha v(0)}{s(s^\alpha + k)}.
\end{aligned}$$

Para recuperarmos a solução utilizaremos a transformada de Laplace

¹⁹O artigo ‘A prelude to the Fractional Calculus applied to Tumor Dynamic’ foi aceito para publicação na revista TEMA, onde apresentamos a generalização da equação logística clássica e dela analisamos a aplicabilidade do modelo para descrever o crescimento de tumores de câncer (Varalta et al., 2014).

inversa.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^{-1}[V(s)] &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{k + s^\alpha v(0)}{s(s^\alpha + k)} \right] \\
\mathfrak{L}^{-1}[V(s)] &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{k}{s(s^\alpha + k)} + \frac{s^{\alpha-1} v(0)}{s^\alpha + k} \right] \\
v(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{k}{s(s^\alpha + k)} \right] + \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s^{\alpha-1} v(0)}{s^\alpha + k} \right] \\
(*)v(t) &= v(0)E_\alpha(-kt^\alpha) - kt^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(kt^\alpha) \\
v(t) &= v(0)E_\alpha(-kt^\alpha) + [1 - E_\alpha(-kt^\alpha)] \\
v(t) &= E_\alpha(-kt^\alpha)[v(0) - 1] + 1 \\
\frac{1}{P(t)} &= \left[\frac{1}{P(0)} - 1 \right] E_\alpha(-kt^\alpha) + 1 \\
P(t) &= \frac{1}{\left[\frac{1}{P(0)} - 1 \right] E_\alpha(-kt^\alpha) + 1}.
\end{aligned}$$

Para validar tais cálculos, vamos analisar a equação fracionária tomando o limite de α tendendo a 1,

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 1} P(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{\left[\frac{1}{P(0)} - 1 \right] E_\alpha(-kt^\alpha) + 1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{P(0)} - 1 \right] E_1(-kt) + 1} \\
&= \frac{1}{\left[\frac{1}{P(0)} - 1 \right] e^{-kt}}.
\end{aligned}$$

Novamente que a solução fracionária tem como caso particular a solução de ordem inteira, podemos concluir que a solução fracionária nos fornece uma descrição generalizada do fenômeno, que pode ser, inclusive mais precisa.

Apresentamos a seguir gráficos da solução da equação (64), tomando $P(0) = 0.2$ e a capacidade suporte $k = 1$, para diferentes valores de α , temos:

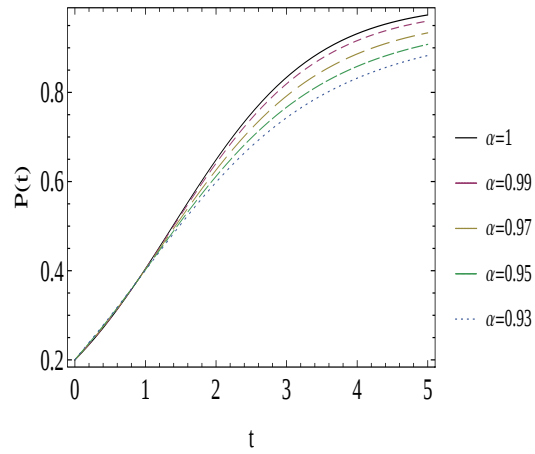


Figura 13 - Solução da equação (64), em $P(t)$, com $0.93 \leq \alpha \leq 1$.

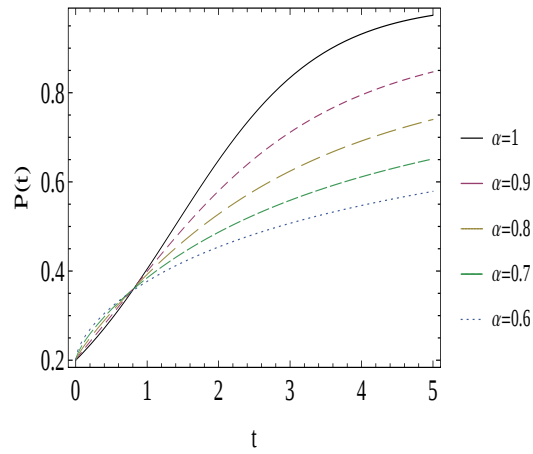


Figura 14 - Solução da equação (64), em $P(t)$, com $0.6 \leq \alpha \leq 1$.

6 SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

Neste capítulo vamos mostrar um modelo mais realista, que engloba duas populações em um mesmo ambiente, onde uma será considerada a presa e a

outra predador. O modelo foi desenvolvido pelos matemáticos Vito Volterra (1860 - 1940) e Alfred Lotka (1880 - 1949), em meados de 1925, independentemente, quando tentavam explicar o fenômeno que ocorria com as populações de tubarões e peixes do mar Adriático nos períodos de pesca seguidos de sua paralisação devido a I Guerra Mundial e, por fim, a retomada das atividades pesqueiras. O sistema criado ficou conhecido como ‘equações presa-predador’, ou ‘equações de Lotka-Volterra’ (de Barros & Bassanezi, 2010; Stewart, 2009; Camargo, 2009).

No sistema usual considera-se que as condições são ideais, ou seja, que as chances de encontro entre presas e predadores são iguais, entretanto estes encontros eventuais se devem à proporcionalidade do tamanho das populações, dessa forma a população de predadores se beneficia com fartura de presas e, a mesma forma, com o aumento da população de predadores a população de presas é prejudicada. No sistema pode-se supor que estando os predadores ausentes, a população de presas $x(t)$, num determinado tempo, crescerá de forma exponencial; e, se supormos falta de alimento, ou seja que há ausência de presas, teremos que a população de predadores $y(t)$ decrescerá de forma exponencial, num determinado tempo (de Barros & Bassanezi, 2010; Stewart, 2009; Camargo, 2009).

Encontramos este sistema em diversas aplicações em Biologia, como por exemplo, para descrever os modelos parasita-hospedeiro, crescimento de plantas e as interações planta-herbívoro (Camargo, 2009).

Na primeira seção deste capítulo apresentaremos o modelo usual de Lotka-Volterra, na segunda seção apresentaremos o modelo fracionário do sistema de Lotka-Volterra, desenvolvido por meio das derivadas fracionárias no sentido de Caputo e, por último, vamos expor um exemplo numérico.

6.1 Sistema de Lotka-Volterra clássico

O sistema de duas equações diferenciais chamado sistema de Lotka-Volterra, que engloba as hipóteses já citadas, é mostrado a seguir. Para simplificação

dos cálculos utilizaremos $x(t) = x$ e $y(t) = y$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy. \end{cases} \quad (65)$$

Aqui a representa a diferença entre a taxa de natalidade e mortalidade de $x(t)$ na ausência dos predadores; b a taxa de sucesso dos ataques de $y(t)$; c a diferença entre a taxa de mortalidade e natalidade de $y(t)$ na ausência de presas, e d a taxa de mortalidade de $x(t)$ que auxiliaram produção⁷ de $y(t)$, em que x, y, a, b, c e d são constantes positivas. (de Barros & Bassanezi, 2010; Stewart, 2009).

Para encontrarmos os pontos críticos²⁰ do sistema (65), vamos supor que $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 0$, e resolver por substituição o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} = 0 = -cy + dxy; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x(a - by) \\ 0 = y(-c + dx). \end{cases} \quad (66)$$

Da primeira equação encontramos $x = 0$ ou $y = \frac{a}{b}$. Se substituirmos $x = 0$ na segunda equação teremos que $y = 0$, logo um ponto crítico será $P(0, 0)$. Se substituirmos $y = \frac{a}{b}$ na segunda equação teremos que $x = \frac{c}{d}$, logo o outro ponto crítico será $Q(c/d, a/b)$. O ponto $Q(c/d, a/b)$ representa o equilíbrio entre predadores e presas, que é o ideal para o sistema e o ponto $P(0, 0)$ é um ponto de sela²¹, onde, dado que a população de predadores é zero, a população de presas cresce de forma exponencial, da mesma forma, quando a população de presas é zero, a população de predadores decrescerá de forma exponencial chegando à extinção, e esta definição não gera um ciclo que é característica do sistema de Lotka-Volterra clássico, logo não será discutido neste trabalho (Camargo, 2009).

Transladando o sistema para o ponto crítico $Q(c/d, a/b)$, temos que um ponto qualquer $P(x, y)$ será encontrado introduzindo as mudanças $u = x - c/d$,

²⁰Um ponto crítico de uma função f é qualquer ponto x no domínio de f tal que $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não exista, (Stewart, 2009).

²¹Um ponto crítico que não é um ponto extremante (máximo ou mínimo) é um ponto de sela (Stewart, 2009).

$v = y - a/b$, ou seja, o ponto P terá coordenadas $P(u, v)$ em relação ao novo sistema Ouv . Assim,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} &= \begin{cases} \frac{du}{dt} = \left(u + \frac{c}{d}\right)a - \left(u + \frac{c}{d}\right)\left(v + \frac{a}{b}\right)b \\ \frac{dv}{dt} = \left(v + \frac{a}{b}\right)(-c) + \left(u + \frac{c}{d}\right)\left(v + \frac{a}{b}\right)d \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{du}{dt} = ua + \frac{ca}{d} - uvb - ua - \frac{cvb}{d} - \frac{ca}{d} \\ \frac{dv}{dt} = -cv - \frac{ca}{b} + duv + \frac{dua}{b} + cv + \frac{ac}{b} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{uad + ca - uvbd - uad - cvb - ca}{d} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{-cvb - ac + dbuv + dua + cvb + ac}{b} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{uvbd - cvb}{d} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{dbuv + dua}{b} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{b}{d}(cv + duv) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d}{b}(au + buv). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vamos considerar o sistema linear depois de ser transladado para condições perto do ponto de equilíbrio porque neste caso a interferência dos termos não lineares é pequena, ou seja, o sistema linearizado será similar ao não linearizado. O sistema linearizado é:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{bc}{d}v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{ad}{b}u. \end{cases}$$

Verificou-se que a solução do sistema linearizado representa elipses centradas no ponto crítico como trajetórias, ou seja, as trajetórias definidas pelo sistema são as curvas de nível da função $f(x, y)$.

Ao resolver o sistema (65) dividindo a segunda equação pela primeira, nas variáveis x and y , encontra-se as trajetórias do sistema original, logo (Camargo, 2009):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \frac{c - dx}{a - by}.$$

Resolvendo a equação diferencial separável encontram-se as curvas de nível da função:

$$\frac{a - by}{-y} dy = \frac{c - dx}{x} dx \Rightarrow -a \int \frac{dy}{y} + b \int dy = c \int \frac{dx}{x} - d \int dx \Rightarrow$$

$$f(x, y) = c \ln x - xd + a \ln y - by = K,$$

onde K é uma constante.

6.2 Sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado

Conforme vimos, o modelo clássico tem sérias restrições, do ponto de vista da modelagem: a população de presas cresce exponencialmente na ausência do predador; a população de predadores morre na ausência da presa (ao invés de buscar uma nova espécie de presa); predadores podem comer uma quantidade infinita de presas e não há complexidade ambiental (isto é, ambas as populações estão se movendo aleatoriamente em um meio homogêneo). A fim de diminuir o efeito destas simplificações, ou seja, se considerarmos que as condições não são totalmente ideais e supondo que o crescimento não seja tão acentuado, vamos propor e resolver um novo modelo, baseado no sistema de Lotka-Volterra clássico, sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado (Camargo, 2009).

No sistema de Lotka-volterra, de ordem inteira, substituímos as derivadas ordinárias presentes na equação por derivadas de ordem α e β , onde α e β são número reais entre zero e um ²², ou seja, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, com x , y , a, b , c e d constantes positivas e as derivadas fracionárias são tomadas no sentido de Caputo. Logo o sistema não linear fracionário é (Camargo, 2009):

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \\ D^\beta y(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \quad (67)$$

²²Consideramos a ordem das taxas de variação menores que um pois os fatores inibidores tendem a diminuir as taxas de variação

Neste sistema percebe-se que as derivadas são de ordens distintas e foi definido desta forma para diminuir o efeito da restrição ‘não há complexidade ambiental’. A dimensão do sistema é obtida somando as duas ordens das derivadas do sistema, ou seja, $D = \alpha + \beta$. De maneira análoga à feita anteriormente, introduz-se variáveis para equilibrar o sistema, substitui-se $u = x - c/d$, $v = y - a/b$. Vamos considerar o sistema linear depois de ser transladado para condições iniciais muito próximas do ponto de equilíbrio porque neste caso a interferência dos termos não lineares é pequena, ou seja, o sistema linearizado será similar ao não linearizado. Utilizaremos a derivada fracionária no sentido de Caputo (Camargo, 2009).

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = -\frac{bc}{d}v, \\ D_t^\beta v(t) = \frac{ad}{b}u. \end{cases} \quad (68)$$

Para resolver este sistema utiliza-se da transformada de Laplace, lembrando que $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$ são, respectivamente, as populações iniciais de presa e predador. Então, sabendo que $F(s) = \mathfrak{L}[u(t)]$ e $G(s) = \mathfrak{L}[v(t)]$, temos:

$$\begin{cases} \mathfrak{L}[D_t^\alpha u(t)] = \mathfrak{L}[-\frac{bc}{d}v], \\ \mathfrak{L}[D_t^\beta v(t)] = \mathfrak{L}[\frac{ad}{b}u] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}u(0) = -\frac{bc}{d}G(s), \\ s^\beta G(s) - s^{\beta-1}v(0) = \frac{ad}{b}F(s) \end{cases} \quad (69)$$

E, resolvendo este sistema (69) de duas variáveis, $F(s)$ e $G(s)$. podemos escrever:

$$F(s) = u(0) \frac{s^{\alpha+\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} - v(0) \frac{bc}{d} \frac{s^{\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} \quad (70)$$

e

$$G(s) = v(0) \frac{s^{\alpha+\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} + u(0) \frac{ad}{b} \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} \quad (71)$$

Assim para recuperar a solução do sistema utiliza-se a transformada de Laplace inversa em (70) e (71), considerando as notações $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$.

$$u(t) = u_0 E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) - v_0 \frac{bc}{d} t^\alpha E_{\alpha+\beta, \alpha+1}(-act^{\alpha+\beta}), \quad (72)$$

$$v(t) = v_0 E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) + u_0 \frac{ad}{b} t^\beta E_{\alpha+\beta, \beta+1}(-act^{\alpha+\beta}). \quad (73)$$

Lembrando que $E_\mu(x)$ e $E_{\mu,\nu}(x)$ representam as funções de Mittag-Leffler de um e de dois parâmetros, respectivamente.

Neste momento colocaremos a solução do sistema em sua variável inicial.

$$x(t) = \frac{c}{d} + \left(x_0 - \frac{c}{d}\right) E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) - \left(y_0 - \frac{a}{b}\right) \frac{bc}{d} t^\alpha E_{\alpha+\beta,\alpha+1}(-act^{\alpha+\beta}), \quad (74)$$

$$y(t) = \frac{a}{b} + \left(y_0 - \frac{a}{b}\right) E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) + \left(x_0 - \frac{c}{d}\right) \frac{ad}{b} t^\beta E_{\alpha+\beta,\beta+1}(-act^{\alpha+\beta}). \quad (75)$$

Analizemos o limite de α e β tendendo a 1.

- Para a solução (74):

$$\lim_{\alpha,\beta \rightarrow 1} x(t) = \frac{c}{d} + \left(x_0 - \frac{c}{d}\right) E_2(-act^2) - \left(y_0 - \frac{a}{b}\right) \frac{bc}{d} t^\alpha E_{2,2}(-act^2),$$

logo,

$$\lim_{\alpha,\beta \rightarrow 1} x(t) = \frac{c}{d} + \left(x_0 - \frac{c}{d}\right) \cos(act) - \left(y_0 - \frac{a}{b}\right) \frac{bc}{d} t^\alpha \sin(act).$$

- Para a solução (75):

$$\lim_{\alpha,\beta \rightarrow 1} y(t) = \frac{a}{b} + \left(y_0 - \frac{a}{b}\right) E_2(-act^2) + \left(x_0 - \frac{c}{d}\right) \frac{ad}{b} t^\beta E_{2,2}(-act^2),$$

logo,

$$\lim_{\alpha,\beta \rightarrow 1} y(t) = \frac{a}{b} + \left(y_0 - \frac{a}{b}\right) \cos(act) + \left(x_0 - \frac{c}{d}\right) \frac{ad}{b} t^\beta \sin(act).$$

Conforme o esperado a solução do sistema, quando α e β tendem a 1, resulta em equações que envolvem as funções seno e cosseno, ou seja, resulta em um ciclo, que é a característica prenunciada.

7 APLICAÇÕES

7.1 Análise geral do sistema de Lotka-Volterra

Para analisar o comportamento do modelo de Lotka-Volterra fracionário linearizado utilizou-se o programa ‘Wolfram Mathematica 9.0’. Para isto escolheu-se valores para as constantes e condições iniciais de forma que ao substituir $\alpha = 1$ obtivesse a característica do sistema de Lotka-Volterra, um ciclo. Dessa forma substituiu-se $a = 7/25$, $b = 1/100$, $c = 6/5$ e $d = 7/100$ e $x(0) = 30$ e $y(0) = 4$.

Para encontrar as curvas utilizamos (72) e (73). Cada curva é uma combinação dos parâmetros α e β , que enunciam a derivada fracionária de $x(t)$ e $y(t)$. Com isso pode-se verificar, nos gráficos, que os valores de α e β interferem no quão rápido a curva se aproxima do ponto crítico $Q(17.2, 28)$. No gráfico 15(a) observa-se que para $\alpha = \beta = 1$ voltamos à solução do sistema de Lotka-Volterra de ordem inteira linearizado, ou seja, que a curva é uma elipse centrada no ponto de equilíbrio Q ; e nos demais gráficos, 15(b), 15(c), 16(a), 16(b), 16(c), que quando reduz-se a dimensão do sistema, $D = \alpha + \beta$, há uma aceleração na convergência para o ponto Q , (Camargo, 2009).

Ao analisar os gráficos deve-se compreender que toda vez que a curva toca o eixo x teremos que os predadores estarão ausentes, logo a população de presas $x(t)$, num determinado tempo, crescerá de forma exponencial; e, se supormos falta de alimento, toda vez que a curva toca o eixo y , ou seja que há ausência de presas, teremos que a população de predadores $y(t)$ decrescerá de forma exponencial num determinado tempo. A solução numérica nos conduz a acreditar que este tipo de problema pode ser contornado com a conveniente escolha da ordem das derivadas α

e β .

Observando os gráficos verificamos que se a dimensão do sistema for menor que 1.85 temos uma vantagem comparando com a solução de ordem inteira, pois observa-se que as populações não se extinguem. Mas acreditamos que os valores da ordem das derivadas α e β , que melhor descrevem o modelo, se modificarão a cada descrição de relação entre as populações.

Para exemplificar, podemos citar a população de filhotes da foca-caranguejeira (presa) e a população de adultos da foca-leopardo (predador), que do ponto de vista ecológico é de extrema importância para regular a população da foca-caranguejeira. Ela é numerosa devido sua alta reprodução. Sabe-se que a população de adultos de foca-leopardo ataca principalmente durante o primeiro ano de vida das focas-caranguejeiras e que seus ataques não levarão à extinção da presa, apenas a uma redução de 80% na espécie. Dessa forma, pode-se afirmar que o número de presas e predadores é mais ou menos constante, ou seja, a partir de um determinado tempo as populações entrarão em equilíbrio. Com isso, pode-se concluir que os valores da ordem das derivadas influenciam no tempo de convergência para um ponto de equilíbrio, (Lodi et al., 2005).

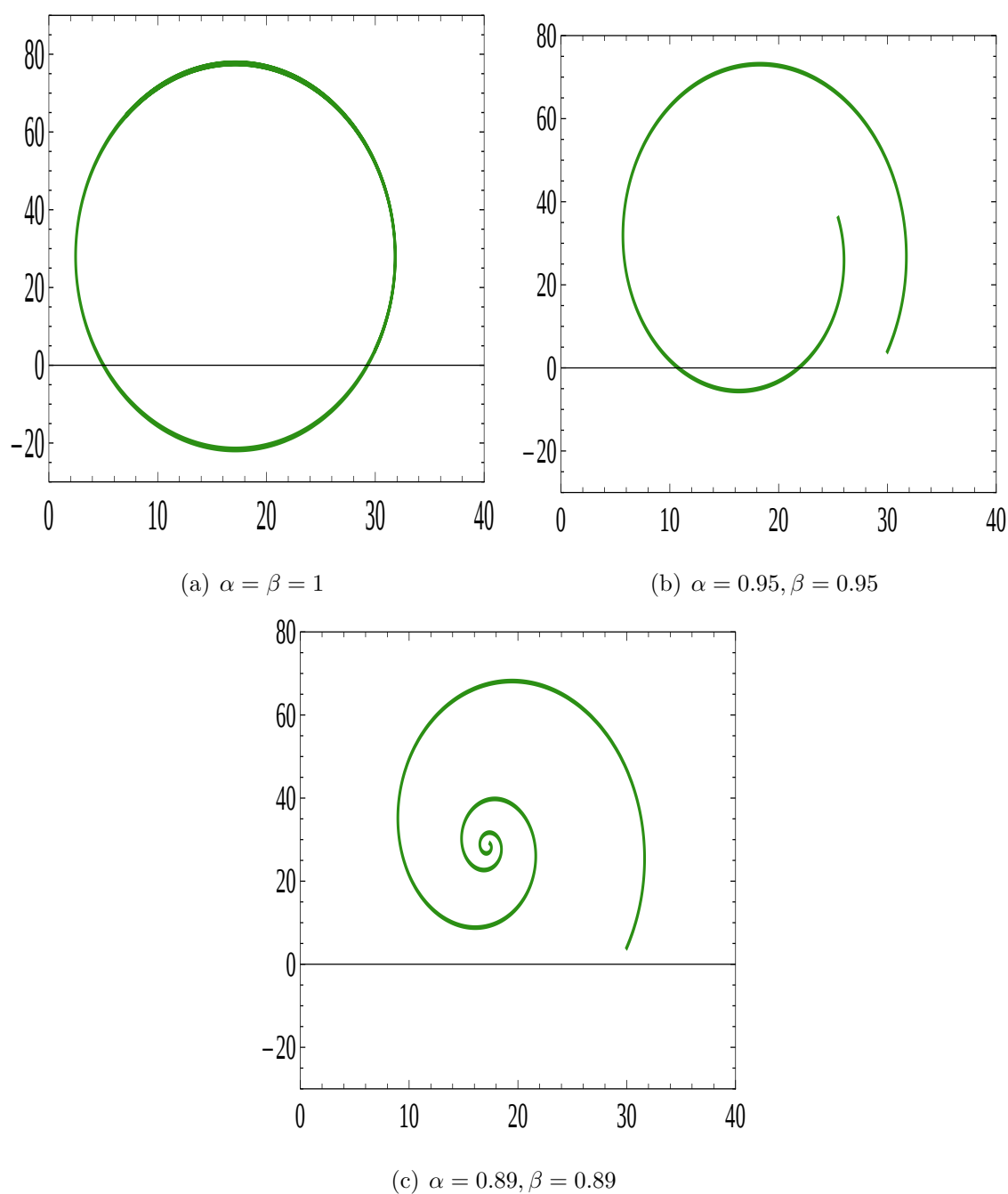


Figura 15 - Gráfico do sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado, para diferentes valores dos parâmetros.

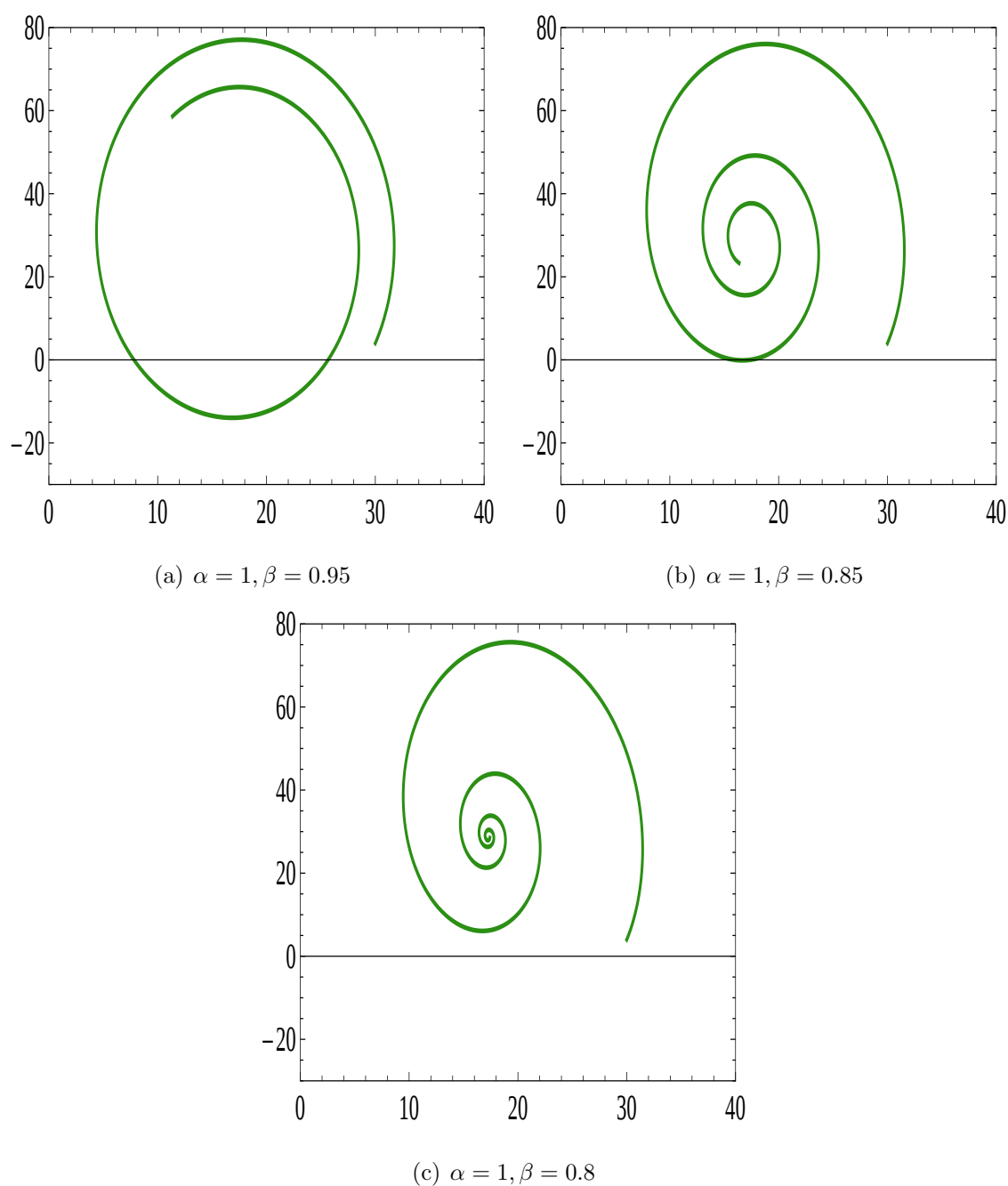


Figura 16 - Gráfico do sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado para valores do parâmetro β e $\alpha = 1$ fixo.

7.2 Modelagem: Broca versus Vespa

Em meados do século XX, as indústrias inventaram os inseticidas para controle de pragas nas lavouras, mas antes eram poucos os insetos que se adaptavam ao inseticidas. Atualmente, em mais de 500 espécies já se encontra resistência ao defensivo a lavoura. Com este avanço os pesquisadores se empenharam em descobrir outras formas de prevenção, onde optaram pela predação às pragas, (Bassanezi, 2010).

O controle de pragas, no Brasil, via insetos se iniciou em 1974. Na cana-de-açúcar inseriram a Vespa ‘*Apanteles flavipes*’ (predador) para combater, por parasitismo, a Broca ‘*Diatraea saccharalis*’ (presa), pois esta era difícil de ser atingida por inseticidas por passar a maior parte de sua existência no colmo da cana, (Bassanezi, 2010).

Dessa forma tem-se que alguns modelos matemáticos podem prever a quantidade de predadores necessários a certa quantidade de pragas, ou até mesmo verificar se tal opção é inútil ou satisfatória, (Bassanezi, 2010).

Bassanezi (2010) optou por analisar o ‘controle biológico da broca da cana-de-açúcar’ com o modelo de Lotka-Volterra, entretanto afirma que tal modelo não descreve de forma satisfatória a realidade. Com isso, vamos mostrar como o sistema de Lotka-Volterra fracionário refina a descrição do sistema clássico de modo a tornar a sua solução mais próxima da realidade, neste particular caso.

7.2.1 Análise no modelo de Lotka-Volterra

Com a finalidade de analisar o controle biológico da praga, Bassanezi (2010) estudou o modelo de Lotka-Volterra e, através de dados experimentais, conseguiu determinar os parâmetros a, b, c e d . Para isso utilizou valores iniciais de cada população sendo $x(0) = 2000$, população de broca, e $y(0) = 5000$, população de vespas.

Os valores encontrados foram condicionados à unidade dias, no período de um ano de colheita da cana-de-açúcar. Com isso, analisando o ciclo de vida de

cada população, descobriram que o coeficiente que representa a taxa de natalidade da broca na ausência dos predadores é $a = 0.02774893$; o coeficiente que representa a taxa de sucesso dos ataques da vespa é $b = 0.00001479$; o coeficiente que representa a taxa de mortalidade de vespa na ausência das brocas é $c = 1.198293$ e o coeficiente que representa a taxa de mortalidade da broca que auxiliaram na ‘produção’ dos predadores é $d = 0.0006894$. Através destes valores, conseguiu-se encontrar o ponto de equilíbrio do sistema $Q(1738, 1876)$, e esboçar o gráfico do sistema não linearizado, ver figura 17.

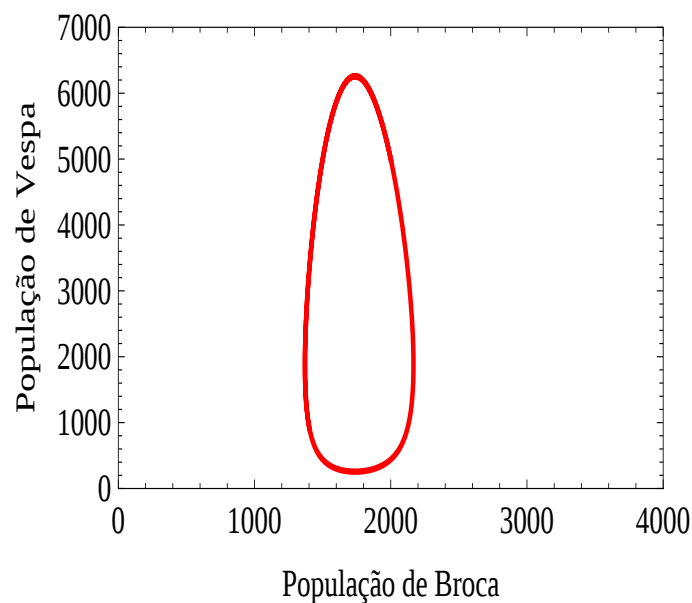


Figura 17 - Gráfico do sistema não-linearizado de Lotka-Volterra

Pode-se perceber que apesar de estar em torno do ponto crítico as populações não estão tendendo a ele, como o esperado. Dessa forma, propomos adaptar o modelo de Lotka-Volterra fracionário e verificar se a solução do sistema linearizado condiz com o esperado.

No cálculo fracionário cada curva é uma combinação dos parâmetros α e β , relativas as derivadas fracionárias de $x(t)$ e $y(t)$. Com isso pode-se verificar, nos gráficos abaixo, que os valores de α e β interferem no quão rápido a curva se aproxima do ponto crítico $Q(1738, 1876)$. Nos gráficos deve-se interpretar que

estando os predadores ausentes, toda vez que a curva toca o eixo x , a população de presas $x(t)$, num determinado tempo, crescerá de forma exponencial; e, se supormos falta de alimento, toda vez que a curva toca o eixo y , ou seja que há ausência de presas, teremos que a população de predadores $y(t)$ decrescerá de forma exponencial num determinado tempo.

Analisando os gráficos, observamos que na figura 18(a) para $\alpha = \beta = 1$, obtemos a solução do sistema linearizado de ordem inteira, ou seja, que a curva é uma elipse centrada no ponto de equilíbrio Q . Quando variamos os dois parâmetros, nas figuras 18(b) e 18(c), percebe-se que aparece uma convergência para o ponto de equilíbrio e que quando se reduz a dimensão do sistema, $D = \alpha + \beta$, há uma aceleração na convergência para o ponto Q . A solução numérica nos conduz a acreditar se a dimensão do sistema for menor que 1.76 tem-se uma vantagem comparando com a solução de ordem inteira, pois observa-se que as populações não se extinguem. De mesma forma, quando analisamos os gráficos 19(a), 19(b) e 19(c), onde variamos apenas o coeficiente beta, percebemos que ao reduzi-lo houve uma convergência para o ponto de equilíbrio e que quando se reduz a dimensão do sistema, $D = \alpha + \beta$, há uma aceleração na convergência para o ponto Q . A solução numérica nos conduz a acreditar se a dimensão do sistema for menor que 1.8 tem-se uma vantagem comparando com a solução de ordem inteira, pois observa-se que as populações não se extinguem, (Camargo, 2009).

Logo, a solução numérica nos conduz a acreditar que se a dimensão do sistema for menor que 1.8, aproximadamente, tem-se uma vantagem comparando com a solução de ordem inteira, pois observa-se que as populações não se extinguem, e que, de fato, mesmo linearizando, as informações que se perdem são recuperadas com a variação da derivada. Assim, podemos concluir que a solução fracionária nos fornece uma descrição do fenômeno melhor que ou igual à de ordem inteira.

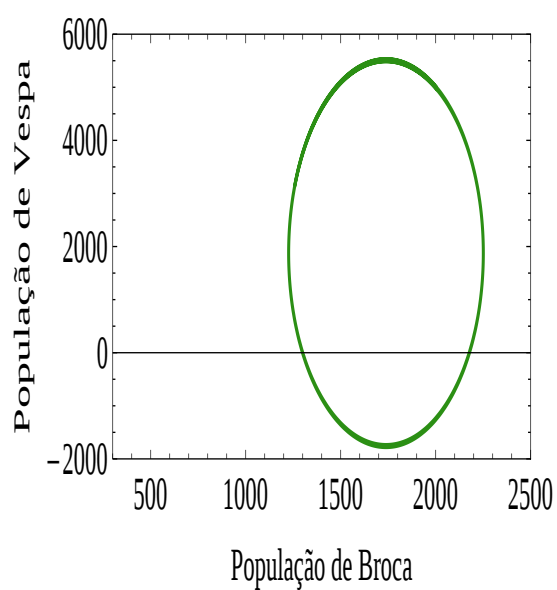
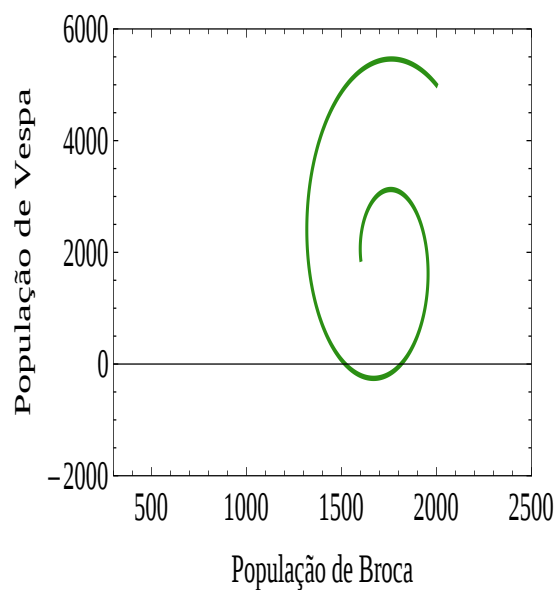
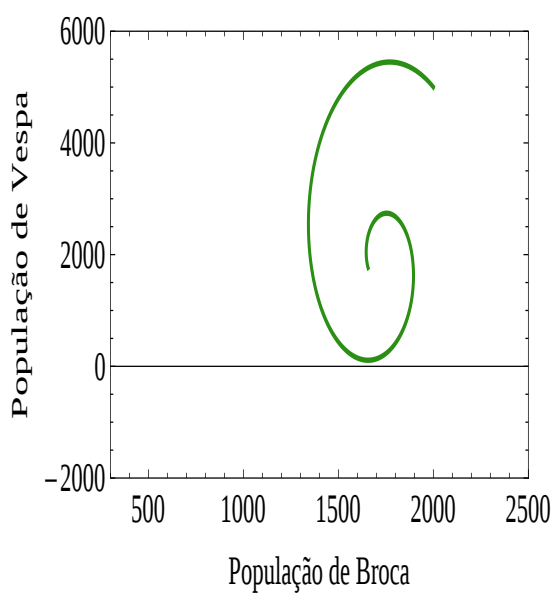
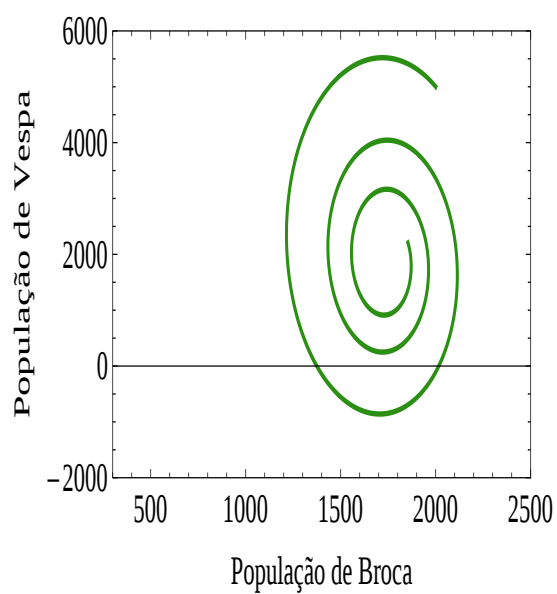
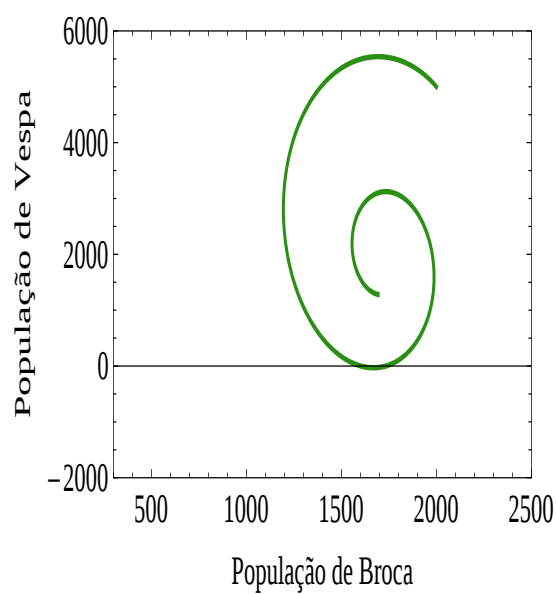
(a) $\alpha = \beta = 1$ (b) $\alpha = 0.9, \beta = 0.9$ (c) $\alpha = 0.87, \beta = 0.87$

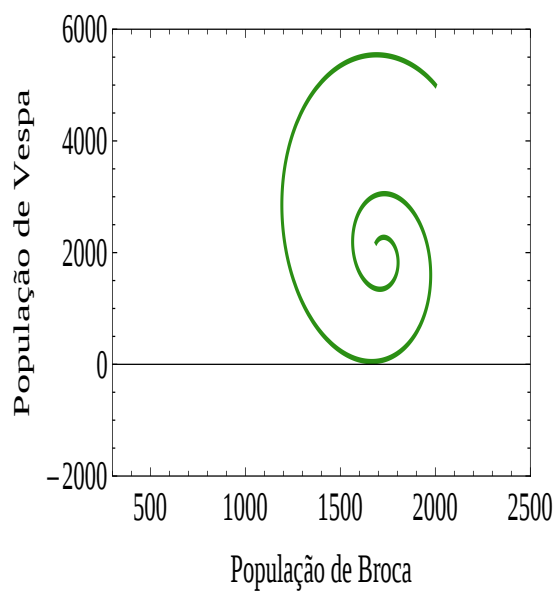
Figura 18 - Gráfico do sistema de Lotka-Volterra fracionário, onde faz-se variar os dois parâmetros.



(a) $\alpha = 1, \beta = 0.9$



(b) $\alpha = 1, \beta = 0.8$



(c) $\alpha = 1, \beta = 0.79$

Figura 19 - Gráfico do sistema de Lotka-Volterra fracionário, onde varia-se apenas o parâmetro β .

8 ANÁLISE DO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA PRÓXIMO AO PONTO DE EQUILÍBRIO

O sistema de Lotka-Volterra é composto por um par de equações diferenciais que descrevem a dinâmica predador-presa, mas como se viu, este modelo apresenta restrições e, com a finalidade de simplificá-las, propôs-se o sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado, que é composto por um sistema de duas equações diferenciais fracionárias, com derivadas de ordem menor ou igual a um.

Para resolver este novo modelo utilizou-se como base o sistema clássico de Lotka-Volterra. Encontram-se os pontos críticos em termos dos parâmetros constantes, depois conduziu-se o sistema para o ponto crítico de maior interesse, $Q(a/b, c/d)$; com isso linearizamos o sistema porque neste caso a interferência dos termos não lineares é pequena, ou seja, o sistema linearizado será similar ao não linearizado. Mas, esta metodologia nos gerou inquietações: *será que a interferência dos termos não lineares era realmente pequena ou apenas em valores iniciais próximos ao ponto crítico?*

Para sanarmos tal questionamento utilizamos o software ‘Mathematica 9.0’ para fazermos uma análise computacional. Os dados utilizados foram do estudo da Broca e da Vespa apresentados na seção 7.2.

Inicialmente substituímos valores iniciais próximos ao ponto crítico, $Q(1738, 1876)$, ou seja, $x(0) = 1738.36$ e $y(0) = 1876.36$. No gráfico 20 substituímos $\alpha = \beta = 1$ e obtivemos um ciclo que é a característica do sistema. Nos gráficos 21(a) e 21(b) variamos os dois parâmetros e nos gráficos 22(a), 22(b), 22(c), mantivemos $\alpha = 1$ e variamos β . Em todos estes gráficos percebemos que o comportamento da curva era similar ao dos gráficos 18(a), 18(b), 18(c), 19(a), 19(a), 19(a), só que em escalas diferentes.

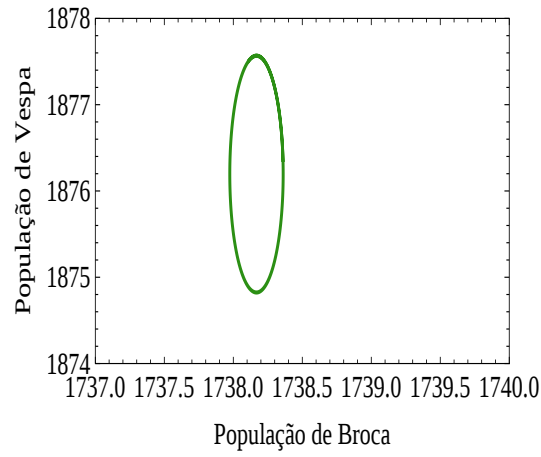


Figura 20 - Gráfico do sistema de Lotka-Volterra construído com $\alpha = \beta = 1$ e valores aproximados do ponto crítico.

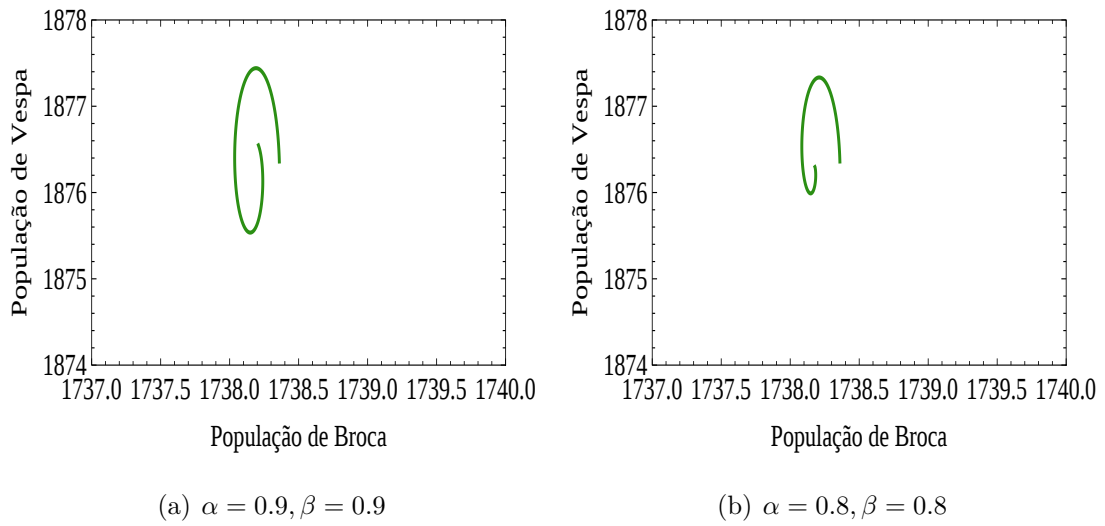


Figura 21 - Gráficos do sistema de Lotka-Volterra construídos com valor próximo do ponto crítico e com variação de α e β

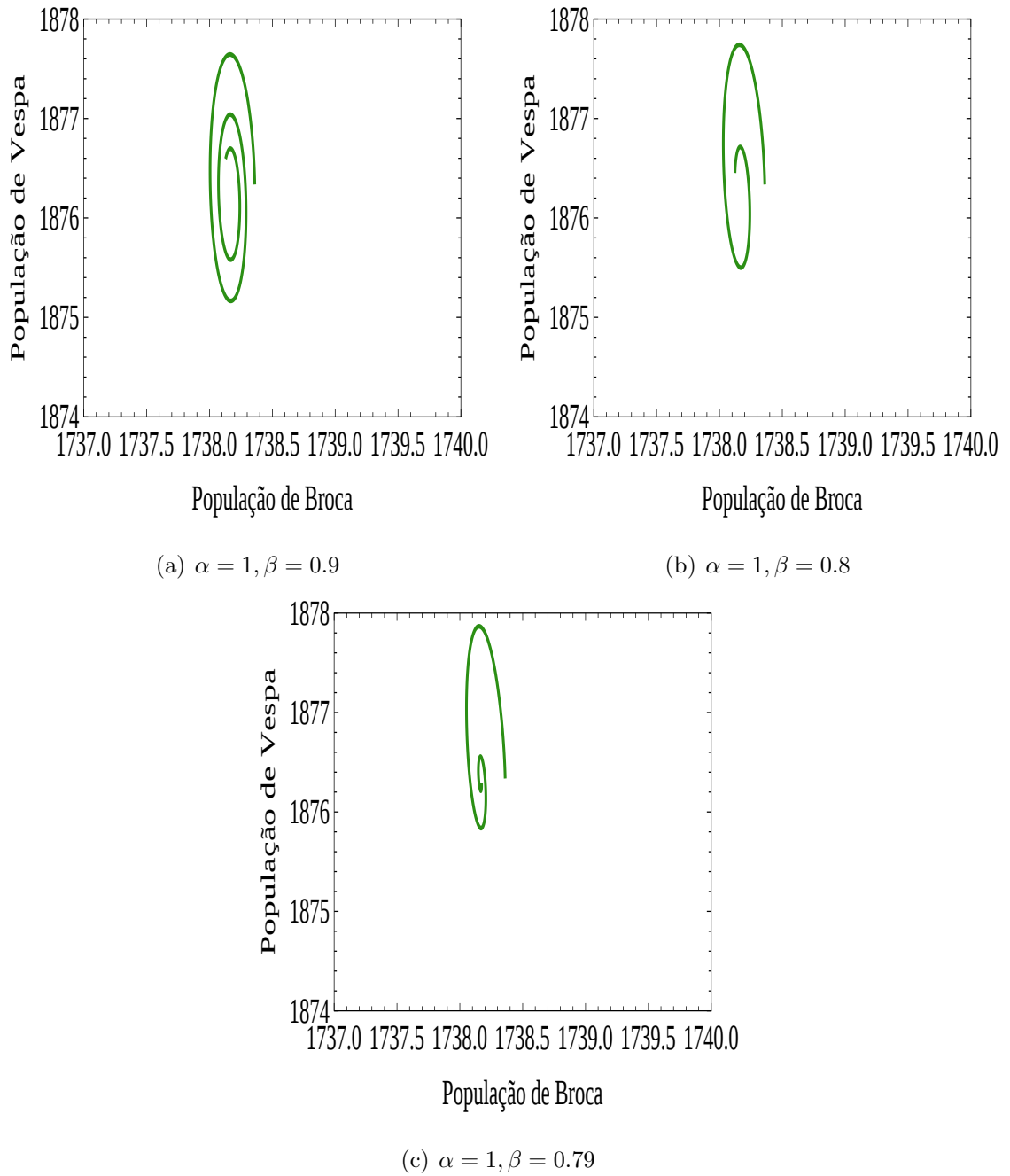


Figura 22 - Gráficos do sistema de Lotka-Volterra construídos com valor próximo do ponto crítico e com variação de β e $\alpha = 1$.

Não satisfeitos, procuramos afastar um pouco os valores iniciais do ponto crítico, $Q(1738, 1876)$, ou seja, $x(0) = 1740$ e $y(0) = 1878$. No gráfico 23

substituímos $\alpha = \beta = 1$ e obtivemos um ciclo que é a característica do sistema. Nos gráficos 24(a), 24(b), variamos os dois parâmetros e nos gráficos 25(a), 25(b), 25(c), mantemos $\alpha = 1$ e variamos β . Em todos estes gráficos percebemos que o comportamento da curva era similar ao dos gráficos 18(a), 18(b), 18(c), 19(a), 19(a), 19(a), só que em escalas diferentes.

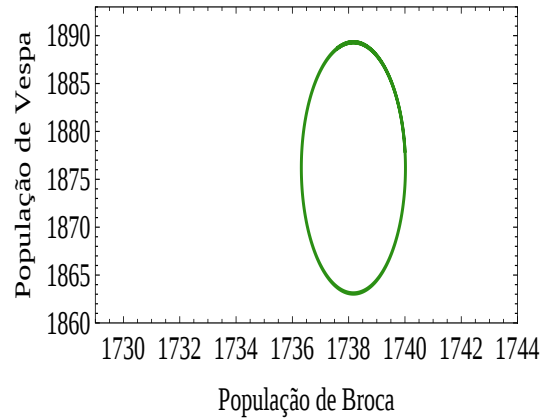


Figura 23 - Gráfico do sistema de Lotka-Volterra construído com $\alpha = \beta = 1$ e valores um pouco mais longe, mas ainda próximo, do ponto crítico.

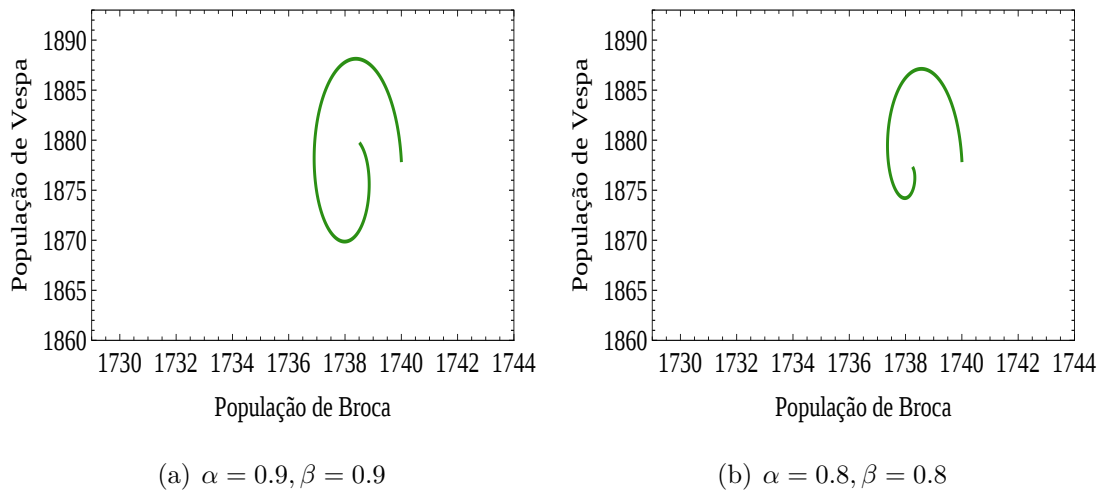


Figura 24 - Gráficos do Sistema de Lotka-Volterra construídos com valor um pouco mais longe, mas ainda próximo, do ponto crítico e com variação de α e β

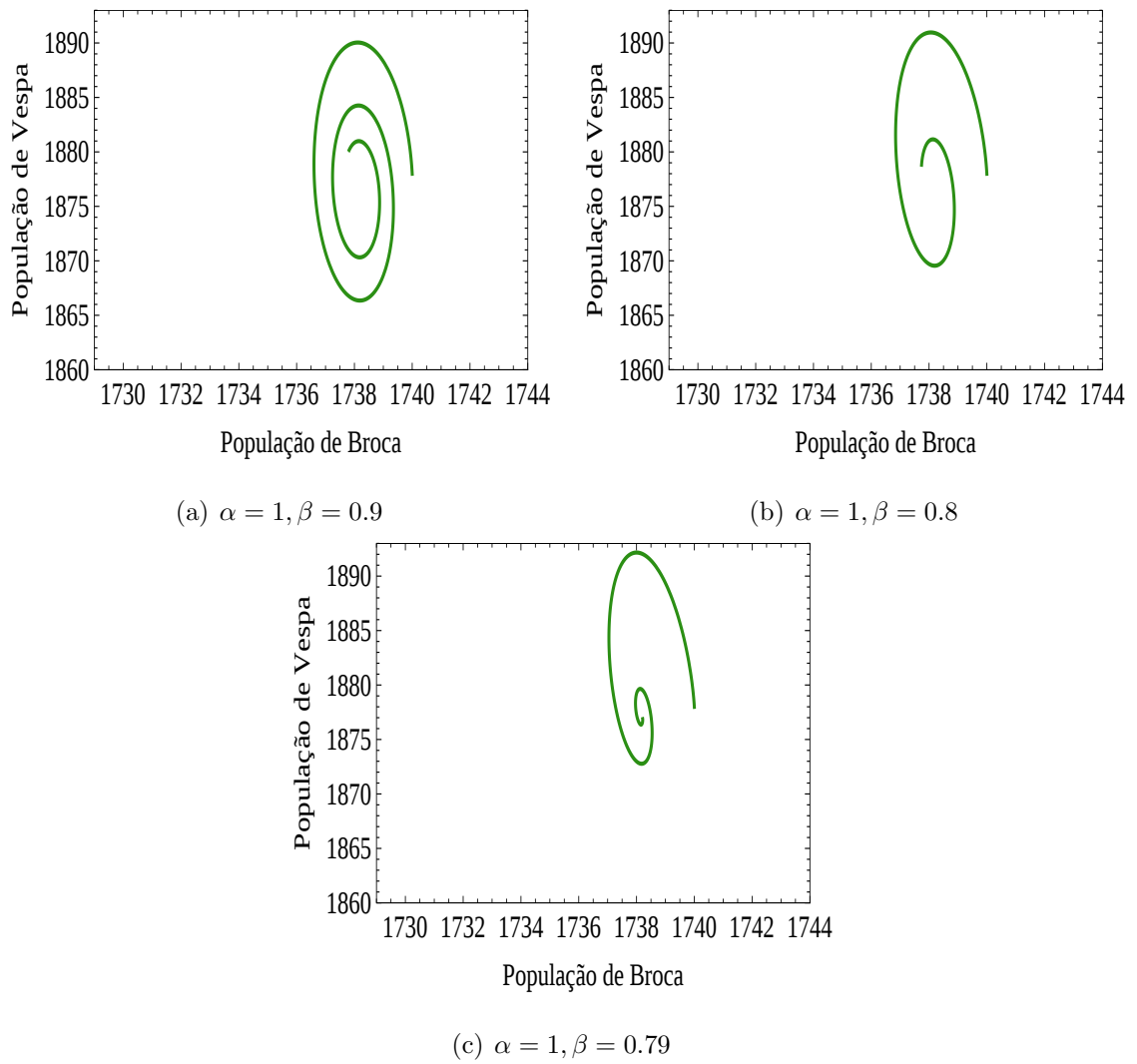


Figura 25 - Gráficos do Sistema de Lotka-Volterra construídos com valor um pouco mais longe, mas ainda próximo, do ponto crítico e com variação de β e $\alpha = 1$.

Contudo, apesar do novo modelo ter seus questionamentos de veracidade, por poder utilizar valores iniciais longe do ponto crítico; pela análise computacional conclui-se que afastar o ponto inicial do ponto crítico ao linearizar o sistema não perde informação, por poder se modificar a ordem das derivadas para valores entre zero e um.

9 CONCLUSÕES

Por aproximadamente três séculos o cálculo fracionário teve enfoque apenas na matemática pura, mas atualmente com a utilização das derivadas fracionárias em equações diferenciais para refinar a descrição de fenômenos naturais, houve grande avanço em suas aplicações.

Dessa forma, neste trabalho, além de termos estudado as origens históricas do cálculo fracionário, as funções especiais, a metodologia das transformadas integrais de Laplace, e suas definições, tivemos como principal objetivo estudar o sistema de Lotka-Volterra de ordem inteira e sua versão fracionária, onde se obteve a solução do sistema linear generalizado e não do sistema generalizado.

Feito isso, optamos por observar as aplicações do sistema fracionário de Lotka-Volterra. Inicialmente, fizemos uma análise geral do modelo onde verificou-se que em alguns casos o sistema de Lotka-Volterra prevê a extinção das espécies (ordem inteira) e que este tipo de problema pode ser contornado com a ordem das derivadas α e β . Depois, utilizando os dados fornecidos por Bassanezi (2010), em que faz uma modelagem, utilizando o sistema de Lotka-Volterra clássico, sobre o controle de pragas na cana-de-açúcar com a Vespa ‘*Apanteles flavipes*’ (predador) e a Broca ‘*Diatraea saccharalis*’ (presa), utilizamos o sistema de Lotka-Volterra fracionário para refinar a descrição do sistema clássico, feito isso, a solução numérica nos conduz a acreditar que se a dimensão do sistema for menor que 1.8, aproximadamente, tem-se uma vantagem comparando com a solução de ordem inteira, pois observa-se que as populações não se extinguem, e que de fato mesmo linearizando as informações que se perdem é recuperada com a variação da derivada. Assim, podemos concluir que a solução fracionária nos fornece uma descrição do fenômeno melhor que ou igual à

de ordem inteira.

Como trabalho futuro consideramos um modelo matemático de câncer com tratamento quimioterápico, em que o crescimento das populações é logístico, (Rodrigues & Mancera, 2011).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DE ARAÚJO CORRÊA, F. J. Por que não existe Prêmio Nobel para a Matemática? **Revista do professor de Matemática**, p.4, 1999.

DE BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas: Editora IMECC, 2010. 344p.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2010. 390p.

CAMARGO, R. F. Cálculo fracionário e aplicações. Campinas, 2009. 141p. Thesis(Ph.D.) - IMECC UNICAMP.

CAMARGO, R. F.; CAPELAS-OLIVEIRA, E. **Introdução ao Cálculo Fracionário (Equações Diferenciais Fracionárias e Aplicações)**. Campinas: Submetido a Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. 195p.

CAPELAS-OLIVEIRA, E. **Funções Especiais com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 288p.

CAPELAS-OLIVEIRA, E.; MARIORINO, J. E. **Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada**. Campinas: Editora da Unicamp, 2003. 240p.

COHEN, J. E. Mathematics Is Biology's Next Microscope, Only Better; Biology Is Mathematics' Next Physics, Only Better. **Plos Biology**, v.doi:10.1371/journal.pbio.0020439, n.-, p.-, 2004.

DA CUNHA, A. G. **Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989. 839p.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996. 121p.

DEBNATH, L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, v.54, p.31, 2003.

DE FIGUEIREDO CAMARGO, R. Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard. Campinas, 2005. 129p. Dissertação (Mestrado) - IMECC UNICAMP.

DE FIGUEIREDO CAMARGO, R.; CAPELAS-OLIVEIRA, E.; GOMES, F. A. M. The Replacement of Lotka-Volterra Model by a Formulation Involving Fractional Derivatives. **R. P.**, v.-, n.10, p.16, 2007.

DE FIGUEIREDO CAMARGO, R.; CAPELAS-OLIVEIRA, E.; JR, J. V. On anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation for a harmonic oscillator. **Journal of Mathematical Physics**, v.50, p.13, 2009a.

DE FIGUEIREDO CAMARGO, R.; CHARNET, R.; CAPELAS-OLIVEIRA, E. On Some Fractional Green's Functions. **Journal of Mathematical Physics**, v.50, n.4, p.12, 2009b.

DE FIGUEIREDO CAMARGO, R.; CHIACCHIO, A. O.; CAPELAS-OLIVEIRA, E. Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation. **Journal of Mathematical Physics**, v.49, p.12, 2008.

DE FIGUEIREDO CAMARGO, R.; CHIACCHIO, A. O.; CHARNET, R.; CAPELAS-OLIVEIRA, E. Solution of the fractional Langevin equation and the Mittag-Leffler functions. **Journal of Mathematical Physics**, v.50, n.6, p.8, 2009c.

FISHER, J. C.; PRY, R. H. A Simple Substitution Model of Technological Change. **Technological Forecasting and Social Change**, v.3, p.75–88, 1971.

GEL'FAND, I. M.; SHILOV, G. E. **Generalized Functions**. New York: Academic Press, 1964.

GRECA, I. M.; DOS SANTOS, F. M. T. Dificuldades da generalização das estratégias de modelação em ciências: o caso da Física e da Química. **Investigações em Ensino de Ciências**, v.10, n.1, p.31–46, 2005.

DE SOUZA DE JESUS, I. M. Sistemas dinâmicos de ordem fraccionária. Vila Real, 2007. 304p. Thesis(Ph.D.) - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

LAUS, L. P. Revisão da Transformada de Laplace. **Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná**, v.-, n.-, p.-, 2005.

LODI, L.; MAYERHOFER, L. C.; JR, S. G. F.; S.CRUZ, F. Nota sobre a ocorrência de foca-caranguejeira. **Biotemas**, v.18, n.1, p.-, 2005.

MAINARDI, F. **Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An introduction to Mathematical Models**. Italy: Imperial College Press, 2010. 368p.

MOSCHEN, I. D. C. Sobre as Funções de Mittag-Leffler e o modelo fracionário de materiais viscoelásticos. Florianópolis, 2006. 130p. Thesis(Ph.D.) - UFSC.

OLIVEIRA, H. S. Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária. Campinas, 2010. 131p. Dissertação (Mestrado) - IMECC UNICAMP.

PEREIRA, R. O crescimento bacteriano. In: DESCONHECIDO, Criatório Pena Preta, 2003. **Criatório Pena Preta**; resumos. desconhecido: Criatório Pena Preta, 2003.

PODLUBNY, I. **Fractional Differential equations**. San Diego: Mathematics in science and engineering, Academic Press, 1999. 341p.

RODRIGUES, D. S.; MANCERA, P. F. A. Modelagem matemática e câncer: um modelo de competição e quimioterapia. **SBMAC - Notas em Matemática Aplicada**, v.58, n.-, p.74, 2011.

RODRIGUES-JR, A. J.; DE OLIVEIRA, E. C. **Funções Analíticas com Aplicações**. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 229p.

SOUBHIA, A. L.; DE FIGUEIREDO CAMARGO, R.; DE OLIVEIRA, E. C.; JR, J. V. Theorem for Series in Thee-Parameter Mittag-Leffler Function. **Fractional Calculus and Applied Analysis**, v.13, n.1, 2010.

STEWART, J. **Cálculo 2**. São Paulo: Cengage Learning, 2009. 652p.

VARALTA, N.; VELLASCO, A. G.; DE FIGUEIREDO CAMARGO, R.; SANTOS, F. L. Um prelúdio do Cálculo Fracionário Aplicado a Dinâmica Tumoral.. In: -, -, SBMAC, 2013. **Anais do CMAC Sudeste 2013**; resumos. Bauru/São Paulo: -, 2013. 6.

VARALTA, N.; VELLASCO-GOMES, A.; DE FIGUEIREDO CAMARGO, R. A prelude to the Fractional Calculus applied to Tumor Dynamic. **Aceito para publicação na TEMA**, 2014.

VARELA, H.; TORRESI, R. M.; GONZALEZ, E. R. Aspectos Relacionados À Utilização Da Equação Logística Quadrática Em Processos Eletroquímicos. **Quim. Nova**, v.25, n.1, p.99–106, 2002.

YEARGERS, E. W.; SHONKWILER, R. W.; HEROD, J. V. **An introduction to the mathematics of the biology with computer algebra models**. Birkhauser: Springer international, 1996. 417p.