

SOBRE GRAFOS

PERFEITOS

Milkes Yone Alvarenga

UNESP



Sobre Grafos Perfeitos

Milkes Yone Alvarenga

Orientador Prof. Dr. Walter Júlio Cortez Morales

Dissertação apresentada ao DCCE/IBILCE/UNESP
como parte dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Ciências Matemáticas - Área de
Concentração Matemática Aplicada e Computacional.



693/95

São José do Rio Preto - 1994



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Walter Silva Carlos Morales, pelo incentivo por esta análise que se
pretava, com esta temática.

Ao Prof. Dr. Arando Espado Filho e a Prof. Dra. Yosuke Wakabayashi, por
quero por me encorajarem.

Ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto e a Prof. Dra. Sandra Maria
Ventarelli Ferreira Dias, pela atenção e atenção desta análise sempre que dela
precisava.

Aos funcionários da Região de São Cristóvão, pela atenção e incentivo aos estudos.

A Marlene Delmon, Eliane Maria Dias, Sônia Helena, Eli Orsini, Eliza Pereira
Domingos, Lucio de Souza Nascimento e Ana Lucia Ferreira pelo interesse com que
acompanharam a elaboração deste trabalho.

Aos colegas e amigos do Departamento de Ciência de Computação e Estatística do
UNESP - UNESP e do Departamento de Ciência da Computação do UNESP - UNESP.

A Elisabete Viana Oliveira, por fazer organização e elaboração.

Ao meu irmão Edmar

Aos meus pais pelo estímulo e por tudo que fizeram por mim.

A todos que direta e indiretamente ajudaram na elaboração deste trabalho.

Obrigada por tudo!

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. **Walter Júlio Cortez Morales**, pelo incentivo e por todo auxílio que me prestou com sua orientação.

Ao Prof. Dr. **Antonio Espada Filho** e à Profa. Dra. **Yoshiko Wakabayashi**, por tudo que me ensinaram.

Ao Prof. Dr. **Manoel Ferreira Borges Neto** e à Profa. Dra. **Sandra Maria Venturelli Ferreira Dias**, pela amizade e atenção dispensada sempre que deles precisei.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação pelo apoio nos momentos necessários.

À **Míriam Delmont, Eliane Maria Dias, Sofhia Helena, Kell Otello, Elisa Pereira Domeni, Ianne de Souza Nascimento e Ana Lucia Ferreira** pelo interesse com que acompanharam a elaboração deste trabalho.

Aos colegas e amigos do Departamento de Ciência da Computação e Estatística do IBILCE - UNESP e do Departamento de Ciência da Computação do IME - USP.

À **Elisabete Vasco Oliveira** por haver organizado a bibliografia.

Aos meus pais pelo carinho e por tudo que fizeram por mim.

A todos que direta e indiretamente ajudaram na elaboração deste trabalho.

Obrigada por tudo!



Resumo

Neste trabalho nós apresentamos diversos resultados conhecidos sobre grafos perfeitos. Provamos alguns resultados estruturais e apresentamos várias classes conhecidas destes grafos. Estudamos algumas propriedades dos grafos minimalmente imperfeitos bem como dos grafos particionáveis. Exibimos várias formulações equivalentes da conjectura forte dos grafos perfeitos.

Nós descrevemos algumas condições suficientes para um grafo ser perfeito e apresentamos resultados sobre a classe dos grafos q -perfeitos, incluindo uma caracterização desta classe.

Apresentamos também uma aplicação de grafos perfeitos na Teoria de Códigos.

Abstract

In this work we present a number of well-known results on perfect graphs. We prove some structural results and present several known classes of these graphs. We study some properties of minimal imperfect graphs as well as of partitionable graphs. We also show several equivalent formulations of the strong perfect graph conjecture.

We describe some sufficient conditions for a graph to be perfect and we present results on the class of q -perfect graphs, including a characterization of this class.

We also show an application of perfect graphs in Coding Theory.

Índice

Introdução	I
1 Conceitos Básicos e Notações	
1.1 Grafos	1
1.2 Hipergrafos	6
2 Grafos Perfeitos	
2.1 Introdução	8
2.2 O Teorema dos Grafos Perfeitos	9
2.3 Algumas Classes de Grafos Perfeitos	12
2.4 Grafos Minimalmente Imperfeitos e Particionáveis	23
2.5 A Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos.	34
3 Condições Suficientes para um Grafo ser Perfeito	
3.1 Preliminares	38
3.2 As Condições	40
4 Uma Variação de Grafos Perfeitos	
4.1 Grafos q-Perfeitos.	44
4.2 Grafos 2-Perfeitos.	46
4.3 Uma Caracterização de Grafos q-Perfeitos.	50

5 Uma Aplicação de Grafos Perfeitos na Teoria de Códigos

5.1 O Problema de Shannon	52
5.2 A Aplicação.	54

Bibliografia

56

Um grafo é perfeito se todo subgrafo induzido admite uma coloração com uma única cor e máxima cardinalidade.

No início dos anos 60, Claude Berge [Be 61], [Be 62] introduziu o conceito de grafo perfeito. Ele propôs duas conjecturas:

* *Conjectura Fraca dos Grafos Perfeitos* - Um grafo é perfeito se e somente se o seu complementar é perfeito.

* *Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos* - Um grafo é perfeito se e somente se ele não contém um ciclo ímpar sem cordas de comprimento pelo menos cinco ou o complementar de um tal ciclo.

A primeira conjectura foi provada em 1972 por Lovász [Lo 72a] e tornou-se conhecida como o Teorema dos Grafos Perfeitos. A Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos ainda está em aberto e a questão de sua validade quase que se torna secundária quando comparada com o importante volume de pesquisas que ela tem estimulado ao longo dos anos.

Este trabalho tem por objetivo apresentar alguns dos principais resultados que se tem obtido com essas pesquisas dando assim uma visão global daquilo que existe sobre o assunto. Para isso, começaremos por introduzir no Capítulo 1 os conceitos básicos e convencionar notações que estaremos utilizando.

No Capítulo 2 comentaremos resultados gerais sobre a estrutura dos grafos perfeitos. Na seção 2.2 examinaremos a prova de Lovász para a Conjectura Fraca dos Grafos Perfeitos e na seção 2.3 veremos que os grafos triangularizados, os grafos intervalo, os grafos bipartidos, os grafos unimodulares e outros mais são grafos perfeitos.

Um grafo é dito ser *minimalmente imperfeito* se ele não é perfeito mas todos seus subgrafos induzidos próprios são perfeitos. O primeiro passo para caracterizar grafos minimalmente imperfeitos foi também dado por Lovász [Lo 72b]: todo grafo minimalmente imperfeito com n vértices satisfaz $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Introdução

Um grafo é perfeito se todo subgrafo induzido admite uma coloração e uma clique com a mesma cardinalidade.

No início dos anos 60, Claude Berge [Be 61], [Be 62] introduziu o conceito de grafo perfeito. Ele propôs duas conjecturas:

* **Conjectura Fraca dos Grafos Perfeitos** - *Um grafo é perfeito se e somente se o seu complementar é perfeito.*

* **Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos** - *Um grafo é perfeito se e somente se ele não contém um ciclo ímpar sem cordas de comprimento pelo menos cinco ou o complementar de um tal ciclo.*

A primeira conjectura foi provada em 1972 por Lovász [Lo 72a] e tornou-se conhecida como o Teorema dos Grafos Perfeitos. A Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos ainda está em aberto e a questão de sua validade quase que se torna secundária quando comparada com o importante volume de pesquisas que ela tem estimulado ao longo dos anos.

Este trabalho tem por objetivo apresentar alguns dos principais resultados que se tem obtido com estas pesquisas dando assim uma visão global daquilo que existe sobre o assunto. Para isto, começaremos por introduzir no Capítulo 1 os conceitos básicos e convencionar notações que estaremos utilizando.

No Capítulo 2 comentaremos resultados gerais sobre a estrutura dos grafos perfeitos. Na seção 2.2 examinaremos a prova de Lovász para a Conjectura Fraca dos Grafos Perfeitos e na seção 2.3 veremos que os grafos triangularizados, os grafos intervalo, os grafos bipartidos, os grafos unimodulares e outros mais são grafos perfeitos.

Um grafo é dito ser minimalmente imperfeito se ele não é perfeito mas todos seus subgrafos induzidos próprios são perfeitos. O primeiro passo para caracterizar grafos minimalmente imperfeitos foi também dado por Lovász [Lo 72b]: todo grafo minimalmente imperfeito com n vértices satisfaz $n = \alpha\omega + 1$.



Um outro resultado de Padberg [Pa 74] afirma que todo grafo minimalmente imperfeito é um grafo particionável. Portanto, caracterizar grafos particionáveis pode ajudar caracterizar grafos minimalmente imperfeitos. Na seção 2.4 estaremos apresentando algumas propriedades dos grafos minimalmente imperfeitos e dos grafos particionáveis.

Comentaremos na seção 2.5 algumas das diferentes formas equivalentes que a Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos pode ser enunciada.

No Capítulo 3 apresentaremos algumas condições suficientes para que um grafo seja perfeito. Veremos que uma delas, a condição dada por Meyniel [Me 84], generaliza outras condições dadas por Gallai, Surányi, Seinsche e também uma condição de Olaru e Sachs.

Alguns grafos admitem uma coloração parcial com q cores e uma partição de seus conjuntos de vértices em cliques tal que cada clique da partição contém o maior número possível de cores diferentes. Se um grafo e todos seus subgrafos induzidos possuem tal propriedade, este grafo é dito ser q -perfeito. Estaremos tratando destes grafos no Capítulo 4. Na seção 4.2 examinaremos o caso em que $q = 2$, isto é, os grafos 2-perfeitos. Apresentaremos uma caracterização dos grafos q -perfeitos na seção 4.3.

Em 1956 Claude Shannon publicou um artigo [Sh 56] descrevendo o problema de um transmissor que emite sinais que são captados por um receptor final. Ocorre que alguns sinais distintos podem ter uma mesma interpretação pelo receptor, o que gera confusão. Shannon se preocupou em conseguir um código que fosse o mais rico possível mas que não houvesse perigo de confusão.

Foi o problema de Shannon que motivou Berge a propor as duas conjecturas que mencionamos anteriormente. No Capítulo 5 descreveremos este problema e veremos que o conceito de grafo perfeito pode ser aplicado ao mesmo.



Capítulo 1

Conceitos Básicos e Notações

1.1 Grafos

Seja V um conjunto finito e $V^{(2)}$ o conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V .

Ao par ordenado (V, E) formado por um conjunto finito V e um subconjunto E de $V^{(2)}$ chamamos *grafo*. Os elementos do conjunto V são denominados *vértices* do grafo e os elementos do conjunto E , *arestas* do grafo.

Se G é um grafo, denotamos por $V(G)$ seu conjunto de vértices e por $E(G)$ seu conjunto de arestas.

A *ordem* de um grafo G é a cardinalidade de seu conjunto de vértices. Os grafos de ordem 0 são chamados *nulos* e os de ordem 1 são chamados *triviais*.

Os grafos recebem este nome pelo fato de que podem ser representados graficamente. Representamos vértices distintos por pontos distintos e arestas $\{x, y\}$ por linhas ligando os pontos correspondentes aos vértices x e y .

A Figura 1 representa um grafo G , onde:

$$V(G) = \{x, y, c, d, p\} \text{ e}$$

$$E(G) = \{\{x, y\}, \{x, p\}, \{y, p\}, \{d, c\}, \{p, d\}\}.$$

G:

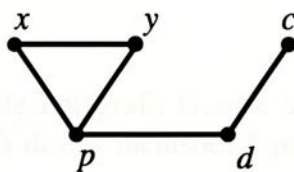


Figura 1

Dada uma aresta $\beta = \{x, y\} \in E(G)$, os vértices x e y são os *extremos* de β . Dizemos ainda que a aresta β é incidente a x e y .

Dois vértices são ditos *adjacentes* ou *vizinhos* se e somente se são extremos de uma mesma aresta de G .

O conjunto de vértices adjacentes a um dado vértice x de G é chamado *vizinhança* de x em G e será denotado por $N_G(x)$. O conjunto de vértices não adjacentes a x será denotado por $\bar{N}_G(x)$.

Duas arestas são *adjacentes* se e somente se possuem um extremo em comum.

Uma aresta $\beta = \{x, y\}$ de um grafo G é *deficiente* se x e y não tem nenhum vértice adjacente em comum.

Um *grafo orientado* $\vec{G} = (V, \vec{E})$, consiste de um grafo com uma orientação no seu conjunto de arestas, isto é, cada aresta de $\vec{E}$ é um par ordenado de vértices distintos de V .

Um *grafo completo* é um grafo em que quaisquer dois vértices são adjacentes. Será denotado por K_n o grafo completo de ordem n .

O *grafo complementar* $\bar{G}$ de um grafo G é o grafo tendo o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em $\bar{G}$ se e somente se eles não são adjacentes em G .

O *grafo de linha* $L(G)$ de um grafo G é definido como o grafo cujos vértices são as arestas de G sendo que dois vértices $\alpha, \beta \in E(G)$ são adjacentes se e somente se α e β são adjacentes em G .

Um *grafo bipartido* é um grafo em que o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y , tal que cada aresta tem um extremo em X e o outro extremo em Y ; a partição (X, Y) é uma *bipartição* do grafo.

Um *grafo bipartido completo* é um grafo bipartido com bipartição (X, Y) em que cada vértice de X é adjacente a todo vértice de Y . Neste caso, se $|X| = m$ e $|Y| = n$, o grafo será denotado por $K_{m,n}$.

Sejam G e H grafos. Diz-se que G e H são *isomorfos* se e somente se existe uma bijeção $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $\{a, b\} \in E(G)$ se e somente se $\{\phi(a), \phi(b)\} \in E(H)$.

Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se e somente se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se pelo menos uma destas inclusões é própria, H é *subgrafo próprio* de G .



Seja $A \subseteq V(G)$. O subgrafo de G que tem A por conjunto de vértices e cujas arestas são arestas de G com ambos os extremos em A , é chamado de *subgrafo de G induzido por A* e será denotado por $G[A]$.

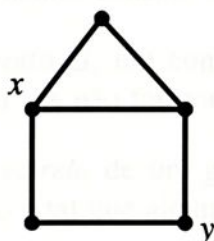
A remoção de um vértice u do grafo G resulta no subgrafo $G[V(G) - \{u\}]$ que será denotado simplesmente por $G - u$.

Se $S \subseteq V(G)$, o subgrafo $G[V(G) - S]$ será denotado por $G - S$.

A adição de um vértice u ao grafo G resulta no grafo $G + u$ cujo conjunto de vértices é $V(G) \cup \{u\}$.

Dados dois vértices x e y não adjacentes em um grafo G , o grafo G' é dito ser obtido de G por *contração* de x e y se estes vértices são identificados.

G :



G' :

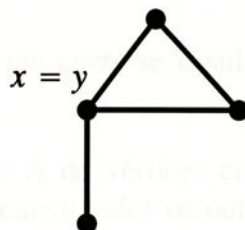


Figura 2: O grafo G' obtido de G por contração de x e y .

Seja C uma coleção de conjuntos e X um elemento de C . Diz-se que X é *máximo* em C se nenhum elemento de C possui cardinalidade maior que a de X . O conjunto X é *maximal* em C se não for subconjunto próprio de algum elemento de C . Os conceitos de *mínimo* e *minimal* são definidos analogamente.

Uma *cadeia* de comprimento k em um grafo G é uma sequência de arestas $(u_1, u_2, \dots, u_k)$, em que cada aresta u_r tem um vértice em comum com a aresta anterior u_{r-1} , e o outro vértice em comum com a aresta que a sucede u_{r+1} .

Se a cadeia μ passar pelos vértices $x_1, x_2, \dots, x_p$, será usada a notação $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_p]$ ou simplesmente $\mu[x_1, x_p]$.

Uma cadeia é *simple*s se suas arestas forem todas distintas e *elementar* se ela não passar mais que uma vez por um mesmo vértice.

Se não existe nenhuma aresta ligando dois vértices não consecutivos de uma cadeia, esta cadeia é *sem cordas*.

Se o número de arestas em uma cadeia μ for ímpar (respectivamente par), diz-se que μ é ímpar (respectivamente par).

Se uma cadeia $\mu = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ é tal que $k \geq 3$, $x_0 = x_k$ e os vértices x_i , $0 < i < k$, são todos distintos um do outro e de x_0 então μ é um *ciclo*.

Uma *corda* em um ciclo é uma aresta cujos extremos são vértices não consecutivos no ciclo. Diz-se ainda que as cordas $\{x, y\}$ e $\{z, t\}$ *se cruzam* se os vértices x, z, y, t são encontrados nesta ordem no ciclo.

Denotaremos por C_n o ciclo sem cordas de comprimento n .

Um grafo é *conexo* se e somente se para quaisquer dois vértices distintos existir uma cadeia que os liga; caso contrário, ele é dito ser *desconexo*. Um subgrafo conexo maximal é uma *componente conexa* do grafo.

Um *vértice de corte* é um vértice tal que sua remoção do grafo aumenta o número de componentes conexas do mesmo.

Para um grafo G , um conjunto A de vértices é um *corte* se o subgrafo de G induzido por $V(G) - A$ não for conexo.

Um *corte estrela* de um grafo G é um conjunto A de vértices cuja remoção torna G desconexo e tal que algum vértice em A é adjacente a todos os outros vértices de A .

Um conjunto A de vértices em um grafo G que induz um subgrafo $G[A]$ que é conexo, não possui vértices de corte e maximal com respeito a esta propriedade é dito ser um *bloco*.

Seja G um grafo. Um subconjunto $A \subseteq V(G)$ é uma *clique* se e somente se A induz um subgrafo completo de G .

Uma *n-clique* de G é uma clique de cardinalidade n .

Uma *cobertura por cliques* de cardinalidade k é uma partição dos vértices $V(G) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ tal que cada A_i é uma clique.

Um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto estável* do grafo G se e somente se quaisquer dois vértices de S não são adjacentes.

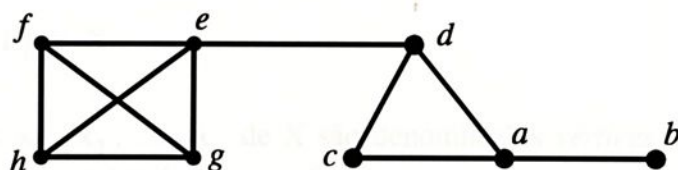
Uma *coloração* de um grafo G é uma partição do conjunto de vértices $V(G) = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_q$ tal que cada S_i é um conjunto estável e os elementos de S_i são "coloridos" com a cor i .

Uma *q-coloração* de G é uma coloração que utiliza q cores e, neste caso, G é dito ser *q-colorível*.



A Figura 3 ilustra os conceitos de clique, cobertura por cliques, conjunto estável e q-coloração.

G:



Com relação ao grafo G:

$K_1 = \{e, f, g, h\}$, $K_2 = \{a, c, d\}$ e $K_3 = \{b\}$ são cliques;

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ é uma cobertura por cliques;

$S_1 = \{b, d, f\}$ e $S_2 = \{a, h\}$ são conjuntos estáveis;

$C = \{b, e\} \cup \{a, h\} \cup \{c, f\} \cup \{d, g\}$ é uma 4-coloração.

Figura 3

Para um grafo G, a seguinte notação será usada:

Denotaremos por $\omega(G)$ a cardinalidade de uma maior clique.

Denotaremos por $\theta(G)$ a cardinalidade de uma menor cobertura por cliques.

Denotaremos por $\alpha(G)$ a cardinalidade de um maior conjunto estável.

Denotaremos por $\chi(G)$ o menor q possível para que exista uma q -coloração.

Como a intersecção de uma clique e um conjunto estável pode ser no máximo um vértice, as desigualdades $\omega(G) \leq \chi(G)$ e $\alpha(G) \leq \theta(G)$ são sempre satisfeitas.

Observamos também que, por definição, obtém-se as igualdades $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ e $\chi(G) = \theta(\overline{G})$.

1.2 Hipergrafos

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto finito. Um *hipergrafo* sobre X é uma família $H = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ de subconjuntos de X tal que

$$(i) \quad E_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(ii) \quad \bigcup_{i=1}^m E_i = X.$$

Os elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de X são denominados *vértices*, e os conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_m$ são as *arestas* do hipergrafo.

A *ordem* de um hipergrafo H , denotada por $n(H)$, é o número de seus vértices. O número de arestas será denotado por $m(H)$.

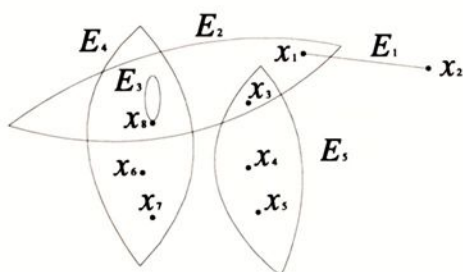
Um *hipergrafo simples* é um hipergrafo $H = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ tal que $E_i \subset E_j \Rightarrow i = j$.

Claramente, um grafo conexo é um hipergrafo simples em que cada aresta possui cardinalidade ≤ 2 .

Um hipergrafo H pode ser representado por um conjunto de pontos correspondendo seus vértices. A aresta E_i é representada por um laço se $|E_i| = 1$, por uma linha ligando os dois elementos se $|E_i| = 2$, e por uma curva fechada incluindo os elementos se $|E_i| \geq 3$.

Um hipergrafo pode ser definido por sua matriz de incidência $A((a_j^i))$, cujas colunas representam as arestas $E_1, E_2, \dots, E_m$ e as linhas representam os vértices $x_1, x_2, \dots, x_n$, onde cada $a_j^i = 0$ se $x_i \notin E_j$, $a_j^i = 1$ se $x_i \in E_j$.

H:



	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
x_1	1	1	0	0	0
x_2	1	0	0	0	0
x_3	0	1	0	0	1
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	0	0	1
x_6	0	0	0	1	0
x_7	0	0	0	1	0
x_8	0	1	1	1	0

Figura 4: Representação de um hipergrafo H e sua matriz de incidência.

Para um conjunto $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$ a família

$$H' = (E_j / j \in J)$$

é denominada *hipergrafo parcial* gerado pelo conjunto J .

Seja $H = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ um hipergrafo sobre um conjunto X . Um conjunto $T \subset X$ é um *transversal* de H se ele intercepta todas arestas de H , isto é:

$$T \cap E_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

2.1 Introdução

Capítulo 2

Grafos Perfeitos

2.1 Introdução

Se G é um grafo que satisfaz as seguintes propriedades

$$(P_1) \quad \chi(G[A]) = \omega(G[A]) \quad (\text{para todo } A \subseteq V(G))$$

e

$$(P_2) \quad \alpha(G[A]) = \theta(G[A]) \quad (\text{para todo } A \subseteq V(G)),$$

ele é dito ser um *grafo perfeito*. Caso contrário, o grafo G é dito ser um *grafo imperfeito*.

Claramente, um grafo G satisfaz (P_1) se e somente se seu complementar $\overline{G}$ satisfaz (P_2) .

Berge chamou de χ -perfeitos os grafos que satisfazem a propriedade (P_1) e α -perfeitos os que satisfazem (P_2) .

A equivalência das propriedades (P_1) e (P_2) foi conjecturada por Berge [Be 61], cultivada por Fulkerson [Ful 69, Ful 71, Ful 72] e finalmente provada por Lovász [Lo 72a]. Este resultado tornou-se conhecido como o Teorema dos Grafos Perfeitos, que será provado na seção 2.2 juntamente com uma terceira condição de equivalência, também de Lovász [Lo 72b],

$$(P_3) \quad \omega(G[A]) \alpha(G[A]) \geq |A| \quad (\text{para todo } A \subseteq V(G)).$$

Nas seções subsequentes será suficiente mostrar que um grafo satisfaz qualquer (P_i) para concluir que ele é perfeito, e um grafo perfeito irá satisfazer todas estas três propriedades.

Classes conhecidas de grafos perfeitos serão apresentadas na seção 2.3.

Dizemos que um grafo é *minimalmente imperfeito* se ele não é perfeito mas todos seus subgrafos induzidos próprios são perfeitos. Na seção 2.4 nós estaremos tratando destes grafos e também apresentaremos os grafos particionáveis.

Terminaremos este capítulo falando na seção 2.5 da Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos.

2.2 O Teorema dos Grafos Perfeitos

Nós mostraremos nesta seção a equivalência das propriedades (P_1) - (P_3) . Para isto, provaremos primeiro dois lemas.

Lema 2.2.1 *Seja G um grafo que satisfaz (P_2) : Se $x \in V(G)$, seja H o grafo obtido de G por se adicionar um novo vértice x' ligando-o por uma aresta a cada vértice adjacente a x . Então H também satisfaz (P_2) .*

Prova: É suficiente mostrar que $\alpha(H) = \theta(H)$. Seja $\mathcal{K}$ uma cobertura por cliques de G em $\theta(G)$ cliques, e K_x a clique de $\mathcal{K}$ que contém x . Se existe em G um conjunto estável máximo que contém x , então

$$\alpha(H) = \alpha(G) + 1.$$

Como $\mathcal{K} \cup \{x'\}$ é uma cobertura por cliques de H , segue que

$$\theta(H) = \alpha(G) + 1 = \alpha(H).$$

Se nenhum conjunto estável máximo em G contém x , então

$$\alpha(H) = \alpha(G).$$

Como $D = K_x - \{x\}$ intercepta todos os conjuntos estáveis máximos de G ,

$$\alpha(G - D) = \alpha(G) - 1.$$

Portanto,

$$\theta(G - D) = \alpha(G) - 1 = \alpha(H) - 1.$$

Assim, nós obtemos uma cobertura por cliques de H com $\alpha(H)$ cliques por se tomar $D \cup \{x'\}$ e as $\alpha(H) - 1$ cliques da cobertura por cliques de $G - D$. Portanto,

$$\alpha(H) = \theta(H). \quad \blacksquare$$

Lema 2.2.2 *Seja G um grafo em que todos subgrafos induzidos satisfazem (P_2) , e seja H obtido de G pela substituição de cada $x_i \in V(G)$ por um conjunto de vértices $X_i = \{y_i^1, y_i^2, \dots\}$ e tal que y_i^s é ligado por uma aresta a y_j^t se e somente se x_i e x_j são adjacentes em G . Se G satisfaz (P_3) , então H satisfaz (P_3) .*

Prova: Suponhamos que H não satisfaz (P_3) , e escolhamos H como tendo o menor número de vértices possível. Mostraremos que isto levará à uma contradição.

Claramente, $\max_i |X_i| \neq 1$, e nós podemos assumir que $|X_1| = h \geq 2$. Seja $Y = \cup X_i$. Então,

$$\omega(H[Y - X_1]) \leq \omega(H),$$

$$\alpha(H[Y - X_1]) \leq \alpha(H).$$

Seja $y_1 \in X_1$. Pela minimalidade de H , o subgrafo $H([Y - y_1])$ satisfaz (P_3) ; portanto

$$\begin{aligned} |Y| - 1 &= |Y - y_1| \leq \omega(H[Y - y_1]) \alpha(H[Y - y_1]) \\ &\leq \alpha(H)\omega(H) \leq |Y| - 1. \end{aligned}$$

Portanto, as igualdades são válidas, e nós podemos escrever:

$$\omega(H[Y - y_1]) = \omega(H) = p,$$

$$\alpha(H[Y - y_1]) = \alpha(H) = q,$$

$$|Y| - 1 = pq.$$

$H[Y - X_1]$ pode ser obtido de $G - x_1$ por duplicar alguns vértices como no Lema 2.2.1; portanto

$$\theta(H[Y - X_1]) = \alpha(H[Y - X_1]) \leq q.$$

Assim, $Y - X_1$ pode ser coberto por q cliques de H , denominadas $K_1, K_2, \dots, K_q$. Podemos assumir que as K_i são duas a duas disjuntas e que $|K_1| \geq |K_2| \geq \dots \geq |K_q|$. Claramente,

$$|K_i| \leq \omega(H) = p,$$

e

$$\sum_{i=1}^q |K_i| = |Y| - h = pq - (h - 1).$$

Portanto, $|K_i| < p$ para no máximo $h - 1$ valores de i , e, consequentemente,

$$|K_1| = |K_2| = \dots = |K_{q-h+1}| = p.$$

Seja H' o subgrafo de H induzido por $K_1 \cup K_2 \dots \cup K_{q-h+1} \cup \{y_1\}$. O número de vértices de H' é,

$$|V(H')| = p(q - h + 1) + 1 < pq + 1 = |Y|.$$

Pela minimalidade de H , H' satisfaz (P_3) ; portanto



$$p\alpha(H') = \omega(H')\alpha(H') \geq |V(H')| = p(q - h + 1) + 1.$$

Portanto, $\alpha(H') > q - h + 1$. Seja S' um conjunto estável de H' com $q - h + 2$ vértices. Uma vez que $K_1, K_2, \dots, K_{q-h+1}, \{y_1\}$ é uma cobertura por cliques de H' em $q - h + 2$ cliques, $y_1 \in S'$. Portanto, $S = S' \cup X_1$ é um conjunto estável em H , e $q = \alpha(H) \geq |S| = q + 2$ que é uma contradição. ■

O Teorema dos Grafos Perfeitos (Lovász [Lo 72b]). Para um grafo G as seguintes condições são equivalentes:

$$(P_1) \quad \chi(G[A]) = \omega(G[A]) \quad (\text{para todo } A \subseteq V(G))$$

$$(P_2) \quad \alpha(G[A]) = \theta(G[A]) \quad (\text{para todo } A \subseteq V(G))$$

$$(P_3) \quad \omega(G[A]) \alpha(G[A]) \geq |A| \quad (\text{para todo } A \subseteq V(G)).$$

Prova: (P_3) implica (P_1) . Mostraremos por indução sobre n que todos grafos de ordem n que satisfazem (P_3) também satisfazem (P_1) .

Seja G um grafo de ordem n que satisfaz (P_3) . Pela hipótese de indução, para $A \subseteq V(G)$, $A \neq V(G)$, o grafo complementar $\overline{G}[A]$ satisfaz (P_1) , portanto $G[A]$ satisfaz (P_2) . Seja $\omega(G) = p$, e F a família de todos os conjuntos estáveis em G .

Nós mostraremos primeiro que existe em G um conjunto estável S tal que $\omega(G - S) < \omega(G)$.

Senão, para cada $S \in F$, existe uma clique $K_S \subseteq V(G) - S$ tal que $|K_S| = p$. Seja H o grafo obtido do subgrafo de G induzido por $\cup_S K_S$ por se substituir cada vértice x_i por um conjunto X_i tal que $|X_i| =$ número de K_S que contém x_i . Temos

$$|V(H)| = \sum |X_i| = \sum_{S \in F} |K_S| = p|F|,$$

$$\omega(H) \leq \omega(G) = p,$$

$$\alpha(H) = \max_{T \in F} \left| \bigcup_{x_i \in T} X_i \right| = \max_{T \in F} \sum_{S \in F} |T \cap K_S| \leq |F| - 1.$$

Disto segue que

$$\omega(H)\alpha(H) \leq p(|F| - 1) < |V(H)|.$$

Isto contradiz o Lema 2.2.2. Assim, existe em G um conjunto estável S tal que

$$\omega(G - S) \leq \omega(G) - 1.$$

Nós podemos colorir G usando uma primeira cor para os vértices que estão em S , e $\chi(G - S) = \omega(G - S)$ cores para os outros vértices. Portanto,



$$\chi(G) \leq 1 + [\omega(G) - 1] = \omega(G).$$

Assim, $\chi(G) = \omega(G)$, e G satisfaz (P_1) .

(P_1) implica (P_3) . Seja G um grafo que satisfaz (P_1) . Para cada $A \subseteq V(G)$, existe uma coloração $(A_1, A_2, \dots, A_q)$ de $G[A]$ em $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$ cores. Portanto

$$|A| = \sum_{i=1}^q |A_i| \leq q\alpha(G[A]) = \omega(G[A])\alpha(G[A]).$$

Assim, (P_3) é satisfeita.

(P_3) implica (P_2) . Seja G um grafo que satisfaz (P_3) ; então seu complementar $\overline{G}$ satisfaz (P_3) , e, conseqüentemente, (P_1) . Portanto,

$$\alpha(G[A]) = \omega(\overline{G}[A]) = \chi(\overline{G}[A]) = \theta(G[A]).$$

Assim, (P_2) é satisfeita.

(P_2) implica (P_3) . Seja G um grafo que satisfaz (P_2) . Então, $\overline{G}$ satisfaz (P_1) , e (P_3) . Portanto

$$\omega(G[A])\alpha(G[A]) = \alpha(\overline{G}[A])\omega(\overline{G}[A]) \geq |A|. \quad \blacksquare$$

Corolário 2.2.3 *Um grafo G é perfeito se e somente se seu complementar $\overline{G}$ é perfeito.*

2.3 Algumas Classes de Grafos Perfeitos

Grafos Triangularizados

Uma das primeiras classes de grafos perfeitos a ser reconhecida foi a classe dos grafos triangularizados. Hajnal e Surányi [HaS 58] mostraram que estes grafos são α -perfeitos e Berge [Be 60] provou que eles também são χ -perfeitos. Estes resultados, em grande medida, inspiraram a conjectura que as propriedades (P_1) e (P_2) eram equivalentes.

Um grafo é dito ser *triangularizado* se todo ciclo de comprimento estritamente maior que três possui uma corda.

Lema 2.3.1 *Se um grafo G triangularizado é conexo e não é completo, ele contém um corte que é uma clique.*

Prova: Como G não é completo, há pelo menos dois vértices que não são adjacentes, assim existe pelo menos um corte. Seja A um corte minimal, cuja remoção cria várias componentes conexas $C, C', C'', \dots$. Todo elemento a de A está ligado por uma aresta a cada componente conexa porque, senão, $A - \{a\}$ seria também um

corte, e A não seria um corte minimal. Considere em A dois elementos distintos a_1 e a_2 . Existe uma cadeia

$$\mu = [a_1, c_1, c_2, \dots, c_p, a_2], \quad c_1, c_2, \dots, c_p \in C,$$

e considere μ como sendo uma cadeia deste tipo de menor comprimento. Existe também uma cadeia μ'

$$\mu' = [a_2, c'_1, c'_2, \dots, c'_q, a_1], \quad c'_1, c'_2, \dots, c'_q \in C',$$

e considere μ' como sendo uma cadeia deste tipo de menor comprimento. O ciclo

$$\mu + \mu' = [a_1, c_1, c_2, \dots, c_p, a_2, c'_1, c'_2, \dots, c'_q, a_1]$$

não possui qualquer uma das seguintes cordas:

$$\{a_1, c_i\} \text{ com } 1 < i \leq p,$$

$$\{c_i, c_j\} \text{ com } i \neq j,$$

$\{a_2, c_i\}$ com $1 \leq i < p$, porque μ não seria uma cadeia de menor comprimento.

$\{c_i, c'_j\}$, porque C e C' são duas componentes conexas disjuntas.

$$\{a_2, c'_j\} \text{ com } 1 < j \leq q,$$

$$\{c'_i, c'_j\} \text{ com } i \neq j,$$

$\{a_1, c'_j\}$ com $1 \leq j < q$, porque μ' não seria uma cadeia de menor comprimento.

Como G é triangularizado, o ciclo $\mu + \mu'$ (cujo comprimento é no mínimo 4) possui uma corda, e esta corda é necessariamente $\{a_1, a_2\}$.

Assim, todo par de vértices a_1 e $a_2 \in A$ estão ligados por uma aresta, e portanto A é uma clique. ■

Teorema 2.3.2 (Berge [Be 60]). *Todo grafo triangularizado é χ -perfeito.*

Prova: Vamos assumir que o teorema seja válido para todos grafos de ordem menor que n , e mostraremos que ele também é verdadeiro para um grafo G de ordem n . Se G é completo, o teorema é válido. Se G não é completo, segue do lema anterior que existe um corte A que é uma clique.

Seja $A_1, A_2, \dots$ as componentes conexas do subgrafo $G - A$ obtido de G pela remoção de A . Pela hipótese de indução, temos para todo i ,



$$\chi(G[A \cup A_i]) = \omega(G[A \cup A_i]) \leq \omega(G).$$

Podemos colorir com $\omega(G)$ cores os vértices de cada $G[A \cup A_i]$ separadamente, e isto dá uma coloração de G em $\omega(G)$ cores.

Portanto, $\chi(G) = \omega(G)$ e, pelo Teorema dos Grafos Perfeitos, temos que G é perfeito.

Grafos Intervalo

Considere uma família de intervalos $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ sobre uma linha. Seja G o grafo em que cada vértice a_i representa o intervalo A_i e dois vértices são adjacentes se os dois intervalos correspondentes se interceptam; o grafo G é chamado *grafo intervalo*.

Teorema 2.3.3 *Todo grafo intervalo G é triangularizado.*

Prova: Se G é um grafo intervalo e não triangularizado, ele contém um ciclo sem cordas $\mu = [a_1, a_2, \dots, a_k, a_1]$ de comprimento $k > 3$. Seja $A_i = [\alpha_i, \beta_i]$ o intervalo da família representado pelo vértice a_i . Então, A_{i-1} e A_{i+1} são dois intervalos disjuntos (pois o ciclo μ é sem cordas). Se, digamos, A_3 está do lado direito de A_1 , então $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots < \beta_k < \beta_1$, que é uma contradição.

Portanto, todo grafo intervalo é triangularizado. Conforme temos visto, os grafos triangularizados são perfeitos, então os grafos intervalos são perfeitos.

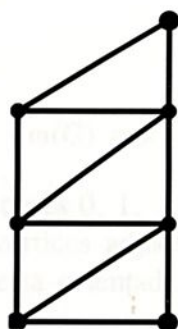
O problema de caracterizar um grafo representando uma família de intervalos foi primeiramente proposto por Hajos [Ha 57] como seguinte:

Numa certa universidade, todo estudante tem que ir à biblioteca uma vez ao dia; no final do dia nós perguntamos a cada estudante quem ele encontrou na biblioteca, e construímos um grafo G cujos vértices representam os estudantes, dois vértices são adjacentes se os dois estudantes correspondentes se encontraram na biblioteca.

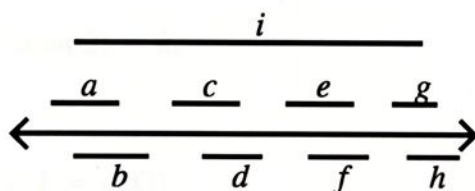
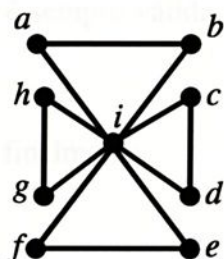
Para cada estudante nós temos um intervalo de tempo durante o qual ele esteve na biblioteca, e G representa o grafo desta família de intervalos.

Hajos apresentou mais tarde um algoritmo para localizar os intervalos. Caracterizações de grafos intervalo foram dadas por Fulkerson e Gross [FuG 65], Eswaran [Es 75].

A Figura 5 ilustra um grafo (a) que é um grafo triangularizado e um grafo (b) que é um grafo intervalo.



(a)



(b)

Figura 5

Grafos de Comparabilidade

Um grafo G é dito de *comparabilidade* se é possível orientar suas arestas de modo que o grafo orientado $\vec{G} = (V, \vec{E})$ assim obtido satisfaz:

$$(i) \quad (x, y) \in \vec{E}, (y, z) \in \vec{E} \Rightarrow (x, z) \in \vec{E} \quad (\text{transitividade})$$

$$(ii) \quad (x, y) \in \vec{E} \Rightarrow (y, x) \notin \vec{E} \quad (\text{anti-simetria}).$$

Todo subgrafo induzido de um grafo de comparabilidade é obviamente um grafo de comparabilidade; uma caracterização destes grafos foi dada por P. Gilmore e A. Hoffman [GiH 79].

Teorema 2.3.4 (Berge [Be 75]). *Todo grafo de comparabilidade é χ -perfeito.*

Prova: Consideremos um grafo G com uma orientação que satisfaz (i) e (ii) acima. Assim, o grafo G não contém ciclos orientados, e como G é finito, para cada vértice x , podemos associar um número finito $f(x)$ representando o comprimento da maior cadeia elementar orientada iniciando em x . Se $\max_x f(x) = k - 1$, existe uma cadeia elementar orientada com k vértices. Nenhuma clique tem mais que k vértices, senão haveria uma cadeia elementar orientada passando por cada vértice de uma tal clique, e a cadeia elementar de maior comprimento tem apenas k vértices.

Assim, temos:

$$\omega(G) = k.$$

Por outro lado, consideremos k cores $0, 1, \dots, k - 1$, e façamos com que a cor $f(x)$ seja atribuída ao vértice x . Dois vértices adjacentes x e y não podem possuir a mesma cor porque se a aresta $\{x, y\}$ está orientada de x para y , temos $f(x) < f(y)$; portanto,

$$\chi(G) \leq k.$$

Como é sempre válida a desigualdade

$$\chi(G) \geq \omega(G) = k,$$

temos finalmente

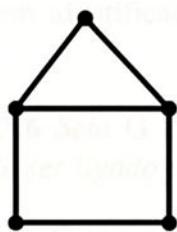
$$\chi(G) = k = \omega(G).$$

Portanto, pelo Teorema dos Grafos Perfeitos, todo grafo de comparabilidade é perfeito. ■

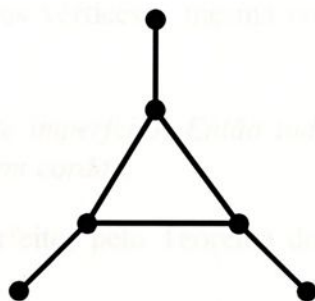
Grafos Bipartidos

Para um grafo bipartido G , é fácil ver que $\chi(G) = 2$. Se nós colorirmos seus vértices com duas cores, e orientarmos cada aresta da primeira cor para a segunda cor, as condições (i) e (ii) apresentadas anteriormente para grafos de comparabilidade são trivialmente satisfeitas, assim G é um grafo de comparabilidade.

Porém, nem todo grafo de comparabilidade é bipartido: o grafo (a) da Figura 6 é um grafo de comparabilidade, mas não bipartido. O grafo (b) não é bipartido e nem de comparabilidade.



(a)



(b)

Figura 6

Grafos Quase-paridade

Um grafo G é dito ser *quase-paridade* se todo conjunto $A \subset V(G)$ que não é uma clique contém dois vértices x, y com a seguinte propriedade:

(P) x e y não podem ser ligados por uma cadeia ímpar sem cordas em $G[A]$.

Lema 2.3.5 *Seja G um grafo tendo dois vértices x, y que não podem ser ligados por uma cadeia ímpar sem cordas. Seja G' o grafo obtido de G por contração de x e y . Então $\omega(G') = \omega(G)$ e $\chi(G') = \chi(G)$.*

Prova: Claramente temos que $\omega(G') \geq \omega(G)$ e $\chi(G') \geq \chi(G)$.

Suponhamos que $\omega(G') > \omega(G)$. Então existe em G uma clique K de cardinalidade $\omega(G)$ tal que $N_G(x) \cup N_G(y) \supseteq K$ mas $K \not\subset N_G(x)$ e $K \not\subset N_G(y)$. Seja

$$a \in K, a \notin N_G(x) \quad \text{e} \quad b \in K, b \notin N_G(y).$$

Então $[x, a, b, y]$ é uma cadeia ímpar sem cordas entre x e y , uma contradição.

Por outro lado, como não há cadeia ímpar sem cordas entre x e y , existe uma coloração de G com $\chi(G)$ cores em que x e y têm a mesma cor. De fato, dada uma coloração com $\chi(G)$ cores, onde x e y têm cores diferentes, consideremos o subgrafo H induzido pelos vértices que têm a mesma cor de x ou a mesma cor de y .

Como não existe cadeia ímpar sem cordas ligando x a y no grafo H , temos que os vértices x e y não podem estar na mesma componente conexa de H . Basta então trocar as duas cores na componente conexa de H que contém x para obtermos uma coloração de G com $\chi(G)$ cores em que x e y têm a mesma cor.

Agora, dada uma coloração de G em que x e y têm a mesma cor, podemos obter uma coloração de G' com o mesmo número de cores ao preservar a mesma cor quando eles forem identificados e atribuir aos outros vértices a mesma cor que na coloração de G . ■

Lema 2.3.6 *Seja G é um grafo minimalmente imperfeito. Então todo par de vértices x, y pode ser ligado por uma cadeia ímpar sem cordas.*

Prova: Seja G um grafo minimalmente imperfeito; pelo Teorema dos Grafos Perfeitos temos

$$\omega(G[A])\alpha(G[A]) \geq A \quad (A \subset V(G), A \neq V(G)),$$

$$(1) \quad \omega(G)\alpha(G) = |V(G)| - 1.$$

Seja x, y um par de vértices com nenhuma cadeia ímpar sem cordas entre eles, e G' o grafo obtido de G como no lema 2.3.5. Temos

$$\chi(G') = \chi(G) = \omega(G) + 1 = \omega(G') + 1.$$

Portanto, G' não é perfeito.

Todo subgrafo próprio induzido $G'[A]$ de G' satisfaz

$$\chi(G'[A]) = \chi(G[B]) = \omega(G[B]) = \omega(G'[A]).$$

Portanto, G' é um grafo minimalmente imperfeito, e

$$(2) \quad \omega(G')\alpha(G') = |V(G')| - 1 = |V(G)| - 2.$$

Por subtração, (1) e (2) segue que

$$\omega(G)[\alpha(G) - \alpha(G')] = 1.$$

Portanto $\omega(G) = 1$. Isto significa que G é um grafo trivial (o qual é claramente um grafo perfeito): uma contradição. ■

Os vértices x, y de um grafo G formam uma *dupla par* quando não existe uma cadeia elementar ímpar sem cordas ligando x a y .

O lema anterior ficou conhecido como o Lema da Dupla Par porque ele pode ser enunciado como: *Nenhum grafo minimalmente imperfeito contém uma dupla par.*

Teorema 2.3.7 (Meyniel [Me 87]). *Todo grafo quase-paridade é perfeito.*

Prova: Seja G um grafo quase-paridade e suponhamos que G não seja um grafo perfeito. Então, G tem um grafo minimalmente imperfeito $G[A]$ como subgrafo induzido.

Como $G[A]$ não é uma clique, existe dois vértices x, y que não podem ser ligados por uma cadeia ímpar sem cordas. Isto contradiz o Lema 2.3.6. ■

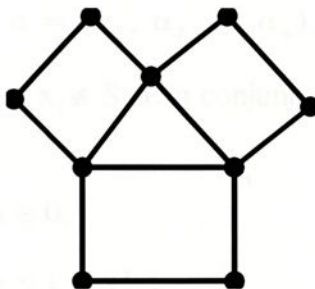


Figura 7: Um grafo quase-paridade.

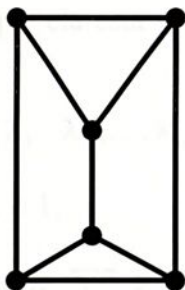


Figura 8: Um grafo perfeito que não é quase-paridade.

Grafos Unimodulares

Dado um grafo G com os vértices $x_1, x_2, \dots, x_n$, seja $K_1, K_2, \dots, K_m$ suas cliques maximais. Uma matriz $M = (m_{ij})$, com n colunas e m linhas, é denominada matriz de incidência das cliques de G se

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j \notin K_i \\ 1 & \text{se } x_j \in K_i. \end{cases}$$

Um grafo G é dito ser *unimodular* se a matriz de incidência-clique M é totalmente unimodular (isto é, se toda submatriz quadrada de M tem determinante igual a 0, +1, -1).

Obviamente, se o grafo G é unimodular, um subgrafo de G tem uma matriz de incidência das cliques que é uma submatriz de M ; portanto este subgrafo é também unimodular.

Teorema 2.3.8 (Berge[Be 75]). *Todo grafo unimodular é α -perfeito.*

Prova: Precisamos provar que $\alpha(G) = \theta(G)$.

Nós definiremos um conjunto estável S por um vetor

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

com $\alpha_j = 1$ se $x_j \in S$, $\alpha_j = 0$ se $x_j \notin S$. Um conjunto estável máximo é dado por uma programação linear inteira:

- (1) $\alpha \geq 0$,
- (2) $\alpha \leq 1 = (1, 1, \dots, 1)$,
- (3) $M\alpha \leq 1$,
- (4) maximize $\sum_{j=1}^n \alpha_j$.

A condição (2) pode ser apagada, porque ela está contida em (3). O programa linear inteiro dual é:

$$(1') \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \geq 0,$$

$$(2') M^* \lambda \geq 1,$$

$$(3') \text{ minimize } \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

Nós podemos também adicionar

$$(4') \lambda \leq 1,$$

porque (2') e (3') implicam (4').

Nós estamos tentando encontrar uma família minimal de cliques que cobrem todos os vértices.

Como a matriz M é totalmente unimodular, pelo teorema da dualidade de programação linear e o fato que unimodularidade implica a existência de soluções inteiras para o par de programas linear duais em questão, temos:

$$\alpha(G) = \max \sum_{j=1}^n \alpha_j = \min \sum_{i=1}^m \lambda_i = \theta(G).$$

Portanto, pelo Teorema dos Grafos Perfeitos temos que G é um grafo perfeito.

O conceito de grafo unimodular é independente do conceito de grafo triangularizado, ou do conceito de grafo de comparabilidade.

Para ilustrar isto, o grafo da Figura 9 é triangularizado mas não é um grafo unimodular.

O grafo da Figura 10 é um grafo unimodular mas não é de comparabilidade e nem triangularizado.

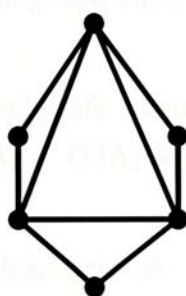


Figura 9

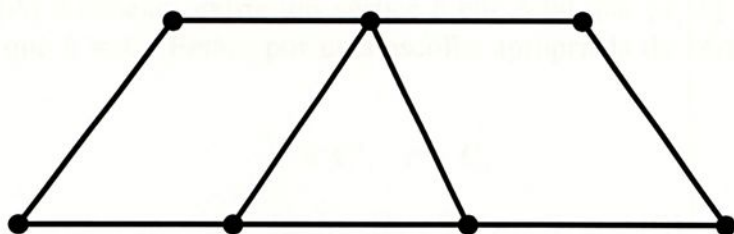


Figura 10

Grafos Fortemente Perfeitos

Seja G um grafo e K a família de todas as cliques maximais. Um conjunto S tal que

$$|S \cap K| = 1 \quad (K \in K)$$

é chamado um *conjunto estável transversal* de G .

Se G e todos seus subgrafos induzidos tem um conjunto estável transversal, dizemos que G é *fortemente perfeito*. Claramente, todo grafo bipartido é fortemente perfeito.

Teorema 2.3.9 *Seja G um grafo não tendo nenhum subgrafo induzido P_4 (cadeia elementar sobre quatro vértices sem cordas). Então todo conjunto estável maximal intercepta todas as cliques maximais. Consequentemente, G é fortemente perfeito.*

Para provarmos este teorema precisamos do seguinte lema de Seinsche [Se 74]:

Lema de Seinsche. *As seguintes duas condições são equivalentes:*

(i) G não tem nenhum subgrafo P_4 .

(ii) *para todo $A \subset V(G)$, o subgrafo $G[A]$ ou seu complementar $\overline{G}[A]$ não são conexos.*

Prova do Lema: Se G tem um subgrafo induzido P_4 , então o conjunto A dos quatro vértices num P_4 é tal que $G[A]$ e $\overline{G}[A]$ são conexos, portanto (ii) é não verdadeira.

Por outro lado, se (ii) é falsa, seja A um conjunto de vértices com cardinalidade mínima tal que ambos $G[A]$ e $\overline{G}[A]$ são conexos. Consideremos a um vértice de A tal que $G[A] - \{a\}$ contém duas componentes conexas, digamos C e C' ; um tal vértice existe pela minimalidade de A .

Como $\overline{G}[A]$ é conexo, existe um vértice b em A tal que $\{a, b\} \notin A(G)$; nós podemos assumir que $b \in C$. Então, por uma escolha apropriada de vértices b, c, c' , nós podemos ter

$$c' \in C', \quad c \in C,$$

$$\{a, b\}, \{b, c'\}, \{c, c'\} \notin A(G),$$

$$\{a, c'\}, \{a, c\}, \{b, c\} \in A(G).$$

Para $B = \{a, c, c', b\}$, temos que $G[B]$ é isomorfo a P_4 , o que contradiz (ii).

Prova do Teorema 2.3.9 Vamos assumir que todo grafo de ordem menor que n com nenhum P_4 induzido tenha a seguinte propriedade: “todo conjunto estável maximal intercepta toda clique maximal”. Nós mostraremos que um grafo G de ordem n satisfaz esta propriedade.

Pelo lema anterior, G ou $\overline{G}$ não são conexos; podemos assumir que G não é conexo e tem duas componentes G_1 e G_2 . Pela hipótese de indução, uma clique maximal K_1 de G_1 , um conjunto estável maximal S_1 de G_1 , uma clique maximal K_2 de G_2 e um conjunto estável maximal S_2 de G_2 satisfaz

$$S_1 \cap K_1 \neq \emptyset, \quad S_2 \cap K_2 \neq \emptyset.$$

Portanto, todo conjunto estável maximal de G , que é do tipo $S = S_1 \cup S_2$, intercepta toda clique maximal de G , que é do tipo K_1 ou K_2 . ■

Teorema de Berge e Duchet [BeD 84]. *Todo grafo fortemente perfeito é perfeito.*

Prova: Como os subgrafos induzidos de um grafo fortemente perfeito são fortemente perfeitos, é suficiente mostrar que um grafo fortemente perfeito G tem $\chi(G) = \omega(G)$.

Vamos assumir que $\omega(G) = k$, e que o teorema é verdadeiro para todos grafos G' com $\omega(G') < k$; seja S um conjunto estável de G que intercepta todas as cliques maximais. Então

$$k - 1 = \omega(G - S) = \chi(G - S) \quad (\text{pela hipótese de indução}).$$

Portanto

$$\chi(G) \leq (k - 1) + 1 = k = \omega(G) \leq \chi(G).$$

Assim, $\chi(G) = \omega(G)$. ■

2.4 Grafos Minimalmente Imperfeitos e Particionáveis

Nesta seção descreveremos os grafos minimalmente imperfeitos e os grafos particionáveis. Antes de apresentarmos algumas propriedades e caracterizações relativas a estes grafos, precisamos de introduzir algumas definições que serão utilizadas.

Definições

Seja G um grafo e P um P_4 consistindo das arestas $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$. Dizemos que a e b são os *vértices-externos* de P e que b e c são os *vértices-internos* de P .

Generalizando, um vértice v é dito ser vértice-externo (respectivamente vértice-interno) de um P_4 se existir em G um subgrafo induzido P_4 de G que tem v como vértice-externo (respectivamente vértice-interno).

Um grafo G é dito ser *inquebrável* se nem G e nem seu complementar $\bar{G}$ tem um corte estrela.

Os vértices x, y de um grafo G são uma *dupla ímpar* se toda cadeia elementar ligando x a y e contendo um número par de arestas tem uma corda distinta da aresta $\{x, y\}$.

Um subconjunto H dos vértices de um grafo G é um *conjunto homogêneo* se satisfaz

(i) $N_G(x) \cap H = H$ ou $N_G(x) \cap H = \emptyset$, para todo $x \in G - H$.

(ii) $|H| \geq 2$ e $|V(G - H)| \geq 2$.

Sejam G e G' dois grafos cujos conjuntos de vértices são disjuntos e x um vértice de G . A *substituição* de x por G' é definida por se remover x de G e ligar por uma aresta todo vértice de G' a cada vértice de G que era adjacente ao vértice x .

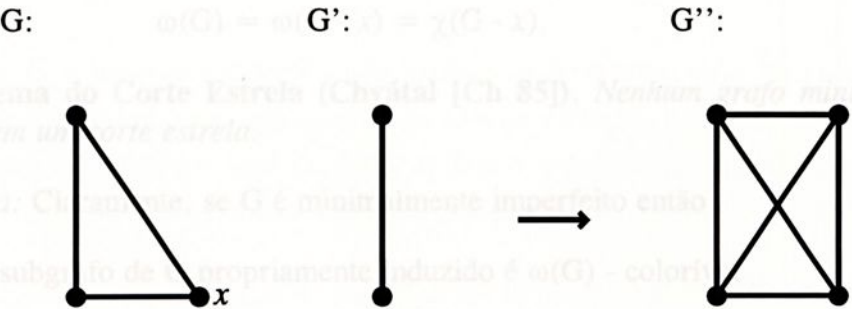


Figura 11: O grafo G'' obtido por substituição do vértice x de G por G' .

Dois vértices x e y de um grafo G são *gêmeos* se todo vértice de G distinto de x e y ou é adjacente a x e a y ou não é adjacente nem a x e nem a y . Por analogia, x e y são *anti-gêmeos* se todo vértice de G distinto de x e y é adjacente a precisamente um deles.

Grafos Minimalmente Imperfeitos

Um grafo G é dito ser *minimalmente imperfeito* ou *p-crítico* se G não é perfeito mas todo subgrafo induzido próprio de G é um grafo perfeito. Um grafo minimalmente imperfeito, em particular, satisfaz as igualdades

$$\alpha(G - x) = \theta(G - x) \quad \text{e} \quad \omega(G - x) = \chi(G - x)$$

para todo vértice x de $V(G)$.

A Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos pode ser enunciada como seguinte:

os únicos grafos minimalmente imperfeitos que existem são C_{2k+1} e $\overline{C}_{2k+1}$ (para $k \geq 2$). Por esta razão tem-se procurado produzir propriedades de grafos minimalmente imperfeitos. Nós apresentaremos algumas delas.

Teorema 2.4.1 (Lovász [Lo 72b]). *Se G é um grafo minimalmente imperfeito de ordem n , então*

$$n = \alpha(G) \omega(G) + 1,$$

e para todo vértice x de G ,

$$\alpha(G) = \theta(G - x) \quad \text{e} \quad \omega(G) = \chi(G - x).$$

Prova: Pelo Teorema do Grafo Perfeito, como G é minimalmente imperfeito temos que $n > \alpha(G) \omega(G)$ e $n - 1 \leq \alpha(G - x) \theta(G - x)$ para todo vértice x . Assim,

$$n - 1 \leq \alpha(G - x) \omega(G - x) \leq \alpha(G) \omega(G) < n.$$

Portanto, $n - 1 = \alpha(G - x) \omega(G - x)$, $\alpha(G) = \alpha(G - x) = \theta(G - x)$, e

$$\omega(G) = \omega(G - x) = \chi(G - x). \quad \blacksquare$$

O Lema do Corte Estrela (Chvátal [Ch 85]). *Nenhum grafo minimalmente imperfeito tem um corte estrela.*

Prova: Claramente, se G é minimalmente imperfeito então

$$\text{todo subgrafo de } G \text{ propriamente induzido é } \omega(G) - \text{colorível} \quad (\text{I})$$

e

$$\omega(G - S) = \omega(G) \text{ para todo conjunto estável } S \text{ em } G. \quad (\text{II})$$



Provaremos que nenhum grafo G que satisfaz (I) e (II) tem um corte estrela. Para tanto, consideremos um grafo arbitrário G tal que G satisfaz (I) e que tem um corte estrela; precisamos apenas provar que G não satisfaz (II).

Seja A um corte estrela de G . Como $G - A$ é desconexo, seu conjunto de vértices é particionado em V_1 e V_2 tais que

nenhum vértice em V_1 é adjacente a um vértice em V_2 . (III)

Seja G_i ($i = 1, 2$) o subgrafo de G induzido por $V_i \cup A$; de (I) há uma coloração f_i de G_i em $\omega(G)$ cores. Como A é um corte estrela, algum vértice w em A é adjacente a todos os demais vértices de A ; façamos $v \in S_i$ se $v \in G_i$ e $f_i(v) = f_i(w)$, isto é, v e w possuem a mesma cor. Trivialmente, temos que todo S_i é um conjunto estável, e $S_i \cap A = \{w\}$; agora (III) implica que a união S de S_1 e S_2 é um conjunto estável.

Finalmente, seja K uma clique qualquer em $G - A$. Novamente por (III), K está completamente contida em $G_1 - S_1$ ou em $G_2 - S_2$. Como cada um destes grafos é colorido com $\omega(G) - 1$ cores, temos que $|K| \leq \omega(G) - 1$. ■

Pelo Teorema dos Grafos Perfeito, o grafo complementar de todo grafo minimalmente imperfeito é minimalmente imperfeito. Portanto, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.4.2 *Todo grafo minimalmente imperfeito é inquebrável.*

Teorema 2.4.3 (Preissmann [Pr 90]). *Em um grafo inquebrável, todos os vértices são ambos vértices-externos e vértices-internos de um P_4 .*

Prova: Suponha que o teorema não seja verdadeiro.

Caso 1. Existe um vértice x de um grafo inquebrável G que não é um vértice-externo de um P_4 em G ,

(I) se $|\bar{N}_G(x)| \leq 1$. Então $\bar{N}_G(x)$ é um corte estrela de $\bar{G}$.

(II) se $|\bar{N}_G(x)| \geq 2$.

Como G é inquebrável temos que $G[\bar{N}_G(x)]$ é conexo. Seja $\{z, t\}$ uma aresta de $G[\bar{N}_G(x)]$. Vamos assumir que temos um vértice y em $N_G(x)$ que é adjacente a z . Para evitar um P_4 induzido por $\{x, y, z, t\}$ tendo x como um extremo devemos ter uma aresta $\{y, t\}$ em G . Mas então podemos particionar $N_G(x)$ em dois conjuntos

$$N_0 = \{y; y \in N_G(x) \text{ e } \{y, z\} \notin A(G) \forall z \in \bar{N}_G(x)\}$$

$$N_a = \{y; y \in N_G(x) \text{ e } \{y, z\} \in A(G) \forall z \in \bar{N}_G(x)\}.$$

Como G é inquebrável, $N_a \neq \emptyset$.

Mas, agora, seja z um elemento de $\overline{N}_G(x)$; é claro que $z \cup N_a$ é um corte estrela de G . Tanto (I) como (II) leva a uma contradição de que G é inquebrável. Assim, o Caso 1 não pode ocorrer.

Caso 2. Existe um vértice x de um grafo inquebrável G que não é um vértice-interno de um P_4 em G . Assim, x não é um vértice-externo de um P_4 em $\overline{G}$. Mas $\overline{G}$ é inquebrável e pelo Caso 1 nós sabemos que o Caso 2 não pode ocorrer. ■

Corolário 2.4.4 *Todo Grafo minimalmente imperfeito é tal que todos seus vértices são vértices-externos e vértices-internos de um P_4 .*

Teorema de Meyniel e Olariu [MeO 89]. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *Um grafo minimalmente imperfeito contém uma aresta deficiente se e somente se ele é um ciclo ímpar sem cordas de comprimento pelo menos 5.*

(ii) *Nenhum grafo minimalmente imperfeito contém uma dupla ímpar.*

Prova: Para provar a implicação (i) $\Rightarrow$ (ii), consideremos um grafo minimalmente imperfeito G . Somente precisamos mostrar que G não contém uma dupla ímpar. Isto é trivialmente verdadeiro se $\omega(G) = 2$.

Agora, consideremos $\omega(G) \geq 3$. Seja x, y vértices arbitrários em G . Basta provarmos que x e y não são uma dupla ímpar. Se x e y tem um vértice adjacente em comum então, claramente, x e y não é uma dupla ímpar. Nós podemos assumir, portanto, que x e y não tem nenhum vértice adjacente em comum.

Se x e y são adjacentes, então a aresta $\{x, y\}$ é deficiente e, por (i), $\omega(G) = 2$, uma contradição.

Assim, podemos assumir que x e y não são adjacentes. Seja G' o grafo obtido de G por se adicionar a aresta $\{x, y\}$. Por suposição, $\omega(G) = \omega(G')$. Podemos observar que G' é imperfeito, porque senão qualquer coloração de G' usando $\omega(G)$ cores é também uma coloração de G , uma contradição.

Seja $G'[H]$ um subgrafo induzido por H minimalmente imperfeito de G' , e $G[H]$ o subgrafo de G induzido por H . Observamos que x e y pertencem a H . (Isto é verdadeiro se $G[H] = G$; se $G[H]$ é um subgrafo induzido próprio de G , então como $G[H]$ é perfeito e $G'[H]$ é minimalmente imperfeito, devemos ter $x, y \in H$.)

Se $\omega(G'[H]) \geq 3$, então como a aresta $\{x, y\}$ é deficiente contrariamos (i).

Portanto, $\omega(G'[H]) = 2$. Segue que $G'[H]$ é um ciclo ímpar sem cordas de comprimento pelo menos 5, e assim H induz uma cadeia elementar sem cordas com um número par de arestas em G . Portanto, x e y não são uma dupla ímpar.

Para provar a implicação (ii) $\Rightarrow$ (i), seja G um grafo minimalmente imperfeito que é um contra-exemplo de nossa afirmação: G contém uma aresta deficiente $\{x, y\}$ e $\omega(G) \geq 3$.

Como (ii) é assumido como verdadeiro, existe uma cadeia elementar sem cordas

$$x = w_0, w_1, \dots, w_{2p} = y$$

ligando x a y , contendo um número par de arestas, cuja única corda é a aresta $\{x, y\}$.

Porém, como $\{x, y\}$ é uma aresta deficiente, $\{w_0, w_1, \dots, w_{2p}\}$ induz um ciclo ímpar sem cordas de comprimento pelo menos 5, contrariando a minimalidade de G . ■

Além do Teorema dos Grafos Perfeitos, Lovász provou em [Lo 72a] que a substituição preserva a perfeição:

Teorema 2.4.5 *Se um vértice de um grafo perfeito é substituído por um grafo perfeito então o grafo resultante é perfeito.*

Prova: Podemos assumir que apenas um vértice de um grafo perfeito G é substituído por um grafo perfeito G' . Seja G'' o grafo resultante. É suficiente provar que

$$\chi(G'') = \omega(G''),$$

pois para os subgrafos induzidos de G'' , que tem a mesma construção de grafos perfeitos, isto segue similarmente.

Faremos indução sobre $k = \omega(G'')$. Para $k = 1$, o teorema é trivialmente verdadeiro.

Vamos assumir que $k > 1$. É suficiente encontrarmos um conjunto estável S de G'' que intercepta todas as k -cliques, pois então colorimos estes vértices com uma mesma cor e os demais com $k - 1$ outras cores (isto pode ser feito pela hipótese de indução) e assim obtemos uma k -coloração de G'' .

Seja $c = \omega(G)$ e $c' = \omega(G')$. Denotemos por r a cardinalidade de uma clique máxima de G que contém x . Então, claramente,

$$k = \max\{c, c' + r - 1\}.$$

Consideremos uma c -coloração de G e seja B o conjunto de vértices tendo a mesma cor que x e S um conjunto estável de vértices que intercepta todas as c' -cliques de G' . Então, $T = S \cup (B - \{x\})$ é um conjunto estável em G'' e T intercepta todas as k -cliques de G'' . De fato, se K é uma k -clique de G'' e ela intercepta G' então, ela contém uma c' -clique de G' e assim um vértice de S . Por outro Lado, se K não



intercepta G' , então K deve ser uma c -clique de G , e assim K contém um vértice de $B - \{x\}$. ■

Este teorema pode ser reformulado de modo a relacionar conjuntos homogêneos com grafos minimalmente imperfeitos:

Corolário 2.4.6 (Figueiredo[Fi 90]) *Nenhum grafo minimalmente imperfeito contém um conjunto homogêneo.*

Prova: Suponhamos por absurdo que um grafo G seja um grafo minimalmente imperfeito que contém um conjunto homogêneo H .

Seja x um vértice de G e $H' = H - \{x\}$.

Pela definição de grafos minimalmente imperfeitos, os subgrafos induzidos próprios $G[H]$ e $G - H'$ são perfeitos.

Como G é obtido de $G - H'$ por substituição de x por $G[H]$ o teorema 2.4.5 implica que G é perfeito, uma contradição. ■

Teorema de Olariu [Ol 88]. *Nenhum grafo minimalmente imperfeito contém anti-gêmeos.*

Prova: Vamos assumir que a afirmação seja falsa: algum grafo G minimalmente imperfeito contém anti-gêmeos u e v . Denotemos por A o conjunto de todos os vértices adjacentes a u exceto v , e por B o conjunto de todos vértices adjacentes a v exceto u .

Seja $\alpha = \alpha(G)$ e $\omega = \omega(G)$. Afirmamos que

B contém uma clique K de cardinalidade $\omega - 1$ que não se estende em uma clique de cardinalidade ω em $A \cup B$. (1)

Para justificar esta afirmação, colorimos $G - v$ com ω cores e seja S a cor da classe que inclui u . Como $G - S$ não pode ser colorido com $\omega - 1$ cores, ele contém uma clique de cardinalidade ω ; como $G - S - v$ pode ser colorido com $\omega - 1$ cores, devemos ter que $v \in K$. Portanto, $K - v$ é uma clique em B de cardinalidade $\omega - 1$. Se um vértice x estende K em uma clique de cardinalidade ω então $x \notin A$ (pois $A \cap S = \emptyset$ e $G - S - v$ pode ser colorido por $\omega - 1$ cores) e $x \notin B$ (pois senão, x estenderia K e, uma clique de cardinalidade $\omega + 1$). Assim (1) está justificado.

O Teorema dos Grafos Perfeitos garante que o complementar de G é minimalmente imperfeito; portanto (1) implica que

A contém um conjunto estável de cardinalidade $\alpha - 1$ que não se estende em um conjunto estável de cardinalidade α em $A \cup B$. (2)

Agora, seja K uma clique como definida em (1) e seja S um conjunto estável como definido em (2); seja x um vértice em K que tem o menor número de vértices



adjacentes em S . Por (2), x tem um adjacente z em S ; por (1), z não é adjacente a algum y de K . Como y tem pelo menos o mesmo número que x de adjacentes em S , ele deve ter um adjacente w em S o qual não é adjacente a x . Agora u, z, x, y, w induzem em G um ciclo ímpar sem cordas.

Como este ciclo é imperfeito, G não é minimalmente imperfeito, uma contradição. ■

Grafos Particionáveis

Seja $\alpha, \omega \geq 2$ inteiros quaisquer. Um grafo G de ordem n é dito ser um grafo (α, ω) -particionável se $n = \alpha\omega + 1$ e para todo vértice x de G

$$\alpha = \theta(G - x), \quad \omega = \chi(G - x).$$

Mostramos no teorema 2.4.1 que todo grafo minimalmente imperfeito é (α, ω) -particionável com $\alpha = \alpha(G)$ e $\omega = \omega(G)$.

Observação 2.4.7 Após a remoção de qualquer vértice x de um grafo G (α, ω) -particionável, o grafo resultante $G - x$ tem $\alpha\omega$ vértices, $\chi(G - x) = \omega$ e $\theta(G - x) = \alpha$. Assim uma ω -coloração de $G - x$ particionará os vértices em ω conjuntos estáveis, um dos quais deve ter cardinalidade pelo menos α . Similarmente, uma cobertura mínima por cliques de $G - x$ será particionará os vértices em α cliques, uma das quais deve possuir cardinalidade pelo menos ω .

Teorema 2.4.8 (Golumbic [Go 80]). Se G é um grafo (α, ω) -particionável, então $\alpha = \alpha(G)$ e $\omega = \omega(G)$.

Prova: Seja G um grafo (α, ω) -particionável. Pela observação 2.4.7, $\alpha \leq \alpha(G)$ e $\omega \leq \omega(G)$. Por outro lado, consideremos um conjunto estável máximo S de G e seja $y \in V(G) - S$. Então S é também um conjunto estável máximo de $G - y$, assim

$$\alpha(G) = |S| = \alpha(G - y) \leq \theta(G - y) = \alpha.$$

Assim, $\alpha(G) \leq \alpha$. Similarmente, $\omega(G) \leq \omega$. Portanto, $\alpha = \alpha(G)$ e $\omega = \omega(G)$. ■

O teorema 2.4.8 mostra que os inteiros α, ω são únicos. Portanto, pode-se usar simplesmente o termo grafo particionável e assumir que $\alpha = \alpha(G)$ e $\omega = \omega(G)$.

A classe de grafos minimalmente imperfeitos está propriamente contida na classe de grafos praticionáveis que, por sua vez, está propriamente contida na classe de grafos imperfeitos.

Lema 2.4.9 Se G é um grafo particionável de ordem n , então as seguintes condições são satisfeitas:

(i) G contém um conjunto de n cliques máximas $K_1, K_2, \dots, K_n$ que cobrem cada vértice de G exatamente $\omega(G)$ vezes;

(ii) G contém um conjunto de n conjuntos estáveis máximos $S_1, S_2, \dots, S_n$ que cobrem cada vértice de G $\alpha(G)$ vezes; e

(iii) $K_i \cap S_j = \emptyset$ se e somente se $i = j$.

Prova: Consideremos uma clique máxima K de G e, para cada $x \in K$, vamos escolher uma cobertura mínima por cliques κ_x de $G - x$. Pela observação 2.4.6, todos os membros de κ_x devem ser cliques de cardinalidade ω . Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ cuja primeira linha é o vetor característico de K e as subsequentes são os vetores característicos de cada uma das cliques em κ_x para todo x de K . (Observamos que o número de linhas é $1 + \alpha\omega$.)

Todo vértice $y \notin K$ é coberto uma vez por κ_x para todo x de K . Cada vértice $z \in K$ é coberto uma vez por K e uma vez por κ_x para todo $z \neq x \in K$. Portanto, todo vetor é coberto ω vezes. Para cada linha a_i de A seja K_i a clique cujo vetor característico é a_i . Podemos expressar (i) pela equação matricial $1A = \omega 1$, onde 1 representa o vetor contendo todos os elementos iguais a 1. A condição (i) será satisfeita se mostrarmos que as K_i são distintas.

Para cada i , tomemos um vértice $v \in K_i$ e seja $\mathcal{C}_v$ uma cobertura mínima por conjuntos estáveis (coloração) de $G - v$. Pela observação 2.4.7 deve haver algum conjunto estável $S_i \in \mathcal{C}_v$ tal que $K_i \cap S_i = \emptyset$. Seja b_i o vetor característico de S_i , e seja B a matriz $n \times n$ tendo linhas b_i para $i = 1, \dots, n$. Como $1b_i^T = \alpha$, temos

$$1AB^T = \omega 1B^T = \alpha\omega 1 = (n-1)1.$$

Mas $a_i b_i^T = 0$, assim $AB^T = J - I$, onde J é a matriz contendo todos os elementos igual a 1 e I é a matriz identidade. Isto prova (iii).

Finalmente, tanto A como B são matrizes não singulares pois $J - I$ é não singular. Assim, as K_i são distintas e os S_i são distintos. Além disso,

$$1B = 1BA^T(A^T)^{-1} = 1(J - I)(A^T)^{-1} = (n-1)1(A^T)^{-1}$$

$$= [(n-1)/\omega]1 = \alpha 1,$$

que prova (ii). ■

O próximo resultado mostra que todas as cliques e conjuntos estáveis máximos de G estão entre as do Lema 2.4.9.

Lema 2.4.10 *Um grafo particionável G contém exatamente n cliques máximas e n conjuntos estáveis máximos.*



Prova: Seja A e B as matrizes cujas linhas são vetores característicos das cliques máximas e dos conjuntos estáveis máximos, respectivamente, satisfazendo $AB^T = J - I$ como definidas no Lema 2.4.9.

Suponhamos que c seja um vetor característico de alguma clique máxima de G . Mostraremos que c é uma linha de A .

Observamos primeiramente que $A^{-1} = \omega^{-1} J - B^T$ já que

$$A(\omega^{-1} J - B^T) = \omega^{-1} AJ - AB^T = J - AB^T = I.$$

A solução p para a equação $pA = c$ deverá satisfazer

$$p = cA^{-1} = \omega^{-1}cJ - cB^T = \omega^{-1}(\omega 1) - cB^T = 1 - cB^T.$$

Portanto, p é um $(0,1)$ -vetor. Também,

$$p1^T = (1 - cB^T)1^T = n - \alpha c1^T = n - \alpha\omega = 1.$$

Assim, p é um vetor unitário. Isto implica que p é uma linha de A .

Similarmente, todo vetor característico de um conjunto estável máximo é uma linha de B . ■

Teorema 2.4.11 (Golumbic [Go 80]). *Seja G um grafo de ordem n , e $\alpha = \alpha(G)$ e $\omega = \omega(G)$. Então G é particionável se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) $n = \alpha\omega + 1$;
- (ii) G tem exatamente n cliques máximas e n conjuntos estáveis máximos;
- (iii) todo vértice de G está contido em exatamente ω cliques máximas e em exatamente α conjuntos estáveis máximos;
- (iv) cada uma das cliques máximas intercepta todos conjuntos estáveis máximos exceto um deles, e cada conjunto estável máximo intercepta todas cliques máximas exceto uma delas.

Prova: ($\Rightarrow$) Esta implicação segue dos Lemas 2.4.9 e 2.4.10.

($\Leftarrow$) Utilizando a notação definida anteriormente, as condições (ii)-(iv) implicam que

$$AJ = JA = \omega J, \quad BJ = JB = \alpha J, \quad AB^T = J - I,$$



onde A e B são matrizes quadradas $n \times n$ cujas linhas são vetores característicos das cliques máximas e conjuntos estáveis máximos, respectivamente. Seja x_i um vértice de G e h_i^T sua correspondente coluna em A . Como

$$A^T B = B^{-1} B A^T B = B^{-1} (J - I) B = B^{-1} (\alpha J - B)$$

$$= \alpha \alpha^{-1} J - I = J - I,$$

obtemos $h_i^T B = 1 - e_i$, onde e_i é o i -ésimo vetor unitário. Assim, h_i designa ω linhas de B (isto é conjuntos estáveis) que cobrem $G - x_i$. Assim, $\chi(G - x_i) \leq \omega$. Por argumento similar, $\theta(G - x_i) \leq \alpha$ para todo x_i . Mas como $n - 1 = \alpha\omega$, temos que $\chi(G - x_i) = \omega$ e $\theta(G - x_i) = \alpha$. Portanto, G é particionável. ■

Corolário 2.4.12 (Padberg [Pa 74]) Se G é um grafo minimalmente imperfeito, as condições (i)-(iv) do Teorema 2.4.11 são satisfeitas.

Teorema 2.4.13 (Bland, Huang e Trotter [BHT 79]). Seja G um grafo particionável, $\alpha(G) = \alpha$ e $\omega(G) = \omega$. Denotemos por S_i os conjuntos estáveis de cardinalidade α com vetores característicos b_i e denotemos por B a matriz $n \times n$ cuja i -ésima linha é b_i , $i = 1, \dots, n$. O subgrafo induzido de G pela diferença simétrica de quaisquer dois conjuntos estáveis de cardinalidade α é conexo.

Prova: Suponhamos que S_i e S_j , $i \neq j$, são dois conjuntos estáveis máximos; seja b_i e b_j os vetores característicos associados. Seja

$$S_{i1} \cup S_{i2} = S_i - S_j \text{ com } S_{i1} \cap S_{i2} = \emptyset$$

e seja

$$S_{j1} \cup S_{j2} = S_j - S_i \text{ com } S_{j1} \cap S_{j2} = \emptyset,$$

onde $S_{i1} \cup S_{j1}$ é uma componente do subgrafo induzido por $(S_i - S_j) \cup (S_j - S_i)$. Assim, $S_{i1} \cup S_{j2}$ e $S_{i2} \cup S_{j1}$ são conjuntos estáveis, e consequentemente

$$S' = S_{i1} \cup S_{j2} \cup (S_i \cap S_j) \quad \text{e} \quad S'' = S_{i2} \cup S_{j1} \cup (S_i \cap S_j)$$

são conjuntos estáveis de cardinalidade α . Seja b' e b'' os vetores característicos de S' e S'' , respectivamente. Agora, $b' + b'' = b_i + b_j$, assim estes quatro vetores são linearmente dependentes. Portanto, pela independência linear dos n vetores característicos dos conjuntos estáveis de cardinalidade α , devemos ter $b_i = b'$ e $b_j = b''$ ou $b_j = b'$ e $b_i = b''$.

Portanto, o subgrafo induzido de G por $(S_1 - S_j) \cup (S_j - S_1)$ é conexo. ■

Teorema de Reed [Re 87]. *Nenhum grafo particionável contém uma dupla par.*

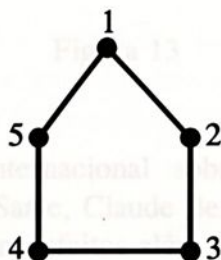
Prova: Seja x e y vértices de um grafo particionável G . Como G é particionável, x está contido em um conjunto estável S_1 de cardinalidade α em $G - y$ e também y está contido em um conjunto estável S_2 de cardinalidade α em $G - x$.

Dos teoremas 2.4.8 e 2.4.13, existe em $(S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1)$ uma cadeia elementar sem cordas ligando x a y . Como $(S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1)$ é bipartido, esta cadeia tem um número ímpar de arestas. Portanto, x e y não são uma dupla par. ■

Os únicos grafos minimalmente imperfeitos conhecidos até o momento são os ciclos sem cordas de comprimento ímpar e seus complementares.

O Grafo G da Figura 12 ilustra as condições do Teorema 2.4.11.

G:



$$n = 5, \quad \alpha(G) = 2, \quad \omega(G) = 2$$

$$K_1 = \{1, 2\}, \quad K_2 = \{2, 3\}, \quad K_3 = \{3, 4\}, \quad K_4 = \{4, 5\}, \quad K_5 = \{5, 1\}$$

$$S_1 = \{3, 5\}, \quad S_2 = \{1, 4\}, \quad S_3 = \{2, 5\}, \quad S_4 = \{1, 3\}, \quad S_5 = \{2, 4\}$$

$$\{1\} \in K_1, K_5, S_2, S_4;$$

$$\{2\} \in K_1, K_2, S_3, S_5;$$

$$\{3\} \in K_2, K_3, S_1, S_4;$$

$$\{4\} \in K_3, K_4, S_2, S_5;$$

$$\{5\} \in K_4, K_5, S_1, S_3$$

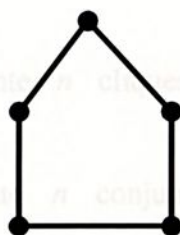
Figura 12

2.5 A conjectura Forte dos Grafos Perfeitos

O ciclo ímpar C_{2k+1} sobre $2k+1$ vértices (para $k \geq 2$) não é um grafo perfeito pois $\alpha(C_{2k+1}) = k$ e $\theta(C_{2k+1}) = k+1$ (ou, alternativamente, por $\omega(C_{2k+1}) = 2$ e $\chi(C_{2k+1}) = 3$). Porém, todo subgrafo propriamente induzido de C_{2k+1} é perfeito. Assim, C_{2k+1} é um grafo minimalmente imperfeito e pelo Teorema dos Grafos Perfeitos seu complementar $\overline{C}_{2k+1}$ é também um grafo minimalmente imperfeito.

A Figura 13 ilustra o ciclo minimalmente imperfeito C_5 e seu complementar $\overline{C}_5$.

C_5 :



$\overline{C}_5$:

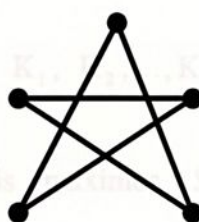


Figura 13

Durante o segundo encontro internacional sobre teoria dos Grafos, realizado em Março de 1960 em Halle an der Saale, Claude Berge levantou a questão se existe ou não outros grafos minimalmente imperfeitos além dos ciclos ímpares e sem cordas e seus complementares. Ele conjecturou que não existe, e isto tornou-se conhecido como a *conjectura forte dos grafos perfeitos* (CFGP); embora a palavra “conjectura” foi aparecer pela primeira vez em Berge[Be 62].

A conjectura forte dos grafos perfeitos pode ser enunciada por várias formas equivalentes:

CFGP-1: Um grafo é perfeito se e somente se ele não contém nenhum subgrafo induzido isomorfo ao C_{2k+1} ou ao $\overline{C}_{2k+1}$ (para $k \geq 2$).

CFGP-2: Um grafo G é perfeito se e somente se em G e $\overline{G}$ todo ciclo ímpar de comprimento ≥ 5 tem uma corda.

CFGP-3: Os únicos grafos minimalmente imperfeitos que existem são C_{2k+1} e $\overline{C}_{2k+1}$ (para $k \geq 2$).

O grafo C_{2k+1} e seu complementar $\overline{C}_{2k+1}$ são comumente referidos como *hole ímpar* e *anti-hole*, respectivamente.

Seja G um grafo minimalmente imperfeito de ordem n , e $\alpha = \alpha(G)$ e $\omega(G) = \omega$. Então as seguintes condições são satisfeitas por G .

Condição de Lovász ([Lo 72b])

$$n = \alpha\omega + 1$$

Condições de Padberg ([Go 80])

Todo vértice está em exatamente ω cliques máximas (de cardinalidade ω).

Todo vértice está em exatamente α conjuntos estáveis máximos (de cardinalidade α).

G tem exatamente n cliques máximas $K_1, K_2, \dots, K_n$ (de cardinalidade ω).

G tem exatamente n conjuntos estáveis máximos $S_1, S_2, \dots, S_n$ (de cardinalidade α).

Claramente, qualquer grafo minimalmente imperfeito deve ser conexo. Mas C_n , o ciclo sobre n vértices, é o único grafo conexo de ordem n para o qual $\omega = 2$ e tendo exatamente n arestas tal que cada vértice é extremo de duas destas arestas.

Assim, pelas condições de Padberg nós obtemos uma outra forma equivalente da conjectura forte dos grafos perfeitos:

CFGP-4: Não existe nenhum grafo minimalmente imperfeito com $\alpha > 2$ e $\omega > 2$.

Conforme apresentado na seção 2.4, os grafos particionáveis de ordem n satisfazem as condições de Lovász e Padberg. O grafo da Figura 14 é particionável mas não é minimalmente imperfeito.

Por esta razão, as condições de Lovász e Padberg sozinhas não são suficientes para provar a conjectura forte dos grafos perfeitos.

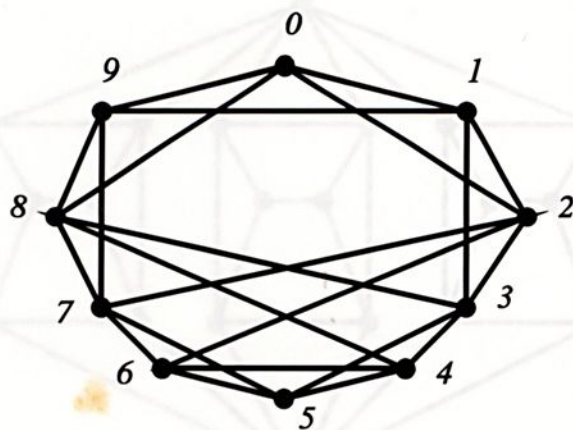


Figura 14: Um grafo que satisfaz as condições de Lovász e Padberg mas que não é minimalmente imperfeito. Este exemplo foi descoberto por Huang [Hu 76].

Um grafo G é dito ser *Berge* se nem G e nem seu complementar $\bar{G}$ contém um hole ímpar.

Observamos que cada grafo perfeito é também um grafo Berge e $\text{Berge} = \text{perfeito}$ se e somente se a CFGP é verdadeira.

De um teorema de König [Kö 16] sobre grafos bipartidos pode-se derivar facilmente o seguinte lema:

Lema 2.5.1 Nenhum grafo minimalmente imperfeito é grafo de linha de um grafo bipartido.

Este lema que citamos juntamente com o Lema da Dupla Par e o Lema do Corte Estrela motivaram Reed em 1986 a propor a seguinte conjectura:

Conjectura de Reed [Re 86]. *Todo grafo Berge G satisfaz pelo menos uma das seguintes condições:*

- (I) G ou $\bar{G}$ contém um corte estrela.
- (II) G ou $\bar{G}$ contém uma dupla par.
- (III) G ou $\bar{G}$ é o grafo de linha de um grafo bipartido.

A Conjectura de Reed implicaria a CFGP, isto é, sua validade de fato provaria que todo grafo Berge é perfeito.

Porém, Hougardy [Ho 93] apresentou o grafo da Figura 15 como um contra-exemplo para a conjectura de Reed.

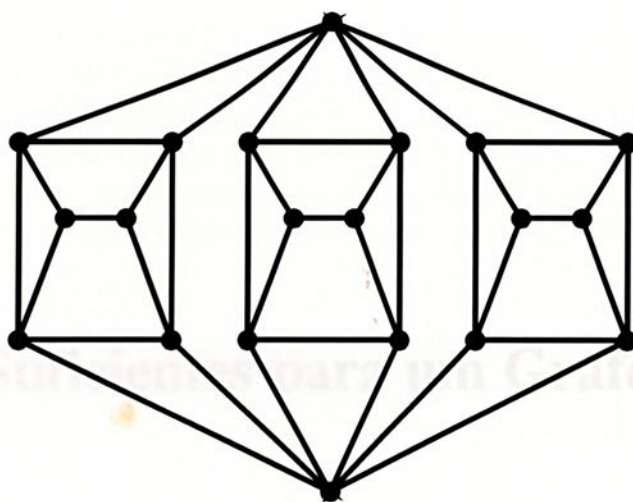


Figura 15

Se nós nos restringirmos à algumas classes especiais de grafos e considerarmos condições adicionais, então, a CFGP se mostra verdadeira. Algumas destas classes são os grafos Planares [Tu 73], os grafos 3-Cromáticos [Tu 77], os grafos sem Touros [ChS 87]. Para outras classes de grafos para a quais se tem provado que a CFGP é verdadeira, bem como para comentários sobre esta conjectura, citamos [Br 93].

A conjectura forte dos grafos perfeitos ainda está em aberto e tem se constituído durante décadas um formidável desafio para a pesquisa.

Capítulo 3

Condições Suficientes para um Grafo ser Perfeito

3.1 Preliminares

Encontrar condições suficientes para perfeição significa encontrar classes de grafos perfeitos, e algumas destas classes foram apresentadas na seção 2.3.

Uma das condições foi dada por Meyniel [Me 84] que provou o seguinte teorema: *Se todo ciclo ímpar de comprimento ≥ 5 tem pelo menos duas cordas, então o grafo é perfeito.* Este teorema, que parece ser o melhor possível no que diz respeito à cordas em ciclos ímpares, generaliza um resultado de Gallai e Surányi e também um resultado de Olaru e Sachs.

Uma outra condição suficiente para que um grafo seja perfeito foi proposta por Preissmann [Pr 90] que definiu um novo tipo de coloração, a coloração localmente perfeita, e mostrou que se todo subgrafo induzido de um grafo tem uma tal coloração então este grafo é perfeito.

Antes de apresentarmos as condições suficientes para que um grafo seja perfeito precisamos definir alguns conceitos.

Uma *coloração* dos vértices de um grafo G é *localmente perfeita* se todo vértice x tem sua vizinhança $N_G(x)$ colorida com $\omega(N_G(x))$ cores.

Uma k -coloração de um grafo G pode ser considerada como um mapeamento f do conjunto de vértices $V(G)$ em um conjunto S de k cores tal que nenhum par de vértices adjacentes tenham a mesma cor.

Uma *troca* (relativamente a S) é uma operação sobre S definida como seguinte: tomemos uma componente conexa H do subgrafo $G_{\alpha\beta}$ induzido pelos vértices de cores $\alpha, \beta \in S$. Se H tem pelo menos um vértice de cada cor α, β , nós permutamos as cores α e β para todos os vértices em H , as cores dos outros vértices não são alteradas. Se H tem somente um vértice, digamos de cor α , colorimos este vértice com β e colorimos com β todas as componentes de $G_{\alpha\beta}$ consistindo apenas de um único vértice de cor α .

Seja G a classe de todos os grafos tais que todo ciclo ímpar de comprimento ≥ 5 tem pelo menos duas cordas, e consideremos $G \in \mathcal{G}$. Para $k > \chi(G)$, seja f uma k -coloração de G . Nós mostraremos primeiro que é possível obter de f uma coloração de G com $\chi(G)$ cores por uma sequência de trocas.

Lema 3.6.1 *Seja $G \in \mathcal{G}$, x um vértice de G e $N_G(x)$ a sua vizinhança em G . Consideremos uma k -coloração de $V(G) - \{x\}$. Se y_1 e y_2 são dois vértices de $N_G(x)$ com cores distintas α, β , respectivamente, pertencentes a uma componente H de $G_{\alpha\beta}$, então y_1 e y_2 são ligados por uma $[\alpha, \beta]$ -cadeia contida em $N_G(x)$.*

Prova: Seja $\mu[y_1, y_2] = (y_1 = x_1, x_2, \dots, x_{2p} = y_2)$ uma cadeia de $G_{\alpha\beta}$ de menor comprimento entre y_1 e y_2 . O ciclo $\mu = \mu[y_1, y_2] + [x, y_1] + [x, y_2]$ é ímpar e tem somente cordas saindo de x . Vamos assumir que existe um vértice a de $\mu[y_1, y_2]$ que não está em $N_G(x)$; mostraremos que isto leva a uma contradição. Seja x_i o último vértice em $N_G(x)$ que está antes de a sobre $\mu[y_1, y_2]$, e x_j o primeiro vértice em $N_G(x)$ que está depois de a sobre $\mu[y_1, y_2]$. Claramente, $\mu[x_i, x_j]$ é de comprimento par porque senão o ciclo $(x, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, x)$ seria um ciclo ímpar de comprimento ≥ 5 sem cordas.

Seja x_k o vértice de $N_G(x)$ depois de x_j sobre $\mu[y_1, y_2]$. Temos $k > j+1$, senão $(x, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, x_{j+1}, x)$ seria um ciclo ímpar de comprimento ≥ 5 com somente uma corda. Como anteriormente, $\mu[x_j, x_k]$ é de comprimento par. Assim todas as secções de $\mu[y_1, y_2]$ entre dois vértices de $N_G(x)$ são pares, e portanto a cadeia $\mu[y_1, y_2]$ é par, uma contradição. ■

Lema 3.6.2 *Seja $G \in \mathcal{G}$, x um vértice de G , e $f: V(G) - \{x\} \rightarrow S$ uma k -coloração do subgrafo $G - x$. Seja $\bar{f}$ a restrição de f para o subgrafo G' induzido por $N_G(x)$.*

Para toda k -coloração $\bar{f}_1$ de G' que é obtida de $\bar{f}$ por uma sequência de trocas relativamente a S existe uma k -coloração g de $G - x$, obtida de f por uma sequência de trocas relativamente a S , tal que $\bar{g} = \bar{f}_1$.



Prova: Cada componente H de $G_{\alpha\beta}$ intercepta G' em uma simples componente ou em várias componentes. No pior caso, o Lema 3.6.1 garante que cada uma das várias componentes é um único vértice. Portanto, cada troca em G' compreende uma troca ou uma sequência de trocas de G . ■

Teorema 3.6.3 *Seja $G \in \mathcal{G}$, e $f: V(G) \rightarrow S$ uma k -coloração de G . Então existe uma coloração de G com $\chi(G)$ cores que é obtida de f por uma sequência de trocas relativamente a S .*

Prova: Se a ordem do grafo G é 1, então o teorema é obviamente verdadeiro. Seja $n > 1$. Vamos assumir que o resultado é verdadeiro para todos grafos com ordem $< n$; mostraremos que ele também é verdadeiro para todo grafo de ordem n .

Seja $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, com $k > \chi(G) = q$, e considere uma k -coloração $f: V(G) \rightarrow S$. Existe em G um vértice x colorido com $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ (senão nada mais temos que provar).

Seja H o subgrafo de G induzido por x e os vértices de cor $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$. Como $\chi(G) = q$, o subgrafo H' de H induzido por $N_H(x)$ satisfaz $\chi(H') \leq q - 1$.

Pela hipótese de indução, H' , que é de ordem menor que n e pertence a $\mathcal{G}$, tem uma coloração $\bar{f}_1$ com $\chi(H')$ cores obtida da restrição $\bar{f}$ de f para o subgrafo H' por uma sequência de trocas relativa a $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q\}$.

Pelo Lema 3.6.2, $\bar{f}_1$ pode ser obtida de f por uma sequência de trocas relativa a $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q\}$. Depois desta sequência de trocas, podemos colorir x com uma das cores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$; em outras palavras, podemos ir aumentando o conjunto de vértices coloridos com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$. Este processo pode ser repetido até que todos os vértices de G sejam coloridos com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$. Assim, obtemos uma coloração de G com $\chi(G)$ cores. ■

3.2 As Condições

Podemos agora provar o teorema de Meyniel:

Teorema 3.6.4 (Meyniel [Me 84]). *Seja G um grafo tal que todo ciclo ímpar de comprimento ≥ 5 tem pelo menos duas cordas. Então G é perfeito.*

Prova: Considere um grafo $G \in \mathcal{G}$ que não é perfeito e de ordem minimal. Assim, se $q = \chi(G)$, nós temos $\omega(G) < \chi(G) = q$; além disso, para todo conjunto $A \subset V(G)$, $A \neq V(G)$,

$$\chi(G[A]) = \omega(G[A]) \leq q - 1. \quad (\text{I})$$

Seja x um vértice de G ; assim o subgrafo $G - x$ tem uma $(q - 1)$ - coloração f . Seja $\bar{f}$ a restrição de f para o subgrafo G' induzido por $N_G(x)$.

Temos $\chi(G') \geq q - 1$: senão, pelo Teorema 3.6.3, o subgrafo G' tem uma $(q - 2)$ - coloração $\bar{f}_1$, que é obtida de $\bar{f}$ por trocas; assim, pelo Lema 3.6.2, existe uma $(q - 1)$ - coloração g de $G - x$ com $\bar{g} = \bar{f}_1$. Portanto, $\chi(G) \leq q - 1$, uma contradição.

Seja $A = \{x\} \cup N_G(x)$, então $\chi(G[A]) \geq q$; assim, por (I), $A = V(G)$, e x é adjacente a todos outros vértices. Como x foi escolhido arbitrariamente, isto mostra que G é um grafo completo. Portanto $\chi(G) = \omega(G)$, e segue a contradição. ■

Corolário 3.6.5 (Gallai [Ga 62]) *Seja G um grafo tal que todo ciclo ímpar de comprimento maior que 3 tem pelo menos duas cordas não se cruzando; então G é perfeito.*

Corolário 3.6.6 (Olaru, Sachs [OLS 70]) *Seja G um grafo tal que todo ciclo ímpar de comprimento > 3 tem pelo menos duas cordas se cruzando; então G é perfeito.*

Corolário 3.6.7 (Hajnal e Suranyi [HaS 58]) *Seja G um grafo triangularizado. Então G é perfeito.*

Prova: Neste caso, todo ciclo ímpar de comprimento ≥ 5 tem pelo menos duas cordas e o teorema segue. ■

Corolário 3.6.8 (Seinsche [Se 74]) *Seja G um grafo não tendo nenhum subgrafo induzido P_4 (cadeia elementar com 4 vértices e nenhuma corda), então G é perfeito.*

Prova: Todo ciclo ímpar de comprimento pelo menos 5 e com no máximo uma corda contém um subgrafo induzido P_4 . ■

Lema 3.6.9 *Seja G um grafo minimalmente imperfeito. Para todo par de vértices x e y há uma sequência de cliques máximas $K_1, K_2, \dots, K_n$ tal que*

- x pertence a K_1 ,
- y pertence a K_n ,
- K_i e K_{i+1} tem pelo menos um vértice em comum para $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

Prova: Seja W o conjunto de vértices obtido pelo seguinte algoritmo:

(1) $W := \{y\}$

(2) Enquanto existir uma clique K de G tal que K tem pelo menos um vértice em W e um vértice fora de W faça $W := W \cup K$.

No final deste algoritmo devemos ter $W = V(G)$. De fato, suponhamos o contrário: então temos uma partição de $V(G)$ em dois conjuntos W e $\bar{W}$ tal que qualquer clique máxima de G está incluída em W ou $\bar{W}$.

Como G é minimalmente imperfeito, conforme vimos na seção 2.4, G - y pode ser particionado em $\alpha(G)$ cliques disjuntas de cardinalidade $\omega(G)$, assim em α' cliques máximas incluídas em W e α'' cliques máximas incluídas em $\bar{W}$. Consideremos $\bar{w}$ um elemento de $\bar{W}$. Pela mesma razão deve haver uma partição de $V(G) - \{\bar{w}\}$ em α^* cliques máximas incluídas em W e α^{**} cliques máximas incluídas em $\bar{W}$. Assim, $|\bar{W}| = \alpha''\omega(G) = \alpha^{**}\omega(G) + 1$ e isto implicaria que $\omega(G) = 1$!

Assim, temos que $W = V(G)$ e o vértice x pertence a W . Seja K_1 a clique máxima que permitiu que x fosse adicionado a W . Deve haver pelo menos um vértice de K_1 que estava em W antes de K_1 ser adicionada a W . Se nenhum deles é igual a y então existe uma clique máxima K_2 que permitiu que um deles fosse adicionado a W . Se continuarmos com este raciocínio, obtemos a sequência de cliques máximas desejada. ■

O Teorema de Preissmann. *Seja G um grafo. Se todos subgrafos induzidos de G tem uma coloração localmente perfeita então G é perfeito.*

Prova: Suponhamos que existe um grafo G tal que todo subgrafo induzido G' tem uma coloração localmente perfeita e que G não seja perfeito. G contém um grafo H minimalmente imperfeito. Consideremos uma coloração localmente perfeita de H com k cores. Seja $C(x)$ o conjunto de cores de $N_H(x) \cup \{x\}$ para todo vértice x de H . Como em um grafo minimalmente imperfeito todo vértice pertence a uma clique máxima (ver seção 2.4) temos que $|C(x)| = \omega(H)$ para todo $x \in V(H)$, e para todo par de vértices x e y pertencentes a uma mesma clique máxima temos $C(x) = C(y)$. Mas pelo Lema 3.6.9 temos que H é colorido com $\omega(H)$ cores contrariando o fato que H é imperfeito. ■

Os grafos tais que qualquer subgrafo induzido tem uma coloração localmente perfeita são chamados *localmente perfeitos*. É fácil ver que os grafos bipartidos são localmente perfeitos.

O grafo da Figura 16 é localmente perfeito.

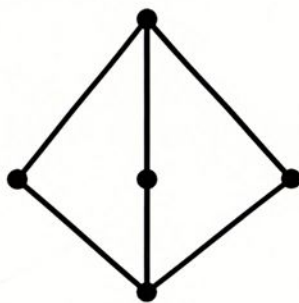


Figura 16

Observamos, porém, que nem todo grafo perfeito tem uma coloração localmente perfeita. O grafo perfeito da Figura 17 não possui nenhuma tal coloração.

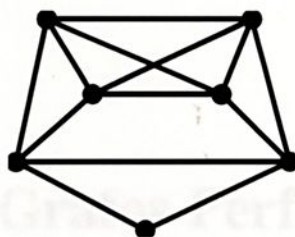


Figura 17

4.1 Grafos q -Perfeitos

Seja q um inteiro positivo. Uma q -coloração parcial de um grafo G é um conjunto de q conjuntos estáveis dois a dois disjuntos $S_1, S_2, \dots, S_q$, cada um correspondendo a uma "cor"; alguns vértices podem não possuir cor.

O maior número possível de vértices coloridos em uma q -coloração parcial será denotado por $\alpha_q(G)$.

Uma q -coloração parcial de um grafo G é ótima se $\alpha_q(G)$ vértices são coloridos.

Para um grafo G , consideremos $M = (K_1, K_2, \dots)$ uma partição de $V(G)$ em cliques; definimos a q -norma de M como

$$B_q(M) = \sum_i \min\{|K_i|, q\}.$$

Denotaremos por $\theta_q(G)$ a mínima q -norma para as partições em cliques de G . Se $B_q(M) = \theta_q(G)$, dizemos que M é q -ótima.

Para toda partição em cliques $M = (K_1, K_2, \dots)$ e para toda q -coloração parcial $(S_1, S_2, \dots, S_q)$, temos

$$(i) \quad |V - S_1| = \sum_i |K_i \cap S_1| \leq \sum_i \min\{|K_i|, q\} = B_q(M).$$

Portanto, $\alpha_q(G) \leq \theta_q(G)$.

Um grafo G é dito ser q -perfeito se para todo subgrafo induzido $G[A]$ de G satisfaz $\alpha_q(G[A]) = \theta_q(G[A])$; claramente $\alpha_1(G) = \alpha(G)$, $\theta_1(G) = \theta(G)$, e um grafo é 1-perfeito se e somente se ele é um grafo perfeito.

Capítulo 4

Uma Variação de Grafos Perfeitos

4.1 Grafos q -Perfeitos

Seja q um inteiro positivo. Uma q -coloração parcial de um grafo G é um conjunto de q conjuntos estáveis dois a dois disjuntos $S_1, S_2, \dots, S_q$, cada um correspondendo a uma “cor”; alguns vértices podem não possuir cor.

O maior número possível de vértices coloridos em uma q -coloração parcial será denotado por $\alpha_q(G)$.

Uma q -coloração parcial de um grafo G é *ótima* se $\alpha_q(G)$ vértices são coloridos.

Para um grafo G , consideremos $M = (K_1, K_2, \dots)$ uma partição de $V(G)$ em cliques; definimos a q -norma de M como:

$$B_q(M) = \sum_{j \geq 1} \min\{|K_j|, q\}.$$

Denotaremos por $\theta_q(G)$ a mínima q -norma para as partições em cliques de G . Se $B_q(M) = \theta_q(G)$, dizemos que M é q -ótima.

Para toda partição em cliques $M = (K_1, K_2, \dots)$ e para toda q -coloração parcial $(S_1, S_2, \dots, S_q)$, temos

$$(I) \quad \left| \bigcup_{i=1}^q S_i \right| = \sum_j |K_j \cap S_i| \leq \sum_j \min\{|K_j|, q\} = B_q(M).$$

Portanto, $\alpha_q(G) \leq \theta_q(G)$.

Um grafo G é dito ser q -perfeito se para todo subgrafo induzido $G[A]$ de G satisfaz $\alpha_q(G[A]) = \theta_q(G[A])$; claramente $\alpha_1(G) = \alpha(G)$, $\theta_1(G) = \theta(G)$, e um grafo é 1-perfeito se e somente se ele é um grafo perfeito.

É fácil ver que, em uma q -coloração parcial de um grafo G , uma clique K de G pode conter no máximo $\min\{|K|, q\}$ vértices coloridos; uma clique K é *fortemente colorida* se ela contém exatamente $\min\{|K|, q\}$ vértices coloridos.

A Figura 18 ilustra 2-colorações parciais ótimas do grafo de Hajos H , com $\alpha_2(H) = 4$ e $\theta_2(H) = 5$.

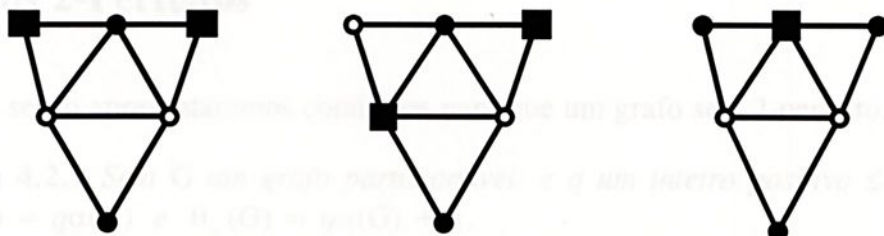


Figura 18

Proposição 4.1.1 *Seja G um grafo, e q um inteiro positivo. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\alpha_q(G) = \theta_q(G)$.
- (ii) *para pelo menos uma partição em cliques M e uma q -coloração parcial, todas as cliques de M são fortemente coloridas.*
- (iii) *para toda q -coloração parcial ótima e para toda partição em cliques q -ótima M , todas as cliques de M são fortemente coloridas.*

Esta proposição segue imediatamente das desigualdades em (I).

Proposição 4.1.2 *Seja G um grafo de ordem n e q um inteiro positivo $\geq \omega(G)$. Então, $\alpha_q(G) = \theta_q(G)$ se e somente se $\chi(G) \leq q$.*

Primeiramente, vamos assumir que $\alpha_q(G) = \theta_q(G)$, e seja M uma partição em cliques q -ótima. Temos que:

$$\alpha_q(G) = B_q(M) = \sum_{K \in M} \min\{|K|, q\} = \sum_{K \in M} |K| = n.$$

Assim, é possível colorir G com somente q cores; portanto $q \geq \chi(G)$.

Por outro lado, se q cores são suficientes, nós temos, para toda partição em cliques q -ótima M ,

$$\alpha_q(G) = n = \sum_{K \in M} |K| = \sum_{K \in M} \min\{|K|, q\} = B_q(M) = \theta_q(G).$$

Assim, $\alpha_q(G) = \theta_q(G)$.

Corolário 4.1.3 *Todo grafo G é q -perfeito para $q \geq \chi(G)$.*

Seja $A \subset V(G)$ e $q \geq \chi(G)$. Nós temos: $q \geq \chi(G[A]) \geq \omega(G[A])$. Assim, pela Proposição 4.1.2, $\alpha_q(G[A]) = \theta_q(G[A])$.

Já que esta igualdade é satisfeita para todo $A \subset V(G)$, o grafo G é q -perfeito.

4.2 Grafos 2-Perfeitos

Nesta seção apresentaremos condições para que um grafo seja 2-perfeito.

Lema 4.2.1 *Seja G um grafo particionável, e q um inteiro positivo $\leq \omega(G)$. Então $\alpha_q(G) = q\alpha(G)$ e $\theta_q(G) = q\alpha(G) + 1$.*

Prova: Seja G um grafo particionável com $\alpha(G) = \alpha$ e $\omega(G) = \omega$, isto é, $\alpha \geq 2$, $\omega \geq 2$, e para todo vértice x , existe duas partições $P = \{\{x\}, S_1, S_2, \dots, S_\omega\}$ e $M = \{\{x\}, K_1, K_2, \dots, K_\alpha\}$ onde os S_i são conjuntos estáveis máximos e os K_i são cliques máximas. Assim $|S_i \cap K_j| = 1$ para todo i, j e $|S_i| = \alpha$, $|K_j| = \omega$.

Para um grafo particionável G , temos $\alpha_q(G) \geq q\alpha$ porque $(S_1, S_2, \dots, S_q)$ é uma q -coloração parcial com $q\alpha$ vértices coloridos. Não podemos ter $\alpha_q(G) > q\alpha$ porque isto implicaria que uma das q classes de cores seja de cardinalidade $> \alpha$, uma contradição. Portanto, $\alpha_q(G) = q\alpha$.

Por outro lado, temos $\theta_q(G) \leq q\alpha + 1$ porque $M = (\{x\}, K_1, K_2, \dots, K_\alpha)$ é uma partição em cliques com $B_q(M) = q\alpha + 1$. Nós não podemos ter $\theta_q(G) < q\alpha + 1$, porque isto implicaria a existência de uma partição em cliques M' com $B_q(M') \leq q\alpha$: como $\alpha\omega + 1 = V(G) \leq |M'| \cdot \alpha$, temos $|M'| > \alpha$, e pelo menos uma classe de M' é de cardinalidade $< q$. Podemos assumir que uma classe de M' é um único elemento $\{x_0\}$ sem que isto mude o valor de $B_q(M')$. Como G é particionável, existe uma partição em cliques $\bar{M} = (\{x_0\}, \bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_\alpha)$ com $|\bar{K}_j| = \omega$ para todo j ; nós temos $q\alpha + 1 = B_q(\bar{M}) \leq B_q(M') \leq q\alpha$. Uma contradição.

Portanto, $\theta_q(G) = q\alpha + 1$. ■

Teorema 4.2.2 (Berge [Be 92a]). *Todo grafo 2-perfeito é perfeito.*

Prova: Se um grafo 2-perfeito G não fosse perfeito, então ele conteria um subgrafo induzido particionável $G[A]$ com $\alpha(G[A]) = \alpha \geq 2$ e $\omega(G[A]) = \omega \geq 2$. Pelo lema anterior, $\alpha_2(G) \neq \theta_2(G)$, o que contradiz que G é um grafo 2-perfeito. ■

Olaru e Sachs [OIS 84] introduziram uma família de grafos caracterizados pela seguinte propriedade: todo ciclo ímpar de comprimento de comprimento > 3 tem



duas cordas se cruzando. Conforme vimos no Capítulo 3, estes grafos são perfeitos. Mais tarde eles foram chamados *grafos paridade* porque podem ser caracterizados pela propriedade equivalente: *para todo par de vértices, todas as cadeias sem cordas que os liga tem a mesma paridade*.

Denotemos por C_{2k+1} o ciclo ímpar de comprimento $2k + 1$, C'_{2k+1} o grafo obtido de C_{2k+1} por se acrescentar uma corda ligando um par de vértices a uma distância 2, e C''_5 o ciclo de comprimento 5 com duas cordas não se cruzando (ver Figura 19).

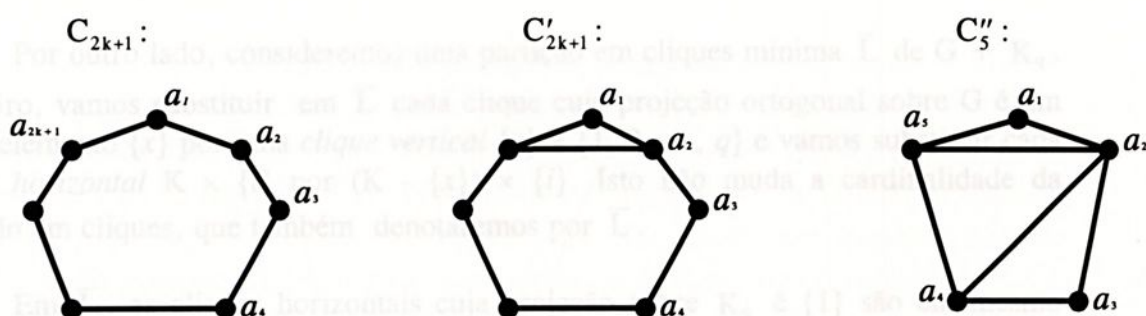


Figura 19

Claramente, os grafos da Figura 19 não são grafos paridade, porque os vértices a_1 e a_3 são ligados por uma cadeia ímpar e uma cadeia par. De fato, Burlet e Uhry [BuU 84] provaram que *um grafo é paridade se e somente se ele não contém como subgrafo induzido nenhum dos grafos: C_{2k+1} com $k \geq 2$, C'_{2k+1} com $k \geq 2$, e C''_5 .*

Nós mostraremos que os grafos paridade são 2-perfeitos usando o conceito de *soma cartesiana* $G + H$ de dois grafos G e H : por definição, o conjunto de vértices de $G + H$ é o produto cartesiano $V(G) \times V(H)$, e dois vértices $\{x, y\}$, $\{x', y'\}$ são adjacentes em $G + H$ se $x = x'$ e $\{y, y'\} \in A(H)$; ou $\{x, x'\} \in A(G)$ e $y = y'$.

Lema 4.2.3 $\alpha_q(G) = \alpha(G + K_q)$ para todo inteiro positivo q .

Prova: Denotemos por K_q o grafo completo sobre $\{1, 2, \dots, q\}$. Um conjunto estável $\bar{S}$ de $G + K_q$ define uma q -coloração parcial $(S_1, \dots, S_q)$ do grafo G como seguinte: $x \in S_i$ se e somente se $\{x, i\} \in \bar{S}$. Claramente, $(S_1, S_2, \dots, S_q)$ é uma coloração parcial de G , e $|\cup S_i| = |\bar{S}|$. Por outro lado, cada q -coloração parcial de G define um conjunto estável de $G + K_q$ com a mesma cardinalidade. Portanto:

$$\alpha_q(G) = \alpha(G + K_q).$$

Lema 4.2.4 $\theta_q(G) = \theta(G + K_q)$ para todo inteiro positivo q .

Prova: Uma partição em cliques M de G com $B_q(M) = \theta_q(G)$ determinará uma partição em cliques $\overline{M}$ de $G + K_q$ como seguinte: Cada $K \in M$ com $|K| \geq q$ será representada em $\overline{M}$ pelas cliques $K \times \{i\}$ com $i = 1, 2, \dots, q$; cada $K \in M$ com $|K| < q$ será representada em $\overline{M}$ pelas cliques $\{x\} \times \{1, 2, \dots, q\}$ com $x \in K$. Assim, $\overline{M}$ é uma partição em cliques de $G + K_q$. Temos:

$$(II) \quad \theta(G + K_q) \leq |\overline{M}| = \sum_{K \in M} \min\{|K|, q\} = B_q(M) = \theta_q(G).$$

Por outro lado, consideremos uma partição em cliques mínima $\overline{L}$ de $G + K_q$. Primeiro, vamos substituir em $\overline{L}$ cada clique cuja projeção ortogonal sobre G é um único elemento $\{x\}$ por uma *clique vertical* $\{x\} \times \{1, 2, \dots, q\}$ e vamos substituir cada *clique horizontal* $K \times \{i\}$ por $(K - \{x\}) \times \{i\}$. Isto não muda a cardinalidade da partição em cliques, que também denotaremos por $\overline{L}$.

Em $\overline{L}$, as cliques horizontais cuja projeção sobre K_q é $\{1\}$ são em mesmo número que as cliques horizontais cuja projeção é $\{i\}$, onde $i > 1$ (senão $\overline{L}$ não seria mínima). Denotemos por P_1 o conjunto de toda K tal que $K \times \{1\} \in \overline{L}$. Denotemos por $\overline{M}$ a partição em cliques de $G + K_q$ obtida com toda $K \times \{i\}$ tal que $K \in P_1$ e $i \leq q$ e com as cliques verticais de $\overline{L}$. Como $|\overline{M}| = |\overline{L}|$, a partição em cliques $\overline{M}$ também é mínima; e, todo $K \in P_1$ é de cardinalidade $\geq q$ (senão, uma clique K com menos que q elementos estaria associada em $G + K_q$ com $|K| < q$ cliques verticais, que dá uma partição em cliques melhor e contradiz assim a minimalidade de $\overline{L}$).

Agora, se P denota a partição em cliques de G obtida por se adicionar à família P_1 quantos conjuntos de um elemento se fizer necessário, temos:

$$(III) \quad \theta_q(G) \leq B_q(P) = |\overline{M}| = \theta(G + K_q).$$

De (II) e (III), conseguimos a igualdade: $\theta_q(G) = \theta(G + K_q)$.

Lema 4.2.5 Um grafo G satisfaz $\alpha_2(G) = \theta_2(G)$ se e somente se $\theta(G + K_2) = \alpha(G + K_2)$.

Este lema segue imediatamente dos lemas 4.2.3 e 4.2.4. ■

Teorema 4.2.6 (Berge [Be 89b]). Seja G um grafo, $2 \leq q \leq \chi(G)$. A soma cartesiana $G + K_q$ é perfeita se e somente se

$q = 2$, e G é um grafo paridade; ou

$q \geq 3$, e G é um grafo cujos blocos são cliques.

Prova: A condição é necessária. Denotemos por C_k o ciclo de comprimento k e consideremos C_{2k+1} , C'_{2k+1} e C''_5 conforme definidos anteriormente. Seja $q = 2$ e G um grafo que não é um grafo paridade. Então G contém um C''_5 , ou um C_{2k+1} com $k \geq 2$, ou um C'_{2k+1} com $k \geq 2$ (como mostrado por Burlet e Uhry [BuU 84]).

No primeiro caso, $C''_5 + K_2$ contém um ciclo ímpar sem cordas: $a2, b2, b1, c1, d1, d2, e2, a2$ representado pelas setas na Figura 20. Similarmente existe um ciclo ímpar sem cordas em $C_{2k+1} + K_2$ e em $C'_{2k+1} + K_2$ (basta remover na Figura 20 as arestas $\{a2, c2\}$ e $\{a1, c1\}$, e então as arestas $\{c2, e2\}$ e $\{c1, e1\}$). Em todos os casos, o grafo $G + K_2$ contém um ciclo ímpar sem cordas, e consequentemente não pode ser perfeito.

Seja $q \geq 3$, e G um grafo onde alguns blocos não são cliques. Então G contém um ciclo C'_4 ou um C_k com $k \geq 4$. Se G contém um C_k com k ímpar ≥ 5 , vemos que a soma cartesiana $C_k + K_2$ contém um C_{k+2} . Se G contém um C_k com k par ≥ 4 , então $C_k + K_3$ contém um C_{k+3} (ver as setas na Figura 21). Se G contém um C'_4 , vemos que $C'_4 + K_3$ contém um C_7 (ver Figura 21). Assim, em qualquer caso, o grafo $G + K_q$ contém um ciclo ímpar sem cordas, e, portanto não é perfeito.

$$C''_5 + K_2:$$

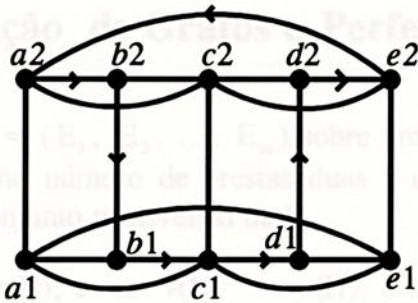


Figura 20

$$C'_4 + K_3:$$

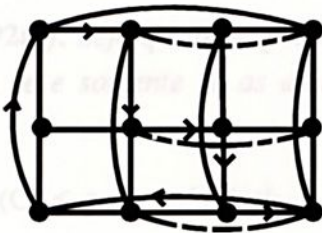


Figura 21

A condição é suficiente.

Seja $q \geq 3$, e G um grafo cujos blocos são cliques. Então G não contém um C'_4 . O grafo $G + K_q$ não contém um C'_4 , porque senão, pelo menos dois vértices deste C'_4 teriam a mesma projeção vértical (mas não os quatro deles), e todas possibilidades levam à uma contradição.

Pelo mesmo argumento, $G + K_q$ não contém um C_{2k+1} com $k \geq 2$. Então a perfeição de $G + K_q$ segue de um teorema de Ravindra e Parthasarathy [RaP 77] que afirma que um grafo que não contém nenhum C'_4 e nenhum C_{2k+1} com $k \geq 2$ é perfeito. Para $q = 2$, a prova é similar. ■

Teorema 4.2.7(Berge [Be 92b]). *Todo grafo paridade é 2-perfeito.*

Prova: Seja G um grafo paridade. Pelo teorema 4.2.6, o grafo $G + K_2$ é perfeito, e, para todo $A \subset V(G)$, $G[A] + K_2$ é um subgrafo induzido de $G + K_2$. Portanto:

$$\alpha_2(G[A]) = \alpha(G[A] + K_2) = \theta(G[A] + K_2) = \theta_2(G[A]).$$

Assim, G é 2-perfeito. ■

Esta é a única caracterização de grafos 2-perfeitos conhecida até o momento [Be 94], e os grafos 3-perfeitos ainda não estão caracterizados.

4.3 Uma Caracterização de Grafos q -Perfeitos

Para um hipergrafo $H = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ sobre um conjunto X de vértices, denotemos por $\nu(H)$ o máximo número de arestas duas a duas disjuntas, e $r(H)$ a menor cardinalidade de um conjunto transversal de H .

Claramente, $\nu(H) \leq r(H)$, e se $\nu(H) = r(H)$, o hipergrafo H é dito ter a *propriedade de König*.

Para um conjunto $A \subset X$, façamos H/A denotar o hipergrafo parcial de H definido pelas arestas contidas em A ; se H/A tem a propriedade de König para todo A , dizemos que H é um *hipergrafo mengeriano*.

Teorema 4.3.1(Berge [Be 92a]). *Seja q inteiro positivo ≥ 2 ; seja G_0 um grafo sem K_{q+2} . Então G_0 é q -perfeito se e somente se as duas seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) *todo subgrafo G com $\omega(G) \leq q$ é q -colorível;*
- (ii) *para todo subgrafo G , o hipergrafo G^{q+1} das $(q+1)$ -cliques de G tem a propriedade de König.*

Prova: Seja G_0 um grafo q -perfeito sem K_{q+2} . Temos que (i) é satisfeita porque senão, G_0 iria conter um subgrafo G com

$$\alpha_q(G) < |V(G)|, \omega(G) \leq q.$$

Como $\omega(G) \leq q$, a q -norma $B_q(M)$ de qualquer partição em cliques q -ótima M é igual a $|V(G)|$ e consequentemente $\theta_q(G) = |V(G)|$.

Assim, $\alpha_q(G) < \theta_q(G)$, uma contradição.

Nós temos (ii), porque para um subgrafo G de G_0 , uma partição q -ótima M contém exatamente $\nu(G^{q+1})$ classes de cardinalidade $q + 1$, e, consequentemente,

$$\nu(G^{q+1}) = |V(G)| - B_q(M) = |V(G)| - \theta_q(G).$$

De (i), o subgrafo G é q -colorável se e somente se ele pode ser obtido de G_0 pela remoção de um conjunto transversal de G_0^{q+1} , e, consequentemente,

$$\theta_q(G) = \alpha_q(G) = |V(G)| - r(G^{q+1}).$$

Vamos assumir agora que G_0 satisfaz (i) e (ii). Então, para todo subgrafo G de G_0 ,

$$\alpha_q(G) = |V(G)| - r(G^{q+1}) = |V(G)| - \nu(G^{q+1}) = B_q(M) = \theta_q(G).$$

Assim, G_0 é q -perfeito. ■

Corolário 4.3.2 Um grafo G sem K_4 é 2-perfeito se e somente se as duas seguintes condições são satisfeitas:

(i') G não contém o ciclo C_{2k+1} de comprimento $k \geq 2$;

(ii') o hipergrafo G^3 é mengeriano.

A prova deste corolário segue do Teorema 4.3.1 com $q = 2$.

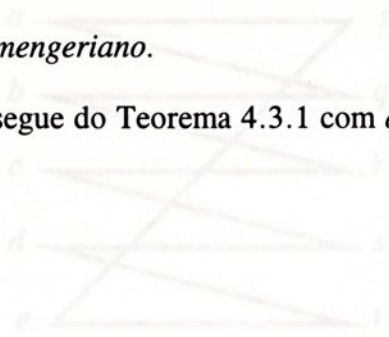


Figura 23

Capítulo 5

Uma Aplicação de Grafos Perfeitos na Teoria de Códigos

5.1 O Problema de Shannon

Não são muitas as aplicações conhecidas de grafos perfeitos.

Uma delas se constitui no seguinte problema levantado por Shannon [Sh 56].

Consideremos um caso bem simples de um transmissor que pode emitir cinco sinais a, b, c, d, e .

Cada sinal pode fornecer para um receptor final duas diferentes interpretações: o sinal a pode ser interpretado por p ou q ; o sinal b pode ser interpretado por q ou r , etc ..., como mostrado no diagrama da Figura 23.

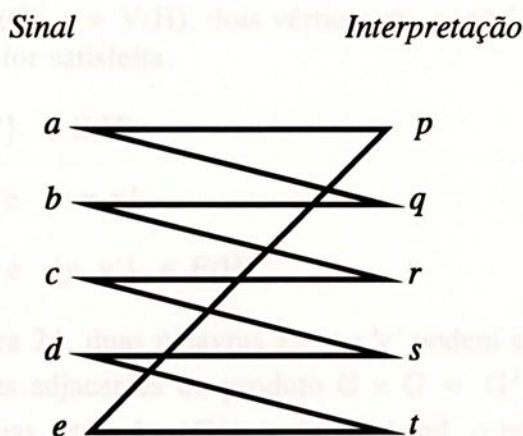


Figura 23

Qual o número de sinais que podem ser usados de modo que não haja confusão na recepção dos mesmos ?

O problema se reduz a descobrir um conjunto estável máximo S de um grafo confusão G (Figura 24) onde dois vértices são adjacentes se eles representam dois sinais que podem ser confundidos; nós tomamos $S = \{a, c\}$ e $\alpha(G) = 2$.

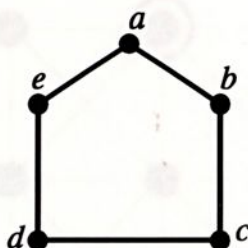


Figura 24: O grafo confusão G .

Agora, ao invés de utilizarmos sinais representados por uma única letra, nós utilizamos “palavras” de duas letras, sob a condição de que estas palavras não causem confusão quando forem recebidas.

Usando as letras a e c nós formamos o código: aa, ac, ca, cc que tem um vocabulário de $[\alpha(G)]^2 = 4$ palavras. Porém, um código mais rico é: aa, bc, ce, db, ed . Cada palavra deste código pode receber uma das seguintes interpretações:

$$\begin{aligned} aa &\Rightarrow \{pp, pq, qp, qq\} & bc &\Rightarrow \{qr, qs, rr, rs\} & ce &\Rightarrow \{rt, rp, st, sp\} \\ db &\Rightarrow \{sq, sr, tq, tr\} & ed &\Rightarrow \{ts, tt, ps, pt\} \end{aligned}$$

Se, por exemplo, o receptor final recebe pp então a palavra emitida é aa pois pp não aparece como interpretação possível para as demais palavras. Portanto, ao se utilizar este código não há perigo de confusão.

Por definição, o *produto* de dois grafos G e H é o grafo $G \times H$ cujos vértices são os pares xy com $x \in V(G)$, $y \in V(H)$, dois vértices xy e $x'y'$ são adjacentes se uma das seguintes condições for satisfeita:

$$(I) \quad x = x' \text{ e } \{y, y'\} \in E(H),$$

$$(II) \quad \{x, x'\} \in E(G) \text{ e } y = y',$$

$$(III) \quad \{x, x'\} \in E(G) \text{ e } \{y, y'\} \in E(H).$$

Com o grafo da Figura 24, duas palavras xy e $x'y'$ podem ser confundidas se elas representam dois vértices adjacentes do produto $G \times G = G^2$, e a riqueza do código usando palavras de duas letras é $\alpha(G^2) = 5$; em geral, o número máximo de palavras que não podem ser confundidas em um código de palavras com n letras, é $\alpha(G^n)$ com

$$G^n = G \times G \times \dots \times G.$$

O grafo G^n é dito ser a n -ésima potência de G .

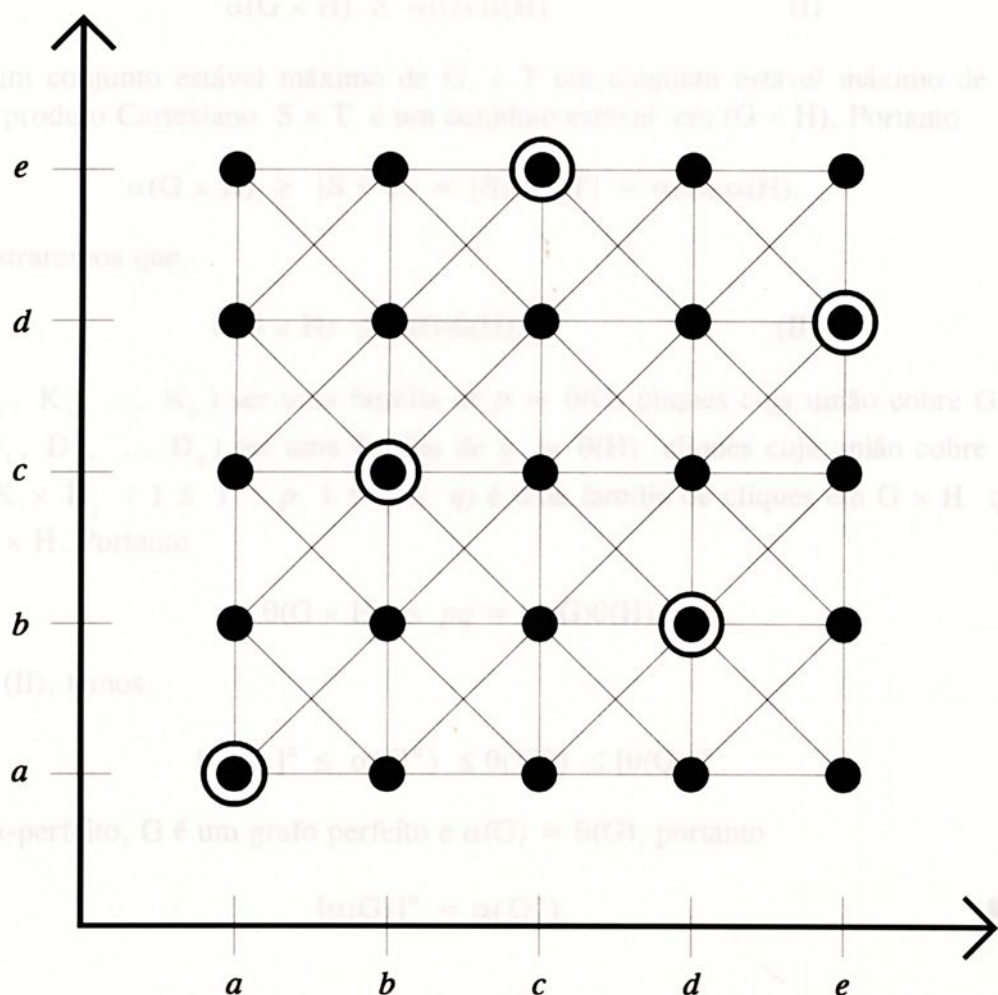


Figura 25: $G^2 = G \times G$, $\alpha(G^2) = 5$.

Se $\alpha(G^n) > [\alpha(G)]^n$, então um código usando palavras de n letras é melhor que o código trivial que usa palavras de apenas uma letra. Shannon levantou a questão de se determinar quais grafos cujo produto dos códigos poderia ser melhorado neste sentido.

5.2 A Aplicação

Teorema 5.1.1 (Berge [Be 75]) *Se o grafo confusão G é α -perfeito, então $\alpha(G^n) = [\alpha(G)]^n$ (e nenhum código é melhor que o código trivial de palavras com uma única letra)*

Prova: Primeiro mostraremos que para dois grafos G e H

$$\alpha(G \times H) \geq \alpha(G) \alpha(H). \quad (I)$$

Seja S um conjunto estável máximo de G , e T um conjunto estável máximo de H . Então o produto Cartesiano $S \times T$ é um conjunto estável em $(G \times H)$. Portanto

$$\alpha(G \times H) \geq |S \times T| = |S| \times |T| = \alpha(G) \alpha(H).$$

Nós mostraremos que:

$$\theta(G \times H) \leq \theta(G)\theta(H). \quad (II)$$

Seja $(K_1, K_2, \dots, K_p)$ ser uma família de $p = \theta(G)$ cliques cuja união cobre G , e seja $(D_1, D_2, \dots, D_q)$ ser uma família de $q = \theta(H)$ cliques cuja união cobre H . Então $(K_i \times D_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)$ é uma família de cliques em $G \times H$ que cobre $G \times H$. Portanto

$$\theta(G \times H) \leq pq = \theta(G)\theta(H).$$

De (I) e (II), temos

$$[\alpha(G)]^n \leq \alpha(G^n) \leq \theta(G^n) \leq [\theta(G)]^n.$$

Se G é α -perfeito, G é um grafo perfeito e $\alpha(G) = \theta(G)$, portanto

$$[\alpha(G)]^n = \alpha(G^n). \quad \blacksquare$$

Bibliografia

- [Be 60] BERGE, C. Les problèmes de colorations en théorie des graphes. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, v. 9, p.123-160, 1960.
- [Be 61] BERGE, C. *Farbung von graphen, deren Samtliche bzw, deren ungerade Kreise starr sind*. Wiss. Z. Martin Luther Univ. 1961. (Math. Natur. Reihe, 114).
- [Be 62] BERGE, C. Sur une conjecture relative au problème des codes optimaux. In: ASSEMBLEE GENERALE URSI, 13, Tokyo, 1962. *Communications*.
- [Be 73] BERGE, C. *Graphs and Hypergraphs*. Amsterdam, North Holland, 1973.
- [Be 75] BERGE, C. Perfect Graphs. In: Fulkerson, D.R., ed. *Studies in Graph Theory*. Part 1. Cornell MAA, c1975. p.1-22 (MAA Studies in Mathematics, 11).
- [BeC 84] BERGE, C.; CHVÁTAL, V., eds, *Topics on Perfect Graphs*, Amsterdam, North-Holland, 1984 (*Annals of Discrete Mathematics*, 21).
- [BeD 84] BERGE, C. DUCHET, P. Strongly Perfect Graphs. In [BeC 84], p.57-61, 1984.
- [Be 86] BERGE, C. New Classes of Perfect Graphs, *Discrete Applied Math.*, v.15, p.145-154, 1986.
- [Be 89] BERGE, C. *Hypergraphs: Combinatorics of finite sets*. Amsterdam, North Holland, 1989. 255p. (North Holland Mathematical Library, 45).
- [Be 89] BERGE, C. Minimax Relations For The Partial q -Coloring of a Graph. *Discrete Math.*, v.74, p.3-14, 1989.
- [Be 92a] BERGE, C. *The q -perfect graphs*. New Brunswick, The State University of Rutgers, 1992. 13p (Rutcor Reserch Report, 23-92).



- [Be 92b] BERGE, C. The q -perfect graphs I. In HALASZ, G. LOVÁSZ, L., MIKLOS, D.; SZONYI, T., eds. *Sets, graphs and numbers*. Budapest, 1991. Proceedings. Amsterdam, North-Holland, 1992. p.65-75. (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 60).
- [Be 94] BERGE, C., et al. *Problems concerning perfect graphs*. New Brunswick, Dep. Computer Science, Rutgers University, 1994. (e-mail: chvatal@dimacs.rutgers.edu).
- [BHT 79] BLAND, R.; HUANG, H., TROTTER, L. Graphical properties related to minimal imperfection, *Discrete Math.*, v.27, p.11-12, 1979.
- [BuU 84] BURLET, M.; UHRY, J.P. Parity graphs. In [BeC 84], p.253-277, 1984.
- [Br 93] BRANDSTÄDT, A. Special graph classes - a survey. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik. SM-DU-199, 1993.
- [Ch 85] CHVÁTAL, V. Star-Cutsets and Perfect Graphs, *J. Combin. Theory*, Ser.B-39, p.189-199, 1985.
- [ChS 87] CHVÁTAL, V. SBIHI, N. Bull-Free Berge Graphs are perfect, *Graphs and Combin.*, V.3, p.127-139, 1987.
- [Du 84] DUCHET, P. Classical Perfect graphs An introduction with emphasis on triangulated and intervals graphs. In [BeC 84], p.67-96, 1984.
- [Es 75] ESWARAN, K.P. Faithful representation of a family of sets by a set of intervals, *SIAM J. Comput.*, v.4, p.56-68, 1975.
- [Fi 90] FIGUEIREDO, C.M.H. Um estudo de problemas combinatórios em Grafos Perfeitos. Rio de Janeiro, 1990. Tese (Doutorado), UFRJ.
- [FuG 65] FULKERSON, R.D.; GROSS, O.A. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific J. Math.* V.15, p.835-855, 1965.
- [Ful 69] FULKERSON, R.D. The perfect graph conjecture and pluperfect graph theorem, In: *Conference on Combinatorics Mathematics and its Applications*, 2, Chapel Hill, 1969. p.173-5.
- [Ful 71] FULKERSON, R.D. Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra, *Math. Programming*, v.1, p.168-194, 1971.



- [Ful 72] FULKERSON, R.D. Anti-blocking polyhedra, *J. Combin. Theory*, v.12, p.50-71, 1972.
- [Ga 62] GALLAI, T. Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutano Int. Közl. Ser.A*, v-7, p.3-36, 1962.
- [GiH 79] GILMORE, P.C.; HOFFMAN, A.J. A characterization of comparability graphs and of interval graphs, *Canad. Math. Bull.*, v.16, p.47-56, 1979.
- [Go 80] GOLUMBIC, M.C. *Algorithmic Graph Teory and Perfect Graphs.*, New York, Academic Press, 1980.
- [Ha 57] HAJOS, G. Über eine Art von Graphen. *Math. Nachr.*, v.11, 1957.
- [HaS 58] HAJNAL, A; SURANYI, J. Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös. Sect. Math.*, v.1, p.113-121, 1958.
- [Ho 93] HOUGARDY, S. Counterexamples to three conjectures concerning perfect graphs. *Discrete Math.*, v.117, p.245-251, 1993.
- [Hu 76] HUANG, H.C. *Investigations on combinatorial optimization.* 1976. Tese(Ph.D.) - Yale University.
- [Kö 16] KÖNIG, D. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math. Ann.*, v.77, p.453-465, 1916.
- [Lo 72a] LOVÁSZ, L. Normal Hypergraphs and the Perfect Graph Conjecture. *Discrete Math.*, v.2, p.253-267, 1972.
- [Lo 72b] LOVÁSZ, L. A characterization of perfect graphs, *J. Combin. Theory*, Ser.B, v.13, p.95-98, 1972.
- [Lo 83] LOVÁSZ, L. Perfect graphs. In:BEINEKE, L.W.; WILSON, R.J., eds. *Selected Topics in Graph Teory*. London, Academic Press, p.55-87, 1983.
- [Me 84] MEYNIEL, H. The graphs whose odd cycles have at least two chords. In [BeC 84], p.115-119, 1984.
- [Me 87] MEYNIEL, H. A new property of imperfect graphs and some consequences. *European J. Combin.* v.8, p.313-316, 1987.
- [MeO 89] MEYNIEL, H.; OLARIU, S. A New Conjecture about Minimal Imperfect Graphs. *J. Combin. Theory*, Ser.B, v.47, p.244-247, 1989.



- [OIS 70] SACHS, H. *On the Berge conjecture concerning perfect graphs, Combinatorial Structures and their Applications*. New York, Gordon and Breach, 1970.
- [OIS 84] OLARU, E.; SACHS, H. Contribution to a characterization of structure of perfect graphs. In [BeC 84], p.121-144, 1984.
- [OI 88] OLARIU, S. No Antitwins in Minimal Imperfect Graphs, *J. Combin. Theory. Ser.B.*, v.45, p.255-257, 1988.
- [Pa 74] PADBERG, M.W. Perfect zero-one matrices, *Math. Programming*, v.6, p.180-196, 1974.
- [Pr 90] PREISSMANN, M. Locally Perfect Graphs, *J. Combin. Theory. Ser.B.*, v.50, p.22-40, 1990.
- [RaP 77] RAVINDRA, K. G.; PARTHASARATHY, R. Perfect products of graphs. *Discrete Math.*, v.20, p.177-186, 1977.
- [Re 86] REED, B.A. *A semi-strong perfect graph theorem*, Québec, 1986. Tese(Ph. D.)-Mac Gill University.
- [Re 87] REED, B.A. A note on even pairs. *Discrete Math.*, v.65, p.317-318, 1987.
- [Se 74] SEINCHE, D. On a property of the class of n-colorable graphs. *J. Combin. Theory, Ser.B*, v.16, p.191-193, 1974.
- [Sh 56] SHANNON, C.E. The zero-error capacity of a noisy channel. *IRE Trans.*, v.3, p.3-15, 1956.
- [Tu 73] TUCKER, A. The Strong Perfect graph Conjecture for Planar Graphs. *Can. J. Math.*, v.25, p.103-114, 1973.
- [Tu 77] TUCKER, A. Critical perfect graphs and perfect 3-cromatic graphs. *J. Combin. Theory, Ser.B.*, v.23, p.143-149, 1977.



