UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

André Valner Ruis

Sistemas de Numeração e Grandezas Incomensuráveis

São José do Rio Preto

2014

ANDRÉ VALNER RUIS

Sistemas de Numeração e Grandezas Incomensuráveis

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

São José do Rio Preto

2014

Ruis, André Valner.
Sistemas de numeração e grandezas incomensuráveis / André Valner Ruis. -- São José do Rio Preto, 2014
122 f. : il.

Orientador: Paulo Ricardo da Silva
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Aritmética - Estudo e ensino. 3. Números reais. 4. Números transcendentes. 5. Matemática - Metodologia. I. Silva, Paulo Ricardo da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 511(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

ANDRÉ VALNER RUIS

Sistemas de Numeração e Grandezas Incomensuráveis

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Mariana Rodrigues da Silveira
UFABC – Santo André

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto

28 de Novembro de 2014

Dedico primeiramente aos meus amados pais Hélio e Rosa, a meus irmãos Melina e Eduardo, demais familiares e a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Louvado seja nosso Senhor Deus que ilumina meus caminhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente à Deus a quem devo tudo o que tenho em minha vida, sobretudo por ter proporcionado-me saúde, sabedoria, persistência, força e capacidade, além de ter preparado-me para receber esta graça no momento certo e concluir este trabalho.

Agradeço com imenso amor fraternal a meus pais Hélio e Rosa que durante toda minha vida ofereceram carinho, educação, respeito e todo suporte a mim e a meus irmãos para que tivéssemos uma formação de caráter digna, honesta e honrada incentivando e apoiando a busca por um caminho que conduzisse a boa formação profissional e felicidade. Sempre foram espelhos em minha vida, exemplos de conduta.

Agradeço aos meus irmãos Melina (Me) e Eduardo (Dú), por quem tenho também imenso amor fraternal e torço muito para que tenham muitas conquistas e realizações. Agradeço a todos meus familiares e a todos que fazem parte da família.

Um agradecimento especial com extrema gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva, a quem devo externar o quanto foi importante nas orientações. Tive um aprendizado efetivo e ensinamentos extremamente relevantes, que contribuíram extensivamente para que realizasse um bom trabalho, além dos bons conselhos e diretrizes de norteamento do trabalho.

Agradeço também com extremo carinho a minha linda namorada Joice, que entrou em minha vida no decorrer do curso e durante todo esse período concedeu-me sempre apoio incondicional, paciência (e como foi paciente), respeito, compreensão, bons conselhos e é claro amor, acolhendo-me e fortalecendo-me.

Agradeço a todos os colegas de turma do PROFMAT, em especial aos companheiros de almoço e conversas durante o curso, os amigos Fábio e Fernando. Agradeço muito também aos colegas Gilberto, Emerson, Everaldo e principalmente a Flávia da turma anterior, pela disponibilização de material, que foi de grande ajuda no decorrer do curso. Um agradecimento especial à amiga Cynthia pelo companheirismo e companhia nas viagens, além dos bons conselhos. Durante os estudos, sempre com dedicação, disponibilidade para estudar e boas discussões na resolução de exercícios do curso.

Agradeço também a todos os meus amigos de Olímpia, sempre compreenderam, incentivaram e apoiaram a busca pela conclusão desse trabalho.

Ao pessoal da ETEC de Olímpia pelo incentivo e boas conversas sobre a atual realidade da educação no estado.

Agradeço também e dedico a todos os meus alunos, tive motivação suficiente para persistir, mesmo com um número elevado de aulas por semana (40 em média) conclui o curso e hoje posso dizer-lhes que estou muito mais preparado e pronto para atendê-los de forma efetiva na busca por conhecimento.

Agradeço aos professores do IBILCE do Departamento de Matemática, especialmente aos professores do PROFMAT pela sólida formação acadêmica que nos proporcionaram.

Agradeço por fim também à Capes pelo apoio financeiro, e aos professores do IMPA que idealizaram um programa de pós-graduação de qualidade, dando oportunidade ao aperfeiçoamento e formação do professor.

‘‘Se, na verdade, não estou no mundo para simplesmente a ele me adaptar, mas para transformá-lo; se não é possível mudá-lo sem um certo sonho ou projeto de mundo, devo usar toda possibilidade que tenha para não apenas falar de minha utopia, mas participar de práticas com ela coerentes.”

(**Paulo Freire**)

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a evolução histórica do conceito de número real. Partindo de noções preliminares para quantificações e representações numéricas, introduzimos sistemas de numeração, com enfoque especial aos sistemas de numeração decimal e também sistema de numeração ternário. A partir do problema de medição, abordamos o conceito de grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis. Especial ênfase é dada aos números irracionais $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{\pi}$, evidenciando conceitos, propriedades e particularidades desses números. Além disso, discutimos como abordar o estudo de números irracionais no ensino médio, finalizando com propostas de atividades pertinentes aos temas apresentados.

Palavras-chave: *Sistemas de Numeração. Números Reais. Números Algébricos. Números Transcendentes.*

ABSTRACT

In this work, we present the historical evolution of the concept of real number. From the preliminary sense of quantifications we introduce numerical systems, specially the decimal one and the ternary one. From the measure problem we introduce the concept of commensurable and incommensurable magnitudes. It is given special emphasis to the irrational numbers ***e*** and **π,** for which we discuss the concepts, properties and some particularities. Moreover, we discuss how to introduce the study of irrational numbers at high school and we propose some activities connected to the presented themes.

***Keywords*:** Numeration Systems. Real Numbers. Algebraic Numbers. Transcendental Numbers.

Introdução

Desde o início da história da humanidade, há registros da presença dos números na vida do homem e atualmente é incostestável em quase tudo o que realizamos no dia-a-dia a prática relacionada diretamente à numeros, seja em quantificações, medições, estimativas e também em levantamento de dados, ou seja, podemos afirmar inevitavelmente que, em tudo o que concerne as práticas cotidianas diárias do homem, estarão presentes os números e consequentemente as operações aritméticas numéricas.

A estrutura proposta neste trabalho tem como principio proporcionar a alunos e também a professores do ensino médio uma contextualização histórica do surgimento dos números, evidenciando sua inegável presença na vida do homem, evolução dos métodos de contagem e também o desenvolvimento de alguns sistemas de numeração concebidos por diferentes civilizações em diferentes épocas ao longo da história e suas funcionalidades como dispositivo para organização dos métodos de contagem. Abordamos também, o fato de que quando efetuamos medições, estamos efetivamente lidando com grandezas, e as grandezas medidas podem ser definidas como grandezas comensuráveis ou incomensuráveis, enfatizando o fato que ambas grandezas, quando falamos de sua representação numérica, estão dispostas numa estrutura de conjuntos numéricos, desde o mais elementar, que é o conjunto dos números naturais, até o mais amplo (no campo extensivo deste trabalho) que é o conjunto dos números reais. Exploramos inclusive algumas grandezas incomensuráveis de grande destaque e evidência no universo dos números reais.

No **capítulo 1** discorremos exatamente sobre tópicos elencados anteriormente, no início do segundo parágrafo, explorando essencialmente o sistema de numeração indo-arábico, que é um sistema de numeração posicional de base 10 e que até hoje é o sistema de numeração adotado. Nesse capítulo, procuramos utilizar uma linguagem técnica bastante acessível, levando à compreensão da estrutura de escrita dos números naturais em base decimal.

No **capítulo 2** abordamos a questão de que as práticas diárias com a evolução da humanidade, conduziram o homem também a uma evolução dos elementos para representar tais situações, e os números naturais já não eram suficientes para expressar tudo o que o homem vivia. Vieram então os números inteiros e a questão da comensurabilidade e incomensurabilidade das grandezas. Evidenciamos os números inteiros e racionais, definindo a representação de números racionais finitos escritos em base decimal e também as operações aritméticas elementares entre esses números, exemplificando cada uma delas. Explanamos também sobre as dízimas periódicas e suas respectivas representações decimais.

A construção do conceito de número desde sua representatividade em um sistema de numeração, estruturação em conjuntos numéricos e desenvolvimento de uma aritmética operatória é comprovadamente uma sequência lógica, e portanto no **capítulo 3**, nada mais elementar do que abordar a incomensurabilidade de grandezas, que deram origem ao conjunto dos números irracionais e posteriormente ao conjunto dos números reais, caracterizados pela correspondência biunívoca entre um número real e um ponto de uma reta. Novamente, procuramos estruturar os números reais como conjunto, determinando o conceito de corpo ordenado completo, como propôs Cantor, além de definir as operações aritméticas elementares. É importante distinguir a diferença entre grandezas comensuráveis (representadas por números racionais) e grandezas incomensuráveis (representadas por números irracionais), e dessa forma, discorremos também sobre métodos para constatar tal fato, e ainda, finalizamos com os conceitos de números algébricos e transcendentes.

Já no **capítulo 4**, trabalhamos com o sistema de numeração posicional de base 3, conduzindo à curiosidades e interessantes propriedades inerentes a este sistema. Este capítulo possui uma conexão com o capítulo 1, quando definimos a escrita de um número em uma base numérica qualquer. Destacamos a escrita de números em base 3 e descrevemos as operações de adição e multiplicação neste sistema, além de exibir a relação direta entre o sistema de numeração ternário e o conjunto de Cantor.

Para o **capítulo 5** tratamos essencialmente uma das mais importantes grandezas incomensuráveis: o número e. Sintetizamos desde fatos históricos, origem, representação e definição do número e, até importantes fatos e curiosidades relacionados ao mais ilustre número irracional. Descrevemos também problemas e questões alusivas ao número e e com devido rigor matemático, expressamos a demonstração da irracionalidade do número

e. Nas seções do capítulo inserimos também curiosidades e problemas de aplicação, expondo inevitavelmente sua ampla utilização em equações diferencias ordinárias, que é uma importante área da análise em Matemática.

No **capítulo 6** exploramos outra importante grandeza incomensurável: o número π. Historicamente talvez tenha sido um dois mais antigos problemas que durante muito tempo causou indagação ao homem, pois o simples fato constatado geometricamente de forma preliminar por Arquimedes, de que a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro é constante, estendeu-se cronologicamente até os dias de hoje. Por isso, descrevemos nesse capítulo toda a cronologia do número π, além é claro de definí-lo e determinar cálculos e aproximações que o determinam. Destacamos alguns calculadores do número π e descrevemos alguns métodos utilizados para encontrá-lo, até chegarmos a era computacional, funcionalmente relacionada aos cálculos computacionais de π.

Finalizamos o trabalho com o **capítulo 7** que apresenta propostas de atividades relacionadas aos capítulos apresentados, essencialmente voltadas ao público discente do ensino médio como via de contextualizar tudo o que foi explorado nesse trabalho com a prática diária do professor em sala de aula.

Sumário

Capítulo 1

Sistemas de Numeração

1.1 Fatos históricos - origem dos sistemas de numeração

A história do surgimento dos números confunde-se com a própria história do início da humanidade. Nos primórdios períodos remotos tais como o do início da Idade da Pedra e o Paleolítico, o homem vivia em cavernas, em condições bastante semelhantes as dos animais, e seu meio de vida e característica pertinentes à época permitiam-lhe apenas organizar-se precariamente, confeccionando ferramentas primárias para a caça, tais como lanças e bastões, para subsidiar a busca pelo alimento que garantiria seu sustento. Desenvolveu formas primitivas para comunicação, e a noção de número conduzia-lhe apenas a uma distinção entre "um"e muitos. O homem tinha uma lança, ou muitas lanças, matava um lagarto ou muitos lagartos, noção essa que estendeu-se a quantificação de dois objetos ou animais abatidos posteriormente.

Fato é que, desde o início o homem se viu compelido a quantificar objetos e consequentemente efetuar medidas, comparar distâncias e determinar dimensões dos corpos que o rodeavam. Para isso começou a criar símbolos, de modo que os dados coletados não se perdessem. Tais registros eram feitos através de cunhamentos e ranhuras em pedaços de ossos ou bastões. Destacamos a seguir um trecho de [2]:

"*Poucos desses registros existem hoje, mas na Checoslováquia, foi achado um osso de* *lobo com profundas incisões, em número de cinquenta e cinco; estavam dispostas em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a ideia de número é muito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos de rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, tais como o osso acima descrito, vêm de um período de cerca de trinta mil anos atrás*".

Perdurou secularmente a ideia de que a Matemática é a ciência dos números, grandezas e formas e que de forma extensiva desenvolveu-se ao longo dos séculos, possibilitando ao homem justificar de forma concreta a realidade que o retrata como produto da natureza.

"A princípio, as noções de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças," conforme [2]. Sujeito as percepções impostas pela natureza, e ao decurso natural a um avanço gradativo da maneira de viver, relacionar-se e compreender o mundo, a existência dos números provém como percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos tem em comum, como observa ainda o autor [2] em sua obra História da Matemática.

Este autor observa também que *"é improvável que isso tenha sido descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo; é mais provável que a percepção tenha sido gradual, desenvolvida tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há* 300.000 *anos"*. A matemática é retratada como a única ciência que desenvolveu-se apenas com extensões, embasada em sistemas dedutivo-axiomático que sustentaram e permitiram todos os avanços alcançados ao longo dos séculos.

O homem primitivo da indícios que o primeiro sistema de contagem era feito usando pedras [1].

[1] Calculus em latim tinha o significado de pedra, pedrinha, daquelas que, em dado momento na antiguidade, passaram a ser usadas para contar. A palavra calculus deu origem à palavra cálculo.

"*É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registo simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca*"
como observa [4].

"*Os agrupamentos dessas pedras (calculus) eram feitos amontoando-se em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação das mãos e pés humanos*"
destacado por [4].

Estava então resolvida uma questão prática e útil à vida do camponês, que é necessidade de dominar e manter criações, para seu sustento e desenvolvimento campestre. Por vezes, devido a disfunção prática em armazenar informações em amontoados de pedras, o homem registrava um número fazendo entalhes em pedaços de ossos e bastões.

Conforme [3]
"*Estamos tão habituados a encarar os sistemas modernos de escrita como reflexões da língua falada, que pode ser salutar lembrarmo-nos que no começo isso não se passou assim. Para que uma sociedade desenvolva uma matemática que vá para além do simples cálculo, é necessário um suporte material de uma espécie ou outra. Sem escrita, as limitações da memória humana restringem o grau de sofisticação numérica que pode ser atingido*".

A maneira como passou a organizar e expressar a quantificação de objetos e animais é pertinente a praticamente todas as civilizações antigas dentre as quais destacamos, os povos egípcios, babilônios/sumérios, gregos, chineses e hindus, cada qual criando seu sistema de numeração com características peculiares comumente tratadas a cada época, localização (continentes europeu,oriente e médio oriente) e influências dos meios de vida de cada civilização. Mesmos os Maias, civilização mais recente localizada na América Central, também desenvolveram um sistema de numeração próprio, caracterizado por uma simbologia e operação particulares, já que não houve trocas de experiências com civilizações européias e asiáticas até então. Atualmente, o sistema de numeração posicional de base 10, ou simplesmente sistema decimal é universalmente aceito e utilizado e como destaca [2] em sua obra:

"*Aristóteles observou que o sistema decimal é apenas o resultado anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés*".

1.1.1 Primeiros sistemas de numeração

Ao longo do tempo acredita-se que a Matemática surgiu e prosperou vistas as necessidades práticas do homem em desenvolver-se e deixar assim um legado concreto para perpetuação construtiva e evolutiva de sua espécie. O advento dos números e de um sistema de numeração coerente, simplista, com praticidade operatória e que permitisse uma representação clara dos problemas que se pretendia resolver era um grande desafio às antigas civilizações. Sabidamente, o homem desde o princípio, mesmo que de forma intuitiva, já preocupava-se em organizar e quantificar objetos e animais campestres para sua subsistência. Mas sabemos que os números e o atual sistema de numeração posicional de base 10 não surgiram desde o início. O homem primitivo fazia sim uso de métodos arcaicos para enumerar elementos, mas de modo bastante abstrato, já que era demasiadamente primário o modo como vivia e se relacionava na antiguidade. Há registros de que os primeiros sistemas de escrita que se conhecem, são os dos egípcios e os dos sumérios, surgidos por volta de 3500 a. C., segundo [2]:

"*Foi sugerido que a arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo.*"

A linguagem assume um aspecto singular que a coloca num viés que vai do real, concreto, para o abstrato, isto é, primeiramente há objetos a se contar ou medir, e posteriormente, embasado em algum sistema lógico-dedutivo, coexiste o instrumentos para fazê-los.

O primeiro instrumento de contagem utilizado pelo homem foi indubitavelmente os dedos, prática esta que nos conduziu a um sistema de numeração sistematizado por agrupamentos de cinco e dez. Explanaremos a seguir alguns sistemas de numeração e suas respectivas bases utilizados por civilizações antigas ao longo da história. Para tanto, segue um conceito subjetivo para base descrito por [6]:

"*Em termos não muito formais, mas suficientemente descritivos, diremos que "base" é o número de unidades que se convenciona tomar para com elas construir uma unidade maior, de ordem imediatamente superior, num processo que, em princípio, se pode repetir até ao infinito.*"

O sistema quinário ou sistema de numeração de base cinco, foi o primeiro a ser usado extensivamente, como observa [4]. A base quinária é portanto mais antiga que a base decimal, mas esta devido a difusão, aceitação e praticidade simbólica e operatória é a base que prevaleceu. Os babilônios, antiga civilização localizada na região da Mesopotâmia abrangendo também a Acádia e a Suméria, utilizavam um sistema de numeração posicional único, cuja base era 60, sistema esse denominado sexagesimal. Este sistema era empregado pela utilização de símbolos numéricos que eram esculpidos em pequenas placas de argila, que serviam de base de "impressão" da escrita cuneiforme, como cita [1] em sua obra.

A contagem dos babilônios era feita portanto em agrupamentos de 60 e a razão disso parece estar ligada a geometria e à preocupação de medir o tempo. Os babilônios sabiam por exemplo que o raio de um círculo determina uma corda (atual arco), que era aproximadamente o sextante do círculo, e ainda o período de um ano constava de 360 dias. Outro fator que merece destaque é que o sistema de base 60 possui outras virtudes, tais como possuir um número razoável de divisores. Observe que 60 é divisível por: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$ e 60, conduzindo assim a um número maior de resultados exatos para problemas resolvidos no sistema de base 60. Tal sistema permitiu ainda descobertas na astronomia, e solução de problemas de astronomia por volta de 1700 a. C..

Outro sistema de numeração que merece destaque na história é o sistema utilizado pelos gregos.

"*Os gregos recorreram a dois sistemas de numeração distintos, um mais antigo, o Ático, no qual arranjavam os números por ordem e os agrupavam tal como no sistema romano, e um posterior, mais erudito, o Jônico, sistema de numeração alfabético que apareceu pela primeira vez no séc. V a.C.*",
conforme destaca [1].

Outro fato relevante que devemos tratar é que o sistema de numeração grego não era posicional, ao contrário do sistema de numeração babilônico. Observamos também que egípcios e fenícios também utilizavam um sistema de numeração decimal, contudo com símbolos diferentes do sistema grego, apesar da proximidade territorial de tais povos. Já os romanos, dotavam-se de um sistema de numeração não posicional, edificado também em agrupamentos simples de base 10. Tal sistema de numeração, é formado por apenas 7 símbolos:

Símbolo	Valor
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Na América Central destacamos o sistema de numeração utilizado pela tribo dos Mayas de Yucatan, cuja a base primária era vinte, e tinha a base cinco como base auxiliar. É fato que sinais e símbolos para exprimir os números certamente precederam as palavras para designá-los, pois a escrita cuneiforme e o processo de fazer incisões em pedaços de ossos ou bastões eram bem mais razoáveis e fáceis do que estabelecer frases. No quadro apresentado na figura (1.1), podemos observar os sistemas de numeração destacados, e suas respectivas simbologias representativas.

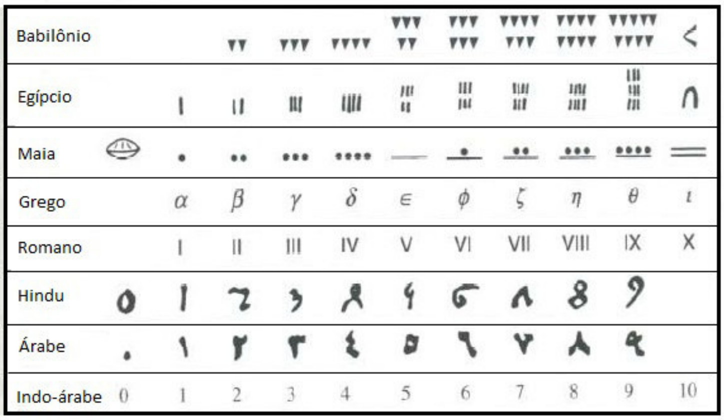


Figura 1.1: Primeiros sistemas de numeração.

1.1.2 Sistema de numeração indo-arábico

O Sistema de Numeração Indo-Arábico ou Sistema de Numeração Posicional de Base 10 é atualmente, e desde um bom tempo, o sistema de numeração com o qual lidamos com todas as situações práticas que envolvam números nas ciências matemáticas e áreas afins.

Vamos retratar alguns fatos históricos que elucidam o porque até hoje utilizamos tal sistema.

"*O sistema de numeração Indo-Arábico, surgiu no norte da Índia por volta do séc. V d.C., contudo, não há um consenso unânime na literatura sobre tal fato*".

"*Alguns estudiosos desta questão chegaram a defender que os hindus teriam ido buscar os princípios do sistema de numeração aos gregos, segundo Cousquer (1994), quando no século IV a.C., a parte noroeste do país foi conquistada por Alexandre Magno*", destacado por [1] em sua tese de mestrado.

Todavia, é reconhecidamente verídica a atribuição histórica dada aos hindús pelo nosso sistema de numeração. As razões pelas quais tal sistema tão antigo prevalece até hoje, podem ser compreendidas por alguns fatores asseverativos quando comparado a outros sistemas de numeração antecedentes a este. Note esta observação proposta por [5]:

"Para que uma notação numérica seja perfeitamente adaptada à prática das operações escritas é necessário, não somente que ela repouse sobre o princípio de posição, mas que possua também símbolos significativos distintos (...) Outra condição fundamental para que um sistema de numeração seja tão perfeito e eficaz é possuir o zero. Enquanto outros povos usaram numerações não posicionais, a necessidade desse conceito não se fez sentir."

O Sistema de Numeração Indo-Arábico dota-se de todos os símbolos precursores do atual sistema de numeração e firma-se com a caracterização de valor posicional para cada algarismo. Em trechos da obra de Aryabhata, entitulada Aryabhatya (449 d. C.), aparece o trecho: "de lugar para lugar, cada um vale dez vezes o precedente. A disseminação desse sistema de numeração iniciou-se pelas regiões vizinhas, talvez pelo contato direto entre sábios (povos islâmicos já o conheciam), isso por volta do séc. VIII. As primeiras constatações sobre o uso desse sistema na Europa são devidas a uma tradução latina do tratado de Al-Khowârizmî, feita no século XII, e posteriores trabalhos europeus feitos sobre o assunto. Ainda na Europa, um primeiro divulgador de seu uso foi Gerbert (950 − 1003). Nascido em Auvugne, França, foi um dos primeiros cristãos a estudar nas escolas muçulmanas da Espanha, e ao retornar de seus estudos, tentou introduzir na Europa cristã os numerais indo-arábicos (sem o zero). Mais tarde também, Leonardo de Pisa já utilizava a notação indo-arábica em seus trabalhos, propiciando assim ampla divulgação e uso de tal sistema, colaborando efetivamente para sua introdução na Europa.

No século XVI houve a padronização dos cálculos utilizando os numerais indo-arábicos. Praticamente tudo que fazia parte da realidade do homem, como astronomia, ciências, engenharia, comércio e até mesmo as guerras, avançaram de forma significativa, devido à praticidade operatória e representativa proporcionada pelos cálculos com o sistema indo-arábico.

Façamos agora breves distinções para as definições de **número, numeral e algarismo**, para um melhor compreendimento do texto.

Número é um objeto da matemática usado para descrever quantidade, ordem ou medida. O conceito de número provavelmente foi um dos primeiros conceitos matemáticos assimilados pela humanidade no processo de contagem. *Numeral* é a palavra que indica os seres em termos numéricos, isto é, que atribui quantidade aos seres ou os situa em determinada sequência. Os númerais são por exemplo: um, dois, cinco, treze, metade, etc. *Algarismo* ou *dígito* é um tipo de representação (um símbolo numérico, como "2"ou "5") usado em combinações (como "25") para representar números (como o número 25) em sistemas de numeração posicionais. O nome "dígito"vem do fato de os 10 dígitos (do latim digitum, "dedo") das mãos corresponderem aos 10 símbolos do sistema de numeração comum de base 10, isto é, o decimal (adjetivo do latim antigo dec. que significa dez) dígitos.

1.2 Números naturais e base 10

Os fatos históricos relatados permitiram-nos concluir que mesmo empiricamente, o homem primitivo estava sujeito a advir um método de contagem que lhe permitisse organizar e controlar situações ao seu redor, como estimar a quantidade de cordeiros de seu rebanho ou a quantidade de raízes que lhe possibilitaria sua subsistência. Vimos também que o instrumento mais primitivo de contagem utilizado para relacionar quantidade com objetos foram os dedos e posteriormente os agrupamentos de pedras(calculus), incisões em ossos e bastões, nós em cordas, e o surgimento do ábaco (por volta de 5500 anos atrás) considerado a primeira calculadora do homem, e certamente uma extensão natural do ato de se contar nos dedos.

O primeiro conjunto numérico com o qual nos deparamos é o conjunto dos **números naturais**, construído a partir da síntese proposta pelo matemático italiano Giuseppe Peano ($1858 - 1932$), que formalizou o estudo axiomático dos números naturais, estabelecendo noções primitivas e entes não definidos que permitiram extensões na Teoria dos Conjuntos. Apresentamos a seguir as afirmações que são conhecidas como *axiomas de Peano*:

i) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural;

ii) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

iii) Existe um único número natural, chamado zero[2] e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro;

iv) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset I\!N$). Se $0 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento X ainda pertence a X, então $X = I\!N$.

O conjunto $\mathbb{N}$ é denotado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

que viria representar as noções mais primitivas que o homem tinha para poder quantificar elementos. Tal conjunto já era munido das operações de adição e multiplicação, alavancando bases para os estudos posteriores de divisibilidade e congruência.

Não há uma data específica que assinale o aparecimento do número natural, fato é que estes números são a base de nosso sistema de numeração. O sistema de numeração posicional decimal indo-arábico, ou simplesmente sistema de numeração de base 10 é composto de 10 símbolos ou dígitos, que são os algarismos. São eles: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9. Cada dígito, tem um valor denominado *valor próprio*. Assim, o algarismo 5 tem o valor próprio 5, isto é, ele representa a ideia comum (número) que existe ao compararmos todas as quíntuplas de objetos deste mundo. Mas no número 2537, o algarismo 5 tem o denominado valor posicional, e nessa posição ele representa a ideia que temos do número quinhentos. Como os números são infinitos, podemos usar quantos algarismos (dígitos) quanto queiramos para escrevê-los. Os valores posicionais da cada algarismo, representam produtos por potências consecutivas de base 10, a partir do primeiro algarismo lido da direita para esquerda, assim:

- o primeiro algarismo é multiplicado por $10^0 = 1$;

- o segundo algarismo é multiplicado por $10^1 = 10$;

[2]Na axiomatização original começa com 1 no lugar do 0.

- o terceiro algarismo é multiplicado por $10^2 = 100$;
- o quarto algarismo é multiplicado por $10^3 = 1000 \ldots$;
- o n-ésimo algarismo é multiplicado por $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \quad zeros}$.

e assim sucessivamente.

O número 12538 significa:

$$12538 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Logo o valor posicional do algarismo representa diferentes quantidades conforme sua posição no número. Para facilitar a leitura de um número escrito na base 10 os algarismos são separados em agrupamentos ternários constituindo assim, os chamados períodos ou classes. A primeira classe é denominada **unidade simples**, a segunda classe é a classe dos **milhares**, a terceira classe é a classe dos **milhões**, a quarta classe é a classe dos **bilhões**, e assim por diante. Cada classe é dividida em três ordens também da direita para esquerda: *unidade, dezena e centena*. No número 12538 por exemplo temos:

- 8 unidades simples;
- 3 dezenas;
- 5 centenas;
- 2 unidades de milhar;
- 1 dezena de milhar;

Como vimos, é imensurável o dimensionamento da importância desse sistema de numeração ao longo do tempo, todos os avanços e resultados alcançados graças a esta invenção milenar do homem, um sistema fundamentalmente simples, provavelmente originado de uma observação anatômica como destacou Aristóteles.

Considere então um número natural p, escrito sob a forma $p = A_n A_{n-1} A_{n-2} ... A_2 A_1 A_0$, onde $A_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ e $A_n \neq 0$, que no sistema de numeração posicional decimal representa o número:

$$p = A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + A_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + A_2 \cdot 10^2 + A_1 \cdot 10^1 + A_0$$

De um modo geral, um número natural p qualquer pode ser escrito numa base numérica $b \in I\!N$ qualquer, logo p pode ser escrito sob a forma:

$$p = A_n \cdot b^n + A_{n-1} \cdot b^{n-1} + A_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + A_2 \cdot b^2 + A_1 \cdot b^1 + A_0$$

com $n \geq 0, A_n \neq 0$ e para cada índice $i \in \{0, 1, ..., n\}$ tem-se que $A_i \in \{0, 1, .., b-1\}$.

Mostremos agora que p pode ser escrito na forma dessa expressão, e portanto, ser escrito numa base numérica b qualquer. Pelo algoritmo da divisão de Euclides temos que:

$$p = bq_0 + A_0.$$

O número q_0 é chamado de quociente e A_0 é chamado resto da divisão, $A_0 \in \{0, 1, ..., b-1\}$ e $q_0 < p$.

Dividindo q_0 por b, da mesma forma como foi feito acima, obtemos A_1 e q_1 e q_0 pode ser escrito como $q_0 = bq_1 + A_1$, com $A_1 \in \{0, 1, ..., b-1\}$ e $q_1 < q_0$. Prosseguindo enquanto for possível, e observando que o quociente não pode ser negativo, chegará um momento em que ele será nulo. Supondo que quando tivermos o quociente nulo o resto será A_n, teremos:

$$p = bq_0 + A_0, A_0 \in \{0, 1, ..., b-1\}$$

$$q_i = bq_{i+1} + A_{i+1}, \quad A_{i+1} \in \{0, 1, ..., b-1\}, \quad i = 0, 1.., n-1.$$

Substituindo o valor de q_0 na primeira expressão e depois o valor de q_1 na segunda, e assim sucessivamente, teremos:

$p = bq_0 + A_0 = b(bq_1 + A_1) + A_0 = b^2 q_1 + bA_1 + A_0 = b^2(bq_2 + A_2) + bA_1 + A_0 = b^3 q_2 + b^2 A_2 + bA_1 + A_0 = \ldots = b^{n-1}(bq_{n-1} + A_{n-1}) + b^{n-2} A_{n-2} + \ldots + b^2 A_2 + bA_1 + A_0 =$

$A_nb^n + A_{n-1}b^{n-1} + A_{n-2}b^{n-2} + \ldots + A_1b + A_0$.

Fica evidente que cada um dos quocientes é também uma soma de produtos por potências de base b, assim podemos destacar que onde

$$q_0 = A_n \cdot b^{n-1} + A_{n-1} \cdot b^{n-2} + A_{n-2} \cdot b^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot b + A_1.$$

Com este resultado fica demonstrado que o número inteiro positivo p pode ser escrito em qualquer base numérica b. Basta provar agora a unicidade de escrita do número p na base b, para tanto, vamos supor que o número p assuma as seguintes formas:

$$p = A_nA_{n-1}A_{n-2}...A_2A_1A_0, \quad p = C_mC_{m-1}C_{m-2}...C_2C_1C_0.$$

Suponhamos que $n \leq m$ e $A_n \neq 0$. Então:

$$p = A_nb^n + A_{n-1}b^{n-1} + \ldots + A_1b + A_0 = C_mb^m + C_{m-1}b^{m-1} + \ldots + C_1b + C_0;$$

com $b \neq 0$ e $\{n, m\} \in I\!N$.

Note que A_0 e C_0 são os restos da divisão de p por b e $A_nb^{n-1} + A_{n-1}b^{n-2} + \ldots + A_1$ e $C_mb^{m-1} + C_{m-1}b^{m-2} + \ldots + C_1$ são os respectivos quocientes. Então, pela unicidade do quociente e do resto temos que: $A_0 = C_0$ e

$$A_nb^{n-1} + A_{n-1}b^{n-2} + \ldots + A_1 = C_mb^{m-1} + C_{m-1}b^{m-2} + \ldots + C_1.$$

Portanto, temos que $A_1 = C_1$, e de maneira análoga, podemos notar que $A_2 = C_2, \ldots, A_n = C_m$ e $n = m$.

Concluímos então que a expressão de um número natural p numa determinada base numérica b é única.

Visto que qualquer número natural p pode ser escrito de forma única em qualquer base que seja conveniente, é notável a significância desse resultado e as possibilidades de extensões usando tal princípio. Ora, então qualquer número racional do tipo $\dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in$

$\mathbb{Z}^*$, finito ou infinito (periódico) pode também ser escrito usando potências na base 10, ou seja todo número fracionário possui também uma representação decimal. Por exemplo, qual seria a representação do número $0,2437$ escrito como potência de 10?

Capítulo 2

Números Racionais

2.1 Números inteiros

Antes de respondermos a questão proposta no final da seção 1.2, é conveniente apresentarmos um outro conjunto numérico que emergiu como extensão dos números naturais, já que estes já não eram suficientes para expressar as situações vividas pelo homem. Com o início do Renascimento e a expansão comercial, e consequente aumento de circulação do dinheiro, o homem se viu posto em situações concretas que envolviam lucros e prejuízos nas negociações. Para tanto, convencionou-se utilizar os sinais "$+$"a frente dos números para representar os **lucros** e "$-$"a frente de números que deseja-se representar os **prejuízos**. Foi então que o grande matemático alemão Georg Cantor $(1845 - 1918)$ conhecido por ter elaborado a moderna *Teoria dos Conjuntos*, propôs uma notação específica para a organização do conjunto dos **números inteiros**:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}^1.$$

Podemos destacar também outros importantes subconjuntos de $\mathbb{Z}$. São eles:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = I\!N \text{(conjunto dos números inteiros não negativos)},$$

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\} \text{(conjunto dos números inteiros não positivos)} \quad \text{e}$$

[1]O símbolo Z provém do alemão Zahl que tem o significado de números contáveis, originado na concepção da Teoria dos Conjuntos.

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}\text{(conjunto dos números inteiros não nulos).}$$

O conjunto dos números inteiros também está munido das operações fundamentais de adição e multiplicação. Tais operações gozam das propriedades que serão descritas abaixo. Considere os números inteiros p, q e s, então valem as propriedades:

[A.1](**Associativa da adição**)

$$(p + q) + s = p + (q + s), \forall p, q, s \in \mathbb{Z}$$

[A.2](**Comutativa da adição**)

$$p + q = q + p$$

[A.3](**Elemento neutro da adição**)

$$p + 0 = p$$

[A.4](**Simétrico ou oposto para adição**) Para todo $p \in \mathbb{Z}$, existe $-p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p + (-p) = 0$$

[M.1](**Associativa da multiplicação**)

$$(p \cdot q) \cdot s = p \cdot (q \cdot s)$$

[M.2](**Comutativa da multiplicação**)

$$p \cdot q = q \cdot p$$

[M.3](**Elemento neutro da multiplicação**)

$$p \cdot 1 = p$$

[M.4](**Distributiva da multiplicação relativamente à soma**)

$$p \cdot (q + s) = p \cdot q + p \cdot s$$

Devido à propriedade $[A.4]$ podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de subtração, estabelecendo que:

$$p - q = p + (-q), \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

O produto de números inteiros envolve sempre dois fatores. Vamos considerar então os números p e q tais que $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Para realizar a multiplicação de p por q, podemos nos deparar com os seguintes casos:

1) Se $p > 0$ e $q > 0$, então $p \cdot q > 0$.

2) Se $p > 0$ e $q < 0$, então $p \cdot q < 0$.

3) Se $p < 0$ e $q > 0$, então $p \cdot q < 0$.

4) Se $p < 0$ e $q < 0$, então $p \cdot q > 0$.

2.2 Racionais com representação decimal finita

Como vimos inicialmente uma definição informal e bastante sucinta difundida sobre o que é a Matemática, é que esta é a ciência que trata essencialmente dos números, grandezas, formas e variações dessas formas, edificada sobre uma estrutura racional lógico-dedutiva. Pois dessa forma, deparamo-nos inevitavelmente com problemas relacionados a medidas, como determiná-las e quais técnicas utilizar para efetuar medidas. O problema de medir é bem antigo, segundo nos relata o historiador Heródoto:

"*O rei Sesótris repartiu o Egito (cerca de* 4000 *anos atrás) em porções retangulares de terra entre a população egípcia, com a obrigação de cada indivíduo pagar um certo tributo por ano. Se algum terreno fosse diminuído pelas águas do Nilo, que o dono reclamasse ao rei, este mandaria medidores ao local para saber de quanto tinha diminuído, e consequentemente o tributo seria diminuído.*"

Para efetuar medidas devemos sempre comparar duas grandezas de mesma espécie, ou seja área com área, volume com volume, comprimento com comprimento, massa com massa, ... etc. Então o processo de se determinar uma medida consiste de uma comparação conveniente entre o que se deseja medir e um objeto ou figura semelhante tomado como unidade de medida. É evidente que a escolha da unidade de medida deve ser adequada conforme seja o caso, assim para se medir a extensão de uma rodovia, uma unidade de medida conveniente é o quilômetro, ou para se medir a área de um terreno residencial, devemos utilizar como unidade de medida o m^2.

Considere um segmento de reta AB. Para medi-lo é necessário adotarmos uma unidade de medida (segmento unitário) conveniente, ou seja, obter um segmento-padrão de medida u. Por definição, a medida do segmento u é igual a 1. Suponha que sejam feitas $q-1$ divisões em segmentos congruentes do segmento AB, obtendo assim q segmentos que justapostos são exatamente iguais. Se estes segmentos forem congruentes com u, diremos que u cabe q vezes em AB e a medida do segmento AB será igual a q.

Ocorre que nem sempre que efetuamos uma medida, a unidade de medida cabe um número exato de vezes no que se deseja medir, e a medida do segmento AB não será portanto um número natural. Temos então as chamadas medidas fracionárias, ou racionais. Vamos obter então um outro segmento de reta de medida w que caiba q vezes no segmento unitário u e p vezes no segmento AB. Tal segmento será portanto uma medida comum à u e à AB. Encontrado w, diremos que AB e u são *comensuráveis*. A medida de w será a fração $1/q$ e se w cabe p vezes em AB então a medida do segmento AB será:

$$p \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}.$$

O conjunto formado por todos os segmentos comensuráveis que possuem um número associado a sua medida é chamado **conjunto dos números racionais**, denotado por $\mathbb{Q}$ e definido por:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$$

Diz-se ser um *número racional* todo número que pertença ao conjunto dos números racionais. Nesta seção exploraremos essencialmente os números racionais com representação finita escritos em base 10. O valor posicional de cada algarismo da parte decimal dessa forma é então um produto por potências decrescentes de base 10. Assim, a casa à direita da casa das unidades deve representar uma quantidade 10 vezes menor que a unidade, ou seja, deve representar o que chamamos de décimo, a segunda casa à direita do décimo, representa uma quantidade 10 vezes menor que o décimo denominado centésimo, e assim sucessivamente, portanto:

- o primeiro algarismo é multiplicado por $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ (décimo);
- o segundo algarismo é multiplicado por $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$ (centésimo);
- o terceiro algarismo é multiplicado por $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$ (milésimo);
- o quarto algarismo é multiplicado por $10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$ (décimo de milésimo);

  $\vdots$
- o p-ésimo algarismo é multiplicado por $10^{-p} = \frac{1}{1\underbrace{0\ldots00}_{p\ \ zeros}} = 0,\underbrace{00\ldots0}_{p-1\ \ zeros}1$

Respondendo então a questão apresentada na seção (1.2), temos que o número 0, 2437 significa:

$$0,2437 = 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}.$$

Podemos então generalizar a escrita de um número racional com representação finita da seguinte forma:

$$\pm \;\; R_n R_{n-1} R_{n-2} \ldots R_2 R_1 R_0, r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots r_{q-1} r_q,$$

onde $R_n R_{n-1} R_{n-2} \ldots R_2 R_1 R_0$ representa a parte inteira do número e $0, r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots r_{q-1} r_q$ representa a parte decimal do número escrito na base 10, com $R_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}, R_n \neq 0$ e $r_l \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, e tal número significa:

$$\pm \;\; R_n \cdot 10^n + R_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + R_2 \cdot 10^2 + R_1 \cdot 10 + R_0 + r_1 \cdot 10^{-1} + r_2 \cdot 10^{-2} + \ldots r_{q-1} \cdot 10^{-q+1} + r_q \cdot 10^{-q}.$$

2.2.1 Operações elementares no sistema de numeração posicional de base 10

Considere os números racionais com representação finita

$$p = A_n A_{n-1} \ldots A_2 A_1 A_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_p$$

e

$$q = R_m R_{m-1} \ldots R_2 R_1 R_0, r_1 r_2 r_3 \ldots r_q$$

ambos escritos na base 10. Considere também que $A_n \neq 0$, $R_m \neq 0$ e $m < n$ e $q < p$. Sabe-se que:

$p = A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + A_2 \cdot 10^2 + A_1 \cdot 10 + A_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + a_p \cdot 10^{-p}$,

e

$q = R_m \cdot 10^m + R_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + R_2 \cdot 10^2 + R_1 \cdot 10 + R_0 + r_1 \cdot 10^{-1} + r_2 \cdot 10^{-2} + \ldots r_q \cdot 10^{-q}$.

Para efetuar-se a soma entre p e q, deve-se colocar as bases numéricas com mesmo índice deixando a potência em evidência e somando seus coeficientes, assim:

$p+q = (A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + A_2 \cdot 10^2 + A_1 \cdot 10 + A_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + a_p \cdot 10^{-p}) + (R_m \cdot 10^m + R_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + R_2 \cdot 10^2 + R_1 \cdot 10 + R_0 + r_1 \cdot 10^{-1} + r_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + r_q \cdot 10^{-q}) = A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + 10^m \cdot (A_m + R_m) + \ldots + 10^2 \cdot (A_2 + R_2) + 10 \cdot (A_1 + R_1) + (A_0 + R_0) + 10^{-1} \cdot (a_1 + r_1) + 10^{-2} \cdot (a_2 + r_2) + \ldots + 10^q \cdot (a_q + r_q) + \ldots + a_p \cdot 10^{-p}$

Se porventura a soma dos coeficientes de uma determinada potência de 10 exceder o valor numérico ou for igual a 10, que é o valor da base, ou seja se $(A_i + R_i) \geq 10$ ou $(a_k + r_k) \geq 10$, teremos $A_i + R_i = 10 + x$ ($a_k + r_k = 10 + y$, respect.), com $0 \leq x, y < 10$, $\{x, y\} \in \mathbb{N}$ ou seja a soma dos coeficientes é igual a base 10 mais um certo valor x (y), que nesse caso pode ser inclusive nulo. Dessa forma permanece o valor x (y) como fator do produto da base que excedeu o valor 10 na soma de seus coeficientes, e acrescenta-se 1 na soma dos coeficientes da potência de 10 seguinte, isso porque excedemos 10 unidades em uma ordem, e assim temos aumentado em 1 a quantidade da ordem posterior, e esse processo ocorre sucessivamente dessa maneira. Dessa forma, na soma dos números p e q

como definidos acima temos:

$p+q=$
$A_n\cdot10^n+\ldots+A_i\cdot10^i+\ldots+A_2\cdot10^2+A_1\cdot10+A_0+a_1\cdot10^{-1}+\ldots+a_k\cdot10^{-k}+\ldots+a_p\cdot10^{-p}\ +$
$R_m\cdot10^m+\ldots+R_i\cdot10^i+\ldots+R_2\cdot10^2+R_1\cdot10+R_0+r_1\cdot10^{-1}+\ldots+r_k\cdot10^{-k}+\ldots+r_q\cdot10^{-q}=$
$A_n\cdot10^n+\ldots+10^m\cdot(A_m+R_m)+\ldots+10^{i+1}\cdot(A_{i+1}+R_{i+1}+1)+10^i\cdot(x)+\ldots+(A_0+R_0)+$
$10^{-1}\cdot(a_1+r_1)+\ldots+10^{-k+1}\cdot(a_{k+1}+r_{k+1}+1)+10^{-k}\cdot(y)+\ldots+10^{-q}\cdot(a_q+r_q)+\ldots+10^{-p}\cdot a_p.$

Para a diferença entre os números racionais finitos p e q, temos os seguintes casos:

1) Se $p>q$, então definimos $p-q=p+(-q)$.

2) Se $p<q$, então definimos $p-q=-(q-p)=-(q+(-p))$.

Considere os números p e q descritos inicialmente. Vamos realizar a subtração de p por q descrita em 1):

$p-q=p+(-q)=$
$(A_n\cdot10^n+A_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+A_2\cdot10^2+A_1\cdot10+A_0+a_1\cdot10^{-1}+a_2\cdot10^{-2}+\ldots+a_p\cdot10^{-p})+$
$(-R_m\cdot10^m-R_{m-1}\cdot10^{m-1}-\ldots-R_2\cdot10^2-R_1\cdot10-R_0-r_1\cdot10^{-1}-r_2\cdot10^{-2}-\ldots-r_q\cdot10^{-q})=$
$A_n\cdot10^n+A_{n-1}\cdot10^{n-1}+\ldots+10^m\cdot(A_m-R_m)+\ldots+10^2\cdot(A_2-R_2)+10\cdot(A_1-R_1)+$
$(A_0-R_0)+10^{-1}\cdot(a_1-r_1)+10^{-2}\cdot(a_2-r_2)+\ldots+10^q\cdot(a_q-r_q)+\ldots a_p\cdot10^{-p}$

Se porventura a diferença entre algum dos coeficientes for negativa, ou seja, se $A_i-R_i<0$ ou $a_k-r_k<0$ então procedemos da seguinte maneira: subtraímos o valor 1 da soma dos coeficientes da potência de 10 posterior, no caso 10^{i+1} (10^{-k+1} respec.), e acrescentamos o valor 10 onde a soma dos coeficientes é negativa, logo $(A_i-R_i+10)>0$ ($(a_k-r_k+10)>0$). Estamos na verdade, “cedendo”um agrupamento de 10 da ordem posterior à ordem anterior. Portanto, temos que:

$p-q=p+(-q)=A_n\cdot10^n+\ldots+A_i\cdot10^i+\ldots+A_2\cdot10^2+A_1\cdot10+A_0+a_1\cdot10^{-1}+$
$\ldots+a_k\cdot10^{-k}+\ldots+a_p\cdot10^{-p}+(-R_m\cdot10^m-\ldots-R_i\cdot10^i-\ldots-R_2\cdot10^2-R_1\cdot10-$
$R_0-r_1\cdot10^{-1}-\ldots-r_k\cdot10^{-k}-\ldots-r_q\cdot10^{-q})=$
$A_n\cdot10^n+\ldots+10^m\cdot(A_m-R_m)+\ldots+10^{i+1}\cdot(A_{i+1}-R_{i+1}-1)+10^i\cdot(A_i-R_i+10)+$

$\ldots + (A_0 - R_0) + 10^{-1} \cdot (a_1 - r_1) + \ldots + 10^{-k+1} \cdot (a_{k+1} - r_{k+1} - 1) + 10^{-k} \cdot (a_k - r_k + 10) +$
$\ldots + 10^{-q} \cdot (a_q - r_q) + \ldots + 10^{-p} \cdot a_p.$

É evidente que o procedimento descrito acima é realizado de maneira análoga quando consideramos a hipótese 2) para diferença entre números racionais finitos.

Demonstramos dessa forma como são calculadas a soma e a diferença entre números racionais com representação finita no sistema de numeração posicional de base 10, e podemos agora facilmente compreender porque se pode somar ou subtrair dois números posicionando-os um abaixo do outro, somando ou subtraindo os coeficientes das bases de mesmo expoente.

As operações de soma e subtração de números racionais com representação finita são comumente efetuadas armando a conta na vertical, respeitando-se a ordem de cada algarismo que compõe o número, tanto para parte inteira quanto para a parte decimal do número. Na prática, cada algarismo dos números que compõem a operação fica embaixo da sua respectiva posição em cada uma das classes.
Abaixo, apresentaremos exemplos para as operações consideradas:

Exemplo 2.2.1. *Determine a soma de* $562,83$ *com* $79,7$*:*

$562,83 + 79,7 = (5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2 + 8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}) + (7 \cdot 10 + 9 + 7 \cdot 10^{-1}) =$
$5 \cdot 10^2 + (6+7) \cdot 10 + (2+9) + (8+7) \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^2 + \boldsymbol{13} \cdot 10 + \boldsymbol{11} + \boldsymbol{15} \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = *$

Na soma, observe que os números em destaque excedem o valor 9*, e sempre que isso ocorrer procederemos como descrito acima. Temos então*

$* = 5 \cdot 10^2 + 13 \cdot 10 + (11 + \boldsymbol{1}) + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^2 + 13 \cdot 10 + 12 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} =$
$5 \cdot 10^2 + (13 + \boldsymbol{1}) \cdot 10 + 2 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^2 + 14 \cdot 10 + 2 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} =$
$(5 + \boldsymbol{1}) \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 642,53$

Exemplo 2.2.2. *Determine a diferença entre* $75,653$ *e* $9,42$*:*

$75,653 - 9,42 = 75,653 + (-9,42) = (7 \cdot 10 + 5 + 6 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}) + (-9 - 4 \cdot 10^{-1} - 2 \cdot 10^{-2}) = 7 \cdot 10 + (\boldsymbol{5\text{-}9}) + (6-4) \cdot 10^{-1} + (5-2) \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} = *$

Observe que a diferença entre os coeficientes destacados é negativa, então procedemos como descrito acima. Temos então

$* = (7 - \boldsymbol{1}) \cdot 10 + (5 - 9 + \boldsymbol{10}) + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10 + 6 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} = 66,233$

Veremos agora como se realiza a multiplicação e divisão no sistema de numeração posicional decimal. Para tanto, considere os números p e q definidos no início da subseção. Sabemos que:

$$p = A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + A_2 \cdot 10^2 + A_1 \cdot 10 + A_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + a_p \cdot 10^{-p}$$

e

$$q = R_m \cdot 10^m + R_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + R_2 \cdot 10^2 + R_1 \cdot 10 + R_0 + r_1 \cdot 10^{-1} + r_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + r_q \cdot 10^{-q}.$$

O produto de p por q é definido então por:

$$p \cdot q = \sum_{i=0,\ldots,n;j=0,\ldots m} A_i R_j \cdot 10^{i+j} + \sum_{i=0,\ldots,n;k=1,\ldots q} A_i r_k \cdot 10^{i-k} + \sum_{l=1,\ldots,p;j=0,\ldots m} a_l R_j \cdot 10^{-l+j} + \sum_{l=1,\ldots,p;k=1,\ldots q} a_l r_k \cdot 10^{-l-k}.$$

Consideremos o caso onde o produto dos coeficientes seja maior do que ou igual a 10, ou seja, se $A_i R_j = st$, $A_i r_k = st$, $a_l R_j = st$ ou $a_l r_k = st$ com $s, t \in I\!N$ satisfazendo $1 \leq s \leq 9$, $0 \leq t \leq 9$ e $st \geq 10$. Então o algarismo t permanece multiplicando a potência de 10 onde o produto de seus coeficientes ficou maior ou igual a base, e o algarismo s é somado aos coeficientes da potência de 10 imediatamente maior, e assim sucessivamente.

Exemplo 2.2.3. *Determine o produto de* $5,32$ *por* $17,12$*:*

$5,32 \times 17,12 = (5 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}) \cdot (1 \cdot 10 + 7 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}) =$
$5 \cdot 10 + 35 + 5 \cdot 10^{-1} + 10 \cdot 10^{-2} + 3 + 21 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-1} + 14 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} = (50 + 35 + 3) + (21 + 2 + 5) \cdot 10^{-1} + (10 + 3 + 14) \cdot 10^{-2} + (6 + 2) \cdot 10^{-3} + (4) \cdot 10^{-4} =$

$88 + \boldsymbol{28} \cdot 10^{-1} + \boldsymbol{27} \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} = *$

Na soma, observe que os números em destaque excedem o valor 9. Assim procedemos como descrito acima. Temos então

$* = 88 + (28 + \boldsymbol{2}) \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} = (88 + \boldsymbol{3}) + 0 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} = 91,0784.$

Na divisão de números racionais com representação finita temos envolvidos os elementos usados na divisão aritmética. São eles: **dividendo, divisor, quociente** e **resto**. Ocorre que ao obtermos um resto inteiro menor que o divisor, podemos fracioná-lo em décimos e continuar o processo de divisão; o próximo resto pode ser fracionado em centésimos, e assim sucessivamente, portanto a divisão consiste de um processo de divisão continuada. Sabemos que todo número racional $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ admite uma representação decimal, e para representar uma fração ordinária em sua forma decimal basta dividirmos o numerador (dividendo) pelo denominador (divisor) da fração. Note que, na divisão de números racionais sempre é possível obter frações equivalentes com dividendo e divisor inteiros, a fim de "eliminarmos" a parte decimal dos números.

Abaixo, um exemplo ilustrativo do processo de divisão de números racionais.

Exemplo 2.2.4. *Vamos dividir* $235,008$ *por* $43,2$*, temos então:*

$$\frac{235,008}{43,2} = \frac{235008}{43200}$$

Utilizando o método das chaves temos:

$$\begin{array}{r|l}
235008 & 43200 \text{ x} \\ \cline{2-2}
-216000 & 5,44 \\ \cline{1-1}
19008\mathbf{0} & \\
-172800 & \\ \cline{1-1}
17280\mathbf{0} & \\
-172800 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Na prática, para efetuar tal divisão, geralmente o professor impõe a seguinte regra:

- Primeiro igualar as casas decimais (ordens à direita da unidade após a vírgula) dos dois números;
- Em seguida, "cancelar"a vírgula;
- Finalmente efetua-se a divisão euclidiana.

Tal processo consiste simplesmente em encontrar frações equivalentes com numerador e denominador inteiros, a fim de realizarmos a divisão tal como foi concebida. Ocorre que na divisão de números racionais, nem sempre a expressão decimal obtida como resultado é um número racional com representação finita. Podemos obter também números cuja representação não é finita porém é periódica: são as chamadas dízimas periódicas que serão tratadas na seção seguinte. Com isso, encerramos as operações aritméticas básicas no sistema de numeração posicional de Base 10 envolvendo números racionais com representação finita.

2.3 Dízimas e expressões decimais

Todo número racional admite uma representação dada por uma fração ordinária, representação esta que é única se tomarmos as frações com denominador positivo e em forma irredutível.[2]Para obtermos a representação decimal de um número racional, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador da fração. Na seção anterior, vimos um exemplo de divisão de números racionais encontrando como resultado um número decimal com representação finita.

A divisão de números racionais terá como resultado um número decimal com representação finita, sempre que na decomposição do denominador da fração em forma irredutível tivermos apenas um produto de fatores primos de potências de 2 e/ou 5 (ver lema (2.3.3)). Isso é verdadeiro pois assim sempre será possível obter frações equivalentes, introduzindo os fatores 2 e 5 de tal forma que o denominador sempre será uma potência de

[2]Frações irredutíveis são frações que possuem o numerador e o denominador primos entre si, e neste caso o único divisor comum dos dois números é o número 1, logo tais frações não podem ser simplificadas.

10. Veja os exemplos abaixo:

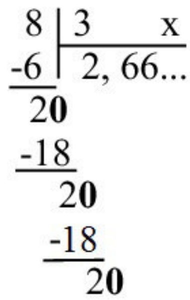
$$\frac{9}{5} = \frac{9 \times 2}{5 \times 2} = \frac{18}{10} = 1,8$$

$$\frac{17}{40} = \frac{17}{2^3 \times 5} = \frac{17 \times 5^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{425}{1000} = 0,425$$

$$\frac{91}{80} = \frac{91}{2^4 \times 5} = \frac{91 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{11375}{10000} = 1,1375$$

Mas o que acontece então se tivermos fatores diferentes de 2 e 5 na decomposição do denominador em fatores primos?

Observe abaixo a divisão de 8 por 3:



Podemos notar que neste caso o resultado da divisão é um número com representação decimal infinita e periódica e sempre que tivermos fatores diferentes de 2 ou 5 na decomposição do denominador em fatores primos, o resultado da divisão remete a um número com expressão decimal infinita e periódica, fato este que será demonstrado posteriormente. Portanto um número N com expressão decimal infinita e periódica é:

$$N = \pm \quad R, r_1 r_2 \ldots r_n \ldots$$

onde R representa a parte inteira do número e $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ são os dígitos que representam a parte decimal infinita, que em algum momento comporá um período constante que se repete infinitamente. No sistema de numeração posicional decimal o número N representa:

$$N = \pm \quad R + r_1 \cdot 10^{-1} + r_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + r_n \cdot 10^{-n} + \ldots = R + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \ldots + \frac{r_n}{10^n} + \ldots$$

Antes de formalizarmos o conceito de dízima periódica para representar números racionais com representação decimal infinita e periódica, vamos ressaltar que a representação decimal de um número racional não é única. Para tanto, considere o número racional:

$$\alpha = 0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$$

Afirmamos que $\alpha = 1$. Com um número suficientemente grande de casas decimais a diferença entre 1 e α é tão pequena, que nos permite concluir que o número $\alpha = 0,999\ldots$ tem como limite o número 1 e portanto $0,999\ldots = 1$. Podemos concluir portanto que a expressão decimal de um número racional qualquer não é única. Veja os exemplos a seguir: $4,999\ldots = 5$; $0,6999\ldots = 0,7$; $20,24999\ldots = 20,25$.
Podemos generalizar tal fato afirmando que as expressões decimais

$$R, r_1 \ldots r_n 999\ldots \quad \text{e} \quad R, r_1 \ldots (r_n + 1)000\ldots$$

representam o mesmo número racional.

Definição 2.3.1. *Uma expressão decimal $R, r_1 r_2 \ldots$ chama-se dízima periódica simples, de período $a_1 a_2 \ldots a_p$ quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem.*

São exemplos de dízimas periódicas simples:

$$0,555\ldots; \quad 7,444\ldots; \quad 22,313131\ldots; \quad 9,273273273\ldots; \quad etc.$$

Quando uma dízima periódica possui um ante-período, ou seja um grupo de algarismos que antecedem a parte periódica da dízima, classificamo-las como *dízimas periódicas compostas*. São exemplos de dízimas periódicas compostas:

$$0,2333\ldots; \quad 8,2545454\ldots; \quad 21,2735414141\ldots; \quad etc.$$

2.3.1 Geratriz de uma dízima periódica

Vamos inicialmente definir geratriz de uma dízima periódica simples justificando a validade da definição e em seguida explicar também um processo para obter as geratrizes de dízimas periódicas compostas.

Definição 2.3.2. *Chama-se geratriz de uma dízima periódica simples a fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.*

É fato que

$$0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = 1,$$

dividindo por 9, temos que

$$0,111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \frac{1}{9} \tag{2.1}$$

Multiplicando a expressão (2.1) por $a, \forall a \in I\!N$, obtemos

$$0,aaa\ldots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \ldots = \frac{a}{9}.$$

Podemos dizer então que:

$$0,555\ldots = \frac{5}{9}.$$

Estendendo o resultado, podemos observar também que

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{99}{100}, \quad \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} = \frac{99}{10000}, \quad etc.,$$

dessa forma:

$$1 = \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100}\right) + \left(\frac{9}{1000} + \frac{9}{10000}\right) + \ldots = \frac{99}{100} + \frac{99}{10000} + \ldots = 99\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right) \tag{2.2}$$

Dividindo a equação (2.2) por 99, temos que

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} \ldots = \frac{1}{99}. \tag{2.3}$$

Multiplicando a equação (2.3) por $ab, a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, obtemos que

$$0,ababab\ldots = \frac{ab}{100} + \frac{ab}{100^2} + \frac{ab}{100^3} + \ldots = \frac{ab}{99}.$$

Podemos citar como exemplo que:

$$0,454545\ldots = \frac{45}{100} + \frac{45}{100^2} + \frac{45}{100^3} + \ldots = \frac{45}{99}.$$

De maneira análoga, podemos mostrar que

$$0,374374374\ldots = \frac{374}{1000} + \frac{374}{1000^2} + \frac{374}{1000^3} + \ldots = \frac{374}{999}.$$

Este procedimento estende-se para todas as dízimas periódicas simples.

Agora, vamos descrever um procedimento para obter a geratriz de uma dízima periódica composta, como segue no exemplo abaixo:

Seja $x = 0,42353535\ldots$, então:

$$\begin{aligned} 100x = 42,353535\ldots = 42\frac{35}{99} = \\ = \frac{42 \times 99 + 35}{99} = \frac{42(100-1)+35}{99} = \\ = \frac{4200 - 42 + 35}{99} = \frac{4235 - 42}{99}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x = \frac{4235 - 42}{9900}.$$

O procedimento descrito acima, sugere a aplicação de uma regra para encontrar a geratriz de uma dízima periódica composta conforme [8]:

"A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual a parte não-periódica (42) *seguida de um período* (35) *menos a parte não-periódica e cujo o denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica."*

Vimos então que para se obter a geratriz de dízimas periódicas, sejam estas simples ou compostas, podemos utilizar os métodos descritos acima. Para obtermos a representação decimal de frações irredutíveis ordinárias, é sabido que o método conveniente é efetuar-se o processo de divisão continuada do numerador pelo denominador. Mas será possível identificar através da fração ordinária se sua representação decimal será finita, uma dízima periódica simples ou uma dízima periódica composta? A resposta é sim, veja abaixo os resultados possíveis:

1. Uma fração ordinária irredutível p/q, quando transformada em decimal, tem uma representação decimal finita ou infinita periódica (dízima periódica). Vimos que o primeiro caso ocorre se $q = 2^m \cdot 5^n$ com $m, n \in I\!N$ e o segundo caso ocorre quando $q = 2^m \cdot 5^n \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ com $m, n \in I\!N$ e $s_1, \ldots, s_t$ primos com 10.

2. Quando o denominador q é primo com 10, ou seja quando $q = s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ com $s_1, \ldots, s_t$ primos diferentes de 2 e 5, a dízima periódica gerada pela fração p/q é simples, ou seja o período começa no primeiro algarismo decimal.

3. Se $q = 2^m \cdot 5^n \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ com $m, n \in I\!N$, m, n não nulos ao mesmo tempo e $s_1, \ldots, s_t$ primos com 10, ou seja, caso q seja divisível por 2 ou por 5 e também por um outro número primo diferente de 2 e 5, a dízima periódica gerada pela fração irredutível p/q é composta, isto é, a parte decimal possui algarismos formando um ante-período antes da parte periódica. O número de algarismos do ante-período é igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou de 5 pela qual q é divisível.

Os resultados serão justificados tendo como aporte os lemas a seguir:

Lema 2.3.3. *Toda fração ordinária irredutível p/q com denominador $q = 2^a \cdot 5^b$ pode ser representada por uma fração decimal.*

Demonstração. Se p/q for decimal finito, podemos representá-lo da forma:

$$\frac{p}{q} = A, a_1 a_2 \ldots a_k = A + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} = \frac{r}{10^k}.$$

Como $\frac{p}{q} = \frac{r}{10^k}$, então $p \cdot 10^k = q \cdot r$, além disso p e q são primos entre si, logo $q \mid 10^k$.

Tomamos então $q = 2^a \cdot 5^b$, com $a, b \in I\!N$. Assim:

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^a \cdot 5^b} \cdot \frac{2^b \cdot 5^a}{2^b \cdot 5^a} = \frac{2^b \cdot 5^a \cdot p}{2^{a+b} \cdot 5^{a+b}} = \frac{2^b \cdot 5^a \cdot p}{(2 \cdot 5)^{a+b}} = \frac{2^b \cdot 5^a \cdot p}{10^{a+b}} \tag{2.4}$$

Como o denominador da equação (2.4) é uma potência de 10, temos então que toda fração ordinária irredutível p/q pode ser representada por uma fração decimal e possui portanto representação decimal finita. ∎

Lema 2.3.4. *Todo número natural q primo com 10 têm um múltiplo cuja representação decimal é formada apenas por noves.*

Demonstração. Se o número q é primo com 10, então na decomposição de q em fatores primos não aparecem os fatores 2 e 5.
Temos que os números 9; 99; 999; $99\ldots9$ quando divididos por q deixam restos $r \in I\!N$ tal que $0 \leq r < q-1$, gerando então um número finito de restos. Existem portanto dois números formados por noves que deixam o mesmo resto quando divididos por q. Sejam x e x' esses números, temos que:
$x - x' = k$ e $q \mid k$ e além disso, $k = 99...90...0$. Então:
$n \cdot q = k = 99...90...0 = 99...9 \cdot 10^m$.
Assim $q \mid 99...9 \cdot 10^m$ e como q é primo com 10^m, segue que $q \mid 99...9$. ∎

Lema 2.3.5. *Todo número natural q têm um múltiplo cuja representação decimal é formado por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. O menor múltiplo de q desta forma termina com um número de zeros igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual q é divisível.*

Demonstração. Temos que $q = 2^a \cdot 5^b \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ onde $s_1, \ldots, s_t$ são primos com 10. Suponha $a > b$. Então a é o maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual q é divisível. Seja n o menor natural tal que: $n \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_t = 99...9$.
Então o menor múltiplo de q formado por noves seguidos de zeros é:

$$5^{a-b} \cdot n \cdot q = 10^a \cdot n \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_t = 99...90...0 \quad (a \text{ zeros no final})$$

∎

O Teorema a seguir é imediato.

Teorema 2.3.6. *Toda fração irredutível p/q é equivalente a uma fração cujo denominador tem uma das formas* 10...0, 99...9 *ou* 99...90...0. *Temos os seguintes casos:*

1) Se $q = 2^a \cdot 5^b$ então $\frac{p}{q} = \frac{n}{10...0}$;

2) Se q é primo com 10, então $\frac{p}{q} = \frac{n}{99...9}$;

3) Se $q = 2^a \cdot 5^b \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ onde o produto $s_1 \cdot \ldots \cdot s_t$ é primo com 10, então $\frac{p}{q} = \frac{n}{99...90...0}$.

Nos casos 1) *e* 3)*, se o numerador n não terminar em zero, o número de zeros do denominador é igual ao maior dos expoentes a ou b.*

Demonstração. Decorre imediatamente dos lemas apresentados anteriormente, basta obter uma fração equivalente conforme o caso. ∎

Capítulo 3

Números Reais

Nos capítulos anteriores foram explorados *à priore* os primeiros métodos de contagem, inevitavelmente surgidos vistas as necessidades práticas do homem, originando assim os números naturais (providos para associar quantidades a tudo o que vinha da natureza); *a posteriori* o advento dos números inteiros novamente aludidos frente aos avanços da sociedade (expansão comercial, problemas de outra natureza envolvendo quantidades negativas) e o consequente conceito de comensurabilidade entre grandezas e as razões entre números inteiros, pareciam ser suficientes para elucidar qualquer questão prática relacionada à problemas envolvendo determinação de comprimentos e medidas. O método demonstrativo que embasou toda a geometria demonstrativa, deduzido pelo matemático, filósofo e astrônomo Tales de Mileto (considerado um dos "sete sábios"da antiguidade, durante a primeira metade do século VI a.C.) já estava consolidado e sucedeu incontáveis avanços no estudo das relações abstratas envolvendo números [1]. Mais tarde Pitágoras de Samos (nascido por volta de 572 a.C.), que provavelmente fora discípulo de Tales, fundaria em Crotona (Sul da Itália) a escola pitagórica, um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais, caracterizada por ser uma irmandade estreitamente unida por ritos e cerimônias.

A filosofia doutrinadora da escola pitagórica fundamentava-se na suposição de que a

[1]Para os gregos, o estudo das relações abstratas envolvendo números estava inserido num ramo da matemática denominado *logística*, atualmente designado como *teoria dos números*.

causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros, ou seja, para os seguidores da escola pitagórica, tudo podia ser expresso através dos números inteiros. Os seguidores da escola pitagórica propuseram os conceitos de *números perfeitos, números amigos*, além de outros tantos resultados, mas talvez o resultado mais importante, que leva o nome do mentor da escola pitagórica, tenha sido o renomado *Teorema de Pitágoras*. É fato que os números racionais até então eram suficientes para qualquer situação envolvendo números e operações aritméticas. No capítulo anterior definimos o que são segmentos comensuráveis, o que nos conduz a uma interpretação geométrica bastante simples. Numa reta horizontal marque os pontos O e X (O à esquerda de X), o segmento OX é tomado como unidade de medida. Numa correspondência biunívoca atribuímos valor 0 ao ponto O e valor 1 ao ponto X, assim a unidade de medida OX tem comprimento unitário. Podemos então estender a correspondência entre número inteiros e pontos da reta da seguinte maneira: à direita de O, para cada ponto na extremidade do segmentos unitários subsequentes, atribuímos um número inteiro positivo (de forma crescente). Da mesma forma, à esquerda de O, para cada ponto na extremidade dos segmentos unitários antecedentes atribuímos um número inteiro negativo (de forma decrescente). As frações de denominador q podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q partes. Portanto para cada número racional correspondia um ponto da reta. Acreditava-se que cada ponto da reta teria um correspondente número racional associado a ele.

Contudo, uma descoberta atemorizante atribuída aos pitagóricos causaria uma enorme crise, conflitando com o que acreditava-se ser uma verdade incontestável sobre a *sui generis* existência dos números racionais. Certamente foi causa de espanto e surpresa para os pitagóricos descobrir que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional. A constatação geométrica de tal fato, além de extremamente relevante é bastante simples de se ver: os pitagóricos demonstraram que não há nenhum número racional associado ao ponto P da reta no caso em que OP é a diagonal de uma quadrado de lado medindo uma unidade (veja a figura (3.1)). Essa grande descoberta trouxe a tona o surgimento de novos números para associarmos a estes pontos da reta; posto que esses números não eram racionais, foram então chamados de números irracionais. Este certamente é um marco revolucionário para o desenvolvimento da matemática.

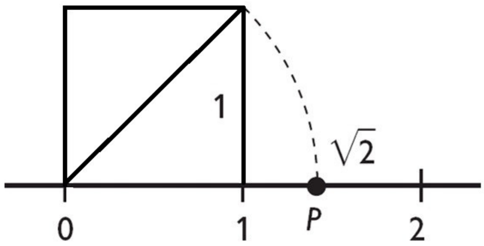


Figura 3.1: Números irracionais

Vamos provar a seguir que a diagonal de um quadrado de lado unitário não corresponde a nenhum número racional. Se $a = OP$ que é a medida da diagonal do quadrado, então pelo teorema de Pitágoras sabemos que em qualquer triângulo retângulo onde a é a medida da hipotenusa, e b e c as medidas dos catetos respectivamente, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{3.1}$$

Na situação geométrica descrita acima, como os catetos medem $1 = b = c$, então a medida da diagonal OP do quadrado é dada substituindo os valores na equação (3.1), então:

$$a^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$$

Proposição 3.0.7. *O número $\sqrt{2}$ é um número irracional.*

Demonstração. Suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional, então existem p e q inteiros, p e q primos entre si tais que $\sqrt{2} = p/q$, então:

$$p = q\sqrt{2}. \tag{3.2}$$

Elevando os dois membros da equação (3.2) ao quadrado temos

$$p^2 = 2q^2. \tag{3.3}$$

Como p^2 é o dobro de um inteiro, conculímos que p^2 é par, então p também é par e portanto $p = 2r$. Substituindo o valor de p na equação (3.3) temos:

$$(2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2.$$

Dessa forma q^2 também é par, então q também é par. Mas isso é um absurdo, pois na hipótese inicial admitimos p e q primos entre si, ou seja a fração p/q deve ser irredutível. Portanto, o número $\sqrt{2}$ não é racional e assim temos que $\sqrt{2}$ é um número irracional. ∎

A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ pelos pitagóricos [2] causou grande desconforto na escola pitagórica, a ponto de esconderem durante um bom tempo, inclusive ameaçando e punindo severamente quem viesse a revelar o feito. Com a descoberta de números que não eram racionais ,ou seja, números que não eram comensuráveis com a unidade, os alicerces da filosofia pitagórica estavam abalados, pois até então admitia-se que todas as grandezas eram comensuráveis com a unidade.

Em outras palavras, existem segmentos AB e CD sem unidade comum EF, são os chamados *segmentos incomensuráveis.* O tratamento adequado dos números irracionais foi dado bem mais adiante pelo matemático alemão Richard Dedekind $(1831-1916)$ em 1872. A existência desses segmentos que não são comensuráveis com nenhuma unidade de medida em contraposição aos números racionais que estão associados a medidas de segmentos comensuráveis, deu origem ao **conjunto dos números irracionais** que será denotado por:

$$\mathbb{Q}^c = \{x/x \notin \mathbb{Q}\}$$

Dessa forma, diz-se ser um *número irracional* todo número que não é racional, ou seja, para cada segmento incomensurável, existe um número irracional associado a medida desse segmento. Podemos afirmar assim que todo número irracional possui representação decimal infinita e não periódica, e vamos por enquanto apenas admitir a existência desses números. Não há um padrão ou regularidade para definir um número irracional, podemos de forma inventiva criar uma estrutura infinita e não periódica para um número e este número produzido será irracional. Observe os números irracionais a seguir:

$0,112123123412345\ldots; 0,515511555111\ldots; 2,10100100010000\ldots; 23,788778887778888\ldots.$

[2] Não se sabe ao certo se tal descoberta foi usando argumentos numéricos, como fizemos anteriormente, ou se utilizaram alguma construção geométrica para demonstrar o fato.

Nos capítulos seguintes será dado um enfoque especial a algumas grandezas incomensuráveis que merecem destaque, com uma abordagem muito mais abrangente do que estes simples exemplos de números irracionais. O fato de ampliarmos o conceito de número de tal forma que todo segmento tenha portanto uma medida associada a ele nos conduz a um conjunto mais amplo formado por todos os segmentos comensuráveis e todos os segmentos incomensuráveis e suas respectivas medidas associadas. A união desses dois conjuntos com seus respectivos elementos precedidos de um sinal "$-$"para indicar os números negativos dá origem ao **conjunto dos números reais**, que será denotado por $\mathbb{R}$ e definido por:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c.$$

Um tratamento geométrico permite com grande lucidez visualizarmos o conjuntos dos números reais e todas as operações e propriedades vigentes em tal conjunto.

3.1 Números reais e a reta real

Fundamentalmente, a ideia central vislumbrada até agora está relacionada a problemas de contagem (e o advento de um sistema de numeração posicional adequado - base 10) precedida por problemas envolvendo determinação de medidas de segmentos, conceituando-se segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis. Para tanto tratamos inicialmente conjuntos mais elementares como o conjunto dos números naturais precedido do conjunto dos números inteiros, racionais e também o conjunto dos números irracionais. Prioritariamente todos os números trabalhados até o presente momento estão relacionados a medidas de segmentos, portanto vamos relacioná-los a pontos de uma reta, de forma que em correspondência biunívoca, todo número real corresponderá a um ponto da reta determinando a medida de todos os segmentos comensuráveis e incomensuráveis como será descrito. Considere uma reta e um ponto fixado arbitrariamente denominado **origem**, denotado por O. Escolhemos um outro ponto A à direita da origem e definimos OA como unidade de comprimento. A reta OA será chamada *reta real*, ou *eixo real*.

O ponto O divide a reta OA em duas semirretas. A que contém o ponto A é a semirreta positiva, e a outra é a semirreta negativa. Na semirreta da direita, marcamos inicialmente os números naturais. Na semirreta da esquerda, marcamos todos os segmentos com uma extremidade na origem e em sua extremidade esquerda a medida do segmento definido por um número natural, precedido do sinal "$-$". Temos então os pontos associados as números inteiros. Em seguida, marcamos todos os segmentos a direita da origem comensuráveis com a unidade de comprimento OA, determinando assim na extremidade direita cada número racional associado a medida do segmento: são os números racionais positivos. De maneira análoga, mas considerando agora a semirreta negativa marcamos os segmentos comensuráveis com a unidade a unidade e na extremidade esquerda desses segmentos determinamos os números racionais negativos associados as suas medidas. Temos portanto os números racionais representados na reta. Mas vimos que há pontos na reta correspondentes a medidas de segmentos que não são comensuráveis com a unidade de comprimento OA, e a fim de "preenchermos"todos os pontos da reta, associamos os números irracionais as medidas de todos os segmentos incomensuráveis.

Seja X um ponto da reta. A cada número real x associado a medida do segmento OX colocado na extremidade direita (semirreta positiva) ou esquerda (semirreta negativa) de cada segmento, diremos que x é **abscissa** do ponto X na reta, de tal forma que a cada ponto da reta, faz-se corresponder um único número real, e cada número real corresponde a um único ponto da reta. É evidente que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}^c$$

Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é **positivo** e denotamos por $x > 0$ caso x pertença à semirreta positiva, e dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é **negativo**, denotando por $x < 0$ caso x pertença à semirreta negativa.

3.2 Operações em $\mathbb{R}$

Para definirmos as operações no conjunto $\mathbb{R}$ vamos explorar conjuntamente os modelos aritmético (usando os números reais) e geométrico (pontos constituindo a reta real). Vimos que todo ponto da reta possui uma abcissa representada por um número real.

Considere os pontos da reta conforme descrição. Tome os pontos X com abcissa x e Y com abcissa y. Temos os seguintes casos a considerar:

i) Para $x < y$ e $x, y > 0$:

Neste caso, temos que X e Y ambos estão à direita do ponto O de abcissa 0, e assim, temos que a soma $x+y$ é a abcissa do ponto W de tal forma que o segmento YW tem o mesmo comprimento e o mesmo sentido de percurso de OX.

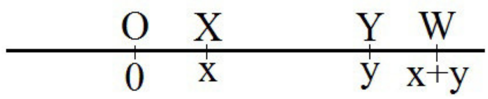


Figura 3.2: Soma i)

ii) Para $|y| < |x|$, $x > 0$ e $y < 0$:

Neste caso, temos X à direita de O e Y à esquerda de O, e a soma $x+y$ é a abcissa do ponto W tal que o segmento XW tem o mesmo comprimento e o mesmo sentido de percurso de OY.

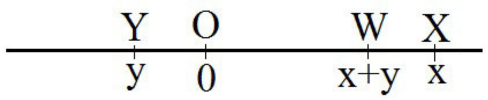


Figura 3.3: Soma ii)

iii) Para $|x| < |y|$ e $x, y < 0$:

Este caso é análogo ao item i), porém a soma $x+y$ é a abcissa do ponto W que pertence a semirreta negativa.

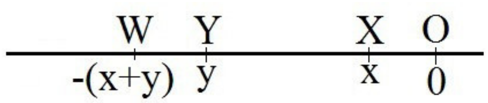


Figura 3.4: Soma iii)

iv) Para $|y| < |x|$, $x < 0$ e $y > 0$:

Este caso é análogo ao item ii), porém a soma $x + y$ é a abcissa do ponto W, que pertence a semirreta negativa.

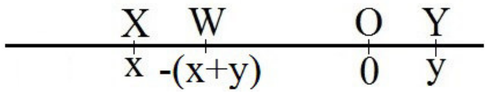


Figura 3.5: Soma iv)

Para o produto de números reais vamos fazer a demonstração geométrica do fato.

Vamos considerar as abcissas dos pontos X e Y positivas, ou seja, temos que $x > 0$ e $y > 0$. Observe a construção a seguir:

1. Sobre a reta real, marque a unidade P representada pela abcissa 1 e o ponto Y de abcissa y;

2. Trace uma reta auxiliar l que passe pela origem (ponto O) e forme um ângulo inferior a 90º com reta real e sobre a reta l, marque o ponto X de abcissa x no semiplano definido acima da reta real;

3. Trace uma reta s que passa por X e pela unidade P;

4. Trace uma reta t paralela à reta s passando por Y, e marque o ponto $\{Z\} = t \cap l$. Seja z a abcissa do ponto Z.

Temos que os triângulos OPX e OYZ são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos então:

$$\frac{1}{y} = \frac{x}{z} \Rightarrow z = xy$$

Portanto a abcissa z do ponto Z indica o produto de x por y. Observe a figura (3.6) que ilustra geometricamente o produto definido.

Para os demais casos é só trocar o sinal de forma conveniente como mostra a tabela a seguir:

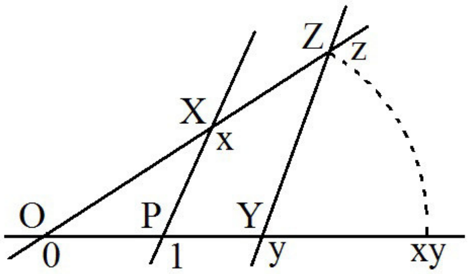


Figura 3.6: Multiplicação de números reais

x	y	xy
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

As operações definidas anteriormente, quando particularizadas aos números racionais, permitem-nos definir o tradicional formato das operações entre esses números. Basta tomar $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ com $x, y \in \mathbb{Q}$, dessa forma temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

As operações de adição e multiplicação no conjunto dos números reais satisfazem as seguintes propriedades:

[A.1](**Associativa da adição**)

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

[A.2](**Comutativa da adição**)

$$x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

[A.3](**Elemento neutro da adição**)

$$x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

[A.4](**Simétrico ou oposto para adição**)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad x + (-x) = 0$$

[M.1](**Associativa da multiplicação**)

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

[M.2](**Comutativa da multiplicação**)

$$xy = yx, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

[M.3](**Elemento neutro da multiplicação**)

$$x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

[M.4](**Elemento inverso da multiplicação**)

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad xy = 1$$

[M.5](**Distributiva da multiplicação relativamente à soma**)

$$x(y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

3.3 Desigualdades no conjunto $\mathbb{R}$

Definição 3.3.1. *Dados os números reais x e y, dizemos que $x < y$ se $y - x > 0$.*

Um subconjunto importante do conjunto dos números reais é o **conjunto dos números reais positivos**, definido por:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

O conjunto dos números reais positivos permite-nos enunciar duas importantes propriedades que serão descritas a seguir:

P.1) A soma e o produto entre números reais positivos é também um número real positivo, ou seja:

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad x \cdot y \in \mathbb{R}^+$$

P.2) Dado um número real x existem apenas três possibilidades mutuamente exclusivas: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Munido das operações de adição e multiplicação com suas respectivas propriedades, além da relação de desigualdade apresentada através das propriedades P.1) e P.2), diremos que o conjunto dos números reais caracteriza o que chamamos de **corpo ordenado**.
A relação de ordem $x < y$ (ou $y > x$) goza ainda das seguintes propriedades:

i) *Tricotomia*: Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$ há uma, e somente uma hipótese a se considerar: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$.

ii) *Transitividade*: Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

iii) *Monotonicidade da Adição*: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x < y$, $x + z < y + z$, qualquer que seja $z \in \mathbb{R}$.

iv) *Monotonicidade da Multiplicação*: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x < y$, $xz < yz$, qualquer que seja $z \in \mathbb{R}^+$.

O que difere o conjunto dos números reais do conjunto dos números racionais é a completeza dos números reais, ou seja a não existência de "buracos"na reta real. O conjunto dos números reais é um dito um **corpo ordenado completo**.

Ainda relativamente à desigualdade entre números reais, o significado geométrico da desigualdade $x < y$, é que existe um ponto X de abcissa x à esquerda de um ponto Y de abcissa y, ambos na reta real.

Do ponto de vista númerico para comprovar que $x < y$, considere os números reais dados por suas expressões decimais:

$$x = A_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \quad \text{e} \quad y = B_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

Temos três casos a considerar:

1º caso) Se os números x e y são reais positivos então vamos utilizar o algoritmo descrito abaixo:

- Se $A_0 < B_0$ então $x < y$.
- Caso tenhamos $A_0 = B_0$, comparamos os números da primeira ordem decimal: se $a_1 < b_1$ então $x < y$.
- Caso tenhamos $A_0 = B_0$ e $a_1 = b_1$, comparamos os números da segunda ordem decimal: se $a_2 < b_2$ então $x < y$.
- Caso tenhamos $A_0 = B_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, o procedimento de comparação entre os dígitos a_i e b_i é repetido até que exista um número inteiro $k > 0$ tal que $a_k < b_k$ então teremos $x < y$.

2º caso) Caso tenhamos $x \leq 0 < y$ a relação $x < y$ é imediata.

3º caso) Finalmente se x e y forem números reais negativos, tem-se que $x < y$ se, e somente se, $-x > -y$.

3.4 Identificando números irracionais via polinômios

No estudo dos conjuntos numéricos apresentados até aqui foram abordados prioritariamente aspectos relativos a conceituação histórica, operações e propriedades no sistema de numeração decimal. Seguimos um enredo que apresenta os números e os conjuntos numéricos conforme uma ordem consecutiva de surgimento e importância na vida do homem. É notável que contextualizando o ensino da matemática no ensino médio, os números racionais são muito mais evidentes que os números irracionais, pois a ideia de medida usando frações para representá-las é imediata. Contudo os números irracionais tem uma elevada relevância no universo dos números, apesar de serem números pertencentes a um conjunto que não possui uma estrutura padrão definida. Além disso, é motivo de espanto admitirmos que existem mais números irracionais que racionais, fato que é amenizado quando aceitamos existir uma infinidade de raízes não exatas de um número inteiro, isto é, se k é um número inteiro, existem infinitas raízes $\sqrt[n]{k}$, a maioria delas irracionais. Para identificarmos raízes irracionais através de polinômios, vamos utilizar o teorema a seguir:

Teorema 3.4.1. *Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, *com* $a_n \neq 0$. *Se o número racional* p/q, $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \in \mathbb{Z}^*$, *com* p *e* q *primos entre si é raiz dessa equação, então* p *é divisor de* a_0 *e* q *é divisor de* a_n.

Demonstração. Como $\dfrac{p}{q}$ é raiz da equação, temos:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \tag{3.4}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3.4) por q^n, temos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \tag{3.5}$$

Isolando a_np^n e colocando q em evidência na equação (3.5), temos:

$$a_np^n = -q(\underbrace{a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}}_{\alpha}) \tag{3.6}$$

Agora, isolamos a_0q^n e colocamos p em evidência na equação (3.5):

$$a_0q^n = -p(\underbrace{a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1}}_{\beta}) \tag{3.7}$$

Como todos os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n, p$ e q são inteiros, segue que α e β são inteiros. Nas equações (3.6) e (3.7) temos:

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} a_np^n & = & -q\cdot\alpha & \Rightarrow & \dfrac{a_np^n}{q} & = & -\alpha \in \mathbb{Z} \\ e & & & & & & \\ a_0q^n & = & -p\cdot\beta & \Rightarrow & \dfrac{a_0q^n}{p} & = & -\beta \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

As igualdades obtidas acima mostram que:

- a_np^n é divisível por q. Como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q, isto é, q é divisor de a_n.

- a_0q^n é divisível por p. Como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p, isto é, p é divisor de a_0.

∎

O resultado acima é aplicado ao polinômio $p(x) = x^n - a$ (supondo que $\sqrt[n]{a}$ não é exata), onde $a_n = 1$ e $a_0 = -a$, então, se um número racional p/q é raiz desse polinômio, temos que q é divisor de 1, ou seja, $q = \pm 1$, o que mostra que p/q é um número inteiro. Então, existe um número inteiro k que satisfaz:

$$k^n - a = 0 \Rightarrow k^n = a \Rightarrow k = \sqrt[n]{a}$$

A afirmação acima é falsa, pois por hipótese $\sqrt[n]{a}$ não é exata, logo não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k = \sqrt[n]{a}$. Concluímos portanto que o polinômio $p(x) = x^n - a$ não admite raízes racionais. Como $\sqrt[n]{a}$ é raiz do polinômio $p(x)$, visto que não pode ser um número racional, é portanto um número irracional.

Podemos através do teorema (3.4.1) e do resultado obtido posteriormente comprovar a irracionalidade ou a racionalidade de determinados números reais.

Exemplo 3.4.1. *Determine através do teorema das raízes racionais se o número $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ é racional ou irracional.*
Seja $\sqrt{5} - \sqrt{3} = a$, então:
$\sqrt{5} = a + \sqrt{3} \Rightarrow 5 = (a + \sqrt{3})^2 \Rightarrow 5 = a^2 + 2a\sqrt{3} + 3 \Rightarrow -2a\sqrt{3} = a^2 - 2 \Rightarrow (-2a\sqrt{3})^2 = (a^2 - 2)^2 \Rightarrow 4a^2 \cdot 3 = a^4 - 4a^2 + 4 \Rightarrow a^4 - 16a^2 + 4 = 0.$

Portanto, temos que a é raiz do polinômio $p(x) = x^4 - 16x^2 + 4$. Pelo teorema das raízes racionais temos que $p|4$ e $q|1$. Temos os possíveis valores para $p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ e para $q = \{\pm 1\}$, o que mostra que as raízes racionais do polinômio $p(x)$ caso existam, são inteiras. Por verificação, comprovamos que nenhum dos valores assumidos por p são raízes de $p(x)$. Concluímos então que o número $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ é um número irracional.

Exemplo 3.4.2. *Determine através do teorema das raízes racionais se o número $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ é racional ou irracional.*

Seja $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=a$, *então:*
$a^3=\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3=2-\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})+3(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2+$
$2+\sqrt{5}=4+3\cdot\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^2(2+\sqrt{5})}+3\cdot\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})^2}=4+3\cdot\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})(2^2-5)}+$
$3\cdot\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2^2-5)}=4-3\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}-3\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=4-3\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)=$
$4-3a\Longleftrightarrow a^3+3a-4=0$

Portanto temos que a *é raiz do polinômio* $p(x)=x^3+3x-4$. *Pelo teorema das raízes racionais temos que* $p|-4$ *e* $q|1$. *Temos os possíveis valores para* $p=\{\pm1,\pm2,\pm4\}$ *e para* $q=\{\pm1\}$, *o que mostra que as raízes racionais do polinômio* $p(x)$ *caso existam, são inteiras. Por verificação, é fácil verificar que* $x=1$ *é raiz desse polinômio e que o quociente da divisão de* $p(x)$ *por* $x-1$ *é* $q(x)=x^2+x+4$, *que não admite raízes reais. Portanto,* $x=1$ *é a única raiz real de* $p(x)$. *Logo,*

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=1$$

Ao definirmos o conjunto dos números reais estamos necessariamente lidando com todos os números racionais e também todos os números irracionais. Estes números foram classificados mais tarde pelo matemático Joseph Liouville[3] $(1809-1882)$ em dois tipos: os **números algébricos** e os **números transcendentes**.

Definição 3.4.2. *Um número real é dito um número algébrico se satisfaz alguma equação da forma*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$$

onde $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}\in\mathbb{Z}$.
Se um número real não é algébrico, então é um número transcendente.

É evidente que todo número racional $\alpha=\frac{p}{q}$, com $p\in\mathbb{Z}$ e $q\in\mathbb{Z}^*$ é um número algébrico, pois α é raiz da equação $qx-p=0$.

Contudo, existem muitos números irracionais que não são algébricos, ou seja, não são raízes de nenhuma equação do tipo descrito anteriormente. Podemos citar como exemplos

[3]O professor de matemática e mecânica clássica Joseph Liouville foi quem demonstrou pela primeira a existência de números transcendentes.

de números transcendentes o número e, o π e o número de ouro ϕ, que serão abordados nos capítulos posteriores. Com esta nova classificação para os números reais, podemos então descrevê-lo como a união do conjunto dos números algébricos($\mathcal{A}$) com o conjunto dos números transcendentes ($\mathcal{T}$), isto é $\mathbb{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{T}$.

Capítulo 4

Base 3 e Conjunto de Cantor

Neste capítulo daremos destaque ao sistema posicional ternário ou sistema de numeração de base 3. Como vimos anteriormente, dado um número racional p qualquer, este pode ser escrito sob qualquer base numérica b inteira positiva, assim um número

$$p = A_n A_{n-1} A_{n-2} \ldots A_2 A_1 A_0, a_1 a_2 \ldots,$$

escrito na base 3 é do tipo:

$$p = A_n \cdot 3^n + A_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots + A_2 \cdot 3^2 + A_1 \cdot 3 + A_0 + a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + \ldots$$

com $A_i, a_i \in \{0, 1, 2\}$.

As razões pela qual destacamos o sistema de numeração posicional ternário, tem a ver com o conceito de **capacidade de um sistema de numeração** e também com uma propriedade interessante desse sistema relacionada ao Conjunto de Cantor.

Definição 4.0.3. *A capacidade do sistema de numeração de base b com n dígitos é definida por $b^{\frac{n}{b}}$.*

Teorema 4.0.4. *A definição de capacidade independe de n e o sistema de numeração de maior capacidade é o de base* 3.

Demonstração. A demonstração desse teorema será desenvolvida na **Seção** (5.5) que trata sobre aplicações do número e.

Por exemplo, com 30 dígitos considerando base 10 podemos escrever 1000 números, isto é $10 + 10 + 10$ escolhas entre $0, 1, \ldots, 9$ para cada ordem, gerando $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{\frac{30}{3}}$ possíveis números.

Podemos ver também que para escrever os números de 0 a 99.999 (temos 100.000 números) são necessários 50 dígitos (10 dígitos de 0 a 9 disponíveis para escolha de cada uma das ordens). Já no sistema de numeração binário, para escrevermos os mesmos 100.000 números de 0 a 99.999 são necessários 33 dígitos.

Conclui-se conforme teorema acima, utilizando ferramentas do cálculo diferencial e integral, que o sistema de maior capacidade numérica é o sistema de base 3.
Abaixo segue um exemplo para capacidade numérica de determinados sistemas com n = 30 dígitos:

Base	Capacidade
2	$2^{15} = 32768$
3	$3^{10} = 59049$
5	$5^{6} = 15625$
6	$6^{5} = 7776$
10	$10^{3} = 1000$
15	$15^{2} = 225$
30	$30^{1} = 30$

Podemos dizer então que o sistema de numeração de base 3 é a mais eficiente de todas as bases de números inteiros, por oferecer maior representatividade numérica com um número mais reduzido de dígitos. É sabido que o código utilizado nas tecnologias de informática é do tipo binário, ou seja, a linguagem computacional nada mais é do que um sistema de numeração posicional de base 2, definido para sentenças em circuitos do tipo verdadeiro (mode-on) ou falso (mode-off), utilizando os valores numéricos 0 ou 1 para sua representatividade. Visto que a base 3 é mais eficiente do ponto de vista de dotação numérica, porque então o sistema binário é o sistema adotado até hoje nas tecnologias de informática?

A resposta para tal questão tem como referência um artigo publicado no endereço eletrônico www.americanscientist.org/issues/pub/third-base.

As primeiras ideias de um sistema ternário surgiram em 1950, oriundas de uma pesquisa de tecnologia de informática encomendadas em nome da Marinha dos Estados Unidos pela equipe de engenharia Research Associates. Posteriormente o estado americano chegou a utilizar a arquitetura ternária em um sistema de rede militar durante o período da Guerra Fria. Um pouco mais tarde na Rússia, mais precisamente na Universidade Estadual de Moscou, Nikolai P. Brusentsov e seus colegas construíram o primeiro computador ternário de trabalho, batizado de Setun, nome de um rio que corre perto do câmpus da universidade. Setun era operado utilizando 18 dígitos ternários, ou trits, dotando-lhe de uma capacidade numérica de 387.420.489. Para o computador binário, seriam necessários 29 bits para chegar a esta capacidade. A hipótese de desenvolver uma tecnologia ternária é inclusive mais plausível segundo a lógica humana, já que possibilita a inserção de uma terceira condição além dos consistentes verdadeiro ou falso: o talvez. Por convenção prática ao invés de utilizar a simbologia $0, 1$ e 2 utilizou-se $-1, 0$ e 1 ou simplesmente $-, 0, +$, em vias de tornar o processamento e transmissão de informações mais rápidos. Frente a circunstâncias concretas que conduziam a uma evolução das tecnologias de informática, por que então a tecnologia ternária não avançou?

Ocorre que o armazenamento de informações em trits, mesmo com todas as vantagens apresentadas, não conseguiu reduzir em termos de quantidades de componentes o sistema binário, que já era uma tecnologia consolidada, inclusive com altos investimentos em métodos para fabricação de chips binários. A complexidade do desenvolvimento de um sistema de respostas para circuitos ternários também pode ter sido uma das causas do não avanço desse sistema.

4.1 Adição e multiplicação no sistema de base 3

Inicialmente vamos apresentar o método de conversão de números no sistema decimal para números escrito sob base 3. Considere então o número inteiro positivo $N = A_nA_{n-1}\ldots A_2A_1A_0$

escrito na base 10. Indicaremos por $(A_nA_{n-1}\ldots A_2A_1A_0)_{10}$, e sabemos que:

$$N = A_n \cdot 10^n + A_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + A_2 \cdot 10^2 + A_1 \cdot 10 + A_0$$

com $A_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

Queremos determinar o número N escrito no sistema de numeração de base 3, ou seja, obter $N = B_mB_{m-1}\ldots B_2B_1B_0$ que será indicado por $(B_mB_{m-1}\ldots B_2B_1B_0)_3$, e decomposto como:

$$N = B_m \cdot 3^m + B_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \ldots + B_2 \cdot 3^2 + B_1 \cdot 3 + B_0$$

com $B_j \in \{0, 1, 2\}$.

A conversão de um número escrito no sistema de numeração de base 10 para um número escrito no sistema de numeração de base 3 é feita através da divisão euclidiana, e vale ressaltar que este processo é válido para qualquer conversão numérica de um sistema de base numérica inteira b_1 para outra base b_2. Inicialmente faz-se a divisão do número que ser quer converter para a base numérica desejada, tendo o valor da base como divisor e obtendo assim também um quociente e resto. Em seguida, dividimos o quociente obtido pela base gerando novo quociente e resto, e o processo é repetido até que último quociente seja menor que o divisor que é a base. Na prática, em nosso caso, a conversão é do tipo:

$$(A_nA_{n-1}\ldots A_2A_1A_0)_{10} \overset{Base}{\longrightarrow}{}^{3}\ (B_mB_{m-1}\ldots B_2B_1B_0)_3.$$

Observe como se desenvolve o processo de conversão:

$$(A_nA_{n-1}\ldots A_2A_1A_0)_{10} = q_0 \cdot 3 + B_0, . \tag{4.1}$$

Da mesma forma podemos escrever

$$q_0 = q_1 \cdot 3 + B_1, \quad q_1 = q_2 \cdot 3 + B_2, \quad \ldots \quad q_{m-2} = B_m \cdot 3 + B_{m-1}.$$

Substituindo cada expressão acima, na expressão anterior, até chegarmos na expressão (4.1), temos que:

$(A_nA_{n-1}\dots A_2A_1A_0)_{10} =$

$q_0 \cdot 3 + B_0 = (q_1 \cdot 3 + B_1) \cdot 3 + B_0 = q_1 \cdot 3^2 + B_1 \cdot 3 + B_0 = (q_2 \cdot 3 + B_2) \cdot 3^2 + B_1 \cdot 3 + B_0 =$
$q_2 \cdot 3^3 + B_2 \cdot 3^2 + B_1 \cdot 3 + B_0 = \dots = B_m \cdot 3^m + B_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \dots + B_2 \cdot 3^2 + B_1 \cdot 3 + B_0 =$
$(B_mB_{m-1}\dots B_2B_1B_0)_3$.

Abaixo, segue um exemplo do processo de conversão da base decimal para a base ternária.

Exemplo 4.1.1. *Converter o número* $(98)_{10}$ *para o sistema numérico de base 3:*
Utilizaremos o processo descrito acima, então:
$(98)_{10} = 32 \cdot 3 + 2.$
De maneira análoga, é feita a divisão euclidiana sucessiva pelos quocientes que vão surgindo, assim:

$$32 = 10 \cdot 3 + 2,$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 1,$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0.$$

Substituindo cada expressão na anterior, até chegarmos a primeira divisão euclidiana obtemos:

$(98)_{10} = 32 \cdot 3 + 2 = (10 \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 2 = 10 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = (3 \cdot 3 + 1) \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 =$
$3 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = (1 \cdot 3 + 0) \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = (10122)_3.$

Portanto $(98)_{10} = (10122)_3$.

As operações de **Adição** e **Multiplicação** no sistema de numeração posicional de base 3 serão apresentadas através de exemplos, mas antes a fim de justificar os resultados e obter um método operatório padrão, precisamos converter alguns resultados numéricos da base 10 para base 3:

$0 + 0 = (0)_{10} = (0)_3$

$0 + 1 = (1)_{10} = (1)_3$

$0 + 2 = (2)_{10} = (2)_3$

$1 + 1 = (2)_{10} = (2)_3$

$1 + 2 = (3)_{10} = (10)_3$

$2 + 2 = (4)_{10} = (11)_3$

$2 + 2 + 1 = (5)_{10} = (12)_3$

Exemplo 4.1.2. *Efetue a soma de* $(2221)_3$ *com* $(201)_3$.

Temos que:

$(2221)_3 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = (79)_{10}$

$(201)_3 = 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1 = (19)_{10}$

Armando a expressão:

$$\begin{array}{cccccc} & & {}^{1}2 & 2 & 2 & 1 \\ + & & & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

Observe que:

$$(10122)_3 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = (98)_{10} = (79)_{10} + (19)_{10}.$$

Exemplo 4.1.3. *Efetue a soma de* $(12221)_3$ *com* $(2222)_3$.

Temos que:

$(12221)_3 = 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = (160)_{10}$

$(2222)_3 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = (80)_{10}$

Armando a expressão:

$$\begin{array}{cccccc} & {}^{1}1 & {}^{1}2 & {}^{1}2 & {}^{1}2 & 1 \\ + & & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Observe que:

$$(22220)_3 = 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 0 = (240)_{10} = (160)_{10} + (80)_{10}.$$

Concluímos então que a operação de adição no sistema decimal de base 3 pode ser feita seguindo o padrão dos exemplos anteriores. Abaixo, apresentaremos exemplos para multiplicação em base 3.

Exemplo 4.1.4. *Efetue o produto de* $(21202)_3$ *por* $(10)_3$.

Temos que:

$(21202)_3 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 = (209)_{10}$

$(10)_3 = 1 \cdot 3 + 0 = (3)_{10}$

Armando a expressão:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
 & & & \times & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 2 & 0 & 2 & + \\
\hline
2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0
\end{array}$$

Observe que:

$$(212020)_3 = 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 0 = (627)_{10} = (209)_{10} \cdot (3)_{10}.$$

Exemplo 4.1.5. *Efetue o produto de* $(2212)_3$ *por* $(12)_3$.

Temos que:

$(2212)_3 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 = (77)_{10}$

$(12)_3 = 1 \cdot 3 + 2 = (5)_{10}$

Armando a expressão:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & {}^{1}2 & {}^{1}2 & {}^{1}1 & 2 \\
 & & & \times & 1 & 2 \\
\hline
 & {}^{1}1 & {}^{1}2 & 2 & 0 & 1 \\
 & 2 & 2 & 1 & 2 & + \\
\hline
1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1
\end{array}$$

Observe que:

$$(112021)_3 = 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = (385)_{10} = (77)_{10} \cdot (5)_{10}.$$

Da mesma forma, a multiplicação no sistema de numeração ternário pode ser feita seguindo o padrão dos exemplos anteriores. Concluímos assim as operações de **Adição** e **Multiplicação** no sistema de numeração posicional de base 3.

4.2 Base 3 e o conjunto de Cantor

No início da sessão destacamos a justificativa da escolha do sistema de numeração ternário e uma propriedade interessante desse sistema. Apresentaremos agora a relação entre o sistema de numeração de base 3 e o notável Conjunto de Cantor. Veremos que este subconjunto da reta, compacto e não enumerável, é o conjunto de todos os números do intervalo $[0, 1]$ que podem ser escritos em base 3 utilizando apenas os algarismos 0 e 2. Considere então o intervalo real unitário $E_0 = [0, 1]$. Através de um processo iterativo vamos obter o chamado Conjunto de Cantor que será denotado por F. Para tanto, removemos inicialmente o terço médio do conjunto $E_0 = [0, 1]$ obtendo assim o conjunto:

$$E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Em seguida, removemos o terço médio dos dois intervalos fechados que compõem E_1, obtendo o conjunto:

$$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Na próxima etapa, removemos o terço médio desses 4 conjuntos que compõem E_2, obtendo assim o conjunto E_3 formado pela união de $8(2^3)$ intervalos fechados do tipo $[k/3^3, (k+1)/3^3], k \in I\!N$. Como descrevemos, consiste de um processo iterativo, em que, na n-ésima etapa obteremos o conjunto E_n que é a união de 2^n intervalos fechados da forma $[k/3^n, (k+1)/3^n]$, e assim sucessivamente. O conjunto de Cantor é formado pelos pontos remanescentes desse processo para cada $n \in I\!N$. Observe a figura (4.1) que representa o Conjunto de Cantor:

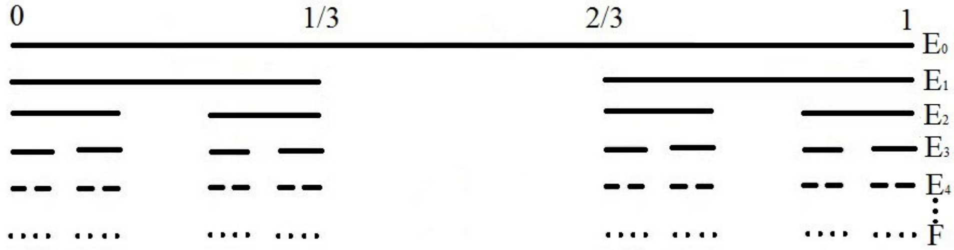


Figura 4.1: Conjunto de Cantor

Definição 4.2.1. *O conjunto de Cantor F é a interseção dos conjuntos E_n, $n \in I\!N$, obtido por remoção sucessiva dos terços médios abertos.*

A representação de números racionais $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ escritos em base 3 é análoga a representação em base decimal, dessa forma se $0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$ é um número racional, então escrito sob base 3, segue que:

$$(0,a_1a_2\ldots a_n\ldots)_3 = 0+a_1\cdot 3^{-1}+a_2\cdot 3^{-2}+\ldots+a_n\cdot 3^{-n}+\ldots = a_1\cdot\frac{1}{3}+a_2\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots+a_n\cdot\frac{1}{3^n}\ldots,$$

com $a_i \in \{0,1,2\}$.

Na primeira iteração, o terço médio retirado do intervalo $[0,1]$ compreende o intervalo aberto $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

Observe que:

$\frac{1}{3} = 1\cdot\frac{1}{3} = (0,1)_3 = (0,02222\ldots)_3$ e $\frac{2}{3} = 2\cdot\frac{1}{3} = (0,2)_3$.

São retirados portanto, todos os pontos binários que estão entre $(0,1)_3$ e $(0,2)_3$, ou seja todos os números que possuem o dígito 1 na primeira casa binária.

Na segunda iteração, são removidos os terços médios do conjunto E_1, isto é, os intervalos abertos $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$.

Observe que:

$\frac{1}{9} = 0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3^2} = (0,01)_3 = (0,002222\ldots)_3$ e $\frac{2}{9} = 0\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2} = (0,02)_3$;

$\frac{7}{9} = 2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3^2} = (0,21)_3 = (0,20222\ldots)_3$ e $\frac{8}{9} = 2\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2} = (0,22)_3$.

Logo, são retirados todos os números binários entre $(0,01)_3$ e $(0,02)_3$ e também os números binários compreendidos entre $(0,21)_3$ e $(0,22)_3$, ou seja todos os números que possuem o dígito 1 na segunda casa binária.

Usando o Princípio da Indução Finita, prova-se que na n-ésima iteração são retirados todos os números que possuem o dígito 1 na n-ésima casa binária. Então no limite dessas iterações são retirados todos os números que possuem dígito 1, restando apenas os números que possuem apenas os dígitos 0 e 2, ou seja os extremos de cada segmento.

Portanto, o Conjunto de Cantor é formado por todos os números que escritos no sistema de numeração de base 3 possuem apenas os dígitos 0 e 2 em sua representação.

Capítulo 5

O número e

Neste capítulo traremos uma abordagem sistemática desde o surgimento histórico até as inúmeras aplicações, curiosidades e aproximações, de um número irracional de grande destaque no universo do cálculo diferencial e integral: o número e. A origem histórica do número e não está evidente em uma obra em específico, mas admite-se que este número já era conhecido mesmo antes da invenção do cálculo diferencial e integral desenvolvido pelos matemáticos Isaac Newton$(1642-1727)$ e Gottfried W. Leibniz $(1646-1716)$. Surgido provavelmente em problemas práticos envolvendo juros compostos no início do século XVII, este número esteve perto de ser descoberto pelo matemático, físico, astrônomo e astrólogo John Napier$(1550-1617)$. A real concepção do número e aliás seria de fato proposta com o surgimento da teoria dos logaritmos, criada pelo matemático Napier (Neper), que durante 20 anos de sua vida dedicou-se ao estudo dos logaritmos, culminando no ano de 1614 com a publicação de sua mais valiosa e eminente obra: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Descrição do maravilhoso canône dos logaritmos*). Esta publicação possibilitou avanços significativos nas ciências astronômicas, sobretudo, devido ao uso das tábuas de logaritmos desenvolvidas por Napier que eram utilizadas em cálculos demasiadamente morosos a fim de reduzir o trabalho e fornecer o resultado desses cálculos de forma mais rápida e eficiente. A obra de Napier foi amplamente difundida e utilizada na Europa, e sobre a invenção dos logaritmos Laplace afirmou: "*ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos*".

O astrônomo Johannes Kepler foi um dos primeiros a utilizar a teoria dos logaritmos, que lhe possibilitaram elaborar com sucesso cálculos relativos as órbitas planetares. Napier não trabalhava ainda com o conceito de base de um sistema de logaritmo mas a teoria proposta por ele associava números em progressão aritmética à números que estão em progressão geométrica com uma razão pequena adotada por ele, ($q = 1 - \dfrac{1}{10^7} = 0,9999999$) para que o crescimento não fosse acelerado, possibilitando assim operações com muitos números e minimizando também o uso de frações decimais.

A estrutura de cálculo proposta principiava-se no seguinte propósito conforme [12]: *"caso seja possível escrever qualquer número positivo como potência de algum dado número fixo, então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou a subtração de seus expoentes"*.

Na prática, o processo consiste em efetuar somas (subtrações) de números em uma tabela para determinar o produto (divisão) de seus números correspondentes, tendo como resultado da soma (subtração) o correspondente resultado do produto (divisão).

A descoberta desses novos números criados por Napier foi batizada de "logaritmo"que origina do grego *logos* (razão) e *arithmos* (número), designando então o "número proporcional". Estes números criados após ostensivos 20 anos de trabalho árduo de Napier assumiam o seguinte aspecto:

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L \tag{5.1}$$

onde L é o logaritmo (neperiano) de N.

A definição de logaritmos proposta por Napier é bastante distinta da definição moderna proposta mais tarde por Leonhard Euler ($1707-1783$), que em 1728 introduziu a notação:

$$N = b^L,$$

sendo b um número inteiro positivo e diferente de 1 e L o logaritmo (de base b) de N. Foi Euler quem definiu o conceito de base de um logaritmo, mas sem dúvida a entusiástica descoberta de Napier era o alicerce que edificaria todos os avanços das ciências astronômicas após as publicações dos tratados *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* e a obra *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (*Construção do maravilhoso canône dos logaritmos*) postumamente publicado em 1619 por seu filho Robert. Antes de falecer, Napier recebeu a visita do professor Henry Briggs $(1561 - 1631)$ que deslumbrado com a nova descoberta resolveu conhecer pessoalmente o inventor dos logaritmos, inclusive propondo algumas modificações estruturais convenientes, visto que a base do sistema dos logaritmos de Napier era a base decimal. Tais descobertas foram bem aceitas por Napier, e em 1624 Briggs que havia continuado o trabalho de Napier, publicou sua obra *Arithmetica logarithmica*, onde constitui uma tábua que dava os logaritmos de base 10 de 1 à 20000 e de 90000 à 100000 com precisão de 14 casas decimais.

Napier, como dito anteriormente, esteve muito próximo de descobrir um número que mais tarde seria reconhecido como a base universal dos logaritmos: o número $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Quase um século depois Euler descreveu:

"*Para o número cujo logaritmo hiperbólico é igual a unidade, anotemos e que é* $2,71828182...$"

Enfatizamos aqui que na verdade Napier esteve muito perto de descobrir que $\dfrac{1}{e} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$, pois conforme a estrutura que propôs para os logaritmos citada anteriormente no texto, se substituirmos o valor do logaritmo L por $L^* = L/10^7$, e também o número N por $N^* = N/10^7$ na expressão (5.1) então a equação se torna

$$\frac{N}{10^7} = \frac{10^7}{10^7}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{\frac{L}{10^7}} \Rightarrow N^* = \left[\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{L^*} \Rightarrow N^* \cong \left(\frac{1}{e}\right)^{L^*},$$

ou seja, L^* é o logaritmo aproximado do número N^* na base $\dfrac{1}{e}$. Podemos dizer então que os logaritmos de Napier são virtualmente os logaritmos de base $\dfrac{1}{e}$. Contudo, foi Euler quem introduziu a notação utilizada até hoje para logaritmos e quem designou pela primeira vez a nomenclatura do número e (talvez derivada da primeira letra da palavra "exponencial") surgida com a publicação de sua obra *Mechanica* (1736), consolidando-se como a notação aceita e utilizada universalmente até hoje.

5.1 Algumas aplicações do número e

5.1.1 Questões financeiras

A abordagem inicial proposta no início do capítulo destaca que o número e (que é o número mais conhecido e empregado no cálculo) surgiu provavelmente em problemas de ordem financeira envolvendo juros compostos propostos durante o século XVII. É certo que questões financeiras são inerentes a vida do homem desde que a humanidade iniciou o processo de troca, que deu origem ao comércio. Dessa forma, é evidente que ao lidarmos com alguma questão relacionada a dinheiro, inevitavelmente recairemos sobre o conceito de juros, ou remuneração devida a um capital tomado como empréstimo ou emprestado. Por exemplo, um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C. e agora encontrado no museu do Louvre, propõe o seguinte problema: Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar ser for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?

Sabemos que ao final de cada período, o capital C aplicado inicialmente cresce a uma taxa de 20 por cento ao período, ou seja, no final do período o capital será corrigido através de um produto por um fator de $1,2$ e após t períodos consecutivos de tempo o capital acumulado será $1,2^tC$. Para determinar o período necessário para o capital dobrar, algebricamente, podemos escrever:

$$1,2^tC = 2C \Longleftrightarrow 1,2^t = 2.$$

Para descobrir o valor de t precisamos usar logaritmos, mas os babilônios não tinham ainda a teoria dos logaritmos. Eles conseguiram achar uma solução aproximada observando que $1,2^3 = 1,728$, ao passo que $1,2^4 = 2,0736$, portanto, t assumiria um valor como solução no intervalo $3 < t < 4$. Eles usaram um processo conhecido como interpolação linear, encontrando um número t que divide o intervalo de 3 para 4 na mesma proporção que 2 divide o intervalo de $1,728$ para $2,0736$. Observe o cálculo do processo descrito:

$$\frac{4-t}{t-3} = \frac{2,0736-2}{2-1,728} \Leftrightarrow \frac{4-t}{t-3} = \frac{0,0736}{0,272} \Leftrightarrow 0,0736t - 0,2208 = 1,088 - 0,272t \Leftrightarrow$$

$$0,3456t = 1,3088 \Leftrightarrow t = \frac{1,3088}{0,3456} \Rightarrow t \cong 3,7870$$

A resposta determinada pelos babilônios $t = 3,7870$, é bastante próxima do valor correto que é $t = 3,8018$ (isto é, cerca de três anos, nove meses e dezoito dias) mas essa não foi uma tarefa elementar para os babilônios visto que não dispunham das modernas técnicas de álgebra utilizadas atualmente.

Numa situação geral em termos de crescimento do dinheiro num intervalo de tempo, vamos assumir um investimento de um capital C, aplicado durante um período de tempo t, corrigido por uma taxa de juros compostos i (que é um valor percentual podendo ser expresso em sua forma decimal). Esse capital cresce exponencialmente, constituindo uma progressão geométrica de razão $1+i$, dessa forma, o capital alcançado ao final do primeiro período é $C(1+i)$, ao final do segundo período temos $C(1+i)^2$, e assim sucessivamente, até que ao final de t períodos chegamos a um montante resgatado de $C(1+i)^t$. Chamando esse montante de M, temos

$$M = C(1+i)^t \tag{5.2}$$

Esta fórmula é utilizada em todos os tipos de cálculos financeiros como investimentos e aplicações em contas bancárias e fundos, empréstimos, hipotecas e anuidades. Considere agora o exemplo:

Exemplo 5.1.1. *Suponhamos um capital $C = R\$1,00$ aplicado a uma taxa de juros compostos de $i = 100\%$ ao ano, durante 1 ano. Qual será o montante resgatado ao final do período quando fizermos n subdivisões no ano com n crescendo sem limites?*

Como a composição é feita n vezes ao ano, para cada período de conversão, o banco usa a taxa de juros anual dividida por n, que é igual a i/n. E como em t anos existem (nt) períodos de conversão, um principal C, após n anos renderá

$$M = C(1+i/n)^{nt}$$

No nosso exemplo, para $C = R\$1,00$, $i = 100\% = 1$ e $t = 1$ quando n cresce então

$$M = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

A tabela abaixo fornece os valores de M:

n	$M = C(1 + 1/n)^n$
1	2
2	$2,25$
3	$2,37037$
4	$2,44141$
5	$2,48832$
6	$2,52163$
12	$2,61303$
50	$2,69159$
100	$2,70481$
1000	$2,716924$
10000	$2,71815$
100000	$2,71827$
1000000	$2,71828$
10000000	$2,71828$

Esse padrão se mantém à medida que n cresce, porém, observamos que a convergência da sequência $(1 + 1/n)^n$ é bastante lenta e para provarmos que o limite dessa sequência é o número e utilizamos ferramentas de análise matemática, através de expansão binomial, frações contínuas e séries de potências, mostrando assim que isso de fato acontece. Podemos concluir portanto que na hipotética situação onde a correção do dinheiro emprestado é feita por uma taxa de juros de 100%, se emprestarmos ou aplicarmos 1 real, devemos receber ao final de 1 ano e reais.

5.1.2 O problema da catenária

Podemos afirmar que nas ciências matemáticas sem dúvidas, diversas teorias e extraordinários resultados que sucederam grande parte do desenvolvimento dessa ciência, derivaram de problemas que afligiam a mente dos matemáticos. Em um desses problemas, proposto por Jakob Bernoulli $(1654 - 1705)$, residia o problema da catenária – a corrente suspensa (*catena* do latim significa corrente). No mês de maio de 1690, Jakob publicou o problema no *Acta eruditorum*, um jornal científico fundado por Leibniz com o seguinte texto:

"*E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos.*"

Jakob presumiu que o fio inextensível e flexível em todas as suas partes e que tem uma espessura constante e portanto uma densidade linear uniforme. Galileu pensava tratar-se de uma curva que era uma parábola. Contudo o jovem cientista Christian Huygens $(1629 - 1695)$ com apenas 17 anos provou que a catenária não podia ser uma parábola. Tornou-se um grande desafio no meio científico e o advento do cálculo permitiu solucioná-lo.

Um ano após a publicação do problema proposto por Jakob, o *Acta* apresentou três soluções corretas propostas respectivamente por Huygens, Leibniz e Johann Bernoulli $(1667 - 1748)$, o irmão mais novo de Jakob. Johhan destacou ainda na publicação que enquanto a parábola (pensada inicialmente como a curva da catenária) é algébrica, a verdadeira curva da catenária é transcendental. A equação da catenária utilizando-se a notação moderna é expressa por

$$y = \frac{(e^{ax} + e^{-ax})}{2a}, \tag{5.3}$$

onde a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente – sua densidade linear (massa por unidade de comprimento) e a tensão com a qual ela é segura. Na figura (5.1), destacamos a catenária como proposta por Jakob Bernoulli:

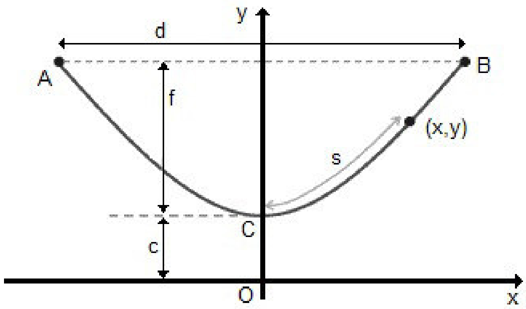


Figura 5.1: Catenária - A corrente suspensa

A equação da catenária na forma da figura (5.1) é definida por:

$$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right),$$

onde o termo c, ordenada do ponto mais baixo C, é denominado parâmetro, e a distância f é chamada de flecha. A derivada da função y é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right).$$

Para determinarmos o comprimento do arco s entre C e um ponto genérico (x, y), vamos utilizar ferramentas do cálculo diferencial e integral, dessa forma temos:

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 \tag{5.4}$$

A equação (5.4), pode ser escrita como

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} \Leftrightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}dx \tag{5.5}$$

Fazendo $x = t$ na equação (5.5), para determinarmos o comprimento do arco s, basta integrarmos o diferencial ds da origem até a abcissa x do ponto, assim:

$$s = \int_0^x \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 1}dt = \int_0^x \sqrt{\sinh^2\left(\frac{t}{c}\right) + 1}dt = \int_0^x \cosh\left(\frac{t}{c}\right)dt = c\sinh\left(\frac{t}{c}\right) = c\sinh\left(\frac{x}{c}\right).$$

Elevando s ao quadrado temos:

$$s^2 = c^2\sinh^2\left(\frac{x}{c}\right) \Rightarrow s^2 = c^2\left(\cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) - 1\right) \Rightarrow s^2 = c^2\cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) - c^2 \Rightarrow s^2 = y^2 - c^2.$$

Considerando w o peso por unidade de comprimento do cabo, o esforço longitudinal em um ponto genérico (x, y) é dado por

$$F = w \cdot y.$$

Exemplo 5.1.2. *Sejam dados o peso por comprimento w, a distância entre os extremos d e a flecha f. Então:*

$$x_b = d/2 \quad , \quad y_b = c + f$$

Conforme a equação da curva temos:

$$c + f = c\cosh\left(\frac{d}{2c}\right),$$

desde que d e f são conhecidos, pode-se calcular c. Mas essa equação não tem solução direta. Só pode ser resolvida através da arbitragem de um valor inicial para c e posteriores aproximações sucessivas. Uma vez determinado c, os demais valores podem ser calculados.

Destacamos também que a equação da catenária não foi apresentada originalmente como a equação (5.3) descrita acima, visto que o número e ainda não tinha um símbolo especial e a função exponencial ainda era considera apenas um inverso da função logarítmica e não uma função independente. Posteriormente com a definição de equação diferencial ordinária, a teoria surgiu extensivamente desenvolvida usando a função exponencial e^x. Então, fazendo $a = 1$ na equação (5.3), a equação da catenária é:

$$y = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}.$$

Mais tarde em 1757 o matemático italiano Vincenzo Riccati $(1707 - 1775)$ observando que assim como as funções trigonométricas $\sin x$ e $\cos x$ relacionam-se com a equação do círculo $x^2 + y^2 = 1$, as funções $\frac{1}{2}e^x$ e $\frac{1}{2}e^{-x}$ estão relacionadas de maneira semelhante com a equação da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, e definiu assim as funções

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

correspondendo respectivamente às funções seno hiperbólico de x e cosseno hiperbólico de x. Podemos ainda demonstrar com facilidade a identidade $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$, e também mostrar que

$$\frac{d(\cosh x)}{dx} = \sinh x \quad \text{e} \quad \frac{d(\sinh x)}{dx} = \cosh x,$$

usando propriedades de potência para a função exponencial e^x.

5.2 Uma série convergente para definir o número e

No início do capítulo dissemos que o número e, base dos logaritmos naturais, provavelmente surgiu a partir de problemas de ordem financeira envolvendo juros compostos e vimos depois quando falamos sobre a questão financeira, sem realizar uma demonstração convincente que o número e configura o limite de uma soma. Dessa forma definimos

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Para a demonstração da expressão acima, utilizaremos a fórmula da expansão binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k} = C_0^n a^0 b^n + C_1^n a^1 b^{n-1} + C_2^n a^2 b^{n-2} + \ldots + C_{n-1}^n a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0. \tag{5.6}$$

Podemos observar também que:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

No nosso caso, fazendo $a = 1$ e $b = 1/n$ na expressão (5.6), temos

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n\cdot\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Caso definamos a sequência a_{n+1}, esta terá um termo a mais no final além dos termos da sequência acima, com $n+1$ no lugar de n, exceto em $n!$. Mesmo sem levar em conta o termo a mais que aparece, pode-se ver que cada um dos termos da equação (5.7) é inferior a cada um dos correspondentes com $n+1$ em lugar de n. Isso prova que $a_n < a_{n+1}$, ou seja, a sequência (a_n) é crescente. Para provarmos que ela é limitada, basta observar que cada parênteses que aparece em (5.7) é menor do que 1, de sorte que

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \tag{5.8}$$

Como a sequência (a_n) é crescente e limitada, então tem limite, que é o número e, tal que $2 < e < 3$. Da expressão (5.7) para a_m decorre que, sendo $m > n$,

$$a_m > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right).$$

Mantendo fixo o número n, fazemos $m \to \infty$, o que nos dá:

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \tag{5.9}$$

Da equação acima, e da equação (5.8), obtemos com $n \to \infty$,

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Abaixo temos os resultados das primeiras 8 somas parcias da série que definem o número e:

$$2 = 2$$

$$2 + 1/2 = 2,5$$

$$2 + 1/2 + 1/6 = 2,666...$$

$$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 = 2,708333...$$

$$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 = 2,716666...$$

$$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 = 2,7180555...$$

$$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + 1/5040 = 2,718253968...$$

$$2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + 1/5040 + 1/40320 = 2,71827877...$$

Podemos perceber que a convergência da soma para o número e é bastante rápida, devido ao crescimento acelerado de $n!$, conforme aumenta o número de termos da soma. Como todos os termos são positivos, dizemos que a convergência da sequência é *monótona*, e quanto mais termos tivermos na sequência, menor será o erro cometido na comparação da soma com o número e. Euler calculou o número e com 23 casas decimais, obtendo $e = 2,71828182845904523536028$.

5.3 Irracionalidade do número e

Na seção anterior definimos o número e como sendo o limite de uma série convergente. Vamos desenvolver a seguir a demonstração da irracionalidade do número e através de um teorema, prova essa que foi feita em 1737 por Leonhard Euler.

Teorema 5.3.1. *O número e é irracional.*

Demonstração. Vimos que o número e pode ser calculado como limite da série

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Suponhamos por absurdo que e seja racional, ou seja, $e = \dfrac{x}{y}$, com $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}^* - \{1\}$ (pois e não é inteiro).

Assim cada termo da série inicial é racional, portanto, quando aproximamos o número e pelos valores da soma S_n de uma quantidade finita de parcelas da série que define e podemos calcular a estimativa do erro R_n, logo:

$$R_n = e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

que também é um número racional.

Então para $n \geq q+1$, temos que

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{n \cdot \ldots \cdot (q)!(q+1)} \leq \frac{1}{q!(q+1)^{n-q}}.$$

Isso nos diz que:

$$\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(q+1)^k} = \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

Logo, podemos afirmar que

$$\sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!}\frac{1}{q},$$

e portanto temos

$$0 < e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{q!}\frac{1}{q} \tag{5.10}$$

Multiplicando a equação (5.10) por $q!$, temos:

$$0 < q!\left(e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}\right) \leq \frac{1}{q} < 1.$$

Mas o termo central pela nossa hipótese é inteiro pois todos os denominadores da expressão entre parênteses são cancelados por $q!$. Mas isso é um absurdo, pois não existe número inteiro entre 0 e 1. Portanto, concluímos que o número e é irracional. ∎

Em 1873 Charles Hermite ($1822 - 1901$) provou também que o número e é transcendente, resultado este que não será demonstrado.

5.4 Curiosidades sobre o número e

Nesta seção vamos apresentar alguns números curiosos que se relacionam com o número e, algumas fórmulas interessantes envolvendo-o e além disso destacaremos outras importantes propriedades deste célebre número da matemática, que certamente contribuíram de forma efetiva com grande destaque no desenvolvimento da matemática clássica e algumas de suas áreas, como a moderna teoria dos números em análise, e a física matemática ambas com estudos realizados e introduzidos por Leonhard Euler que deixou notáveis e expressivos resultados em sua extensa produção bibliográfica, inclusive introduzindo o uso das modernas notações usadas até hoje (como os símbolos dos números π, e, e a notação para funções $f(x)$).

5.4.1 Alguns números curiosos relacionados com o número e

Vejamos agora alguns números curiosos que estão relacionados com o número e:

- $e^{-e} = 0,065988036...$

  Leonhard Euler provou que a expressão x^{x^x} quando o número de expoentes cresce infinitamente, tende a um limite se $e^{-e} < x < e^{1/e}$.

- $e^{-\pi/2} = 0,207879576...$

  Euler provou em 1746 que a expressão i^i (onde $i = \sqrt{-1}$) tem infinitos valores, todos eles reais: $i^i = e^{-(\pi/2+2K\pi)}$, para $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Então para $k = 0$ o valor é $e^{-\pi/2}$.

- $1/e = 0,367879441...$
  Já vimos que $\frac{1}{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Este número é usado para mediar a taxa de decaimento da função exponencial $y = e^{-at}$. Quando $t = 1/a$, teremos $y = e^{-1} = 1/e$. Ele também aparece no problema do "envelope errado" proposto por Nicolaus Bernoulli: se n cartas forem colocadas em n envelopes com endereços diferentes, qual é a probabilidade de que cada carta seja colocada em um envelope errado? Quando $n \to \infty$, a probabilidade se aproxima de $1/e$.

- $e^{1/e} = 1,444667861...$
  A solução do problema de Jakob Steiner: Encontre o valor máximo obtido pela função $y = x^{1/x} = \sqrt[x]{x}$. Este valor é obtido quando $x = e$.

- $878/323 = 2,718266254...$
  É a melhor aproximação de e usando números naturais menores do que 1000.

- $e + \pi = 5,859874482...$ **e** $e \cdot \pi = 8,539734223...$
  Estes números raramente aparecem em aplicações e não se sabe se eles são algébricos ou transcendentes.

- $e^e = 15,15426224...$
  Não se sabe se este número é algébrico ou transcendente.

- $\pi^e = 22,45915772...$
  Não se sabe se este número é algébrico ou transcendente.

- $e^\pi = 23,14069263...$
  Alexandr Gelfond $(1906 - 1968)$ provou em 1934 que este número é transcendente.

- $e^{e^e} = 3814279,104$
  Note que esta potência é muito maior do que e^e.

- $\gamma = 0,577215664...$
  Este número indicado pela letra grega *gama*, é conhecido como constante de Euler. Temos que $\gamma = \lim_{n\to+\infty} 1+1/1+1/2+1/3+1/4+\ldots+1/n$. Em 1781 Euler calculou este número com 16 casas decimais. O fato de que o limite existe significa que embora a

série $1+1/1+1/2+1/3+1/4+\ldots+1/n$ (conhecida como série harmônica) cresça ilimitadamente, a medida que $n \to \infty$, a diferença entre ela e $\ln n$ se aproxima de um valor constante. Não se sabe se γ é um número algébrico ou transcendente.

- $\ln 2 = 0,69314781...$
  Esta é a soma da série harmônica com sinais alternados, $1-1/2+1/3-1/4+\ldots$, obtida da série de Mercator $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$, fazendo $x = 1$. Como consequência temos que $e^{\ln 2} = 2$.

5.4.2 A mais famosa das fórmulas

Vimos que o número e pode ser escrito como o limite de uma série convergente de modo que

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots. \tag{5.11}$$

De maneira análoga a expressão definida pela equação (5.11), podemos obter uma outra expressão com uma pequena manipulação algébrica, substituindo $1/n$ por x/n, determinando assim a série infinita:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots = e^x, \tag{5.12}$$

que é uma série familiar de potências para e^x. Pode-se demonstrar que esta série converge para todos os valores reais de x e a convergência é bastante rápida devido ao aumento considerável dos fatores do denominador de cada parcela da soma. Euler com sua astúcia e genialidade, atreveu-se a substituir a variável x por ix, (onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária) na expressão (5.12), obtendo assim a equação:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} \ldots \tag{5.13}$$

Sabemos que as potências assumem a cada bloco de potências consecutivas apenas os valores: $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$. Dessa forma, podemos reescrever a equação (5.13), obtendo a equação

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \tag{5.14}$$

Euler mais uma vez sem se preocupar com a questão rigorosa da convergência da série resolveu reordenar as parcelas dessa soma, separando a parte real da parte imaginária. Assim, ao mudar a ordem dos termos da equação (5.14), chegou à série

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right). \tag{5.15}$$

Nessa época sabia-se que as duas séries aparecendo entre parênteses são as séries de potências das funções trigonométricas cosseno x e seno x, respectivamente. Então Euler pode concluir que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{5.16}$$

relacionando assim a função exponencial às funções trigonométricas. Euler percebeu também que substituindo ix por $-ix$ na equação (5.16) e usando as identidades $\cos(-x) = \cos x$ e $\sin(-x) = -\sin x$, gerava a equação

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \tag{5.17}$$

Finalmente, somando-se e subtraindo-se as equações (5.16) e (5.17), conclui que as expressões $\cos x$ e $\sin x$ podem ser expressas em termos das funções exponencias e^{ix} e e^{-ix}, assim

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}. \tag{5.18}$$

As relações expressas pelas equações (5.18) são conhecidas como **fórmulas de Euler** para as funções trigonométricas.

O grande desfecho para a equação descoberta por Euler foi quando o mesmo substituiu $x = \pi$ na equação (5.16) usando o fato de que $\cos \pi = -1$ e $\sin \pi = 0$, obtendo

$$e^{\pi i} = -1 \quad \text{ou} \quad e^{\pi i} + 1 = 0$$

considerada uma das mais belas fórmulas de toda matemática, ligando as cinco mais importantes constantes da matemática (e, π, i, 1 e 0) e também as mais importantes operações da matemática (adição, subtração e exponenciação).

5.4.3 Derivada da função $y = e^x$

No universo do cálculo diferencial e integral criado por Newton e Leibniz, as primeiras aplicações gráficas estavam relacionadas com *curvas algébricas*, ou seja, curvas cujas equações são polinômios ou proporção entre polinômios. Contudo, mais tarde em outros tipos de aplicações em problemas, Leibniz percebeu que haviam curvas que não eram expressas por equações polinomiais e não se encaixavam portanto na categoria das curvas algébricas. Definiu então as chamadas *curvas transcendentais*[1], entre as quais aparece com grande destaque a curva da função exponencial.

Vimos anteriormente que a teoria dos logaritmos foi uma invenção de Napier, sendo que mais tarde as tábuas de logaritmo de Napier foram aperfeiçoadas e também reestruturadas por Henry Briggs, que adotou a base 10 como base dos logaritmos, trabalhando assim com potências dessa base. O uso contínuo dos logaritmos e das tábuas de logaritmos na resolução de problemas permitiu que uma moderna notação proposta por Euler fosse criada, e permanece até nos tempos atuais, com a seguinte definição

$$b^L = N,$$

onde b é a base do logaritmo, em princípio assumindo qualquer valor racional positivo e diferente de 1, e L é o logaritmo de N na base assumida.

Para uma base b definida como acima, chamando de x o seu expoente, podemos definir a função exponencial de base b como:

$$y = b^x,$$

definida para todo valor real de x que pertence ao domínio da função. A continuidade da função exponencial é presumidamente aceitável, porém não foi elementar acreditar e determinar as imagens para valores irracionais de x. Por exemplo, assuma 2 como base e a função exponencial definida por $y = 2^x$. Como determinar o valor y para $x = \sqrt{2}$ ou

[1]O termo foi criado por Leibniz para sugerir que suas equações iam além daquelas estudadas pela álgebra elementar.

seja, qual o valor de $2^{\sqrt{2}}$?

Este cálculo era feito usando aproximações por uma sequência de números racionais para $\sqrt{2}$, a qual no limite convergirá para x. Assim para o nosso problema temos:

$$\sqrt{2} \cong 1,4 \Rightarrow 2^{\sqrt{2}} = 2^{1,4} = 2,63901582$$

$$\sqrt{2} \cong 1,41 \Rightarrow 2^{\sqrt{2}} = 2^{1,41} = 2,6573716$$

$$\sqrt{2} \cong 1,414 \Rightarrow 2^{\sqrt{2}} = 2^{1,414} = 2,66474965$$

$$\sqrt{2} \cong 1,4142 \Rightarrow 2^{\sqrt{2}} = 2^{1,4142} = 2,66519089$$

No limite temos o valor desejado que é $2^{\sqrt{2}} = 2,66514443$. O comportamento da curva exponencial é bastante peculiar a esse tipo de curva. Podemos descrevê-lo em termos dos valores assumidos por x calculados para uma função exponencial de base $b, b \in \mathbb{Q}, b > 1(*)$. Para valores de x negativos, à medida que x diminui, menores serão os valores das imagens desses pontos. Assim, no limite quando $x \to -\infty$, $y \to 0$; ao passo que para valores positivos de x, quanto mais aumentam, maiores serão os valores das imagens desses pontos, assim, no limite quando $x \to +\infty$, $y \to +\infty$. Temos portanto definida a função exponencial crescente.

No caso em que a escolha da base b é tal que $b \in \mathbb{Q}, 0 < b < 1(**)$, o comportamento da função exponencial é exatamente o inverso do descrito acima: para valores negativos de x, à medida que x diminui, maiores serão as imagens desses pontos, ou seja, no limite quando $x \to -\infty$, $y \to +\infty$; para valores positivos de x, quanto mais aumentam esses valores, mais próximos de zero estarão as imagens desses pontos, assim, no limite quando $x \to +\infty$, $y \to 0$. Temos portanto definida a função exponencial decrescente.

Em geral, quando comparado a gráficos de funções algébricas, o gráfico da função exponencial é bastante elementar, visto que não apresenta raízes reais, pontos de máximo ou mínimo e nem inflexões, características comuns às curvas algébricas. Porém, uma característica exclusiva que desperta extremo interesse no comportamento da curva exponencial é a questão da taxa de variação.

Definição 5.4.1. *Seja $y = f(x)$ uma curva. A taxa de variação de y em relação a x, ou a derivada de y em relação a x no ponto $P = (x, y)$ é definida como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, isto é* $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Nosso objetivo é encontrar essa taxa de variação para a função $y = b^x$. Se aumentarmos o valor de x em Δx, y aumentará na quantidade $\Delta y = b^{x+\Delta x} - b^x$, ou seja, $\Delta y = b^x b^{\Delta x} - b^x = b^x(b^{\Delta x} - 1)$. Portanto a taxa de variação procurada é igual a

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^x(b^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \tag{5.19}$$

É conveniente substituirmos o símbolo Δx por um única letra h, assim a equação (5.19) se torna

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{b^x(b^h - 1)}{h} \tag{5.20}$$

Como b^x é um valor constante em termos do cálculo do limite, podemos reescrever a equação (5.20), obtendo assim a expressão

$$\frac{dy}{dx} = b^x C \tag{5.21}$$

A prova de que o limite da expressão (5.21) existe e converge para um valor k exige cálculos mais avançados, que fogem do propósito do presente trabalho, por isso vamos aceitar a existência desse limite com o referido valor k. Portanto, sabendo que $y = b^x$, concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = kb^x = ky \tag{5.22}$$

O resultado que acabamos de concluir é de fundamental importância pois podemos notar que a derivada da função exponencial é proporcional a própria função exponencial. Até agora vimos que a escolha da base b era arbitrária, satisfazendo as condições impostas em $(*)$ e $(**)$. Mas aqui surge uma questão: existirá alguma base b tal que para $k = 1$ tenhamos $\dfrac{dy}{dx} = b^x = y$, ou seja, será possível encontrarmos uma função exponencial de base b tal que sua derivada seja a própria função?

De fato, nosso objetivo é determinar o valor de b para o qual

$$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1. \tag{5.23}$$

Para um valor de h finito, a expressão que é identicamente igual a 1 e pode ser escrita como

$$\frac{b^h - 1}{h} = 1 \Leftrightarrow b^h - 1 = h \Leftrightarrow b^h = 1 + h \Leftrightarrow b = \sqrt[h]{1+h} \Leftrightarrow b = (1+h)^{1/h} \qquad (5.24)$$

A equação (5.24) expressa agora b como uma função implícita de h, além disso, nessa equação temos equações equivalentes, resultando portanto nas expressões equivalentes

$$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h} = b.$$

Fazendo $\dfrac{1}{h} = m$ na expressão da direita logo acima, quando $h \to 0$, $m \to +\infty$, e esta expressão se torna

$$\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = b. \qquad (5.25)$$

Mas vimos que o limite da equação (5.25) é o número $e = 2,718281....$ Portanto, podemos concluir que *se o número e for escolhido como base da função exponencial sua derivada será a própria função exponencial*, logo

$$\text{se} \quad y = e^x \quad \text{então} \quad \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Este resultado pode ainda ser estendido, pois não é apenas a função e^x que igual a sua própria derivada, pois para qualquer constante multiplicativa $C, C \in \mathbb{R}$, se resolvermos a equação $\dfrac{dy}{dx} = y$ para a função y, obteremos a solução $y = Ce^x$, onde C é uma constante arbitrária. Em análise no estudo das **equações diferenciais ordinárias (edo)** a função $y = e^x$ é de fundamental importância. Veja a definição a seguir:

Definição 5.4.2. *Uma Equação diferencial é uma equação que apresenta derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida de uma variável. Se y é uma função de x, e n é um inteiro positivo, então uma relação de igualdade (que não se reduz a uma identidade) que envolva $x, y, y' = dy/dx, y'' = d^2y/dx^2, ..., y^{(n)} = d^ny/dx^n$ é chamada uma equação diferencial de ordem n.*

Um exemplo simples de equação diferencial ordinária é

$$y = y'.$$

Conhecidos os resultados acima há portanto uma família de curvas exponenciais (cada uma correspondendo a um valor diferente de C) que são soluções da equação diferencial ordinária citada como exemplo anteriormente.

5.5 Aplicações do número e

São numerosos os fenômenos que estão relacionados com o número e, em síntese, podemos afirmar que todos os fenômenos nos quais a taxa de mudança de alguma quantidade é proporcional à própria quantidade têm em sua modelagem matemática relação direta com a equação exponencial $y = e^x$, pois serão regidos pela equação diferencial ordinária $dy/dx = ay$, onde uma constante a determinará a taxa de variação em cada caso. A solução é $y = Ce^{ax}$, onde a constante arbitrária C é determinada a partir da condição inicial do sistema, isto é, o valor de y para $x = 0$. Dependendo se a é positivo ou negativo os valores de y irão aumentar ou diminuir com x, resultando em *crescimento ou decaimento exponencial*. Vejamos alguns exemplos abaixo:

1. **Taxa de decaimento de uma substância radioativa**

   É a taxa de radiação que ela emite por unidade de tempo e em cada momento essa taxa é proporcional a sua massa m sendo expressa pela equação diferencial $dm/dt = -am$. A solução desta equação diferencial é $m = m_0e^{-at}$, onde m_0 é a massa inicial da substância (para $t = 0$). Temos um caso de decaimento exponencial, observando que m gradualmente se aproxima de 0 mas nunca o alcançará, isto é, a substância nunca se desintegrará totalmente. Isto explica por que, anos depois de um material radioativo ter sido descartado como lixo radioativo, ele ainda pode ser perigoso. O valor de a determina a taxa de decaimento da substância, e é geralmente medido pelo *tempo de meia vida*, que é o tempo que a substância radioativa leva até decair à metade de sua massa inicial.

2. **Lei do resfriamento de Newton**

   Quando um objeto quente com uma temperatura inicial T_0 é colocado e um ambiente de temperatura T_1 (considerando-se constante essa temperatura), o objeto esfria a uma taxa proporcional à diferença $T - T_1$ entre sua temperatura no tempo t e a temperatura do ambiente conforme a equação diferencial: $dT/dt = -a(T - T_1)$, que tem como solução a equação $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-at}$, mostrando que T gradualmente se aproximará de $T - 1$, mas nunca o alcançará.

3. **Intensidade de uma onda sonora**

   A propagação as ondas sonoras através do ar (ou de qualquer outro meio), tem sua intensidade determinada pela equação diferencial $dI/dx = -aI$, onde x é a distância percorrida. A solução, $I = I_0e^{-ax}$ revela que sua intensidade diminui exponencialmente com a distância.

4. **Aplicação Financeira**

   Para um capital P aplicado continuamente (isto é, a cada instante) corrigido por uma taxa de juros compostos i, por um período de t anos, o saldo a ser resgatado após o período será dado pela fórmula $S = Ce^{it}$, ou seja, o saldo crescerá exponencialmente com o tempo.

5. **Crescimento populacional**

   O crescimento de uma população (de fungos, bactérias, humanos, etc.) foi descrito em 1798 por Thomas Malthus que descreveu um modelo que prevê o tamanho N da população após um período de tempo t. Tomou as hipóteses que os nascimentos e mortes naquele ambiente eram proporcionais à população presente e a variação do tempo conhecida entre os dois períodos. Chegou à seguinte equação para descrever a população presente em um instante t: $N(t) = N_0e^{rt}$, onde N_0 é a população presente no instante inicial $t = 0$ e r é uma constante que varia com a espécie de população.

   Em contraponto ao modelo exponencial para o crescimento populacional, o matemático belga Pierre F. Verhust propôs em 1837 um modelo para o qual uma população pode crescer até um limite máximo, a partir do qual tende a se estabilizar. O modelo proposto por Verhurst, atende a uma condição em que a taxa de crescimento efetiva de uma população varia ao longo do tempo. Para espécies animais de vida livre, por exemplo, a disponibilidade de alimento, abrigo e água é um fator limitante para o crescimento populacional. Assim, para uma população de tamanho N, com taxa de crecimento r, o modelo de crescimento logístico contínuo pode ser representado pela equação $dN/dt = rN(1-N/k)$, onde k é o limite máximo sustentável, denominado capacidade de suporte.

6. **Capacidade de um sistema de numeração**

No capítulo 4 definimos capacidade de um sistema de numeração e o **Teorema**(4.0.4) propõe que o sistema de maior capacidade numérica é o sistema ternário, visto que a base de qualquer sistema de numeração deve ser um número inteiro positivo. A seguir apresentaremos a demonstração do resultado referente ao teorema em questão:

Demonstração. Considere a função dada por $f(x) = x^{\frac{n}{x}}$. O valor máximo de f é assumido em $x = e$, qualquer que seja n . Para ver isto, segue que:

$$y = x^{\frac{n}{x}}$$
$$\ln y = \frac{n}{x}\ln x$$
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{x\cdot n\cdot\frac{1}{x} - n\cdot\ln x\cdot 1}{x^2}$$
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{n - n.\ln x}{x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = y\cdot\left[\frac{n - n.\ln x}{x^2}\right]$$
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Longleftrightarrow n - n\cdot\ln x = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e.$$

Como a derivada $y'(x)$ é positiva à esquerda, e negativa à direita de $x = e$, podemos concluir que $x = e$ é ponto de máximo da função y. ∎

O valor inteiro mais próximo de $e \cong 2,71828$ é 3, portanto, o sistema de numeração de maior capacidade numérica é o sistema de base 3, fato que já havia sido afirmado anteriormente no **Capítulo** 4 quandro tratávamos sobre o referido assunto.

Capítulo 6

O número π

6.1 Definição de π e descrição do método de Arquimedes para calcular π

O número π, um enigmático e ilustre número irracional, é definido como a razão entre a medida do comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro. Isto significa dizer que, para qualquer disco com diâmetro determinado, se o comprimento da circunferência mede C e seu diâmetro mede d então a razão C/d é constante, e o valor dessa razão é o número π. Como $d = 2r$, onde r é a medida do raio, podemos escrever:

$$\frac{C}{d} = \frac{C}{2r} = \pi.$$

Nesta seção exploraremos fundamentalmente a descrição do primeiro método utilizado para o cálculo de um valor aproximado para π.

O primeiro resultado teórico e expressivo relacionado à π é atribuído à Arquimedes de Siracusa ($287 - 212$ a.C.), usando uma técnica descrita no livro 10 da obra "Os Elementos" de Euclides, conhecida por método da exaustão. Veja a seguir a transcrição do método conforme [14]:

"Dadas duas grandezas distintas, se da maior subtrairmos uma grandeza maior do que sua metade e do que restar, uma grandeza maior do que sua metade, e se este processo for repetido continuamente, restará alguma grandeza menor do que a menor das duas grandezas iniciais."

Vejamos agora a descrição do método utilizado por Arquimedes para o cálculo de π. O método que iremos descrever a seguir, realizado por Arquimedes, está compilado numa obra entitulada *A medida de um círculo* e é conhecido como método clássico do cálculo de π. Esse método tem como princípio a inscrição e circunscrição de polígonos regulares a uma circunferência de forma que, quanto maior o número de lados dos polígonos mais próximos estarão seus perímetros do perímetro da circunferência.

Considere um círculo unitário no qual podemos inscrever um polígono de $3\times 2^{n-1}$ lados com semiperímetro b_n, e circunscrever um polígono de $3\times 2^{n-1}$ lados com semiperímetro a_n. A figura abaixo determina o caso para $n=2$:

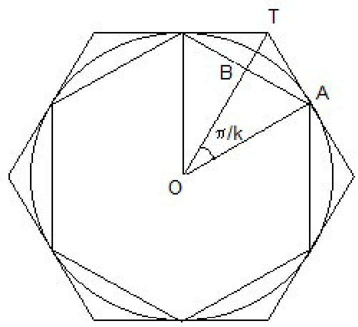


Figura 6.1: Método de Arquimedes

Conforme descrito, podemos notar que:

$$||OA|| = 1, \quad ||AB|| = \sin(\pi/k), \quad ||AT|| = \tan(\pi/k),$$

onde $k_n = 3\times 2^{n-1}$. O efeito desse processo é a definição de uma sequência crescente

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

e uma sequência decrescente

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

de tal forma que ambas as sequências têm como limite o número π. Usando a moderna notação trigonométrica, temos que os dois semiperímetros são dados por:

$$a_n = k_n \tan(\pi/k_n) \quad \text{e} \quad b_n = k_n \sin(\pi/k_n),$$

onde $k = 3 \times 2^{n-1}$. De maneira análoga, temos:

$$a_{n+1} = 2k\tan(\pi/2k) \quad \text{e} \quad b_{n+1} = k\sin(\pi/2k).$$

Ainda usando argumentos trigonométricos, podemos provar as identidades:

(1) $\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{2}{a_{n+1}}$;

(2) $a_{n+1} \cdot b_n = (b_{n+1})^2$.

Para tanto, vamos utilizar as fórmulas trigonométricas da tangente de um semi-arco (ou arco-metade) e também do seno de um semi-arco:

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \tag{6.1}$$

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2} \tag{6.2}$$

onde x é um arco do 1º quadrante.

Demonstração da identidade (1).

(i) $\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} =$

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\tan(\pi/k)} + \frac{1}{\sin(\pi/k)}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\frac{\sin(\pi/k)}{\cos(\pi/k)}} + \frac{1}{\sin(\pi/k)}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{\cos(\pi/k)}{\sin(\pi/k)} + \frac{1}{\sin(\pi/k)}\right) =$$

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1+\cos(\pi/k)}{\sin(\pi/k)}\right).$$

(ii) $\dfrac{2}{a_{n+1}} =$

$$\frac{2}{2k\tan(\pi/2k)} = \frac{1}{k}\frac{1}{\tan(\pi/2k)} \overset{(6.1)}{=} \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/k)}{1+\cos(\pi/k)}}} = \frac{1}{k}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi/k)}}{\sqrt{1-\cos(\pi/k)}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos(\pi/k)}}{\sqrt{1+\cos(\pi/k)}} =$$

$$\frac{1}{k}\frac{\sqrt{(1+\cos(\pi/k))^2}}{\sqrt{1-\cos^2(\pi/k)}} = \frac{1}{k}\frac{1+\cos(\pi/k)}{\sqrt{\sin^2(\pi/k)}} = \frac{1}{k}\left(\frac{1+\cos(\pi/k)}{\sin(\pi/k)}\right).$$

Como (i)=(ii), concluímos o resultado. ∎

Demonstração da identidade (2).

(iii) $a_{n+1} \cdot b_n =$

$$2k\tan(\pi/2k){\cdot}k\sin(\pi/k) = 2k^2\tan(\pi/2k)\sin(\pi/k) \overset{(6.1)}{=} 2k^2\sin(\pi/k)\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/k)}{1+\cos(\pi/k)}} =$$

$$2k^2\sin(\pi/k)\frac{\sqrt{1-\cos(\pi/k)}}{\sqrt{1+\cos(\pi/k)}}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos(\pi/k)}}{\sqrt{1+\cos(\pi/k)}} = 2k^2\sin(\pi/k)\frac{\sqrt{1-\cos^2(\pi/k)}}{\sqrt{(1+\cos(\pi/k))^2}} =$$

$$2k^2\sin(\pi/k)\frac{\sqrt{\sin^2(\pi/k)}}{1+\cos(\pi/k)} = 2k^2\sin(\pi/k)\frac{\sin(\pi)/k}{1+\cos(\pi/k)} = 2k^2\frac{\sin^2(\pi/k)}{1+\cos(\pi/k)} =$$

$$2k^2\frac{1-\cos^2(\pi/k)}{1+\cos(\pi/k)} = 2k^2\frac{(1-\cos(\pi/k))(1+\cos(\pi/k))}{1+\cos(\pi/k)} = 2k^2(1-\cos(\pi/k)).$$

(iv) $(b_{n+1})^2 =$

$$(2k\sin(\pi/2k))^2 = 4k^2\sin^2(\pi/2k) \overset{(6.2)}{=} 4k^2\frac{1-\cos(\pi/k)}{2} = 2k^2(1-\cos(\pi/k)).$$

Como (iii)=(iv), concluímos o resultado. ∎

Arquimedes começou com $a_1 = 3\tan(\pi/3) = 3\sqrt{3}$ e $b_1 = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, calculou a_2 usando a identidade (1), depois calculou b_2 usando (2), em seguida, obteve a_3 usando (1) e também b_3 usando (2), e assim por diante, até o cálculo de a_6 e b_6. Ele concluiu que $b_6 < \pi < a_6$, mostrando que

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Isto equivale a dizer que $3,14084 < \pi < 3,142857$. Destacamos que o uso da trigonometria desenvolvido até aqui nas demonstrações não era pertinente à época de Arquimedes e as conclusões obtidas em (1) e (2) foram asseveradas através de argumentos puramente geométricos, sem a vantagem do uso de uma notação algébrica e trigonométrica.

A tarefa de Arquimedes sem dúvidas é um feito magnífico dadas as condições das quais dispunha para a época e mesmo assim o resultado é uma fantástica e assertiva aproximação para π. Destacamos também que ele chegou a calcular os perímetros e áreas de polígonos regulares de $6, 12, 24, 48$ e 96 lados, inscritos e circunscritos a uma circunferência.

6.2 Método de Gauss para o cálculo de π

Vamos determinar nesta seção como Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$, um dos maiores gênios da matemática, determinou um processo de cálculo aproximado de π. Este método consiste da determinação de áreas a partir da contagem de pontos de um quadriculado, denominado *rede*, que é um conjunto de infinitos pontos no plano dispostos em linhas e colunas, igualmente espaçados entre si, constituindo assim uma matriz de *pontos* que são os elementos da rede. Os pontos da rede determinam vértices de um quadrado básico (aquele que não contém outro quadrado da rede) que é denominado *quadrado unitário.* A figura abaixo ilustra uma rede.

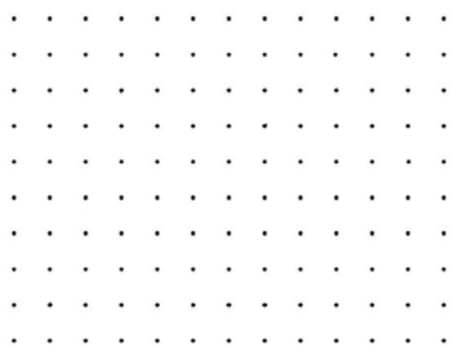


Figura 6.2: Rede de Pontos

É possível calcular a área de qualquer polígono contido na rede cujos vértices são pontos da rede.

Fórmula de Pick: *A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão*

$$A = I + \frac{B}{2} - 1,$$

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono, e I é o número de pontos da rede no interior do polígono.

Essa fórmula foi publicada em 1899 pelo matemático austríaco G. A. Pick $(1859 - 1942)$.

O método de Gauss para o cálculo de um valor aproximado de π consiste da contagem de pontos de uma rede contidos num disco com centro num ponto O dessa rede e de raio r. Esse número foi considerado por Gauss, e por isso, ele recebeu posteriormente o nome de *função de Gauss.* A tabela abaixo determina para alguns valores de r o valor $f(r)$ da função de Gauss, que pode ser calculada por operações aritméticas.

r	$f(r)$
6	113
10	317
20	1.257
30	2.821
100	31.417
200	125.629
300	282.697

Observamos que $f(r)$ é também a área da união dos quadrados unitários cujo vértice inferior esquerdo esteja contido no disco (considerando os lados do quadrados nas direções horizontal e vertical) que para $r > 0$ é um número inteiro e positivo.

Vamos então calcular uma aproximação desse número levando em conta que a união desses quadrados é uma figura contida no disco de centro O e raio $r + \sqrt{2}$ e que contém em seu interior o disco de centro O e raio $r - \sqrt{2}$.

Dessa observação e do fato de que a área do disco de partida é igual a πr^2, se $B(r)$ é a área do anel entre os disco de raio $r + \sqrt{2}$ e $r - \sqrt{2}$, tem-se:

$$|f(r) - \pi r^2| < B(r) \Rightarrow |\frac{f(r)}{r^2} - \pi| < \frac{B(r)}{r^2}.$$

Podemos observar ainda que:

$$B(r) = \pi[(r + \sqrt{2})^2 - (r - \sqrt{2})^2] = 4\pi\sqrt{2}r,$$

e dessa forma

$$|\frac{f(r)}{r^2} - \pi| < \frac{4\pi\sqrt{2}}{r}.$$

O segundo membro dessa desigualdade é uma constante dividida por r donde se conclui que: se r cresce, o quociente fica cada vez menor tendendo a 0 quando r tende a ∞, ou seja:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r^2} = \pi.$$

A tabela a seguir determina aproximações para π utilizando o método de Gauss:

r	$f(r)/r^2$
6	$3,138888$
10	$3,17$
20	$3,1425$
30	$3,134$
100	$3,1417$
200	$3,140725$
300	$3,14107$

6.3 Euler e uma igualdade envolvendo π

O matemático frânces François Viète $(1540 - 1603)$ calculou o número π com nove casas decimais corretas, utilizando o método clássico descrito na seção (6.1) e usando um polígono de $6 \times 2^{16} = 393216$ lados. Descobriu também o equivalente do interessante produto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} + \dots \tag{6.3}$$

A igualdade (6.3) foi demonstrada no século XVIII pelo incrível matemático suiço Leonhard Euler e apresentaremos essa demonstração na presente seção.

Sabemos que

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta. \tag{6.4}$$

Fazendo $x = 2\theta$, temos que $\theta = \dfrac{x}{2}$ e substituindo na equação (6.4) temos:

$$\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2). \tag{6.5}$$

Aplicando novamente a identidade (6.4), agora para $\frac{x}{2} = 2\theta$ que implica que $\theta = \frac{x}{4}$ temos

$$\sin(x/2) = 2\sin(x/4)\cos(x/4). \tag{6.6}$$

Substituindo o resultado acima na equação (6.5) obtemos:

$$\sin(x) = 2^2 \sin(x/4)\cos(x/4)\cos(x/2). \tag{6.7}$$

Analogamente, podemos usar o fato de que

$$\sin(x/4) = 2\sin(x/8)\cos(x/8). \tag{6.8}$$

e da mesma forma, substituindo esse resultado na equação (6.7) obtemos:

$$\sin(x) = 2^3 \sin(x/8)\cos(x/8)\cos(x/4)\cos(x/2). \tag{6.9}$$

Repetindo esse processo n vezes temos que:

$$\sin(x) = 2^n \sin(x/2^n)\cos(x/2^n)\cos(x/2^{n-1}) \cdot \ldots \cdot \cos(x/2), \tag{6.10}$$

e dividindo ambos os membros da equação (6.10) por $x(x \neq 0)$, obteremos

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{2^n}{x} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right),$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Fazendo $n \to \infty$, temos que $\frac{x}{2^n} \to 0$ e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}} = 1 \quad \text{(limite fundamental)}.$$

Assim, temos que quando $n \to \infty$, então

$$\frac{\sin(x)}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdot \ldots . \tag{6.11}$$

Fazendo $x = \frac{\pi}{2}$ na equação (6.11) obtemos:

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi/2}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi/2}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi/2}{8}\right) \cdot \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdot\ldots.$$

Como $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, e usando a identidade $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, temos que

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}.$$

Logo, de $\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdot\ldots$ segue que:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}+\ldots.$$

6.4 Cronologia do número π

Um fascinante e magnífico número despertou desde remotos tempos da antiguidade a curiosidade e uma extraordinária conveniência para desvendá-lo por completo e determinar um padrão para defini-lo: o número π. É sem dúvida um objeto matemático que ao ser mencionado atualmente desperta imediato reconhecimento e interesse em qualquer pessoa e logo revela o teor do problema que está sendo desenvolvido, ou seja, provavelmente trata-se de questões alusivas a um elemento geométrico plano bastante elementar: o círculo ou ainda o sólido geométrico espacial relacionado ao círculo definido por esfera.

Nesta seção apresentaremos desenvolvedores de cálculos aproximados para π ao longo do tempo através de métodos não computacionais.

A seção tem como referência bibliográfica o endereço eletrônico www$-$*history*.mcs.$st-$ *and*.ac.uk/HistTopics/$Pi_c hronology.html$ e também o repositório científico sob endereço www.mat.ufrgs/portosil/aplcom1a.html.

Ao contrário do que se imagina o número π não surgiu em problemas sobre como determinar o comprimento da circunferência relacionando-o com seu diâmetro, pois na antiguidade os problemas apareciam assumindo um viés mais cotidiano, ou seja, alguma situação funcional relacionada à vida dos povos. Estreitamente ligado à problemas sobre o cálculo de áreas está a questão de determinar a área de um campo circular em termos de seu diâmetro, ou mesma de sua circunferência. Recaímos inevitavelmente sobre a tese de determinar a área do círculo através da área do quadrado, o que é razoavelmente elementar quando estamos interessados no cálculo de áreas, dessa forma vem à tona consequentemente o problema da quadratura do círculo. Os mais antigos documentos concretos que temos e que tratam explicitamente de π, são tabletas mesopotâmicas de 2000 anos a.C., mas já sabia-se há cerca de 4000 anos a.C. que o número de vezes que o diâmetro está contido na circunferência é constante, independente do diâmetro dessa circunferência.

No oriente antigo e até mesmo em citações no velho testamento [1], o valor utilizado frequentemente para representar o número π é 3 que é a mais comum das aproximações para π nos documentos mesopotâmios. Por muito tempo perdurou a idéia de que a única aproximação para π usada pelos mesopotâmios era $\pi = 3$, idéia essa que foi desfeita em 1950 quando o historiador matemático E. M. Bruins traduziu várias tabletas encontradas em Suse e datadas de 2000 a.C. em que o problema pedia para calcular a área de um campo circular de diâmetro dado e para tal usavam a aproximação (em base sexagesimal):

$$3; 7', 30" = 3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2} = 3 + \frac{1}{8} = 3,125.$$

No Papiro de Rhind, escrito aproximadamente em 1700 a.C., encontramos o seguinte propósito: *a área de um círculo é igual a de um quadrado cujo lado é o diâmetro do círculo diminuído de sua nona parte.* Fazendo uso das fórmulas das áreas do círculo e do quadrado respectivamente, temos:

$$\frac{\pi d^2}{4} = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = \frac{64d^2}{81} \Rightarrow \pi = \frac{256}{81} \Rightarrow \pi \cong 3,16049.$$

Podemos afirmar que esta aproximação egípcia para o número π não é a mais antiga nem tampouco a mais exata das aproximações conhecidas na antiguidade, porém, tem uma redação bastante didática e é usualmente aceita no decurso histórico que norteia

[1] Ver as referências bíblicas: Reis, I, 7:23; Crônicas, II, 2:4.

as origens para o surgimento de π. Mais importante e interessante é perguntar como os egípcios descobriram tal regra. Inúmeros historiadores investigaram essa questão e talvez quem mais detalhadamente a estudou foi Paulus Gerdes no trabalho: *Three alternate methods of obtaining the ancient Egyptian formula for the area of a circle*, de sua obra *Historia Math* (1985). Nesse trabalho o Prof. Gerdes apresenta três vertentes para a reconstrução do método de descoberta pelos egípcios, a mais plaúsivel e aceita obtida empiricamente e que envolve um procedimento comum entre os construtores egípcios: o método dos discos metálicos.

Usando o método dos disco metálicos fica fácil ver como chegaram a tal resultado. Observe as figuras a seguir ilustrando o método egípcio:

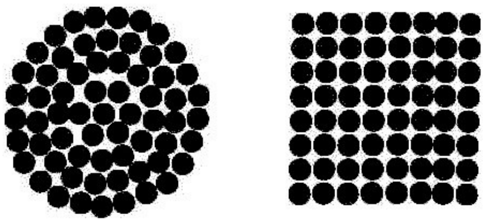


Figura 6.3: Método egípcio dos discos metálicos

Obviamente o quadrado acima faz a quadratura aproximada do círculo, pois ambas as figuras são formadas por 64 discos. Podemos observar claramente que a razão entre o lado do quadrado acima e o diâmetro do círculo é aproximadamente 8/9 o que provavelmente explica o texto redigido pelos egípcios no Papiro de Rhind.

Como vimos na seção (6.1) o primeiro resultado científico atribuído à descoberta de π é devido à Arquimedes em 250 a.C. e como descrito oportunamente a aproximação obtida foi

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

isto é $3,140845 < \pi < 3,1428571$, ou seja, àquela época Arquimedes determinou o valor de π com duas casas decimais corretas.

Vitruvius foi o seguinte em 20 a.C. quando determinou o valor $\dfrac{25}{8} = 3,125$ medindo a distância de um volante de um determinado diâmetro movido através de uma revolução.

Depois Chang Hong $(78-139)$ no ano de 130 d.C. assumiu o valor $\sqrt{10} \cong 3,162277$, aproximação esta obtida através da razão entre o volume de um cubo e o volume de uma esfera inscrita no cubo na proporção $8/5$.

O cientista grego Claudio Ptolomeu $(87-165$ d.C.) foi quem determinou a primeira notável aproximação para π após Arquimedes em registros de aproximadamente 150 d. C. Ele determinou em sua famosa obra "*O Almagesto*"[2], o comprimento das cordas de arcos de 0^o a 180^o com incrementos de $0,5^o$ e obteve a aproximação para π em notação sexagesimal

$$3; 8', 30" = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} \cong 3,14166667.$$

Multiplicando-se o comprimento da corda do arco de 1^o por 360^o e dividindo-se o resultado pela medida do diâmetro do círculo obtem-se o resultado descrito acima.

O astrônomo chinês Wang Fan $(229-267)$ obteve no ano de 250 para π a aproximação $\frac{142}{45} = 3,1555$ por considerar o valor $3,14$ um valor inferior. Não se sabe ao certo o método utilizado por ele.

Liu Huy um matemático chinês determinou para π em 263 o valor $3,14159$ usando um polígono regular inscrito com 192 lados.

Por volta de 480 d. C. o mecânico chinês Tsu Ch'ung-chih obteve para π a interessante aproximação racional $\frac{355}{113} \approx 3,14159292$ correta até a 6 casa decimal, embora vislumbra-se posteriormente que $3,1415926 < \pi < 3,1415927$ e calculando a média dos extremos do intervalo teria π com 8 casas decimais corretas.

.

Na Índia, Aryabhata no ano de aproximadamente 500 obteve o valor $\frac{3927}{1250} = 3,1416$ calculando o perímetro de um polígono regular inscrito com 384 lados.

[2]A obra tem como título *Syntaxis mathematica*, mas é mais conhecida por seu título árabe.

Brahmagupta em 640 criticou o valor obtido anteriormente por Aryabhata e adotou para π o valor exato de $\sqrt{10} \cong 3,1622776$.

O algebrista Al Khowarizmi em 800, usava em problemas de álgebra a aproximação $22/7$, contudo, em problemas de astronomia utilizava a aproximação $\sqrt{10}$.

Fibonacci $(1170 - 1250)$ utilizou em registros de 1220 a aproximação $\dfrac{862}{275} \cong 3,141818$ obtida inscrevendo e circunscrevendo polígonos de 96 lados mas não fez qualquer referência a Arquimedes.

Madhava foi um matemático indiano que descobriu a série de Gregory muito antes do próprio Gregory e foi o primeiro a utilizar uma série no cálculo de π, obtendo o valor $3,14159265359$ com 11 casas decimais corretas.

Al Khashi em 1430 determinou uma aproximação para π com 14 casas decimais corretas, calculando o perímetro de um polígono regular inscrito com $3 \times 2^{28} = 805.306.368$ lados.

Romanus (ou Adriaan van Roomen) utilizando o método clássico calculou π com 17 casas decimais, das quais 15 corretas, utilizando um polígono regular com 2^{30} lados.

Van Ceulen no ano de 1596 obteve duas aproximações para π: uma com 20 casas decimais corretas e a outra com 35. Na primeira aproximação ele usou polígonos regulares inscritos e circunscritos com 60×2^{33} lados e na posterior utilizou um polígono com 2^{62} lados. Foi nesta época que os métodos utilizando polígonos regulares inscritos e circunscritos tornaram-se obsoletos dando lugar à cálculos através de expansões de séries infinitas.

A mente brilhante de Sir Isaac Newton $(1643 - 1727)$ calculou em 1665 o valor de π

com 16 casas decimais corretas utilizando a série

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots$$

para $x = \frac{1}{2}$, obtendo a série $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Ele calculou cerca de 40 termos da série.

No ano de 1650 o matemático inglês John Wallis obteve a curiosa expressão

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\ldots$$

O matemático escocês James Gregory obteve em 1677 a série infinita

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Passou despercebido a Gregory que para $x = 1$ a série se torna

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

e esta série que já era conhecida de Leibniz em 1674; converge muito lentamente.

Abraham Sharp (1651−1742) um matemático inglês, calculou π por sugestão de Halley. Ele utilizou em 1699 a série de Gregory que havia sido publicada em 1677 definida por

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Colocando $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ temos a série $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$. Para obter π com 71 casas decimais corretas ele utilizou cerca de 300 termos da série.

John Machin em 1706 usando também a série de Gregory e a identidade

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

calculou π com 100 casas decimais.

Em 1737 a notação usual para representar a razão entre o comprimento de uma circunferência por seu diâmetro é designada pela letra grega π, notação essa adotada e difundida por Euler.

Como sabemos atualmente o número π é uma grandeza incomensurável e no universo dos números reais π é um número **irracional**, mas foi apenas em 1767 que tal resultado fora publicado. Coube ao matemático suiço Johann Heinrich Lambert a incumbência de demonstrar a irracionalidade do número π. Por envolver conceitos avançados de cálculo diferencial e integral, essa demonstração será omitida neste trabalho.

Já no ano de 1794 Adrien-Marie Legendre publicou outra demonstração sobre a irracionalidade de π.

Em 1824 o inglês Wilian Rutherford calculou π com 208 casas das quais 152 estavam corretas. Ele usou a relação

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{70}\right) + \arctan\left(\frac{1}{99}\right),$$

que Euler havia publicado em 1764.

Já em 1844 o calculista prodígio Zacharias Dase, com apenas 20 anos de idade, calculou π com 200 casas decimais utilizando a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right).$$

Após ter cometido um erro, agora no ano de 1853, Rutherford fez um outro cálculo utilizando a fórmula de Machin e obteve π com 440 casas decimais corretas.

Já em 1874 Shanks, que fora aluno de Rutherford, calculou π com 707 casas (apenas 527 corretas) também utilizando a fórmula de Machin. Shanks sem dúvidas merece destaque entre os calculistas de π pois em uma era que não havia ainda o advento das tecnologias computacionais, após 15 anos de árduo trabalho à base de lápis e papel concluiu seu propósito e mostrou ao mundo o irracional número π com tantas casas decimais.

Finalmente em 1882 Ferdinand Lindemann provou que π é **transcendente**, ou seja, π não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais.

Já próximos ao início da era tecnológica o cálculo de π começa a ser desenvolvido por computadores e supercomputadores como procedimento para testar a memória de processamento e melhorar a performance de desempenho das máquinas. Para tanto, os programadores desenvolveram algoritmos que requerem fórmulas eficientes e programas muito bem escritos e também vários esquemas que permitiam economizar tempo e espaço na memória do computador.

Alguns desses cálculos usam a série de Gregory e relações trigonométricas do tipo

$$\pi = 32 \arctan \frac{1}{10} - 4 \arctan \frac{1}{239} - 16 \arctan \frac{1}{515}.$$

Destacamos aqui também o uso dos métodos iterativos, baseados na média aritmética-geométrica, utilizados pela primeira vez por Tamura e Kanada em 1981 ao calcularem π com 4 milhões de casas decimais e por causa de sua rápida convergência, tal método tem um papel muito importante na computação.

Por volta de 1984 J. M. Borwein e P. B. Borwein desenvolveram um algoritmo que permite calcular π com precisão e velocidade impressionantes. O algoritmo é dado por 3 sequências (x_n), (y_n) e (π_n), descritas pelas condições iniciais $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_0 = 0$, $\pi_0 = 2$ e pelas fórmulas de iteração:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right] \quad , \quad y_{n+1} = \frac{y_n\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{y_n + 1}, \quad \text{e} \quad \pi_{n+1} = \frac{x_n + 1}{y_n + 1}\pi_n.$$

A convergência de π_{n+1} para π é muito rápida; com 4 iterações obtem-se

$$\pi_4 = 3,14159265358976,$$

com 14 casas decimais corretas.

Até antes da 2ª Guerra Mundial o que motivou o cálculo de π com tantas casas decimais foi sem dúvidas o prazer matemático proporcionado à quem soluciona um problema ou resolve um desafio. Certamente os calculistas de π buscavam fama e almejavam um lugar de destaque na história. Já na era computacional, além dos ítens destacados anteriormente, o cálculo de π serve para demonstrar a potência de novos métodos de cálculo e a capacidade de armazenamento de informações na memória de uma supermáquina.

No quadro abaixo destacamos os principais cálculos computacionais do número π. Na última linha do quadro há a informação do mais recente cálculo para π. Só para armazenar esta nova versão do número π é necessário mais de um terabyte de espaço no disco rígido.

Matemático	Ano	Casas Decimais	Tipo de Computador
Ferguson	1947	710	Calculadora manual
Ferguson, Wrench	1947	808	Calculadora manual
Smith, Wrench	1949	1.120	Calculadora manual
Reitwiesner et. al	1949	2.037	ENIAC
Nicholson, Jeenel	1954	3.092	NORAC
Felton	1957	7.480	PEGASUS
Genuys	1958	10.000	IBM 704
Felton	1958	10.021	PEGASUS
Guilloud	1959	16.167	IBM 704
Shanks, Wrench	1961	100.265	IBM 7090
Guilloud, Filiatre	1966	250.000	IBM 7030
Guilloud, Dichampt	1967	500.000	CDC 6600
Guilloud, Bouyer	1973	1.001.250	CDC 7600
Miyoshi, Kanada	1981	2.000.036	FACOM M-200
Guilloud	1982	2.000.050	
Tamura	1982	2.097.144	MELCON 900 II
Tamura, Kanada	1982	8.388.576	HITACHI M-280H
Kanada, Yoshino, Tamura	1982	16.777.206	HITACHI M-280H
Ushiro, Kanada	1983	10.013.395	HITACHI S-280/20
Gosper	1985	17.526.200	SYMBOLICS 3670
Bailey	1986	29.360.111	CRAY-2
Kanada, Tamura	1988	201.326.551	HITACHI S-820/80
Chudnovskys	1989	1.011.196.691	
Kanada, Takahashi	1997	51.539.600.000	HITACHI SR 2201
Takahashi	2009	2.600.000.000.000	
Bellard	2009	2.700.000.000.000	
Kondo	2010	5.000.000.000.000	

6.5 Curiosidades sobre o número π

Alguns fatos curiosos estão diretamente relacionados a este enigmático número irracional que é o número π. A seguir destacaremos alguns desses fatos:

1. **Distribuição estatística dos dígitos de π**

   Um dos interesses em calcular uma grande quantidade de dígitos do número π é verificar a hipótese da distribuição aleatória de seus dígitos e comprovar ou não a *normalidade* desse número. Os cálculos já realizados tendem a confirmar essa conjectura. Por exemplo, examinando os 200 bilhões de dígitos iniciais de π, Kanada e Takahashi obtiveram a seguinte distribuição:

Dígitos	**Número de ocorrências**
0	20.000.030.841
1	19.999.914.711
2	20.000.136.978
3	20.000.069.393
4	19.999.921.691
5	19.999.917.053
6	19.999.881.515
7	19.999.967.594
8	20.000.291.044
9	19.999.869.180

   Esses números de ocorrência estão bastante próximos dos esperados 20.000.000.000. Mais do que isso: os números de ocorrência tendem aos valores esperados com uma velocidade que está dentro do previsto pelo cálculo das probabilidades.

   Com relação à possível normalidade de π é interessante que a sequência 314159 dos seis primeiros algarismos de π aparece seis vezes nos primeiros dez milhões de dígitos de sua expansão e a sequência 0123456789 não aparece nunca.

   A sequência 271828 dos seis primeiros dígitos de e (base dos logaritmos naturais) ocorre oito vezes nos primeiros dez milhões de algarismos da expansão decimal de e.

2. **O problema da agulha**

   O conde de Buffon concebeu seu famoso problema da agulha pelo qual pode-se aproximar π por métodos probabilísticos. Suponhamos que se tracem num plano horizontal um número grande de retas paralelas equidistantes entre si. Sendo a a distância entre duas retas vizinhas quaisquer, Buffon mostrou que a probabilidade de que a agulha de comprimento $l < a$, lançada ao acaso sobre o plano, caia cortando uma das retas é dada por
   $$p = \frac{2l}{\pi a}.$$
   Realizando-se efetivamente esse experimento um número grande de vezes e anotando-se os casos positivos obtém-se um valor empírico de p que podemos usar na fórmula acima para calcular uma aproximação de π. O melhor resultado por esse caminho foi conseguido pelo italiano Lazzerini em 1901. Com 3408 lançamentos da agulha ele obteve π corretamente até a sexta casa decimal.

3. **Números primos sorteados**

   O matemático R. Chartres determinou em 1904 que ao sortearmos ao acaso dois números inteiros positivos distintos, a probabilidade de que estes números sejam primos entre si é de aproximadamente $\frac{6}{\pi^2} \cong 60,8\%$.

Capítulo 7

Problemas e propostas de atividades

Desenvolveremos neste capítulo algumas propostas de atividades a serem aplicadas prioritariamente na primeira série do ensino médio. Para tanto, descreveremos a seguir a metodologia utilizada que norteará o desenvolvimento de cada atividade.

7.1 Descrição da metodologia e objetivo

Objetivo

Proporcionar ao estudante a real concepção de cada um dos tópicos desenvolvidos neste trabalho, entendendo o porque do uso dos sistemas de numeração, razões históricas de sua existência, compreensão estrutural do sistema decimal edificada em agrupamentos de 10 e percepção de sua funcionalidade e aplicabilidade ao longo do tempo e no mundo em que vivemos.

Esclarecer ao aluno que um número qualquer pode ser escrito em qualquer outro sistema de numeração de base conveniente, usando para tanto uma simbologia adequada e desenvolvimento algébrico lógico e coerente. Questionar o discente sobre a razão pela qual o sistema de numeração posicional de base 10 prevaleceu sobre outros sistemas após a explanação do contexto histórico e surgimento dos sistemas de numeração.

Descrever também o universo dos números, organizados em conjuntos numéricos, esclarecer as relações de pertinência, constituição de cada conjunto, operações aritméticas e entender a questão da comensurabilidade ou incomensurabilidade de uma grandeza, como método de conexão contínua entre saberes matemáticos concebidos e a realidade que nos rodeia. Sobretudo, explanaremos sobre algumas grandezas incomensuráveis que merecem destaque como o número e, o número π e o número de ouro ϕ.

Método

- Inicialmente será contextualizada a história dos números, evolução histórica das linguagens e o advento dos sistemas de numeração explorando a necessidade útil dos números e sistemas de numeração na vida do homem.

- Explicação da dinâmica do sistema de numeração Indo-Arábico, agrupamentos de 10, organização em classes e divisões das classes.

- Realizar a decomposição de números e escrevê-los numericamente como soma de potências de base 10 para que a funcionalidade do sistema de numeração decimal seja assimilada pelo discente.

- Efetuar medições de objetos lineares com instrumentos graduados e sintetizar a correspondência biunívoca entre a grandeza medida e o número que a representa quando adotamos uma unidade de medida conveniente.

- Definir e exibir a diferença entre grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis.

- Descrever e exemplificar os conjuntos numéricos e a relação de pertinência de um número que representa uma grandeza medida, a um conjunto em específico.

- Propor as atividades e evidenciar as características de cada etapa da construção conceitual percebida por cada aluno.

7.2 Propostas de atividades

1) Desenvolva um sistema de numeração posicional de base 10 próprio, adotando uma simbologia característica e construindo uma tabela de significação para cada símbolo. A seguir, escreva dois números no sistema de numeração criado e efetue as operações aritméticas de adição, subtração e multiplicação nesse sistema.

2) O sistema de numeração posicional de base 10 é fundamentado na concepção de construirmos agrupamentos de dez elementos. Tal fato, permite que qualquer número seja escrita como potência de base 10. Escreva portanto os seguintes números decompostos como soma de potências de base 10:

a) $13625 =$

b) $102437 =$

c) $0,001 =$

d) $0,4681 =$

e) $54,25 =$

3) Faça o que se pede:

a) Determine em centímetros a medida (número racional finito) do comprimento e da largura da capa do livro didático de matemática. (Utilize uma régua graduada com boa calibração.)

b) Qual a razão entre a medida do comprimento pela medida da largura efetuadas no item a)?

c) Essa razão é um número racional ou irracional?

d) Qual o significado da razão da medida do comprimento pela medida da largura do livro didático?

4) Construa com régua graduada e compasso em uma folha de papel sulfite um quadrado $ABCD$, nomeando o primeiro vértice A no canto esquerdo superior do quadrado, e os demais vértices sequencialmente no sentido anti-horário. A medida do lado do quadrado dever ser igual a $1dm(= 10cm)$. A seguir, trace a diagonal BD desse quadrado e construa também a reta l que contém o lado BC. Sobre a reta l, marque com o compasso a medida da diagonal BD. A medida da diagonal desse quadrado está entre quais números? Utilize a régua graduada e determine o valor aproximado da referida diagonal em dm. Aplique o teorema de Pitágoras utilizando as medidas em dm e verifique o valor do número que representa a medida da diagonal BD. O que se pode afirmar sobre este número, é uma grandeza comensurável ou incomensurável? A qual conjunto númerico ele pertence?

5) Qual é a aproximação de $\sqrt{7}$ por falta com duas casas decimais?

6) Realize as divisões euclidianas sucessivas do número 625 por 3, utilizando o método das chaves. Escreva o número 625 escrito como potências de base 3 e dê a representação do número 625 no sistema de numeração posicional ternário.

7) **A razão áurea e o número de ouro ϕ**

   Considere o segmento de reta cujas duas extremidades denominaremos por A e C. Coloque um ponto B entre A e C (B mais próximo de A) de modo que a razão entre a medida do segmento menor AB para a medida do segmento maior BC seja proporcional a razão da medida do segmento maior BC para a medida do todo o segmento AC. Observe a figura:

Figura 7.1: Razão Áurea

A razão entre os comprimentos destes segmentos designa-se habitualmente por seção áurea. Então, tem-se que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}. \tag{7.1}$$

Definindo $AB = y$, $BC = x$ e $AC = x + y$, a equação (7.1) se torna:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}, \tag{7.2}$$

e substituindo ainda $y = 1$ na equação (7.2), temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x+1}. \tag{7.3}$$

Resolvendo a proporção definida na equação (7.3), obtemos a equação quadrática

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

que tem como soluções

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como a solução $x_2 < 0$ esta solução não convém, já que os cálculos determinam a medida do segmento maior BC. Para o valor encontrado para o segmento BC, definimo-lo como **número de ouro** ϕ e anotemos:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398...$$

a) Utilize uma fita métrica para medir partes de seu corpo e de seu colega e preencha a tabela seguinte:

ALTURA DA PESSOA (A)	**ALTURA DO UMBIGO** (B)	**ALTURA DA FACE DO QUEIXO AO ALTO DA TESTA** (C)	**ALTURA DA FACE DO QUEIXO AOS OLHOS** (D)

b) Utilize a calculadora para relacionar as medidas preenchendo a próxima tabela:

A/B	C/D

c) Compare os números obtidos com os números de seus colegas.

NOME:

SÉRIE:

ESCOLA:

Referências Bibliográficas

[1] Almeida, F. M. M. de B. (2007). Sistemas de Numeração precursores do Sistema Indo-Árabe, Dissertação (Mestrado profissional em ensino de Matemática), Universidade do Porto, Portugal **110 p.**

[2] Boyer, C. B.; Merzbach, U. C., *História da Matemática*, Tradução da 3ª. ed. americana, (Editora Edgard Blücher Ltda., tradução - Helena Castro) **512 p.** (2012).

[3] Ritter, J., *Elementos para uma história das ciências*, Volume I, Terramar - Editores, Distribuidores e Livreiros Ltda., (Lisboa), pp. 23–46. (1991).

[4] Eves, H., *Introdução a História da Matemática*, Campinas-SP(Brasil), (Editora da Unicamp, tradução - Hygino H. Domingues) **848 p.** (1997).

[5] Ifrah, G., *História Universal dos Algarismos*, Rio de Janeiro-RJ(Brasil), (Nova Fronteira) **735 p.** (1997).

[6] Nogueira, J. E., *Curiosidades Numéricas*, Lisboa(Portugal), (Sociedade Portuguesa de Matemática)(2001).

[7] Oliveira, A. M. de; Silva, A., *Biblioteca da Matemática Moderna - tomo 1*, São Paulo(Brasil), (LISA - Livros Irradiantes S.A.) **391 p.**(1971).

[8] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C., *A matemática do ensino médio - volume 1*, Rio de Janeiro(Brasil), (SBM - Coleção do Professor de Matemática),**280 p.**(2012).

[9] Ávila, G., *Análise Matemática para Licenciatura*, São Paulo - SP(Brasil), (Editora Edgard Blücher Ltda.),**153 p.**(2012).

[10] Tamarozzi, A. C., *Identificando números irracionais através de polinômios*, Rio de Janeiro - RJ (Brasil), (Revista do Professor de Matemática nº 42 - SBM),**pp.16-17**(2000).

[11] Lima, E. L., *Meu professor de Matemática e outras histórias*, Rio de Janeiro - RJ (Brasil), (SBM - Coleção do Professor de Matemática),**p. 206**(1991).

[12] Maor, E., *e: A história de um número*, Rio de Janeiro - RJ (Brasil), (Editora Record, tradução - Jorge Calife),**p. 291**(2003).

[13] Santos, A. R., Bianchini, W., *Aprendendo cálculo com Maple: Cálculo de uma variável*, Rio de Janeiro - RJ (Brasil), (LTC - Livros técnicos e científicos S.A.),**p. 408**(2002).

[14] Bongiovanni, V., Watanabe, R., *Pi acaba?*, Rio de Janeiro - RJ (Brasil), (Revista do Professor de Matemática nº 19 - SBM),**pp.1-7**(2000).

[15] Gomes, C. A., *πre conosco*, Rio de Janeiro - RJ (Brasil), (Revista do Professor de Matemática nº 63 - SBM),**pp.19-21**(2007).

[16] Peixoto, M. M., *Geometria e aritmética - como Gauss calculou aproximações de π*, Rio de Janeiro - RJ (Brasil), (Revista do Professor de Matemática nº 69 - SBM),**pp.42-47**(2009).

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, _____/_____/____

____

Assinatura