

**UNESP**  
**Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá**

**Guaratinguetá**  
**2010**

JOÃO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS

SÓLITONS E CAOS EM TEORIA DE CAMPOS:  
UM ESTUDO

Dissertação apresentada à  
da Faculdade de Engenharia do  
Campus de Guaratinguetá,  
Universidade Estadual Paulista,  
como parte dos requisitos  
necessários à obtenção do  
Título de Mestre em Física  
na área de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá

2010

S237s Santos, João Rafael Lucio dos  
Sólitons e caos em teoria de campos: um estudo. / João Rafael Lucio dos Santos – Guaratinguetá : [s.n], 2010.  
86f : il.  
Bibliografia: f. 85-86

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2010.  
Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra  
Co-orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

1. Teoria de campos (Física) 2. Sólitons I. Título

CDU 530.145

*JOÃO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS*

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Marcelo Batista Hott  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*

Prof. Dr. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA  
Orientador / Unesp-Feg

Prof. Dr. JOSÉ ABDALLA HELAYÊL NETO  
CBPF/LAFEX

Prof. Dr. ELBERT EINSTEIN NEHRER MACAU  
INPE/CTA

*fevereiro 2010*

## DADOS CURRICULARES

JOÃO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS

NASCIMENTO	02.03.1985 - CAMPOS DO JORDÃO / SP
FILIAÇÃO	Donizeti João dos Santos Regina Aparecida Lucio dos Santos
2000/2003	Ensino Médio SENAC - Campos do Jordão
2003/2008	Curso de Graduação Unesp Universidade Estadual Júlio Mesquita Filho Campus de Guaratinguetá

*Dedico esta dissertação ao meu avô João Ferreira Lucio, por toda a sua luta e exemplo de vida, à minha mãe Regina A. Lucio, por toda a sua dedicação, amor e carinho. Dedico ainda, à Raphaela B. Ramalho, que me devolveu a sede pela vida e com quem desejo construir um futuro grandioso.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, em especial à minha mãe Regina A. Lucio e à minha irmã Camila Lucio dos Santos por todo o apoio, a força, as vitórias e superações que alcançamos ao longo de todos esses anos. Agradeço também ao meu avô João Ferreira Lucio, por ter estado sempre presente em minha vida até a sua partida. Agradeço ainda, à Ezio Colla pelo apoio, sua dedicação e empenho à minha família, além da amizade ao longo desses poucos mas importantes anos de convívio. Ao meu pai Donizeti João dos Santos, pela ajuda inestimável ao longo de meu mestrado e minha graduação. Aos grandes amigos que estiveram presentes em minha vida, em especial à Pedro Henrique por ter sido um irmão desde o início de nossa caminhada na física e à Elias, Leonardo e Thiago, que foram muito mais que colegas de “república”, pois formamos uma verdadeira família em todos esses anos de história na FEG.

Agradeço também à todos os professores da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá que participaram de minha formação desde minha graduação, em especial aos meus orientadores professor Alvaro de Souza Dutra e Othon Cabo Winter, por toda a ajuda, o conhecimento, a amizade, a paciência, dedicação e exemplo de vida pessoal e profissional. Agradeço à todos os funcionários da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, por seu trabalho imprescindível para a manutenção do campus e execução desta dissertação. Finalmente, agradeço à Raphaela por ter me encontrado, renovado minha vida, ser minha maior fonte de alegria e inspiração, enfim, ser a mulher mais especial que conheci.

Este trabalho contou com apoio da seguinte entidade:

CAPES

“O simples bater de asas de uma borboleta pode causar um tufão do outro lado do mundo.”

Teoria do Caos

SANTOS, J. R. L. **Sólitons e Caos em Teoria de Campos: Um Estudo** 2010. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2010.

## Resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal entender mais profundamente as mais variadas nuances do aparecimento de caos em sistemas de teoria de campos, além de um estudo sobre o comportamento das soluções solitônicas desses sistemas. Apresentamos um método, baseado na estrutura de mínimos de potenciais, a fim de obter informações concretas sobre o comportamento das soluções solitônicas destes potenciais. Verificamos ainda a existência de novas soluções topológicas para um modelo que é aplicado na descrição dos chamados twistons. Essas soluções possuem a particularidade de serem degeneradas, assim, para quebrar essa degenerescência, adicionamos ao potencial inicial um termo perturbativo. Determinamos também, novas soluções topológicas para uma lagrangiana contendo um campo escalar complexo, estudada por Trullinger e Subbaswamy em (Trullinger, S. E.; Subbaswamy, K. R. **Physical Review A** 19 (1979) 1340.) e por fim, aplicamos o método da seção de Poincaré neste modelo verificando suas regiões caóticas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sólitons, Teoria de Campos, Twistons e Caos.

SANTOS, J. R. L. **Solitons and Chaos in Field Theory: A Study** 2010. Dissertation (Master in Physics) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2010.

### Abstract

The main objective of this work is a deeper comprehension about the different kinds of the appearing of chaos in field theory's systems, besides the study about the behavior of these soliton solutions systems. We present a method, based on the structure of potential's minima, to get information about the behavior of the solitons solutions. We calculate new topological solutions for a model that was applied to the description of the so called twistons. These solutions are degenerated and in order to break this degeneracy, we added a perturbative term into the initial potential. We found new topological solutions for a specific Lagrangian that has a complex scalar field, studied by Trullinger and Subbaswamy in (Trullinger, S. E.; Subbaswamy, K. R. **Physical Review A** 19 (1979) 1340.), and applied the method of Poincaré section in this model checking its chaotic regions.

**KEY WORDS:** Solitons, Field Theory, Twistons and Chaos.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>Sólitons, Método BPS e Seção de Poincaré</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>Método para determinar o comportamento das soluções solitônicas</b>	<b>25</b>
3.1	Energia BPS . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Novos twistons topológicos no polietileno cristalino</b>	<b>38</b>
4.1	Modelo . . . . .	38
4.2	Análise dos mínimos do potencial e novas soluções topológicas . . . . .	40
4.3	Potencial com termo de perturbação de primeira ordem . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Campo escalar complexo com termo quádruplo de anisotropia</b>	<b>48</b>
5.1	Modelo e discussões . . . . .	48
5.2	Análise dos valores críticos de $c_1$ . . . . .	52
5.3	Comparação entre as soluções BPS e as soluções das equações diferenciais de segunda ordem . . . . .	53
5.4	Energia BPS para $\lambda = 3$ . . . . .	55
5.5	Estabilidade das soluções: caso $\lambda = 3$ . . . . .	56
5.6	Figuras da seção de Poincaré . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>83</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>85</b>

# Lista de Figuras

1	Exemplos de soluções para o caso $\lambda \neq 2\mu$ ( $\lambda = 4\mu$ ), em que $c_0$ tem valor crítico. O gráfico tracejado refere-se ao campo $\chi(x)$ e o outro ao campo $\phi(x)$ , ambos os campos são <i>kinks</i> . . . . .	27
2	Exemplos de soluções para o caso $\lambda \neq 2\mu$ ( $\lambda = 4\mu$ ), em que $c_0$ tem valor próximo do valor crítico (região não divergente). O gráfico tracejado refere-se ao campo $\chi(x)$ ( <i>lump</i> “alargado”) e o outro ao campo $\phi(x)$ ( <i>kink</i> duplo). . . . .	28
3	Exemplos de soluções para o caso $\lambda \neq 2\mu$ ( $\lambda = 4\mu$ ), em que $c_0$ é três ordens de grandeza menor do que o valor crítico (região não divergente). O gráfico tracejado refere-se ao campo $\chi(x)$ ( <i>lump</i> ) e o outro ao campo $\phi(x)$ ( <i>kink</i> ). . . . .	28
4	Exemplos de soluções para o caso $\lambda = 2\mu$ , em que $c_0$ é igual ao valor crítico. O gráfico tracejado refere-se ao campo $\chi(x)$ ( <i>kink</i> ) e o outro ao campo $\phi(x)$ ( <i>kink</i> ). . . . .	29
5	Hipérboles para $c_0$ contra $\chi(x)$ com $\lambda = \mu$ , os contornos foram obtidos pela equação de órbita (22). . . . .	29
6	Hipérboles para $c_0$ contra $\chi(x)$ com $\lambda = \mu$ , esmiuçamos aqui o contorno $\phi = 0$ , $\phi = 5$ , $\phi = 10$ e $\phi = 20$ , do interior do gráfico para o exterior. . . . .	30
7	Hipérboles para $c_0$ contra $\chi(x)$ com $\lambda = \mu$ , vemos aqui duas regiões proibidas para $c_0$ e $\chi$ . . . . .	30
8	Hipérboles para $c_0$ contra $\chi(x)$ com $\lambda = \mu$ , neste gráfico foram considerados apenas as hipérboles $\phi = 0$ e $\phi^2 = 1$ . . . . .	32
9	Hipérboles $c_1$ contra $\chi(x)$ para $\mu^2 = 4a_1$ e $N=2$ , contornos para $\phi^2 = 0$ e $\phi^2 = \pi^2$ , da parte interior do gráfico para a parte exterior. . . . .	35
10	Hipérboles $c_1$ contra $\chi(x)$ para $\mu^2 = 4a_1$ e $N=2$ , contornos para $\phi^2 = 0$ e $\phi^2 = \pi^2$ , da parte interior do gráfico para a parte exterior, destacamos a parte superior do gráfico mostrando que as variações máximas para o campo $\chi(x)$ vão de $\chi_v = 0$ até os valores de vácuos previstos pela equação (39). . . . .	35
11	Exemplos de soluções topológicas do potencial (34), em que $c_0$ é igual ao valor crítico. O gráfico tracejado refere-se ao campo $\chi(x)$ ( <i>kink</i> ) e o outro ao campo $\phi(x)$ ( <i>kink</i> ). . . . .	37
12	Potencial do modelo proposto em [11, 12]. . . . .	39
13	Novos twistons para o polietileno, o <i>antikink</i> na parte superior do gráfico refere-se ao campo $\phi(x)$ e aquele na parte inferior ao campo $\chi(x)$ . . . . .	41

14	Novo potencial $V(\phi, \chi)$ no plano $\phi = 0$ , vemos que não há mais uma linha de zeros para este valor do campo $\phi(x)$ . . . . .	43
15	Campo $\chi(x)$ para $\mu = (7.3/\pi^2)/3$ e $\lambda = 7.3/\pi^2$ , os vácuos desse <i>kink</i> estão em $\chi_v = 0$ e $\chi_v \approx 4.4428829$ . . . . .	45
16	Campo $\phi(x)$ para $\mu = (7.3/\pi^2)/3$ e $\lambda = 7.3/\pi^2$ , os vácuos encontram-se em $\phi_v = 0$ e $\phi_v = \pi$ , os valores de vácuo podem ser previstos minimizando o potencial. . . . .	47
17	Função perturbadora da energia ( $\Delta E = \epsilon f$ ), vemos que a função é integrável, o que nos permite obter a energia dada pela equação (111). . . . .	47
18	<i>Lump</i> para $\lambda = 3$ com $c_1 = -3$ . . . . .	54
19	<i>Kink</i> para $\lambda = 3$ com $c_1 = -2$ . . . . .	54
20	<i>Kink-duplo</i> para $\lambda = 3$ com $c_1 = -2.0001$ . . . . .	54
21	<i>Kink</i> para $\lambda = 3$ com $c_1 = -2$ . . . . .	54
22	<i>Lump</i> para $\lambda = 9/8$ com $c_1 = 1/2$ . . . . .	54
23	<i>Kink</i> para $\lambda = 9/8$ com $c_1 = 1$ . . . . .	54
24	<i>Kink-duplo</i> para $\lambda = 9/8$ com $c_1 = 0.99999$ . . . . .	54
25	<i>Kink</i> para $\lambda = 9/8$ com $c_1 = 1$ . . . . .	54
26	Exemplo de classes de soluções que podem ser obtidas via seção de Poincaré. A parte da figura na cor vermelha representa soluções caóticas, enquanto a parte em verde mostra as soluções periódicas e a solução em azul é um exemplo de solução solitônica. . . . .	62
27	Equipotenciais $V(\xi, \eta)$ para $\lambda = 1.2$ . . . . .	63
28	Equipotenciais $V(\xi, \eta)$ para $\lambda = 1.8$ . . . . .	63
29	Equipotenciais $V(\xi, \eta)$ para $\lambda = 2.3$ . . . . .	63
30	Equipotenciais $V(\xi, \eta)$ para $\lambda = 1.4$ . . . . .	63
31	Equipotenciais $V(\xi, \eta)$ para $\lambda = 2.0$ . . . . .	63
32	Equipotenciais $V(\xi, \eta)$ para $\lambda = 2.6$ . . . . .	63
33	Seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ e $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo. . . . .	64
34	Seção de Poincaré para $\lambda = 1.4$ e $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo. . . . .	64
35	Seção de Poincaré para $\lambda = 1.8$ e $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo. . . . .	65

36	Seção de Poincaré para $\lambda = 2.0$ e $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo. . . . .	65
37	Seção de Poincaré para $\lambda = 2.3$ e $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo. . . . .	66
38	Seção de Poincaré para $\lambda = 2.6$ e $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo. . . . .	66
39	Dependência de $\lambda$ com relação a $\xi(\rho)$ . Na região em branco, localizam-se as soluções oscilantes periódicas, a linha verde mostra os pontos de equilíbrio, a parte vermelha representa as soluções caóticas, em preto as divergentes, ja as linhas em amarelo são os vácuos das soluções solitônicas. . . . .	67
40	Corte no potencial $-V(\xi, \eta)$ , com $\lambda = 1.4$ e $C = 0.51$ . . . . .	68
41	Corte no potencial $-V(\xi, \eta)$ , com $\lambda = 1.4$ e $C = 0.49$ . Regiões proibidas em preto .	68
42	Corte no potencial $-V(\xi, \eta)$ , com $\lambda = 1.4$ e $C = 0.40$ . Regiões proibidas em preto .	68
43	Corte no potencial $-V(\xi, \eta)$ , com $\lambda = 1.4$ e $C = 1/2$ . Regiões proibidas em preto .	68
44	Corte no potencial $-V(\xi, \eta)$ , com $\lambda = 1.4$ e $C = 0.45$ . Regiões proibidas em preto .	68
45	Corte no potencial $-V(\xi, \eta)$ , com $\lambda = 1.4$ e $C = 0.30$ . Regiões proibidas em preto .	68
46	Condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré, com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ . . . . .	69
47	Condição de contorno localizada na região de estabilidade da seção de Poincaré (maior ilha de estabilidade), com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ . . . . .	69
48	Condição de contorno localizada no ponto de equilíbrio no centro das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré, com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ . . . . .	69
49	Condição de contorno para a qual obtemos uma solução solitônica do tipo <i>kink</i> da seção de Poincaré, com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ . . . . .	69
50	Comparação entre as soluções para a maior ilha de estabilidade (em azul) e para a região caótica (em vermelho). . . . .	69
51	Comparação entre as soluções para região caótica (em vermelho) e para a região de soluções divergentes (em preto). . . . .	69
52	Seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ e $C = 1/2$ , em detalhe. . . . .	69
53	Condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré, com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ . . . . .	71
54	Condição de contorno localizada no centro de uma das cinco ilhas pequenas da seção de Poincaré, com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ . . . . .	71

55	Condição de contorno localizada na região divergente da seção de Poincaré, com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ . . . . .	71
56	Condição de contorno localizada na região divergente da seção de Poincaré, com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ com valores baixos para $\xi_\rho$ e $\eta_\rho$ . . . . .	71
57	Condição de contorno para a qual obtemos uma solução solitônica do tipo <i>kink</i> da seção de Poincaré, com $\eta = 0$ e $\eta_\rho = 0$ . . . . .	71
58	Seção de Poincaré para $\lambda = 1.8$ e $C = 1/2$ , em detalhe. . . . .	71
59	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno do ponto de equilíbrio da seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ . . . . .	72
60	Oscilação do campo $\xi(\rho)$ no ponto de equilíbrio. . . . .	72
61	Oscilação do campo $\eta(\rho)$ no ponto de equilíbrio. . . . .	72
62	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ . . . . .	72
63	Oscilação do campo $\xi(\rho)$ em uma das ilhas de estabilidade. . . . .	72
64	Oscilação do campo $\eta(\rho)$ em uma das ilhas de estabilidade. . . . .	72
65	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ . . . . .	73
66	Oscilação do campo $\xi(\rho)$ em uma das ilhas de estabilidade. . . . .	73
67	Oscilação do campo $\eta(\rho)$ em uma das ilhas de estabilidade. . . . .	73
68	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ . . . . .	73
69	Oscilação do campo $\xi(\rho)$ em uma das ilhas de estabilidade. . . . .	73
70	Oscilação do campo $\eta(\rho)$ em uma das ilhas de estabilidade. . . . .	73
71	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ . . . . .	74
72	Oscilação do campo $\xi(\rho)$ em uma das ilhas de estabilidade. . . . .	74
73	Oscilação do campo $\eta(\rho)$ em uma das ilhas de estabilidade. . . . .	74
74	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno da região caótica da seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ . . . . .	74
75	Oscilação do campo $\xi(\rho)$ na região caótica. . . . .	74
76	Oscilação do campo $\eta(\rho)$ na região caótica. . . . .	74
77	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno da região divergente da seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ . . . . .	75

78	Comportamento do campo $\xi(\rho)$ na região divergente. . . . .	75
79	Comportamento do campo $\eta(\rho)$ na região divergente. . . . .	75
80	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno da região divergente da seção de Poincaré para $\lambda = 1.2$ . . . . .	75
81	Comportamento do campo $\xi(\rho)$ na região divergente. . . . .	75
82	Comportamento do campo $\eta(\rho)$ na região divergente. . . . .	75
83	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ condição de contorno na região caótica da seção de Poincaré desta página. Os campos ficam confinados pelo corte do potencial em $C = 0.33$ . . . . .	77
84	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré desta página. Os campos ficam confinados pelo corte do potencial em $C = 0.33$ . . . . .	77
85	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ condição de um dos pontos de equilíbrio da seção de Poincaré desta página. Os campos ficam confinados pelo corte do potencial em $C = 0.33$ . . . . .	77
86	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ condição de contorno na região caótica da seção de Poincaré abaixo. Os campos ficam confinados pelo corte do potencial em $C = 0.33$ . . . . .	77
87	Seção de Poincaré com $\lambda = 1.8$ e $C = 0.33$ . . . . .	77
88	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno na região caótica da seção de Poincaré desta página. . . . .	78
89	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno entre as regiões proibidas pelo corte do potencial com $\xi_\rho(0)$ e $\eta_\rho(0)$ pequenos. . . . .	78
90	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região externa daquelas proibidas pelo corte do potencial. . . . .	78
91	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região divergente da seção de Poincaré abaixo. . . . .	78
92	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré abaixo. . . . .	78
93	Seção de Poincaré com $\lambda = 1.2$ e $C = 0.46$ . . . . .	78
94	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré para $\lambda = 1.4$ com $C = 0.47$ . . . . .	81
95	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré para $\lambda = 1.4$ com $C = 0.46$ . . . . .	81
96	$\xi(\rho)$ contra $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré para $\lambda = 1.4$ com $C = 0.41$ . . . . .	81
97	Seção de Poincaré com $\lambda = 1.4$ e $C = 0.47$ . . . . .	81
98	Seção de Poincaré com $\lambda = 1.4$ e $C = 0.46$ . . . . .	81
99	Seção de Poincaré com $\lambda = 1.4$ e $C = 0.41$ . . . . .	81
100	Corte do potencial $-V(\xi, \eta)$ para $\lambda = 1.4$ e $C_0 = 5/12 + 1/1000$ . Observamos uma pequena abertura no corte que é suficiente para permitir soluções divergentes. . . . .	82

101	Corte do potencial $-V(\xi, \eta)$ para $\lambda = 1.4$ e $C_0 = 5/12 - 1/1000$ . Observamos que não há aberturas no corte, assim ocorrem quatro pontos de equilíbrio na seção de Poincaré. . . . .	82
102	Seção de Poincaré para $\lambda = 1.4$ e $C_0 = 5/12 + 1/1000$ . . . . .	82
103	Seção de Poincaré para $\lambda = 1.4$ e $C_0 = 5/12 - 1/1000$ . . . . .	82

# 1 Introdução

Em agosto de 1834, J. Scott Russell observou um fenômeno muito particular, que assim relatou em 1844 no 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science [1, 2]:

“Eu estava observando o movimento de um barco, que era puxado rapidamente ao longo de um canal estreito por um par de cavalos, quando o barco parou de repente, mas não a massa de água do canal que ele havia posto em movimento; esta acumulou-se ao redor da proa do barco num estado de violenta agitação e, em seguida, deixando-o repentinamente para trás, rolou para frente em grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, um monte de água arredondado, suave e bem definido que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Eu a segui a cavalo e a alcancei ainda rolando a uma velocidade de umas oito ou nove milhas por hora, preservando seu contorno original de uns trinta pés de comprimento por um pé a um pé e meio de altura. Sua altura diminuiu gradualmente e, depois de uma perseguição por uma ou duas milhas, eu a perdi nos meandros do canal.”

O relato de Russell é historicamente o primeiro contato com os chamados sólitons ou ondas solitárias. Os sólitons tratam-se de sistemas de grande importância na física contemporânea, pois suas aplicações vão além da área das ciências exatas, podendo ser encontrados, por exemplo, em modelamentos de sistemas biológicos. Os sólitons que fazem parte das discussões desta dissertação, têm como particularidade serem soluções não dissipativas dos sistemas estudados, ou seja, são soluções cuja densidade de energia é não dispersiva, implicando em modelos com energia finita [4, 5]. Essas características mostram a relevância em verificar se um determinado modelo possui ou não soluções solitônicas. Deste modo, ao longo dos anos os sólitons têm sido tema de diversos trabalhos em teoria de campos não-lineares, por exemplo, [3].

Os sólitons também podem ser definidos como uma classe particular de soluções topológicas de equações diferenciais não-lineares, que descrevem um determinado sistema. Essa definição possibilita a existência de um paralelo entre modelos estudados em teoria de campos e modelos caóticos vistos em sistemas dinâmicos. Um trabalho muito importante feito por Nikolaevskii e Schur, mostra que o caos está presente na dinâmica de campos espacialmente homogêneos [6]. Seguindo essa linha de pesquisa, um estudo interessante a respeito do comportamento dinâmico de um sistema de Chern-Simons-Higgs com e sem termo de Maxwell,

foi realizado por Bambah e outros [9]. Nesse artigo, os autores verificam que o modelo de Chern-Simons-Higgs puro é integrável e que a inclusão do termo de Maxwell faz com que o sistema se torne caótico. Além destes estudos, existe uma série de trabalhos baseados em conceitos de sólitons e caos, como, por exemplo, [7] e [8] nos quais processos de transições caóticas são influenciados pela existência de sólitons no sistema dinâmico considerado. Baseados nessas obras, tomamos como objetivo principal desta dissertação entender o aparecimento da dinâmica caótica em sistemas onde há ocorrência de sólitons em teoria clássica de campos, além de um estudo sobre o comportamento das soluções solitônicas destes sistemas.

Iniciamos nossas abordagens partindo do trabalho de Dutra [10], no qual foram apresentados diversos potenciais com dois campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$  interagentes (campos estáticos). Em suas análises, Dutra conjecturou o comportamento geral das soluções solitônicas desses potenciais, a partir das soluções analíticas, por ele obtidas. Assim, nos baseamos na estrutura de mínimos de cada potencial (vácuos dos campos) e suas respectivas equações de órbita, a fim de demonstrar analiticamente as conjecturas propostas por Dutra e ainda revelar novas informações sobre o comportamento das soluções solitônicas que podem ser determinadas para os potenciais em questão; realizamos ainda, uma aplicação deste procedimento para o estudo dos chamados twistons topológicos.

Em 1978, Mansfield e Boyd [13] postularam a existência de twistons (soluções topológicas tipo *kink*) nos cristais de polietileno (PE). Estas soluções caracterizam um giro de  $180^\circ$  que alonga e contrai diversos grupos de  $\text{CH}_2$  no polietileno cristalino, em um plano ortogonal à direção da corrente. As contrações são proporcionais à unidade de comprimento do  $\text{CH}_2$  ao longo da corrente cristalina. Os trabalhos apresentados em [11, 12, 14] mostram que os twistons podem ser descritos por soluções solitônicas e suas energias podem ser obtidas via método de BPS [15], como pode ser visto em [12]. Nos trabalhos anteriormente mencionados, foi utilizado um modelo cujo potencial era composto por dois campos escalares, assim um dos campos era responsável pelo movimento rotacional da cadeia enquanto o outro possibilitava a translação do polietileno cristalino. Este trabalho tem como objeto de estudo, mostrar que o modelo proposto por Bazeia e Ventura [11, 12] para descrever os twistons, possui uma estrutura de mínimos do potencial, a qual apresenta uma linha de zeros, além de pontos de mínimos isolados. Verificamos ainda, a existência de novas soluções topológicas que conectam o twiston de um dos zeros isolados com qualquer ponto da linha de zeros. Para tanto, mapeamos o modelo descrito em [11, 12] em um superpotencial generalizado, apresentado por Dutra em [10]. Assim, conseguimos obter uma classe infinita de soluções topológicas que apresentam a

mesma energia calculada em [12], o que implica em uma degenerescência do modelo. Contudo, esta degenerescência levanta uma dificuldade para a descrição dos twistons topológicos, pois a energia necessária para o twiston transladar uma unidade de comprimento de um dos átomos do polímero, é a mesma gasta para romper a cadeia cristalina. Diante desta dificuldade, propomos uma modificação no potencial original, adicionando a este uma pequena perturbação, de forma a quebrar a degenerescência e ainda obter soluções topológicas e energias compatíveis com aquelas observadas experimentalmente.

A última parte da dissertação, refere-se ao trabalho realizado por Trullinger e colaboradores em meados da década de setenta [18], no qual os autores determinam soluções solitônicas analíticas para uma lagrangiana contendo um campo escalar complexo. Entretanto, as soluções mencionadas em [18] fazem parte do conjunto de soluções das equações diferenciais de segunda ordem desse sistema, o que levou os autores a fazer algumas restrições para obter soluções solitônicas analíticas.

Em nosso trabalho, propomos a determinação das soluções analíticas desse modelo via método BPS [15], o que nos permitiu generalizar aquelas obtidas por Trullinger e Subbaswamy em [18]. Além disso, aplicamos o método da seção de Poincaré nas equações de segunda ordem do modelo descrito no referido trabalho e verificamos possíveis comportamentos caóticos deste sistema.

Nossa proposta foi investigar quais situações eram mais favoráveis ao aparecimento de soluções caóticas e observamos ainda, a coexistência de soluções caóticas e solitônicas. Verificamos em nossa análise, que conforme a variação da constante de integração do modelo estudado em [18], aproxima-se da condição na qual exista a solução solitônica, ocorrem modificações na estrutura do caos e das regiões de estabilidade das seções de Poincaré, ou seja, a presença de sólitons modifica o caos e as soluções oscilantes do modelo.

## 2 Sólitons, Método BPS e Seção de Poincaré

Neste capítulo introduziremos brevemente cada um dos três temas abordados em seu título, uma vez que, eles serão fundamentais para a compressão do restante do conteúdo desta dissertação. Como mencionado previamente, a definição e a aplicação dos sólítos estende-se muito além do sólíton hidrodinâmico observado por Scott Russell [1, 2]. Em teoria de campos, particularmente, é possível defini-los como sendo o conjunto de soluções que obedecem à uma determinada métrica, por exemplo, a de Minkowski, e terão energia finita com uma densidade de energia localizada e não-dispersiva, além disso, estas soluções viajarão mantendo sua forma original sem distorção e com velocidade uniforme. De acordo com Rajaraman [4], as soluções solitônicas são interpretadas como pacotes de onda não-dispersivos movendo-se uniformemente, interpretação esta que é contextualizada como uma das razões dos sólítos serem aplicados, por exemplo, no estudo de partículas, se as considerarmos como sendo soluções de equações diferenciais não-lineares.

O tipo mais simples de sólíton é conhecido como “*kink*” em uma dimensão espacial ou paredes de domínio em duas ou mais dimensões. Apesar deles serem pulsos de energia como os sólítos de Scott Russell [1, 2], também possuem uma base topológica. Isto implica em uma série de diferenças entre sólítos hidrodinâmicos e sólítos topológicos, pois os primeiros não podem permanecer estáticos, além de terem que propagar com uma certa velocidade, em contrapartida, paredes de domínio podem propagar com qualquer velocidade. Outro ponto relevante, é que sólítos como estes encontrados na hidrodinâmica, preservam sua identidade depois de espalhamento, enquanto *kinks* e paredes de domínio não necessariamente possuem esta propriedade, podendo inclusive, dispersar suas energias em colisões e até mesmo se aniquilarem.

Os *kinks* clássicos são casos especiais de soluções não-dissipativas, para as quais a densidade de energia em um dado ponto não desaparece quando tomamos limites de tempo muito grandes. Os *kinks* também são caracterizados por possuírem uma carga topológica. Assim como a carga elétrica, a topológica é conservada e esta conservação permite o estudo de importantes propriedades quânticas e da estabilidade dos modelos [5]. Em termos práticos, os *kinks* são soluções que conectam os mínimos globais dos potenciais de cada um dos modelos problematizados. Além dos *kinks*, podemos encontrar soluções solitônicas que minimizam o potencial, associadas a um possível mínimo local, tais soluções são chamadas de *lumps*.

A maneira convencional de se obter soluções solitônicas é resolver as equações de

movimento provenientes da densidade de lagrangiana de um determinado modelo. Existem diversas técnicas para determinar essas soluções. Uma das mais usuais, simples e importantes é aquela em que se utiliza um método criado por Bogomol'nyi, Prasad e Somerfield [15]. Este método é conhecido como BPS e consiste em obter uma equação de primeira ordem, manipulando a energia total de forma a completar um quadrado perfeito, ou seja, dada a densidade de energia

$$H = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi), \quad (1)$$

para um campo escalar unidimensional  $\phi(x)$ , temos que a energia total deste modelo é

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right] dx. \quad (2)$$

Agora, podemos completar um quadrado perfeito nessa última equação, ficando com

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \phi' \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm \sqrt{2V} \phi' \right] dx. \quad (3)$$

Se estabelecermos que a condição para minimizarmos a energia do potencial é tal que

$$\phi' = \pm \sqrt{2V}, \quad (4)$$

a energia total passa a ser simplesmente a integral

$$E = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2V} \phi' dx. \quad (5)$$

Considerando ainda que o potencial  $V(\phi)$  pode ser escrito na forma

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (6)$$

com  $W_\phi$  sendo a derivada em relação ao campo  $\phi(x)$  de uma função  $W(\phi)$ , que é denominada superpotencial. Logo, o valor absoluto de (5) passa a ser

$$|E| = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\phi \phi' dx = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|. \quad (7)$$

Nesta dissertação, esse formalismo foi aplicado diversas vezes, a uma densidade de energia que envolve dois campos unidimensionais, desta forma consideramos agora que

$$H = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi). \quad (8)$$

Desenvolvendo o método BPS, como visto anteriormente para um modelo que contém somente um campo, temos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi) \right] dx. \quad (9)$$

Se nosso potencial  $V(\phi, \chi)$ , for definido como

$$V(\phi, \chi) \equiv \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2}, \quad (10)$$

com  $W_i \equiv \partial W / \partial i$  (esta notação foi utilizada constantemente no decorrer da dissertação). Logo energia total passa a ser

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2} \right] dx, \quad (11)$$

completando um quadrado perfeito para cada um dos campos temos,

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (\phi' \mp W_\phi)^2 + (\chi' \mp W_\chi)^2 \pm 2W_\phi \phi' \pm 2W_\chi \chi' \right] dx. \quad (12)$$

Vê-se que as equações diferenciais que minimizam a energia são dadas por

$$\phi' = \pm W_\phi \quad (13)$$

e

$$\chi' = \pm W_\chi, \quad (14)$$

verificamos que a energia total, em módulo, é simplesmente a integral

$$|E| = \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi' W_\phi + \chi' W_\chi) dx, \quad (15)$$

ou seja,

$$|E| = |W[\phi(+\infty), \chi(+\infty)] - W[\phi(-\infty), \chi(-\infty)]|. \quad (16)$$

Além disso, as equações (13) e (14), podem ser reescritas de modo a obtermos a equação diferencial

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}, \quad (17)$$

que relaciona os campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$  e é conhecida como equação de órbita. Este resultado é de extrema importância para resolvermos as equações de primeira ordem obtidas via método BPS, pois a solução da equação de órbita nos permite, quando possível, desacoplar as equações (13) e (14), o que facilita a determinação de soluções analíticas, como pode ser visto nos diversos modelos estudados em [10].

Finalizamos este capítulo definindo brevemente as chamadas superfícies da seção de Poincaré. Ao considerarmos um problema de quatro variáveis a serem determinadas, por exemplo,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi_\rho$  e  $\eta_\rho$ , estamos tratando de um sistema localizado em um espaço de fase de quatro dimensões. Se fixamos uma constante que dependa das variáveis citadas anteriormente, podemos determinar uma das quatro variáveis iniciais em termos das outras três, ou seja, esta constante do sistema implica na existência de uma superfície de três dimensões neste espaço quadri-dimensional. Uma possível escolha para essa superfície é tomar, por exemplo, o campo  $\eta = 0$ . Assim, são computados todos aqueles valores, obtidos via integração numérica para as variáveis  $\eta_\rho$ ,  $\xi$  e  $\xi_\rho$ , que cruzam o plano  $\eta = 0$ . Este é o método que caracteriza a chamada seção de Poincaré ou mapa de Poincaré, que é utilizado para mapear regiões regulares e caóticas em um sistema dinâmico [20, 21].

Podemos escolher diferentes superfícies alterando o valor da constante do sistema. O comportamento dos pontos gerados nos permite verificar se uma determinada região é caótica ou não, isto é, se os pontos formam regiões bem definidas, que são chamadas de ilhas, estas regiões são aquelas onde não haverá caos. Porém, se os pontos ficam espalhados de forma desordenada sobre a superfície, estas são as regiões caóticas.

### 3 Método para determinar o comportamento das soluções solitônicas

Certos potenciais, compostos por dois campos acoplados, são de grande importância para a teoria clássica de campos, pois algumas de suas soluções podem descrever diversos tipos de sólitons. Porém, devido à complexidade das equações diferenciais relacionadas a estes potenciais, grande parte das soluções topológicas dos campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$  não podem ser obtidas analiticamente e nem mesmo numericamente. Deste modo, é importante buscar novos métodos que revelem o comportamento geral desses sólitons. Neste intuito, partimos do potencial

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2, \quad (18)$$

com  $W_j \equiv \partial W/\partial j$ .

O primeiro potencial abordado por Dutra em [10], foi

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} [\lambda(\phi^2 - 1) + \mu\chi^2]^2 + \frac{1}{2} [2\mu\phi\chi]^2. \quad (19)$$

logo

$$W_\phi = \lambda(\phi^2 - 1) + \mu\chi^2 \quad (20)$$

e

$$W_\chi = 2\mu\phi\chi. \quad (21)$$

A equação de órbita [10] para esse potencial é dada por,

$$\phi^2 - 1 = c_0\chi^{\lambda/\mu} - \frac{\mu}{\lambda - 2\mu}\chi^2, \quad (22)$$

para  $\lambda \neq 2\mu$  e  $\lambda/\mu > 0$ , temos ainda que

$$\phi^2 - 1 = \chi^2 [\ell n(\chi) + c_0], \quad (23)$$

para  $\lambda = 2\mu$ . Estas equações de órbita, resultam no desacoplamento do sistema de equações diferenciais, geradas pelo método BPS, para os potenciais que são escritos como em (18).

Verificamos que nas configurações de vácuo, esse potencial tem seus valores mínimos dados por  $V(\phi, \chi) = 0$ , implicando que,

$$W_\phi = W_\chi = 0. \quad (24)$$

Deste modo, temos

$$\lambda(\phi_v^2 - 1) + \mu\chi_v^2 = 0, \quad (25)$$

e

$$2\mu\phi_v\chi_v = 0. \quad (26)$$

onde o subscrito “ $v$ ” significa valor de vácuo do campo. A equação (26) indica que, para  $\mu \neq 0$  ou  $\phi_v = 0$  ou  $\chi_v = 0$ . Assim, considerando  $\phi_v = 0$  e utilizando a equação (25), verificamos que o valor de vácuo do campo  $\chi(x)$  correspondente é,

$$\chi_v = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} \quad (27)$$

para  $\lambda/\mu \geq 0$ . Assim  $(0, +\sqrt{\lambda/\mu})$  e  $(0, -\sqrt{\lambda/\mu})$  são mínimos do potencial (19).

Podemos ainda, substituir  $\phi_v = 0$  na equação de órbita (22), obtendo assim, que a constante  $c_0$  pode ser determinada segundo

$$c_0(\lambda/\mu) = \pm \left[ \frac{\mu}{\lambda - 2\mu} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) - 1 \right] \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{-\lambda/2\mu} \quad (28)$$

Agora, reescrevendo  $\lambda$  e  $\mu$  como

$$\lambda = k\mu \quad (29)$$

(28) fica escrita como

$$c_0 = \pm \left[ \frac{k}{k-2} - 1 \right] k^{-k/2}. \quad (30)$$

As soluções analíticas de [10] foram calculadas para  $\lambda = \mu$  e também para  $\lambda = 4\mu$ , ou seja, para  $k = 1$  e  $k = 4$ . Substituindo esses valores de  $k$  na última equação, chegamos a  $c_0 = \mp 2$  e  $c_0 = \pm 1/16$ . Destes quatro valores de  $c_0$ , verificamos que  $c_0 = -2$  e  $c_0 = +1/16$  são mencionados por Dutra no trabalho previamente citado, como sendo os valores críticos da constante  $c_0$  para as soluções analíticas por ele calculadas. Estes valores críticos, são assim denominados, por modificarem as soluções solitônicas obtidas para o potencial  $V(\phi, \chi)$ , de forma que, para valores de  $c_0$  menores do que seu valor crítico  $\chi(x)$  possui soluções do tipo *lump*, enquanto as soluções do campo  $\phi(x)$  serão do tipo *kink*. Para valores de  $c_0$  maiores do que o valor crítico, ambos os campos divergem. Já para  $c_0$  crítico, a condição de solução crítica estabelece que os campos são sólitons do tipo *kink* (Figura 1).

Outras soluções importantes para esses dois campos, aparecem quando  $c_0$  está próximo do valor crítico por valores menores, pois nesta situação há a ocorrência dos chamados *kinks* duplos para o campo  $\phi(x)$  e um *lump* “alargado” para o campo  $\chi(x)$ . Considerando estas

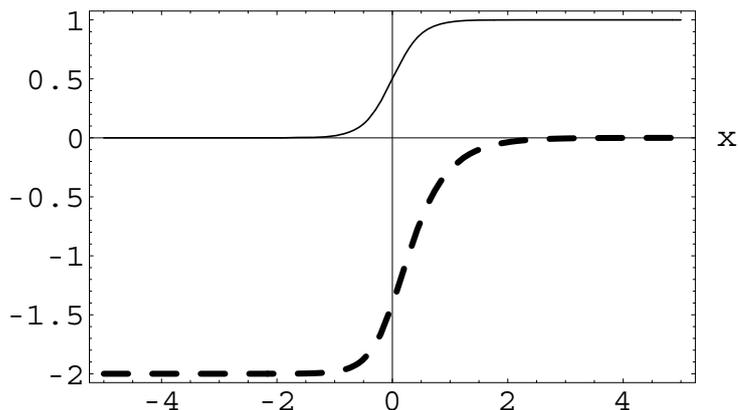


Figura 1: Exemplos de soluções para o caso  $\lambda \neq 2\mu$  ( $\lambda = 4\mu$ ), em que  $c_0$  tem valor crítico. O gráfico tracejado refere-se ao campo  $\chi(x)$  e o outro ao campo  $\phi(x)$ , ambos os campos são *kinks*.

observações do comportamento apresentado pelas soluções topológicas analíticas com respeito a variação da constante  $c_0$  inferimos que, ao eliminarmos o sinal negativo da equação (30) estaremos considerando somente as soluções de interesse físico, ou seja, soluções que não são divergentes. Desta forma os valores críticos da constante  $c_0$  são

$$c_0 = \left[ \frac{k}{k-2} - 1 \right] k^{-k/2}. \quad (31)$$

Além disso, vemos que para cada valor de  $k$ , inclusive para os quais não se pode obter soluções analíticas, existirá um único valor crítico de  $c_0$  e este valor crítico, fará com que suas soluções correspondentes tenham o mesmo comportamento das soluções analíticas mencionadas. Outra implicação desta abordagem, é que um dos vácuos do campo  $\chi(x)$ , para esse potencial, dependerá exclusivamente do valor da constante  $k$ , sendo que  $k$  deve ser inteiro e positivo a exceção de  $k = 1$ . Assim, vemos que existe um único conjunto de soluções solitônicas para cada valor de  $k$ .

Os outros vácuos dos *kinks* dos campos  $\chi(x)$  e  $\phi(x)$  podem ser calculados tomando  $\chi_v = 0$  e a equação (25), nos informando que  $\phi_v = \pm 1$ . Como foi discutido anteriormente, para  $c_0$  menor do que o valor crítico, a solução do campo  $\chi(x)$  é do tipo *lump* (ver Figuras 2 e 3). Nossa análise dos mínimos do potencial, mostra que nessa situação,  $\chi_v = 0$ ,  $\phi_v = -1$  e  $\phi_v = +1$ , ou seja, confirmando que o campo  $\phi(x)$  será um *kink*.

Procedendo de forma semelhante para  $\lambda = 2\mu$ , vemos que o valor crítico de  $c_0$  será

$$c_0 = -\ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{2}. \quad (32)$$

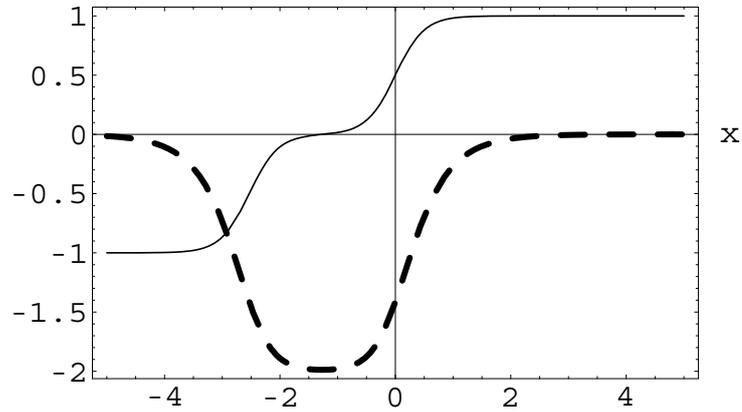


Figura 2: Exemplos de soluções para o caso  $\lambda \neq 2\mu$  ( $\lambda = 4\mu$ ), em que  $c_0$  tem valor próximo do valor crítico (região não divergente). O gráfico tracejado refere-se ao campo  $\chi(x)$  (*lump* “alargado”) e o outro ao campo  $\phi(x)$  (*kink* duplo).

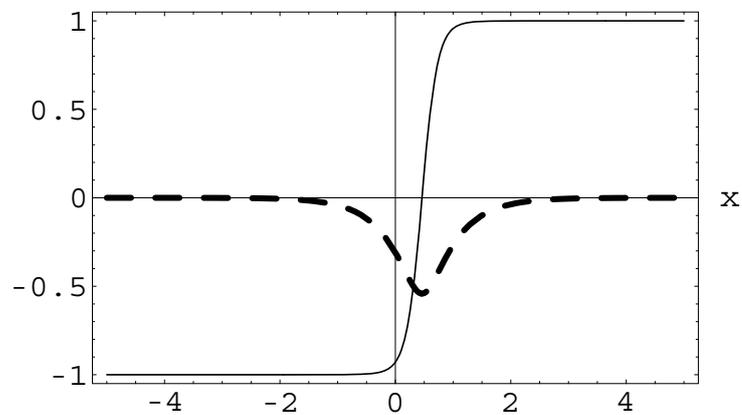


Figura 3: Exemplos de soluções para o caso  $\lambda \neq 2\mu$  ( $\lambda = 4\mu$ ), em que  $c_0$  é três ordens de grandeza menor do que o valor crítico (região não divergente). O gráfico tracejado refere-se ao campo  $\chi(x)$  (*lump*) e o outro ao campo  $\phi(x)$  (*kink*).

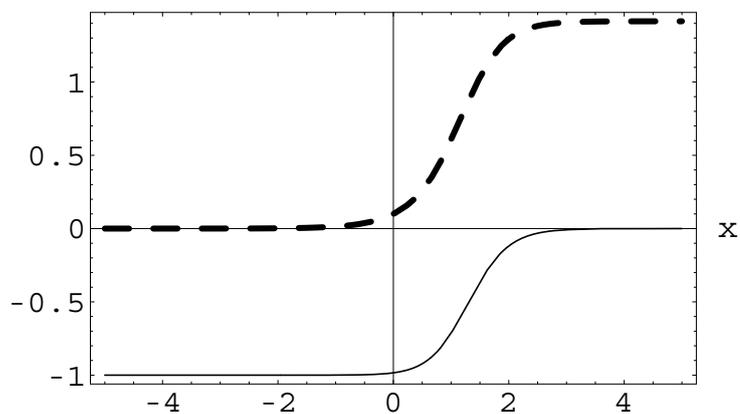


Figura 4: Exemplos de soluções para o caso  $\lambda = 2\mu$ , em que  $c_0$  é igual ao valor crítico. O gráfico tracejado refere-se ao campo  $\chi(x)$  (*kink*) e o outro ao campo  $\phi(x)$  (*kink*).

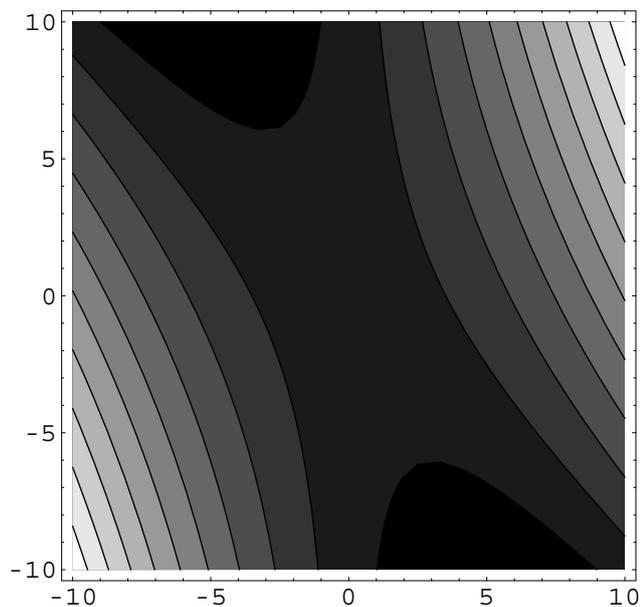


Figura 5: Hipérboles para  $c_0$  contra  $\chi(x)$  com  $\lambda = \mu$ , os contornos foram obtidos pela equação de órbita (22).

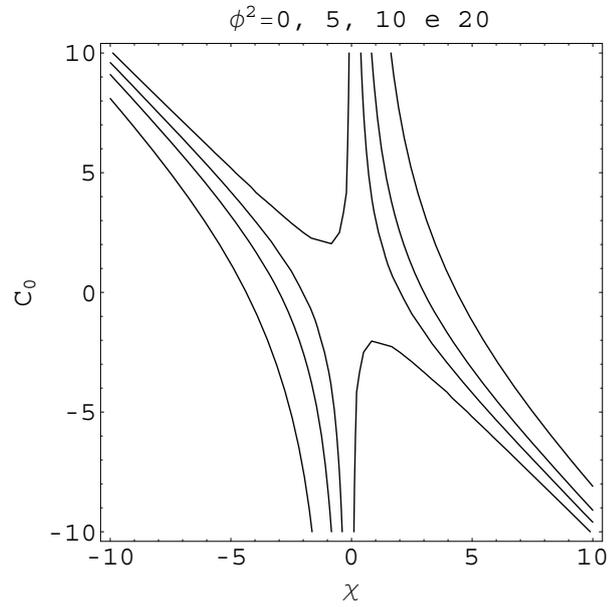


Figura 6: Hipérboles para  $c_0$  contra  $\chi(x)$  com  $\lambda = \mu$ , esmiuçamos aqui o contorno  $\phi = 0$ ,  $\phi = 5$ ,  $\phi = 10$  e  $\phi = 20$ , do interior do gráfico para o exterior.

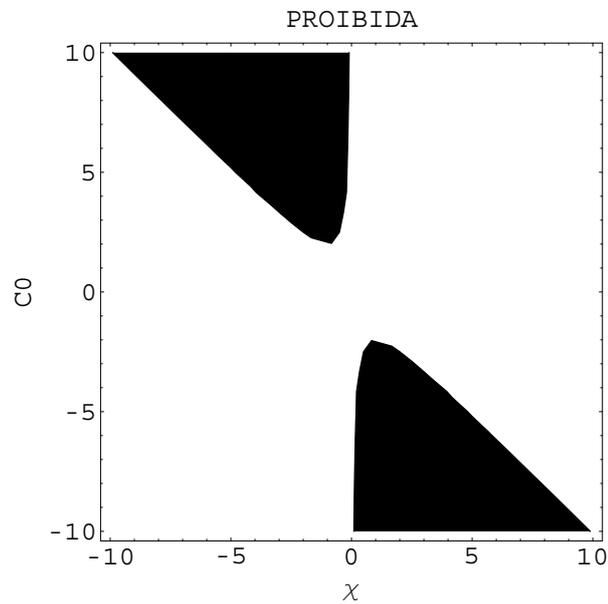


Figura 7: Hipérboles para  $c_0$  contra  $\chi(x)$  com  $\lambda = \mu$ , vemos aqui duas regiões proibidas para  $c_0$  e  $\chi$ .

As soluções clássicas dos campos para este caso obedecem o mesmo comportamento daquelas estudadas anteriormente, quando  $\lambda \neq 2\mu$  (ver Figura 4). Podemos fazer uma outra abordagem desse potencial, por meio das Figuras 5, 6, 7 e 8, as quais foram geradas para exemplificar o caso em que  $\lambda = \mu$ . Deste modo, vemos que a equação de órbita pode ser interpretada também como a equação de uma hipérbole. Ao verificar os contornos desta equação, constatamos que existe uma região na qual não podemos obter os valores de  $c_0$  e  $\chi(x)$ , como pode ser observado na Figura 7.

Outra característica importante dessa abordagem é que, levando em conta os contornos referentes aos valores de vácuo do campo  $\phi(x)$ , ou seja,  $\phi_v = 0$  e  $\phi_v = \pm 1$ , e ainda, considerando somente a parte inferior da Figura 8, que como visto anteriormente, é a região onde não há soluções divergentes, concluímos que a variação máxima do campo  $\chi(x)$ , quando  $\phi(x)$  varia de  $\phi = 0$  até  $\phi^2 = 1$ , é  $\chi(x)$  indo de  $\chi_v = 0$  até  $\chi_v = 1$ , para o qual  $c_0 = -2$ , que segundo nossa abordagem anterior é exatamente o valor crítico de  $c_0$ , caracterizando soluções do tipo *kink* para os dois campos. Além disso, para valores de  $c_0$  diferentes do valor crítico, a variação do campo  $\chi(x)$  é a altura máxima (em módulo), das soluções do tipo *lump* que podem ser determinadas. Essa altura máxima (em módulo) também pode ser calculada analiticamente, pois ela corresponde ao valor de  $\chi(x)$  quando o campo  $\phi = 0$  e os vácuos de  $\phi(x)$  são  $\phi_v = \pm 1$  como na Figura 3. Assim, considerando a equação de órbita desse modelo e  $\lambda = \mu$ , temos

$$|\chi_-| = \left| \frac{1}{2} \left[ -c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4} \right] \right|. \quad (33)$$

As soluções positivas, da última equação, foram eliminadas porque seus valores estão na região proibida da Figura 8.

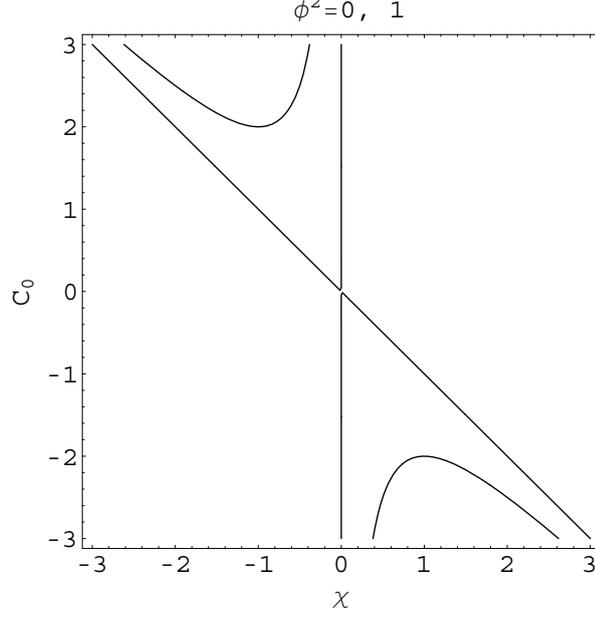


Figura 8: Hipérboles para  $c_0$  contra  $\chi(x)$  com  $\lambda = \mu$ , neste gráfico foram considerados apenas as hipérboles  $\phi = 0$  e  $\phi^2 = 1$ .

Para constatar outras previsões desse método, analisamos um potencial mais geral, que também foi proposto no trabalho [10], dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{dG(\phi)}{d\phi} + \frac{\mu}{2} N \phi^{N-1} \chi^2 \right]^2 + \frac{1}{2} [\mu \phi^N \chi]^2 \quad (34)$$

com

$$G(\phi) = \frac{2\phi^N}{\mu} \left[ \frac{a_0}{N} + \frac{a_1}{N+2} \phi^2 \right]. \quad (35)$$

sendo  $a_0$  e  $a_1$  constantes. O primeiro potencial estudado pode ser obtido deste potencial geral quando  $N = 1$ ,  $a_0 = -a_1$ ,  $\lambda = -2a_0/\mu$  e  $\mu = 2\bar{\mu}$ . Procedendo como na abordagem anterior verifica-se que os mínimos do potencial (34) ocorrem em valores que satisfazem

$$\frac{dG(\phi)}{d\phi} + \frac{\mu}{2} N \phi^{N-1} \chi^2 = 0 \quad (36)$$

e

$$\mu \phi^N \chi = 0. \quad (37)$$

A equação de órbita determinada a partir desse potencial é

$$\phi^2 = -\frac{a_0}{a_1} + \frac{N\mu^2\chi^2}{2(\mu^2 - 2a_1)} + c_1\chi^{4a_1/\mu^2}. \quad (38)$$

Mais uma vez, consideramos  $\mu \neq 0$ . Assim, segundo (37)  $\phi_v = 0$  ou  $\chi_v = 0$ . Porém, com  $N \neq 1$  e  $\phi_v = 0$ , a equação (36) é identicamente nula, enquanto (38) conduz a

$$c_1 = \frac{1}{\chi_v^{4a_1/\mu^2}} \left[ \frac{a_0}{a_1} - \frac{N\mu^2\chi_v^2}{2(\mu^2 - 2a_1)} \right], \quad (39)$$

da qual vemos que os valores de  $c_1$  são dados em função dos vácuos do campo  $\chi(x)$ . Em outras palavras, para uma relação entre as constantes advindas do potencial (anteriormente entre  $\lambda$  e  $\mu$  vide (29), agora entre  $\mu$ ,  $a_0$  e  $a_1$ ), não haverá um valor crítico de  $c_1$  como aqueles encontrados para  $c_0$ , o que implica em uma linha de vácuos para o campo  $\chi(x)$  dependendo do valor da constante  $c_1$ . O outro valor do vácuo do campo  $\chi(x)$  é  $\chi_v = 0$ . Substituindo este valor de vácuo na equação (36), ficamos com

$$\frac{dG(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (40)$$

ou ainda,

$$G(\phi) = C \quad (41)$$

onde  $C = cte$ . Para determinar o valor desta constante devemos, primeiramente, substituir  $\chi_v = 0$  na equação de órbita (38), o que nos informa

$$\phi_v = \pm \sqrt{-\frac{a_0}{a_1}}. \quad (42)$$

Munidos deste resultado e das equações (41) e (35), determinamos que a constante  $C$  deve ser

$$C_{\pm} = \frac{(\pm 1)^N 2a_0}{\mu} \left( -\frac{a_0}{a_1} \right)^{N/2} \left[ \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} \right], \quad (43)$$

sendo que, o sinal de  $\pm$  depende do valor de  $\phi_v$  que será considerado. Uma maneira alternativa de verificar a existência de *kinks*, cujos vácuos estão em  $\phi_v = \pi$  e  $\phi_v = -\pi$ , e *lumps* para o campo  $\chi(x)$  com  $\chi_v = 0$ , ao menos para um caso particular no qual  $\mu^2 = 4a_1$ ,  $-a_0/a_1 = \pi^2$  e  $N = 2$  no potencial (34), é reproduzir os gráficos de contorno da equação de órbita deste potencial. Assim, analogamente ao caso do primeiro potencial, geramos as Figuras 9 e 10. Nestas, vemos a existência de um valor máximo da constante  $c_1$  para o qual é possível obter soluções topológicas, e ainda se supusermos a existência de uma solução do tipo *kink* para o campo  $\phi(x)$  com vácuos em  $\phi_v = \pm\pi$ , e repetirmos a discussão do potencial anterior, na qual a altura máxima (em módulo), de um suposto *lump* para o campo  $\chi(x)$  pode ser encontrada substituindo  $\phi = 0$  na equação de órbita que relaciona esses campos, temos que esse valor será obtido analiticamente por

$$|\chi_{\pm}| = \left| \frac{1}{4} \left[ -c_1 \pm \sqrt{(c_1^2 - 8\pi^2)} \right] \right|, \quad (44)$$

na qual, podemos desprezar as soluções negativas, uma vez que estas fazem parte da região proibida das Figuras 9 e 10 (este comportamento pode ser observado substituindo um valor de  $c_1$  nesta equação e efetuando o cálculo algébrico). Porém, as soluções positivas dessa última equação são exatamente os valores dos vácuos obtidos escolhendo  $c_1$  em (39), que caracterizam soluções do tipo *kink* para o campo  $\chi(x)$  e impossibilitam a existência de *kinks* para o campo  $\phi(x)$  com vácuos em  $\phi_v = \pm\pi$ , nessas configurações.

Podemos ainda levantar a questão da existência de *lumps* para o campo  $\phi(x)$ , porém, como anteriormente, para que estes *lumps* pudessem existir teríamos que considerar  $\phi_v = 0$  e uma solução do tipo *kink* para o campo  $\chi(x)$ , uma vez que, como vimos anteriormente no caso particular discutido, não há soluções tipo *lump* para este último campo. Contudo, segundo a equação (44), a única possibilidade de existirem dois valores de vácuos iguais em módulo para  $\chi(x)$  é quando  $c_1^2 = 8\pi^2$ , mas esse valor de  $c_1$  refere-se a configuração em que ambas as soluções são *kinks*, como visto nas análises do primeiro potencial para o caso em que  $c_0 = -2$  na Figura 8. Agora, se os valores de vácuo de  $\chi(x)$  não forem iguais em módulo, pode-se determinar que aqueles provenientes das soluções negativas de (44) fazem parte da região proibida das Figuras 9 e 10. Assim, para essa configuração não há *lumps* para o campo  $\phi(x)$  com  $\phi_v = 0$ . A mesma análise feita para este potencial, é válida para

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left[ G_\phi + \frac{\mu N}{M} \phi^{N-1} \chi^M \right]^2 + \frac{1}{2} [\mu \phi^N \chi^{M-1}]^2, \quad (45)$$

que é o último potencial abordado em [10], cuja equação de órbita é

$$\phi^2 + \frac{a_0}{a_1} = \frac{N}{4} \chi^2 + e^{-a_1/(\mu\chi^2)} \left[ c_1 + \frac{Na_1}{4\mu} E_i \left( \frac{a_1}{\mu\chi^2} \right) \right] \quad (46)$$

com  $a_1 > 0$  e

$$E_i(z) = - \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (47)$$

pelo qual vemos que os valores de vácuo para os campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$  serão obtidos segundo as equações

$$\phi_v = \pm \sqrt{-\frac{a_0}{a_1}}$$

e

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{N}{4} \chi_v^2 + e^{-a_1/(\mu\chi_v^2)} \left[ c_1 + \frac{Na_1}{4\mu} E_i \left( \frac{a_1}{\mu\chi_v^2} \right) \right]. \quad (48)$$

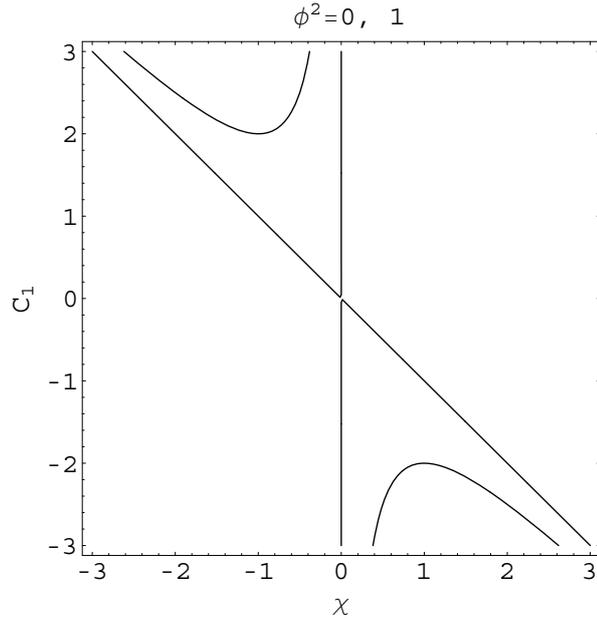


Figura 9: Hipérboles  $c_1$  contra  $\chi(x)$  para  $\mu^2 = 4a_1$  e  $N=2$ , contornos para  $\phi^2 = 0$  e  $\phi^2 = \pi^2$ , da parte interior do gráfico para a parte exterior.

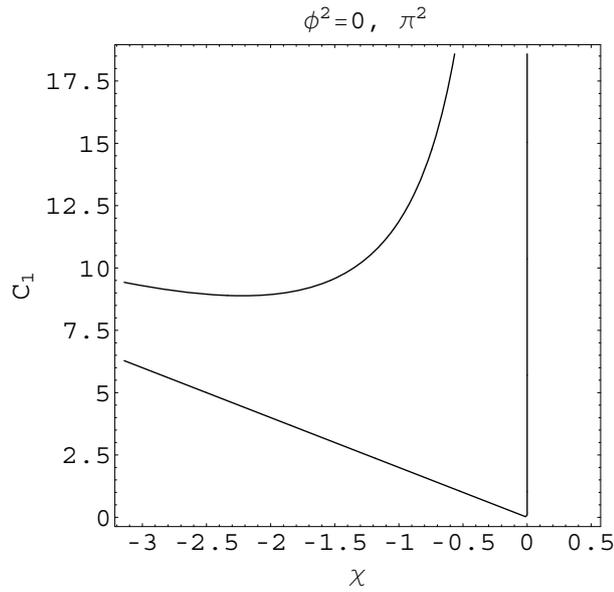


Figura 10: Hipérboles  $c_1$  contra  $\chi(x)$  para  $\mu^2 = 4a_1$  e  $N=2$ , contornos para  $\phi^2 = 0$  e  $\phi^2 = \pi^2$ , da parte interior do gráfico para a parte exterior, destacamos a parte superior do gráfico mostrando que as variações máximas para o campo  $\chi(x)$  vão de  $\chi_v = 0$  até os valores de vácuos previstos pela equação (39).

### 3.1 Energia BPS

As discussões anteriores sobre como determinar os mínimos dos potenciais em questão e ainda, utilizar esses mínimos nas equações de órbita para prever o comportamento geral das soluções topológicas, nos permite calcular as energias BPS de cada tipo de solução, para os três potenciais abordados, sem resolver nenhuma equação diferencial. Assim, voltando ao primeiro potencial discutido (19), podemos escrever, a partir dele, o superpotencial  $W(\phi, \chi)$  como

$$W(\phi, \chi) = -\lambda\phi + \frac{\lambda}{3}\phi^3 + \mu\phi\chi^2. \quad (49)$$

Como a energia BPS é dada por

$$E_{BPS} = |W_{+\infty}(\phi_v, \chi_v) - W_{-\infty}(\phi_v, \chi_v)| \quad (50)$$

temos que, substituindo os vácuos da solução dados pelas Figuras 2 e 3 em (49), a energia BPS desta configuração é tal que

$$E_{BPS} = \frac{4|\lambda|}{3} = \frac{4|k\mu|}{3}. \quad (51)$$

Já para as soluções críticas, como aquelas das Figuras 1 e 4, determinamos que

$$E_{BPS} = \frac{2|\lambda|}{3} = \frac{2|k\mu|}{3}. \quad (52)$$

Finalmente, podemos determinar a energia BPS para os potenciais dados pelas equações (34) e (45), cujos superpotenciais são respectivamente

$$W(\phi, \chi) = \frac{2}{\mu}\phi^N \left[ \frac{a_0}{N} + \frac{a_1}{N+2}\phi^2 \right] + \frac{\mu}{2}\phi^N \chi^2 \quad (53)$$

$$W(\phi, \chi) = \frac{2}{\mu}\phi^N \left[ \frac{a_0}{N} + \frac{a_1}{N+2}\phi^2 \right] + \frac{\mu}{M}\phi^N \chi^M. \quad (54)$$

Substituindo os vácuos dos campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$  (vide equação (42)), semelhantes àqueles da Figura 11, nestes superpotenciais, encontramos que os dois casos possuirão a mesma energia BPS, que é dada por

$$E_{BPS} = 2 \left| \frac{a_0}{\mu} \left( -\frac{a_0}{a_1} \right)^{N/2} \left[ \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} \right] \right|. \quad (55)$$

Este resultado revela que a energia BPS destes potenciais é degenerada, pois uma vez fixadas as constantes  $\mu$ ,  $a_0$ ,  $a_1$  e  $N$ , todas as soluções topológicas possuirão a mesma energia.

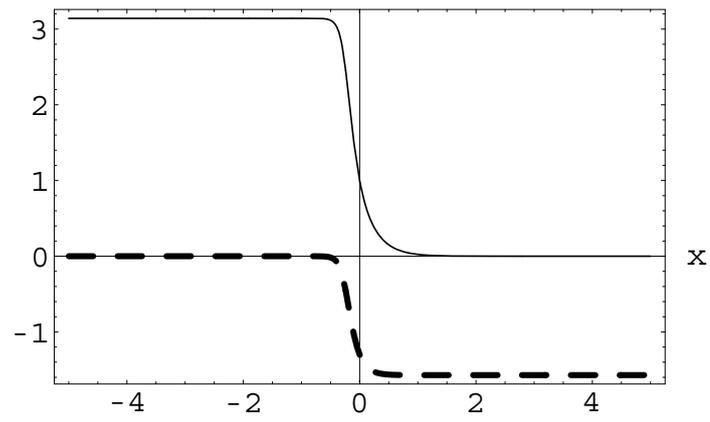


Figura 11: Exemplos de soluções topológicas do potencial (34), em que  $c_0$  é igual ao valor crítico. O gráfico tracejado refere-se ao campo  $\chi(x)$  (*kink*) e o outro ao campo  $\phi(x)$  (*kink*).

## 4 Novos twistons topológicos no polietileno cristalino

Analizamos a presença de twistons topológicos no polietileno cristalino. Nesse intuito mostramos que o modelo proposto por Bazeia, Ventura e Simas [11, 12] (composto por dois campos escalares não-lineares acoplados), possui uma estrutura de mínimos do potencial a qual apresenta uma linha de zeros, além de pontos de mínimo isolados. Mostramos ainda, como obter as soluções topológicas que conectam o twiston de um dos mínimos isolados, para qualquer ponto da linha de zeros. Assim, generalizamos o trabalho de Bazeia, Ventura e Simas [11, 12] através da obtenção dessa classe infinita de soluções topológicas. Calculamos ainda, a energia dessas configurações e verificamos que o modelo apresenta uma degenerescência infinita, que quebramos modificando o potencial original, adicionando a ele uma pequena perturbação.

### 4.1 Modelo

Partindo do superpotencial generalizado [10]

$$W(\chi, \phi) = \frac{\mu}{2} \phi^N \chi^2 + G(\phi), \quad (56)$$

com

$$G(\phi) = \frac{2\phi^N}{\mu} \left[ \frac{a_0}{N} + \frac{a_1 \phi^2}{(N+2)} \right], \quad (57)$$

podemos determinar um superpotencial semelhante àquele mostrado em [11, 12], para isso, devemos considerar  $N = 2$ . Assim, nosso potencial é escrito, em termos de (56), como

$$V(\chi, \phi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\mu} \phi (a_1 \phi^2 + a_0) + \mu \phi^2 \chi^2 \right]^2 + \frac{1}{2} (\mu \phi^2 \chi)^2, \quad (58)$$

com

$$W_\phi = \frac{2}{\mu} \phi (a_1 \phi^2 + a_0) + \mu \phi \chi^2, \quad (59)$$

e

$$W_\chi = \mu \phi^2 \chi. \quad (60)$$

O modelo descrito por Bazeia e colaboradores em [11, 12] introduz um potencial do tipo (Figura 12)

$$\bar{V}(\chi, \phi) = \frac{1}{2} \left[ \lambda \phi (\phi^2 - \pi^2) + \mu \phi \chi^2 \right]^2 + \frac{1}{2} (\mu \phi^2 \chi)^2, \quad (61)$$

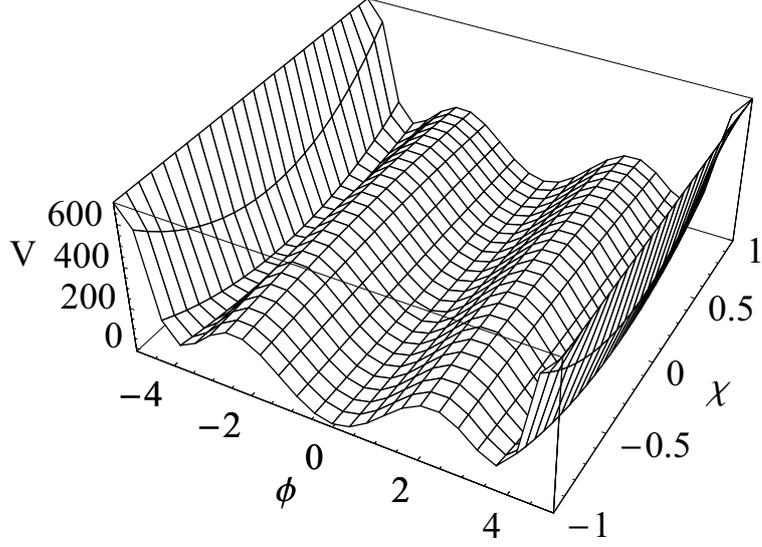


Figura 12: Potencial do modelo proposto em [11, 12].

que é proveniente do superpotencial

$$\bar{W}(\chi, \phi) = \frac{1}{2}\lambda\phi^2 \left( \frac{1}{2}\phi^2 - \pi^2 \right) + \frac{1}{2}\mu\phi^2\chi^2, \quad (62)$$

do qual se obtêm

$$\bar{W}_\phi = \lambda\phi(\phi^2 - \pi^2) + \mu\phi\chi^2, \quad (63)$$

e

$$\bar{W}_\chi = \mu\phi^2\chi. \quad (64)$$

Se, por definição

$$\lambda \equiv \frac{2a_1}{\mu} \quad (65)$$

e

$$\pi^2 \equiv -\frac{a_0}{a_1}, \quad (66)$$

verificamos que (59) e (63) são iguais, bem como (60) e (64), ou seja, o potencial mencionado em [11, 12] pode ser mapeado no potencial proposto por Dutra [10].

Voltando a (59) e (60), e aplicando o método de BPS, podemos obter as seguintes equações

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{2}{\mu}\phi(a_1\phi^2 + a_0) + \mu\phi\chi^2, \quad (67)$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} = \mu\phi^2\chi, \quad (68)$$

ou ainda,

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{\frac{2}{\mu}\phi(a_1\phi^2 + a_0) + \mu\phi\chi^2}{\mu\phi^2\chi}. \quad (69)$$

A partir dessa equação diferencial de primeira ordem obtemos a seguinte equação de órbita

$$\phi^2 = -\frac{a_0}{a_1} + \frac{\mu^2\chi^2}{(\mu^2 - 2a_1)} + c_1\chi^{4a_1/\mu^2}. \quad (70)$$

Logo, segundo as definições (65) e (66), a equação anterior fica escrita como

$$\phi^2 = \pi^2 + \frac{\mu\chi^2}{(\mu - \lambda)} + c_1\chi^{2\lambda/\mu}. \quad (71)$$

Já a equação de órbita sugerida em [11, 12] é

$$\phi^2 = \pi^2 + \frac{\mu\chi^2}{(\mu - \lambda)}. \quad (72)$$

Assim, vemos que (71) é igual a (72) quando  $c_1 = 0$ .

## 4.2 Análise dos mínimos do potencial e novas soluções topológicas

Se verificarmos o comportamento dos zeros do potencial dado pela equação (61), constatamos que  $\bar{V}(\chi_v, \phi_v) = 0$  se  $\phi_v = 0$  ou se  $\chi_v = 0$ . Quando  $\phi_v = 0$ , o campo  $\chi_v(x)$  pode ter qualquer valor e quando  $\chi_v = 0$ , ou  $\phi_v = 0$ , o que retoma o caso anterior, ou  $\phi_v = \pm\pi$ . Deste modo, concluímos que para  $\phi_v = 0$ , existe uma linha de zeros do potencial, o que implica na existência de outras soluções, além daquela obtida por Bazeia e Ventura em [11, 12] para  $c_1 = 0$ , e que, aparentemente, não existe nenhuma restrição às constantes  $\lambda$  e  $\mu$ , como foi informado em [11, 12] ( $\lambda/\mu > 1$ ). Verificamos ainda, que substituindo  $\phi_v = 0$  na equação de órbita (71), podemos escrever  $c_1$  como

$$c_1 = \left[ \frac{\mu}{\lambda - \mu}\chi_v^2 - \pi^2 \right] \chi_v^{-2\lambda/\mu}, \quad (73)$$

logo, evidenciamos a existência da linha de zeros do potencial, e vemos ainda que o valor de vácuo  $\chi_v$  quando  $\phi_v = 0$  depende da escolha de  $c_1$ , ou ainda, dado  $\chi_v$ ,  $c_1$  fica determinado a fim de manter válida a equação de órbita.

Assim sendo, substituímos as definições (65) e (66) na equação (67), obtendo

$$\frac{d\phi}{dx} = \lambda\phi(\phi^2 - \pi^2) + \mu\phi^2\chi^2. \quad (74)$$

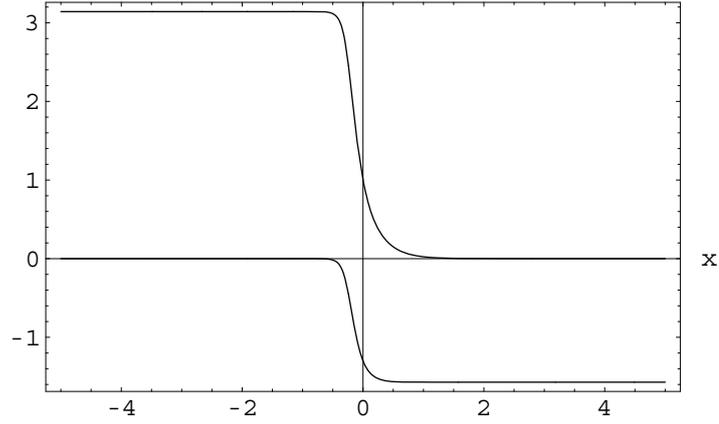


Figura 13: Novos twistons para o polietileno, o *antikink* na parte superior do gráfico refere-se ao campo  $\phi(x)$  e aquele na parte inferior ao campo  $\chi(x)$ .

Como a equação de órbita (71) relaciona os campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$ , podemos utilizá-la para desacoplar a equação diferencial anterior, assim, considerando  $\lambda = \mu/2$ ,  $\mu = 14.6/\pi^2 \text{kcal/mol}$  (valor utilizado por Bazeia e Colaboradores em [12] para que a energia concorde com os dados experimentais e as simulações numéricas de diversos trabalhos envolvendo twistons, como por exemplo, em [14]) e  $c_1 = 9\pi$  (valor utilizado para facilitar a obtenção de soluções numéricas para os campos  $\phi$  e  $\chi$ ), e escrevendo  $\chi(x)$  como função de  $\phi(x)$ , temos

$$\chi_{\pm} = \frac{1}{4} \left[ -3\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 8\phi^2} \right], \quad (75)$$

substituindo  $\chi_+$  em (74) chega-se a

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\mu\phi}{8} \left( \pi^2 + 8\phi^2 - 3\pi\sqrt{\pi^2 + 9\phi^2} \right). \quad (76)$$

Integrando numericamente (76) e voltando à expressão (75), geramos a Figura 13, na qual o campo  $\phi(x)$  é uma solução do tipo *kink* e o mesmo pode ser visto para o campo  $\chi(x)$ . Vemos ainda, que os vácuos do campo  $\phi(x)$  estão em  $\phi(\infty) = 0$  e  $\phi(-\infty) = \pi$ , já os vácuos do campo  $\chi(x)$  estão em  $\chi(\infty) = -\pi/2$  e  $\chi(-\infty) = 0$ . Mostramos assim, que o vácuo do campo  $\chi(x)$  para  $c_1 \neq 0$ , quando  $\phi_v = 0$  é diferente daquele obtido por Bazeia em [11, 12], como foi previsto pela equação de órbita proveniente do modelo generalizado.

Esse exemplo viola as imposições feitas por Bazeia e seus colaboradores, bem como generaliza o modelo proposto em [11, 12], verificando a existência de novos twistons para o polietileno.

A energia de formação do twiston ao longo da corrente polimétrica, obtida para o

exemplo anterior é dada por

$$E_{BPS} = \frac{1}{4} \frac{\mu}{2} \pi^4 \approx 17.99 \text{ kcal/mol}, \quad (77)$$

que reproduz o mesmo valor determinado em [11, 12]. Pode-se ver ainda, que segundo a análise dos mínimos do potencial, existirão soluções topológicas envolvendo os vácuos  $\phi = \pm\pi$  que possuirão o mesmo valor da energia calculado acima, o que mostra uma degenerescência do modelo.

### 4.3 Potencial com termo de perturbação de primeira ordem

Segundo as equações (63) e (64)

$$W_\phi = \mu\phi\chi^2 + \lambda(\phi^2 - \pi^2)\phi \quad (78)$$

e

$$W_\chi = \mu\phi^2\chi \quad (79)$$

nas quais, por questão de notação, reescrevemos  $\bar{W}_\phi$  e  $\bar{W}_\chi$  como  $W_\phi$  e  $W_\chi$ , respectivamente. Definindo

$$f(\chi, \phi) = (\chi^2 - \chi_0^2)^2 (\phi^2 - \pi^2)^2 \quad (80)$$

atribuímos ao potencial do modelo citado, a forma (vide Figura 14)

$$V(\phi, \chi) = \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2} + \frac{\epsilon f(\chi, \phi)}{2} \quad (81)$$

além disso, queremos que o potencial continue a obedecer a relação

$$\frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} = \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2} + \frac{\epsilon f(\chi, \phi)}{2}, \quad (82)$$

proveniente da integral primeira das equações de movimento. Impondo que

$$\chi' = W_\chi \quad (83)$$

implica em termos

$$\phi' = \sqrt{W_\phi^2 + \epsilon f(\chi, \phi)}, \quad (84)$$

que pode ser reescrito como

$$\phi' = W_\phi \sqrt{1 + \epsilon \frac{f(\chi, \phi)}{W_\phi^2}}, \quad (85)$$

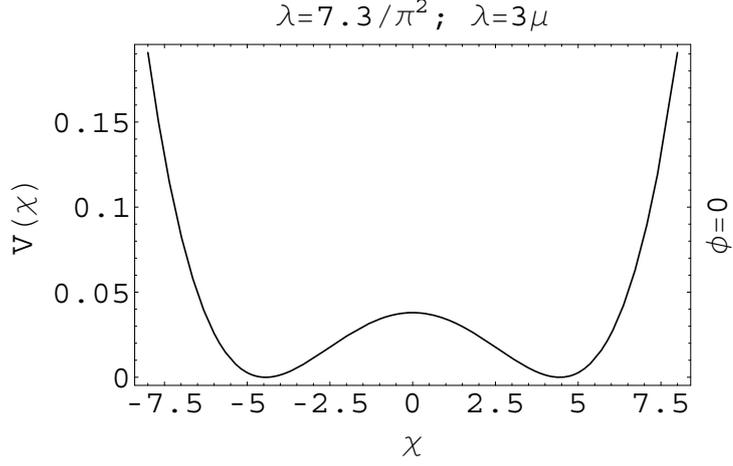


Figura 14: Novo potencial  $V(\phi, \chi)$  no plano  $\phi = 0$ , vemos que não há mais uma linha de zeros para este valor do campo  $\phi(x)$ .

tal que, em primeira aproximação,

$$\phi' \approx W_\phi \left[ 1 + \epsilon \frac{f(\chi, \phi)}{2W_\phi^2} \right]. \quad (86)$$

Dividindo (86) por (83), ficamos com

$$\frac{d\phi}{d\chi} \approx \frac{G}{\phi} \left( 1 + \frac{\epsilon f(\chi, \phi)}{2W_\phi^2} \right) \quad (87)$$

onde

$$G = \chi + \frac{\lambda(\phi^2 - \pi^2)}{\mu\chi}. \quad (88)$$

Se escrevermos

$$\sigma = \phi^2 - \pi^2 \quad (89)$$

(87) é dada por

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma}{d\chi} \approx G(\chi, \sigma) \left( 1 + \frac{\epsilon f(\chi, \sigma)}{2W_\phi^2(\chi, \sigma)} \right). \quad (90)$$

Considerando

$$\sigma(\chi) \approx \sigma_0(\chi) + \epsilon g(\chi) \quad (91)$$

com

$$\sigma_0 = \frac{\mu\chi^2}{\mu - \lambda} + c_1\chi^{2\lambda/\mu}. \quad (92)$$

Agora, visto que, em primeira aproximação

$$G \approx G_0 + \epsilon g \left. \frac{dG}{d\sigma} \right|_{\sigma=\sigma_0} \quad (93)$$

com

$$G_0 = \chi + \frac{\lambda}{\chi\mu}\sigma_0 \quad (94)$$

temos

$$\frac{d\sigma}{d\chi} \approx \frac{d\sigma_0}{d\chi} + \epsilon \frac{dg}{d\chi} = 2G_0 + \epsilon \frac{dg}{d\chi} \quad (95)$$

Deste modo, segundo (95), (90) é

$$\frac{1}{2} \frac{dg}{d\chi} = g \frac{dG}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_0} + \frac{G_0 f(\chi, \sigma)}{2W_\phi^2(\chi, \sigma)}. \quad (96)$$

Como já consideramos os termos em primeira aproximação de  $\epsilon$ ,

$$\frac{f(\chi, \sigma) G_0}{W_\phi^2(\chi, \sigma)} \approx \frac{f(\chi, \sigma) G_0}{W_\phi^2(\chi, \sigma)} \Big|_{\sigma=\sigma_0} \quad (97)$$

e ainda, na situação para  $c_1 = 0$  em (92), (96) é dada por

$$\frac{dg}{d\chi} = \frac{2\lambda g}{\mu\chi} + \frac{f}{W_\phi^2} \left( \chi + \frac{\lambda}{\mu\chi}\sigma_0 \right). \quad (98)$$

Substituindo (92) na parte direita da última equação, após algumas manipulações, podemos reescrevê-la como

$$\frac{\mu}{\mu - \lambda} \frac{(\chi^2 - \chi_0^2)^2 \chi}{\mu^2 \left( \frac{\mu\chi^2}{\mu - \lambda} + \pi^2 \right)} = \frac{(\chi^2 - \chi_0^2)^2 \chi}{\mu^2 \left( \chi^2 - \frac{\lambda - \mu}{\mu} \pi^2 \right)}. \quad (99)$$

Visto que,

$$\chi_0 \equiv \pm \sqrt{\frac{\lambda - \mu}{\mu} \pi} \quad (100)$$

então

$$\frac{(\chi^2 - \chi_0^2)^2 \chi}{\mu^2 \left( \chi^2 - \frac{\lambda - \mu}{\mu} \pi^2 \right)} = \left( \chi^2 - \frac{\lambda - \mu}{\mu} \pi^2 \right) \frac{\chi}{\mu^2}. \quad (101)$$

Desta forma (98), fica dada por

$$\frac{dg}{d\chi} = \frac{2\lambda}{\mu\chi} g + \left( \chi^2 - \frac{\lambda - \mu}{\mu} \pi^2 \right) \frac{\chi}{\mu^2}, \quad (102)$$

cuja solução analítica é

$$g = c_2 \chi^{2\lambda/\mu} + \frac{\pi^2 \chi^2}{2\mu^2} - \frac{\chi^4}{2\mu(\lambda - 2\mu)}. \quad (103)$$

Assim, a nova equação de órbita é

$$\phi^2 = \pi^2 + \frac{\mu}{\mu - \lambda} \chi^2 + \epsilon \left( \frac{\pi^2 \chi^2}{2\mu^2} - \frac{\chi^4}{2\mu(\lambda - 2\mu)} + c_2 \chi^{2\lambda/\mu} \right) \quad (104)$$

que claramente satisfaz a condição de vácuo  $\phi_v = \pm\pi$  e  $\chi_v = 0$ . Contudo, essa equação também deve reproduzir a relação  $\phi_v = 0$  para  $\chi_v = \pm\chi_0$ . Para tanto podemos escolher uma

determinada relação entre  $\lambda$  e  $\mu$  e determinar um valor para  $c_2$ , permitindo que a equação de órbita reproduza as relações de vácuo mencionadas. Assim, impondo que, por exemplo,  $\lambda = 3\mu$  e substituindo  $\phi_v = 0$  e  $\chi_v = \pm\chi_0$  em (104), temos

$$\pi^2 + \frac{\mu}{\mu - \lambda}\chi_0^2 + \epsilon \left[ \frac{\pi^2\chi_0^2}{2\mu^2} - \frac{\chi_0^4}{2\mu(\lambda - 2\mu)} + c_2\chi_0^6 \right] = 0 \quad (105)$$

e segundo (100), a última equação fica

$$\frac{\epsilon}{2\mu}\chi_0^2 \left[ \frac{\pi^2}{\mu} - \frac{\chi_0^2}{\lambda - 2\mu} + 2\mu c_2\chi_0^4 \right] = 0 \quad (106)$$

$$\frac{\pi^2}{\mu} \left[ 1 - \frac{\lambda - \mu}{\lambda - 2\mu} + 2c_2(\lambda - \mu)^2\pi^4 \right] = 0 \quad (107)$$

para  $\lambda = 3\mu$ ,

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2\mu^2}. \quad (108)$$

Finalmente, (79) é escrita como

$$\frac{d\chi}{dx} \approx \mu\chi \left[ \pi^2 + \frac{\mu}{\mu - \lambda}\chi^2 + \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{\pi^2\chi^2}{\mu^2} - \frac{\chi^4}{\mu(\lambda - 2\mu)} + \frac{1}{8\pi^2\mu^2}\chi^6 \right) \right]. \quad (109)$$

Esta equação diferencial não possui soluções analíticas, contudo, podemos obter uma solução de (109) via cálculo numérico, como pode ser visto nas Figuras 15 (campo  $\chi(x)$ ) e 16 (campo  $\phi(x)$ ). A energia para este caso é,

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\phi^2 + \epsilon f + W_\chi^2) dx. \quad (110)$$

Logo, substituindo os campos  $\chi(x)$  e  $\phi(x)$  e a definição de  $f(\chi)$  na última equação, obtemos

$$E \approx 18.0127 \text{ kcal/mol} \quad (111)$$

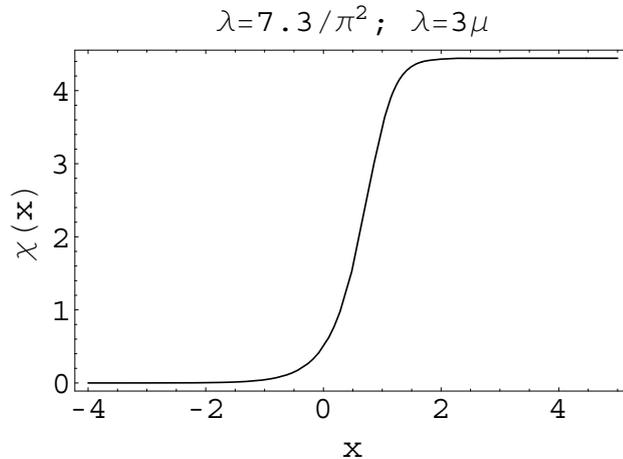


Figura 15: Campo  $\chi(x)$  para  $\mu = (7.3/\pi^2)/3$  e  $\lambda = 7.3/\pi^2$ , os vácuos desse *kink* estão em  $\chi_v = 0$  e  $\chi_v \approx 4.4428829$ .

para  $\mu = (7.3/\pi^2)/3$  e  $\epsilon = 10^{-6}$ , integrado em  $-10^2 < x < +10^2$ .

A diferença entre a primeira energia e aquela obtida por Bazeia em [12] quando  $\lambda = 7.3/\pi^2$ , é de aproximadamente 0,0128 kcal/mol em módulo, que está de acordo com os dados apresentados nos trabalhos [11, 12, 13, 14]. Para demonstrarmos a eficiência dos resultados obtidos a partir da adição deste termo perturbador ao potencial, realizamos uma integração numérica da energia no intervalo de  $-10^2 < x < +10^2$  com  $\mu = (7.3/\pi^2)/3$  e  $\epsilon = 10^{-3}$ , desta maneira obtivemos um resultado para energia de aproximadamente

$$E \approx 18.5980 \text{ kcal/mol.} \quad (112)$$

Verificamos ainda, que a diferença entre esta energia e obtida por Bazeia e colaboradores em [12], para  $\lambda = 7.3/\pi^2$  é de aproximadamente 0,5981. Esta diferença revela que mesmo aumentando a constante  $\epsilon$  em três ordens de grandeza a diferença entre a energia numérica e a analítica de [12] continua muito pequena, em um intervalo de integração considerável. Logo, nosso método de aproximação mostra-se uma alternativa eficiente em quebrar a linha de zeros de um dos campos que havia no potencial inicialmente abordado em [11, 12].

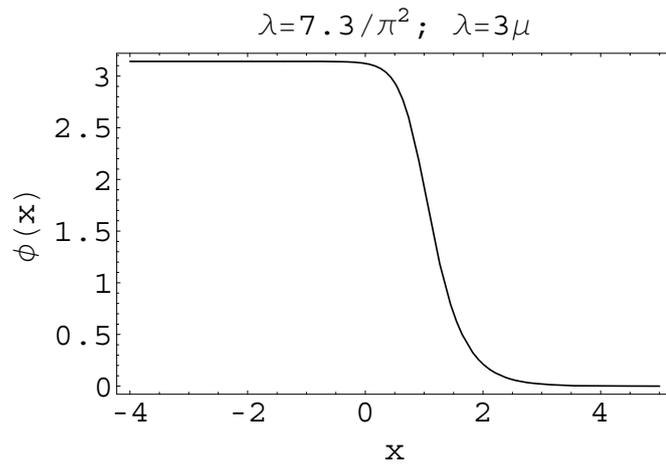


Figura 16: Campo  $\phi(x)$  para  $\mu = (7.3/\pi^2)/3$  e  $\lambda = 7.3/\pi^2$ , os vácuos encontram-se em  $\phi_v = 0$  e  $\phi_v = \pi$ , os valores de vácuo podem ser previstos minimizando o potencial.

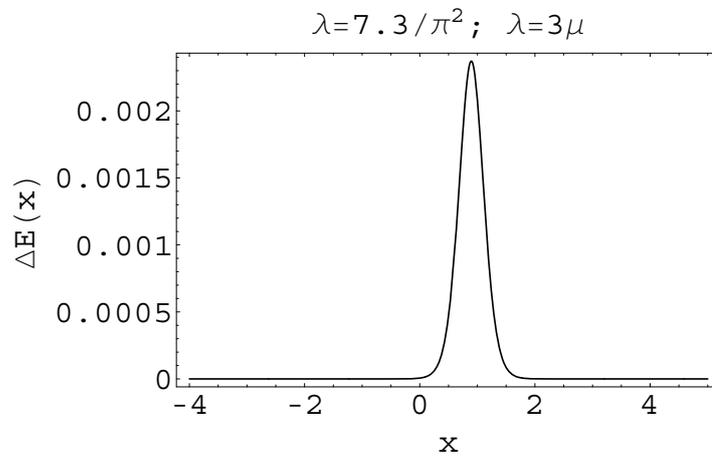


Figura 17: Função perturbadora da energia ( $\Delta E = \epsilon f$ ), vemos que a função é integrável, o que nos permite obter a energia dada pela equação (111).

# 5 Campo escalar complexo com termo quádruplo de anisotropia

## 5.1 Modelo e discussões

Em meados da década de setenta, Trullinger, Sarker e Bishop [16] encontraram soluções solitônicas analíticas para um conjunto de equações acopladas de um modelo não-linear que possui um campo escalar complexo, em uma dimensão espacial e uma dimensão temporal. Essas soluções possuem a peculiaridade de serem contextualizadas no estudo de condensados de ondas de densidade de carga fracamente ligadas. Naquele período, a maioria das soluções solitônicas analíticas conhecidas eram determinadas a partir de equações de onda não-lineares para campos escalares reais em 1+1 dimensões, com algumas exceções como no trabalho [17]. A densidade de lagrangiana apresentada em [16] é um caso especial ( $N=2$ ) da expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} |\psi_t(x, t)|^2 - \frac{1}{2} |\psi_x(x, t)|^2 + \frac{1}{2} A |\psi(x, t)|^2 \\ & - \frac{1}{4} B |\psi(x, t)|^2 - D |\psi(x, t)|^N \{1 - \cos[N\phi(x, t)]\} \end{aligned} \quad (113)$$

onde  $\psi(x, t) = u(x, t) e^{i\phi(x, t)}$  é um campo escalar complexo ( $u$  é a amplitude e  $\phi$  é a fase). As constantes  $A$ ,  $B$  e  $D$  são todas positivas, bem como o número inteiro  $N$ . O último termo da densidade de lagrangiana quebra a simetria contínua de fase, por outro lado, apresenta o acoplamento entre a amplitude ( $u$ ) e a fase ( $\phi$ ) nas equações de movimento derivadas de  $\mathcal{L}$ .

No ano de 1979, Trullinger e Subbaswamy [18] discutiram as equações acopladas de movimento para o campo  $\psi(x, t)$  no caso em que  $N = 4$ , cuja aplicação existe no estudo de ferromagnetos anisotrópicos, onde as soluções representam paredes de domínio magnéticas [19]. O procedimento adotado em [18] consiste em escrever o campo  $\psi(x, t)$  como  $\psi(x, t) = \text{Re}[\psi] + i\text{Im}[\psi]$ , ou ainda,  $\psi(x, t) = \tilde{\xi}(x, t) + i\tilde{\eta}(x, t)$ , logo (112) fica dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\tilde{\xi}_t^2 + \tilde{\eta}_t^2) - \frac{1}{2} (\tilde{\xi}_x^2 + \tilde{\eta}_x^2) + \frac{1}{2} A (\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2) - \frac{1}{4} B (\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2)^2 - 8D (\tilde{\xi}\tilde{\eta})^2 \quad (114)$$

da qual pode-se determinar as equações de movimento

$$\tilde{\xi}_{tt} - \tilde{\xi}_{xx} - A\tilde{\xi} + B\tilde{\xi}^3 + (B + 16D) \tilde{\xi}\tilde{\eta}^2 = 0 \quad (115)$$

e

$$\tilde{\eta}_{tt} - \tilde{\eta}_{xx} - A\tilde{\eta} + B\tilde{\eta}^3 + (B + 16D) \tilde{\eta}\tilde{\xi}^2 = 0. \quad (116)$$

Realizando as substituições de variáveis  $\tilde{\xi}(x, t) \rightarrow \tilde{\xi}(s)$  e  $\tilde{\eta}(x, t) \rightarrow \tilde{\eta}(s)$ , onde  $s = \bar{\gamma}(x - vt)$ ,  $\bar{\gamma} = (1 - v^2)^{-1/2}$  e  $|v| < 1$ , temos que as equações de movimento são reescritas como

$$\tilde{\xi}_{ss} + A\tilde{\xi} - B\tilde{\xi}^3 - (B + 16D)\tilde{\xi}\tilde{\eta}^2 = 0 \quad (117)$$

e

$$\tilde{\eta}_{ss} + A\tilde{\eta} - B\tilde{\eta}^3 - (B + 16D)\tilde{\eta}\tilde{\xi}^2 = 0. \quad (118)$$

Estas expressões podem ser normalizadas, considerando as quantidades  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\eta}$  e  $s$  tais que

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{(A/B)^{1/2}} \quad (119)$$

$$\eta = \frac{\tilde{\eta}}{(A/B)^{1/2}} \quad (120)$$

$$\rho = sA^{1/2}. \quad (121)$$

Logo, as equações de movimento normalizadas são dadas por

$$\xi_{\rho\rho} + \xi - \xi^3 - \lambda\xi\eta^2 = 0 \quad (122)$$

e

$$\eta_{\rho\rho} + \eta - \eta^3 - \lambda\eta\xi^2 = 0, \quad (123)$$

onde

$$\lambda = 1 + \frac{16D}{B}. \quad (124)$$

Verificamos que as últimas equações obtidas são equivalentes às equações de movimento que podem ser calculadas a partir da densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\xi_\rho^2 + \eta_\rho^2) - V(\xi, \eta) \quad (125)$$

com

$$V(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{4}(\xi^4 + \eta^4) + \frac{1}{2}\lambda\xi^2\eta^2 \quad (126)$$

cuja densidade de hamiltoniana é

$$H = \frac{1}{2}(\xi_\rho^2 + \eta_\rho^2) + V(\xi, \eta). \quad (127)$$

O potencial desse modelo possui quatro conjuntos de mínimos globais degenerados, em  $\xi = 0$  e  $\eta = \pm 1$  e  $\xi = \pm 1$  e  $\eta = 0$ , que correspondem aos valores dos vácuos dos campos. Na referência [18], estes valores de vácuo caracterizam duas possíveis configurações de soluções solitônicas que foram denominadas:  $\pi/2$  e  $\pi$ , estas possuem as respectivas condições de contorno

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad \eta = 1 & \quad \text{em} \quad \rho = -\infty \\ \xi = 1, \quad \eta = 0 & \quad \text{em} \quad \rho = \infty \end{aligned}$$

$$\xi_\rho(\pm\infty) = 0 = \eta_\rho(\pm\infty) \quad \text{para soluções do tipo } \frac{\pi}{2}, \quad (128)$$

e

$$\begin{aligned} \xi = -1, \quad \eta = 0 & \quad \text{em} \quad \rho = -\infty \\ \xi = 1, \quad \eta = 0 & \quad \text{em} \quad \rho = \infty \end{aligned}$$

$$\xi_\rho(\pm\infty) = 0 = \eta_\rho(\pm\infty) \quad \text{para soluções do tipo } \pi. \quad (129)$$

Multiplicando (122) por  $\xi_\rho$  e (123) por  $\eta_\rho$ , integrando ambas as equações em  $\rho$  e utilizando as condições de contorno mencionadas em (128) ou (129) obtém-se a seguinte equação

$$\xi_\rho^2 + \eta_\rho^2 = \frac{1}{2} - (\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{2} (\xi^4 + \eta^4) + \lambda \xi^2 \eta^2. \quad (130)$$

Em [18] e [16], foram determinadas soluções topológicas analíticas resolvendo as equações de movimento de forma usual, para o caso em que  $\lambda = 3$ . Em nosso estudo, tentamos reescrever o potencial  $V(\xi, \eta)$  na forma

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2} W_\xi^2 + \frac{1}{2} W_\eta^2$$

e verificamos que após algumas manipulações (126) pode ser reescrita como

$$\bar{V}(\xi, \eta) \equiv V(\xi, \eta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi^2 + \eta^2 - 1) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\bar{\lambda} - 1} \xi \eta \right]^2 \quad (131)$$

onde substituímos a constante original  $\lambda$  pela constante  $\bar{\lambda}$ , por questão de generalização do modelo que estudamos via método BPS. Definindo

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\xi^2}{3} + \eta^2 - 1 \right) \xi \quad (132)$$

vemos que

$$W_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi^2 + \eta^2 - 1) \quad (133)$$

e

$$W_\eta = \sqrt{2} \xi \eta \quad (134)$$

ou ainda,

$$\xi\eta = \frac{W_\eta}{\sqrt{2}}$$

assim,

$$\bar{V}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}W_\xi^2 + \frac{\zeta^2}{2}W_\eta^2 \quad (135)$$

com

$$\zeta = \sqrt{\frac{\bar{\lambda} - 1}{2}}. \quad (136)$$

Em seguida, considerando que

$$\xi_\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^2 + \eta^2 - 1) \quad (137)$$

$$\eta_\rho = \sqrt{\bar{\lambda} - 1}\xi\eta \quad (138)$$

dividindo (137) por (138) temos

$$\xi \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{\sqrt{2(\bar{\lambda} - 1)}} \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\eta}. \quad (139)$$

Se  $\xi^2 = \sigma$  temos

$$\frac{d\sigma}{d\eta} = \frac{2}{\sqrt{2(\bar{\lambda} - 1)}} \frac{\sigma + \eta^2 - 1}{\eta}. \quad (140)$$

Para  $\beta = 2/\sqrt{2(\bar{\lambda} - 1)}$  obtemos a seguinte equação de órbita

$$\sigma = 1 + \frac{\beta}{2 - \beta}\eta^2 + c_1\eta^\beta. \quad (141)$$

Ao substituir essa equação em (138), pode-se verificar que existem duas possibilidades de soluções analíticas, uma delas para  $\beta = 1$  que implica em  $\bar{\lambda} = 3$ , caso estudado em [18]. Porém nossa análise via método BPS mostra a existência de soluções tipo *lump* e *kink* duplo, as quais não foram obtidas no trabalho mencionado. A outra possibilidade é para  $\beta = 4$  implicando em  $\bar{\lambda} = 9/8$ .

Voltando ao potencial  $\bar{V}(\xi, \eta)$ , equação (131), constatamos que é possível obtê-lo também por meio do superpotencial,

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi^2 + \frac{\eta^2}{3} - 1 \right) \eta, \quad (142)$$

logo,

$$W_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta^2 + \xi^2 - 1) \quad (143)$$

e

$$W_\xi = \sqrt{2}\xi\eta, \quad (144)$$

ou seja, os campos  $\xi(\rho)$  e  $\eta(\rho)$  “trocam de papel”. Conseqüentemente, a nova equação de órbita advinda do superpotencial (142), é

$$\sigma = 1 + \frac{\beta}{2 - \beta} \xi^2 + c_1 \xi^\beta. \quad (145)$$

com  $\sigma \equiv \eta^2$ . Assim, todas as discussões a respeito dos cálculos decorrentes de (132) são iguais aquelas realizadas segundo o superpotencial (142). Por uma questão de conveniência e para reproduzir alguns dos resultados de [18], analisamos o comportamento dos campos  $\xi(\rho)$  e  $\eta(\rho)$  que obedecem (132).

## 5.2 Análise dos valores críticos de $c_1$

Podemos ainda, determinar a relação algébrica dos valores críticos de  $c_1$ , ou seja, situações para qualquer valor de  $\bar{\lambda}$ , nas quais as possíveis soluções obtidas serão do tipo  $\pi/2$ . Para  $c_1$  menor do que o valor crítico as soluções serão classificadas como sendo do tipo  $\pi$ . Portanto, reescrevemos nosso potencial como

$$\bar{V}(\xi, \eta) = \frac{W_\xi^2}{2} + \frac{W_\eta^2}{2\beta^2} \quad (146)$$

de forma que para minimizar o potencial consideramos que  $\bar{V}(\xi, \eta) = 0$ , implicando em

$$W_\xi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{W_\eta}{\beta} = 0 \quad (147)$$

logo,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_v^2 + \eta_v^2 - 1) = 0 \quad \text{e} \quad \sqrt{\bar{\lambda} - 1} \xi_v \eta_v = 0 \quad (148)$$

para  $\bar{\lambda} \neq 1$  ou  $\xi_v = 0$  ou  $\eta_v = 0$ . Se  $\xi_v = 0$ , vemos que segundo a equação da esquerda,  $\eta_v = \pm 1$  e se  $\eta_v = 0$  a mesma equação nos informa que  $\xi_v = \pm 1$ . Substituindo  $\xi_v = 0$  e  $\eta_v = \pm 1$  na equação de órbita, constatamos que

$$\xi_v^2 = 1 + \frac{\beta}{2 - \beta} \eta_v^2 + c_1 \eta_v^\beta$$

ou ainda,

$$1 + \frac{\beta}{2 - \beta} + c_1 = 0$$

conclusivamente,

$$c_1 = \frac{\beta}{\beta - 2} - 1 \quad (149)$$

com  $\beta = \sqrt{2/(\bar{\lambda} - 1)}$ , consistindo na relação analítica para obtermos qualquer valor crítico de  $c_1$  a partir de um determinado valor de  $\bar{\lambda}$ . Por exemplo, para  $\bar{\lambda} = 3$  vemos que  $c_1 = -2$ .

### 5.3 Comparação entre as soluções BPS e as soluções das equações diferenciais de segunda ordem

As soluções BPS que obtemos para este modelo, no caso em que  $\bar{\lambda} = 3$ , são

$$\eta(\rho) = \frac{4}{e^{-\sqrt{2}\rho - c_2} - 2c_1 + e^{\sqrt{2}\rho + c_2} (-4 + c_1^2)} \quad (150)$$

e para o campo  $\xi(\rho)$

$$\xi(\rho) = \frac{-1 + e^{2(\sqrt{2}\rho + c_2)} (-4 + c_1^2)}{1 - 2c_1 e^{\sqrt{2}\rho + c_2} + e^{2(\sqrt{2}\rho + c_2)} (-4 + c_1^2)} \quad (151)$$

para as quais geramos as Figuras 18, 19, 20 e 21, considerando  $c_2 = 0$ .

Uma maneira simples de determinar qual seria o valor da constante  $\lambda$  nas equações diferenciais de segunda ordem (122) e (123), para que as soluções anteriores sejam soluções destas equações diferenciais, é substituir (150) e (151) em (122) e (123). Assim, verificamos que este fato ocorre se  $\lambda = 3$ , ou seja  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Já para a situação em que  $\bar{\lambda} = 9/8$ , as soluções analíticas das equações diferenciais de primeira ordem são dadas por

$$\eta(\rho) = \pm \frac{\sqrt{2} e^{\frac{\rho}{2\sqrt{2}} + c_2}}{\sqrt{1 + 2e^{2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}} + c_2\right)} - e^{4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}} + c_2\right)} (-1 + c_1)}} \quad (152)$$

e

$$\xi(\rho) = \pm \frac{1 + e^{4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}} + c_2\right)} (-1 + c_1)}{1 + 2e^{2\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}} + c_2\right)} - e^{4\left(\frac{\rho}{2\sqrt{2}} + c_2\right)} (-1 + c_1)} \quad (153)$$

cujos resultados podem ser observados nas Figuras 22, 23, 24 e 25.

Procedendo de forma análoga ao caso em que  $\bar{\lambda} = 3$ , substituímos essas soluções nas equações diferenciais de segunda ordem (122) e (123), para descobrir qual será o valor de  $\lambda$  que faz com que as expressões anteriores sejam soluções destas equações diferenciais. Verificamos então que (152) e (153) satisfazem a equação de segunda ordem (122) somente se  $\lambda = 3/2$ , ou seja, neste caso  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ . Contudo, a equação (123) não é satisfeita quando  $\lambda = 3/2$ , desta forma as equações (152) e (153) não são soluções das equações de movimento do modelo apesar de serem soluções das equações de primeira ordem que obtivemos.

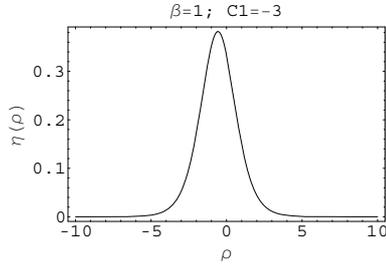


Figura 18: *Lump* para  $\lambda = 3$  com  $c_1 = -3$ .

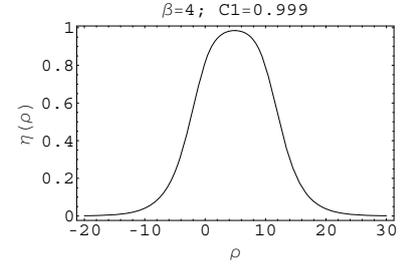


Figura 22: *Lump* para  $\lambda = 9/8$  com  $c_1 = 1/2$ .

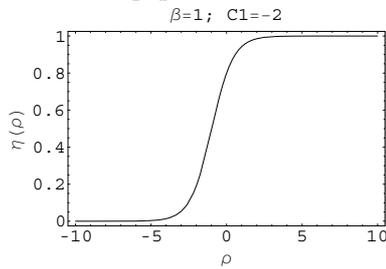


Figura 19: *Kink* para  $\lambda = 3$  com  $c_1 = -2$ .

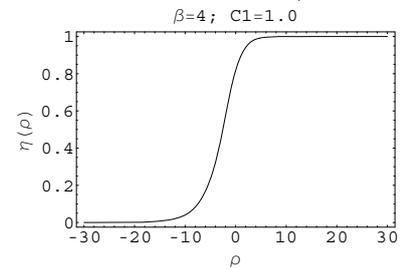


Figura 23: *Kink* para  $\lambda = 9/8$  com  $c_1 = 1$ .

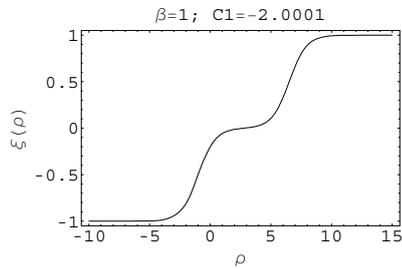


Figura 20: *Kink-duplo* para  $\lambda = 3$  com  $c_1 = -2.0001$ .

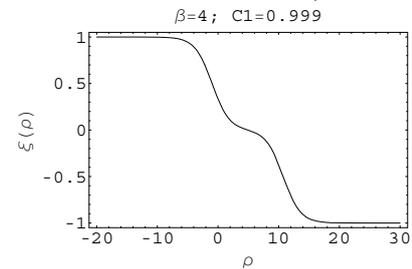


Figura 24: *Kink-duplo* para  $\lambda = 9/8$  com  $c_1 = 0.99999$ .

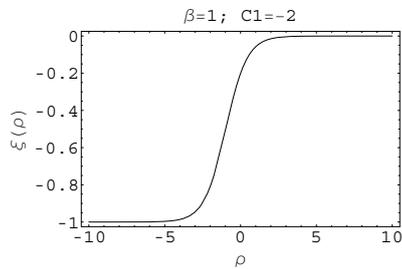


Figura 21: *Kink* para  $\lambda = 3$  com  $c_1 = -2$ .

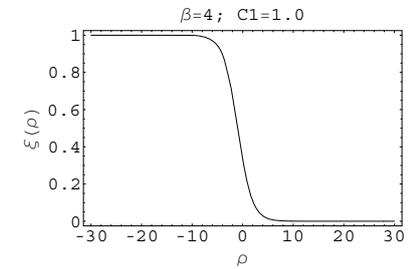


Figura 25: *Kink* para  $\lambda = 9/8$  com  $c_1 = 1$ .

## 5.4 Energia BPS para $\lambda = 3$

O potencial  $\bar{V}(\xi, \eta)$  pode ser escrito na forma

$$\bar{V}(\xi, \eta) = \frac{W_\xi^2}{2} + \zeta^2 \frac{W_\eta^2}{2}$$

com

$$W_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^2 + \eta^2 + 1) \quad \text{e} \quad W_\eta = \sqrt{2}\xi\eta$$

para  $\zeta = \sqrt{\bar{\lambda} - \frac{1}{2}}$ . Sendo assim, o superpotencial  $W(\xi, \eta)$  é dado por

$$W(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\xi^2}{3} + \eta^2 - 1 \right)$$

Munidos dessas informações, podemos calcular a energia BPS para  $\bar{\lambda} = 3$ . Para esse valor de  $\bar{\lambda}$ , temos que os vácuo são dados por

$$\eta_{\pm\infty} = 0 \quad \xi_{+\infty} = 1 \quad \xi_{-\infty} = -1 \quad (154)$$

para  $c_1$  diferente do valor crítico e

$$\eta_{-\infty} = 0 \quad \eta_{+\infty} = 1 \quad \xi_{-\infty} = -1 \quad \xi_{+\infty} = 0 \quad (155)$$

para  $c_1$  igual ao valor crítico. Utilizando as condições de vácuos (154) e considerando o caso em que  $\bar{\lambda} = 3$ , a energia BPS é

$$E_{BPS} = |W(+\infty, +\infty) - W(-\infty, -\infty)| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (156)$$

que é a mesma energia obtida por Trullinger e Subbaswamy em [18], para a solução que foi denominada solução  $\pi$ . Já para o caso em que  $c_1$  é igual ao valor crítico, a energia BPS foi determinada a partir das condições de contorno mencionadas em (155), então

$$E_{BPS} = |W(+\infty, +\infty) - W(-\infty, -\infty)| = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (157)$$

cujos resultados são iguais aos obtidos em [18] para as soluções  $\pi/2$ , implicando que assim como Trullinger e Subbaswamy, nossas soluções são tais que

$$\Delta E \equiv E_\pi - 2E_{\pi/2} = 0 \quad (158)$$

para  $\bar{\lambda} = \lambda = 3$ .

## 5.5 Estabilidade das soluções: caso $\lambda = 3$

Uma outra análise relevante sobre o comportamento dos solitons é verificar a estabilidade das soluções obtidas. Para tanto, passamos a escrever os campos  $\xi$  e  $\eta$  em termos das soluções analíticas obtidas anteriormente para  $\lambda = 3$  e de duas funções perturbadoras  $\bar{f}(x, t)$  e  $\bar{g}(x, t)$ , de tal forma que

$$\xi(x, t) \equiv \xi^{(0)}(x) + \bar{f}(x, t) \quad (159)$$

e

$$\eta(x, t) \equiv \eta^{(0)}(x) + \bar{g}(x, t) \quad (160)$$

sendo  $\xi^{(0)}(x)$  e  $\eta^{(0)}(x)$  as soluções obtidas para estes campos. Remetendo aos procedimentos anteriores, verificamos que os campos  $\xi(x, t)$  e  $\eta(x, t)$  satisfazem as equações diferenciais

$$-(1/A)(\xi_{tt} - \xi_{xx}) + \xi - \xi^3 - \lambda\xi\eta^2 = 0 \quad (161)$$

e

$$-(1/A)(\eta_{tt} - \eta_{xx}) + \eta - \eta^3 - \lambda\eta\xi^2 = 0 \quad (162)$$

Substituindo (159) e (160) nas equações anteriores e considerando somente os termos em primeira ordem de aproximação nas variáveis  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ , temos

$$-(1/A)(\bar{f}_{tt} - \bar{f}_{xx}) + \bar{f} - 3\xi^{(0)2}\bar{f} - \lambda\eta^{(0)2}\bar{f} - 2\lambda\xi^{(0)}\eta^{(0)}\bar{g} = 0 \quad (163)$$

e

$$-(1/A)(\bar{g}_{tt} - \bar{g}_{xx}) + \bar{g} - 3\eta^{(0)2}\bar{g} - \lambda\xi^{(0)2}\bar{g} - 2\lambda\eta^{(0)}\xi^{(0)}\bar{f} = 0 \quad (164)$$

Realizando o “Ansatz”

$$\bar{f}(x, t) = f(x) e^{-i\bar{\omega}t} \quad \text{e} \quad \bar{g}(x, t) = g(x) e^{-i\bar{\omega}t} \quad (165)$$

bem como as considerações  $\rho = A^{1/2}x$  e  $\omega^2 = \bar{\omega}^2/A$ , as equações (163) e (164) são reescritas como

$$-f_{\rho\rho} - f + 3\xi^{(0)2}f + \lambda\eta^{(0)2}f + 2\lambda\xi^{(0)}\eta^{(0)}g = \omega^2f \quad (166)$$

e

$$-g_{\rho\rho} - g + 3\eta^{(0)2}g + \lambda\xi^{(0)2}g + 2\lambda\eta^{(0)}\xi^{(0)}f = \omega^2g \quad (167)$$

Supondo agora que,

$$f \equiv \varphi + \gamma \quad \text{e} \quad g \equiv \varphi - \gamma \quad (168)$$

logo, (166) e (167) são dadas por

$$-(\varphi + \gamma)_{\rho\rho} - (\varphi + \gamma) + 3\xi^{(0)^2} (\varphi + \gamma) + \lambda\eta^{(0)^2} (\varphi + \gamma) + 2\lambda\xi^{(0)}\eta^{(0)} (\varphi - \gamma) = \omega^2 (\varphi + \gamma) \quad (169)$$

e

$$-(\varphi - \gamma)_{\rho\rho} - (\varphi - \gamma) + 3\eta^{(0)^2} (\varphi - \gamma) + \lambda\xi^{(0)^2} (\varphi - \gamma) + 2\lambda\eta^{(0)}\xi^{(0)} (\varphi + \gamma) = \omega^2 (\varphi - \gamma) \quad (170)$$

Somando as duas últimas equações, temos

$$\begin{aligned} & -2\varphi_{\rho\rho} - 2\varphi + 3\left(\xi^{(0)^2} + \eta^{(0)^2}\right)\varphi + 3\left(\xi^{(0)^2} - \eta^{(0)^2}\right)\gamma \\ & + \lambda\left(\xi^{(0)^2} + \eta^{(0)^2}\right)\varphi + \lambda\left(\eta^{(0)^2} - \xi^{(0)^2}\right)\gamma + 4\lambda\xi^{(0)}\eta^{(0)}\varphi = 2\omega^2\varphi \end{aligned} \quad (171)$$

e subtraindo (169) e (170), chegamos a

$$\begin{aligned} & -2\gamma_{\rho\rho} - 2\gamma + 3\left(\xi^{(0)^2} - \eta^{(0)^2}\right)\varphi + 3\left(\xi^{(0)^2} + \eta^{(0)^2}\right)\gamma \\ & + \lambda\left(\eta^{(0)^2} - \xi^{(0)^2}\right)\varphi + \lambda\left(\eta^{(0)^2} + \xi^{(0)^2}\right)\gamma - 4\lambda\xi^{(0)}\eta^{(0)}\gamma = 2\omega^2\gamma \end{aligned} \quad (172)$$

Ao examinar essas duas últimas equações diferenciais, vemos que elas podem ser desacopladas na situação em que  $\lambda = 3$ , sendo que, neste valor de  $\lambda$ ,  $\xi^{(0)}(\rho)$  e  $\eta^{(0)}(\rho)$  são

$$\xi^{(0)}(\rho) = \frac{-1 + e^{2\sqrt{2}\rho}(-4 + c_1^2)}{1 - 2c_1e^{\sqrt{2}\rho} + e^{2\sqrt{2}\rho}(-4 + c_1^2)} \quad (173)$$

e

$$\eta^{(0)}(\rho) = \frac{4e^{\sqrt{2}\rho}}{1 - 2c_1e^{\sqrt{2}\rho} + e^{2\sqrt{2}\rho}(-4 + c_1^2)} \quad (174)$$

Assim, as equações diferenciais que verificam a estabilidade dessas soluções, são dadas por

$$-\varphi_{\rho\rho} - \varphi + 3\left(\xi^{(0)} + \eta^{(0)}\right)^2\varphi = \omega^2\varphi \quad (175)$$

$$-\gamma_{\rho\rho} - \gamma + 3\left(\xi^{(0)} - \eta^{(0)}\right)^2\gamma = \omega^2\gamma \quad (176)$$

ou ainda,

$$-\varphi_{\rho\rho} + \left( \frac{2 + 2(c_1 - 2)e^{\sqrt{2}\rho} \left[ 4 + (c_1 - 2)e^{\sqrt{2}\rho} \right]}{[-1 + (c_1 - 2)e^{\sqrt{2}\rho}]^2} - \omega^2 \right) \varphi = 0 \quad (177)$$

e

$$-\gamma_{\rho\rho} + \left( \frac{2 + 2(c_1 + 2)e^{\sqrt{2}\rho} \left[ 4 + (c_1 + 2)e^{\sqrt{2}\rho} \right]}{[-1 + (c_1 + 2)e^{\sqrt{2}\rho}]^2} - \omega^2 \right) \gamma = 0 \quad (178)$$

No caso em que a constante  $c_1 = -2$ , ou seja, no valor crítico, para o qual obtivemos as soluções do tipo  $\pi/2$ . Portanto, as soluções das equações diferenciais acima são dadas por

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho) = & \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 2\omega^2 + 16\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3(2 + \sqrt{4-2\omega^2}) \right] \kappa_1}{(1 + 4e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 16e^{2\sqrt{2}\rho} (-6 + 2\omega^2 + 3\sqrt{4-2\omega^2}) \right] \kappa_1}{(1 + 4e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 6 - 2\omega^2 - 16\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3\sqrt{4-2\omega^2} \right] \kappa_2}{(1 + 4e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 16e^{2\sqrt{2}\rho} (6 - 2\omega^2 + 3\sqrt{4-2\omega^2}) \right] \kappa_2}{(1 + 4e^{\sqrt{2}\rho})^2}
\end{aligned} \tag{179}$$

e

$$\gamma(\rho) = \bar{\kappa}_1 e^{-\sqrt{2-\omega^2}\rho} + \bar{\kappa}_2 e^{\sqrt{2-\omega^2}\rho} \tag{180}$$

Para que as soluções na variável  $\varphi(\rho)$  sejam iguais a zero quando  $\rho = \pm\infty$ , é necessário impor que

$$-6 + 2\omega^2 + 3\sqrt{4-2\omega^2} = 0 \tag{181}$$

desta maneira, os valores de  $\omega$  permitidos, a fim de que as soluções sejam estáveis, são

$$\omega^2 = 0 \quad \text{e} \quad \omega^2 = \frac{3}{2}. \tag{182}$$

Estes valores de  $\omega$  são iguais àqueles encontrados por Trullinger e colaboradores em [18], para as soluções analíticas do trabalho citado, referentes a situação em que  $\lambda = 3$ . Substituindo as constantes obtidas em (182) nas soluções escritas em termos de  $\varphi(\rho)$  e  $\gamma(\rho)$  determinamos que, para  $\omega^2 = 0$

$$\gamma(\rho) \propto e^{-\sqrt{2}|\rho|} \quad \varphi(\rho) \propto \frac{e^{\sqrt{2}\rho}}{(1 + 4e^{\sqrt{2}\rho})^2} \tag{183}$$

Já no caso em que  $\omega^2 = 3/2$ ,

$$\gamma(\rho) \propto e^{-|\rho|/\sqrt{2}} \quad \varphi(\rho) \propto \frac{e^{\sqrt{2}/2\rho^{1/2}} (-1 + 4e^{\sqrt{2}\rho})}{(1 + 4e^{\sqrt{2}\rho})^2} \tag{184}$$

Verificamos ainda a estabilidade de um caso em que a constante  $c_1$  é diferente do valor crítico, o que caracteriza o comportamento de soluções do tipo  $\pi$ . Assim, por exemplo, para  $c_1 = -3$ ,

observamos que as soluções analíticas das equações (177) e (178) são

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho) = & \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 2\omega^2 + 20\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3(2 + \sqrt{4-2\omega^2}) \right] \kappa_1}{(1 + 5e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 25e^{2\sqrt{2}\rho} (-6 + 2\omega^2 + 3\sqrt{4-2\omega^2}) \right] \kappa_1}{(1 + 5e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 6 - 2\omega^2 - 20\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3\sqrt{4-2\omega^2} \right] \kappa_2}{(1 + 5e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 25e^{2\sqrt{2}\rho} (6 - 2\omega^2 + 3\sqrt{4-2\omega^2}) \right] \kappa_2}{(1 + 5e^{\sqrt{2}\rho})^2}
\end{aligned} \tag{185}$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma(\rho) = & \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 2\omega^2 + 4\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3(2 + \sqrt{4-2\omega^2}) \right] \bar{\kappa}_1}{(1 + e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ e^{2\sqrt{2}\rho} (-6 + 2\omega^2 + 3\sqrt{4-2\omega^2}) \right] \bar{\kappa}_1}{(1 + e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 6 - 2\omega^2 - 4\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3\sqrt{4-2\omega^2} \right] \bar{\kappa}_2}{(1 + e^{\sqrt{2}\rho})^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ e^{2\sqrt{2}\rho} (6 - 2\omega^2 + 3\sqrt{4-2\omega^2}) \right] \bar{\kappa}_2}{(1 + e^{\sqrt{2}\rho})^2}
\end{aligned} \tag{186}$$

Utilizando os valores de  $\omega$  dados por (182), determinamos que a forma final das soluções  $\varphi(\rho)$  e  $\gamma(\rho)$  são escritas como

$$\gamma(\rho) \propto \frac{e^{\sqrt{2}\rho}}{(1 + e^{\sqrt{2}\rho})^2} \qquad \varphi(\rho) \propto \frac{e^{\sqrt{2}\rho}}{(1 + 5e^{\sqrt{2}\rho})^2} \tag{187}$$

para  $\omega^2 = 0$ . Já no caso em que  $\omega^2 = 3/2$ , obtivemos

$$\gamma(\rho) \propto \frac{e^{\sqrt{2}/2\rho^{1/2}} (-1 + e^{\sqrt{2}\rho})}{(1 + e^{\sqrt{2}\rho})^2} \qquad \varphi(\rho) \propto \frac{e^{\sqrt{2}/2\rho^{1/2}} (-1 + 5e^{\sqrt{2}\rho})}{(1 + 5e^{\sqrt{2}\rho})^2} \tag{188}$$

Esses últimos resultados revelam que as soluções topológicas continuam estáveis para  $\lambda = 3$ , mesmo no caso não crítico. De maneira geral, podemos escrever as soluções estáveis correspondentes a  $\lambda = 3$ , em termos de  $\varphi(\rho)$  e  $\gamma(\rho)$ , como

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho) = & \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 2\omega^2 + (8 - 4c_1)\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3(2 + \sqrt{4 - 2\omega^2}) \right] \kappa_1}{[1 + (2 - c_1)e^{\sqrt{2}\rho}]^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ (c_1 - 2)^2 e^{2\sqrt{2}\rho} (-6 + 2\omega^2 + 3\sqrt{4 - 2\omega^2}) \right] \kappa_1}{[1 + (2 - c_1)e^{\sqrt{2}\rho}]^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 6 - 2\omega^2 - (8 - 4c_1)\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3\sqrt{4 - 2\omega^2} \right] \kappa_2}{[1 + (2 - c_1)e^{\sqrt{2}\rho}]^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ (c_1 - 2)^2 e^{2\sqrt{2}\rho} (6 - 2\omega^2 + 3\sqrt{4 - 2\omega^2}) \right] \kappa_2}{[1 + (2 - c_1)e^{\sqrt{2}\rho}]^2}
\end{aligned} \tag{189}$$

e

$$\begin{aligned}
\gamma(\rho) = & \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 2\omega^2 - (8 + 4c_1)\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3(2 + \sqrt{4 - 2\omega^2}) \right] \bar{\kappa}_1}{[1 - (2 + c_1)e^{\sqrt{2}\rho}]^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ (c_1 + 2)^2 e^{2\sqrt{2}\rho} (-6 + 2\omega^2 + 3\sqrt{4 - 2\omega^2}) \right] \bar{\kappa}_1}{[1 - (2 + c_1)e^{\sqrt{2}\rho}]^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ 6 - 2\omega^2 + (8 + 4c_1)\omega^2 e^{\sqrt{2}\rho} - 3\sqrt{4 - 2\omega^2} \right] \bar{\kappa}_2}{[1 - (2 + c_1)e^{\sqrt{2}\rho}]^2} \\
& + \frac{e^{\sqrt{2}\rho}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2}} \left[ (c_1 + 2)^2 e^{2\sqrt{2}\rho} (6 - 2\omega^2 + 3\sqrt{4 - 2\omega^2}) \right] \bar{\kappa}_2}{[1 - (2 + c_1)e^{\sqrt{2}\rho}]^2}
\end{aligned} \tag{190}$$

## 5.6 Figuras da seção de Poincaré

Para complementar a análise do modelo estudado por Trullinger e seus colaboradores, geramos figuras da seção de Poincaré utilizando as equações de movimento normalizadas (122) e (123), e ainda, reescrevemos (130) como

$$\xi_\rho^2 + \eta_\rho^2 + (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2} (\xi^4 + \eta^4) - \lambda \xi^2 \eta^2 = C \quad (191)$$

onde substituímos o valor  $1/2$  (proveniente da integração das equações de movimento, considerando como condições de contorno o comportamento das soluções topológicas em mais e menos infinito), por uma constante de integração  $C$ , esta última relação foi utilizada como uma constante do modelo. As figuras da seção de Poincaré foram construídas utilizando  $10^{-14}$  como precisão do programa principal,  $10^{-11}$  de precisão para as integrações que utilizaram o método de Newton-Raphson,  $10^{-5}$  de precisão para a constante  $C$ , intervalo de integração de  $5.0 \cdot 10^8$ , a sub rotina de integração é conhecida como Burlish Stoer (Numerical Recipes) e  $\eta = 0$  como superfície de integração.

No processo de construção da seção de Poincaré para diversos valores das constantes  $\lambda$  e  $C$ , verificamos a existência de quatro regiões possíveis no espaço de fase gerado para  $\xi$  e  $\xi_\rho$ . Estas regiões podem vistas detalhadamente na Figura 26. Neste gráfico, fica claro que há uma distinção entre o conjunto de soluções periódicas (verde), caóticas (vermelho), divergentes (preto) e solitônicas (azul). O conjunto de soluções periódicas refere-se à oscilações dos campos  $\xi$  e  $\eta$  ao redor de um ponto de equilíbrio localizado na parte central das ilhas em verde.

As soluções caóticas, por sua vez, retratam oscilações de “frequências” aleatórias dos campos  $\xi$  e  $\eta$ . Uma característica relevante das soluções caóticas, que foram determinadas na grande maioria das seções de Poincaré geradas para este modelo, é que algumas dessas soluções formam regiões caóticas que ficam confinadas ao redor das ilhas de estabilidade. Uma análise detalhada sobre as implicações desse comportamento será realizada mais adiante.

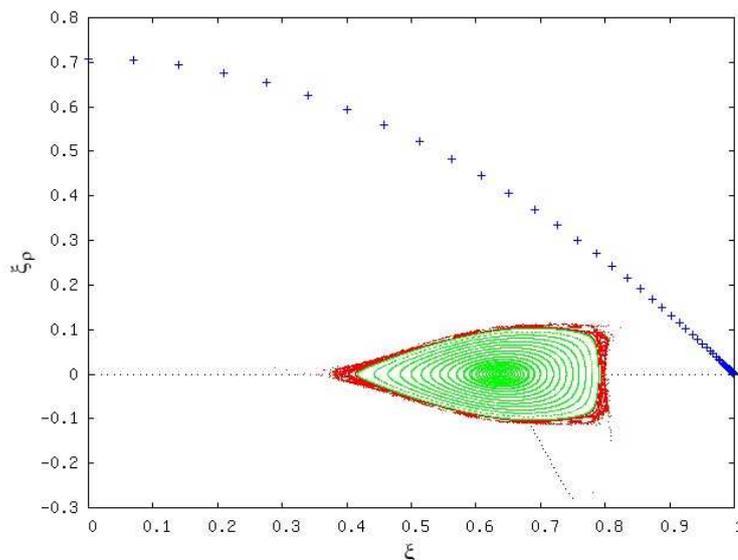


Figura 26: Exemplo de classes de soluções que podem ser obtidas via seção de Poincaré. A parte da figura na cor vermelha representa soluções caóticas, enquanto a parte em verde mostra as soluções periódicas e a solução em azul é um exemplo de solução solitônica.

As soluções divergentes fazem parte de um conjunto extenso de condições de contorno deste modelo, para as quais os campos  $\xi$  e  $\eta$  divergem a tal ponto que nem mesmo a equação (191) é obedecida. Finalmente, observamos que para uma condição de contorno muito específica na superfície  $\eta = 0$ , existe uma solução solitônica, cujos pontos tem a tendência de concentrar-se em um dos vácuos do potencial do modelo em questão ( $\xi \rightarrow 1$ ,  $\xi_\rho \rightarrow 0$ ).

Ao variarmos a constante  $\lambda$  de  $\lambda = 1.2$  até  $\lambda = 2.6$ , e investigarmos os gráficos das equipotenciais de  $V(\xi, \eta)$  semelhantes aqueles do trabalho de Trullinger e Subbaswamy, percebemos que ocorrem mudanças nas equipotenciais e que quando  $\lambda$  aproxima-se de  $\lambda = 3$  há uma concentração das equipotenciais nos vácuos deste modelo (Figuras 27, 28, 29, 30, 31, 32). Contudo, por meio das superfícies da seção de Poincaré podemos averiguar mais profundamente que papel a variação da constante  $\lambda$  representa neste modelo.

Quando fixamos  $C = 1/2$ , que corresponde ao valor que permite a obtenção de soluções solitônicas, e variamos a constante  $\lambda$  de valores próximos a  $\lambda = 1$  até  $\lambda = 2.6$ , seguindo as ideias do trabalho de Winter [22], geramos as Figuras 33, 34, 35, 36, 37 e 38. As últimas figuras citadas, mostram que há uma diminuição das regiões caóticas e estáveis (ilhas) a medida que  $\lambda$  aproxima-se de  $\lambda = 3$ . Há ainda, um aumento considerável das regiões onde existem soluções divergentes, além disso, para cada um desses valores de  $\lambda$ , foi possível determinar sua solução solitônica correspondente.

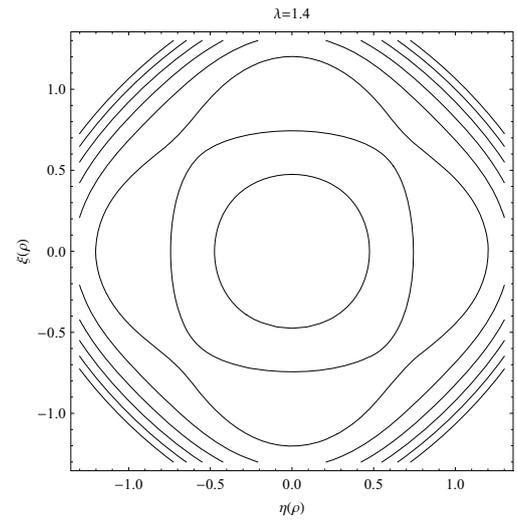
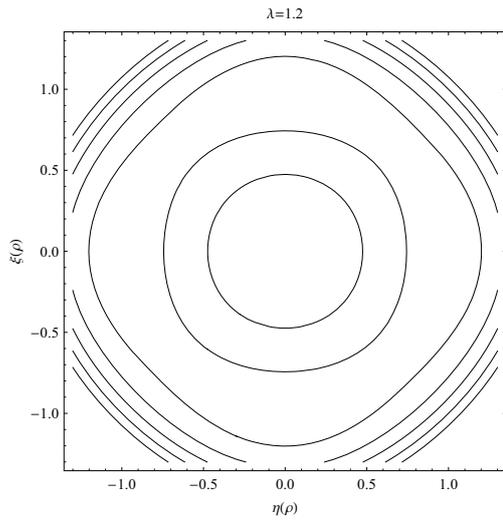


Figura 27: Equipotenciais  $V(\xi, \eta)$  para  $\lambda = 1.2$ . Figura 30: Equipotenciais  $V(\xi, \eta)$  para  $\lambda = 1.4$ .

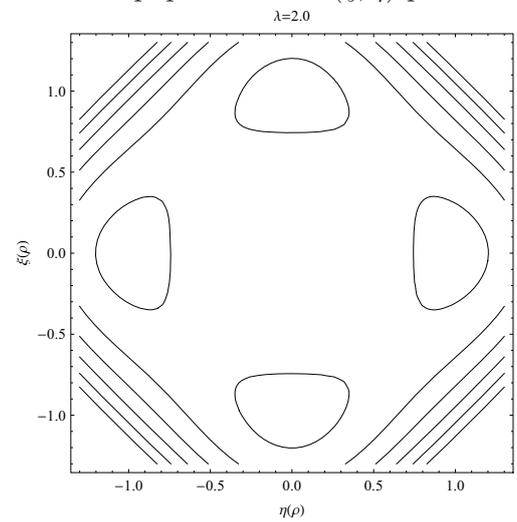
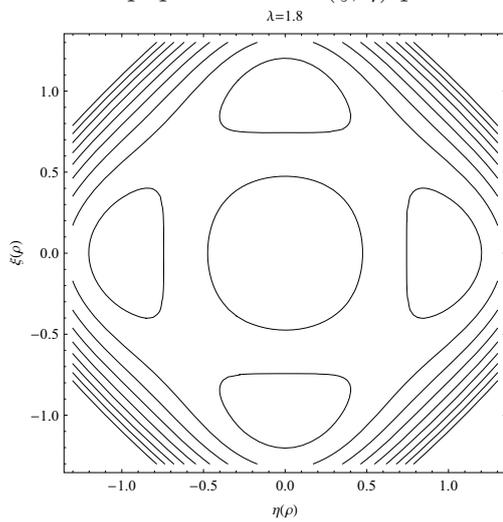


Figura 28: Equipotenciais  $V(\xi, \eta)$  para  $\lambda = 1.8$ . Figura 31: Equipotenciais  $V(\xi, \eta)$  para  $\lambda = 2.0$ .

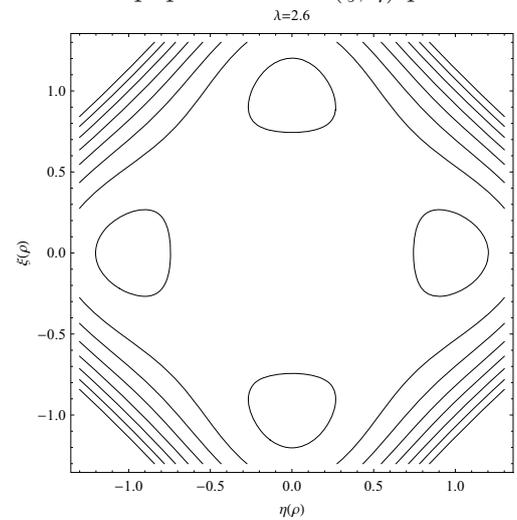
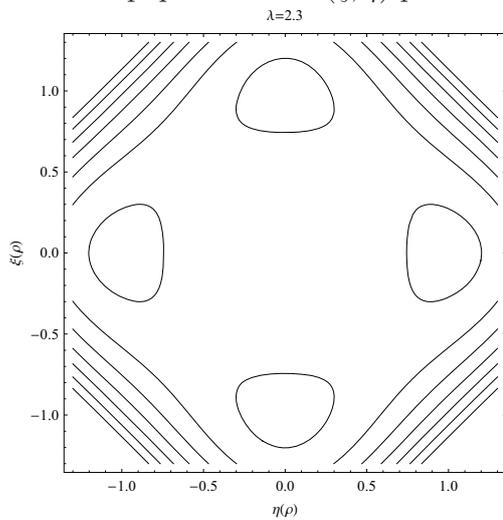


Figura 29: Equipotenciais  $V(\xi, \eta)$  para  $\lambda = 2.3$ . Figura 32: Equipotenciais  $V(\xi, \eta)$  para  $\lambda = 2.6$ .

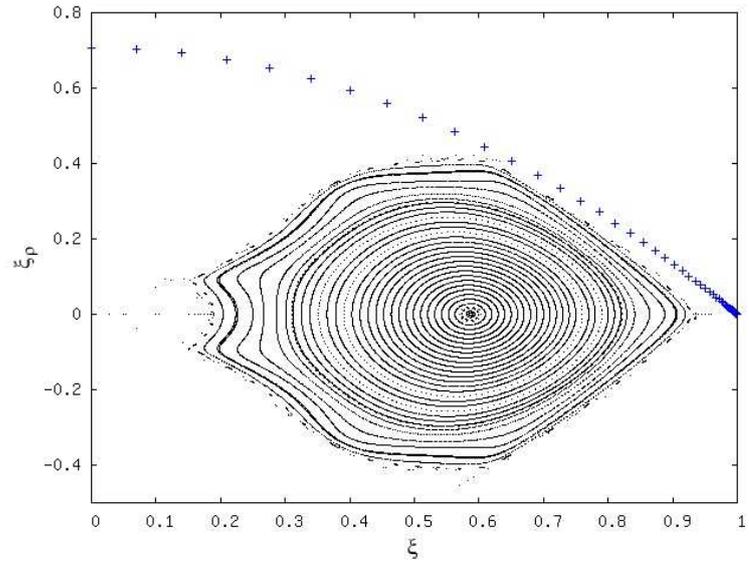


Figura 33: Seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$  e  $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo.

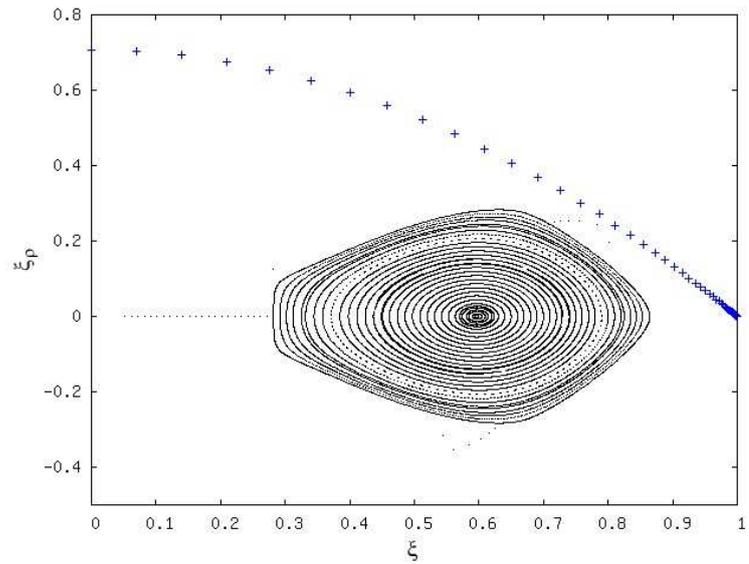


Figura 34: Seção de Poincaré para  $\lambda = 1.4$  e  $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo.

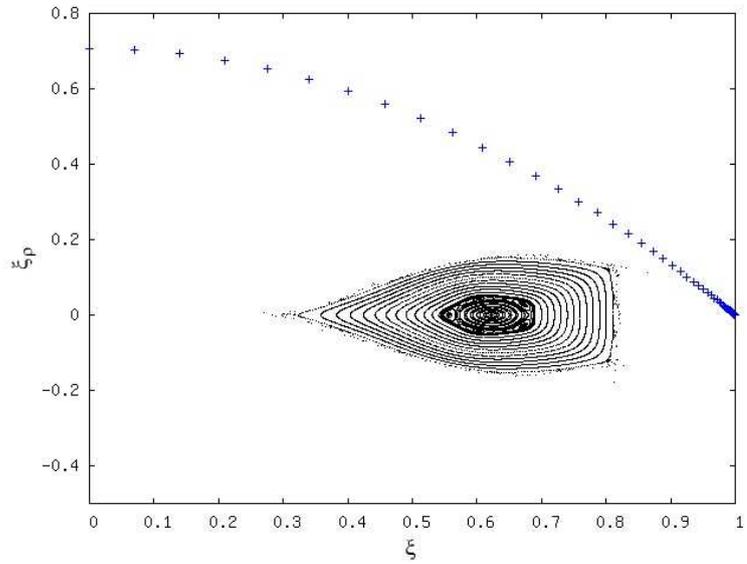


Figura 35: Seção de Poincaré para  $\lambda = 1.8$  e  $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo.

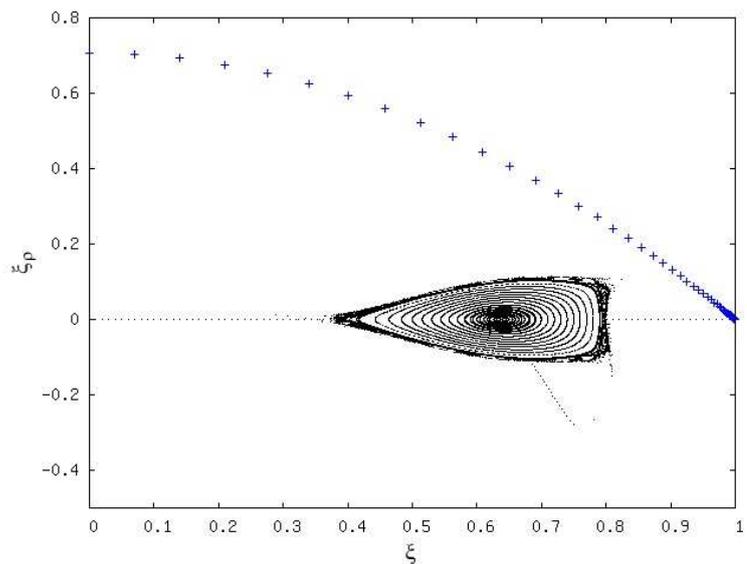


Figura 36: Seção de Poincaré para  $\lambda = 2.0$  e  $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo.

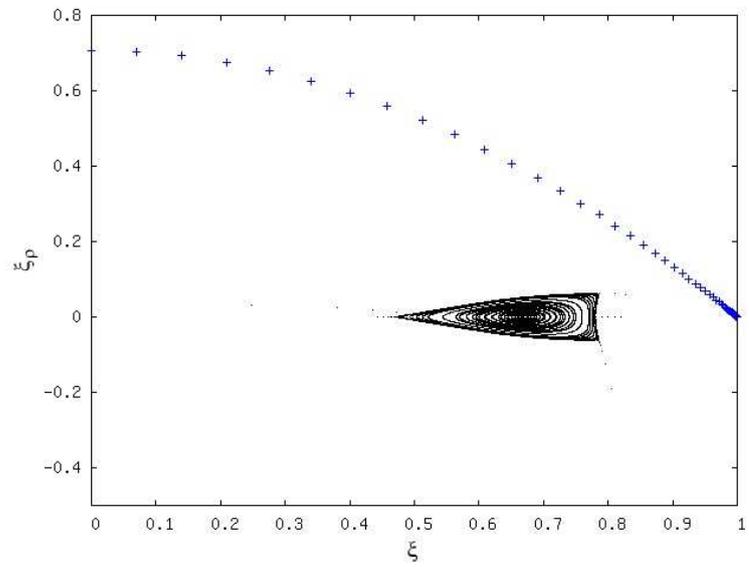


Figura 37: Seção de Poincaré para  $\lambda = 2.3$  e  $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo.

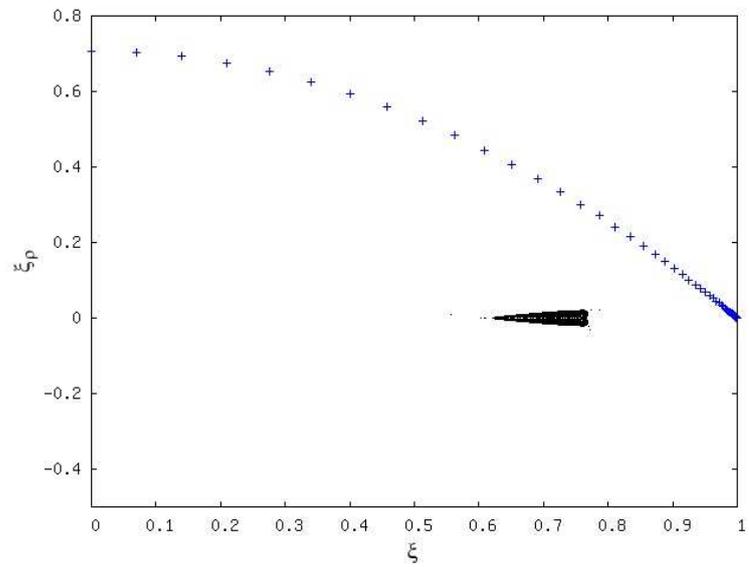


Figura 38: Seção de Poincaré para  $\lambda = 2.6$  e  $C = 1/2$ , a curva em azul representa uma solução solitônica do modelo.

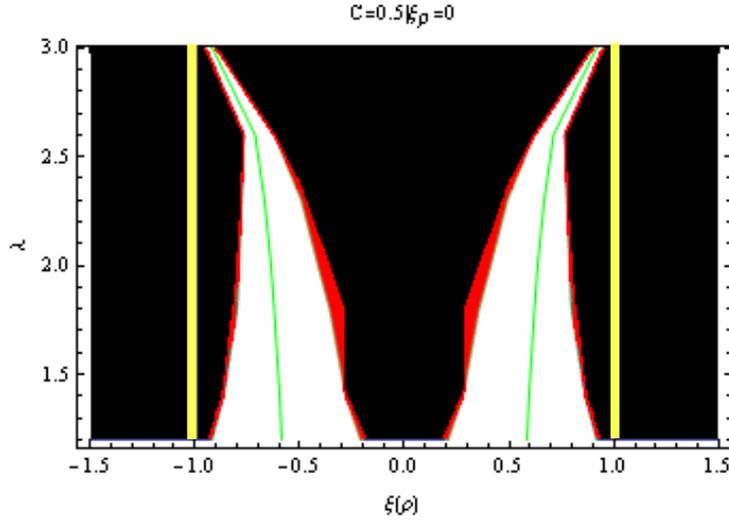


Figura 39: Dependência de  $\lambda$  com relação a  $\xi(\rho)$ . Na região em branco, localizam-se as soluções oscilantes periódicas, a linha verde mostra os pontos de equilíbrio, a parte vermelha representa as soluções caóticas, em preto as divergentes, já as linhas em amarelo são os vácuos das soluções solitônicas.

Na Figura 39 podemos visualizar diretamente para que valores de  $\lambda$  e  $\xi$  com  $C = 1/2$ ,  $\eta = 0$ ,  $\xi_\rho = 0$  e  $\eta_\rho \neq 0$ , localizamos as soluções estáveis, solitônicas, caóticas e divergentes, esta figura foi gerada a partir das ideias contidas em [22].

Antes de continuarmos nossa análise a respeito das seções de Poincaré, é válido discutirmos um procedimento que será muito útil para compreendê-las de forma mais abrangente. Esse procedimento consiste em relacionar as modificações nas seções de Poincaré, bem como suas classes de soluções com o potencial  $V(\xi, \eta)$  e a constante  $C$ . Para isto, substituímos o potencial  $V(\xi, \eta)$  por  $-V(\xi, \eta)$ , e como o potencial está diretamente relacionado com a constante  $C$ , vide equação (191), podemos gerar gráficos de contorno do potencial para os quais os campos  $\xi$  e  $\eta$  obedecem esta equação. Esses contornos são mostrados nas Figuras 40, 41, 42, 43, 44 e 45. Nelas vemos que para  $C = 1/2$  (condição para a qual existem soluções topológicas), o potencial é cortado apenas em quatro pontos, que são seus mínimos globais. Para valores de  $C > 1/2$  não ocorrem cortes no potencial, mas para  $C < 1/2$  verificamos que existem regiões permitidas e proibidas para os campos que obedecem (191), e ainda há valores de  $C$  cujas soluções são confinadas numa certa região do potencial, como pode ser visto na Figura 45.

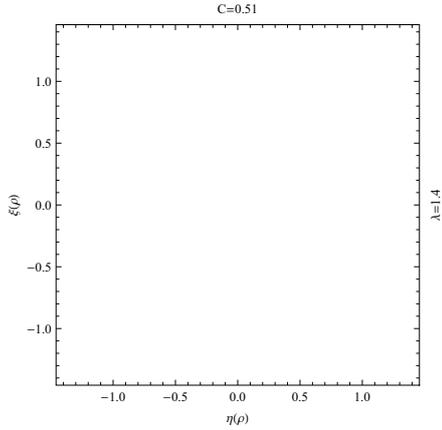


Figura 40: Corte no potencial  $-V(\xi, \eta)$ , com  $\lambda = 1.4$  e  $C = 0.51$ .

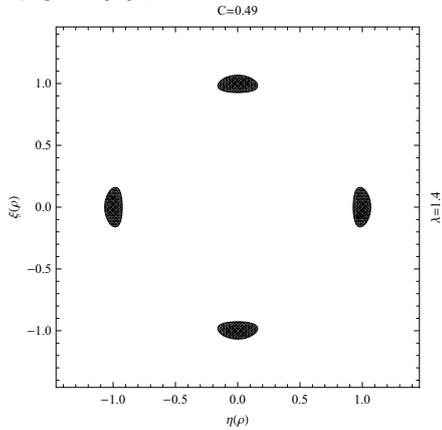


Figura 41: Corte no potencial  $-V(\xi, \eta)$ , com  $\lambda = 1.4$  e  $C = 0.49$ . Regiões proibidas em preto

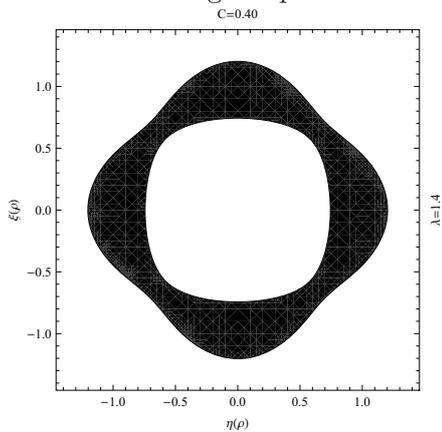


Figura 42: Corte no potencial  $-V(\xi, \eta)$ , com  $\lambda = 1.4$  e  $C = 0.40$ . Regiões proibidas em preto

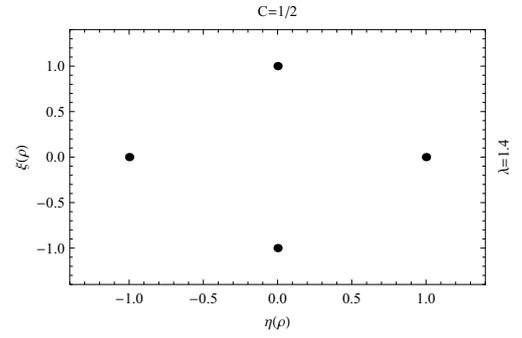


Figura 43: Corte no potencial  $-V(\xi, \eta)$ , com

$\lambda = 1.4$  e  $C = 1/2$ . Regiões proibidas em preto

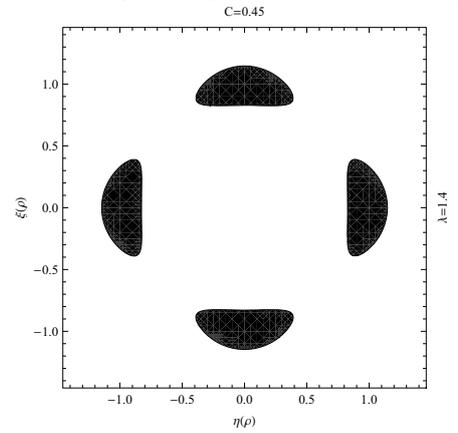


Figura 44: Corte no potencial  $-V(\xi, \eta)$ , com

$\lambda = 1.4$  e  $C = 0.45$ . Regiões proibidas em preto

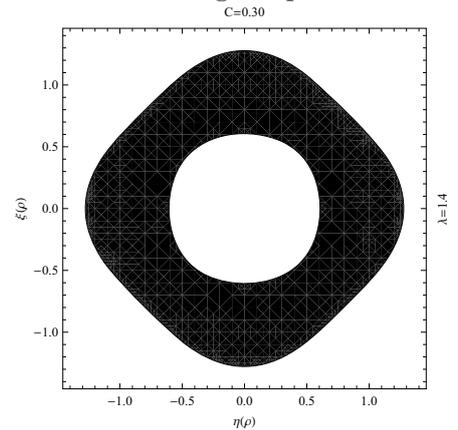


Figura 45: Corte no potencial  $-V(\xi, \eta)$ , com

$\lambda = 1.4$  e  $C = 0.30$ . Regiões proibidas em preto

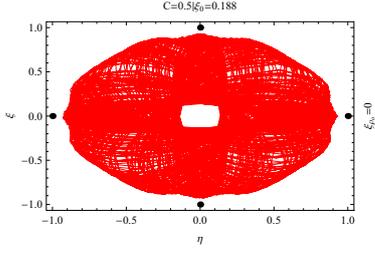


Figura 46: Condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré, com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$

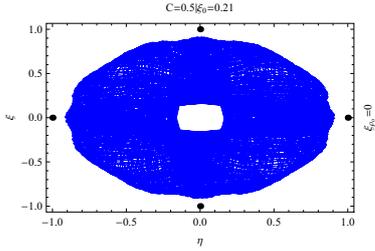


Figura 47: Condição de contorno localizada na região de estabilidade da seção de Poincaré (maior ilha de estabilidade), com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$

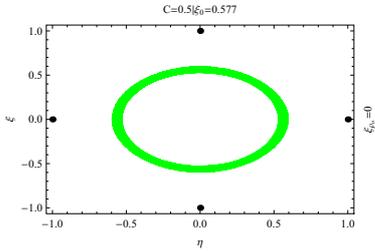


Figura 48: Condição de contorno localizada no ponto de equilíbrio no centro das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré, com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$

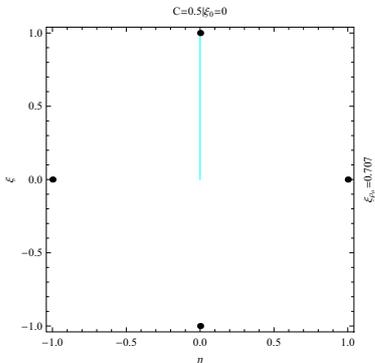


Figura 49: Condição de contorno para a qual obtemos uma solução solitônica do tipo *kink* da seção de Poincaré, com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$

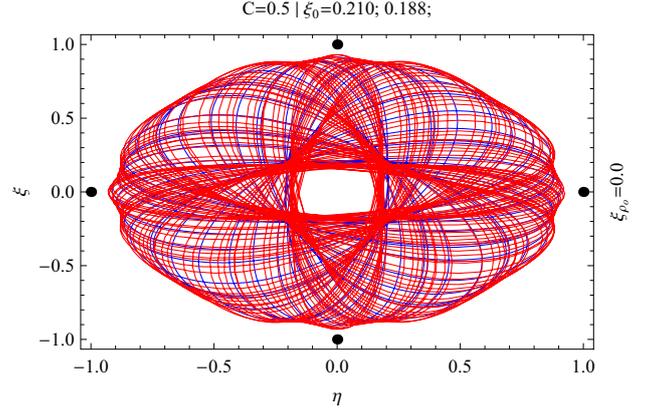


Figura 50: Comparação entre as soluções para a maior ilha de estabilidade (em azul) e para a região caótica (em vermelho).

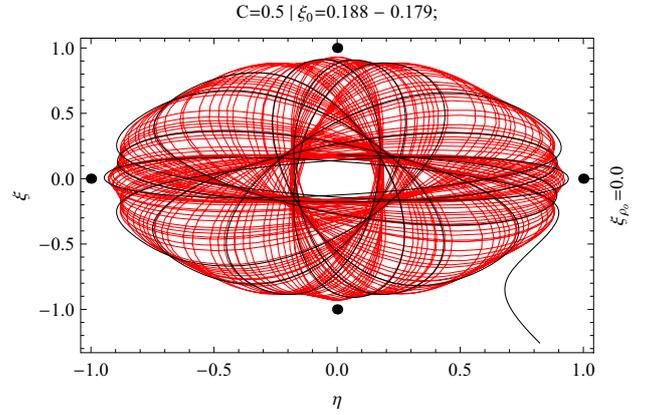


Figura 51: Comparação entre as soluções para região caótica (em vermelho) e para a região de soluções divergentes (em preto).

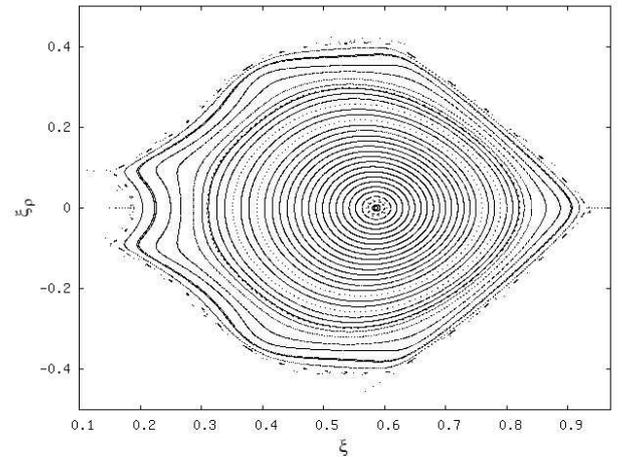


Figura 52: Seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$  e  $C = 1/2$ , em detalhe.

Essas últimas figuras são essenciais para as próximas discussões, pois podemos utilizá-las para melhor compreender os diferentes comportamentos de cada uma das regiões que encontramos nas seções de Poincaré deste modelo. Um exemplo que pode mostrar de forma eficaz o papel que estes cortes do potencial representam, pode ser visto nas Figuras 46, 47, 48, 49, 50, 51 e 52, nas quais consideramos  $\lambda = 1.2$ . Estes gráficos, a menos do último, mostram a dependência funcional entre os campos  $\xi(\rho)$  e  $\eta(\rho)$ .

Segundo as Figuras 46 e 47 observamos que apesar da primeira ter sido gerada a partir de condições de contorno na região caótica da Figura 52, enquanto a segunda é a maior ilha de estabilidade desta seção de Poincaré, os dois gráficos são muito semelhantes. Isto ocorre, por que mesmo pontos localizados nas regiões caóticas acompanham o comportamento das ilhas de estabilidade dessa seção de Poincaré. Podemos verificar ainda, que segundo as Figuras 50 e 51 existe um limiar para o qual a maior ilha preenche o corte do potencial (em azul) e tanto as soluções caóticas (em vermelho) quanto as soluções divergentes (em preto) ultrapassam este limiar. Assim, todo o par de soluções  $\xi(\rho)$  e  $\eta(\rho)$  que ultrapassar a região preenchida pela maior ilha de cada seção, será caótico ou divergente.

As Figuras 48 e 49 retratam as condições de contorno do ponto de equilíbrio (centro das ilhas da seção de Poincaré da Figura 52) e da solução solitônica, respectivamente. Na sequência, as Figuras 53, 54, 55, 56, 57 e 58 expõem as características de diferentes soluções dos campos  $\xi(\rho)$  e  $\eta(\rho)$  para a seção de Poincaré correspondente à  $\lambda = 1.8$  e  $C = 1/2$ . Na Figura 53 é nítido que o comportamento da região caótica possui uma certa simetria, isto ocorre devido ao fato destas soluções acompanharem as ilhas de estabilidade, remetendo as soluções caóticas para a seção de Poincaré com  $\lambda = 1.2$  e  $C = 1/2$ .

Um conjunto interessante de soluções da seção de Poincaré (Figura 58), é aquele em que ocorrem cinco pequenas ilhas de estabilidade no interior das grandes. Ao considerarmos como condição de contorno para os campos  $\xi(\rho)$  e  $\eta(\rho)$ , um dos pontos de equilíbrio de uma das cinco pequenas ilhas, obtemos uma relação entre esses dois campos como aquela da Figura 54. Vemos que existem cinco possíveis trajetórias entrelaçadas que os campos podem seguir, sendo esta a mesma quantidade de pequenas ilhas de estabilidade da seção de Poincaré. Além disso, segundo as Figuras 55 e 56, as soluções divergentes desta seção de Poincaré podem tanto divergirem após uma variação grande de  $\rho$ , acompanhando a região caótica e conseqüentemente as ilhas de estabilidade, o que ocorre na Figura 55, quanto divergirem rapidamente, mesmo para valores iniciais pequenos de  $\xi_\rho$  e  $\eta_\rho$  representando uma grande instabilidade dos campos, Figura 56. Já a Figura 57 trata-se da solução solitônica desta seção de Poincaré.

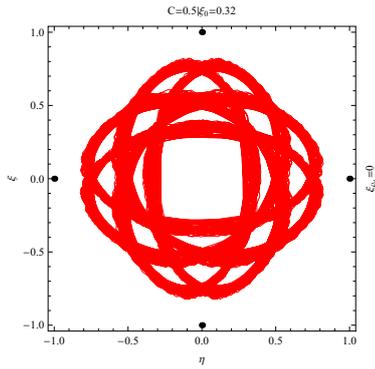


Figura 53: Condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré, com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$

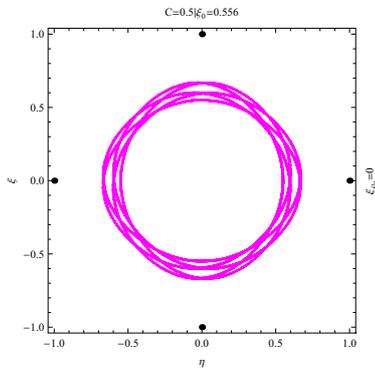


Figura 54: Condição de contorno localizada no centro de uma das cinco ilhas pequenas da seção de Poincaré, com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$

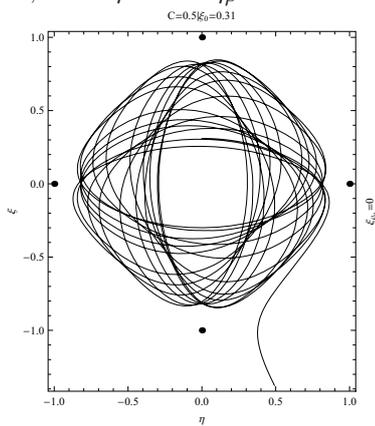


Figura 55: Condição de contorno localizada na região divergente da seção de Poincaré, com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$

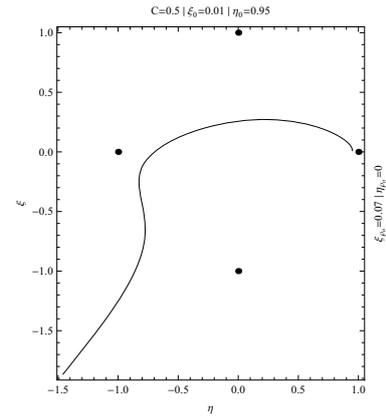


Figura 56: Condição de contorno localizada na região divergente da seção de Poincaré, com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$  com valores baixos para  $\xi_\rho$  e  $\eta_\rho$ .

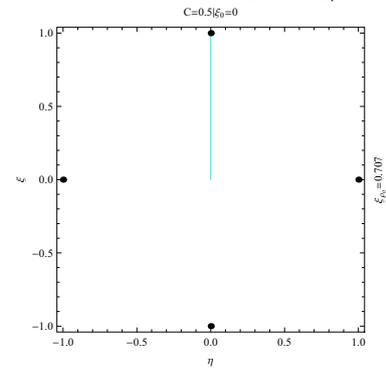


Figura 57: Condição de contorno para a qual obtemos uma solução solitônica do tipo *kink* da seção de Poincaré, com  $\eta = 0$  e  $\eta_\rho = 0$

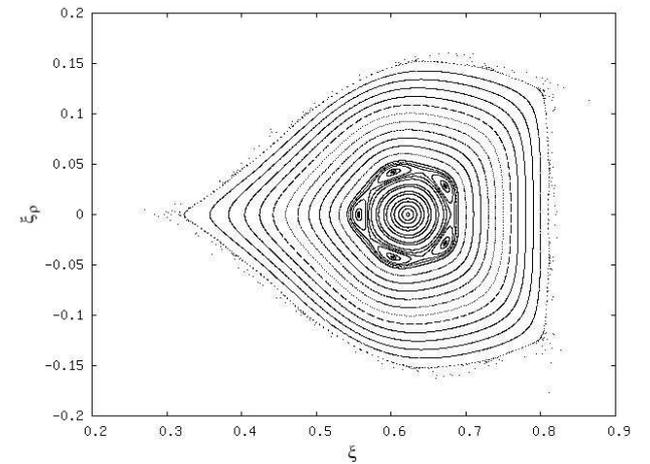


Figura 58: Seção de Poincaré para  $\lambda = 1.8$  e  $C = 1/2$ , em detalhe.

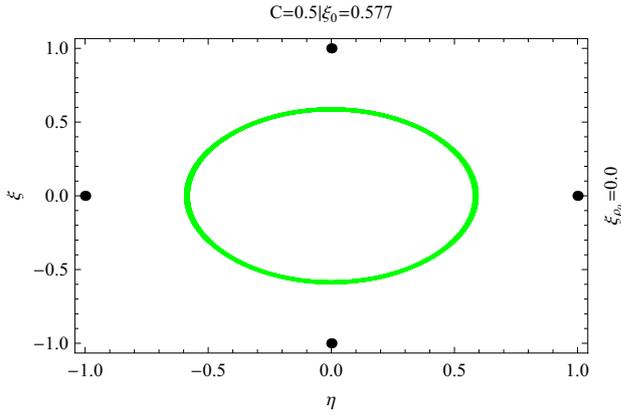


Figura 59:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno do ponto de equilíbrio da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$ .

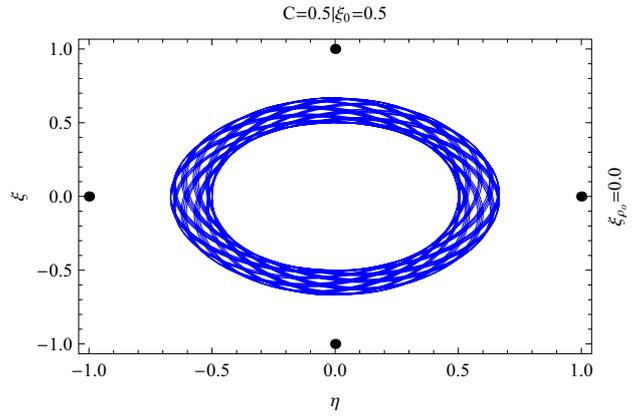


Figura 62:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$

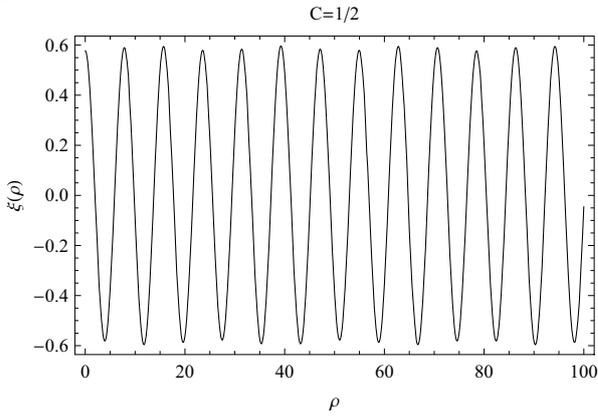


Figura 60: Oscilação do campo  $\xi(\rho)$  no ponto de equilíbrio.

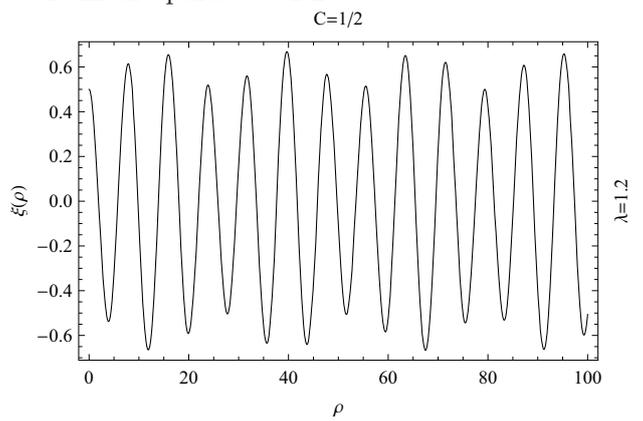


Figura 63: Oscilação do campo  $\xi(\rho)$  em uma das ilhas de estabilidade.

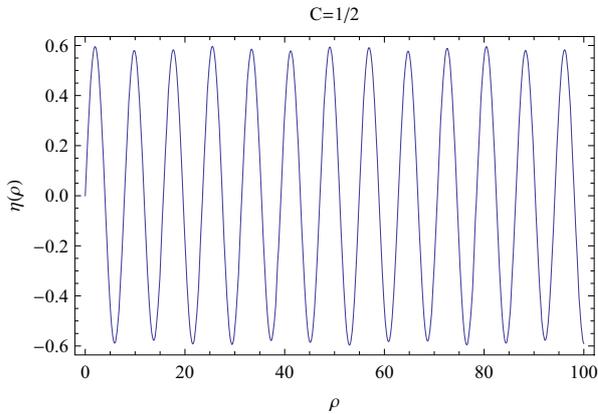


Figura 61: Oscilação do campo  $\eta(\rho)$  no ponto de equilíbrio.

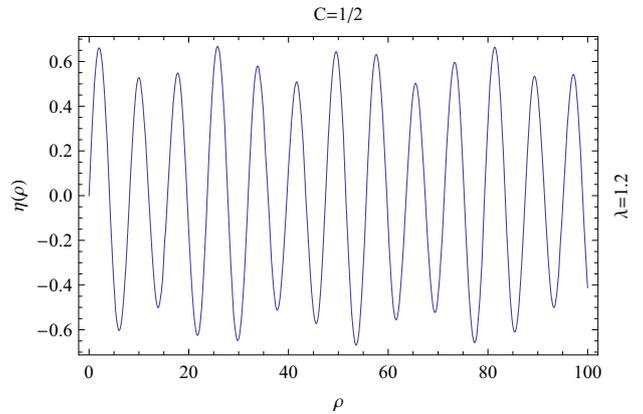


Figura 64: Oscilação do campo  $\eta(\rho)$  em uma das ilhas de estabilidade.

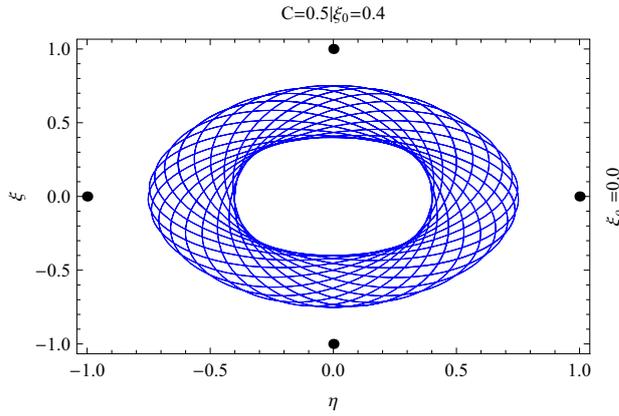


Figura 65:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$

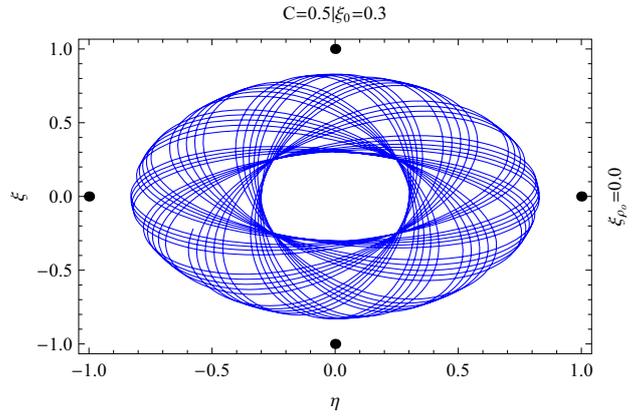


Figura 68:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$

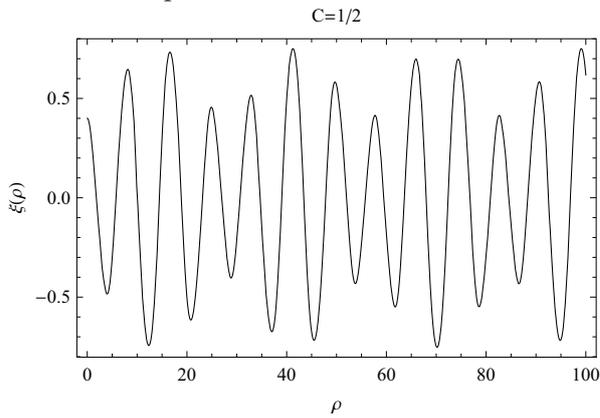


Figura 66: Oscilação do campo  $\xi(\rho)$  em uma das ilhas de estabilidade.

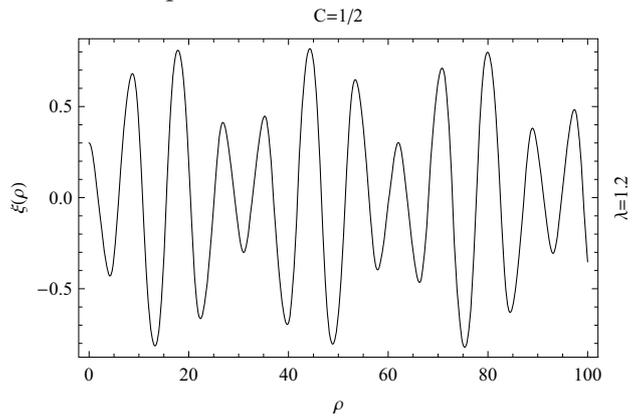


Figura 69: Oscilação do campo  $\xi(\rho)$  em uma das ilhas de estabilidade.

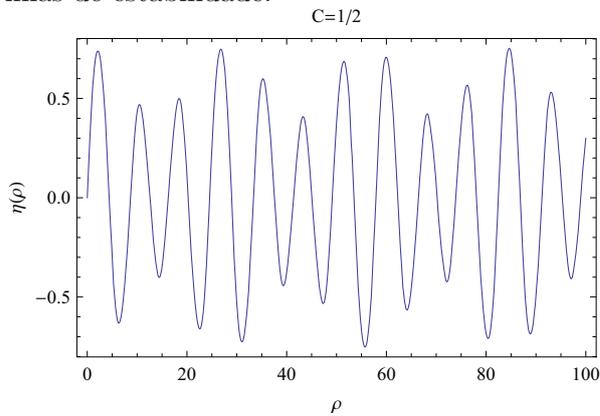


Figura 67: Oscilação do campo  $\eta(\rho)$  em uma das ilhas de estabilidade.

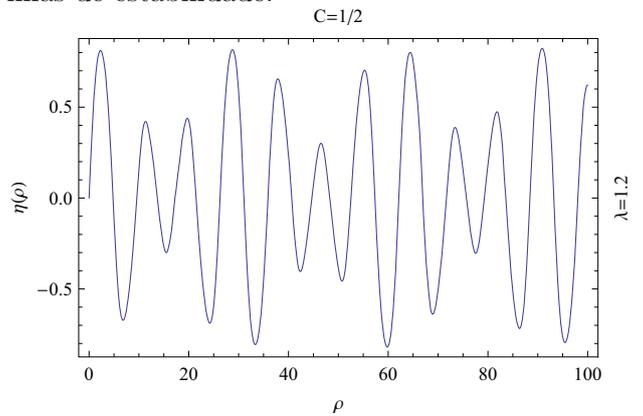


Figura 70: Oscilação do campo  $\eta(\rho)$  em uma das ilhas de estabilidade.

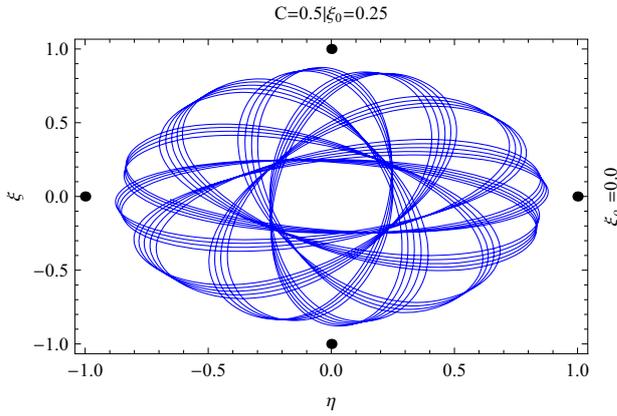


Figura 71:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$

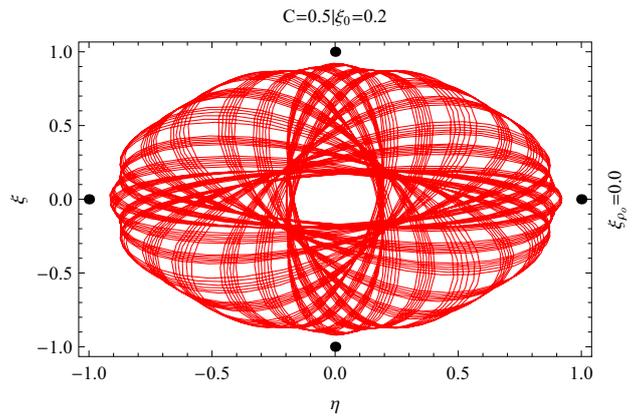


Figura 74:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno da região caótica da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$

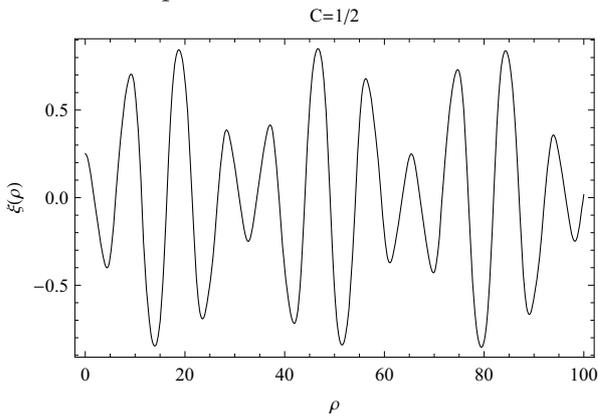


Figura 72: Oscilação do campo  $\xi(\rho)$  em uma das ilhas de estabilidade.

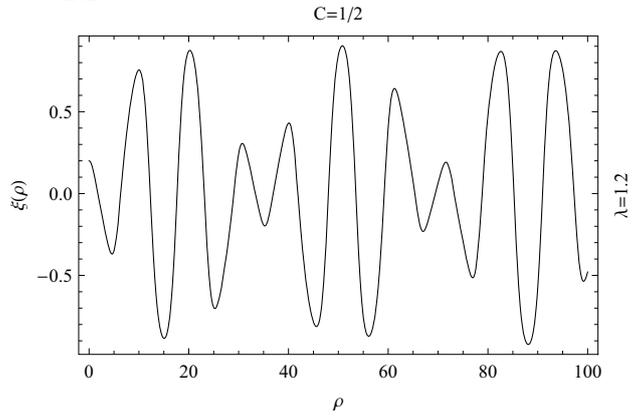


Figura 75: Oscilação do campo  $\xi(\rho)$  na região caótica.

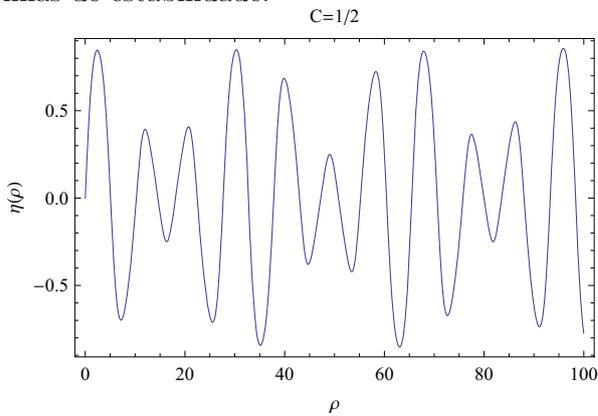


Figura 73: Oscilação do campo  $\eta(\rho)$  em uma das ilhas de estabilidade.

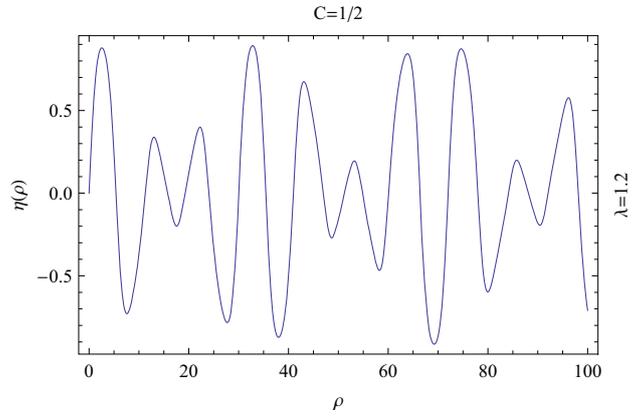


Figura 76: Oscilação do campo  $\eta(\rho)$  na região caótica.

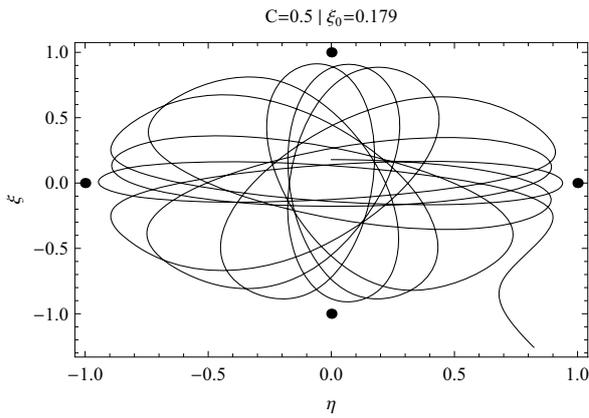


Figura 77:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno da região divergente da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$

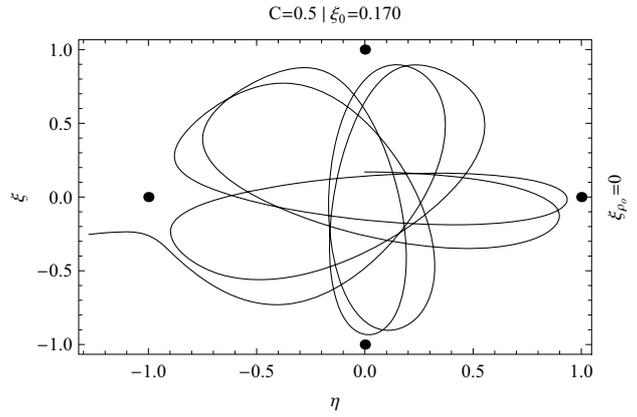


Figura 80:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno da região divergente da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.2$

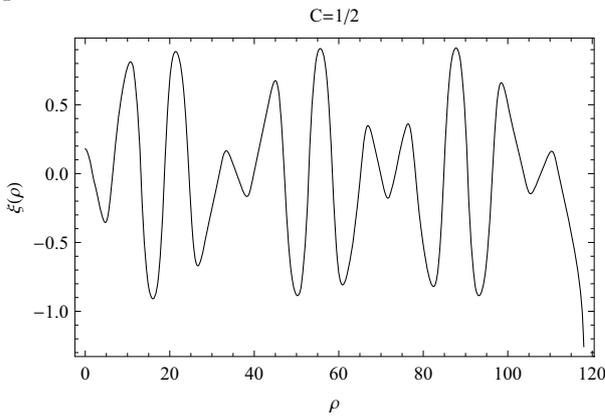


Figura 78: Comportamento do campo  $\xi(\rho)$  na região divergente.

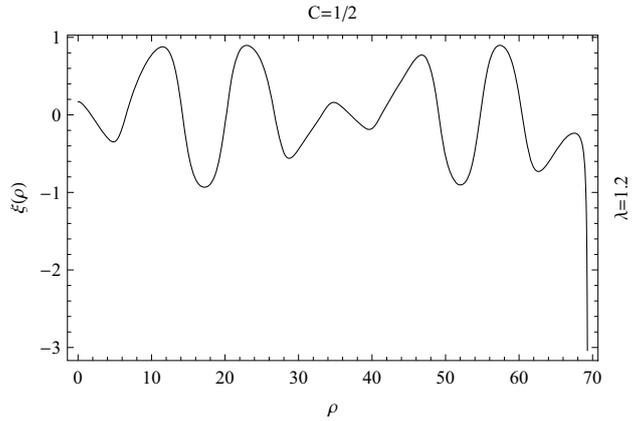


Figura 81: Comportamento do campo  $\xi(\rho)$  na região divergente.

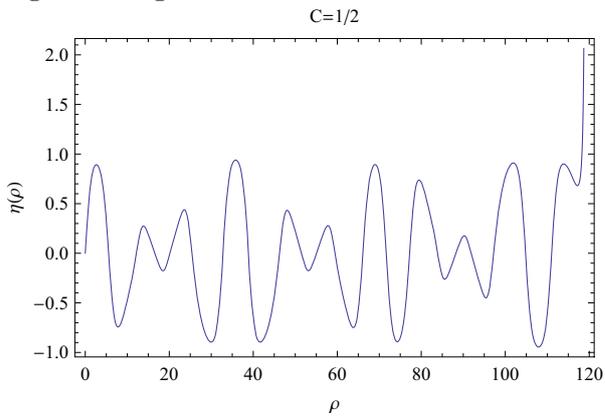


Figura 79: Comportamento do campo  $\eta(\rho)$  na região divergente.

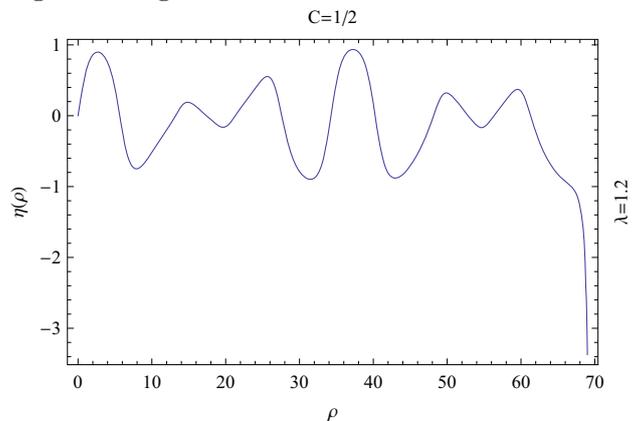


Figura 82: Comportamento do campo  $\eta(\rho)$  na região divergente.

Voltamos agora para uma série de figuras que vão desde a Figura 59 até 82, nas quais investigamos as diversas oscilações dos campos  $\xi(\rho)$  e  $\eta(\rho)$  para o ponto de equilíbrio, as ilhas de estabilidade, a região caótica e a região divergente do caso  $\lambda = 1.2$  e  $C = 1/2$ . Esses gráficos informam como as oscilações dos campos vão desde um comportamento periódico (ponto de equilíbrio) até um comportamento completamente desordenado e em alguns casos divergentes. Isto reforça ainda mais a relevância da seção de Poincaré para visualizarmos claramente onde estão localizadas cada uma das classes de soluções, já que o comportamento dos campos visto dessa maneira, não deixa claro qual solução é caótica e qual faz parte de uma ilha de estabilidade. As diferenças visíveis são apenas entre essas soluções e as figuras referentes ao ponto de equilíbrio, além das figuras das regiões divergentes. Outros valores de  $1 < \lambda < 3$  obtêm características semelhantes a essas aqui discutidas.

Nossos resultados finais permeiam em um estudo sobre valores da constante  $C < 1/2$ , para os quais, os cortes do potencial mostram a existência de regiões proibidas para as soluções dos campos  $\xi(\rho)$  e  $\eta(\rho)$ . Nas Figuras 83 até 87 com  $\lambda = 1.8$  e  $C = 0.33$ , observamos como há ocorrência de soluções estáveis e caóticas na região interna do corte do potencial. Ou seja, apesar desta região do potencial circundada pelas regiões proibidas (em preto), não permitir a aparição de soluções divergentes ela não implica na ausência de caos. O comportamento caótico da seção de Poincaré da Figura 87 é bem discreto, mas podemos vê-lo claramente como sendo o responsável pela parte em branco nas regiões superior e inferior da seção, local que não permite que a seção se “feche” por completo. Novamente, observamos que para  $1 < \lambda < 3$  os resultados são semelhantes à esses discutidos, quando a constante  $C$  é ajustada caso a caso para que não hajam aberturas entre as regiões proibidas do potencial.

Vejam os que ocorre quando a constante  $C$  é escolhida de modo a permitir aberturas entre as regiões proibidas dos cortes do potencial, Figuras 88, 89, 90, 91, 92 e 93. Nelas observamos a existência de soluções caóticas, estáveis e inclusive divergentes na região interna às proibidas pelo corte do potencial. As soluções estáveis ficam confinadas pelas regiões proibidas (Figura 92), enquanto as soluções divergentes existem tanto na interface entre duas regiões proibidas (Figura 89), bem como fora destas regiões (Figura 90), além daquelas que saem do interior do corte do potencial e divergem externamente às regiões proibidas (Figura 91). Estas últimas fazem parte das soluções dos campos, cujas condições de contorno estão na região em branco, localizadas no interior das ilhas de estabilidade das partes superior e inferior da Figura 93.

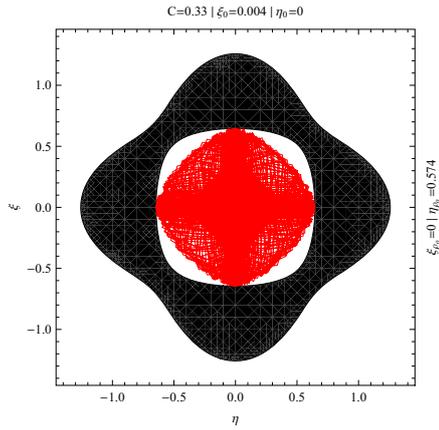


Figura 83:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$  condição de contorno na região caótica da seção de Poincaré desta página. Os campos ficam confinados pelo corte do potencial em  $C = 0.33$ .

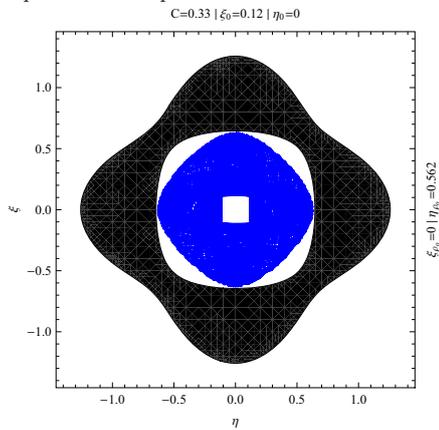


Figura 84:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$  condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré desta página. Os campos ficam confinados pelo corte do potencial em  $C = 0.33$ .

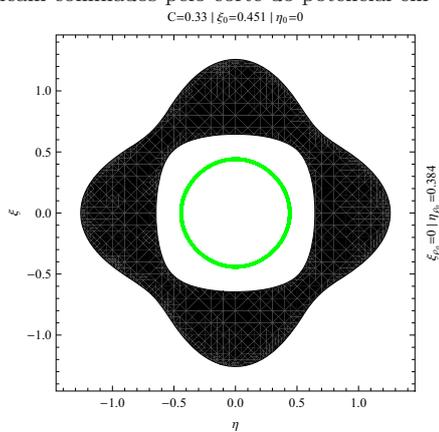


Figura 85:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$  condição de um dos pontos de equilíbrio da seção de Poincaré desta página. Os campos ficam confinados pelo corte do potencial em  $C = 0.33$ .

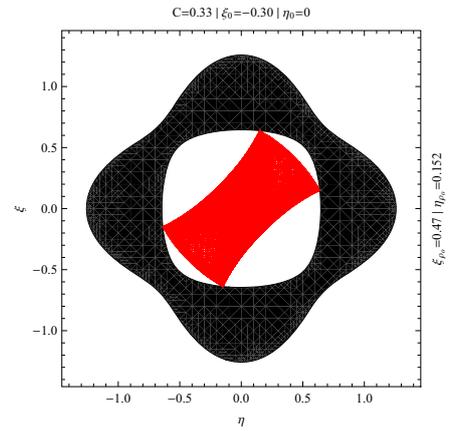


Figura 86:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$  condição de contorno na região caótica da seção de Poincaré abaixo. Os campos ficam confinados pelo corte do potencial em  $C = 0.33$ .

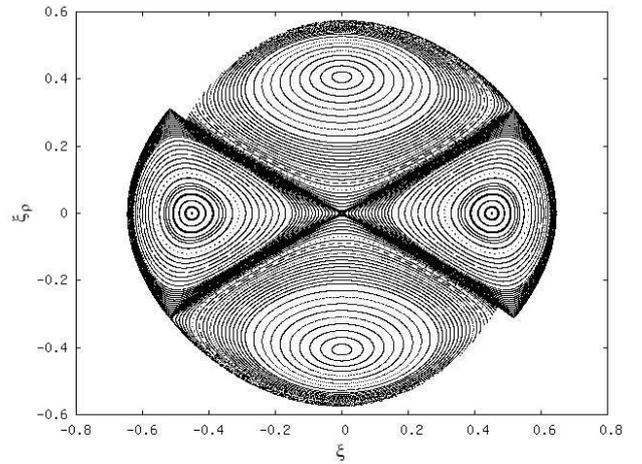


Figura 87: Seção de Poincaré com  $\lambda = 1.8$  e  $C = 0.33$ .

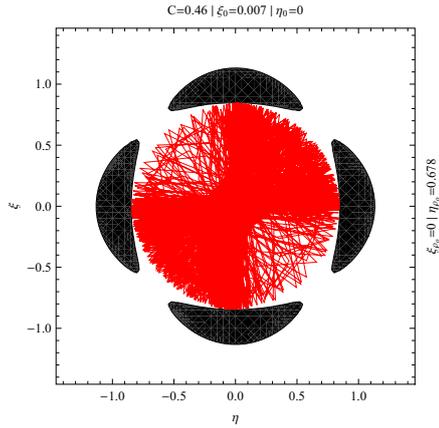


Figura 88:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno na região caótica da seção de Poincaré desta página.

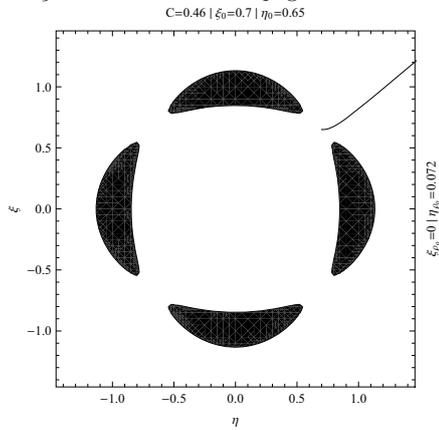


Figura 89:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno entre as regiões proibidas pelo corte do potencial com  $\xi_\rho(0)$  e  $\eta_\rho(0)$  pequenos.

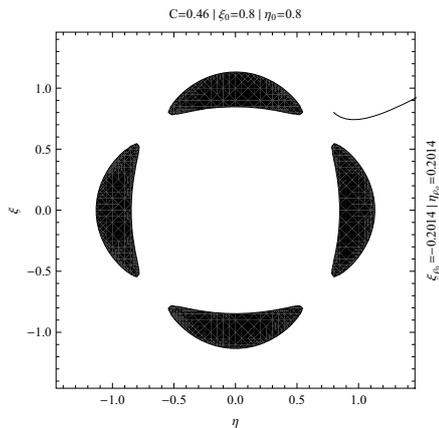


Figura 90:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região externa daquelas proibidas pelo corte do potencial.

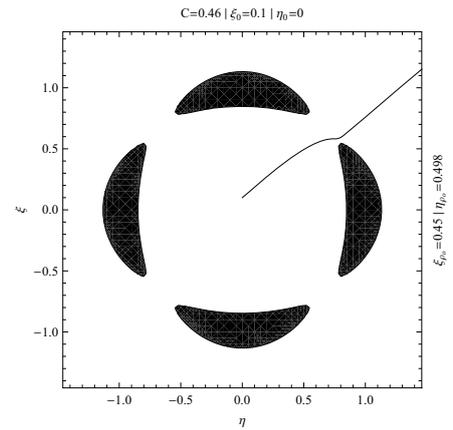


Figura 91:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região divergente da seção de Poincaré abaixo.

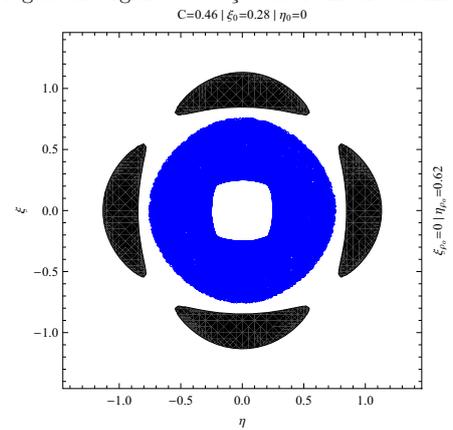


Figura 92:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno de uma das ilhas de estabilidade da seção de Poincaré abaixo.

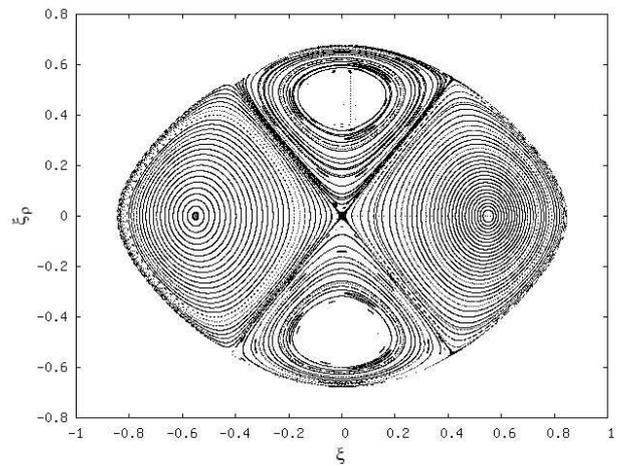


Figura 93: Seção de Poincaré com  $\lambda = 1.2$  e  $C = 0.46$ .

Finalmente, as soluções caóticas podem ficar confinadas no interior das regiões proibidas, bem como podem ocorrer soluções divergentes que acompanham o comportamento caótico e após uma certa variação de  $\rho$  escapam do interior das regiões proibidas, como pode ser visto nas Figuras 94 e 95 para  $\lambda = 1.4$  e  $C = 0.47$  e  $C = 0.46$ , respectivamente. Esses dois gráficos em conjunto com aqueles que vão desde a Figura 94 até a Figura 99 deixam evidente que conforme o valor da constante  $C$  se aproxima de  $C = 1/2$ , as soluções contidas em meio ao caos divergem após pequenas variações de  $\rho$ , e ainda, as regiões de estabilidade diminuem cada vez mais. Já quando a constante  $C$  ajusta-se de tal forma, que o corte do potencial ocorre de modo a fechar qualquer abertura entre as regiões proibidas, há um aumento significativo das ilhas de estabilidade, e apesar disso não eliminar as soluções caóticas, este ajuste faz com que não haja soluções divergentes para condições de contorno no interior das regiões proibidas. Contudo, para  $C \neq 1/2$  não há o aparecimento de soluções solitônicas para este modelo, como era esperado, já que os cortes do potencial só passam pelos mínimos globais, ou vácuos dos campos, para  $C = 1/2$ .

Uma maneira mais efetiva de determinar o valor de  $C$ , para o qual existe essa mudança de comportamento observada nas Figuras 97, 98 e 99 é calcular os mínimos locais do potencial  $V(\xi, \eta)$  (126) e relacionar esses mínimos com a constante  $C$  via (191). Neste intuito, devemos aplicar o procedimento usual para determinar os pontos de mínimos de funções com duas variáveis, ao potencial mencionado. Calculando as derivadas parciais de primeira ordem do potencial, para cada um dos campos e igualando a zero nos valores mínimos, obteremos

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \xi} \right|_{\xi_0, \eta_0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \eta} \right|_{\xi_0, \eta_0} = 0, \quad (192)$$

ou seja,

$$-\xi_0 + \lambda \xi_0 \eta_0^2 + \xi_0^3 = 0 \quad \text{e} \quad -\eta_0 + \lambda \eta_0 \xi_0^2 + \eta_0^3 = 0. \quad (193)$$

Resolvendo este sistema de equações encontramos os candidatos a mínimos locais

$$\xi_0 = \pm \sqrt{1 - \frac{(\lambda - 1)\lambda}{\lambda^2 - 1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda + 1}} \quad \text{e} \quad \eta_0 = \pm \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda + 1}}, \quad (194)$$

o que significa que  $\lambda > -1$  para que os mínimos do potencial sejam reais. Calculando o determinante da matriz jacobiana, temos

$$D = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \right|_{\xi_0, \eta_0} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right|_{\xi_0, \eta_0} - \left( \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{\xi_0, \eta_0} \right)^2, \quad (195)$$

substituindo (194) no resultado anterior, verificamos que

$$D = \frac{4}{(1 + \lambda)^2}. \quad (196)$$

Portanto, o resultado anterior implica que  $D > 0$ , ou seja, eles são mínimos locais. Agora utilizando esses mínimos em (191), concluimos que

$$C_0 = \frac{1}{1 + \lambda}. \quad (197)$$

Aplicamos esse valor de  $C_0$  para o caso em que  $\lambda = 1.4$ , verificamos que nesta situação  $C_0 = 5/12$  e para comprovar a mudança de comportamento das seções antes e depois deste valor de  $C_0$ , geramos as Figuras 100, 101, 102 e 103. Nelas verificamos que para  $C_0 = 5/12 + 1/1000$  existem dois pontos de equilíbrio no espaço de fase da seção de Poincaré, e há possibilidade de soluções divergentes pois ainda existe uma pequena abertura no corte do potencial  $-V(\xi, \eta)$ . Já para  $C_0 = 5/12 - 1/1000$ , existem quatro pontos de equilíbrio na seção de Poincaré, além do fato de não serem mais permitidas soluções divergentes, para condições de contorno localizadas no interior do corte do potencial.

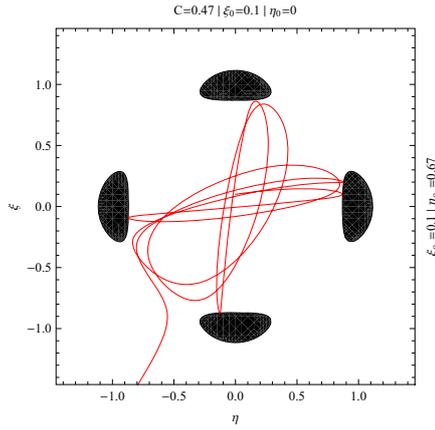


Figura 94:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.4$  com  $C = 0.47$ .

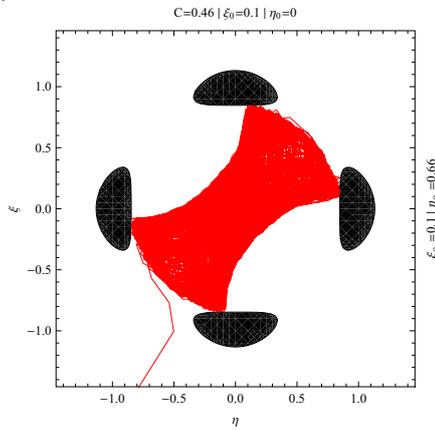


Figura 95:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.4$  com  $C = 0.46$ .

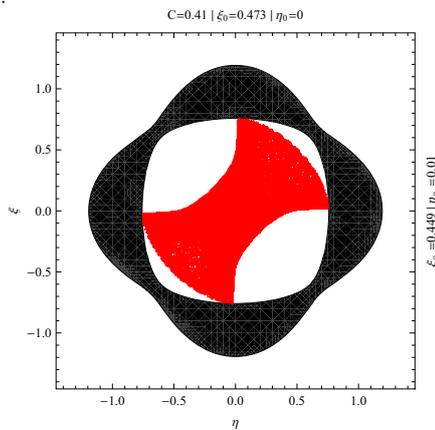


Figura 96:  $\xi(\rho)$  contra  $\eta(\rho)$ , condição de contorno localizada na região caótica da seção de Poincaré para  $\lambda = 1.4$  com  $C = 0.41$ .

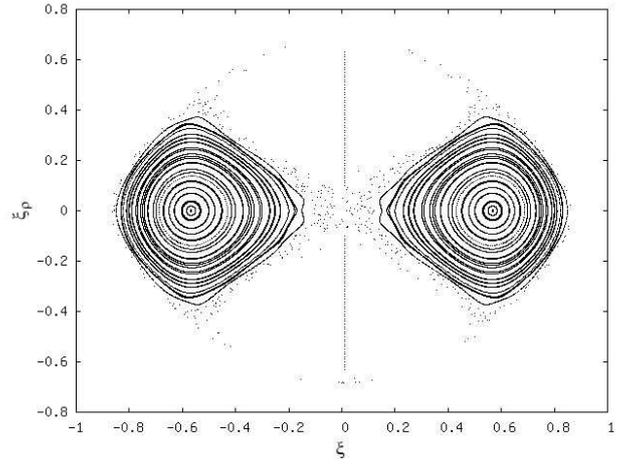


Figura 97: Seção de Poincaré com  $\lambda = 1.4$  e  $C = 0.47$

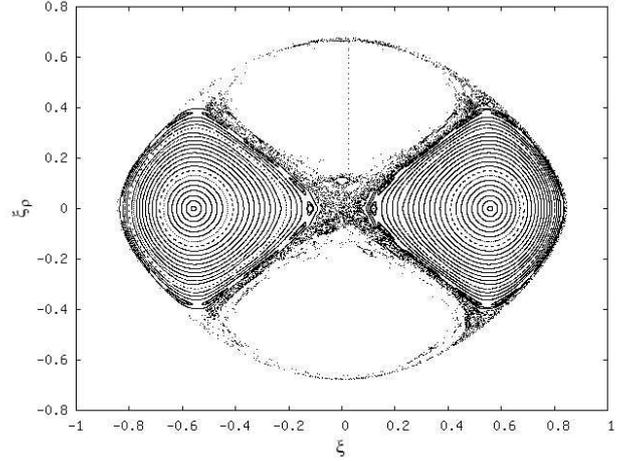


Figura 98: Seção de Poincaré com  $\lambda = 1.4$  e  $C = 0.46$

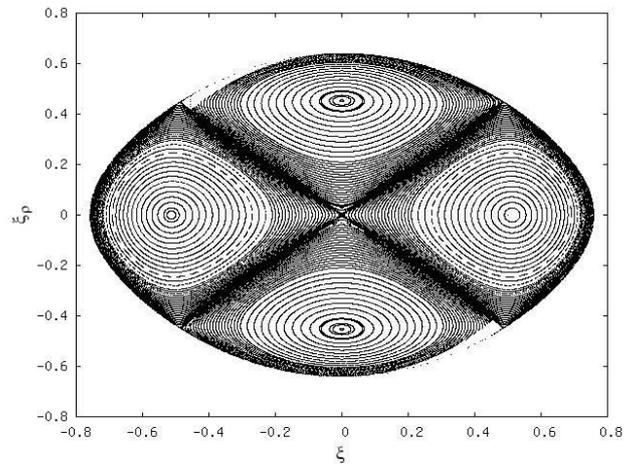


Figura 99: Seção de Poincaré com  $\lambda = 1.4$  e  $C = 0.41$

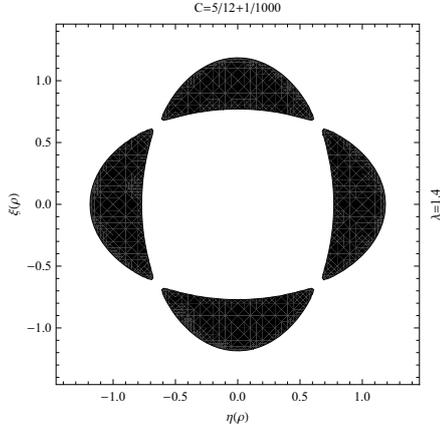


Figura 100: Corte do potencial  $-V(\xi, \eta)$  para  $\lambda = 1.4$  e  $C_0 = 5/12 + 1/1000$ . Observamos uma pequena abertura no corte que é suficiente para permitir soluções divergentes.

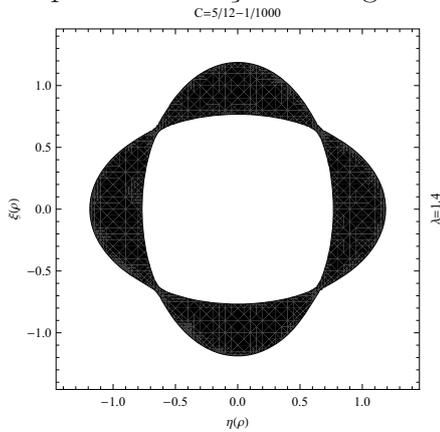


Figura 101: Corte do potencial  $-V(\xi, \eta)$  para  $\lambda = 1.4$  e  $C_0 = 5/12 - 1/1000$ . Observamos que não há aberturas no corte, assim ocorrem quatro pontos de equilíbrio na seção de Poincaré.

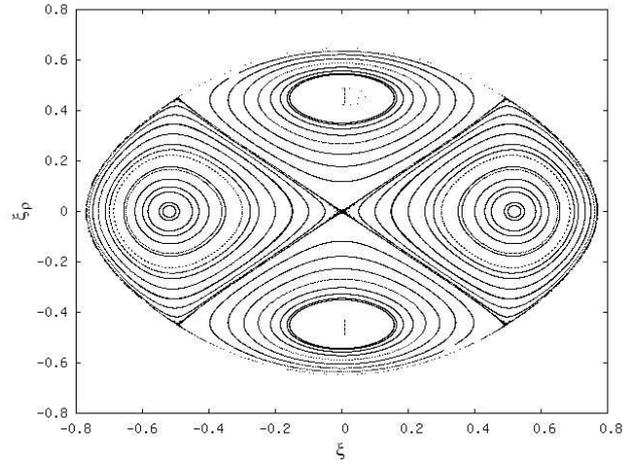


Figura 102: Seção de Poincaré para  $\lambda = 1.4$  e  $C_0 = 5/12 + 1/1000$ .

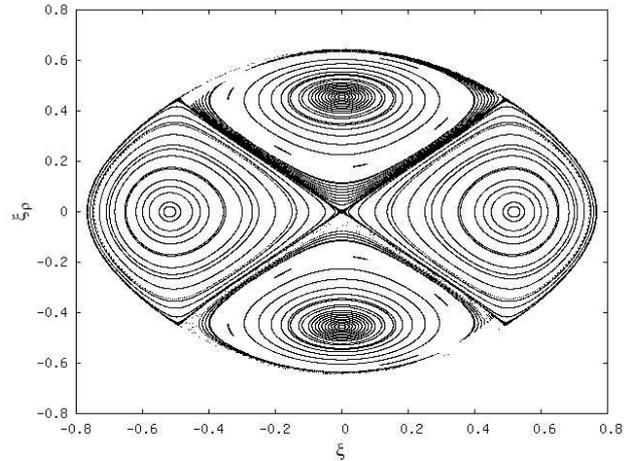


Figura 103: Seção de Poincaré para  $\lambda = 1.4$  e  $C_0 = 5/12 - 1/1000$ .

## 6 Conclusões

Neste estudo, mostramos a eficiência de um novo método, capaz de prever analiticamente as características das soluções topológicas de alguns potenciais de dois campos acoplados. A grande vantagem desse método, é a riqueza de informações que ele permite obter, além de evitar a dificuldade de resolver as equações diferenciais relacionadas aos modelos propostos. Vimos ainda, que os resultados determinados para estes potenciais confirmam as conjecturas feitas por Dutra em [10], a respeito das soluções solitônicas que não podem ser obtidas analiticamente. Acreditamos que esse método pode ser aplicado a outros potenciais que possuam soluções topológicas.

Por meio do mapeamento do superpotencial proposto em [11, 12] em um superpotencial generalizado [10], conseguimos obter uma equação de órbita mais completa que aquela informada por Bazeia e seus colaboradores. Esta equação nos permitiu determinar novos twistons para o polietileno que possuem degenerescências em suas energias, as quais eliminamos adicionando um termo perturbador ao potencial original. Assim, ilustramos uma situação em que obtemos soluções numéricas que reproduzem com boa aproximação os casos estudados na bibliografia mencionada referente aos twistons.

No que diz respeito às discussões sobre o trabalho de Trullinger e Subbaswamy [18], determinamos com sucesso novas soluções topológicas para o caso em que  $\lambda = 3$  via método BPS, verificamos ainda que a energia BPS destas soluções é a mesma obtida pelos autores previamente citados. Além disso, calculamos a estabilidade de nossas soluções para  $\lambda = 3$  e assim como as de Trullinger e Subbaswamy, elas são estáveis e os autovalores responsáveis por sua estabilidade são os mesmos encontrados por esses autores em seu trabalho. Já os resultados das figuras da seção de Poincaré mostraram que podem ocorrer regiões de estabilidade, caóticas, divergentes e solitônicas no espaço de fase de um dos campos.

Isto revela que as soluções solitônicas podem coexistir com as soluções caóticas e que mesmo para casos em que ajustamos a constante  $C$  de forma a eliminar os sólitons, ainda assim, as regiões caóticas perdurarão. Outra característica importante é que a existência do sóliton modifica o comportamento do sistema dinâmico, pois para valores de  $C$  nos quais os cortes do potencial confinam completamente as soluções, o espaço de fase é “dominado” por soluções oscilantes estáveis. Agora para  $C$  próximo de  $C = 1/2$ , ou então valores dessa constante cujos cortes permitem que ocorram divergências de certas soluções, existe um aumento relevante das soluções caóticas e divergentes no espaço de fase da seção de Poincaré.

Ao gerarmos as seções de Poincaré variando a constante  $\lambda$  de  $\lambda \simeq 1$  até  $\lambda \simeq 3$  com  $C = 1/2$ , observamos que as regiões de estabilidade diminuem significativamente a medida que aumentam as regiões caóticas e divergentes. Realizamos diversas tentativas para obter seções de Poincaré com  $\lambda \geq 3$  e  $C = 1/2$ , contudo não conseguimos encontrar regiões de estabilidade para tais valores de  $\lambda$ . Outra característica que merece ser ressaltada é que conseguimos obter uma expressão analítica relacionando os mínimos locais do potencial  $V(\xi, \eta)$  e a constante  $C$ , a partir da qual fomos capazes de determinar, em função de  $\lambda$ , qual é o valor exato do corte do potencial  $-V(\xi, \eta)$  em que ocorre o confinamento das soluções estáveis e caóticas. Além disso, a partir do corte mencionado, a seção de Poincaré possui quatro pontos de equilíbrio, o que faz com que a seção torne-se aproximadamente simétrica. A pequena quebra de simetria é ocasionada pela existência de regiões caóticas para esse corte. Seria interessante aplicarmos futuramente o método da superfície da seção de Poincaré em outros modelos da teoria clássica e quântica de campos e procurarmos por semelhanças com as discussões nessa dissertação.

Outro novo resultado relevante baseado em [18] foi a descoberta das soluções (152) e (153), para  $\bar{\lambda} = 9/8$ . Contudo essas soluções possuem a particularidade de serem provenientes das equações diferenciais de primeira ordem e não serem soluções das equações de movimento do modelo. Seria interessante um estudo futuro mais detalhado a respeito dessas soluções e se há possibilidade de encontrar, a partir da modificação que realizamos no método BPS, novas soluções analíticas para reproduzir os resultados calculados numericamente por Trullinger e Subbaswamy. Essas modificações podem ser úteis na determinação de novas soluções analíticas para outros modelos estudados largamente em teoria clássica de campos.

## Referências

- [1] Russell, J. S. “**Report on Waves**”, 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 311.
- [2] Lemos, N. A. “**Mecânica Analítica**”, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007.
- [3] Lee, T. D. “**Particle and Introduction to Field Theory**”, Harwood Academic Publishers, New York, 1981.
- [4] Rajaraman, R. “**Solitons and Instantons**”, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [5] Vachaspati, T. “**Kinks and Domain Walls**”, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [6] Nikolaevskii, E. S.; Schur, L. N. **JETP Letters** 36 (1982) 218.
- [7] Bohr, T.; Van Hecke, M.; Mikkelsen, R.; Ipsen, M. **Physical Review Letters** 86 (2001) 5482.
- [8] Bohr, T.; Van Hecke, M.; Mikkelsen, R. **Physical Review E** 67 (2003) 046207.
- [9] Bambah, B. A.; Lakshmibala, S.; Mukku, C.; Sriram, M. S. **Physical Review D** 47 (1993) 4677.
- [10] de Souza Dutra, A. **Phys. Lett. B** 626 (2005) 249.
- [11] Bazeia, D.; Ventura, E. **Chem. Phys. Lett.** 303 (1999) 341.
- [12] Bazeia, D.; Ventura, E.; Simas, A. **Chem. Phys. Lett.** 320 (2000) 587.
- [13] Mansfield, M. L.; Boyd, R. H. **J. Polym. Sci. Phys. Ed.** 16 (1978) 1227.
- [14] Zhang, F.; Collins, M. A. **Phys. Rev. E** 49 (1994) 5804.
- [15] Prasad, M. K.; Sommerfield, C. M. **Phys. Rev. Lett.** 35 (1975) 760.  
Bolgomol’nyi, E. B. **Sov. J. Nucl. Phys.** 24 (1976) 449.
- [16] Trullinger, S. E.; Sarker, S.; Bishop, A. R. **Physics Letters A** 59 (1976) 255.
- [17] Calogero, F.; Degasperis, A. **Lett. Nuovo Cim.** 16 (1976) 425.
- [18] Trullinger, S. E.; Subbaswamy, K. R. **Physical Review A** 19 (1979) 1340.

- [19] Subbaswamy, K. R.; Mills, D. L. **Physical Review Letters** 41 (1978) 1079.
- [20] Winter, O. C.; Murray, C. D., “**Atlas of the Planar, Circular Restricted Three-Body Problem. I. Internal Orbits**”, Queen Mary and Westfield College, London, 1994.
- [21] Fiedler-Ferrara, N. F.; do Prado, C. P. C. “**Caos, uma Introdução**”, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1994.
- [22] Winter, O. C. **Planetary and Space Science** 48 (2000) 23.