

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

163

IFT-D.005/00

OK

A Técnica dos Pletismos e Aplicações

José Antonio Castilho Alcarás

Maio de 2000



Agradecimentos

Agradeço aos colegas do IFT que souberam manter o clima de amizade e camaradagem que foi sempre uma das características marcantes da nossa instituição.

In Memoriam

Izabel Alcarás Gimenez, minha mãe,
Jorge Leal Ferreira, Vladislovas Vanagas, Laurence Christian Biedenharn, colaboradores e amigos,
Antonio Rubi, amigo .

Resumo

Apresentamos um pequeno resumo da teoria do Grupo Simétrico e das funções simétricas necessário para a compreensão das funções de Schur e dos pletismos. Em seguida definimos pletismos, damos suas propriedades e expomos um procedimento para o seu cálculo. Finalmente aplicamo-los em alguns exemplos em Física Atômica e em Estrutura Nuclear.

Palavras Chaves: Grupo Simétrico; Funções de Schur; Pletismos; Classificação de estados nucleares

Áreas do conhecimento: 1.05.01.01-0, 1.05.04.01-0

Abstract

A short summary of the theory of Symmetric Group and symmetric functions needed to follow the theory of Schur functions and plethysms is presented. After, one defines plethysm, gives its properties and presents a procedure for its calculation. Finally, some applications in Atomic Physics and Nuclear Structure are given.

Índice

1	Funções de Schur e Pletismos	1
1.1	Noções Básicas do Grupo Simétrico e Funções de Schur	1
1.2	Matrizes Invariantes e Pletismos	7
2	Cálculo de Pletismos	16
2.1	Resultados particulares e técnica de cálculo	16
2.2	Técnica de Cálculo	21
3	Aplicações	24
3.1	Aplicações Gerais	24
3.2	Aplicação em Estrutura Nuclear	29
A	Classificação dos estados de mais baixa energia para os núcleos p	41
B	Classificação dos estados de mais baixa energia para os núcleos $s - d(17 \leq A \leq 40)$	43
	Referências	56

Capítulo 1

Funções de Schur e Pletismos

Neste capítulo introduziremos inicialmente noções básicas do grupo simétrico $S(n)$ necessárias ao entendimento da nomenclatura usada na teoria dos pletismos. Em seguida definiremos pletismo, exporemos suas propriedades, daremos resultados gerais e mostraremos, no capítulo seguinte, como é possível calcular os pletismos de um dado grau explorando essas propriedades e esses resultados gerais.

1.1 Noções Básicas do Grupo Simétrico e Funções de Schur

O grupo Simétrico $S(n)$ é o grupo de permutações de n objetos e tem $n!$ elementos. Cada elemento é designado por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

significando que o elemento 1 é substituído por p_1 , o 2 por p_2 , etc. e $p_1, p_2, \dots, p_n$ é uma permutação de $1, 2, \dots, n$.

Uma permutação que troca $m \leq n$ objetos cíclicamente é chamada de *ciclo de comprimento m* . As permutações com a mesma estrutura de ciclos pertencem à mesma classe (de conjugação). Por essa razão, as classes de $S(n)$ são rotuladas pela estrutura de ciclos de seus elementos. Assim, uma classe genérica ρ se escreve como $\rho \equiv (1^{\rho_1}, 2^{\rho_2}, \dots)$ significando que os seus elementos têm ρ_1 ciclos de comprimento 1, ρ_2 ciclos de comprimento 2, etc.

Uma partição $[\lambda]$ de n é um conjunto de n inteiros não negativos $[\lambda] \equiv [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ satisfazendo as relações

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n. \quad (1.2)$$

Em geral omite-se os λ_i iguais a zero e exponencia-se os repetidos. Por exemplo, $[31] \equiv [3100]$, $[2^2 1^3] \equiv [2211100]$. Usaremos a prática comum de designar com letra

grega uma partição genérica e por letra(s) latina(s) uma partição particular. Por exemplo, $[n] \equiv [n0...0]$, $[p, q] \equiv [p, q, 0...0]$.

As representações irredutíveis (irreps) $[\lambda]$ de $S(n)$ são rotuladas pelas partições de n e têm dimensão[3][2]

$$d_{[\lambda]} = \frac{n! \prod_{i < j=2}^t (\lambda_i - \lambda_j - i + j)}{(\lambda_1 + t - 1)! (\lambda_2 + t - 2)! \dots \lambda_t!} \quad (1.3)$$

sendo t a última componente não nula de $[\lambda]$.

A uma dada partição $[\lambda]$ associa-se um *diagrama de Young* (ou *de Ferrer*) que consiste numa figura com λ_1 quadrados na primeira linha, λ_2 na segunda, etc. Por exemplo,

$$[21] \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} .$$

Devido a essa associação costuma-se referir aos λ_i como as *linhas* de $[\lambda]$.

Quando preenchemos esses diagramas com os números $1, 2, \dots, n$ de tal modo que os números nos quadrados crescem da esquerda para a direita e de cima para baixo eles recebem o nome de *tableau de Young* padrão (ou regular) (standard or regular Young tableau). Quando no preenchimento os números na linha apenas não decrescem, podendo repetir-se, mas na coluna continuam crescendo de cima para baixo, o tableau passa a se chamar tableau de Young de coluna estrita (strict-column tableau).

Dada a partição $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0]$ define-se sua partição conjugada por

$$[\tilde{\lambda}] = [p^{\lambda_p}, (p-1)^{\lambda_{p-1}-\lambda_p}, \dots, 2^{\lambda_2-\lambda_3}, 1^{\lambda_1-\lambda_2}] . \quad (1.4)$$

O diagrama de Young de $[\tilde{\lambda}]$ é obtido do de $[\lambda]$ trocando linhas por colunas.

Por extensão , definimos a conjugada ou transposta de uma expressão que seja uma combinação linear de partições como a expressão resultante tomando-se as conjugadas das partições presentes na expressão original.

Uma notação para partição devida a Frobenius[7] e que será usada mais adiante é a seguinte: 1) constrói-se o digrama de Young da partição $[\lambda]$; 2) a cada elemento na posição (ii) da diagonal principal, chamamos de a_i o número de quadrados à sua direita e de b_i o daqueles que estão abaixo dele; 3) A partição $[\lambda]$ será designada pela matriz

$$[\lambda] \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

onde r é o número de elementos na diagonal principal do diagrama.

Dadas n quantidades $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ é possível definir 3 tipos de funções simétricas nas mesmas[1]: a_i, h_r e s_i .

As funções a_i aparecem na expansão do polinômio de raízes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$g(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) = \sum_{r=0}^n (-)^r a_r x^{n-r} \quad (1.6)$$

e são dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_i \alpha_i, \\ a_2 &= \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j, \\ a_3 &= \sum_{i < j < k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k, \\ &\text{-----}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

ou seja, cada a_i é a soma dos produtos de r dos α 's com índices ordenados em ordem estritamente crescente (*i.e.* sem repetição).

As funções h_r são definidas pela expansão

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} h_r x^r, \quad (1.8)$$

com

$$f(x) = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i x), \quad (1.9)$$

resultando que cada h_r é a soma dos produtos de r dos α 's com índices ordenados em ordem não decrescente, *i.e.*, incluindo repetições. Segue de (1.7) -(1.9) que

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1 &= a_1 = \sum_i \alpha_i, \\ h_2 &= a_1^2 - a_2 = \sum_i \alpha_i^2 + \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j, \\ h_3 &= a_3 - 2a_1 a_2 + a_1^3 = \sum_{i < j < k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \sum_{i < j} (\alpha_i \alpha_j^2 + \alpha_i^2 \alpha_j) + \sum_i \alpha_i^3, \\ &\text{-----}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

As funções s_r são definidas como as somas das r potências dos α 's, ou seja,

$$s_r = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^r. \quad (1.11)$$

Dada a matriz A de dimensão $n \times n$ e elementos a_{ij} , define-se o seu *imanante* $|A|^{[\lambda]}$ pela relação

$$|A|^{[\lambda]} = \sum_P \chi^{[\lambda]}(P) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}, \quad (1.12)$$

onde $\chi^{[\lambda]}(P)$ é o carácter da permutação P , de componentes $p_1, p_2, \dots, p_n$, na irrep $[\lambda]$ de $S(n)$

Como na irrep $[1^n]$ o carácter de uma dada permutação é a sua paridade, $|A|^{[1^n]}$ é o determinante de A . Do mesmo modo, como na irrep $[n]$ o carácter de todas as permutações é igual a 1, temos que $|A|^{[n]}$ é o permanente de A .

A função de Schur $\{\lambda\}$ de grau $r = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ nas quantidades $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ é definida em termos de imanante pela relação

$$\{\lambda\} = \frac{1}{r!} |Z_r|^{[\lambda]}, \quad (1.13)$$

onde Z é a matriz

$$Z_r = \begin{pmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ s_{r-1} & s_{r-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_1 & r-1 \\ s_r & s_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_2 & s_1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Para as partições simétrica e antissimétrica as funções de Schur assumem expressões bastante simples, ou seja,

$$\{r\} = h_r \text{ e } \{1^r\} = a_r. \quad (1.15)$$

Como exemplo, damos abaixo as expressões explícitas das funções de Schur de grau $r=3$:

$$\begin{aligned} \{3\} &= \frac{1}{6}(s_1^3 + 3s_1s_2 + 2s_3) = \sum_{i < j < k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \sum_{i < j} (\alpha_i \alpha_j^2 + \alpha_i^2 \alpha_j) + \sum_i \alpha_i^3 \equiv h_3, \\ \{21\} &= \frac{1}{3}(s_1^3 - s_3) = 2 \sum_{i < j < k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \sum_{i < j} (\alpha_i \alpha_j^2 + \alpha_i^2 \alpha_j), \\ \{1^3\} &= \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + s_3) = \sum_{i < j < k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \equiv a_3. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Littlewood deduziu o seguinte procedimento gráfico para se obter a forma explícita da função de Schur $\{\lambda\}$ de grau r :

1) Constroi-se todos os tableau de Young de coluna restrita associados à partição $\{\lambda\}$ com o número 1, a seguir aqueles com os números 1 e 2, depois aqueles com os números 1, 2 e 3, etc;

2) A cada tableau associamos a expressão $\sum_{i < j < k \dots} \alpha_i^{n_1} \alpha_j^{n_2} \alpha_k^{n_3} \dots$, onde n_1 é o número de vezes que o número 1 é usado, n_2 o número de vezes que o número 2 é usado, etc;

3) A função de Schur é a soma dessas expressões.

Usando-se as expressões explícitas dos imanantes na definição da função de Schur obtém-se a relação

$$\{\lambda\} = \frac{1}{r!} \sum_{\rho} n(\rho) \chi^{[\lambda]}(\rho) s_1^{\rho_1} s_2^{\rho_2} \dots \quad (1.17)$$

que fornece o elo fundamental entre as funções de Schur e os caracteres do grupo simétrico. Na equação acima a soma é feita sobre as classes $(\rho) \equiv (1^{\rho_1}, 2^{\rho_2}, \dots)$ e n_{ρ} é número de elementos da classe.

Funções de Schur de grau n' podem ser “multiplicadas” por funções de Schur de grau n'' de 3 maneiras diferentes e em cada uma delas o “produto” se expressa como uma combinação linear de funções de Schur todas de mesmo grau n''' .

Esses 3 tipos de multiplicação são:

1) Produto interno (inner product) ou direto

$$\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} = \sum_{\lambda'''} \alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda'''\}) \{\lambda'''\};$$

2) Produto externo (outer product)

$$\{\lambda'\} \{\lambda''\} = \sum_{\lambda'''} \alpha(\{\lambda'\} \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda'''\}) \{\lambda'''\};$$

3) Pletismo

$$\{\lambda\} \otimes \{\lambda''\} = \sum_{\lambda'''} \alpha(\{\lambda\} \otimes \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda'''\}) \{\lambda'''\},$$

sendo $\alpha(\dots)$ o coeficiente da expansão.

No produto interno todos os graus das partições envolvidas são iguais, isto é, $n' = n'' = n''' = n$ e os coeficientes α são os coeficientes da redução do produto de Kronecker das irreps $[\lambda']$ e $[\lambda'']$ de $S(n)$. Tais coeficientes podem ser obtidos pela fórmula geral para a redução do produto direto de irreps de grupos finitos

$$\alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda'''\}) = \frac{1}{g} \sum_{\rho} n(\rho) \chi^{[\lambda']}(\rho) \chi^{[\lambda'']}(\rho) \chi^{*[\lambda''']}(\rho) \quad (1.18)$$

onde a soma é sobre as classes (ρ) , $n(\rho)$ é o número de elementos da classe e $\chi^{[\lambda]}(\rho)$ é o caráter da classe (ρ) na irrep $[\lambda']$.

Embora geral, essa fórmula se torna impraticável para valores grandes de n . Nesses casos há fórmulas mais eficientes de cálculo [Veja Refs.[38],[3].].

No produto externo temos $n''' = n' + n''$ e os coeficientes α são obtidos simplesmente fazendo o produto das função de Schur nas variáveis $(x_1, x_2, \dots, x_{n'})$ pela função de Schur nas variáveis $(y_1, y_2, \dots, y_{n''})$ e fazendo a redução relativamente às variáveis $(z_1, z_2, \dots, z_{n'''})$ com $z_i = x_i$ para $1 \leq i \leq n'$ e $z_{n'+i} = y_i$ para $1 \leq i \leq n''$.

Littlewood obteve o procedimento seguinte para obter-se os coeficientes do produto externo que passou a chamar-se regras de Littlewood .

Constroe-se os diagramas de Young associados às irreps $[\lambda']$ e $[\lambda'']$. Deixa-se um deles vazio (digamos o de $[\lambda']$) e o outro preenche-se com letras a na primeira linha, b na segunda, etc. Em seguida acrescenta-se ao final das linhas do primeiro diagrama todos os quadrados do segundo com as letras a de modo a obter-se diagramas regulares, isto é, diagramas com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots (\lambda_i = \lambda'_i + (n.o \text{ de quadrados adicionados}))$. Repete-se a operação para cada diagrama resultante usando-se as letras b , depois as c , etc. Dos diagramas resultantes mantemos apenas aqueles que satisfizerem: a) Não contêm letras repetidas nas colunas e b) Contando-se os quadrados adicionados de cima para baixo, da direita para a esquerda, em cada ponto que se parar o número de quadrados com a letra b não ultrapassa o número daqueles com a letra a , o número dos com letra c não ultrapassa o daqueles com letra b ,etc.

A cada diagrama remanescente associa-se a função de Schur correspondente. Uma vez que essa associação independe das letras adicionados, em geral aparecem multiplicidades.

Os coeficientes do produto externo fornecem os coeficientes da decomposição do produto de Kronecker das irreps $[\lambda']$ e $[\lambda'']$ de $GL(n)$, o grupo linear geral de n dimensões, em irreps $[\lambda''']$.

Encontramos na literatura [1][3][38] tabelas de produtos externos para $n' + n'' = 1, 2, \dots, 14$. Tradicionalmente tais tabelas são organizadas como a tabela abaixo para $n' + n'' = 5$.

	{5}	{41}	{32}	{31 ² }	{2 ² 1}	{21 ³ }	{1 ⁵ }	
{4}{1}	1	1						{1 ⁴ }{1}
{31}{1}		1	1	1				{21 ² }{1}
{2 ² }{1}			1		1			{2 ² }{1}
{3}{2}	1	1	1					{1 ³ }{1 ² }
{21}{2}		1	1	1	1			{21}{1 ² }
{1 ³ }{2}				1		1		{3}{1 ² }
	{1 ⁵ }	{21 ³ }	{2 ² 1}	{31 ² }	{32}	{41}	{5}	

Os números na parte interna da tabela dão a multiplicidade das funções de Schur $\{\lambda'''\}$ que aparecem na decomposição do produto $\{\lambda'\}\{\lambda''\}$ e os quadrados vazios significam zero. As funções de Schur da aba superior correspondem aos produtos que aparecem na aba esquerda e as da aba inferior aos produtos da aba direita.

Os coeficientes α do produto externo servem também a um outro propósito: eles fornecem os coeficientes da redução da irrep $[\lambda''']$ de $S(n''')$ em irreps de $S(n') \times S(n'')$ na fórmula

$$[\lambda'''] = \frac{1}{2} \sum_{\lambda', \lambda''} \alpha(\{\lambda'\}\{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda'''\}) [\lambda'] [\lambda''].$$

Da tabela acima obtemos as reduções $S(5) \supset S(3) \times S(2)$, $S(5) \supset S(4) \times S(1)$, ..., etc.

Os pletismos serão tratados na seção seguinte.

1.2 Matrizes Invariantes e Pletismos

Seja $A \equiv (a_{ij})$ a matriz de dimensão $n \times n$ não singular que representa a transformação linear inversível $\mathcal{A}$ de um ponto X em um ponto X' de um espaço vetorial de dimensão n . Em termos de coordenadas temos

$$[X'] = A[X] \quad (1.19)$$

onde $[X] = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ e $[X'] = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]^T$ são vetores colunas construídos com as coordenadas de X e de X' .

Pode-se construir $\binom{n+r-1}{r}$ produtos homogêneos de grau r nas coordenadas x_i de X :

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}, \quad r_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n r_i = r. \quad (1.20)$$

Cada um desses produtos se transforma, sob a transformação $\mathcal{A}$, numa combinação linear de todos eles. Definindo um vetor coluna $[X]^r$ cujas componentes são esses produtos enumerados de uma forma arbitrária, o seu transformado por $\mathcal{A}$ se escreve como

$$([X]^r)' = A^{[r]}[X]^r \quad (1.21)$$

o que define a matriz $A^{[r]}$ chamada de *r-ésima induzida* da matriz A . Os elementos de $A^{[r]}$ são claramente polinômios homogêneos de grau r nas componentes de A .

Efetuada a mesma operação com uma matriz B inversível $n \times n$ obtém-se $B^{[r]}$. Demonstra-se que, se $AB = C$, então

$$A^{[r]}B^{[r]} = (AB)^{[r]} = C^{[r]} \quad (1.22)$$

o que significa que o conjunto das matrizes $\mathcal{D}^{[r]}(A) \equiv A^{[r]}$ é uma representação $\binom{n+r-1}{r}$ -dimensional do grupo $GL(n)$ das matrizes inversíveis de dimensão $n \times n$.

Como exemplo, temos para $r = 2$:

$$x'_i x'_j = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} x_k x_l = \sum_k (a_{ik} a_{jk}) x_k^2 + \sum_{k < l} (a_{ik} a_{jl} + a_{il} a_{jk}) x_k x_l \quad (1.23)$$

o que implica em

$$A^{[2]}_{(ij)(kk)} = a_{ik} a_{jk}, \quad i \leq j; \quad A^{[2]}_{(ij)(kl)} = a_{ik} a_{jl} + a_{il} a_{jk}, \quad i \leq j, k < l.$$

Para $n = 2$ e escolhendo o ordenamento (11), (12), (22) temos

$$A^{[2]} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & 2a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad n = 2 \quad (1.24)$$

Convém notar que o traço de $A^{[2]}$ é

$$\text{tr}(A^{[2]}) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 = h_2 = \{2\}(\alpha),$$

sendo $\{2\}(\alpha)$ a função de Schur $\{2\}$ calculada com os autovalores α_1, α_2 de A .

Para qualquer outra matriz não singular 2×2 , $B, C, D, \dots$ podemos construir sua segunda induzida $B^{[2]}, C^{[2]}, D^{[2]}, \dots$ como sendo a matriz que tem por componentes os mesmos polinômios de grau 2 de $A^{[2]}$ em que agora as variáveis são as componentes correspondentes dos elementos de matriz de $B, C, D, \dots$.

É imediato provar, por um cálculo manual, que

$$A^{[2]}B^{[2]} = (AB)^{[2]}, \quad \forall A, B, \quad 2 \times 2$$

o que concorda com Eq.(1.22) .

Tomemos agora $r(< n)$ cópias $X^{(s)}$ ($1 \leq s \leq r$) do vetor X e um conjunto $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ de inteiros entre 1 e n . Como há $\binom{n}{r}$ desses conjuntos, construamos

os $\binom{n}{r}$ determinantes

$$d_{(e_1 e_2 \dots e_r)} = \begin{vmatrix} x_{e_1}^{(1)} & x_{e_1}^{(2)} & \dots & x_{e_1}^{(r)} \\ x_{e_2}^{(1)} & x_{e_2}^{(2)} & \dots & x_{e_2}^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{e_r}^{(1)} & x_{e_r}^{(2)} & \dots & x_{e_r}^{(r)} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq e_1 < e_2 < \dots < e_r \leq n. \quad (1.25)$$

Se cada $X^{(s)}$ se transforma pela mesma transformação $\mathcal{A}$, esses determinantes se transformarão linearmente entre si pela relação

$$[d]' = A^{(r)}[d] \quad (1.26)$$

onde $[d]$ é o vetor coluna cujas componentes são os $d_{(e_1 e_2 \dots e_r)}$ enumerados de uma forma arbitrária. A relação (1.26) define a matriz r -composta da matriz A . Dessa definição decorre que os elementos da matriz $A^{(r)}$ são os menores de grau r da matriz original A .

Demonstra-se também que, se $AB = C$, então

$$A^{(r)}B^{(r)} = (AB)^{(r)} = C^{(r)}. \quad (1.27)$$

Como exemplo, temos para $r = 2$,

$$\begin{aligned} d_{e_i e_j}' &= \begin{vmatrix} x_{e_i}^{(1)} & x_{e_i}^{(2)} \\ x_{e_j}^{(1)} & x_{e_j}^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_k a_{e_i k} x_k^{(1)} & \sum_k a_{e_i k} x_k^{(2)} \\ \sum_l a_{e_j l} x_l^{(1)} & \sum_l a_{e_j l} x_l^{(2)} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{k,l} \begin{vmatrix} a_{e_i k} x_k^{(1)} & a_{e_i k} x_k^{(2)} \\ a_{e_j l} x_l^{(1)} & a_{e_j l} x_l^{(2)} \end{vmatrix} = \sum_{k < l} \begin{vmatrix} a_{e_i k} & a_{e_j k} \\ a_{e_i l} & a_{e_j l} \end{vmatrix} d_{kl}. \end{aligned}$$

Para $n = 2$ temos

$$A^{(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det(A), \quad n = 2. \quad (1.28)$$

Para $n = 3$, com o ordenamento d_{12}, d_{13}, d_{23} , temos

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{23} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} & a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \end{pmatrix}, \quad n = 3. \quad (1.29)$$

Novamente prova-se, por cálculo manual, que, se $AB = C$ então

$$A^{(2)}B^{(2)} = (AB)^{(2)} = C^{(2)}. \quad (1.30)$$

As matrizes r -induzida e r -composta são casos particulares de *matrizes invariantes* cuja definição damos a seguir.

Seja $T(A)$ uma matriz cujos elementos t_{ij} são polinômios tendo por variáveis os elementos de A . Seja $T(B)$ uma matriz construída com os *mesmos* polinômios de $T(A)$ tendo por variáveis os elementos de B . Se

$$T(A)T(B) = T(AB) \quad (1.31)$$

para quaisquer matrizes inversíveis $n \times n$, A, B então a matriz $T(A)$ é dita uma matriz invariante de A .

Segue de (1.31) que, fixado um conjunto T de polinômios t_{ij} , o conjunto das matrizes $\mathcal{D}^T(A) \equiv T(A)$ é uma representação de $GL(n)$, o conjunto das matrizes inversíveis $n \times n$.

Um caso particular trivial é a primeira-induzida. Nesse caso temos $t_{ij} = a_{ij}$ e $A^{[1]} \equiv A$. Como é conhecido, o traço de A é a soma de seus autovalores α_i , ou seja,

$$\text{tr}(A) = \sum_i \alpha_i = a_1(\alpha) = \{1\}(\alpha) \quad (1.32)$$

onde $\{1\}(\alpha)$ é a função de Schur $\{1\}$ calculada com os autovalores de A .

Essa será, por definição, $\mathcal{D}^{[1]}$.

Como o produto de Kronecker de duas representações é também uma representação e o produto de dois polinômios é também um polinômio, segue que *o produto de Kronecker de duas matrizes invariantes é também uma matriz invariante*.

Littlewood[1] mostrou que *se o produto de duas matrizes invariantes for redutível, ele será totalmente redutível*. Isso nos permite obter novas representações irredutíveis a partir de múltiplos produtos de Kronecker da irrep $\mathcal{D}^{[1]}$ e posterior redução por transformação de similaridade.

A guisa de exemplo, tomemos $n = p = 2$. Nesse caso teremos $A^{[2]}$ e $A^{(2)}$ dados por (1.24) e (1.28). Tomando $A \times A$ na forma

$$A \times A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} & a_{11}a_{12} & a_{12}a_{11} & a_{12}a_{12} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}a_{12} & a_{22}a_{11} & a_{22}a_{12} \\ a_{21}a_{21} & a_{21}a_{22} & a_{22}a_{21} & a_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

verificamos que

$$\begin{aligned} M^{-1}(A \times A)M &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 & 0 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} & 0 \\ a_{21}^2 & 2a_{21}a_{22} & a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\ &= A^{[2]} \dot{+} A^{(2)} \end{aligned}$$

com

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que $A^{[1]} \times A^{[1]}$ se reduz em $A^{[2]} \dot{+} A^{(2)}$ para $n = 2$.

Para $r = 2$ e qualquer n , temos que $\binom{n+2-1}{2} + \binom{n}{2} = n^2$ e como $\text{tr}(A \times A) = (\text{tr}(A))^2$ isso nos leva a supor que

$$A^{[1]} \times A^{[1]} = A^{[2]} \dot{+} A^{(2)}$$

para qualquer n , o que resulta ser verdadeiro, uma vez que o produto de Kronecker de duas matrizes pode ser decomposto numa parte simétrica e outra antissimétrica relativamente às componentes da primeira e da segunda matriz.

Uma análise análoga pode ser feita para o r -produto de Kronecker $M \times M \times \dots \times M$. Baseado nessa análise, Schur[4] demonstrou que

Se A é uma matriz de dimensão $n \times n$, há tantas matrizes invariantes irreduzíveis de grau r de A quantas são as partições de r com não mais que n linhas e o traço delas são as funções de Schur de grau r nos autovalores de A .

Essas matrizes invariantes são rotuladas pelas possíveis partições de r :

$$\begin{aligned} r = 2 : & \quad A^{[2]}, A^{[1^2]}, \\ r = 3 : & \quad A^{[3]}, A^{[21]}, A^{[1^3]}, \end{aligned}$$

.....

Nessa notação pomos $A^{(r)} \equiv A^{[1^r]}$. Para $r > n$ sómente as matrizes invariantes irreduzíveis associadas a partições com até n linhas são realizáveis.

Os detalhes da construção efetiva da matriz invariante irreduzível correspondente a uma dada partição podem ser encontrados nas Refs.[8],[14].

Usando as componentes das funções de Schur para rotular as irreps de $GL(n)$, o resultado acima mostra que

“As irreps de $GL(n)$ são rotuladas por $[m_{1n}, m_{2n}, \dots, m_{nn}]$ onde os m_{in} satisfazem as relações $m_{in} \geq m_{i+1n}$, $1 \leq i \leq n$ e o traço da matriz associada a cada elemento A de $GL(n)$ é a função de Schur $\{m_{1n}, m_{2n}, \dots, m_{nn}\}$ avaliada com os autovalores de A .”

Como as irreps de $GL(n)$ não se reduzem na restrição $GL(n) \rightarrow U(n)$ esse mesmo resultado vale também para $U(n)$.

Sejam T' e T'' duas representações de $GL(n)$ em matrizes invariantes. De (1.31) segue que

$$T''(T'(AB)) = (T''(T'(A)))(T''(T'(B))). \quad (1.33)$$

Como o produto de dois polinômios é também um polinômio, resulta que qualquer matriz invariante de uma matriz invariante é também uma matriz invariante da matriz original e como tal pode ser expressa como soma direta de matrizes invariantes irreduzíveis desta. Isso nos permite escrever

$$[A^{[\mu]}]^{[\nu]} = \sum_{\lambda} \kappa_{\lambda\mu\nu} A^{[\lambda]}. \quad (1.34)$$

Designemos por r_{μ}, r_{ν} e r_{λ} os graus de $[\mu], [\nu]$ e $[\lambda]$. Como $A^{[\mu]}$ é obtida pela redução do r_{μ} -plo produto de Kronecker de A e, por sua vez, $[A^{[\mu]}]^{[\nu]}$ é obtido reduzindo o r_{ν} -plo produto de Kronecker de $A^{[\mu]}$ segue que as irreps $[\lambda]$ que aparecem no lado direito de (1.34) têm grau

$$r_{\lambda} = r_{\mu} r_{\nu}. \quad (1.35)$$

Como o traço de uma matriz invariante irreduzível é igual à função de Schur da partição correspondente, a relação (1.34) permite estabelecer uma correspondência $\{\mu\} \otimes \{\nu\}$ entre duas funções de Schur de graus r_{μ} e r_{ν} com funções de Schur de grau $r_{\mu} r_{\nu}$ dada por

$$\{\mu\} \otimes \{\nu\} = \sum_{\lambda} \kappa_{\lambda\mu\nu} \{\lambda\}, \quad (1.36)$$

sendo os $\kappa_{\lambda\mu\nu}$ dados por (1.34).

Essa correspondência foi descoberta por Littlewood[14] e posteriormente recebeu o nome de *pletismo*.

O próprio Littlewood estabeleceu as propriedades:

$$\{\lambda\} \otimes (\{\mu\} \otimes \{\nu\}) = (\{\lambda\} \otimes \{\mu\}) \otimes \{\nu\}, \quad (1.37)$$

$$\{\lambda\} \otimes (\{\mu\} + \{\nu\}) = \{\lambda\} \otimes \{\mu\} + \{\lambda\} \otimes \{\nu\}, \quad (1.38)$$

$$(\{\lambda\} + \{\mu\}) \otimes \{\nu\} = \sum_{\nu_1 \nu_2} \alpha(\{\nu_1\}\{\nu_2\} \rightarrow \{\nu\})(\{\lambda\} \otimes \{\nu_1\}) \cdot (\{\mu\} \otimes \{\nu_2\}). \quad (1.39)$$

Em Eq.(1.39) $\alpha(\{\nu_1\}\{\nu_2\} \rightarrow \{\nu\})$ é o coeficiente de $\{\nu\}$ na expansão do produto externo $\{\nu_1\}\{\nu_2\}$ [Usaremos no que segue a notação $\alpha(\dots)$ para designar os coeficientes de uma dada expansão.] e na soma estão incluídos os casos $\{\nu_1\} = \{0\} \equiv 1$, $\{\nu_2\} = \{\nu\}$ e $\{\nu_1\} = \{\nu\}$, $\{\nu_2\} = \{0\} = 1$.

Posteriormente mais outras propriedades foram descobertas. São as seguintes[3],[2]:

$$\{\lambda\} \otimes (\{\mu\} - \{\nu\}) = \{\lambda\} \otimes \{\mu\} - \{\lambda\} \otimes \{\nu\} \quad (1.40)$$

$$\{\lambda\} \otimes (\{\mu\}\{\nu\}) = (\{\lambda\} \otimes \{\mu\})(\{\lambda\} \otimes \{\nu\}) \quad (1.41)$$

$$(\{\lambda\} - \{\mu\}) \otimes \{\nu\} = \sum_{\lambda' \lambda''} (-)^{r''} \alpha(\{\lambda'\}\{\lambda''\} \rightarrow \{\nu\})(\{\lambda\} \otimes \{\lambda'\}) \cdot (\{\mu\} \otimes \{\tilde{\lambda}''\}) \quad (1.42)$$

$$(\{\lambda\}\{\mu\}) \otimes \{\nu\} = \sum_{\lambda' \lambda''} \alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{\nu\})(\{\lambda\} \otimes \{\lambda'\}) \cdot (\{\mu\} \otimes \{\lambda''\}) \quad (1.43)$$

$$\{\tilde{\lambda}\} \otimes \{\mu\} = \sum_{\nu} \alpha(\{\lambda\} \otimes \{\mu\} \rightarrow \{\nu\})\{\tilde{\nu}\}, \quad \text{para } r_{\lambda} \text{ par} \quad (1.44)$$

$$\{\tilde{\lambda}\} \otimes \{\tilde{\mu}\} = \sum_{\nu} \alpha(\{\lambda\} \otimes \{\mu\} \rightarrow \{\nu\})\{\tilde{\nu}\}, \quad \text{para } r_{\lambda} \text{ ímpar} \quad (1.45)$$

onde r'' e r_{λ} são os graus de $[\lambda'']$ e $[\lambda]$.

Há também uma fórmula[34],[2],[3] de dimensão:

$$d_{\{\lambda\} \otimes \{\mu\}} \equiv \sum_{\nu} \alpha(\{\lambda\} \otimes \{\mu\} \rightarrow \{\nu\}) d_{[\nu]} = \frac{(rs)!}{(r!)^s s!} (d_{[\lambda]})^s d_{[\mu]}, \quad (1.46)$$

onde r e s são os graus de $[\lambda]$ e de $[\mu]$ e $d_{[\sigma]}$ é a dimensão da irrep $[\sigma]$ de $S(p = \text{grau de } [\sigma])$, para a qual temos a fórmula[34],[11]

$$\begin{aligned} d_{[\sigma]} &\equiv d_{[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t, 0, \dots, 0]} = \\ &= \frac{p! \prod_{i < j=2}^t (\sigma_i - \sigma_j - i + j)}{(\sigma_1 + t - 1)! (\sigma_2 + t - 2)! \dots \sigma_t!} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Vimos até agora pletismos de funções de Schur de $GL(n)$. Pode-se obter pletismos de subgrupos contínuos G de $GL(n)$ simplesmente exprimindo os caracteres irredutíveis de G em termos das funções de Schur e então efetuar o pletismo de funções de Schur. Se necessário, o resultado pode ser re-expresso em termos dos caracteres irredutíveis de G . Isso será feito quando tratarmos das aplicações.

No caso $G = S(n)$, um subgrupo *finito* de $GL(n)$ de suma importância no estudo de sistemas de partículas idênticas, esse processo envolve o conceito de *pletismo interno* (inner plethysm) que trataremos a seguir.

Como vimos anteriormente, o produto interno $\{\lambda\} \times \{\mu\}$ de duas funções de Schur de mesmo grau r corresponde ao produto de Kronecker de duas irreps $[\lambda]$ e $[\mu]$ de $S(r)$. O caso $\{\lambda\} \times \{\lambda\}$ pode ser analisado em seus constituintes simétrico e antisimétrico. Como vimos anteriormente, o produto de Kronecker $M \times M$ se decompõe em

$$M \times M \doteq M^{[2]} + M^{[1^2]}. \quad (1.48)$$

Tomando por M a matriz que representa uma dada permutação de $S(n)$ na irrep $[\lambda]$, em correspondência, a expressão $\{\lambda\} \times \{\lambda\}$ pode ser analisada em duas partes, denotadas por $\{\lambda\} \odot \{2\}$ e $\{\lambda\} \odot \{1^2\}$. A operação denotada pelo símbolo $\odot$ é chamada de *pletismo interno* [13] (inner plethysm) e será definida a seguir.

Seja M_i a matriz de uma permutação genérica P_i de $S(n)$ na irrep $[\lambda]$ e seja $\chi^{[\lambda]}(P_i)$ o seu traço. Então a matriz invariante de M_i associada à partição $[\mu]$, ou seja, $M_i^{[\mu]}$ também representa o elemento P_i e seu traço é um caráter composto, digamos,

$$\text{tr}(M_i^{[\mu]}) = \sum_{\nu} G_{\lambda\mu\nu} \chi^{[\nu]}(P_i) \quad (1.49)$$

Define-se $\{\lambda\} \odot \{\mu\}$, o pletismo interno das partições $\{\lambda\}$ e $\{\mu\}$ de graus n e m , como a combinação linear de partições $\{\nu\}$ de grau n com coeficientes $G_{\lambda\mu\nu}$ dados por (1.49), ou seja,

$$\{\lambda\} \odot \{\mu\} = \sum_{\nu} G_{\lambda\mu\nu} \{\nu\} \quad (1.50)$$

Note-se que embora as partições $[\lambda]$ e $[\nu]$ sejam de grau n , nada restringe o grau da partição $[\mu]$.

Os pletismos internos têm propriedades análogas às dos pletismos, trocando-se produto externo de funções de Schur por produto interno, ou seja,

$$\begin{aligned} (\{\lambda\} \odot \{\mu\}) \odot \{\nu\} &= \{\lambda\} \odot (\{\mu\} \odot \{\nu\}) \quad , \\ \{\lambda\} \odot (\{\mu\} + \{\nu\}) &= \{\lambda\} \odot \{\mu\} + \{\lambda\} \odot \{\nu\} \quad , \end{aligned}$$

Capítulo 2

Cálculo de Pletismos

Neste capítulo inicialmente daremos resultados gerais que permitem calcular alguns tipos particulares de pletismos e em seguida proporemos um procedimento para o cálculo de todos os pletismos de um dado grau total dado.

2.1 Resultados particulares e técnica de cálculo

Em [3] é mencionada uma expressão para se calcular um pletismo, a saber:

$$\{\lambda'\} \otimes \{\lambda''\} = \sum_{(\rho'')} \frac{n''(\rho'')}{r''!} \chi^{[\lambda'']}(\rho'') (S_1'')^{\rho_1''} (S_2'')^{\rho_2''} \dots (S_{r''}'')^{\rho_{r''}''}, \quad (2.1)$$

onde

r' e r'' são os graus de $\{\lambda'\}$ e $\{\lambda''\}$,

$(\rho'') = (1^{\rho_1''}, 2^{\rho_2''}, \dots)$ são as classes de $S(r'')$ e $n''(\rho'')$ os seus números de elementos,

$$c_i = \sum_{[\lambda]_{ir'}} c_{[\lambda]_{ir'}} \sum_{(\rho')} \frac{n'(\rho')}{r'!} \chi^{[\lambda']}(\rho') \chi^{[\lambda'']}(\rho_0(\rho')), \quad (2.2)$$

$[\lambda]_{ir'}$ são irreps de $S(ir')$,

$\rho_0(\rho')$ é a classe de $S(ir')$ com ρ'_1 ciclos de comprimento 1, ρ'_2 ciclos de comprimento 2, etc.

As funções de Schur $\{\lambda'''\}$, de grau $r''' = r' + r''$ que aparecem no pletismo (Eq.2.1) são obtidas após reduzir os produtos externos das funções de Schur presentes nos S_i'' . Para valores pequenos de r''' é possível contruir-se tabelas de pletismos com a mesma organização que as tabelas de produtos externos. Temos, por exemplo, para $r''' = 6$ a tabela abaixo

	$\{6\}$	$\{51\}$	$\{42\}$	$\{41^2\}$	$\{3^2\}$	$\{321\}$	$\{31^3\}$	$\{2^3\}$	
$\{2\} \otimes \{3\}$	1		1					1	$\{1^2\} \otimes \{3\}$
$\{2\} \otimes \{21\}$		1	1			1			$\{1^2\} \otimes \{21\}$
$\{2\} \otimes \{1^3\}$				1	1				$\{1^2\} \otimes \{1^3\}$
$\{3\} \otimes \{2\}$	1		1						$\{1^3\} \otimes \{1^2\}$
$\{3\} \otimes \{1^2\}$		1			1				$\{1^3\} \otimes \{2\}$
$\{21\} \otimes \{2\}$			1			1	1	1	$\{21\} \otimes \{1^2\}$
	$\{1^6\}$	$\{21^4\}$	$\{2^21^2\}$	$\{31^3\}$	$\{2^3\}$	$\{321\}$	$\{41^2\}$	$\{3^2\}$	

Em [3] encontramos tabelas de pletismos para r''' até 10. Ibrahim [15],[16] publicou tabelas com $r''' = 12, 14$ e 15 . Observe que tais tabelas só existem para r''' não primo. Tabelas parciais foram publicadas em [2] e [21].

Para valores grandes de r''' o uso de (2.1) se torna impraticável, daí a necessidade de se obter fórmulas alternativas. Para alguns casos particulares de $\{\lambda'\}$ e $\{\lambda''\}$ há fórmulas explícitas (ou quase) mais simples de se usar. São elas as seguintes [2, 3, 11, 10]

1) Da própria definição de pletismos resulta que

$$\{\lambda\} \otimes \{1\} = \{1\} \otimes \{\lambda\} = \{\lambda\}. \quad (2.3)$$

2) Por consistência define-se

$$\{\lambda\} \otimes \{0\} = \{0\}, \quad \{0\} \otimes \{\lambda\} = \delta_{\{\lambda\}, \{r_\lambda\}} \{0\}; \quad (2.4)$$

3)

$$\begin{aligned} \{r\} \otimes \{2\} &= \sum_{i=0}^{[r/2]} \{2r - 2i, 2i\}, \\ \{r\} \otimes \{1^2\} &= \sum_{i=1}^{[(r+1)/2]} \{2r - (2i - 1), (2i - 1)\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde aqui e no que segue $[p]$ é o maior inteiro menor ou igual a p ;

4)

$$\begin{aligned} \{2\} \otimes \{r\} &= \sum_{\lambda} \{\lambda\}_{par}, \\ \{1^2\} \otimes \{r\} &= \sum_{\lambda} \{\widetilde{\lambda}\}_{par}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

com $\{\lambda\}_{par}$ = partição de $2r$ com todas as linhas pares;

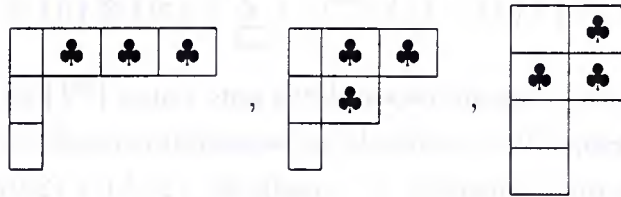
5)

$$\begin{aligned}
 \{1^r\} \otimes \{2\} &= \{1^{2r}\} + \sum_{i=1}^{[r/2]} \{2^{2i}, 1^{2r-4i}\} \quad , r \text{ par}, \\
 \{1^r\} \otimes \{1^2\} &= \{1^{2r}\} + \sum_{i=1}^{[r/2]} \{2^{2i}, 1^{2r-4i}\} \quad , r \text{ ímpar}, \\
 \{1^r\} \otimes \{1^2\} &= \sum_{i=1}^{[(r+1)/2]} \{2^{2i-1}, 1^{2r-2(2i-1)}\} \quad , r \text{ par}, \\
 \{1^r\} \otimes \{2\} &= \sum_{i=1}^{[(r+1)/2]} \{2^{2i-1}, 1^{2r-2(2i-1)}\} \quad , r \text{ ímpar},
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

obtidos de (2.5) por conjugação usando (1.44) e (1.45).

Em [21] encontramos fórmulas para o cálculo de pletismos quando $\{\lambda\}$ e $\{\mu\}$ são ambas simétricas ou antissimétricas. Para enunciá-las necessitamos da seguinte definição: *faixa r -fronteiriça* (r -border strip) de um dado diagrama de Young $[\lambda]$ é uma sequência de r quadrados em que o primeiro deles é o último quadrado da primeira linha de $[\lambda]$ e o quadrado seguinte a um quadrado genérico é o que está abaixo dele, se existir, ou o da sua esquerda em caso contrário.

Por exemplo, a faixa 3-fronteiriça de $[41^2]$, $[321]$ e $[2^21^2]$ são os quadrados com o símbolo $\clubsuit$ nas figuras abaixo, respectivamente:



Quando $\{\lambda\}$ e $\{\mu\}$ são ambas simétricas, temos

$$\{n\} \otimes \{m\} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \{n\}(x^k) (\{n\} \otimes \{m-k\}), \quad m \geq 1, \tag{2.8}$$

com

$$\{n\}(x^k) = \sum_{\nu} C_{n,k,\nu} \{\nu\}. \tag{2.9}$$

Em (2.9), as $\{\nu\}$ são funções de Schur de grau nk . Os coeficientes $C_{n,k,\nu}$ são obtidos a partir do diagrama de Young associado a $\{\nu\}$ removendo-se, em sequência, n faixas k -fronteiriças. Se em todos os estágios o diagrama resultante for regular, temos que

$$C_{n,k,\nu} = (-1)^l \tag{2.10}$$

com $l=(\text{soma dos números de linhas das faixas})-n$. Se em algum dos estágios o diagrama resultante não for regular, então $C_{n,k,v} = 0$. Como exemplo, temos das figuras acima,

$$C_{2,3,\{41^2\}} = (-)^{4-2} = 1; \quad C_{2,3,\{321\}} = (-)^{5-2} = -1; \quad C_{2,3,\{2^3\}} = 0.$$

O coeficiente $C_{2,3,\{2^3\}}$ é nulo porque ao retirarmos a primeira faixa 3-fronteiriça o diagrama resultante corresponde a $\{\nu'\} = \{1, 0, 1^2\}$, sendo portanto não regular.

A Eq.(2.8) permite relacionar o pletismo de duas funções de Schur simétricas com os pletismos de funções de Schur simétricas de grau total menor. Assim, usando $\{n\} \otimes \{1\} \equiv \{n\}$, como ponto de partida, calculamos todos os pletismos de tipo $\{n\} \otimes \{m\}$.

Por conjugação de (2.8) obtemos

$$\left[\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \{n\}(x^k)(\{n\} \otimes \{m-k\}) \right]^T = \begin{cases} \{1^n\} \otimes \{m\}, & \text{para } n \text{ par,} \\ \{1^n\} \otimes \{1^m\}, & \text{para } n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Usando-se o resultado $\{1^{m-k}\}\{k\} = \{k+1, 1^{m-k+1}\} + \{k, 1^{m-k}\}$ e as propriedades (1.38) e (1.41), obtém-se, por indução,

$$\{n\} \otimes \{1^m\} = \{n\} \otimes \{m\} + \sum_{k=1}^{m-1} (-)^{k+1} (\{n\} \otimes \{k\})(\{n\} \otimes \{1^{m-k}\}) \quad (2.12)$$

que expressa $\{n\} \otimes \{1^m\}$ como uma combinação linear de $\{n\} \otimes \{1^{m'}\}$ com $m' < n$ sendo os coeficientes dessa combinação os pletismos de funções de Schur simétricas. Usando-se então (2.8) e (2.12) calculamos os pletismos com a primeira função de Schur simétrica e a segunda antissimétrica.

De (2.5), por conjugação obtém-se

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } n \text{ par } \{1^n\} \otimes \{1^m\} \\ \text{para } n \text{ ímpar } \{1^n\} \otimes \{m\} \end{array} \right\} = \sum_{\lambda} \alpha(\{n\} \otimes \{1^m\} \rightarrow \{\lambda\}) \{\tilde{\lambda}\}. \quad (2.13)$$

Assim, usando (2.8) e (2.11-2.13) calculamos todos os pletismos com ambas as funções de Schur simétricas e/ou antissimétricas.

Os casos em que $\{\lambda\}\{\mu\}$ tem uma expressão fechada simples nos permitem calcular, usando (1.38) e (1.41), relações também fechadas para os pletismos correspondentes. Assim, de

$$\{p\}\{q\} = \sum_{i=0}^q \{p+q-i, i\}, \quad p \geq q \quad (2.14)$$

obtém-se

$$\{p, q\} = \{p\}\{q\} - \{p+1, q-1\} \quad (2.15)$$

e usando-se (1.38) e (1.41) ,

$$\{\lambda\} \otimes \{p, q\} = (\{\lambda\} \otimes \{p\})(\{\lambda\} \otimes \{q\}) - \{\lambda\} \otimes \{p+1, q-1\}. \quad (2.16)$$

Iterando (2.16) obtemos

$$\{\lambda\} \otimes \{p, q\} = \sum_{i=0}^q (-)^i (\{\lambda\} \otimes \{p+i\}) \{\lambda\} \otimes \{q-i\} \quad (2.17)$$

o que nos permite expressar um pletismo com funções de Schur à direita de 2 linhas em termos de pletismos com funções de Schur à direita simétricas.

De

$$\{1^p\}\{1^q\} = \sum_{i=0}^q \{2^i, 1^{p+q-2i}\}, \quad p \geq q, \quad (2.18)$$

obtém-se

$$\{\lambda\} \otimes \{2^q, 1^{p-q}\} = (\{\lambda\} \otimes \{1^p\})(\{\lambda\} \otimes \{1^q\} - \{\lambda\} \otimes \{1^{p+1}\})(\{\lambda\} \otimes \{1^{q-1}\}), \quad (2.19)$$

o que nos permite expressar um pletismo com função de Schur à direita de duas colunas com pletismos com função de Schur à direita de uma coluna.

De

$$\{p, 1^q\} = \{p\}\{1^q\} - \{p+1, 1^{q-1}\} \quad (2.20)$$

obtemos

$$\{\lambda\} \otimes \{p, 1^q\} = \sum_{i=0}^{q-1} (-)^i (\{\lambda\} \otimes \{p+i\})(\{\lambda\} \otimes \{1^{q-i}\}) + (-)^q \{\lambda\} \otimes \{p+q\} \quad (2.21)$$

o que nos permite calcular $\{\lambda\} \otimes \{p, 1^q\}$ por indução em q a partir de $\{\lambda\} \otimes \{p\}$.

2.2 Técnica de Cálculo

Usando o resultado de $\{\lambda\} \otimes \{m\}$ e (1.38)-(1.42) podemos obter, em sequência, $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$ para todas as funções de Schur $\{\mu\}$ de grau m . Para tanto, seguimos os passos seguintes:

- 1) Calculamos todas as partições de m e ordenamo-las em ordem decrescente de suas componentes lidas da esquerda para a direita;
- 2) Calculamos a tabela de todos os produtos externos de funções de Schur com grau final m tendo na aba superior as partições de m ordenadas como no item anterior;
- 3) Para cada partição $\{\mu\}$, tomada na ordem em que aparece em 1), procuramos qual é a linha tal que o seu último elemento não nulo seja $\{\mu\}$.

A linha obtida no item 3 acima fornece

$$\{\mu\} = \{\lambda'\}\{\lambda''\} - \sum_{\lambda''' \prec \lambda} \alpha(\{\lambda'\}\{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda'''\})\{\lambda'''\} \quad .$$

onde o símbolo $\prec$ significa anterior, dado o ordenamento do item 1.

Usando (1.38), (1.40) e (1.41) obtemos então

$$\{\lambda\} \otimes \{\mu\} = (\{\lambda\} \otimes \{\lambda'\})(\{\lambda\} \otimes \{\lambda''\}) - \sum_{\lambda''' \prec \mu} \alpha(\{\lambda'\}\{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda'''\})(\{\lambda\} \otimes \{\lambda'''\}) \quad . \quad (2.22)$$

As funções de Schur que aparecem nos pletismos do primeiro termo de (2.22) têm graus menores que m e os pletismos dos termos restantes já foram calculados no processo indutivo pois os $\{\lambda'''\}$ são anteriores a $\{\mu\}$.

Como exemplo do procedimento sugerido acima, listamos abaixo a sequência de equações [obtidas da tabela de produtos externos do fim da subseção 1.1] que permite calcular $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$ para todas as funções de Schur $\{\mu\}$ de grau 5, uma vez conhecido $\{\lambda\} \otimes \{5\}$ e os pletismos de grau total menor que $5r_\lambda$.

$$\begin{aligned} \{\lambda\} \otimes \{5\} &= \text{input}, \\ \{\lambda\} \otimes \{41\} &= (\{\lambda\} \otimes \{4\})\{\lambda\} - \{\lambda\} \otimes \{5\}, \\ \{\lambda\} \otimes \{32\} &= (\{\lambda\} \otimes \{3\})(\{\lambda\} \otimes \{2\}) - \{\lambda\} \otimes \{5\} - \{\lambda\} \otimes \{41\}, \\ \{\lambda\} \otimes \{31^2\} &= (\{\lambda\} \otimes \{31\})\{\lambda\} - \{\lambda\} \otimes \{41\} - \{\lambda\} \otimes \{32\}, \\ \{\lambda\} \otimes \{2^21\} &= (\{\lambda\} \otimes \{2^2\})\{\lambda\} - \{\lambda\} \otimes \{32\}, \\ \{\lambda\} \otimes \{21^3\} &= (\{\lambda\} \otimes \{1^3\})(\{\lambda\} \otimes \{2\}) - \{\lambda\} \otimes \{31^2\}, \\ \{\lambda\} \otimes \{1^5\} &= (\{\lambda\} \otimes \{1^3\})(\{\lambda\} \otimes \{1^2\} - \{\lambda\} \otimes \{21^3\} - \{\lambda\} \otimes \{2^21\}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como $\{n\} \otimes \{5\}$ obtemos de (2.8) , usamo-lo para obter todos os pletismos $\{n\} \otimes \{\mu\}$ de grau $5n$ usando as Eqs.(2.23). Por razão de segurança nos cálculos recomenda-se fazer um teste de dimensão usando (1.46) para cada novo pletismo obtido.

Um procedimento análogo é usado para calcular pletismos com funções de Schur à esquerda com simetria mista usando-se (1.39), (1.42) e (1.43) . Devido à natureza mais complexa dessas equações comparada à das análogas para função de Schur à direita, o cálculo se torna mais complicado.

Por exemplo, (2.15) que nos forneceu (2.16) nos fornece agora

$$\begin{aligned}
 \{p, q\} \otimes \{m\} &= (\{p\}\{q\} - \{p+1\}\{q-1\}) \otimes \{m\} = \\
 &\sum_{i=0}^m (-)^i ((\{p\}\{q\}) \otimes \{m-i\}) ((\{p+1\}\{q-1\}) \otimes \{1^i\}) = \\
 &\sum_{i=0}^m (-)^i \left[\sum_{\lambda' \lambda''} \alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{m-i\}) (\{p\} \otimes \{\lambda'\}) (\{q\} \otimes \{\lambda''\}) \right] \\
 &\cdot \left[\sum_{\lambda' \lambda''} \alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{1^i\}) (\{p+1\} \otimes \{\lambda'\}) (\{q-1\} \otimes \{\lambda''\}) \right] = \\
 &\sum_{i=0}^m (-)^i \left[\sum_{\lambda'} (\{p\} \otimes \{\lambda'\}_{m-i}) (\{q\} \otimes \{\lambda'\}_{m-i}) \right] \\
 &\cdot \left[\sum_{\lambda''} (\{p+1\} \otimes \{\lambda''\}_i) (\{q-1\} \otimes \{\lambda''\}_i) \right] \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

onde usamos na última passagem os resultados

$$\alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{n\}) = \delta_{\{\lambda''\}, \{\lambda'\}} \text{ e } \alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{1^n\}) = \delta_{\{\lambda''\}, \{\tilde{\lambda}'\}} . \quad (2.25)$$

A Eq.(2.24) nos permite expressar o pletismo com função de Schur à esquerda com duas linhas em termos de pletismos com funções de Schur à esquerda simétricas.

O uso de (2.4) simplifica (2.24) no caso $q = 1$:

$$\{p, 1\} \otimes \{m\} = \sum_{i=0}^m (-)^i (\{p+1\} \otimes \{1^i\}) \sum_{\lambda'} (\{p\} \otimes \{\lambda'\}_{m-i}) \{\lambda'\}_{m-i} .$$

As expressões de $\{\lambda\} \otimes \{m\}$ vão complicando mais à medida que $\{\lambda\}$ possui mais linhas e não se possa usar as relações de conjugação (1.44),(1.45) . Em todos os casos, porém, cada novo pletismo é expresso em termos de pletismos de grau nm já obtidos e pletismos de grau menor.

Quando o grau n da função de Schur à esquerda é um número composto podemos usar a tabela de pletismos de grau final n para obter relações em geral mais simples que as aqui expostas. Por exemplo, de $\{2\} \otimes \{1^2\} = \{31\}$ obtemos

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo faremos aplicações da técnica de pletismo. Na primeira seção veremos o esquema geral de aplicação dos pletismos e na segunda faremos uma aplicação em Estrutura Nuclear que consistirá na classificação das funções de onda dos estados ligados de núcleos leves e médios. Essa classificação é feita por meio de funções de base de irreps de grupos da cadeia unitária. Resulta do tratamento grupo-teórico aqui feito uma situação análoga ao modelo de camadas de oscilador harmônico, porém sem estados espúrios que são evitados pela introdução dos vetores de Jacobi. O Princípio de Pauli joga um papel importante na medida em que ele determina uma energia mínima e exclue algumas configurações associadas a estados de energia mínima e maiores.

3.1 Aplicações Gerais

Em aplicações de teoria de grupos a problemas de espectroscopia atômica e nuclear somos frequentemente levados a considerar a decomposição dos caracteres de irreps de um grupo que age sobre um espaço de dimensão n naqueles de irreps de um seu subgrupo. O subgrupo pode agir também sobre um espaço de dimensão n mas de maneira restrita. Pode também ser o produto direto de dois grupos que agem sobre subspaços de dimensão n_1 e n_2 do espaço original. Por exemplo, $Sp(4\ell + 2) \rightarrow SU(2) \times R(2\ell + 1)$, $R(2\ell + 1) \rightarrow R(3)$, $R(6) \rightarrow R(5)$ e $GL(2) \rightarrow R(3)$ têm muitas aplicações na teoria de espectros atômicos complexos [usaremos a notação U para grupo *unitário*, O para grupo *ortogonal*, $R = O^+ = SO$ para grupo *ortogonal unimodular* ou de *rotação*, Sp para grupo *simplético* e GL para grupo *linear geral*]. A álgebra dos pletismos dá uma solução simples e completa a esse problema.

Essa solução é baseada no seguinte teorema[2]

“ Se sob a restrição $G \rightarrow H$ o caráter da irrep $\dagger 1 \dagger$ do grupo G se decompõe em

$$\dagger 1 \dagger = (\alpha) + (\beta) + \dots + (\omega) \quad (3.1)$$

então o caráter $\{\lambda\}$ de G se decompõe nos caracteres $\{\rho\}$ do grupo H contidos no pletismo

$$[\{\alpha\} + \{\beta\} + \dots + \{\omega\}] \otimes \{\lambda\}. \quad (3.2)$$

Esse pletismo pode ser calculado expressando os caracteres de G e de H em termos de caracteres de $GL(n)$, efetuando o pletismo resultante de caracteres de $GL(n)$ e re-expressando o resultado em termos de caracteres de H para obter o resultado final.

Usando a associação irrep $\leftrightarrow$ caráter esse teorema nos fornece os coeficientes da redução da irrep $\{\lambda\}$ de G na soma direta de irreps $\{\alpha\}$ de H .

Consideremos a seguir alguns exemplos ilustrativos da aplicação do teorema. Para tanto listamos abaixo a decomposição do caráter $\{1\}$ de G em termos de caracteres $\{\rho\}$ de H :

$$\begin{array}{lll} U(n) & \rightarrow & U(n-1): \quad \{1\} = \{1\} + \{0\}; \\ U(4\ell + 2) & \rightarrow & SU(2) \times O^+(2\ell + 1): \quad \{1\} = [\frac{1}{2}]'(1); \\ O^+(8\ell + 4) & \rightarrow & SU(2) \times Sp(4\ell + 2): \quad (1) = [\frac{1}{2}]' < 1 >; \\ Sp(4\ell + 2) & \rightarrow & SU(2) \times R(2\ell + 1): \quad < 1 > = [\frac{1}{2}]'(1); \\ O^+(2\ell + 1) & \rightarrow & O^+(3): \quad (1) = (\ell); \\ O^+(6) & \rightarrow & O^+(5): \quad (1) = (1) + (0); \\ G_2 & \rightarrow & O^+(3): \quad \{10\} = (3); \\ U(n) & \rightarrow & O(n): \quad \{1\} = (1); \\ U(nm) & \rightarrow & U(n) \times U(m) \quad \{1\} = \{1\}' \{1\}''. \end{array} \quad (3.3)$$

Pelo teorema acima e a primeira linha de (3.3), para obter as irreps de $U(n-1)$ contidas na irrep $\{\lambda\}$ de $U(n)$ devemos avaliar o pletismo

$$\begin{aligned} (\{1\} + \{0\}) \otimes \{\lambda\} &= \sum_{\lambda' \lambda''} \alpha(\{\lambda'\} \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda\}) \{\lambda'\} (\{1\} \otimes \{\lambda'\}) \cdot \\ &\cdot (\{0\} \otimes \{\lambda''\}) = \sum_{\lambda' \lambda''} \alpha(\{\lambda'\} \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda\}) \{\lambda'\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde usamos (1.39), (2.3) e (2.4).

Das regras de Littlewood para o produto externo de funções de Schur temos

$$\{\lambda'\} \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda\} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \lambda'_1 \\ \hline \lambda'_2 \\ \hline \lambda'_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & 1 & -l-a \\ \hline \end{array} \dots =$$

e usando esse resultado

$$\{\lambda\} = \sum_{\lambda'} \{\lambda'\}$$

Essas são as conhecidas condições de “*in-betweeness*” introduzidas por Gelfand[35] na rotulação dos estados de base das irreps de $U(n)$.

$$\begin{aligned} (\{1\}'\{1\}'') \otimes \{\lambda\} &= \sum_{\lambda'\lambda''} \alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda\})(\{1\}' \otimes \{\lambda'\})(\{1\}'' \otimes \{\lambda''\}) = \\ \sum_{\lambda'\lambda''} \alpha(\{\lambda'\} \times \{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda\})\{\lambda'\}\{\lambda''\} &. \end{aligned} \quad (3.5)$$
$$U(4) \supset U(2)_{spin} \times U(2)_{isospin}.$$
$$\{\lambda\} = \sum_{\mu, \nu}^{\oplus} \alpha(\{\mu\} \times \{\nu\} \rightarrow \{\lambda\}) \{\mu\}_{spin} \{\nu\}_{isospin} . \quad (3.6)$$
$$S = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2); \quad T = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2); \quad \mu_1 + \mu_2 = \nu_1 + \nu_2 = n \quad . \quad (3.7)$$

No tratamento de sistemas de partículas idênticas, em (3.5) $\{\lambda\} = \{n\}$ é usado para bósons e $\{\lambda\} = \{1^n\}$ para férmions. Para esses casos temos

$$\begin{aligned} (\{1\}'\{1\}'') \otimes \{n\} &= \sum_{\lambda} \{\lambda\}'\{\lambda\}'', \\ (\{1\}'\{1\}'') \otimes \{1^n\} &= \sum_{\lambda} \{\lambda\}'\{\tilde{\lambda}\}'', \end{aligned}$$

o que mostra que temos a redução

$$\{n\} \rightarrow \sum_{\lambda} \{\lambda\}'\{\lambda\}'', \quad r_{\lambda'} = r_{\lambda''} = n, \quad (3.8)$$

$$\{1^n\} \rightarrow \sum_{\lambda} \{\lambda\}'\{\tilde{\lambda}\}'', \quad r_{\lambda'} = r_{\lambda''} = n, \quad (3.9)$$

onde a notação $\{\lambda\}'$ e $\{\lambda\}''$ significa partições com no máximo n' e n'' linhas, respectivamente.

Consideremos, como outro exemplo, a redução da irrep $\{1^n\}$ de $U(4\ell + 2)$ em irreps de $SU(2) \times O^+(2\ell + 1)$. Usando (3.2) e (3.3) devemos primeiro calcular o pletismo $([1/2]'(1)) \otimes \{1^n\}$. Usando o isomorfismo entre $SU(2)$ e $GL(2)$ tomamos $[1/2]' = \{1\}$. Temos então usando (1.43), (2.25) e (2.3),

$$\begin{aligned} (\{1\}'\{1\}) \otimes \{1^n\} &= \sum_{\lambda'\lambda''} \alpha(\{\lambda\}' \times \{\lambda\}'' \rightarrow \{1^n\})(\{1\}' \otimes \{\lambda\}') \cdot \\ &\cdot (\{1\} \otimes \{\lambda\}'') = \sum_{\lambda} \{\lambda\}\{\tilde{\lambda}\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $\{\lambda\}$ são partições de n . Como $\{\lambda\}$ deve ser expresso em termos de irreps de $GL(2)$, sómente as irreps $\{\lambda\}$ do tipo $\{p, q\}$ com $p + q = n$ contribuem. Tais irreps se expressam em termos de irreps de $SU(2)$ por $[(p - q)/2]$. Temos então,

$$\{1^n\} \rightarrow \left[\frac{n}{2} \right] \{1^p\} + \sum_{p > q \geq 1; p+q=n} \left[\frac{1}{2}(p - q) \right] \{2^q, 1^{p-q}\} \quad (3.11)$$

onde $\{1^p\}$ e $\{2^q, 1^{p-q}\}$ devem ser expressos em termos de irreps de $O^+(7)$. Para $n = 3$ temos então, por exemplo,

$$\{1^3\} \rightarrow \left[\frac{3}{2} \right]' \{111\} + \left[\frac{1}{2} \right]' \{210\} = \left[\frac{3}{2} \right]' [111] + \left[\frac{1}{2} \right]' ([21] + [1]) \quad (3.12)$$

onde usamos (3.13) [dado adiante] para expressar as irreps de $U(7)$ em termos de irreps de $O^+(7)$.

Como quarto exemplo, vamos reduzir o caráter $[200]$ de $R(7)$ em caracteres de $R(3)$.

Pela quinta das Eqs.(3.3) devemos calcular o pletismo $(3) \otimes (200)$. Usando (3.13) dada abaixo obtemos

$$(3) = \{3\} - \{1\} \text{ e } (200) = \{200\} - \{0\}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} [3] \otimes [200] &= (\{3\} - \{1\}) \otimes (\{200\} - \{0\}) = (\{3\} - \{1\})\{200\} - \{0\} \\ &= \{3\} \otimes \{2\} + \{1\} \otimes \{1^2\} - \{3\}\{1\} - \{0\} \\ &= \{6\} + \{42\} + \{1^2\} - \{4\} - \{31\} - \{0\} \\ &= [6] + [4] + [2] \quad , \end{aligned}$$

onde na última passagem usamos novamente (3.13) para expressar os caracteres de $R(7)$ em termos dos de $U(7)$.

Nos casos em que $\frac{1}{2}(1) = (1)$, devido à propriedade (2.3), o teorema fornece uma identidade trivial não sendo portanto de utilidade. É o que ocorre, por exemplo, na redução $U(n) \rightarrow O(n)$. Para esse caso temos o seguinte resultado [1],[2],[3]:

"O caráter $\{\lambda\}$ de $U(n)$ se decompõe em caracteres (λ'') de $O(n)$ pela relação

$$\{\lambda\} = \sum_{\lambda'} \left[\sum_{\lambda''} \alpha(\{\lambda'\}\{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda\}) (\lambda'') \right] \quad (3.13)$$

onde as irreps $\{\lambda'\}$ que aparecem na soma são apenas aquelas com componentes pares." [Em Ref.[3] há uma tabela da redução $U(n) \rightarrow O(n)$.] . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \{0\} &= (0); \\ \{1\} &= (1); \\ \{2\} &= (2) + (0); \\ \{3\} &= (3) + (1); \\ \{311\} &= (311) + (21) + (111). \end{aligned}$$

Consultando uma tabela de redução $U(n) \rightarrow O(n)$ podemos obter o resultado inverso: expressar o caráter de uma irrep (λ) de $O(n)$ em termos de irreps $\{\nu\}$ de $U(n)$. A esse respeito, Littlewood [9][citado em [3]] nos fornece o seguinte resultado.

O caráter (λ) de $O(n)$ se expressa em termos de caracteres de $U(n)$ por

$$(\lambda) = \{\lambda\} + \sum_{\gamma \eta} (-)^{p/2} \alpha(\{\gamma\}\{\eta\} \rightarrow \{\lambda\}) \{\eta\} \quad (3.14)$$

onde p é o grau de $[\gamma]$ e as partições $[\gamma]$ são restritas àquelas que na notação de Frobenius assumem a forma

$$\begin{pmatrix} a+1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ a & b & c \end{pmatrix}, \dots \quad (3.15)$$

3.2 Aplicação em Estrutura Nuclear

No tratamento não relativístico tradicional o núcleo é considerado como um sistema de A férmions, os nucleons, de spin e isospin $1/2$ e 3 graus de liberdade espacial interagindo entre si por forças de um e de dois corpos. Os estados ligados de tal sistema são descritos por funções de onda totalmente antissimétricas uma vez que seus constituintes são férmions.

A introdução dos vetores de Jacobi

$$\vec{\rho}_i = \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} \left(\sum_{j=1}^i \vec{r}_j - i \vec{r}_{i+1} \right); \quad i = 1, 2, \dots, A-1 \quad (3.16)$$

$$\vec{\rho}_A = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{j=1}^A \vec{r}_j \quad (3.17)$$

permite separar o centro de massa e concentrar a atenção apenas ao movimento relativo descrito pelos vetores translacionalmente invariantes $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \dots, \vec{\rho}_{A-1}$.

Para descrever os estados ligados de tal sistema usaremos como base as funções de base da irrep $[1^{7(A-1)}]$ de $U(7(A-1)) \supset U^{(r)}(3(A-1)) \times U^{(ST)}(4(A-1))$. A parte de spin-isospin é descrita usando-se a cadeia

$$\begin{aligned} U^{(ST)}(4(A-1)) &\supset U^{(ST)}(4) && \times U^{(s)}(A-1) \\ &\cup && \cup \\ &U^{(S)}(2) \times U^{(T)}(2) && O^{(s)}(A-1) \\ &&& \cup \\ &&& S^{(s)}(A) \end{aligned} \quad (3.18)$$

enquanto que para a parte espacial temos

$$\begin{aligned} U^{(r)}(3(A-1)) &\supset U(3) && \times U^{(r)}(A-1) \\ &\cup && \cup \\ &O^+(3) && O^{(r)}(A-1) \\ &&& \cup \\ &&& S^{(r)}(A) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Daí o interesse em se estudar regras de ramificação para cadeias do tipo

$$U(A-1) \supset O(A-1) \supset S(A). \quad (3.20)$$

Essa notação pode suscitar a questão: como o grupo de permutação de A objetos pode ser um subgrupo de um grupo de transformações de um número menor, $A-1$, de objetos? A resposta é que não se trata dos mesmos objetos. Em $O(A-1)$ consideramos a parte radial dos $A-1$ vetores de Jacobi translacionalmente invariantes (3.16) enquanto que em $S^{(r)}(A)$ os objetos são as partes radiais dos A vetores de posição $\vec{r}_i$. Uma permutação dos vetores de posição $\vec{r}_i$ resulta numa transformação ortogonal dos vetores de Jacobi relativos, daí temos que $O^{(r)}(A-1) \supset S^{(r)}(A)$.

Como as funções de base da irrep $[\lambda]$ de $U(3(A-1))$ serão funções apenas das coordenadas dos $A-1$ vetores de Jacobi, a única irrep possível é a simétrica. Escrevemos pois $\{\lambda\} = \{E\}$. Como as funções de onda do oscilador harmônico p -dimensional de energia $\mathcal{E} = (E + p/2)\hbar\omega$ carregam a irrep $\{E\}$ de $U(p)$ costuma-se associar E à energia de excitação dos estados nucleares cuja parte espacial é descrita por funções de onda rotuladas pela cadeia (3.19).

Essa associação nos permite estabelecer um vínculo com o modelo de camadas do oscilador harmônico. As funções de base da irrep $\{E\}$ poderiam ser rotuladas alternativamente pela cadeia de subgrupos

$$U(3(A-1)) \supset U^{(1)}(3) \times U^{(2)}(3) \times \dots \times U^{(A-1)}(3) \quad (3.21)$$

em que cada elo $U^{(i)}(3)$ atua apenas nas 3 coordenadas do vetor de Jacobi $\vec{r}_i$. Nesse caso as irreps associadas a esses $U^{(i)}(3)$ seriam todas simétricas $\{E^{(i)}\}$ e suas funções de base seriam auto-estados de osciladores harmônicos de energia $\mathcal{E}^{(i)} = (E^{(i)} + 3/2)\hbar\omega$ e resultaria

$$E = \sum_{i=1}^{A-1} E^{(i)}. \quad (3.22)$$

O número de funções de onda linearmente independentes do oscilador harmônico 3-dimensional com energia $\mathcal{E} = (E + 3/2)\hbar\omega$ é igual à dimensão da irrep $\{E\}$ de $U(3)$, dada por

$$\dim_{\{E\}} = \frac{1}{2}(E+1)(E+2). \quad (3.23)$$

Assim, pelo princípio de Pauli, na camada E podemos colocar no máximo $4\dim_{\{E\}} = 2(E+1)(E+2)$ nucleons. A energia mínima é obtida preenchendo-se as camadas $E = 0(s), E = 1(p), E = 2(s-d), \dots, E_0 - 1$ e colocando-se os demais

nucleons na primeira camada incompleta E_0 . Assim

$$E_{\min} = \sum_{E=0}^{E_0-1} E \dim_{\{E\}} + E_0 n_0 = E_0 A - \frac{1}{6} E_0 (E_0 + 1)(E_0 + 2)(E_0 + 3) , \quad (3.24)$$

onde n_0 é o número de nucleons na camada incompleta E_0 .

A Eq.(3.24) nos permite escrever a tabela abaixo que nos dá a energia de excitação E de A nucleons dispostos em $E_0 - 1$ camadas preenchidas (caroço/core) $E = 0, 1, \dots, E_0 - 1$ e os demais na camada aberta seguinte E_0 .

E_0	0	1	2	3	4	5	6
$E_{\min}$	0	A-4	2A-20	3A-60	4A-140	5A-280	6A-504
n_0	A	A-4	A-16	A-40	A-80	A-140	A-224

(3.25)

O nosso objetivo é rotular os estados de um sistema de A nucleons com energia *mínima* pelos rótulos fornecidos pela cadeia unitária (3.19)

As irreps de $U(3(A-1))$ são rotuladas por E . Para $1 \leq A \leq 4$ temos $E_0 = 0$ e $E = 0$. Para $A \geq 5$ procuramos na tabela acima qual o último valor de n_0 (exceto o valor A) que nos dá um resultado positivo. Na coluna correspondente obtemos $E_{\min}$ e n_0 .

As irreps de $U(3)$ são rotuladas por 3 inteiros $\{E_1, E_2, E_3\}$ que , de acordo com (3.19) devem satisfazer

$$E_1 + E_2 + E_3 = E . \quad (3.26)$$

Ainda por (3.19), as irreps de $U^{(r)}(A-1)$ são as mesmas de $U(3)$ ou seja, $\{E_1, E_2, E_3\}$. A Eq.(3.13) nos fornece as irreps de $O^{(r)}(A-1)$ contidas na irrep $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $U^{(r)}(A-1)$. Dessas uma delas é com certeza (E_1, E_2, E_3) e sómente essa corresponde aos estados de energia mínima. Isso nos fixa a irrep de $O^{(r)}(A-1)$ igual à de $U^{(r)}(A-1)$. Resta ainda a restrição $O^{(r)}(A-1) \rightarrow S^{(r)}(A)$.

As irreps $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $U^{(r)}(A-1)$ são rotuladas por $\tilde{\lambda} = [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3]$. O princípio de Pauli, porém nos impõe uma restrição adicional. O tratamento da parte de spin-isospin pelo modelo do super multipletto de Wigner implica que a irrep $[\tilde{\lambda}]$ de $S^{(s)}(A)$ deve ter no máximo 4 linhas, ou seja,

$$[\tilde{\lambda}] = [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4] . \quad (3.27)$$

Veremos a seguir a redução das irreps na cadeia $U(n-1) \supset S(n)$. A redução das irreps na cadeia $O(n-1) \supset S(n)$ é obtida primeiro exprimindo os caracteres de $O(n-1)$ em termos dos de $U(n-1)$ usando (3.14), e em seguida efetuando a redução $U(n-1) \rightarrow S(n)$ das irreps resultantes de $U(n-1)$.

As irreps de $S(n)$ contidas na redução da irrep $\{\lambda'\}$ de $U(n-1)$ são dadas pela expansão do pletismo interno $\{n-1, 1\} \odot \{\lambda'\}$ em termos de irreps de $S(n)$ [Refs.[13],[39]]:

$$\{n-1, 1\} \odot \{\lambda'\} = \sum_{\lambda''} V_{\lambda'\lambda''} [n-r'', \lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_{n-1}] \quad (3.28)$$

onde $r'' = \sum_i \lambda''_i$ é o grau da irrep $\{\lambda''\}$ de $U(n-1)$.

Para obter os coeficientes $V_{\lambda'\lambda''}$ e as irreps $\{\lambda''\}$ que aparecem em (3.28) precisamos primeiramente definir dois operadores $\widehat{D}$ e $\widehat{D}$ que agem sobre irreps de $U(n-1)$.

O operador $\widehat{D}(\{\lambda\})$ é definido pela sua ação sobre uma irrep $\{\lambda'\}$:

$$\widehat{D}(\{\lambda\})\{\lambda'\} = \sum_{\lambda''} \alpha(\{\lambda\}\{\lambda''\} \rightarrow \{\lambda'\})\{\lambda''\}. \quad (3.29)$$

Por exemplo, $\widehat{D}(\{2\})\{31\} = \{2\} + \{1^2\}$.

Das propriedades do produto externo de funções de Schur decorre que os operadores $\widehat{D}$ satisfazem as relações

$$\widehat{D}(\{\lambda'\})\widehat{D}(\{\lambda''\}) = \widehat{D}(\{\lambda'\}\{\lambda''\}), \quad (3.30)$$

$$\widehat{D}(\{\lambda'\}) + \widehat{D}(\{\lambda''\}) = \widehat{D}(\{\lambda'\} + \{\lambda''\}). \quad (3.31)$$

O operador $\widehat{D}$ é definido em termos de $\widehat{D}$ por

$$\begin{aligned} \widehat{D} = & \sum_{t_2=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{t_2}} \sum_{t_3=0}^{\infty} \sum_{\lambda_{t_3}} \dots \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} \dots (\{\lambda\}_{t_2} \{\lambda\}_{t_3} \dots) (\widehat{D}(\{2\} \otimes \{\lambda\}_{t_2}) \cdot \\ & \cdot (\widehat{D}(\{3\} \otimes \{\lambda_{t_3}\}) \dots (\widehat{D}(\{2\} \otimes \{j_2\}) (\widehat{D}(\{3\} \otimes \{j_3\}) \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Os $\{j_2\}, \{j_3\}, \dots$ são funções de Schur simétricas e os $\{\lambda\}_{t_2}, \{\lambda\}_{t_3}, \dots$ são funções de Schur gerais de grau $t_2, t_3, \dots$.

Designando por r, r' e r'' os graus de $\{\lambda\}, \{\lambda'\}$ e $\{\lambda''\}$ ve-se de (3.29) que as funções de Schur $\{\lambda''\}$ produzidas por $\widehat{D}(\{\lambda\})$ sobre a irrep $\{\lambda'\}$ tem grau $r'' = r' - r$. Como só tem sentido $r'' \geq 0$, isso limita as somatórias em $t_2, t_3, \dots, j_2, j_3, \dots$ em $\widehat{D}\{\lambda'\}$.

Pela propriedade (3.31) temos que

$$\begin{aligned} \widehat{D}(\{n\} \otimes \{\lambda\}_{t_n}) &= \widehat{D} \left(\sum_{\lambda''} \alpha(\{n\} \otimes \{\lambda\}_{t_n} \rightarrow \{\lambda''\}) \{\lambda''\} \right) = \\ & \sum_{\lambda''} \alpha(\{n\} \otimes \{\lambda\}_{t_n} \rightarrow \{\lambda''\}) \widehat{D}(\{\lambda''\}) \end{aligned}$$

para cada pletismo que aparece em (3.32). Em seguida, o produto de $\widehat{D}$'s é convertido, pelo uso de (3.30) num único $\widehat{D}$ com argumento igual ao produto das

funções de Schur de cada um dos fatores. Efetuando então o produto externo dessas funções de Schur e usando novamente (3.31) podemos re-escrever $\widehat{D}$ numa forma linearizada nos $\widehat{D}$'s e nas funções de Schur:

$$\widehat{D} = \sum_{\lambda, \lambda''} C_{\lambda''\lambda} \{\lambda''\} \widehat{D}(\{\lambda\}) \quad (3.33)$$

onde os $C_{\lambda''\lambda}$ são apenas coeficientes numéricos.

Nessa forma linearizada de $\widehat{D}$ podemos agrupar os termos cujos argumentos dos $\widehat{D}$'s tenham o mesmo grau, isto é,

$$\widehat{D} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{\{\lambda\}_i} \left(\sum_{\lambda''} C_{\lambda''\{\lambda\}_i} \{\lambda''\} \right) \widehat{D}(\{\lambda\}_i) \right] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i . \quad (3.34)$$

Ao agir sobre $\{\lambda'\}$ temos

$$\widehat{D}\{\lambda'\} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \{\lambda'\} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{\{\lambda\}_i} \left(\sum_{\lambda''} C_{\lambda''\{\lambda\}_i} \{\lambda''\} \right) \widehat{D}(\{\lambda\}_i) \{\lambda'\} \right] . \quad (3.35)$$

Usando (3.29) e juntando termos semelhantes obtemos uma expressão do tipo

$$\widehat{D}\{\lambda'\} = \sum_{\lambda''} V_{\lambda' \lambda''} \{\lambda''\} .$$

Essa redução final nos fornece as $\{\lambda''\}$ e os $V_{\lambda' \lambda''}$ que aparecem em (3.28). As $\{\lambda''\}$ dão as irreps $[n - r'', \lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_n]$ de $S(n)$ presentes na redução da irrep $\{\lambda'\}$ de $U(n - 1)$ e os V são suas multiplicidades.

Do procedimento descrito para se obter (3.34) obtemos que os únicos t_k e j_k de (3.32) que contribuem para δ_i com i fixo são as soluções por números inteiros da equação

$$\sum_{k=2}^{\infty} \lambda(t_k - j_k) = i . \quad (3.36)$$

Para $i = 0$ só uma solução é possível, $t_k = j_k = 0$ e portanto $\delta_0 = \{0\}$. Para $i = 1$ não há solução e portanto $\delta_1 = 0$. Para $i = 2, 3$ e 4 temos os resultados

$$\begin{aligned} \delta_2 &= (\{0\} + \{1\}) \widehat{D}(\{2\}) , \\ \delta_3 &= (\{0\} + \{1\}) \widehat{D}(\{3\}) , \\ \delta_4 &= (2\{0\} + 2\{1\} + \{2\}) \widehat{D}(\{4\}) + (\{1\} + \{1^2\}) \widehat{D}(\{31\}) + \\ &\quad + (\{0\} + \{1\} + \{2\}) \widehat{D}(\{2^2\}) . \end{aligned}$$

Pela definição dos $\widehat{\mathcal{D}}$'s decorre que $\delta_i\{\lambda\} = 0$ quando o grau de $\{\lambda\}$ for menor que i e portanto temos que

$$\widehat{\mathcal{D}}\{\lambda\}_r = (\delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_r)\{\lambda\}_r \quad (3.37)$$

para uma função de Schur de grau r . Com os δ 's listados acima podemos calcular a redução $U(n-1) \rightarrow S(n)$ para irreps de grau menor ou igual a 4:

$$\begin{aligned} \{0\} &= [n] , \\ \{1\} &= [n-1, 1] , \\ \{2\} &= [n-2, 2] + [n-1, 1] + [n] , \\ \{1^2\} &= [n-2, 1^2] , \\ \{3\} &= [n-3, 3] + [n-2, 2] + [n-2, 1^2] + 2[n-1, 1] + [n] , \\ \{21\} &= [n-3, 2, 1] + [n-2, 2] + [n-2, 1^2] + [n-1, 1] , \\ \{1^3\} &= [n-3, 1^3] , \\ \{4\} &= 2[n] + 3[n-1, 1] + 3[n-2, 2] + [n-2, 1^2] + [n-3, 3] \\ &\quad + [n-3, 2, 1] + [n-4, 4] , \\ \{31\} &= 2[n-1, 1] + 2[n-2, 2] + 3[n-2, 1^2] + [n-3, 3] + [n-3, 2, 1] \\ &\quad + [n-3, 1^3] + [n-4, 3, 1] , \\ \{2^2\} &= [n] + [n-1, 1] + 2[n-2, 2] + [n-3, 3] + [n-3, 2, 1] + [n-4, 2^2] , \\ \{21^2\} &= [n-2, 1^2] + [n-3, 2, 1] + [n-3, 1^3] + [n-4, 2, 1^2] , \\ \{1^4\} &= [n-4, 1^4] . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando uma tabela de redução $U(n) \supset O(n)$ [3], [39], podemos expressar, por subtrações, os caracteres de $O(n)$ em termos dos de $U(n)$ e, usando (3.38) obtemos a redução $O(n-1) \supset S(n)$ para irreps de grau até 4:

$$\begin{aligned} (0) &= [n] , \\ (1) &= [n-1, 1] , \\ (2) &= [n-2, 2] + [n-1, 1] , \\ (1^2) &= [n-2, 1^2] , \\ (3) &= [n-3, 3] + [n-2, 2] + [n-2, 1^2] + [n-1, 1] + [n] , \\ (21) &= [n-3, 2, 1] + [n-2, 2] + [n-2, 1^2] , \\ (1^3) &= [n-3, 1^3] , \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
(4) &= [n-4, 4] + [n-3, 3] + [n-3, 2, 1] + 2[n-2, 2] + [n-2, 1^2] \\
&\quad + 2[n-1, 1] + [n] , \\
(31) &= [n-4, 3, 1] + [n-3, 3] + 2[n-3, 2, 1] + [n-3, 1^3] + [n-2, 2] \\
&\quad + 2[n-2, 1^2] + [n-1, 1] , \\
(2^2) &= [n-4, 2^2] + [n-3, 3] + [n-3, 2, 1] + [n-2, 2] , \\
(21^2) &= [n-4, 2, 1^2] + [n-3, 2, 1] + [n-3, 1^3] , \\
(1^4) &= [n-4, 1^4] .
\end{aligned}$$

Nas Refs.[3],[39] há uma tabela da redução $O(n-1) \supset S(n)$ para (λ') de grau até 7 com não mais que 4 linhas.

A expansão (3.34) de $\widehat{D}$ em termos dos δ_i nos permite calcular *todas* as irreps $[\lambda'']$ de $S(n)$ contidas na irrep $\{\lambda'\}$ de $U(n-1)$. Para valores grandes de $r_{\lambda'}$ esse é um processo muito trabalhoso.

Nas aplicações em Física Nuclear temos que as irreps $\{\lambda'\}$ de $U(n-1)$ de interesse são, de acordo com (3.26) aquelas com no máximo 3 linhas, isto é, $\{\lambda'\} = \{E_1, E_2, E_3\}$. Além disso, o princípio de Pauli impõe que só são fisicamente aceitáveis as irreps de $S(4)$ conjugadas a (3.27), isto é, da forma

$$[\lambda] = [4^{k_4}, 3^{k_3}, 2^{k_2}, 1^{k_1}] \quad (3.40)$$

com

$$4k_4 + 3k_3 + 2k_2 + k_1 = A . \quad (3.41)$$

Os k_i são interpretados[37] como o número de níveis espaciais ocupados por 1, 2, 3, 4 nucleons.

De agora em diante restringir-nos-emos aos casos de interesse físico, isto é, aqueles em que $\{\lambda'\}$ tem no máximo 3 linhas e $[\lambda]$ é da forma (3.40). Nesses casos é mais conveniente agrupar, na forma linearizada de $\widehat{D}$ [Eq.(3.33)], os termos em que a diferença entre o grau do argumento de $\widehat{D}$ menos o da função de Schur que o multiplica é um inteiro fixo i :

$$\widehat{D} = \sum_i \left[\sum_{\lambda, \mu; r_{\lambda}-r_{\mu}=i} C_{\mu, \lambda} \{\mu\} \widehat{D}(\{\lambda\}) \right] \equiv \sum_i \Delta_i . \quad (3.42)$$

Comparando com (3.32) obtemos que os j_k e t_k que contribuem para Δ_i devem satisfazer a relação

$$\sum_k [(k-1)t_k + kj_k] = i . \quad (3.43)$$

Resolvendo essa equação para valores inteiros de k, t_k e j_k obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \{0\} , \\
\Delta_1 &= \{1\}\widehat{\mathcal{D}}(\{2\}) , \\
\Delta_2 &= \{0\}\widehat{\mathcal{D}}(\{2\}) + \{1\}\widehat{\mathcal{D}}(\{3\}) + \{2\}\widehat{\mathcal{D}}(\{4\}) + \{2\}\widehat{\mathcal{D}}(\{2^2\}) + \{1^2\}\widehat{\mathcal{D}}(\{31\}) , \\
\Delta_3 &= \{0\}\widehat{\mathcal{D}}(\{3\}) + 2\{1\}\widehat{\mathcal{D}}(\{4\}) + (\{2\} + \{1^2\})(\widehat{\mathcal{D}}(\{5\}) + \widehat{\mathcal{D}}(\{41\}) + \widehat{\mathcal{D}}(\{32\})) \\
&\quad + \{1\}(\widehat{\mathcal{D}}(\{31\}) + \widehat{\mathcal{D}}(\{2^2\})) + \{3\}(\widehat{\mathcal{D}}(\{6\}) + \widehat{\mathcal{D}}(\{42\}) + \widehat{\mathcal{D}}(\{2^3\})) \\
&\quad + \{21\}(\widehat{\mathcal{D}}(\{51\}) + \widehat{\mathcal{D}}(\{42\}) + \widehat{\mathcal{D}}(\{321\})) + \{1^3\}(\widehat{\mathcal{D}}(\{41^2\}) + \widehat{\mathcal{D}}(\{3^2\})).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Aplicando Δ_i a uma irrep $\{\lambda'\}$ de $U(n-1)$ de grau E temos

$$\Delta_i\{\lambda'\}_E = \sum_{\lambda\mu; (r_\lambda - r_\mu = i)} C_{\mu\lambda} \{\mu\} \left[\sum_{\nu} \alpha(\{\lambda\}\{\nu\} \rightarrow \{\lambda'\}_E) \{\nu\} \right] . \tag{3.45}$$

Efetuada o produto externo $\{\mu\}\{\nu\}$ temos

$$\Delta_i\{\lambda'\}_E = \sum_{\lambda\mu\nu\sigma; (r_\lambda - r_\mu = i)} C_{\mu\lambda} \alpha(\{\lambda\}\{\nu\} \rightarrow \{\lambda'\}_E) \alpha(\{\mu\}\{\nu\} \rightarrow \{\sigma\}) \{\sigma\} . \tag{3.46}$$

As irreps $\{\sigma\}$ terão grau

$$r_\sigma = r_\mu + r_\nu = r_\mu + (E - r_\lambda) = E - i \tag{3.47}$$

e, por (3.28), elas produzirão irreps de $S(A)$ com rótulos

$$[n - (E - i), \sigma_1, \sigma_2, \dots] . \tag{3.48}$$

Portanto, de (3.40) temos

$$n - E + i \leq 4 \Rightarrow i \leq 4 + E - n \quad \text{e} \quad \sigma_1 \leq 4 . \tag{3.49}$$

Isso nos fixa um valor máximo

$$i_{\max} = E - n + 4 \tag{3.50}$$

na expansão de $\widehat{D}$ dada por (3.42):

$$\widehat{D}\{\lambda'\}_E \stackrel{\circ}{=} \sum_{i=0}^{E-n+4} \Delta_i\{\lambda'\}_E . \tag{3.51}$$

onde o símbolo $\stackrel{\circ}{=}$ significa que no lado direito da equação só são consideradas as irreps de $U(A-1)$ que produzem, por (3.28) irreps de $S(A)$ fisicamente aceitáveis.

Analisemos (3.46) detalhadamente. Como as $\{\lambda'\}_E$ que nos interessam têm no máximo 3 linhas, o mesmo ocorre com $\{\lambda\}$ e $\{\nu\}$, isto é,

$$\{\lambda\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \text{ e } \{\nu\} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\} . \quad (3.52)$$

Uma vez que $\{\sigma\}$ resulta do produto externo $\{\mu\}\{\nu\}$, a restrição $\sigma_i \leq 4$ se aplica também a μ_i e ν_i e, em vista de (3.52), temos

$$r_\nu \leq 12 . \quad (3.53)$$

Esse resultado, juntamente com $r_\lambda + r_\nu = E$ nos permite concluir que

$$r_\lambda \geq E - 12 . \quad (3.54)$$

Da definição de Δ_i temos que $\{\lambda\}$ é obtida após linearizar o produto dos $\hat{D}$'s em (3.32) e portanto r_λ é a soma dos graus dos argumentos dos $\hat{D}$'s, isto é,

$$r_\lambda = \sum_k k(t_k + j_k) . \quad (3.55)$$

Esse resultado, junto com (3.43) nos dá

$$r_\lambda = i + \sum_k t_k \leq 2i . \quad (3.56)$$

Assim sendo, para um dado i os r_λ 's devem satisfazer

$$E - 12 \leq r_\lambda \leq 2i \quad (3.57)$$

o que implica em

$$2i \geq E - 12 \Rightarrow i \leq \left[\frac{E+1}{2} \right] - 6 . \quad (3.58)$$

Concluimos pois que para um estado de energia E de um dado núcleo com $A = n$ nucleons os t_k e j_k de (3.32) que podem contribuir na redução $U(A-1) \supset S(A)$ são aqueles que produzem Δ_i com

$$\left[\frac{E+1}{2} \right] - 6 \leq i \leq E - n + 4 \quad (3.59)$$

e para cada i nesse intervalo deve valer

$$E - 12 \leq r_\lambda \leq 2i . \quad (3.60)$$

Para núcleos $p(5 \leq A \leq 16)$ temos que $E_{\min} = A - 4$ e então

$$i = r_\lambda = 0 \text{ (núcleos } p) \quad (3.61)$$

e a redução $U(A-1) \supset S(A)$ produz uma única irrep de $S(A)$ fisicamente aceitável

$$\{E_1, E_2, E_3\} \rightarrow [4, E_1, E_2, E_3] \quad (3.62)$$

para cada irrep de $U(A-1)$ com

$$E_1 + E_2 + E_3 = A - 4 \quad \text{e} \quad E_i \leq 4. \quad (3.63)$$

Obtemos assim os resultados da tabela do Apêndice A.

Para núcleos $s-d$ ($17 \leq A \leq 40$) temos que $E_{\min} = 2A - 20$. Então para os estados de mais baixa energia de cada um deles temos

$$i_{\max} = i_{\min} = A - 16; \quad r_\lambda = 2A - 32 = 2i_{\max} \quad (\text{núcleos } s-d). \quad (3.64)$$

Para termos $r_\lambda = 2i_{\max}$ vemos de (3.56) que devemos ter $\sum_k t_k = i_{\max}$, o que se obtém apenas para

$$t_2 = i_{\max}; \quad t_3 = t_4 = \dots = j_2 = j_3 = \dots = 0 \quad (\text{núcleos } s-d). \quad (3.65)$$

Portanto, para efeito de se obter uma irrep de $S(A)$ fisicamente aceitável, temos

$$\widehat{D}\{\lambda'\}_{E_{\min}} \stackrel{\circ}{=} \sum_{\{\lambda\}_{i_{\max}}} \{\lambda\}_{i_{\max}} \widehat{D}(\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}}) \{\lambda'\}_{E_{\min}}. \quad (3.66)$$

Então os únicos pletismos que temos que calcular para os núcleos $s-d$ são aqueles com a irrep à esquerda igual a $\{2\}$. Esses são calculáveis usando (2.6) como input no procedimento proposto na Seção (2.2)

Além disso, de $r_\lambda + r_\nu = E_{\min}$, (3.64), (3.52) e (3.66) obtemos $\{\nu\} = \{444\}$ e portanto

$$\begin{aligned} \widehat{D}\{\lambda'\}_{E_{\min}} &\stackrel{\circ}{=} \sum_{\{\lambda\}_{i_{\max}}} \{\lambda\}_{i_{\max}} \sum_{\{\lambda\}_{2i_{\max}}} \alpha(\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}} \rightarrow \{\lambda\}_{2i_{\max}}) \widehat{D}(\{\lambda\}_{2i_{\max}}) \{\lambda'\}_{E_{\min}} \\ &\stackrel{\circ}{=} \sum_{\{\lambda\}_{i_{\max}}} \sum_{\{\lambda\}_{2i_{\max}}} \alpha(\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}} \rightarrow \{\lambda\}_{2i_{\max}}) \alpha(\{\lambda\}_{2i_{\max}} \{444\} \rightarrow \\ &\quad \{\lambda'\}_{E_{\min}} \{444\}). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Isso nos permite obter o resultado final a partir da tabela de pletismos $\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}}$. O fato de só interessar as irreps $\{\lambda'\}_{E_{\min}}$ de 3 linhas implica que na soma em $\{\lambda\}_{2i_{\max}}$ só nos interessam as irreps de 3 linhas e da forma

$$\{\lambda\}_{2i_{\max}} = \{\lambda'_1 - 4, \lambda'_2 - 4, \lambda'_3 - 4\} \quad (3.68)$$

e portanto

$$\widehat{D}\{\lambda'\}_{E_{\min}} \stackrel{\circ}{=} \sum_{\{\lambda\}_{i_{\max}}} \alpha(\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}} \rightarrow \{\lambda'_1 - 4, \lambda'_2 - 4, \lambda'_3 - 4\}) \{\lambda\}_{i_{\max}} \{444\}. \quad (3.69)$$

O produto $\{\lambda\}_{i_{\max}}\{444\}$ contém irreps $\{\sigma\}$ do tipo $\{4 + \alpha, 4 + \beta, 4 + \gamma, \delta, \dots\}$ que por (3.28) darão irreps $[\lambda]$ de $S(A)$ do tipo $[4, 4 + \alpha, 4 + \beta, 4 + \gamma, \delta, \dots]$ que para satisfazerem (3.63) devem ter $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ou seja,

$$[\lambda] \stackrel{\circ}{=} [4^4, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots] \quad (3.70)$$

com $\bar{\lambda}_1 \leq 4$, sendo $\bar{\lambda}_i$ as componentes de $\{\lambda\}_{i_{\max}}$.

Conclusão: para calcular as irreps de $U(A-1)$ que contêm irreps de $S(A)$ permitidas pelo princípio de Pauli, para núcleos $s-d$ com $E = E_{\min}$ basta construir a tabela de pletismos $\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}}$ [Veja Eq.(3.64)] para todas as partições de $i_{\max}$ com $\lambda_i \leq 4$.

Essa tabela deve ser do tipo das tabelas de produtos externos. A parte interior deve conter os coeficientes α da expansão de $\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}}$. Na aba superior colocamos as irreps $\{\mu\}$ dessa expansão com no máximo 3 linhas e na aba esquerda os $\{\lambda\}_{i_{\max}}$ com $\lambda_1 \leq 4$. Os $\{\lambda'\}_{E_{\min}}$ são obtidos pela relação $\{\lambda'\}_{E_{\min}} = \{\mu_1 + 4, \mu_2 + 4, \mu_3 + 4\}$ e colocados na aba inferior. Os $[\lambda]$ de $S(A)$ são dados por $[4^4, \lambda_1, \lambda_2, \dots]$ e colocados na aba direita. A redução $\{\lambda'\} \rightarrow [\lambda]$ de $U(A-1) \supset S(A)$ é obtida lendo-se os coeficientes na coluna correspondente a $\{\lambda'\}_{E_{\min}}$ e as irreps $[\lambda]$ na aba direita.

Por exemplo, para $A = 19$ temos $E_{\min} = 18$ e $i_{\max} = 3$. Então construímos a tabela de pletismos $\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}}$ abaixo

	$\{6\}$	$\{51\}$	$\{42\}$	$\{41^2\}$	$\{3^2\}$	$\{321\}$	$\{2^3\}$	
$[3]$	1		1				1	$[4^43]$
$[21]$		1	1			1		$[4^421]$
$[1^3]$				1	1			$[4^41^3]$
	$\{10,4^2\}$	$\{954\}$	$\{864\}$	$\{85^2\}$	$\{7^24\}$	$\{765\}$	$\{6^3\}$	

Dessa tabela resulta que para $A = 19$ as partições de $E_{\min} = 18$ permitidas pelo princípio de Pauli e as respectivas irreps de $S(19)$ correspondentes são:

$$\begin{aligned}
\{10,4^2\} &\stackrel{\circ}{=} [4^43], \\
\{9,5,4\} &\stackrel{\circ}{=} [4^421], \\
\{864\} &\stackrel{\circ}{=} [4^43] + [4^421], \\
\{85^2\} &\stackrel{\circ}{=} [4^41^3], \\
\{7^24\} &\stackrel{\circ}{=} [4^41^3], \\
\{765\} &\stackrel{\circ}{=} [4^421], \\
\{6^3\} &\stackrel{\circ}{=} [4^43].
\end{aligned}$$

Calculamos, usando programas de computador baseados nas equações do capítulo 2, as tabelas dos pletismos $\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{\max}}$ relevantes para os núcleos $s - d$ e obtivemos as irreps de $U(A - 1)$ e de $S(A)$ compatíveis com o princípio de Pauli listadas no Apêndice B.

Para estados de energia mínima de núcleos de camadas após a $(s - d)$ bem como núcleos da camada $s - d$ com energia maior que a mínima, vários t_k e/ou j_k além daqueles satisfazendo (3.59) e (3.60) podem contribuir em (3.39). Isso torna o cálculo mais extenso porém factível para os núcleos existentes fazendo-se uso das facilidades computacionais atuais.

Até agora obtivemos a redução das irreps na restrição $U(A - 1) \supset S(A)$ mas, de acordo com (3.19) o que interessa é a redução pela restrição $O(A - 1) \supset S(A)$. Como foi dito anteriormente, esta se obtém expressando os caracteres de $O(A - 1)$ em termos dos de $U(A - 1)$, efetuando os pletismos resultantes e re-expressando os caracteres de $U(A - 1)$ em termos dos de $O(A - 1)$. De acordo com (3.13) o caráter (λ) de $O(A - 1)$ é igual a $\{\lambda\} - \{\lambda'\}$, sendo $\{\lambda'\}$ uma combinação linear de caracteres de $U(A - 1)$ de grau $r_\lambda - 2, r_\lambda - 4, \dots$. Para $E = E_{\min}$ e $E = E_{\min} + 1$, o caráter $\{\lambda'\}$ conduzirá a irreps de $U(A - 1)$ com energia menor que $E_{\min}$ e portanto não fisicamente aceitáveis. Conclui-se então que para $E = E_{\min}$ e $E = E_{\min} + 1$ a irrep de $O(A - 1)$ é a mesma de $U(A - 1)$ e a redução pela restrição $O(A - 1) \rightarrow S(A)$ é a mesma daquela por $U(A - 1) \rightarrow S(A)$.

Apêndice A

Classificação dos estados de mais baixa energia para os núcleos p

Esta classificação foi obtida usando as Eqs. (3.51) e (3.61). Na terceira coluna colocamos os rótulos de $SU(3)$ na notação de Elliott: $p = E_1 - E_2, q = E_2 - E_3$. Observe que há uma simetria pela troca de partícula por buraco na camada aberta p , ou seja, os rótulos associados a A estão relacionados aos de $\bar{A} = 4 + (16 - A) = 20 - A$. Para os rótulos de $SU(3)$ a associação é $\bar{p} = q, \bar{q} = p$. Para os rótulos de $S(A)$, escrevendo $[\lambda] = [4, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}]$ temos, para os rótulos de $S(\bar{A})$, $[\bar{\lambda}] = [4, 4 - \lambda_3^{(0)}, 4 - \lambda_2^{(0)}, 4 - \lambda_1^{(0)}]$.

A	{E}	(pq)	$[\lambda]$
5	{1}	(10)	$[41]$
6	{2}	(20)	$[42]$
	$\{1^2\}$	(01)	$[41^2]$
7	{3}	(30)	$[43]$
	{21}	(11)	$[421]$
	$\{1^3\}$	(00)	$[41^3]$
8	{4}	(40)	$[4^2]$
	{31}	(21)	$[431]$
	$\{2^2\}$	(02)	$[42^2]$
	$\{21^2\}$	(10)	$[421^2]$
9	{41}	(31)	$[4^21]$
	{32}	(12)	$[432]$
	$\{31^2\}$	(20)	$[431^2]$
	$\{2^21\}$	(01)	$[42^21]$
10	{42}	(22)	$[4^22]$
	$\{41^2\}$	(30)	$[4^21^2]$
	$\{3^2\}$	(03)	$[43^2]$
	$\{321\}$	(11)	$[4321]$
	$\{2^3\}$	(00)	$[42^3]$

A	{E}	(pq)	$[\lambda]$
11	{43}	(13)	$[4^23]$
	$\{421\}$	(21)	$[4^221]$
	$\{3^21\}$	(02)	$[43^21]$
	$\{32^2\}$	(10)	$[432^2]$
12	$\{4^2\}$	(04)	$[4^3]$
	$\{431\}$	(12)	$[4^231]$
	$\{42^2\}$	(20)	$[4^22^2]$
	$\{3^22\}$	(01)	$[43^22]$
13	$\{4^21\}$	(03)	$[4^31]$
	$\{432\}$	(11)	$[4^232]$
	$\{3^3\}$	(00)	$[43^3]$
14	$\{42^2\}$	(02)	$[4^32]$
	$\{43^2\}$	(10)	$[4^23^2]$
15	$\{4^23\}$	(01)	$[4^33]$
16	$\{4^3\}$	(00)	$[4^4]$

Apêndice B

Classificação dos estados de mais baixa energia para os núcleos

$s - d(17 \leq A \leq 40)$

Essa classificação foi obtida a partir da tabela de pletismos $\{2\} \otimes \{\lambda\}_{i_{max}}$ com $i_{max} = A - 16$, conforme exposto no texto. Listamos apenas os núcleos da primeira metade da camada. Para a segunda metade usamos a simetria partícula buraco para essa camada. Por ela, a um dado A associamos um $\bar{A} = 16 + (40 - A) = 56 - A$. Novamente para os rótulos de $SU(3)$ temos $\bar{p} = q$ e $\bar{q} = p$. Ao rótulo $[\lambda] = [4^4, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_6^{(0)}]$ de $S(A)$ associamos o rótulo $[\bar{\lambda}] = [4 - \lambda_6^{(0)}, 4 - \lambda_5^{(0)}, \dots, 4 - \lambda_1^{(0)}]$ de $S(\bar{A})$.

A	{E}	(pq)	[λ]
17	{6 4 ² }	(20)	[4 ⁴ 1]
18	{84 ² }	(40)	[4 ⁴ 2]
	{754}	(21)	[4 ⁴ 1 ²]
	{6 ² 4}	(02)	[4 ⁴ 2]
19	{10,4 ² }	(60)	[4 ⁴ 3]
	{954}	(41)	[4 ⁴ 21]
	{864}	(22)	[4 ⁴ 3] +[4 ⁴ 21]
	{85 ² }	(30)	[4 ⁴ 1 ³]
	{7 ² 4}	(03)	[4 ⁴ 1 ³]
	{765}	(11)	[4 ⁴ 21]
	{6 ³ }	(00)	[4 ⁴ 3]

A	{E}	(pq)	[λ]
20	{124 ² }	(80)	[4 ⁵]
	{11,5,4}	(61)	[4 ⁴ 31]
	{10,6,4}	(42)	[4 ⁵] + [4 ⁴ 31] +[4 ⁴ 2 ²]
	{10,5 ² }	(50)	[4 ⁴ 21 ²]
	{974}	(23)	[4 ⁴ 31] + [4 ⁴ 21 ²]
	{8 ² 4}	(04)	[4 ⁵] + [4 ⁴ 2 ²]
	{875 }	(12)	[4 ⁴ 31] + [4 ⁴ 21 ²] +[4 ⁴ 1 ⁴]
	{86 ² }	(20)	[4 ⁵] + [4 ⁴ 31] +[4 ⁴ 2 ²]
	{7 ² 6}	(01)	[4 ⁴ 21 ²]
	{965}	(31)	[4 ⁴ 31] + [4 ⁴ 2 ²] +[4 ⁴ 21 ²]

A	{E}	(pq)	[λ]
21	{13,5,4}	(81)	[4 ⁵ 1]
	{12,6,4}	(62)	[4 ⁵ 1] + [4 ⁴ 32]
	{12,5 ² }	(70)	[4 ⁴ 31 ²]
	{11,7,4}	(43)	[4 ⁵ 1] + [4 ⁴ 32] + [4 ⁴ 31 ²]
	{11,6,5}	(51)	[4 ⁵ 1] + [4 ⁴ 32] + [4 ⁴ 31 ²] + [4 ⁴ 2 ² 1]
	{10,8,4}	(24)	[4 ⁵ 1] + [4 ⁴ 32] + [4 ⁴ 2 ² 1]
	{10,7,5}	(32)	[4 ⁵ 1] + [4 ⁴ 32] + 2[4 ⁴ 31 ²] + [4 ⁴ 2 ² 1] + [4 ⁴ 21 ³]
	{10,6 ² }	(40)	[4 ⁵ 1] + 2[4 ⁴ 32] + [4 ⁴ 2 ² 1]
	{9 ² 4}	(05)	[4 ⁴ 31 ²]
	{985}	(13)	[4 ⁵ 1] + [4 ⁴ 32] + [4 ⁴ 31 ²] + [4 ⁴ 2 ² 1] + [4 ⁴ 21 ³]
	{976}	(21)	[4 ⁵ 1] + [4 ⁴ 32] + 2[4 ⁴ 31 ²] + [4 ⁴ 2 ² 1] + [4 ⁴ 21 ³]
	{8 ² 6}	(02)	[4 ⁵ 1] + [4 ⁴ 32] + [4 ⁴ 1 ⁵] + [4 ⁴ 2 ² 1]
	{8 7 ² }	(10)	[4 ⁴ 31 ²] + [4 ⁴ 21 ³]

A	{E}	(pq)	$[\lambda]$
22	{14,6,4}	(82)	$[4^5 2]$
	{14,5 ² }	(90)	$[4^5 1^2]$
	{13,7,4 }	(63)	$[4^5 2] + [4^5 1^2] + [4^4 3^2]$
	{13,6,5}	(71)	$[4^5 2] + [4^5 1^2] + [4^4 3 2 1]$
	{12,8,4}	(44)	$2[4^5 2] + [4^4 3 2 1]$
	{12,7,5}	(52)	$[4^5 2] + 2[4^5 1^2] + [4^4 3^2] + 2[4^4 3 2 1] + [4^4 3 1^3]$
	{12,6 ² }	(60)	$2[4^5 2] + [4^4 3^2] + [4^4 3 2 1] + [4^4 2^3]$
	{11,9,4}	(25)	$[4^5 1^2] + [4^4 3^2] + [4^4 3 2 1]$
	{11,8,5}	(33)	$2[4^5 2] + 2[4^5 1^2] + [4^4 3^2] + 2[4^4 3 2 1] + [4^4 3 1^3] + [4^4 2^3]$ $+ [4^4 2^2 1^2]$
	{11,7,6}	(41)	$2[4^5 2] + 2[4^5 1^2] + [4^4 3^2] + 3[4^4 3 2 1] + [4^4 3 1^3] + [4^4 2^2 1^2]$
	{10 ² 4}	(06)	$[4^5 2] + [4^4 2^3]$
	{10,9,5}	(14)	$[4^5 2] + [4^5 1^2] + 2[4^4 3 2 1] + [4^4 3 1^3] + [4^4 2^2 1^2]$
	{10,8,6}	(22)	$3[4^5 2] + [4^5 1^2] + [4^4 3^2] + 3[4^4 3 2 1] + [4^4 3 1^3] + 2[4^4 2^3]$ $+ [4^4 2^2 1^2] + [4^4 2 1^4]$
	{10,7 ² }	(30)	$2[4^5 1^2] + [4^4 3^2] + [4^4 3 2 1] + 2[4^4 3 1^3] + [4^4 2^2 1^2]$
	{9 ² 6}	(03)	$2[4^5 1^2] + [4^4 3^2] + [4^4 3 2 1] + [4^4 3 1^3] + [4^4 2^2 1^2]$
	{987}	(11)	$[4^5 2] + [4^5 1^2] + 2[4^4 3 2 1] + [4^4 3 1^3] + [4^4 2^2 1^2] + [4^4 2 1^4]$
	{8 ³ }	(00)	$[4^5 2] + [4^4 2^3] + [4^4 1^6]$

A	(E)	(pq)	$[\lambda]$
23	$\{15,7,4\}$	(8,3)	$[4^5 3]$
	$\{14,8,4\}$	(64)	$[4^5 3] + [4^5 21]$
	$\{13,9,4\}$	(45)	$[4^5 3] + [4^5 21] + [4^4 3^2 1]$
	$\{12,10,4\}$	(26)	$[4^5 3] + [4^5 21] + [4^4 32^2]$
	$\{11^2, 4\}$	(07)	$[4^4 3^2 1]$
	$\{15,6,5\}$	(91)	$[4^5 21]$
	$\{14,7,5\}$	(72)	$[4^5 3] + 2[4^5 21] + [4^5 1^3] + [4^2 3^2 1]$
	$\{13,8,5\}$	(53)	$2[4^5 3] + 3[4^5 21] + [4^5 1^3] + [4^4 3^2 1] + [4^4 32^2] + [4^4 321^2]$
	$\{12,9,5\}$	(34)	$[4^5 3] + 3[4^5 21] + [4^5 1^3] + 2[4^4 3^2 1] + [4^4 32^2] + 2[4^4 31^2]$
	$\{11,10,5\}$	(15)	$[4^5 3] + 2[4^5 21] + [4^5 1^3] + [4^4 3^2 1] + [4^4 32^2] + [4^4 321^2]$ $+ [4^4 2^3 1]$
	$\{14,6^2\}$	(80)	$[4^5 3] + [4^5 21] + [4^4 32^2]$
	$\{13,7,6\}$	(61)	$2[4^5 3] + 3[4^5 21] + [4^5 1^3] + 2[4^4 3^2 1] + [4^4 32^2] + [4^4 321^2]$
	$\{12,8,6\}$	(42)	$3[4^5 3] + 5[4^5 21] + [4^5 1^3] + 2[4^4 3^2 1] + 3[4^4 32^2] + 2[4^4 321^2]$ $+ [4^4 31^4] + [4^4 2^3 1]$
	$\{11,9,6\}$	(23)	$2[4^5 3] + 4[4^5 21] + 2[4^5 1^3] + 3[4^4 3^2 1] + 2[4^4 32^2] + 3[4^4 321^2]$ $+ [4^4 2^3 1] + [4^4 2^2 1^3]$
	$\{10^2 6\}$	(04)	$[4^5 3] + 2[4^5 21] + 2[4^4 32^2] + [4^4 321^2] + [4^4 31^4] + [4^4 2^3 1]$
	$\{12,7^2\}$	(50)	$[4^5 3] + 2[4^5 21] + 2[4^5 1^3] + 2[4^4 3^2 1] + 2[4^4 321^2]$
	$\{11,8,7\}$	(31)	$2[4^5 3] + 4[4^5 21] + 2[4^5 1^3] + 2[4^4 3^2 1] + 2[4^4 32^2] + 3[4^4 321^2]$ $+ [4^4 31^4] + [4^4 2^3 1] + [4^4 2^2 1^3]$
	$\{10,9,7\}$	(12)	$[4^5 3] + 3[4^5 21] + 2[4^5 1^3] + 2[4^4 3^2 1] + [4^4 32^2] + 3[4^4 321^2]$ $+ [4^4 31^4] + [4^4 2^3 1] + [4^4 2^2 1^3]$
	$\{10,8^2\}$	(20)	$[4^5 3] + 2[4^5 21] + 2[4^4 32^2] + [4^4 321^2] + [4^4 31^4] + [4^4 2^3 1]$ $+ [4^4 21^5]$
	$\{9^2 8\}$	(01)	$[4^5 21] + [4^5 1^3] + [4^4 3^2 1] + [4^4 321^2] + [4^4 2^2 1^3]$

A	{E}	(pq)	[λ]
24	{16,8,4}	(84)	$[4^6]$
	{14,10,4}	(46)	$[4^6] + [4^5 31] + [4^5 2^2]$
	{12 ² , 4}	(08)	$[4^6] + [4^5 2^2]$
	{15,8,5}	(73)	$[4^6] + 2[4^5 31] + [4^5 2^2] + [4^5 21^2]$
	{14,9,5}	(54)	$[4^6] + 3[4^5 31] + [4^5 2^2] + 2[4^5 21^2] + [4^4 3^2 2] + [4^4 3^2 1^2]$
	{13,10,5}	(35)	$[4^6] + 3[4^5 31] + 2[4^5 2^2] + 2[4^5 21^2] + [4^4 3^2 2] + [4^4 3^2 1^2] + [4^4 3^2 2^2]$
	{15,7,6}	(81)	$[4^6] + 2[4^5 31] + [4^5 2^2] + [4^5 21^2] + [4^4 3^2 2]$
	{14,8,6}	(62)	$2[4^6] + 4[4^5 31] + 4[4^5 2^2] + 2[4^5 21^2] + [4^5 1^4] + [4^4 3^2 2] + [4^4 3^2 1^2] + [4^4 3^2 2^2]$
	{13,9,6}	(43)	$[4^6] + 6[4^5 31] + 3[4^5 2^2] + 4[4^5 21^2] + 3[4^4 3^2 2] + 2[4^4 3^2 1^2] + 2[4^4 3^2 2^2] + [4^4 3 2 1^3]$
	{12,10,6}	(24)	$2[4^6] + 4[4^5 31] + 5[4^5 2^2] + 3[4^5 21^2] + [4^5 1^4] + 2[4^4 3^2 2] + 2[4^4 3^2 1^2] + 3[4^4 3^2 2^2] + [4^4 3 2 1^3] + [4^4 2^4]$
	{13,8,7}	(51)	$2[4^6] + 5[4^5 31] + 3[4^5 2^2] + 4[4^5 21^2] + [4^5 1^4] + 2[4^4 3^2 2] + 2[4^4 3^2 1^2] + 2[4^4 3^2 2^2] + [4^4 3 2 1^3]$
	{12,9,7}	(32)	$[4^6] + 6[4^5 31] + 3[4^5 2^2] + 6[4^5 21^2] + [4^5 1^4] + 3[4^4 3^2 2] + 4[4^4 3^2 1^2] + 3[4^4 3^2 2^2] + 2[4^4 3 2 1^3] + [4^4 2^3 1^2]$
	{11,10,7}	(13)	$[4^6] + 4[4^5 31] + 3[4^5 2^2] + 4[4^5 21^2] + [4^5 1^4] + 2[4^4 3^2 2] + 2[4^4 3^2 1^2] + 3[4^4 3^2 2^2] + 2[4^4 3 2 1^3] + [4^4 2^4] + [4^4 2^3 1^2]$
	{12,8 ² }	(40)	$2[4^6] + 2[4^5 31] + 4[4^5 2^2] + 2[4^5 21^2] + [4^5 1^4] + [4^4 3^2 2] + [4^4 3^2 1^2] + 2[4^4 3^2 2^2] + [4^4 3 2 1^3] + [4^4 3 1^5] + [4^4 2^4]$
	{10 ² , 8}	(02)	$[4^6] + [4^5 31] + 3[4^5 2^2] + [4^5 21^2] + [4^5 1^4] + [4^4 3^2 1^2] + 2[4^4 3^2 2^2] + [4^4 3 2 1^3] + [4^4 3 1^5] + [4^4 2^4]$
	{15,9,4}	(65)	$[4^5 31]$
	{13,11,4}	(27)	$[4^5 31] + [4^4 3^2 2]$
	{16,7,5}	(92)	$[4^5 31]$
	{12,11,5}	(16)	$2[4^5 31] + [4^5 2^2] + [4^5 21^2] + [4^4 3^2 2] + [4^4 3^2 1^2] + [4^4 3^2 2^2]$
	{11 ² , 6}	(05)	$2[4^5 31] + 2[4^5 21^2] + 2[4^4 3^2 2] + [4^4 3^2 1^2] + [4^4 3^2 2^2] + [4^4 2^3 1^2]$
	{14,7 ² }	(70)	$3[4^5 31] + 2[4^5 21^2] + [4^4 3^2 2] + [4^4 3^2 1^2]$
	{11,9,8}	(21)	$4[4^5 31] + 2[4^5 2^2] + 4[4^5 21^2] + [4^5 1^4] + 2[4^4 3^2 2] + 2[4^4 3^2 1^2] + 3[4^4 3^2 2^2] + 2[4^4 3 2 1^3] + [4^4 2^3 1^2] + [4^4 2^2 1^4]$
	{10,9 ² }	(10)	$[4^5 31] + 2[4^5 21^2] + [4^4 3^2 2] + [4^4 3^2 1^2] + [4^4 3 2 1^3] + [4^4 2^3 1^2]$
	{16,6 ² }	(10,0)	$[4^5 2^2]$

A	{E}	(pq)	$[\lambda]$
25	{16,10,4}	(66)	$[4^6 1]$
	{14,12,4}	(28)	$[4^6 1] + [4^5 32]$
	{17,8,5}	(93)	$[4^6 1]$
	{16,9,5}	(74)	$[4^6 1] + [4^5 32] + [4^5 31^2]$
	{15,10,5}	(55)	$2[4^6 1] + 2[4^5 32] + 2[4^5 31^2] + [4^5 2^2 1]$
	{14,11,5}	(36)	$2[4^6 1] + 2[4^5 32] + 2[4^5 31^2] + [4^5 2^2 1] + [4^4 3^3] + [4^4 3^2 21]$
	{13,12,5}	(17)	$[4^6 1] + 2[4^5 32] + [4^5 31^2] + [4^5 2^2 1] + [4^4 3^2 21]$
	{16,8,6}	(82)	$2[4^6 1] + 2[4^5 32] + [4^5 31^2] + [4^5 2^2 1]$
	{15,9,6}	(63)	$3[4^6 1] + 4[4^5 32] + 3[4^5 31^2] + 2[4^5 2^2 1] + [4^5 21^3]$ $+ [4^4 3^3] + [4^4 3^2 21]$
	{14,10,6}	(44)	$4[4^6 1] + 6[4^5 32] + 4[4^5 31^2] + 4[4^5 2^2 1] + [4^5 21^3] + 2[4^4 3^2 21]$ $+ [4^4 3^2 1^3] + [4^4 32^3]$
	{13,11,6}	(25)	$2[4^6 1] + 5[4^5 32] + 4[4^5 31^2] + 3[4^5 2^2 1] + [4^5 21^3] + 2[4^4 3^3]$ $+ 3[4^4 3^2 21] + [4^4 32^3] + [4^4 32^2 1^2]$
	{12^2, 6}	(06)	$2[4^6 1] + 2[4^5 32] + [4^5 31^2] + 2[4^5 2^2 1] + [4^4 3^2 21] + [4^4 3^2 1^3]$ $+ [4^4 32^3]$
	{16,7^2}	(90)	$[4^6 1] + [4^5 32] + [4^5 31^2] + [4^4 3^3]$
	{15,8,7}	(71)	$3[4^6 1] + 4[4^5 32] + 3[4^5 31^2] + 2[4^5 2^2 1] + [4^5 21^3] + [4^4 3^2 21]$
	{14,9,7}	(52)	$4[4^6 1] + 6[4^5 32] + 7[4^5 31^2] + 4[4^5 2^2 1] + 2[4^5 21^3] + 2[4^4 3^3]$ $+ 3[4^4 3^2 21] + [4^4 3^2 1^3] + [4^4 32^2 1^2]$
	{13,10,7}	(33)	$5[4^6 1] + 7[4^5 32] + 7[4^5 31^2] + 6[4^5 2^2 1] + 3[4^5 21^3] + 2[4^4 3^3]$ $+ 4[4^4 3^2 21] + 2[4^4 3^2 1^3] + 2[4^4 32^3] + 2[4^4 32^2 1^2]$
	{12,11,7}	(14)	$2[4^6 1] + 5[4^5 32] + 5[4^5 31^2] + 4[4^5 2^2 1] + 2[4^5 21^3] + [4^4 3^3]$ $+ 4[4^4 3^2 21] + [4^4 3^2 1^3] + [4^4 32^3] + 2[4^4 32^2 1^2] + [4^4 2^4 1]$
	{14,8^2}	(60)	$3[4^6 1] + 3[4^5 32] + 2[4^5 31^2] + 3[4^5 2^2 1] + [4^5 21^3] + [4^5 1^5]$ $+ [4^4 3^2 21] + [4^4 3^2 1^3] + [4^4 32^3]$
	{13,9,8}	(41)	$3[4^6 1] + 6[4^5 32] + 6[4^5 31^2] + 5[4^5 2^2 1] + 3[4^5 21^3] + [4^4 3^3]$ $+ 4[4^4 3^2 21] + [4^4 3^2 1^3] + [4^4 32^3] + 2[4^4 32^2 1^2] + [4^4 321^4]$
	{12,10,8}	(22)	$6[4^5 32] + 5[4^5 31^2] + 7[4^5 2^2 1] + 3[4^5 21^3] + [4^5 1^5] + 4[4^4 3^2 21]$ $+ 4[4^6 1] + 3[4^4 3^2 1^3] + 3[4^4 32^3] + 2[4^4 32^2 1^2] + [4^4 321^4] + [4^4 2^4 1]$

(continua)

(continuação)

A	{E}	(pq)	[λ]
25	$\{11^2, 8\}$	(03)	$[4^6 1] + 2[4^5 3 2] + 3[4^5 3 1^2] + 2[4^5 2^2 1] + 2[4^5 2 1^3] + 2[4^4 3^3]$ $+ 2[4^4 3^2 2 1] + [4^4 3 2^3] + 2[4^4 3 2^2 1^2] + [4^4 2^3 1^3]$
	$\{12, 9^2\}$	(30)	$[4^6 1] + 2[4^5 3 2] + 4[4^5 3 1^2] + 2[4^5 2^2 1] + 2[4^5 2 1^3] + 2[4^4 3^3]$ $+ 2[4^4 3^2 2 1] + [4^4 3 2^3] + 2[4^4 3 2^2 1^2] + [4^4 2^3 1^3]$
	$\{11, 10, 9\}$	(11)	$[4^6 1] + 3[4^5 3 2] + 3[4^5 3 1^2] + 3[4^5 2^2 1] + 2[4^5 2 1^3] + 2[4^4 3^2 2 1]$ $+ [4^4 3^2 1^3] + [4^4 3 2^3] + 2[4^4 3 2^2 1^2] + [4^4 3 2 1^4] + [4^4 2^4 1]$
	$\{10^3\}$	(00)	$[4^6 1] + [4^5 2^2 1] + [4^5 1^5] + [4^4 3^2 1^3] + [4^4 3 2^3]$
	$\{15, 11, 4\}$	(47)	$[4^5 3 2]$
	$\{17, 7, 6\}$	(10, 1)	$[4^5 3 2]$
	$\{13^2, 4\}$	(09)	$[4^4 3^3]$

A	{E}	(pq)	$[\lambda]$
26	{16,12,4}	(48)	$[4^6 2]$
	{14 ² , 4}	(0,10)	$[4^6 2]$
	{17,10,5}	(75)	$[4^6 2] + [4^6 1^2]$
	{16,11,5}	(56)	$[4^6 2] + [4^6 1^2] + [4^5 3^2] + [4^5 3 2 1]$
	{15,12,5}	(37)	$2[4^6 2] + [4^6 1^2] + [4^5 3^2] + 2[4^5 3 2 1]$
	{14,13,5}	(18)	$[4^6 2] + [4^6 1^2] + [4^5 3^2] + [4^5 3 2 1] + [4^4 3^3 1]$
	{18,8,6}	(10,2)	$[4^6 2]$
	{17,9,6}	(83)	$[4^6 2] + [4^6 1^2] + [4^5 3^2] + [4^5 3 2 1]$
	{16,10,6}	(64)	$4[4^6 2] + 2[4^6 1^2] + [4^5 3^2] + 3[4^5 3 2 1] + [4^4 3 1^3] + [4^5 2^3]$
	{15,11,6}	(45)	$3[4^6 2] + 3[4^6 1^2] + 3[4^5 3^2] + 5[4^5 3 2 1] + [4^5 3 1^3] + [4^5 2^3]$ $+ [4^5 2^2 1^2] + [4^4 3^3 1] + [4^4 3^2 2^2]$
	{14,12,6}	(26)	$5[4^6 2] + 2[4^6 1^2] + 2[4^5 3^2] + 5[4^5 3 2 1] + [4^5 3 1^3] + 2[4^5 2^3]$ $+ [4^4 3^3 1] + [4^4 3^2 2^2] + [4^4 3^2 2 1^2]$
	{17,8,7}	(91)	$2[4^6 2] + [4^6 1^2] + [4^5 3^2] + [4^5 3 2 1]$
	{16,9,7}	(72)	$3[4^6 2] + 3[4^6 1^2] + 3[4^5 3^2] + 4[4^5 3 2 1] + [4^5 3 1^3] + [4^5 2^2 1^2]$ $+ [4^4 3^3 1]$
	{15,10,7}	(53)	$6[4^6 2] + 5[4^6 1^2] + 4[4^5 3^2] + 8[4^5 3 2 1] + 3[4^5 3 1^3] + 2[4^5 2^3]$ $+ 2[4^5 2^2 1^2] + [4^4 3^3 1] + [4^4 3^2 2^2] + [4^4 3^2 2 1^2]$
	{14,11,7}	(34)	$5[4^6 2] + 5[4^6 1^2] + 5[4^5 3^2] + 10[4^5 3 2 1] + 3[4^5 3 1^3] + 2[4^5 2^3]$ $+ 3[4^5 2^2 1^2] + 3[4^4 3^3 1] + 2[4^4 3^2 2^2] + 2[4^4 3^2 2 1^2] + [4^4 3 2^3 1]$
	{13,12,7}	(15)	$4[4^6 2] + 3[4^6 1^2] + 3[4^5 3^2] + 7[4^5 3 2 1] + 2[4^5 3 1^3] + 2[4^5 2^3]$ $+ 2[4^5 2^2 1^2] + 2[4^4 3^3 1] + 2[4^4 3^2 2^2] + 2[4^4 3^2 2 1^2]$ $+ [4^4 3 2^3 1]$
	{16,8 ² }	(80)	$3[4^6 2] + [4^6 1^2] + 2[4^5 3 2 1] + [4^5 3 1^3] + [4^5 2^3]$
	{15,9,8}	(61)	$4[4^6 2] + 4[4^6 1^2] + 3[4^5 3^2] + 7[4^5 3 2 1] + 2[4^5 3 1^3] + [4^5 2^3]$ $+ 2[4^5 2^2 1^2] + [4^5 2 1^4] + [4^4 3^3 1] + [4^4 3^2 2^2] + [4^4 3^2 2 1^2]$
	{14,10,8}	(42)	$8[4^6 2] + 5[4^6 1^2] + 3[4^5 3^2] + 11[4^5 3 2 1] + 5[4^5 3 1^3] + 5[4^5 2^3]$ $+ 3[4^5 2^2 1^2] + [4^5 2 1^4] + 2[4^4 3^3 1] + 2[4^4 3^2 2^2] + 3[4^4 3^2 2 1^2]$ $+ [4^4 3^2 1^4] + [4^4 3 2^3 1]$

(continua)

(continuação)

A	{E}	(pq)	$[\lambda]$
26	{13,11,8}	(23)	$4[4^6 2] + 5[4^6 1^2] + 5[4^5 3^2] + 11[4^5 3 2 1] + 4[4^5 3 1^3] + 3[4^5 2^3] + 5[4^5 2^2 1^2] + [4^5 2 1^4] + 3[4^4 3^3 1] + 4[4^4 3^2 2^2] + 3[4^4 3^2 2 1^2] + 2[4^4 3 2^3 1] + [4^4 3 2^2 1^3]$
	{12 ² , 8}	(04)	$4[4^6 2] + [4^6 1^2] + 5[4^5 3 2 1] + 2[4^5 3 1^3] + 3[4^5 2^3] + [4^5 2^2 1^2] + [4^4 3^3 1] + [4^4 3^2 2^2] + 2[4^4 3^2 2 1^2] + [4^4 2^5] + [4^4 3^2 1^4] + [4^4 3 2^3 1]$
	{14,9 ² }	(50)	$[4^6 2] + 3[4^6 1^2] + 3[4^5 3^2] + 5[4^5 3 2 1] + 2[4^5 3 1^3] + 3[4^5 2^2 1^2] + 2[4^4 3^3 1] + [4^4 3^2 2^2] + [4^4 3^2 2 1^2] + [4^4 3 2^2 1^3]$
	{13,10,9}	(31)	$4[4^6 2] + 4[4^6 1^2] + 3[4^5 3^2] + 9[4^5 3 2 1] + 4[4^5 3 1^3] + 3[4^5 2^3] + 4[4^5 2^2 1^2] + [4^5 2 1^4] + 2[4^4 3^3 1] + 2[4^4 3^2 2^2] + 3[4^4 3^2 2 1^2] + [4^4 3^2 1^4] + 2[4^4 3 2^3 1] + [4^4 3 2^2 1^3]$
	{12,11,9}	(12)	$2[4^6 2] + 3[4^6 1^2] + 3[4^5 3^2] + 7[4^5 3 2 1] + 3[4^5 3 1^3] + 2[4^5 2^3] + 4[4^5 2^2 1^2] + [4^5 2 1^4] + 2[4^4 3^3 1] + 2[4^4 3^2 2^2] + 3[4^4 3^2 2 1^2] + [4^4 2^4 1^2] + 2[4^4 3 2^3 1] + [4^4 3 2^2 1^3]$
	{12,10 ² }	(20)	$3[4^6 2] + [4^6 1^2] + 3[4^5 3 2 1] + 2[4^5 3 1^3] + 3[4^5 2^3] + [4^5 2^2 1^2] + [4^5 2 1^4] + [4^4 3^2 2^2] + 2[4^4 3^2 2 1^2] + [4^4 2^5] + [4^4 3^2 1^4] + [4^4 3 2^3 1]$
	{13 ² , 6}	(07)	$[4^6 1^2] + 2[4^5 3^2] + 2[4^5 3 2 1] + [4^5 2^2 1^2] + [4^4 3^3 1] + [4^4 3^2 2^2]$
	{11 ² , 10}	(01)	$[4^6 1^2] + [4^5 3^2] + 2[4^5 3 2 1] + [4^5 3 1^3] + 2[4^5 2^2 1^2] + [4^4 3^3 1] + [4^4 3^2 2^2] + [4^4 3 2^3 1] + [4^4 3 2^2 1^3]$
	{15,13,4}	(29)	$[4^5 3^2]$
	{18,7 ² }	(11,0)	$[4^5 3^2]$

A	{E}	(pq)	$[\lambda]$
27	{16,14,4}	(2,10)	$[4^6 3]$
	{17,12,5}	(57)	$[4^6 3] + [4^6 21]$
	{16,13,5}	(38)	$[4^6 3] + [4^6 21] + [4^5 3^2 1]$
	{15,14,5}	(1,9)	$[4^6 3] + [4^6 21] + [4^5 3^2 1]$
	{18,10,6}	(84)	$[4^6 3] + [4^6 21]$
	{17,11,6}	(65)	$[4^6 3] + 2[4^6 21] + [4^6 1^3] + [4^5 3^2 1] + [4^5 3 2^2]$
	{16,12,6}	(46)	$3[4^6 3] + 4[4^6 21] + 2[4^5 3^2 1] + 2[4^5 3 2^2] + [4^5 3 2 1^2]$
	{15,13,6}	(27)	$2[4^6 3] + 3[4^6 21] + [4^6 1^3] + 3[4^5 3^2 1] + 2[4^5 3 2^2] + [4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^4 3^3 2]$
	{14^2,6}	(08)	$2[4^6 3] + 2[4^6 21] + [4^5 3^2 1] + [4^5 3 2^2] + [4^4 3^3 1^2]$
	{19,8,7}	(11,1)	$[4^6 3]$
	{18,9,7}	(92)	$[4^6 3] + [4^6 21] + [4^5 3^2 1]$
	{17,10,7}	(73)	$3[4^6 3] + 4[4^6 21] + [4^6 1^3] + 2[4^5 3^2 1] + [4^5 3 2^2] + [4^5 3 2 1^2]$
	{16,11,7}	(54)	$4[4^6 3] + 6[4^6 21] + 2[4^6 1^3] + 5[4^5 3^2 1] + 3[4^5 3 2^2] + 3[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 2^3 1] + [4^4 3^3 2]$
	{15,12,7}	(35)	$5[4^6 3] + 8[4^6 21] + 2[4^6 1^3] + 6[4^5 3^2 1] + 5[4^5 3 2^2] + 4[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 2^3 1] + [4^4 3^3 2] + [4^4 3^3 1^2] + [4^4 3^2 2^2 1]$
	{14,13,7}	(16)	$3[4^6 3] + 5[4^6 21] + [4^6 1^3] + 5[4^5 3^2 1] + 3[4^5 3 2^2] + 3[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 2^3 1] + 2[4^4 3^3 2] + [4^4 3^3 1^2] + [4^4 3^2 2^2 1]$
	{18,8^2}	(10,0)	$[4^6 3] + [4^6 21]$
	{17,9,8}	(81)	$2[4^6 3] + 3[4^6 21] + [4^6 1^3] + 2[4^5 3^2 1] + [4^5 3 2^2] + [4^5 3 2 1^2]$
	{16,10,8}	(62)	$5[4^6 3] + 8[4^6 21] + 2[4^6 1^3] + 4[4^5 3^2 1] + 4[4^5 3 2^2] + 4[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 3 1^4] + [4^5 2^3 1] + [4^4 3^3 1^2]$
	{15,11,8}	(43)	$5[4^6 3] + 10[4^6 21] + 4[4^6 1^3] + 8[4^5 3^2 1] + 7[4^5 3 2^2] + 7[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 3 1^4] + 2[4^5 2^3 1] + [4^5 2^2 1^3] + 2[4^4 3^3 2] + [4^4 3^3 1^2]$ $+ 2[4^4 3^2 2^2 1]$
	{14,12,8}	(24)	$6[4^6 3] + 10[4^6 21] + 2[4^6 1^3] + 7[4^5 3^2 1] + 8[4^5 3 2^2] + 7[4^5 3 2 1^2]$ $[4^5 3 1^4] + 3[4^5 2^3 1] + 2[4^4 3^3 2] + 3[4^4 3^3 1^2] + 2[4^4 3^2 2^2 1]$ $+ [4^4 3^2 2 1^3] + [4^4 3 2^4]$
	{13^2,8}	(05)	$[4^6 3] + 3[4^6 21] + 2[4^6 1^3] + 4[4^5 3^2 1] + 3[4^5 3 2^2] + 3[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 2^3 1] + [4^5 2^2 1^3] + 2[4^4 3^3 2] + 2[4^4 3^2 2^2 1]$

(continua)

(continuação)

A	{E}	(pq)	[λ]
27	{16,9 ² }	(70)	$[4^6 3] + 3[4^6 2 1] + [4^6 1^3] + 3[4^5 3^2 1] + [4^5 3 2^2] + 2[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 2^2 1^3] + [4^4 3^3 2]$
	{15,10,9}	(51)	$4[4^6 3] + 8[4^6 2 1] + 3[4^6 1^3] + 6[4^5 3^2 1] + 5[4^5 3 2^2] + 6[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 3 1^4] + 2[4^5 2^3 1] + [4^5 2^2 1^3] + [4^4 3^3 2] + [4^4 3^3 1^2]$ $+ [4^4 3^2 2^2 1] + [4^4 3^2 2 1^3]$
	{14,11,9}	(32)	$4[4^6 3] + 9[4^6 2 1] + 4[4^6 1^3] + 9[4^5 3^2 1] + 7[4^5 3 2^2] + 9[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 3 1^4] + 4[4^5 2^3 1] + 2[4^5 2^2 1^3] + 3[4^4 3^3 2] + 2[4^4 3^3 1^2]$ $+ 3[4^4 3^2 2^2 1] + [4^4 3^2 2 1^3] + [4^4 3 2^3 1^2]$
	{13,12,9}	(13)	$3[4^6 3] + 7[4^6 2 1] + 2[4^6 1^3] + 6[4^5 3^2 1] + 6[4^5 3 2^2] + 7[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 3 1^4] + 3[4^5 2^3 1] + [4^5 2^2 1^3] + 2[4^4 3^3 2] + 2[4^4 3^3 1^2]$ $+ 3[4^4 3^2 2^2 1] + [4^4 3^2 2 1^3] + [4^4 3 2^4] + [4^4 3 2^3 1^2]$
	{14,10 ² }	(40)	$3[4^6 3] + 5[4^6 2 1] + [4^6 1^3] + 2[4^5 3^2 1] + 4[4^5 3 2^2] + 4[4^5 3 2 1^2]$ $+ 2[4^5 3 1^4] + 2[4^5 2^3 1] + 2[4^4 3^3 1^2] + [4^4 3^2 2^2 1] + [4^4 3^2 2 1^3]$ $+ [4^4 3 2^4]$
	{13,11,10}	(21)	$2[4^6 3] + 5[4^6 2 1] + 3[4^6 1^3] + 5[4^5 3^2 1] + 5[4^5 3 2^2] + 6[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 3 1^4] + 3[4^5 2^3 1] + 2[4^5 2^2 1^3] + 2[4^4 3^3 2] + [4^4 3^3 1^2]$ $+ 3[4^4 3^2 2^2 1] + [4^4 3^2 2 1^3] + [4^4 3 2^4] + [4^4 3 2^3 1^2]$
	{12 ² , 10}	(02)	$2[4^6 3] + 3[4^6 2 1] + [4^5 3^2 1] + 3[4^5 3 2^2] + 3[4^5 3 2 1^2] + [4^5 3 1^4]$ $+ 2[4^5 2^3 1] + 2[4^4 3^3 1^2] + [4^4 3^2 2^2 1] + [4^4 3^2 2 1^3] + [4^4 3 2^4]$ $+ [4^4 2^5 1]$
	{12,11 ² }	(10)	$[4^6 2 1] + [4^6 1^3] + 2[4^5 3^2 1] + [4^5 3 2^2] + 2[4^5 3 2 1^2]$ $+ [4^5 2^3 1] + [4^5 2^2 1^3] + [4^4 3^3 2] + [4^4 3^2 2^2 1] + [4^4 3 2^3 1^2]$

A	{E}	(pq)	[λ]
28	{16 ² , 4}	(0,12)	[4 ⁷]
	{17,14,5}	(39)	[4 ⁷] + [4 ⁶ 31]
	{18,12,6}	(66)	[4 ⁷] + [4 ⁶ 31] + [4 ⁶ 2 ²]
	{16,14,6}	(2,8)	2[4 ⁷] + 3[4 ⁶ 31] + 2[4 ⁶ 2 ²] + [4 ⁵ 3 ² 2] + [4 ⁵ 3 ² 1 ²]
	{19,10,7}	(93)	[4 ⁷] + [4 ⁶ 31]
	{17,12,7}	(55)	2[4 ⁷] + 5[4 ⁶ 31] + 3[4 ⁶ 2 ²] + 2[4 ⁶ 21 ²] + 2[4 ⁵ 3 ² 2] + [4 ⁵ 3 ² 1 ²] +[4 ⁵ 3 ² 2 ¹]
	{16,13,7}	(36)	2[4 ⁷] + 6[4 ⁶ 31] + 3[4 ⁶ 2 ²] + 3[4 ⁶ 21 ²] + 4[4 ⁵ 3 ² 2] + 2[4 ⁵ 3 ² 1 ²] +2[4 ⁵ 3 ² 2 ¹] + [4 ⁴ 3 ⁴]
	{15,14,7}	(17)	[4 ⁷] + 5[4 ⁶ 31] + 3[4 ⁶ 2 ²] + 2[4 ⁶ 21 ²] + 3[4 ⁵ 3 ² 2] + 2[4 ⁵ 3 ² 1 ²] +[4 ⁵ 3 ² 2 ¹] + [4 ⁴ 3 ³ 21]
	{20,8 ² }	(12,0)	[4 ⁷]
	{18,10,8}	(82)	2[4 ⁷] + 3[4 ⁶ 31] + 2[4 ⁶ 2 ²] + [4 ⁶ 21 ²] + [4 ⁵ 3 ² 1 ²]
	{17,11,8}	(63)	2[4 ⁷] + 6[4 ⁶ 31] + 3[4 ⁶ 2 ²] + 4[4 ⁶ 21 ²] + [4 ⁶ 1 ⁴] + 3[4 ⁵ 3 ² 2] +2[4 ⁵ 3 ² 1 ²] + 2[4 ⁵ 3 ² 2 ¹]
	{16,12,8}	(44)	+4[4 ⁷] + 9[4 ⁶ 31] + 8[4 ⁶ 2 ²] + 5[4 ⁶ 21 ²] + 5[4 ⁵ 3 ² 2] + 5[4 ⁵ 3 ² 1 ²] +4[4 ⁵ 3 ² 2 ¹] + [4 ⁵ 3 ² 21 ³] + [4 ⁵ 2 ⁴] + [4 ⁴ 3 ³ 21]
	{15,13,8}	(25)	[4 ⁷] + 9[4 ⁶ 31] + 5[4 ⁶ 2 ²] + 6[4 ⁶ 21 ²] + [4 ⁶ 1 ⁴] + 7[4 ⁵ 3 ² 2] +4[4 ⁵ 3 ² 1 ²] + 5[4 ⁵ 3 ² 2 ¹] + [4 ⁵ 3 ² 21 ³] + [4 ⁴ 3 ⁴] + 2[4 ⁴ 3 ³ 21] +[4 ⁴ 3 ² 2 ³]
	{14 ² , 8}	(06)	3[4 ⁷] + 4[4 ⁶ 31] + 4[4 ⁶ 2 ²] + [4 ⁶ 21 ²] + 2[4 ⁵ 3 ² 2] + 3[4 ⁵ 3 ² 1 ²] +2[4 ⁵ 3 ² 2 ¹] + [4 ⁵ 2 ⁴] + [4 ⁴ 3 ⁴] + [4 ⁴ 3 ³ 21] + [4 ⁴ 3 ³ 1 ³]
	{17,10,9}	(71)	[4 ⁷] + 5[4 ⁶ 31] + 3[4 ⁶ 2 ²] + 3[4 ⁶ 21 ²] + 2[4 ⁵ 3 ² 2] + 2[4 ⁵ 3 ² 1 ²] +[4 ⁵ 3 ² 2 ¹] + [4 ⁵ 3 ² 21 ³]
	{16,11,9}	(52)	[4 ⁷] + 9[4 ⁶ 31] + 5[4 ⁶ 2 ²] + 7[4 ⁶ 21 ²] + [4 ⁶ 1 ⁴] + 6[4 ⁵ 3 ² 2] +4[4 ⁵ 3 ² 1 ²] + 5[4 ⁵ 3 ² 2 ¹] + 2[4 ⁵ 3 ² 21 ³] + [4 ⁵ 2 ³ 1 ²] + [4 ⁴ 3 ⁴] +[4 ⁴ 3 ³ 21]
	{15,12,9}	(33)	3[4 ⁷] + 11[4 ⁶ 31] + 8[4 ⁶ 2 ²] + 8[4 ⁶ 21 ²] + [4 ⁶ 1 ⁴] + 8[4 ⁵ 3 ² 2] +7[4 ⁵ 3 ² 1 ²] + 8[4 ⁵ 3 ² 2 ¹] + 2[4 ⁵ 3 ² 21 ³] + [4 ⁵ 2 ⁴] + [4 ⁵ 2 ³ 1 ²] +[4 ⁴ 3 ⁴] + 2[4 ⁴ 3 ³ 21] + [4 ⁴ 3 ³ 1 ³] + [4 ⁴ 3 ² 2 ³] + [4 ⁴ 3 ² 2 ² 1 ²]

(continua)

(continuação)

A	{E}	(pq)	[λ]
28	{14,13,9}	(14)	$[4^7] + 7[4^6 31] + 5[4^6 2^2] + 6[4^6 21^2] + 7[4^5 3^2 2] + 5[4^5 3^2 1^2] + 6[4^5 32^2 1] + 2[4^5 321^3] + [4^5 2^4] + [4^5 2^3 1^2] + [4^4 3^4] + [4^4 3^2 2^3] + [4^4 3^2 2^2 1^2] + 3[4^4 3^3 21]$
	{16,10 ² }	(60)	$3[4^7] + 4[4^6 31] + 4[4^6 2^2] + 2[4^6 21^2] + [4^6 1^4] + [4^5 3^2 2] + 3[4^5 3^2 1^2] + 2[4^5 32^2 1] + [4^5 321^3] + [4^5 2^4] + [4^4 3^3 1^3]$
	{15,11,10}	(41)	$[4^7] + 7[4^6 31] + 5[4^6 2^2] + 7[4^6 21^2] + [4^6 1^4] + 6[4^5 3^2 2] + 5[4^5 3^2 1^2] + 6[4^5 32^2 1] + 3[4^5 321^3] + [4^5 2^4] + [4^5 2^3 1^2] + 2[4^4 3^3 21] + [4^4 3^2 2^3] + [4^4 3^2 2^2 1^2]$
	{14,12,10}	(22)	$3[4^7] + 8[4^6 31] + 8[4^6 2^2] + 5[4^6 21^2] + [4^6 1^4] + [4^4 3^2 2^2 1^2] + 7[4^5 3^2 1^2] + 8[4^5 32^2 1] + 3[4^5 321^3] + [4^5 2^3 1^2] + 3[4^4 3^3 21] + [4^4 3^4] + 2[4^4 3^3 1^3] + [4^4 3^2 2^3] + [4^4 32^4 1] + 5[4^5 3^2 2] + 3[4^5 2^4]$
	{12 ³ }	(00)	$2[4^7] + [4^6 2^2] + [4^5 3^2 1^2] + [4^5 32^2 1] + [4^5 2^4] + [4^4 3^3 1^3] + [4^4 2^6]$
	{16,15,5}	(1,10)	$[4^6 31]$
	{17,13,6}	(47)	$2[4^6 31] + [4^6 2^2] + [4^6 21^2] + [4^5 3^2 2]$
	{15 ² , 6}	(09)	$[4^6 31] + [4^6 21^2] + [4^5 3^2 2]$
	{18,11,7}	(74)	$2[4^6 31] + [4^6 2^2] + [4^6 21^2] + [4^5 3^2 2]$
	{19,9,8}	(10,1)	$[4^6 31]$
	{18,9 ² }	(90)	$[4^6 31] + [4^6 21^2] + [4^5 3^2 2]$
	{13 ² , 10}	(03)	$3[4^6 31] + [4^6 2^2] + 4[4^6 21^2] + [4^4 3^3 21] + [4^6 1^4] + 4[4^5 3^2 2] + 2[4^5 3^2 1^2] + 4[4^5 32^2 1] + [4^5 321^3] + [4^5 2^3 1^2] + [4^4 3^4] + 2[4^4 3^2 2^3] + [4^4 3^2 1^2]$
	{14,11 ² }	(30)	$3[4^6 31] + [4^6 2^2] + 4[4^6 21^2] + [4^6 1^4] + 4[4^5 3^2 2] + 2[4^5 3^2 1^2] + 4[4^5 32^2 1] + [4^5 321^3] + 2[4^5 2^3 1^2] + [4^4 3^4] + [4^4 3^3 21] + [4^4 3^2 2^2 1^2] + [4^4 3^2 2^3]$
	{13,12,11}	(11)	$3[4^6 31] + 3[4^6 2^2] + 3[4^6 21^2] + 3[4^5 3^2 2] + 3[4^5 3^2 1^2] + 2[4^5 321^3] + [4^5 2^4] + [4^5 2^3 1^2] + 2[4^4 3^3 21] + [4^4 3^2 2^3] + [4^4 3^2 2^2 1^2] + [4^4 32^4 1] + 4[4^5 32^2 1]$

Referências

- [1] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1958).
- [2] B. G. Wybourne, *Symmetry Principles and Atomic Spectroscopy* (Wiley, New York, 1970).
- [3] V. Vanagas, *Algebraic Methods in Nuclear Theory* (in Russian) (Mints, Vilnius(Lituânia), 1971).
- [4] I. Schur, *Über eine Klasse von Matrizen sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Inaugural-Dissertation, Berlin, 1901.
- [5] *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere* (Sitz Ber. Preuss. Akad., Berlin 1905).
- [6] *Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen* (Sitz Ber. Preuss. Akad., Berlin 1908).
- [7] *Über die Charaktere der Symmetrischen Gruppe* (Sitz Ber. Preuss. Akad., Berlin, 1900).
- [8] D. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc. **43**,226(1937).
- [9] D. E. Littlewood, Trans. Roy. Soc.(London), **A239**,387(1943).
- [10] D. E. Littlewood, Trans. Roy. Soc.(London), **A239**,305(1943).
- [11] G. B. Robinson, Can. J. Math. **1**,166(1949).
- [12] D. E. Littlewood, J. London Math. Soc. **32**,18(1957).
- [13] D. E. Littlewood, Can. J. Math. **10**,1(1958).
- [14] D. E. Littlewood, J. London Math. Soc. **11**,49(1936).
- [15] E. M. Ibrahim, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, **5**,85(1954).

- [16] E. M. Ibrahim, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, **10**,137(1959).
- [17] H. O. Foulkes, J. London Math. Soc. **26**,132(1951).
- [18] H. O. Foulkes, Trans. Roy.Soc.(london),**246**,555(1954).
- [19] M. J. Newell, Quart. J. Math.(Oxford),**2**,161(1951).
- [20] A. O. Usher, Can. J. Math., **28**,440(1976)
- [21] O. Egecioglu and J. B. Remmel, Atomic Data and Nuclear Data Tables, **32**,157(1985).
- [22] O. A. Nava, J. Comb. Theor. **A46**,212(1987).
- [23] S. C. Black and R. J. List, Eur. J. Combin., **10**,111(1989).
- [24] C. Carre and J. Y. Thibon, Adv. Appl. Math., —bf 13,390(1992).
- [25] T. Scharf and J. Y. Thibon, Cr. Acad. Sci I-Math, **13**,983(1992).
- [26] J. P. Brennan, Commun. Algebra, **21**,1029(1993).
- [27] T. Scharf and J. Y. Thibon, Adv. Math **104**,30(1994).
- [28] M. A. Salam, Utilitas Mathematica, **50**,33(1996).
- [29] M. Brion, J. London Math. Soc., **52**,449(1995).
- [30] T. Scharf, J. Y. Thibon and B. G. Wybourne, J. Phys A-Math. Gen., **30**,6936(1997).
- [31] C. Malvenuto C. Reutenauer , Discrete Math., **193**,225(1998).
- [32] W. F. Doran, J. Algebr. Comb., **8**,253(1998).
- [33] M. Yang, Discrete Math., **180**,391(1998).
- [34] G. de B. Robinson, *Representation Theory of the Symmetric Group* (Edinburgh Univ. Press, Edinburgh, 1961
- [35] I. M. Gel'fand, R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications* (Pergamon Press, Oxford, 1963).
- [36] J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. **A245**,128(1958).

- [37] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* (John Wiley, New York, 1960).
- [38] N. Hammermesh, *Group Theory* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962) .
- [39] V. Vanagas and L. Y. Sabalauskas, Lietuvos fizikos rinkinys (Revista Litwana da Física, em Russo). 8,77(1968).

