



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Elaine Andressa Tavares de Lima

Dinâmica assintótica de uma classe de problemas
parabólicos em domínios com um pequeno buraco

São José do Rio Preto
2023

Elaine Andressa Tavares de Lima

Dinâmica assintótica de uma classe de problemas
parabólicos em domínios com um pequeno buraco

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2023

L732d	Lima, Elaine Andressa Tavares de Dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos em domínios com um pequeno buraco / Elaine Andressa Tavares de Lima. -- São José do Rio Preto, 2023 149 p. : il. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto Orientador: German Jesus Lozada Cruz 1. Equações parabólicas. 2. Atratores. 3. Semicontinuidade inferior e superior. 4. Domínio com buraco. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Elaine Andressa Tavares de Lima

Dinâmica assintótica de uma classe de problemas
parabólicos em domínios com um pequeno buraco

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
Orientador

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
Universidade Estadual de Maringá

Prof^a. Dr^a. Mariza Stefanello Simsen
Universidade Federal de Itajubá

Prof. Dr. Rodiak Nicolai Figueroa López
Universidade Federal de São Carlos

São José do Rio Preto
10 de março de 2023

*Aos meus amados pais, Dimas e Luciene
e a minha amada irmã, Ritiéli.*

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, permitiram que esta tese se concretizasse. Com vocês divido a alegria desta experiência:

A Deus e Nossa Senhora, em primeiro lugar, por estarem sempre comigo, me guiando, iluminando e abençoando a cada passo de minha vida e me dando a força necessária para enfrentar todos os desafios, sem nunca desistir.

A minha família, em especial minha mãe Luciene, meu pai Dimas, minha irmã Ritiéli e meu namorado Thiago, pelo apoio, amor e carinho incondicionais, sinceras orações e, não podia deixar de citar os inúmeros momentos disponibilizados para me ouvir e acalmar meu coração. Não tenho palavras para descrever como amo vocês e sou grata de tê-los em minha vida. Tudo que sou é por vocês e para vocês!

Ao meu querido orientador Prof. Dr. German Lozada Cruz agradeço a amizade, disponibilidade, competência, paciência e, sobretudo, a confiança em mim depositada durante estes anos. Destaco ainda, as valorosas dicas, comentários e ensinamentos durante o desenvolvimento deste trabalho que foram essenciais para que este fosse concluído.

Ao Prof. D. I. Borisov da Bashkir State Pedagogical University (Russia) pela prontidão em responder minhas dúvidas e questionamentos enquanto estava estudando alguns de seus trabalhos.

A minha querida Dona Dalva, pessoa de coração gigante, que me acolheu em Rio Preto. Agradeço por todos os ensinamentos, preocupação e amor que me deu. E, ainda, através dela pude conhecer uma querida amiga, a Rafa, a quem agradeço por todos momentos e por ter conhecido.

Aos todos meus amigos da matemática. Em especial, meus queridos amigos: Matheus Barnabé, Luana, Ronísio, Thais e Yino. A vocês quero deixar registrado meu agradecimento pelo companheirismo no decorrer de toda minha vida acadêmica.

Por todo suporte acadêmico durante minha graduação e mestrado agradeço a UNIFEI e, agora, durante o doutorado ao IBILCE-UNESP. Em especial, aos

funcionários e ao corpo docente do programa de doutorado em Matemática do IBILCE-UNESP por todo apoio, paciência e prontidão em me atender, desde de os formulários a serem preenchidos até as inúmeras perguntas em relação a dúvidas nos conteúdos disciplinares nestes anos do doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"I can't think of anything to say except...
I think it's marvellous! HaHaHa!"*
Pink Floyd

RESUMO

Neste trabalho estudaremos a dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos semilineares com condição de contorno de Dirichlet em domínios com um pequeno buraco, cujo tamanho é proporcional a um parâmetro ε positivo pequeno. Em outras palavras, veremos que a família de atratores se comportam continuamente quando o parâmetro $\varepsilon \rightarrow 0$, bem como, obteremos as taxas de convergência em termos do parâmetro.

Palavras-chave: Equações Parabólicas. Atratores. Semicontinuidade Inferior e Superior. Domínio com Buraco.

ABSTRACT

In this work we will study the asymptotic dynamics for a class of semilinear parabolic problems with Dirichlet boundary conditions in domains with a small hole whose size is proportional to a small positive parameter ε . In other words, we will prove that the family of attractors behave continuously as $\varepsilon \rightarrow 0$, as well as we will provide the convergence rates in terms of the parameter.

Keywords: Parabolic equations. Attractors. Lower and Upper semi-continuity. Domain with hole.

Lista de Figuras

1	Domínio Ω_ε	19
1.1	Setor $S_{a,\phi}$	31
1.2	Exemplos de δ -cadeia com $\mathfrak{p} = 3$ e $\mathfrak{p} = 1$	40
1.3	Exemplo de estrutura homoclínica.	41
2.1	Representação do domínio Ω_ε	49
3.1	Representação dos setores S_{0,ϕ_1} e Σ_{ϕ_0}	66
4.1	Representação das curvas $\Gamma_\beta^\pm$	126
4.2	Variedade instável.	141
4.3	Semicontinuidade inferior dos atratores: Teorema 4.4.2 - item (i).	144
4.4	Domínio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^7 \omega_\varepsilon^i$	145

Sumário

Introdução	18
Objetivos	20
Descrição dos Resultados	21
1 Preliminares	25
1.1 Uma Coletânea de Resultados	25
1.1.1 Desigualdades Importantes	25
1.1.2 Teoremas de Imersões de Sobolev	27
1.2 Operadores Setoriais e Semigrupos Analíticos	29
1.2.1 Semigrupos de Operadores	29
1.2.2 Operadores Setoriais e Semigrupos Analíticos	31
1.2.3 Potências Fracionárias de Operadores Setoriais	33
1.3 Equação de Evolução com Operador Setorial	34
1.4 Atratores para Semigrupos Não Lineares	36
1.4.1 Estrutura Gradiente	38
1.4.2 Continuidade dos Atratores	45
1.5 Convergência Compacta	47
2 Problemas Parabólicos em um Domínio com um Pequeno Buraco	49
2.1 Introdução	49
2.2 Existência do Atrator Global	51
2.2.1 O Problema no Domínio com Buraco ($\mathbf{P}_\epsilon$)	51
2.2.2 O Problema no Domínio Limite ($\mathbf{P}_0$)	61
3 Teoria Linear	63
3.1 Convergência dos Resolventes	63
3.2 Convergência dos Semigrupos	91
3.3 Convergência Espectral	98
4 Continuidade dos Equilíbrios, Variedades Instáveis e Atratores	107
4.1 Continuidade dos Conjuntos de Equilíbrio	107
4.2 Linearizações em Torno dos Equilíbrios	119
4.3 Atração Exponencial Uniforme e Continuidade das Variedades Instáveis	128
4.4 Atração Exponencial Uniforme e Continuidade dos Atratores	142
Conclusões	144
Bibliografia	145

INTRODUÇÃO

Um pequeno buraco é um exemplo simples de uma perturbação geométrica no domínio que são relatados da teoria de perturbação singular. Os principais resultados hoje em dia, se concentram na convergência de soluções no sentido que a solução do problema perturbado converge para a solução do problema limite no sentido da norma L^2 para norma H_0^1 .

Neste trabalho consideramos uma classe de problemas parabólicos em um domínio com um pequeno buraco com condição de contorno de Dirichlet homogênea.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in C^2$, e $\varepsilon \in (0, 1]$ um parâmetro pequeno. Dados $\omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira, $\partial\omega$, suficientemente suave e um ponto $x_0 \in \Omega$, considere

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon^{-1}(x - x_0) \in \omega\}.$$

Denota-se por Ω_ε o domínio obtido retirando-se um buraco ω_ε do domínio Ω , isto é, $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \omega_\varepsilon$, cuja fronteira é dada por $\partial\Omega_\varepsilon := \partial\Omega \cup \partial\omega_\varepsilon$.

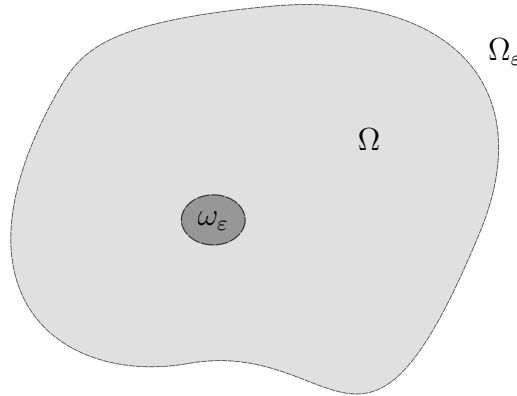


Figura 1: Domínio Ω_ε .

Considere a equação parabólica semilinear

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(x)u_\varepsilon = f(u_\varepsilon), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0 \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

onde as funções $a_{ij}, V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para $1 \leq i, j \leq n$, satisfazem as seguintes condições:

(a) $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\forall x \in \Omega$;

(b) *Condição de elipticidade*:

$$\exists \vartheta_0 > 0 : \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \vartheta_0 |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n;$$

(c) $V \in C(\overline{\Omega})$, tal que $V(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$;

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não linear que satisfaz:

(d) $f \in C^2(\mathbb{R})$;

(e) *Condição de crescimento*:

$$\forall s \in \mathbb{R}, \exists \vartheta_1 > 0 : |f'(s)| \leq \vartheta_1 (1 + |s|^{\gamma-1}), \quad 1 \leq \gamma < \frac{n+2}{n-2}, \quad n \geq 3;$$

(f) *Condição de dissipatividade*: $\limsup_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0$.

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o “domínio limite”, Ω_0 , consiste no domínio Ω e a equação limite é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + V(x) u_0 = f(u_0), & x \in \Omega, t > 0 \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Em espaços de funções adequados X_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$, escreveremos os problemas (1) e (2), como uma equação de evolução do tipo

$$\begin{cases} \dot{u}_\varepsilon + A_\varepsilon u_\varepsilon = F(u_\varepsilon), & t > 0 \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 \in X_\varepsilon, \end{cases} \quad (3)$$

onde F é o operador de Nemitskii associado a f e o operador $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_\varepsilon) &= \{u_\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) : u_\varepsilon = 0 \text{ em } \partial\Omega_\varepsilon\}, \\ A_\varepsilon u_\varepsilon &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\cdot) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(\cdot) u_\varepsilon. \end{aligned}$$

E denotando por $u_\varepsilon := u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)$ a solução de (3) e por $T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)$ o semigrupo não-linear associado a (3) obtido pela fórmula da variação das constantes

$$T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) = e^{-tA_\varepsilon} u_\varepsilon^0 + \int_0^t e^{-(s-t)A_\varepsilon} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0)) \, ds, \quad \forall t \geq 0,$$

veremos que o semigrupo $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ associado problema (3) possui um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$.

Objetivos

O objetivo principal deste trabalho consiste em entender a relação entre os atratores $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1]$ e $\mathcal{A}_0$. Mostraremos que esta família de atratores é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$, e se todos os pontos de equilíbrios em $\mathcal{A}_0$ forem hiperbólicos, então os atratores serão contínuos, isto é, serão semicontínuos superior e inferiormente.

Para alcançar tal objetivo, dividimos o processo em duas etapas principais:

- A primeira etapa é destinada a analisar o comportamento das partes lineares dos operadores. Da seguinte maneira:
 - obter estimativas para convergência do resolvente do operador A_ε para o resolvente do operador A_0 . Este será um ponto chave para todo estudo, uma vez que mostraremos a convergência do operador $(A_\varepsilon - \lambda)^{-1}$ em um sentido apropriado quando $\varepsilon \rightarrow 0$ com λ em um setor, no qual teremos estimativas uniformes em ε para este operador e assim, obteremos estimativas sobre o comportamento dos semigrupos lineares e estas serão fundamentais para o análise da dinâmica não linear;
 - com a convergência dos operadores resolventes, mostraremos a convergência com taxa dos semigrupos lineares e^{-tA_ε} para e^{-tA_0} quando $\varepsilon \rightarrow 0$, de modo consequente obter a convergência dos semigrupos não lineares via fórmula da variação das constantes;
 - analisar o comportamento espectral de operadores do tipo A_ε quando o parâmetro $\varepsilon \rightarrow 0$.
- A segunda etapa é dedicada a estudar a continuidade do atratores. Para isto, seguiremos o seguinte roteiro:
 - inicialmente veremos a continuidade de uma classe de elementos que pertencem ao atrator, as soluções estacionárias. Escrevendo o problema estacionário como um problema de ponto fixo, isto é, u_ε^* é uma solução de equilíbrio de (3) se $u_\varepsilon^* = A_\varepsilon^{-1}F(u_\varepsilon^*)$ e com a convergência dos operadores resolventes garantida na primeira etapa, obteremos a continuidade dos equilíbrios;
 - visando obter a semicontinuidade inferior dos atratores mostraremos que as variedades instáveis locais de um ponto de equilíbrio hiperbólico u_ε^* serão contínuas quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e estarão próximas para ε suficientemente pequeno;
 - obter a semicontinuidade superior dos atratores em $\varepsilon = 0$ e assumindo que o semigrupo para o problema (3) é gradiente, mostrar que os atratores serão semicontínuos inferiormente e, portanto contínuos.

Descrição dos Resultados

Com o propósito de provar a continuidade dos atratores, a tese está organizada neste modo:

O **Capítulo 1** é dedicado a reunir os conceitos básicos para a elaboração desta tese de modo que ela esteja auto-contida. Apresentaremos aqui resultados e definições, dentre eles condições suficientes para existência dos atratores, condições para que determinados semigrupos possuam estruturas gradiente e, por fim, resultados a cerca da continuidade dos atratores. Para mais detalhes sugerimos as seguintes referências [13, 16, 18, 20, 22, 23, 27, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 38].

O **Capítulo 2** descreve o problema proposto e introduz o tipo de perturbação no domínio que estaremos considerando, bem como os objetos que serão necessários para estudá-lo. De modo analisar o comportamento assintótico de uma classe de problemas parabólicos semilineares em um domínio com um pequeno buraco com condição de

contorno de Dirichlet homogênea, de maneira geral, neste capítulo buscamos explorar a existência de atratores globais para os semigrupos associados a tais equações, seguindo a metodologia empregada em [20, 25].

O **Capítulo 3** é dedicado ao estudo do comportamento das partes lineares dos operadores. Inicialmente, veremos que o operador $(A_\varepsilon - \lambda)^{-1}$, $\varepsilon \in (0, 1]$, converge, em um sentido adequado, para operador $(A_0 - \lambda)^{-1}$ no domínio limite e para obter tal conclusão faremos uso da técnica aplicada no Teorema 1.2 em [9] restringindo λ a um setor no qual teremos estimativas uniforme em ε . E, ainda, com a convergência dos operadores resolventes será possível obter estimativas sobre o comportamento dos semigrupos lineares e, com isso, através da fórmula da variação das constantes obteremos a convergência dos semigrupos não lineares. E, por último, analisaremos o comportamento do espectro do operador A_ε quando o parâmetro $\varepsilon \rightarrow 0$ utilizando de uma técnica similar a utilizada em [8].

No **Capítulo 4** examinaremos quando os atratores e soluções estacionárias serão semicontínuos superior e inferiormente e, portanto, contínuos em relação a essas perturbações. Além disso, ainda neste capítulo veremos que as variedades instáveis locais para um equilíbrio são contínuas quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e estarão próximas para ε suficientemente pequeno. O método aqui empregado é uma variação daquilo que vêm sendo aplicado em diversos trabalhos para provar a semicontinuidade inferior e superior como, por exemplo, em [2, 3, 4, 14], sem preocupação com taxas, como também em [1, 24] onde as taxas são especificadas. Sem nos atentarmos com a definição dos espaços de funções mencionados o resultado a seguir é o principal deste capítulo

Teorema 1. *Seja $\{T_0(t, u_0^0) : t \geq 0\}$ o semigrupo gradient-like generalizado associado ao problema (3) com atrator global $\mathcal{A}_0$. Suponha que existam $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $L > 0$, $\beta > 0$, e $C > 0$, tais que*

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq Ce^{Lt}t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^\theta \right) & n = 3, \\ \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq Ce^{Lt}t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta \right) & n = 4, \\ \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq Ce^{Lt}t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} \right) & n \geq 5, \end{aligned}$$

onde $j = 0$ para $t \in [1, \infty)$ e $j = 3$ para $t \in (0, 1)$ e além disso, que os pontos de equilíbrio do problema (2.32) existam em número finito, a dizer $\mathcal{E}_0 = \{u_{0,1}^*, \dots, u_{0,n_0}^*\}$, e que todos sejam hiperbólicos. Então, para todo $\varepsilon \in (0, 1]$

(i) O semigrupo $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado com um número finito de pontos de equilíbrio $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_{\varepsilon,1}^*, \dots, u_{\varepsilon,n_0}^*\}$ e

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n_0} W_\varepsilon^u(u_{\varepsilon,i}^*),$$

assim a família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon; \varepsilon \in [0, 1]\}$ é semicontínua inferiormente em $\varepsilon = 0$;

(ii) Existe $\rho > 0$ tal que dado $B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ limitado, existe $C_1 = C(B) > 0$, tal que

$$\text{dist}(T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)B, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq C_1 e^{-\rho t}, \text{ para todo } t \geq 1;$$

(iii) Existe $C_2 > 0$ tal que

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq \begin{cases} C_2 \varepsilon^{\frac{\theta\rho}{\rho+L}}, & n = 3 \\ C_2 \varepsilon^{\frac{2\theta\rho}{\rho+L}} |\ln \varepsilon|^{\frac{\theta\rho}{\rho+L}}, & n = 4 \\ C_2 \varepsilon^{\frac{2\theta\rho}{\rho+L}}, & n \geq 5. \end{cases}$$

Resultados da tese:

Dos resultados obtidos no Capítulo 4 estamos elaborando os seguintes trabalhos:

- [1] Tavares-Lima, E. A.; Lozada-Cruz, G., *Dynamics of parabolic equations in domains with a small hole I. Continuity of the set of equilibria*. Em preparação, 2023.
- [2] Tavares-Lima, E. A.; Lozada-Cruz, G., *Dynamics of parabolic equations in domains with a small hole II. Continuity of the attractors*. Em preparação, 2023.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

O presente capítulo tem por objetivo expor os conceitos abstratos fundamentais que envolvem o tema desta tese. Os resultados aqui apresentados serão utilizados ao longo do trabalho e facilitarão a compreensão do mesmo. Cabe ressaltar que tratando-se de ferramentas clássicas para a teoria de semigrupos e atratores as demonstrações serão omitidas, porém as referências apropriadas serão indicadas.

1.1 Uma Coletânea de Resultados

1.1.1 Desigualdades Importantes

Lema 1.1.1 (Desigualdade de Cauchy). *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{\delta}{2}a^2 + \frac{1}{2\delta}b^2.$$

Demonstração. Ver [20, p. 16]. □

Lema 1.1.2 (Desigualdade de Young). *Sejam $\delta > 0$, $a, b \geq 0$, $p, q > 1$, e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \delta \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\delta^{\frac{q}{p}}} \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [20, p. 16]. □

Comumente o Lema 1.1.2 aparece da seguinte forma:

Corolário 1.1.3. *Sejam $a, b \geq 0$, $\delta > 0$, $m > 1$. Então*

$$ab \leq \frac{1}{m}\delta^m a^m + \frac{m-1}{m}\delta^{-\frac{m}{m-1}} b^{\frac{m}{m-1}}.$$

Demonstração. Ver [20, p. 17]. □

Teorema 1.1.4 (Desigualdade de Hölder). *Para $1 \leq p \leq \infty$ sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde p e q são expoentes conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [20, p. 17]. □

Teorema 1.1.5 (Desigualdade de Poincaré). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que é equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; em $H_0^1(\Omega)$ a forma bilinear $(u, v) \mapsto \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$ define um produto interno que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ e é equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração. Ver [33, p. 70]. □

Teorema 1.1.6 (Desigualdade de Nirenberg-Gagliardo). *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C^m . Seja $u \in W^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq r, q \leq +\infty$. Então, para qualquer inteiro j , $0 \leq j < m$, e qualquer número $\theta \in [\frac{j}{m}, 1)$, defina*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1 - \theta) \frac{1}{q}.$$

Se $m - j - \frac{n}{r}$ é um inteiro negativo, então

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{m,r}(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}, \quad (1.1)$$

onde D^j denota qualquer derivada parcial de ordem j e a constante $C = C(\Omega, r, q, m, j, \theta)$.

Se $m - j - \frac{n}{r}$ é um inteiro não negativo, então (1.1) vale com $\theta = \frac{j}{m}$.

Demonstração. Ver [20, p. 25]. □

Lema 1.1.7 (Desigualdade de Bernoulli). *Sejam $a, b > 0$, $\rho > \nu \geq 0$, e considere uma função contínua $y : [0, \tau_0) \rightarrow [0, +\infty)$ diferenciável em $(0, \tau_0)$, onde $0 < \tau_0 \leq +\infty$ e satisfazendo*

$$y'(t) \leq ay^{\nu}(t) - by^{\rho}(t), \quad \text{para todo } t \in (0, \tau_0).$$

Então

$$\sup_{t \in [0, \tau_0)} \{y(t)\} \leq \max \left\{ y(0), \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\rho-\nu}} \right\}.$$

Além disso, se $\tau_0 = +\infty$, então

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\rho-\nu}}.$$

Demonstração. Ver [20, p. 17]. □

Lema 1.1.8. *Sejam $y \in C^0([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$, f uma função não negativa e contínua em $[0, \infty)$, e suponha que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M$. Se, para algum $a > 0$, y satisfaz*

$$y'(t) \leq -ay(t) + f(t), \quad t \in (0, +\infty),$$

então

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq \frac{M}{a}.$$

Demonstração. Ver [20, p. 17]. □

Lema 1.1.9 (Desigualdade de Gronwall Generalizada). *Sejam $t < r$, $\phi : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua, $a : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $b > 0$ e $\beta \in (0, 1]$. Assumamos que*

$$\phi(t) \leq a(t) + b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \phi(s) \, ds, \quad t < r.$$

Então

$$\phi(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (B^k a)(t),$$

onde

$$B^k a(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)} (s-t)^{k\beta-1} a(s) \, ds.$$

Além disso, se $a(t)$ é constante, com $a(t) \equiv a$, então

$$\phi(t) \leq a c e^{(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(r-t)}.$$

Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(s-r)} \, ds$, $\rho > 0$, $\alpha = 1 - \beta$, então

$$\phi(t) \leq \frac{c_0}{b} \left[c e^{(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(r-t)} - 1 \right].$$

Por fim, se $\psi : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s) \, ds$, $\rho > 0$, $\alpha \geq 0$, então

$$\phi(t) \leq c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r (s-t)^{\beta-1} e^{\rho s} e^{d(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(s-t)} \psi(s) \, ds,$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função-gama $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1} \, dy$.

Demonstração. Os detalhes da prova estão contidos em [32], com algumas adaptações. $\square$

1.1.2 Teoremas de Imersões de Sobolev

As propriedades de imersões de Sobolev dependem da regularidade do domínio em questão. Esta seção é dedicada a explorar alguns destes resultados e mais detalhes, bem como as demonstrações, podem ser encontradas, por exemplo, em [13] e [20].

Para $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$ considere o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio com fronteira Lipschitz. O número *net smoothness* definido por

$$\text{net smoothness}(f) := m - \frac{n}{p} \quad \text{para toda } f \in W^{m,p}(\Omega),$$

caracteriza as propriedades de suavidade dos elementos de $W^{m,p}(\Omega)$.

Lema 1.1.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira limitada. Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, valem as seguintes imersões contínuas:*

- (i) *Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;*
- (ii) *Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [p, +\infty)$;*
- (iii) *Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Além disso, se $m - \frac{n}{p} > 0$ não é um inteiro e $k = \left[m - \frac{n}{p} \right]$, tem-se $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\Omega)$.¹

Demonstração. Ver [13, p. 285]. □

Teorema 1.1.11 (Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e de classe C^1 . Então, valem as seguintes imersões compactas:*

- (i) *Se $p < n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*)$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;*
- (ii) *Se $p = n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para todo $q \in [p, +\infty)$;*
- (iii) *Se $p > n \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C(\overline{\Omega})$.*

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$, para todo p (e todo n).

Demonstração. Ver [13, p. 285]. □

Observação 1.1.12. Sob as hipóteses do Teorema 1.1.11, em particular para $n \geq 3$ e $p = 2$, obtêm-se

$$H^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right).$$

Além disso, como Ω é limitado, da Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.1.5), segue que

$$H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \text{ para todo } q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right).$$

Teorema 1.1.13. *Sejam $k, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio que satisfaz a condição do cone ou com fronteira Lipschitz. Então valem as seguintes imersões contínuas:*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} W^{k,q}(\Omega), & \text{se } m - \frac{n}{p} \geq k - \frac{n}{q}, \quad q \geq p \\ & (a \text{ menos que } m - \frac{n}{p} = k, q = \infty), \\ C^{k+\mu}(\overline{\Omega}), & \text{se } 0 \leq \mu \leq m - k - \frac{n}{p} < 1 \\ & (a \text{ menos que } m - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Além disso, para Ω limitado as inclusões acima são compactas no caso das desigualdades estritas, isto é, $m - \frac{n}{p} > k - \frac{n}{q}$ ou $m - \frac{n}{p} > k + \mu$, respectivamente.

Demonstração. Ver [20, p. 23]. □

Teorema 1.1.14 (Teorema do Traço). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 . Então existe um operador linear limitado, $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, tal que*

- (i) *$Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;*
- (ii) *$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde a constante $C > 0$ depende somente de p e Ω .*

¹[] denota a parte inteira.

Demonstração. Ver [23, p. 272]. □

O próximo resultado é uma adaptação para o Lema 8.1 em [34, p. 175] cuja demonstração é análoga, obviamente, considerando as modificações pertinentes para este caso particular do operador.

Lema 1.1.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira, $\partial\Omega$, suave por partes com curvatura limitada inferiormente por $K > 0$. Considere, ainda, o seguinte problema elíptico*

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ e $Lu := \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a(x)u$, tal que para $1 \leq i, j \leq n$ as funções $a_{ij}, a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e f satisfazem as seguintes condições:

- (a) a_{ij} são limitadas;
- (b) existem constantes $\nu, \mu > 0$, tais que

$$\nu |\xi|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2,$$

para todo $x \in \Omega$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$;

- (c) $\|a\|_{L^{q/2}(\Omega)} \leq \mu$ para $q > n$.

Então, a solução do problema elíptico (1.2), $u \in H^2(\Omega)$, satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C \left[\|Lu\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right],$$

onde a constante C independe de u e de $|\Omega|$.

1.2 Operadores Setoriais e Semigrupos Analíticos

No que segue considere X um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\mathcal{L}(X) = \{T : X \rightarrow X : T \text{ é linear contínuo}\}$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X munidos da norma usual

$$\|T\| = \sup_{x \in X} \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} = \sup_{\|x\|=1} \{ \|Tx\| : x \in X \}.$$

1.2.1 Semigrupos de Operadores

Definição 1.2.1 (C_0 -Semigrupo). Uma família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é chamada de um **C_0 -Semigrupo** (ou, ainda, semigrupo fortemente contínuo) se satisfaz

- (i) $T(0) = I$, onde I denota o operador identidade em $\mathcal{L}(X)$;
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$;
- (iii) a aplicação $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \rightarrow T(t)x \in X$ é contínua em cada ponto $(t, x) \in [0, \infty) \times X$.

É sabido que para os semigrupos de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X a condição (iii) é equivalente que para qualquer elemento $x \in X$

$$T(t)x \rightarrow x \text{ quando } t \rightarrow 0^+,$$

que é basicamente uma consequência do princípio da limitação uniforme de Banach.

O gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo é o operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}, \\ Ax &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}. \end{aligned}$$

Comumente denota-se o C_0 -semigrupo do qual A é gerador por $\{e^{At} : t \geq 0\}$.

O resultado a seguir mostra que todo C_0 -semigrupo apresenta uma limitação exponencial (Ver [35, p. 04]).

Teorema 1.2.2. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Então existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado, não necessariamente limitado. O conjunto resolvente de A é formado pelos complexos λ para o quais os operador $(A - \lambda I)^{-1}$ é inversível e limitado, ou seja,

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \right\}.$$

O operador $(A - \lambda I)^{-1}$ é chamado de *operador resolvente* de A associado a λ . O conjunto $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{K}$.

O conjunto complementar $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é chamado *espectro* de A (subconjunto fechado de $\mathbb{K}$).

Teorema 1.2.3. *Sejam $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ e A operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$, e suponha que $A_n \rightarrow A$ em norma resolvente, isto é, $(A_n - \lambda)^{-1} \rightarrow (A - \lambda)^{-1}$ em norma para todo λ tal que $\text{Im } \lambda \neq 0$. Então*

(i) *Se $\lambda \notin \sigma(A)$, então $\lambda \notin \sigma(A_n)$ para n suficientemente grande e*

$$\|(A_n - \lambda)^{-1} - (A - \lambda)^{-1}\| \rightarrow 0;$$

(ii) *Seja $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, e suponha que $a \in \rho(A), b \in \rho(A)$. Então*

$$\|P_{(a,b)}(A_n) - P_{(a,b)}(A)\| \rightarrow 0,$$

onde $P_{(a,b)}$ é projeção espectral do operador extensão (auto-adjunto), $\tilde{A}$, de A no intervalo $[a, b]$

Demonstração. Ver [36, p. 289] - Teorema VIII.23. □

Teorema 1.2.4. *Sejam $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ e A operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$, e suponha que $A_n \rightarrow A$ em norma resolvente forte, isto é, $(A_n - \lambda)^{-1} \rightarrow (A - \lambda)^{-1}$ fortemente para todo λ tal que $\text{Im } \lambda \neq 0$. Então*

(i) *Seja $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, e $(a, b) \cap \sigma(A_n) = \emptyset$ para todo n , então $(a, b) \cap \sigma(A) = \emptyset$. Isto é, se $\lambda \in \sigma(A)$, então existe $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda$;*

(ii) *Seja $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, e $a, b \in \sigma_{pp}(A)$, então $P_{(a,b)}(A_n)\varphi \rightarrow P_{(a,b)}(A)\varphi$ para toda $\varphi \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Ver [36, p. 290] - Teorema VIII.24. □

1.2.2 Operadores Setoriais e Semigrupos Analíticos

Definição 1.2.5 (Operador Setorial). Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é dito **setorial** se é um operador fechado, densamente definido tal que, para algum $\phi \in (0, \pi/2)$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$, o setor

$$S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A) \quad (1.3)$$

e

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\phi}. \quad (1.4)$$

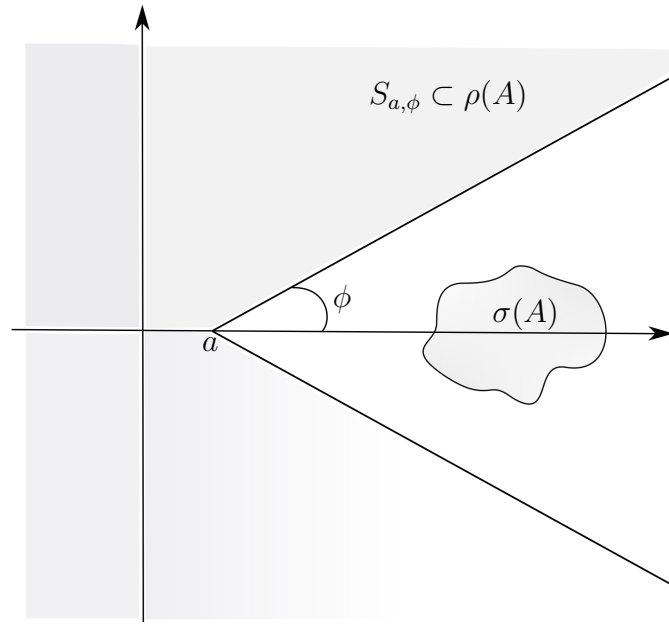


Figura 1.1: Setor $S_{a,\phi}$.

Observação 1.2.6. Seja $\omega \in \mathbb{R}$ qualquer. A é um operador setorial se, e somente se, $A_\omega := A + \omega I$ é um operador setorial. (Ver [20, p. 32])

Definição 1.2.7 (Semigrupo Analítico). Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo em X . Dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um **semigrupo analítico**, se existem um setor plano complexo

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 < \arg z < \phi_2\}$$

onde $\phi_1 < 0 < \phi_2$ e uma família de operadores lineares limitados $T(z) : X \rightarrow X, z \in S$, coincidindo com $T(t)$, para $t \geq 0$ e tal que

- $z \rightarrow T(z)x$ é analítica em S ;
- $\lim_{z \rightarrow 0, z \in S} T(z)x = x$, para todo $x \in X$;
- $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in S$.

O teorema seguinte é um resultado conhecido da teoria de semigrupos que mostra que operadores setoriais coincidem com os negativos geradores de semigrupos analíticos.

Teorema 1.2.8. *Um operador linear densamente definido $-A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares limitados $T(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$ se, e somente se, A é um operador setorial em X .*

Demonstração. Ver [20, p. 35]. □

Teorema 1.2.9. *Seja A um operador setorial em X tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > a > 0$. Então para constantes $c_0, c_1 > 0$*

$$\begin{aligned} \|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq c_0 e^{-at}, \quad t \geq 0, \\ \|Ae^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{c_1}{t} e^{-at}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [20, p. 35]. □

Teorema 1.2.10. *Seja A um operador densamente definido em X , satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) *para algum $0 < \delta < \pi/2$, $\rho(A) \supset \Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi/2 + \delta\} \cup \{0\}$;*
- (ii) *existe uma constante M tal que*

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_\delta \ (\lambda \neq 0).$$

Então, A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, satisfazendo $\|T(t)\| \leq C$, para alguma constante C . Além disso,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda, \quad (1.5)$$

onde Γ é uma curva suave em Σ_δ indo de $\infty e^{-i\vartheta}$ a $\infty e^{i\vartheta}$ para $\pi/2 < \vartheta < \pi/2 + \delta$. A integral (1.5) converge para $t > 0$ na topologia de operador uniforme.

Demonstração. Ver [35, p. 30]. □

Proposição 1.2.11. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ um operador linear, auto-adjunto e densamente definido em um espaço de Hilbert H . Além disso, se A é limitado inferiormente em H , isto é, existe uma constante $m \in \mathbb{R}$, tal que*

$$(Ax, x)_H \geq m \|x\|_H^2,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, então A é um operador setorial em H .

Demonstração. Ver [20, p. 39]. □

Definição 1.2.12. *Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ com $\rho(A) \neq \emptyset$ possui **resolvente compacto** se seu resolvente $(A - \lambda I)^{-1}$ é compacto para algum (e, portanto, para todo) $\lambda \in \rho(A)$.*

Proposição 1.2.13. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com $\rho(A) \neq \emptyset$ e $X_1 = (\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_{\mathcal{D}(A)})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *O operador A possui resolvente compacto;*
- (ii) *A injeção canônica $i : X_1 \hookrightarrow X$ é compacta.*

Demonstração. Ver [22, p. 117]. □

Proposição 1.2.14. *Se $\mu \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\mu - \lambda| \|(A - \mu I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(A - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (A - \mu I)^{-n-1}.$$

Demonstração. Ver [35, p. 87]. □

1.2.3 Potências Fracionárias de Operadores Setoriais

Considere A um operador setorial em X tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Para $\alpha \in (0, +\infty)$, os operadores $A^{-\alpha} : X \rightarrow X$ são definidos pela fórmula integral

$$A^{-\alpha} v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} v \, dt.$$

Proposição 1.2.15. *Seja A um operador setorial em X tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Então $A^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, +\infty)$ são operadores lineares limitados bem definidos em X dando uma correspondência injetiva entre X e a imagem $R(A^{-\alpha})$. Além disso, $A^{-1} : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ coincide com a inversa de A e para $\alpha, \beta > 0$*

$$A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}.$$

Demonstração. Ver [20, p. 43]. □

Observe que, para $\alpha > 0$, cada $A^{-\alpha}$, é invertível. Isto posto, denota-se a inversa deste operador por A^{α} , isto é, $(A^{-\alpha})^{-1} := A^{\alpha}$ e é chamado de *operador potência fracionária* associado a A , e ainda, usa-se o símbolo X^{α} para denotar o domínio $\mathcal{D}(A^{\alpha})$, ou seja, $X^{\alpha} := R(A^{-\alpha})$, que é denominado *espaço de potência fracionária* associado a A . Para o caso $\alpha = 0$, tem-se $A^0 := I$ e $X^0 := X$.

Para $\alpha \in (0, +\infty)$, o operador A^{α} satisfaz as seguintes propriedades (Ver, por exemplo, Teoremas 6.8 e 6.9 em [35, p. 72])

- A^{α} é fechado e densamente definido;
- Se $\alpha \geq \beta > 0$, então $\mathcal{D}(A^{\alpha}) \subset \mathcal{D}(A^{\beta})$;
- Se $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, então $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha} A^{\beta} = A^{\beta} A^{\alpha}$ em $\mathcal{D}(A^{\gamma})$, com $\gamma = \max \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$;
- Se $\alpha \in (0, 1)$, então

$$A^{\alpha} x = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha-1} A(A + \lambda I)^{-1} x \, d\lambda,$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{\alpha})$.

Os resultados a seguir podem ser encontrados, por exemplo, em [20, p. 43].

Proposição 1.2.16. *Seja A um operador setorial em X tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Então, os X^{α} são espaços de Banach com a norma $\|v\|_{X^{\alpha}} := \|A^{\alpha} v\|_X$, para $\alpha \in (0, +\infty)$. Além disso, para $\alpha \geq \beta \geq 0$, tem-se que X^{α} é um subconjunto denso de X^{β} , e que as inclusões $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$ são densas e contínuas, e elas são compactas, desde que A possua resolvente compacto.*

Proposição 1.2.17. *Seja A um operador setorial em X tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > a > 0$. Para $\alpha \geq 0$, $t \geq 0$, o operador $A^\alpha e^{-At}$ é um operador linear limitado em X tal que, para $c_\alpha > 0$*

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq c_\alpha \frac{e^{-at}}{t^\alpha}, \quad t > 0,$$

e

$$A^\alpha e^{-At} = e^{-At} A^\alpha \text{ em } X^\alpha, \quad t \geq 0.$$

Teorema 1.2.18. *Seja $\alpha \in (0, 1)$. Então, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que para $u \in \mathcal{D}(A)$ e $\delta > 0$, tem-se*

$$\begin{aligned} \|A^\alpha u\|_X &\leq C_0(\delta^\alpha \|u\|_X + \delta^{\alpha-1} \|Au\|_X), \\ \|A^\alpha u\|_X &\leq 2C_0 \|u\|_X^{1-\alpha} \|Au\|^\alpha. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [35, p. 73]. □

Teorema 1.2.19. *Considere A um operador positivo tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ e $\|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \operatorname{const.}(\delta)$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$. Então, se $\beta, \eta \in \mathbb{C}$, $0 \leq \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \eta < \infty$ e $\theta \in (0, 1)$, vale a seguinte fórmula de interpolação*

$$[X^\beta, X^\eta]_\theta = X^{(1-\theta)\beta + \theta\eta}$$

e ainda, existe uma constante $C_\theta > 0$, tal que a seguinte desigualdade vale

$$\|v\|_{X^{(1-\theta)\beta + \theta\eta}} \leq C_\theta \|v\|_{X^\eta}^\theta \|v\|_{X^\beta}^{1-\theta}.$$

Aqui $[\cdot, \cdot]_\theta$ denota o espaço de interpolação complexa.

Demonstração. Ver [38, p. 59, 103]. □

1.3 Equação de Evolução com Operador Setorial

Considere o seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = F(u), & t > 0, \\ u(0) = u_0 \in X^\alpha, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial em um espaço de Banach X tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ e $F : X^\alpha \rightarrow X$ é um operador não-linear Lipschitz contínuo em subconjuntos limitados de X^α para $\alpha \in [0, 1)$.

Definição 1.3.1. Sejam X um espaço de Banach, $\alpha \in [0, 1)$ e $u_0 \in X^\alpha$. Se para algum $\tau > 0$ a função $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$ satisfaz

- (i) $u(0) = u_0$;
 - (ii) $u \in C^1((0, \tau), X)$;
 - (iii) $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$;
 - (iv) a equação (1.6) é satisfeita em X para todo $t \in (0, \tau)$,
- então u é dita uma **solução local** (X^α -solução local) de (1.6).

Teorema 1.3.2 (Existência Local de Soluções). *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial em um espaço de Banach X , tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ e para algum $\alpha \in [0, 1)$, $F : X^\alpha \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de X^α . Para cada $u_0 \in X^\alpha$, existe uma única solução em X^α , $u = u(t, u_0)$, de (1.6) definida sobre um intervalo maximal de existência $[0, \tau_{u_0})$ que ou $\tau_{u_0} = +\infty$ ou se $\tau_{u_0} < \infty$, então $\limsup_{t \rightarrow \tau_{u_0}^-} \|u(t, u_0)\|_{X^\alpha} = +\infty$.*

Demonstração. Ver [20, p. 55]. □

Em decorrência das imersões dos espaços de potências fracionárias (Proposição 1.2.16), se $F : X^\alpha \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de X^α ($\alpha \in [0, 1)$), segue que F também possui esta propriedade vista como uma aplicação de X^β em X para cada $\beta \in [\alpha, 1)$. O que nos possibilita estender resultados de soluções de X^α para os espaços X^β com $\beta \in [\alpha, 1)$. Assim sendo, como consequência do Teorema 1.3.2, tem-se:

Corolário 1.3.3. *Sob as hipóteses do Teorema 1.3.2, para cada $\beta \in [\alpha, 1)$ e $u_0 \in X^\beta$, existe uma única solução $u = u(t, u_0)$ em X^β definida no seu intervalo maximal de existência $[0, \tau_{u_0})$.*

Lema 1.3.4 (Fórmula Integral de Cauchy (ou Fórmula da Variação das Constantes)). *Sejam $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial em um espaço de Banach X , tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ e para algum $\alpha \in [0, 1)$, $F : X^\alpha \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de X^α e $u \in C([0, \tau), X^\alpha)$. Então u é uma solução local de (1.6) se, e somente se, u satisfaz em X a seguinte equação integral*

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}F(u(s)) \, ds, \quad t \in [0, \tau). \quad (1.7)$$

Demonstração. Ver [20, p. 57]. □

Corolário 1.3.5. *Sob as hipóteses do Lema 1.3.4, se u satisfaz em X a equação integral (1.7), então $u \in C([0, \tau), X^1)$ e $\dot{u} \in C([0, \tau), X^\gamma)$, $\gamma \in [0, 1)$.*

Ainda no contexto de soluções locais, a proposição a seguir nos mostra que as soluções do (1.6) que se originam em um subconjunto limitado B existem e mantêm-se em B até ao menos um tempo $\tau_B > 0$ (para mais detalhes veja [20, p. 66]).

Proposição 1.3.6. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial em um espaço de Banach X , tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ e para algum $\alpha \in [0, 1)$, $F : X^\alpha \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de X^α . Então para qualquer conjunto limitado $B \subset X^\alpha$ existe um tempo $\tau_B > 0$ tais que as soluções $u = u(t, u_0)$ de (1.6) com $u_0 \in B$ existem e são limitadas em X^α uniformemente para $t \in [0, \tau_B]$ e $u_0 \in B$.*

Definição 1.3.7. Uma função $u = u(t)$ é chamada **solução global** (X^α -solução global) de (1.6) satisfaz as condições da Definição 1.3.1 com $\tau = +\infty$.

Tendo em vista o teorema de existência local de soluções (Teorema 1.3.2) para provar solvabilidade global do (1.6) é suficiente mostrar que a norma $\|u(t, u_0)\|_{X^\alpha}$ não “explode” em um tempo finito T . Em outras palavras,

$$\forall T > 0 \quad \limsup_{t \rightarrow T^-} \|u(t)\|_{X^\alpha} < +\infty.$$

Vários critérios para a existência de soluções globais estão ligados, em geral, com uma limitação apropriada no crescimento do termo não-linear F . Como, por exemplo:

Exemplo 1.3.8. Seja C uma constante positiva e $v \in X^\alpha$ qualquer. Se F satisfaz a condição de crescimento sublinear, isto é,

$$\|F(v)\|_X \leq C(1 + \|v\|_{X^\alpha}),$$

então o problema (1.6) admite solução global. (Ver [20, p. 70]).

Se $u = u(\cdot, u_0)$ é uma solução global do problema (1.6), pode-se considerar a família de operadores $\{T(t) : t \geq 0\}$, atuando em X^α , dado via a seguinte relação

$$T(t)u_0 := u(t, u_0), \quad u_0 \in X^\alpha, \quad t \geq 0.$$

Da unicidade e continuidade das soluções do problema (1.6) com relação aos dados iniciais, segue que a família $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui as seguintes propriedades:

- $T(0) = I$;
- $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \geq 0$;
- a aplicação $[0, +\infty) \times X^\alpha \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X^\alpha$ é contínua.

A família $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamada *semigrupo não-linear* (ou, ainda, sistema dinâmico) associado a (1.6) e, tendo em vista o Lema 1.3.4, pode-se caracterizar estes operadores da seguinte forma:

$$T(t)u_0 = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}F(T(s)u_0) \, ds, \quad u_0 \in X^\alpha.$$

Teorema 1.3.9. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial em um espaço de Banach X , tal que $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ e para algum $\alpha \in [0, 1)$, $F : X^\alpha \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de X^α . Se A possui resolvente compacto e a relação $T(t)u_0 := u(t, u_0)$ define um C_0 -semigrupo de soluções globais de (1.6), então, para cada $t > 0$, $T(t)$ é uma aplicação compacta em X^α .*

Demonstração. Ver [20, p. 80]. □

1.4 Atratores para Semigrupos Não Lineares

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo não-linear em $\mathcal{L}(X)$.

Definição 1.4.1. Para cada $x \in X$, define-se a **órbita positiva** $\gamma^+(x)$ por x como sendo $\gamma^+(x) := \{T(t)x : t \geq 0\}$. E, ainda, para $s > 0$ a órbita positiva por x no instante s é dada por $\gamma_s^+(x) := \{T(t)x : t \geq s\}$.

Para cada $x \in X$, uma *solução para trás* por x é uma aplicação contínua $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \leq 0$, tem-se $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leq t \leq -s$. Uma *solução global* por x é uma aplicação contínua $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $s \leq 0$, tem-se $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $t \geq 0$.

Observe que como a imagem de $T(t)$ pode não ser todo o espaço X , logo a existência de uma solução para trás ou uma solução global está condicionada a escolha de x . Além disso, como $T(t)$ não é necessariamente injetivo para todo $t > 0$ uma solução para trás pode não ser única.

Definição 1.4.2. Define-se a **órbita negativa** $\gamma^-(x)$ por x como sendo

$$\gamma^-(x) := \bigcup_{t \geq 0} H(t, x),$$

onde

$$H(t, x) = \{y \in X : \text{existe uma solução para trás por } x, \text{ dada por } \phi : (-\infty, 0] \rightarrow X \text{ com } \phi(0) = x \text{ e } \phi(-t) = y\}.$$

Além disso, para $s > 0$ a órbita negativa de x no instante S é dada por $\gamma_s^-(x) := \bigcup_{t \geq s} H(t, x)$.

Definição 1.4.3. A **órbita completa** por x (se existir órbita negativa por x) é definida por

$$\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x).$$

Para qualquer subconjunto $B \subset X$, tem-se que as órbitas positiva, negativa e completa por B (se existir a órbita negativa para cada $x \in B$), são dadas por

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x), \quad \gamma^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x) \quad \text{e} \quad \gamma(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma(x),$$

respectivamente.

Considere, ainda, as seguintes notações para $s > 0$ fixado

$$\gamma_s^+(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^+(x) \quad \text{e} \quad \gamma_s^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^-(x).$$

Definição 1.4.4. Para qualquer $B \subset X$, os conjuntos **ω -limite** e **α -limite** de B são definidos, respectivamente, por

$$\omega(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)} \quad \text{e} \quad \alpha(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^-(B)}.$$

Para um subconjunto $B \subset X$, vale destacar a seguinte caracterização do conjunto ω -limite de B :

$$\omega(B) = \left\{ y \in X : \exists \{t_n\} \subset [0, +\infty), t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ e } \{x_n\} \subset B, y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n \right\}.$$

Definição 1.4.5. A **semi-distância de Hausdorff**, denotada por $\text{dist}(A, B)$, entre dois subconjuntos A e B de um espaço métrico (X, d) é dada por

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Definição 1.4.6. Sejam A e B subconjuntos de X .

- (i) Diz-se que A **atrai** B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)B, A) = 0$;
- (ii) Diz-se que A **absorve** B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se existe $t_0 \geq 0$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$;
- (iii) Diz-se que um subconjunto A de X é **invariante** sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \geq 0$.

Os conjuntos α e ω -limites de qualquer subconjunto de X são invariantes.

Definição 1.4.7 (Atrator Global). Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é chamado de **atrator global** para um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação deste semigrupo.

Da definição de atrator global pode-se destacar alguns pontos: a compacidade do atrator implica que ele é um subconjunto topologicamente pequeno de X e, ainda, devido a completude pode-se extrair subsequências convergentes de cada sequência no atrator. A propriedade de atrair subconjuntos limitados mostra que o comportamento assintótico do sistema acontece próximo do atrator. E, por fim, a propriedade de invariância do atrator diz que ele é um objeto que possui dinâmica independente.

Observe que o atrator global para um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é único. De fato, se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são atratores globais para um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ então

$$\text{dist}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \text{dist}(T(t)\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

e, portanto $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. De maneira análoga, tem-se que $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$.

Definição 1.4.8. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo.

(i) Diz-se que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é **assintoticamente compacto**, se para cada subconjunto fechado, limitado e não-vazio $B \subset X$ para o qual $T(t)B \subset B$, existe um compacto $K_B \subset B$ que atrai B ;

(ii) Diz-se que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é **eventualmente limitado**, se para cada subconjunto limitado $B \subset X$ existe $t_B \geq 0$ tal que $\gamma_{t_B}^+$ é limitada. E, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito **limitado**, se γ_B^+ é limitada sempre que B for limitado;

(iii) Diz-se que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é **ponto dissipativo** (limitado dissipativo), se existe um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados) de X .

Os próximos teoremas caracterizam os semigrupos que possuem atrator global.

Teorema 1.4.9. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$.

Demonstração. Ver, por exemplo, Corolário 1.1.3 em [20, p. 10]. □

Teorema 1.4.10. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é compacto e ponto dissipativo, então $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$.

Demonstração. Ver [20, p. 13]. □

1.4.1 Estrutura Gradiente

Nesta subseção consideraremos os semigrupos chamados gradientes e veremos que seus atratores podem ser caracterizados como a variedade instável de seu conjunto de equilíbrio.

Definição 1.4.11. Diz-se que $u^* \in X^\alpha$ é um **ponto de equilíbrio** (ou **solução estacionária**) para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se é um ponto fixo da aplicação $T(t)$ para cada $t \geq 0$, isto é, $T(t)u^* = u^*$ para cada $t \geq 0$. Denotamos por $\mathcal{E}$ o conjunto de todos os pontos de equilíbrio para $\{T(t) : t \geq 0\}$.

Definição 1.4.12. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui **estrutura gradiente** se existe uma função contínua $V : X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de *função de Lyapunov*, com as seguintes propriedades:

- (i) Para cada $u \in X^\alpha$ a aplicação $t \in [0, \infty) \mapsto V(T(t)u) \in \mathbb{R}$ é não-crescente;
- (ii) Para cada $u \in X^\alpha$ tal que $V(T(t)u) = V(u)$ para todo $t \geq 0$, tem-se $u \in \mathcal{E}$.

Definição 1.4.13. Para $u^* \in \mathcal{E}$, a variedade **instável** e **estável** para u^* são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} W^u(u^*) &= \{u \in X^\alpha : \text{existe uma solução global } \xi \text{ para } \{T(t) : t \geq 0\} \\ &\quad \text{satisfazendo } \xi(0) = u \text{ e tal que } \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\xi(t) - u^*\|_{X^\alpha} = 0\}; \\ W^s(u^*) &= \left\{u \in X^\alpha : \lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)u - u^*\|_{X^\alpha} = 0\right\}. \end{aligned}$$

A variedade **instável local** (e **estável local**) para u^* são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} W_{\text{loc}}^u(u^*) &= \{u \in X^\alpha : \text{existe uma solução global } \xi \text{ para } \{T(t) : t \geq 0\} \text{ satisfazendo} \\ &\quad \xi(0) = u \text{ e tal que } \text{dist}(\xi(t), u^*) \leq \delta, t \geq 0, \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\xi(t) - u^*\|_{X^\alpha} = 0\}; \\ W_{\text{loc}}^s(u^*) &= \left\{u \in X^\alpha : \text{dist}(T(t)u, u^*) \leq \delta, t \geq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)u - u^*\|_{X^\alpha} = 0\right\}, \end{aligned}$$

para algum $\delta > 0$.

Teorema 1.4.14. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente com atrator global $\mathcal{A}$ e número finito de pontos de equilíbrio, a dizer $\mathcal{E} = \{u_0^*, \dots, u_{n_0}^*\}$, então $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n_0} W^u(u_i^*). \quad (1.8)$$

Demonstração. Ver [29, p. 51]. □

O resultado acima mostra que se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradiente com atrator global $\mathcal{A}$ e número finito de pontos de equilíbrio a estrutura de $\mathcal{A}$ e sua dinâmica assintótica são bem determinadas, e para esta classe de semigrupos existe um conhecimento detalhado quanto a estrutura dos atratores disponível na literatura. Um atrator da forma (1.8) é denominado *gradient-like*.

Em geral, não se espera que uma perturbação de um semigrupo gradiente dê origem a um novo semigrupo gradiente, uma vez que a principal dificuldade consiste em provar que o problema perturbado possua uma função de Lyapunov. Isso nos leva a refletir sob quais propriedades dinâmicas dos semigrupos garantam que eles possuam atratores do tipo gradient-like e se estas são estáveis sobre perturbações. Em razão disto, definimos o seguinte conceito de semigrupos gradient-like que generaliza o conceito de semigrupos gradientes, mantendo suas propriedades dinâmicas essenciais.

Definição 1.4.15. Considere o semigrupo não-linear $\{T(t) : t \geq 0\}$ com um número finito de pontos de equilíbrio, a dizer $\mathcal{E} = \{u_0^*, \dots, u_{n_0}^*\}$. Seja

$$2\kappa_0 = \min_{\substack{1 \leq i, j \leq n_0 \\ i \neq j}} \|u_i^* - u_j^*\|_{X^\alpha} > 0.$$

Seja $\delta_0 < \kappa_0$, $u^* \in \mathcal{E}$ e $\delta \in (0, \delta_0)$. Uma δ -cadeia de u^* para u^* é um subconjunto $\{u_{l_1}^*, \dots, u_{l_k}^*\}$ de $\mathcal{E}$, juntamente com $\{u_1, \dots, u_k\}$ um subconjuntos de pontos de X^α e constantes $\{t_1, s_1, \dots, t_k, s_k\}$, $0 < s_i < t_i$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq \mathfrak{p}$, tal que $\|u_i - u_{l_i}^*\|_{X^\alpha} \leq \delta$, $1 \leq i \leq k+1$, $u^* = u_{l_1}^* = u_{l_k}^*$, $\text{dist}(T(s_i)u_i, \mathcal{E}) > \delta_0$ e $\|T(t_i)u_i - u_{l_{i+1}}^*\| < \delta$, $1 \leq i \leq k$. Dizemos que $u^* \in \mathcal{E}$ é **recorrente por cadeias** se existe $\delta_0 > 0$ e uma δ -cadeia de u^* para u^* para cada $\delta \in (0, \delta_0)$.

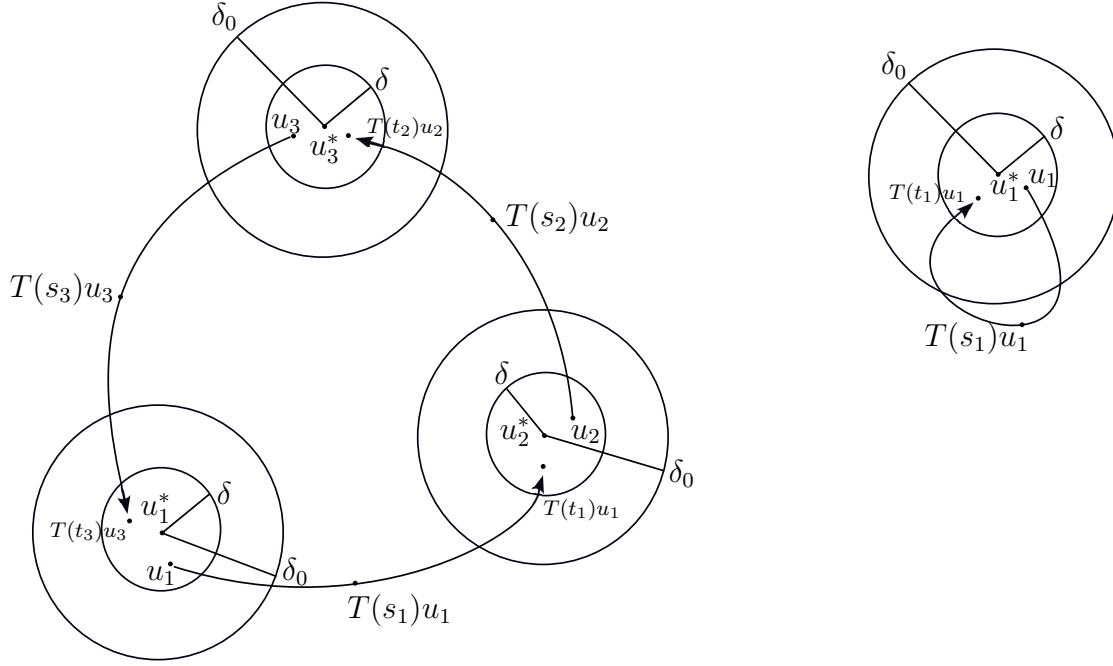


Figura 1.2: Exemplos de δ -cadeia com $\mathfrak{p} = 3$ e $\mathfrak{p} = 1$.

Definição 1.4.16. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não-linear com um número finito de pontos de equilíbrio, a dizer $\mathcal{E} = \{u_0^*, \dots, u_{n_0}^*\}$, com atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um **semigrupo gradient-like** se as seguintes condições são satisfeitas:
(G1) Dada uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$ em $\mathcal{A}$, existem $i, j \in \{1, \dots, n_0\}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\xi(t) - u_i^*\|_{X^\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t) - u_j^*\|_{X^\alpha} = 0;$$

(G2) $\mathcal{E} = \{u_0^*, \dots, u_{n_0}^*\}$ não contém nenhum ponto recorrente por cadeia.

As hipóteses (G1) e (G2) carregam importantes propriedades dinâmicas de um semigrupo com uma função de Lyapunov. Segue de (G1) que $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n_0} W^u(u_i^*)$, ou seja, um semigrupo gradient-like é um semigrupo atrator gradient-like. Já (G2) nos diz que nenhum número finito de órbitas pode gerar um contorno fechado. A maior vantagem dessas hipóteses na função de Lyapunov é a estabilidade sobre perturbações. Este fato nos permite obter uma caracterização de atratores de semigrupos que são pequenas perturbações de semigrupos de gradiente, perturbar tais semigrupos novamente e ainda ser capaz de caracterizar os atratores do semigrupo recentemente perturbado. Antes de prosseguirmos com a análise dos atratores de semigrupos do tipo gradiente sobre perturbação vamos estabelecer uma equivalência entre a condição (G2) e a ausência de estruturas homoclínicas.

Definição 1.4.17. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não linear com um número finito de pontos de equilíbrio, a dizer $\mathcal{E} = \{u_0^*, \dots, u_{n_0}^*\}$, com atrator global $\mathcal{A}$. Uma **estrutura homoclínica** em $\mathcal{A}$ é um conjunto $\{u_{l_1}^*, \dots, u_{l_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ e um conjunto de soluções globais $\{\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha : 1 \leq i \leq k\}$ em $\mathcal{A}$ tal que, fazendo $u_{l_{k+1}}^* := u_{l_1}^*$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_i(t) = u_{l_i}^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) = u_{l_{i+1}}^*, \quad 1 \leq i \leq k.$$

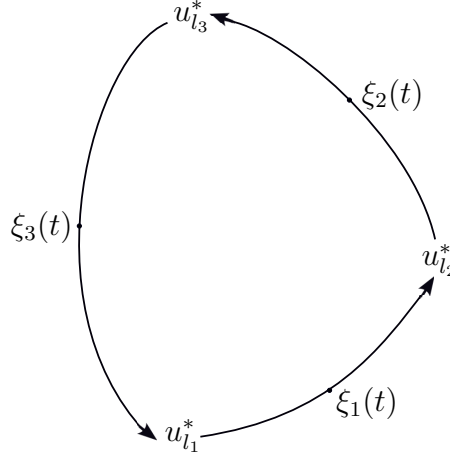


Figura 1.3: Exemplo de estrutura homoclínica.

Lema 1.4.18. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não linear com um número finito de pontos de equilíbrio, a dizer $\mathcal{E} = \{u_0^*, \dots, u_{n_0}^*\}$, com atrator global $\mathcal{A}$. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisfaz (G1), então (G2) é satisfeita se e somente se $\mathcal{A}$ não possui estruturas homoclínicas.

Demonstração. Ver [16, Lema 2.2]. □

Definição 1.4.19. Diz-se que o semigrupo $\{T_\eta(\cdot) : t \geq 0\}$ é **coletivamente assintoticamente compacto** se, dada uma sequência $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, uma sequência limitada $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em X^α e uma sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de números não negativos com $t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, então $T_{\eta_k}(t_k)u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ é relativamente compacta.

A maior vantagem dos semigrupos gradient-like sobre os semigrupos gradientes é a estabilidade sob perturbações. O resultado a seguir assegura que as hipóteses (G₁) e (G₂) são estáveis sob perturbações e esse fato possibilita uma caracterização dos atratores de semigrupos que são pequenas perturbações de semigrupos gradientes, tais semigrupos perturbados são capazes de fornecer uma caracterização do atrator do semigrupo não perturbado.

Teorema 1.4.20. Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compacto, que satisfaz:

- (i) Para cada $\eta \in [0, 1]$, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$ e $\overline{\bigcup_{\eta \in [0, 1]} \mathcal{A}_\eta}$ é limitado;
- (ii) $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não linear gradient-like com um número finito de pontos de equilíbrio, a dizer $\mathcal{E}_0 = \{u_{0,1}^*, \dots, u_{0,n_0}^*\}$;

- (iii) $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possui um número finito de pontos de equilíbrio, $\mathcal{E}_\eta = \{u_{\eta,1}^*, \dots, u_{\eta,n_0}^*\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, e $\sup_{1 \leq i \leq n_0} \|u_{\eta,i}^* - u_{0,i}^*\|_{X^\alpha} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$;
- (iv) $\|T_\eta(t)u - T_0(t)u\|_{X^\alpha} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ uniformemente para t em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$ e para u em subconjuntos compactos de X^α ;
- (v) Existe $\delta > 0$ tal que, se uma solução ξ_η em $\mathcal{A}_\eta$ é tal que $\|\xi_\eta(t) - u_{\eta,i}^*\|_{X^\alpha} \leq \delta$ para todo $t \geq t_0$ (ou, para todo $t \leq t_0$), $t_0 \in \mathbb{R}$, então $\xi_\eta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u_{\eta,i}^*$ (ou $\xi_\eta(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} u_{\eta,i}^*$).
- Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, o semigrupo não linear $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ é gradient-like.

Demonstração. Ver [18, Teorema 5.26]. □

Corolário 1.4.21. Sob as hipóteses do Teorema 1.4.20, existe $\eta_0 > 0$, tal que

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcup_{i=1}^{n_0} W^u(u_{\eta,i}^*), \text{ para todo } \eta \in [0, \eta_0].$$

Observação 1.4.22. Até este ponto não usamos hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio u_i^* , $1 \leq i \leq n_0$. Sendo assim, os resultados são válidos em alguns casos sem a hiperbolicidade. Nas aplicações, a hiperbolicidade dos pontos de equilíbrio para $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ é usada para provar as condições (iii) e (v) do Teorema 1.4.20.

Adaptando a definição de semigrupo *gradient-like*, podemos substituir o conjunto finito de equilíbrios por uma família de conjuntos disjuntos invariantes isolados, e as provas são similares.

Com o intuito de obter atratores globais, cuja atração é do tipo exponencial, isto é, atratores globais exponenciais, seguimos o realizado em [1, 15, 30].

Definição 1.4.23. Dizemos que $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ é uma família de **conjuntos invariantes isolados** se existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{O}(\Xi_i^*) \cap \mathcal{O}(\Xi_j^*) = \emptyset$, $i < j \leq p$, e Ξ_i^* é o subconjunto invariante maximal de $\mathcal{O}(\Xi_i^*) := \{z \in X^\alpha : \text{dist}(z, \Xi_i^*) < \delta\}$.

Definição 1.4.24. Dizemos que a família $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ de conjuntos invariantes isolados **atrai pontos** de X^α , se a união $\bigcup_{\Xi_i^* \in \Xi} \Xi_i^*$ atrai cada ponto de X^α .

Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não-linear com atrator global $\mathcal{A}$ que contém uma família finita de conjuntos disjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$.

Definição 1.4.25. Sejam $\tilde{\delta}$ e $\delta_0 \in (0, \tilde{\delta})$ fixados. Para $\Xi^* \in \Xi$ e $\delta \in (0, \delta_0)$ uma δ -**cadeia** de Ξ^* para Ξ^* é uma sequência $\{\Xi_{l_i}^*, \dots, \Xi_{l_k}^*\} \subset \Xi$, uma sequência de números reais $t_1, \kappa_1, \dots, t_k, \kappa_k$, $1 \leq i \leq k$, $k \leq p$, e uma sequência de pontos u_i , $1 \leq i \leq k$, tais que $u_i \in \mathcal{O}_\delta(\Xi_{l_i}^*)$, $T(\kappa_i)u_i \notin \mathcal{O}_{\delta_0}(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{O}(\Xi_{l_i}^*))$ e $T(t_i)u_i \in \mathcal{O}_\delta(\Xi_{l_{i+1}}^*)$, $1 \leq i \leq k$, com $\Xi^* = \Xi_{l_{k+1}}^* = \Xi_{l_1}^*$. Diremos, ainda, que $\Xi^* \in \Xi$ é **recorrente por cadeias**, se existe $\delta_0 \in (0, \tilde{\delta})$ e δ -cadeias de Ξ^* para Ξ^* para cada $\delta \in (0, \delta_0)$.

Definição 1.4.26. Considere $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não-linear com atrator global $\mathcal{A}$. Dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um **semigrupo gradient-like generalizado**, se existe uma família $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ de conjuntos invariantes isolados em $\mathcal{A}$, tal que

(GG1) Para cada solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$, existem $1 \leq i, j \leq p$, tais que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi_i^*) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi_j^*) = 0;$$

(GG2) Os elementos de $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ não são recorrentes por cadeias.

Definição 1.4.27. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não-linear com um número finito de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$. Uma **estrutura homoclínica** em $\mathcal{A}$ é um conjunto $\{\Xi_1^*, \dots, \Xi_k^*\} \subset \Xi$ e um conjunto de soluções globais $\{\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha, 1 \leq i \leq k\}$ em $\mathcal{A}$ tal que, fazendo $\Xi_{k+1}^* = \Xi_1^*$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi_i(t), \Xi_i^*) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\xi_i(t), \Xi_{i+1}^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Lema 1.4.28. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo gradient-like generalizado. Então o atrator $\mathcal{A}$ para $\{T(t) : t \geq 0\}$ não contém estruturas homoclínicas.*

Demonstração. Ver [16, Lema 2.10]. □

Como antes também introduzimos o conceito de variedades instáveis e estáveis.

Definição 1.4.29. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo. A variedade **instável** e **estável** para um conjunto invariante isolado Ξ^* são definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} W^u(\Xi^*) &= \{u \in X^\alpha : \text{existe uma solução global } \xi \text{ para } \{T(t) : t \geq 0\} \text{ com} \\ &\quad \xi(0) = u \text{ e tal que } \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi^*) = 0\}; \\ W^s(u^*) &= \left\{u \in X^\alpha : \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)u, \Xi^*) = 0\right\}. \end{aligned}$$

A variedade **instável local** para um conjunto invariante isolado Ξ^* é definida por

$$W_{\text{loc}}^u(\Xi^*) = \{u \in W^u(\Xi^*) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi^*) : \text{existe uma solução global } \xi \text{ para } \{T(t) : t \geq 0\} \text{ com} \\ \xi(0) = u \text{ e tal que } \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\xi(t), \Xi^*) = 0 \text{ e } \xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi^*), t \leq 0\},$$

para algum $\delta > 0$.

Definição 1.4.30. Dizemos que um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é **exponencialmente ponto dissipativo**, se dada uma família $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ de conjuntos invariantes isolados que atraem pontos de X^α e para cada $\Xi_i^* \in \Xi$, existam constantes positivas C_0, ρ_0 e δ_0 , tais que

$$\text{dist}(T(t)u_0, W_{\text{loc}}^u(\Xi_i^*)) \leq C_0 e^{-\rho_0 t}, \quad (1.9)$$

sempre que $u_0 \in \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_i^*)$ e $\gamma_{[0,t]}(u_0) \subset \mathcal{O}_{\delta_0}(\Xi_i^*)$ para todo $t \geq 0$.

Teorema 1.4.31. *Suponha que as seguintes condições sejam válidas:*

- (i) *O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é gradient-like generalizado e assintoticamente compacto com órbitas limitadas de conjuntos limitados e com uma família de conjuntos disjuntos isolados invariantes $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$;*
- (ii) *A família de conjuntos invariantes isolados $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ atrai pontos de X^α ;*

(iii) O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisfaz uma condição de Lipschitz da forma

$$d(T(t)w_1, T(t)w_2) \leq ce^{Lt}d(w_1, w_2),$$

para todos $B \subset X^\alpha$ limitado e $w_1, w_2 \in B$, onde c, L são constantes positivas;

(iv) Cada elemento $\Xi_i^* \subset \Xi$ verifica a propriedade (1.9).

Então o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é exponencialmente limitado dissipativo. Em outras palavras, existe um atrator global $\mathcal{A}$ que atrai exponencialmente, da seguinte maneira, existem $\rho > 0$ e $C > 0$, tais que

$$\text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) \leq Ce^{-\rho t}, \text{ para todo } t > 0.$$

Demonstração. Ver [15, Teorema 2.16]. □

Teorema 1.4.32. Considere o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ gradient-like generalizado e assintoticamente compacto com uma família de conjuntos disjuntos isolados invariantes $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ que atrai pontos de X^α , onde cada elemento $\Xi_i^* \subset \Xi$ verifica a propriedade (1.9) e que qualquer ponto v_0 existe uma bola $\mathcal{O}_{\delta(v_0)}(v_0)$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta(v_0)}(v_0))$ seja limitado e, para algumas constantes c_0 e $L_0 > 0$, temos

$$d(T(t)w_1, T(t)w_2) \leq c_0 e^{L_0 t} d(w_1, w_2), \quad (1.10)$$

para todos $w_1, w_2 \in \gamma^+(\mathcal{O}_{\delta(v_0)}(v_0))$ e $t \geq 0$. Então o semigrupo é localmente compacto dissipativo. Em particular, existe um conjunto (maximal) compacto invariante J que atrai exponencialmente uma vizinhança de um conjunto compacto dado, ou seja, dado $K \subset X^\alpha$ existe um conjunto aberto $\mathcal{O}(K)$ contendo K tal que

$$\text{dist}(T(t)\mathcal{O}(K), J) \leq Ce^{-\rho t}, \quad t > 0.$$

Demonstração. Ver [15, Teorema 2.18]. □

Teorema 1.4.33. Considere o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ gradient-like generalizado, compacto e que satisfaça a propriedade (1.10). Assuma, ainda, que exista uma família de conjuntos disjuntos isolados invariantes $\Xi = \{\Xi_1^*, \dots, \Xi_p^*\}$ que atrai pontos de X^α , onde cada elemento $\Xi_i^* \subset \Xi$ verifica a a propriedade (1.9). Então, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é exponencialmente limitado dissipativo.

Demonstração. Ver [15, Teorema 3.9]. □

Teorema 1.4.34. Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$, $\eta \in [0, 1]$, uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compacto, que satisfaz:

- (i) Para cada $\eta \in [0, 1]$, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$;
- (ii) $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado;
- (iii) $\mathcal{A}$ possui um número finito de conjuntos invariantes isolados, $\Xi_\eta = \{\Xi_{\eta,1}^*, \dots, \Xi_{\eta,n_0}^*\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, que se comportam semicontínua superiormente e inferiormente quando $\eta \rightarrow 0$, isto é,

$$\sup_{1 \leq i \leq p} [\text{dist}(\Xi_{\eta,i}^*, \Xi_{0,i}^*) + \text{dist}(\Xi_{0,i}^*, \Xi_{\eta,i}^*)] \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Adicionalmente, existem $\delta > 0$ e $\eta_0 > 0$ tais que somente as soluções globais contidas em $B_\delta(\Xi_{\eta,i}^*)$ estão em $\Xi_{\eta,i}^*$, $1 \leq i \leq p$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$;

- (iv) $d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ para cada $t \geq 0$ e uniformemente para u em subconjuntos compactos de X^α ;
- (v) Existe $\delta > 0$ e $\eta_0 \in (0, 1]$ tais que, se $\eta < \eta_0$, $\xi_\eta : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$ é uma solução global em $\mathcal{A}_\eta$, e $d(\xi_\eta(t), \Xi_{\eta,i}^*) < \delta$ para todo $t \leq 0$ ($d(\xi_\eta(t), \Xi_{\eta,i}^*) < \delta$ para todo $t \geq 0$), então $d(\xi_\eta(t), \Xi_{\eta,i}^*) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ ($d(\xi_\eta(t), \Xi_{\eta,i}^*) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$).

Então, existe $\eta_0 > 0$ tal que, para todo $\eta \in [0, \eta_0]$, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado. Consequentemente, existe $\eta_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcup_{i=1}^p W^u(\Xi_{\eta,i}^*), \text{ para todo } \eta \in [0, \eta_0].$$

Demonstração. Ver [16, Teorema 2.13]. □

Corolário 1.4.35. Assumindo as hipóteses do Teorema 1.4.34 e Teorema 1.4.31 para cada $\eta \in [0, 1]$, para cada subconjunto limitado $B \subset X^\alpha$, existe $\eta_0 > 0$ e uma constante $c(B) > 0$ tal que

$$d(T_\eta(t)u_0, \mathcal{A}_\eta) \leq c(B)e^{-\rho t}, \text{ para todos } u_0 \in B, \eta \in [0, \eta_0] \text{ e } t \geq 1.$$

Em acordo com [2, 17, 19] seguindo o desenvolvido em [30] se considerarmos que $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator gradient-like $\mathcal{A}_0$ e que todas suas soluções estacionárias sejam hiperbólicas, então $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator $\mathcal{A}_\eta$ e com uma propriedade de continuidade de semigrupos será possível mostrar que os atratores $\mathcal{A}_\eta$ comportam continuamente quando $\eta \rightarrow 0$, ou seja,

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

1.4.2 Continuidade dos Atratores

Esta subseção visa entender a continuidade dos atratores relativo a perturbações no semigrupo, estabelecendo condições para que os atratores se comportem continuamente quando houver estas perturbações. Para este fim, considere a seguir (X, d) um espaço métrico e Λ um espaço topológico.

Definição 1.4.36. Sejam $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X .

(i) Diz-se que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ é **semicontínua superiormente** em η_0 se

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_{\eta_0}) = \sup_{x_\eta \in \mathcal{A}_\eta} d(x_\eta, \mathcal{A}_{\eta_0}) \xrightarrow{\eta \rightarrow \eta_0} 0;$$

(ii) Diz-se que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ é **semicontínua inferiormente** em η_0 se

$$\text{dist}(\mathcal{A}_{\eta_0}, \mathcal{A}_\eta) = \sup_{x \in \mathcal{A}_{\eta_0}} d(x, \mathcal{A}_\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \eta_0} 0;$$

(iii) Diz-se que $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ é **contínua** em η_0 se for semicontínua superiormente e inferiormente.

Lema 1.4.37. *Seja $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X .*

- (i) *Se toda sequência $\{x_{\eta_n}\}$, com $x_{\eta_n} \in \mathcal{A}_{\eta_n}$, $\eta_n \rightarrow \eta_0$ possui uma subsequência com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\eta_0}$, então $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em η_0 ;*
- (ii) *Se $\mathcal{A}_{\eta_0}$ é compacto e para cada $x_0 \in \mathcal{A}_{\eta_0}$ existe uma sequência $\{x_{\eta_n}\}$ com $x_{\eta_n} \in \mathcal{A}_{\eta_n}$, $\eta_n \rightarrow \eta_0$ que converge para x , então $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em η_0 .*

Demonstração. Ver [19, Lema 1.1]. □

Teorema 1.4.38. *Suponha que o conjunto $\overline{\bigcup_{\eta \in \Lambda} \mathcal{A}_\eta}$ seja compacto em X e que para qualquer $x_\eta \xrightarrow{\eta \rightarrow \eta_0} x_{\eta_0}$ em X , $(x_\eta \in \mathcal{A}_\eta, \eta \neq \eta_0)$, tal que $\|T_\eta(t)x_\eta - T_{\eta_0}(t)x_{\eta_0}\| \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow \eta_0$ para todo $t \in [0, \infty)$. Então, a família de atratores $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em $\eta = \eta_0$.*

Demonstração. Ver [19, Teorema 1.1]. □

Teorema 1.4.39. *Para $\eta \in [0, 1]$, considere a família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$, que satisfaz:*

- (i) *Para cada $\eta \in [0, 1]$, $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}_\eta$;*
- (ii) *A família $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ possui um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E}_\eta = \{u_{\eta,1}^*, \dots, u_{\eta,n_0}^*\}$, para todo $\eta \in [0, 1]$, e $\sup_{1 \leq i \leq n_0} \|u_{\eta,i}^* - u_{0,i}^*\|_{X^\alpha} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$;*
- (iii) *Existe $\delta > 0$ tal que $\{W^u(u_{\eta,i}^*) \cap B_\delta(u_{0,i}^*); \eta \in [0, 1]\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$;*
- (iv) *$d(T_\eta(t)u, T_0(t)u) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$ para cada $t \geq 0$ e uniformemente para u em subconjuntos compactos de X ;*
- (v) *Suponha que $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^{n_0} W^u(u_{0,i}^*)$;*
Então, a família de atratores $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Ver [6, Teorema 1.74]. □

Corolário 1.4.40. *Sob as hipóteses dos Teoremas 1.4.20 e 1.4.39 a família de atratores $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$ e existe $\eta_0 > 0$ tal que*

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcup_{i=1}^{n_0} W^u(u_{\eta,i}^*), \text{ para todo } \eta \in [0, \eta_0].$$

Definição 1.4.41. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo não linear com atrator $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é um **atrator exponencial**, se existem $\rho > 0$ e para cada subconjunto limitado $B \subset X$ uma constante $C(B) > 0$ tal que*

$$\text{dist}(T(t)B, \mathcal{A}) \leq C(B)e^{-\rho t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

O resultado a seguir assegura que a atração exponencial uniforme garante que a taxa de convergência dos semigrupos não lineares determina a taxa de convergência dos semigrupos.

Teorema 1.4.42. *Seja $\{T_\eta(t) : t \geq 0\}$ um família de semigrupos não lineares com atratores globais $\mathcal{A}_\eta, \eta \in [0, 1]$. Suponha, ainda, que existam $\eta_0 > 0, \rho > 0$ e um conjunto limitado $B_0 \supset \bigcup_{\eta \in [0, \eta_0]} \mathcal{A}_\eta$, tais que para cada $B \subset X$ limitado, exista uma constante*

$C(B) > 0$, tal que os atratores $\mathcal{A}_\eta$ sejam exponenciais para todos $\eta \in [0, 1]$ e $t \geq 1$. Suponha, também, que existam $c, L > 0$, tais que

$$d(T_\eta(t)u, T_0(t)v) \leq ce^{Lt}(d(u, v) + \eta), \text{ para todos } u, v \in B_0, \eta \in [0, \eta_0] \text{ e } t \geq 1.$$

Então,

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\eta) \leq C\eta^{\frac{\rho}{\rho+L}}, \text{ para alguma constante } c > 0.$$

Demonstração. Ver [5, Teorema 8.2.2]. □

1.5 Convergência Compacta

Considere $\{Z_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ uma família de espaços de Banach e $E_\varepsilon : Z_0 \rightarrow Z_\varepsilon$ operadores lineares com

$$\|E_\varepsilon u\|_{Z_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|u\|_{Z_0}, \text{ para todo } u \in Z_0.$$

Os operadores E_ε são chamados de *extensões*. E, ainda, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $M > 0$ independentes de ε tais que $\|E_\varepsilon u\|_{Z_\varepsilon} \leq M \|u\|_{Z_0}$, para todo $u \in Z_0$ e $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ (Veja [39]).

Definição 1.5.1. Uma família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ *E-converge* para u se $\|u_\varepsilon - E_\varepsilon u\|_{Z_\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e, usaremos a notação $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u$.

Definição 1.5.2. Uma sequência $\{u_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $u_{\varepsilon_n} \in Z_{\varepsilon_n}$ e $\varepsilon_n \rightarrow 0$ é **relativamente compacta** (ou **pré-compacta**) se para cada subsequência $\{u_{\varepsilon_{n_k}}\}$ existe uma subsequência $\{u_{\varepsilon_{n_{k'}}}\}$ e um elemento $u \in Z_0$ tal que $u_{\varepsilon_{n_{k'}}} \xrightarrow{E} u$. A família $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ é dita **relativamente compacta** (ou **pré-compacta**) se toda sequência $\{u_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ é relativamente compacta.

Definição 1.5.3. Uma família de operadores $\{B_\varepsilon \in \mathcal{L}(Z_\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ **converge** para $B_0 \in \mathcal{L}(Z_0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, se $B_\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow{E} B_0 u$ sempre que $u_\varepsilon \xrightarrow{E} u$ e, usaremos a notação $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$.

Definição 1.5.4. Uma família de operadores compactos $\{B_\varepsilon \in \mathcal{L}(Z_\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ **converge compactamente** para um operador compacto $B_0 \in \mathcal{L}(Z_0)$, se $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$ e para qualquer família limitada $\{u_\varepsilon \in Z_\varepsilon : \|u_\varepsilon\|_{Z_\varepsilon} = 1\}_{\varepsilon \in (0,1]}$, a família $\{B_\varepsilon u_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ é relativamente compacta e, usaremos a notação $B_\varepsilon \xrightarrow{CC} B_0$.

Lema 1.5.5. Seja $\{B_\varepsilon \in \mathcal{L}(Z_\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ de modo que $B_\varepsilon \xrightarrow{CC} B_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então,

- (i) $\|B_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \leq C$ para alguma constante $C > 0$, independente de ε ;
- (ii) Suponha que $N(I + B_0) = \{0\}$, então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\|(I + B_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_\varepsilon)} \leq M, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Demonstração. Ver [3, Lema 4.7]. □

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS PARABÓLICOS EM UM DOMÍNIO COM UM PEQUENO BURACO

Este capítulo descreve o problema proposto e introduz os conceitos que serão adequados para estudá-lo. A fim de analisar o comportamento assintótico de uma classe de equações parabólicas em domínios com um pequeno buraco, este capítulo destina-se assim, a explorar a existência de atratores globais para os semigrupos associados a tais equações.

2.1 Introdução

Antes de enunciar de maneira precisa a classe de problemas parabólicos a ser tratada, definamos a perturbação do domínio que estaremos considerando.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in C^2$, e $\varepsilon \in (0, 1]$ um parâmetro. Dados $\omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira, $\partial\omega$, suficientemente suave e um ponto $x_0 \in \Omega$, considere

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon^{-1}(x - x_0) \in \omega\}.$$

Denota-se por Ω_ε o domínio obtido retirando-se um buraco ω_ε do domínio Ω , isto é, $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \omega_\varepsilon$, cuja fronteira é dada por $\partial\Omega_\varepsilon := \partial\Omega \cup \partial\omega_\varepsilon$.

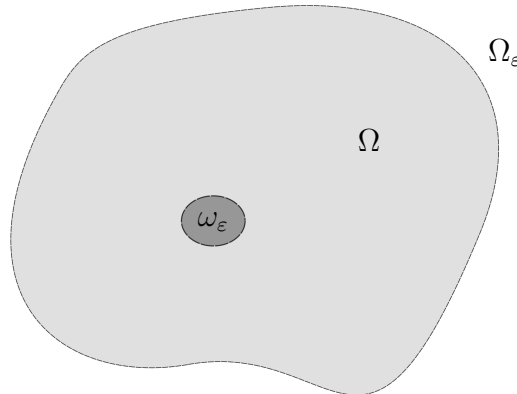


Figura 2.1: Representação do domínio Ω_ε .

Considere a seguinte equação parabólica semilinear

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(x)u_\varepsilon = f(u_\varepsilon), & x \in \Omega_\varepsilon, t > 0 \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (\mathbf{P}_\varepsilon)$$

Para $1 \leq i, j \leq n$ as funções $a_{ij}, V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

- (a) $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, para todo $x \in \Omega$;
 (b) *Condição de elipticidade*: existe constante $\vartheta_0 > 0$, tal que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \vartheta_0 |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n; \quad (2.1)$$

- (c) $V \in C(\overline{\Omega})$, tal que $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$;

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não linear que satisfaz:

- (d) $f \in C^2(\mathbb{R})$;
 (e) *Condição de crescimento*: para todo $s \in \mathbb{R}$, existe constante $\vartheta_1 > 0$

$$|f'(s)| \leq \vartheta_1 \left(1 + |s|^{\gamma-1} \right), \quad \text{onde } 1 \leq \gamma < \frac{n+2}{n-2}, \text{ se } n \geq 3; \quad (2.2)$$

- (f) *Condição de dissipatividade*:

$$\limsup_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0, \quad (2.3)$$

ou equivalentemente, para qualquer $\tau > 0$ existe c_τ tal que

$$uf(u) \leq \tau u^2 + c_\tau, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Em $L^2(\Omega_\varepsilon)$ considere o operador, $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_\varepsilon) &= \left\{ u_\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) : u_\varepsilon = 0 \text{ em } \partial\Omega_\varepsilon \right\}, \\ A_\varepsilon u_\varepsilon &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\cdot) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(\cdot)u_\varepsilon. \end{aligned}$$

Lema 2.1.1. *O operador A_ε é auto-adjunto.*

Demonstração.

- A_ε é um operador simétrico, isto é, para toda $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$, tem-se

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = (u_\varepsilon, A_\varepsilon v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

De fato, para $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$, segue que

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) v_\varepsilon \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon v_\varepsilon \, dx \\ &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} v_\varepsilon \, dS(x) + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon v_\varepsilon \, dx \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon V v_\varepsilon \, dx \\ &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right) \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon V v_\varepsilon \, dx = (u_\varepsilon, A_\varepsilon v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

- A_ε é densamente definido em $L^2(\Omega_\varepsilon)$, isto é, $\overline{\mathcal{D}(A_\varepsilon)} = L^2(\Omega_\varepsilon)$.

De fato, segue das imersões de Sobolev, que

$$C_0^\infty(\Omega_\varepsilon) \subset \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega_\varepsilon),$$

e usando as propriedades de fecho, tem-se

$$L^2(\Omega_\varepsilon) = \overline{C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)} \subset \overline{\mathcal{D}(A_\varepsilon)} \subset L^2(\Omega_\varepsilon),$$

isto é, $\overline{\mathcal{D}(A_\varepsilon)} = L^2(\Omega_\varepsilon)$.

- $R(A_\varepsilon) = L^2(\Omega_\varepsilon)$.

Segue imediatamente da Seção 6.2.1 em [23], tomando $\beta = \min \left\{ \vartheta_0, \inf_{\overline{\Omega}} V \right\}$.

Portanto, segue do Teorema 13.11 - item (d) em [37], que o operador A_ε é auto-adjunto. $\square$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o “domínio limite” consiste no domínio Ω e a equação limite é dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + V(x)u_0 = f(u_0), & x \in \Omega, t > 0 \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (\mathbf{P}_0)$$

Em $L^2(\Omega)$ considere o operador, $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_0) &= \left\{ u_0 \in H^2(\Omega) : u_0 = 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}, \\ A_0 u_0 &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\cdot) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + V(\cdot)u_0. \end{aligned}$$

Analogamente a demonstração do Lema 2.1.1, segue o seguinte resultado

Lema 2.1.2. *O operador A_0 é auto-adjunto.*

2.2 Existência do Atrator Global

2.2.1 O Problema no Domínio com Buraco ($\mathbf{P}_\varepsilon$)

Lema 2.2.1. *O operador A_ε é um operador setorial.*

Demonstração. Segue do Lema 2.1.1 que o operador A_ε é auto-adjunto e densamente definido, assim basta mostrar que A_ε é limitado inferiormente em $L^2(\Omega_\varepsilon)$ e concluímos, portanto, pela Proposição 1.2.11 que A_ε é um operador setorial.

De fato, para $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$, segue que

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) u_\varepsilon \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon^2 \, dx \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon^2 \, dx \\ &\geq \vartheta_0 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \inf_{\overline{\Omega}} V \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &\geq C \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \geq C \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

onde $C = \min \left\{ \vartheta_0, \inf_{\bar{\Omega}} V \right\}$. Portanto, A_ε é limitado inferiormente em $L^2(\Omega_\varepsilon)$. $\square$

Seja $X_\varepsilon = L^2(\Omega_\varepsilon)$. Desde que o operador A_ε é um operador setorial segue que A_ε gera um semigrupo analítico $\{e^{-tA_\varepsilon} : t \geq 0\}$ e suponha ainda que $\operatorname{Re} \sigma(A_\varepsilon) > 0$. Assim, pode-se definir as potências fracionárias A_ε^α de A_ε e com isso os respectivos espaços de potências fracionárias $X_\varepsilon^\alpha := \mathcal{D}(A_\varepsilon^\alpha)$ com $\alpha \geq 0$ munidos da norma do gráfico.

Observe que $X_\varepsilon^1 = \mathcal{D}(A_\varepsilon) = H^2(\Omega_\varepsilon) \cap H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, $X_\varepsilon^0 = L^2(\Omega_\varepsilon)$ e $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Assim, o problema **(P_ε)** pode ser escrito como uma equação de evolução do tipo

$$\begin{cases} \dot{u}_\varepsilon + A_\varepsilon u_\varepsilon = F(u_\varepsilon), & t > 0 \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon^0 \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $F : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon$ é o operador de Nemitskii associado a f , isto é, $F(u_\varepsilon(t))x = f(u_\varepsilon(t, x))$.

Lema 2.2.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-linear de classe C^2 . Se f satisfaz a condição de crescimento (2.2) então $F : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon$ é localmente Lipschitz contínuo. Além disso, dado $R > 0$ existe uma constante $C(R) > 0$, tal que*

$$\|F(u_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon} \leq C(R),$$

para toda $u_\varepsilon \in B_R := \left\{ w_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq R \right\}$.

Demonstração. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, para $\theta \in [0, 1]$ e $1 \leq \gamma < \frac{n+2}{n-2}$, do Teorema do Valor Médio e da condição (2.2), segue que

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f'(\theta a + (1 - \theta)b)| |a - b| \\ &\leq \vartheta_1 \left(1 + |\theta a + (1 - \theta)b|^{\gamma-1} \right) |a - b| \\ &\leq \vartheta_1 \left(1 + (|a| + |b|)^{\gamma-1} \right) |a - b| \\ &\leq \vartheta_1 \left(1 + 2^{\gamma-2} (|a|^{\gamma-1} + |b|^{\gamma-1}) \right) |a - b| \\ &\leq C_1 \left(1 + |a|^{\gamma-1} + |b|^{\gamma-1} \right) |a - b|, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $C_1 = \max \{ \vartheta_1, 2^{\gamma-2} \}$.

Para $p > 1$ tal que $p\gamma = \frac{2n}{n-2}$, mostremos que $F : L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^p(\Omega_\varepsilon)$ é localmente Lipschitz contínuo.

De fato, para $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon)$, de (2.5) segue que

$$\begin{aligned} \|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}^p &= \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_\varepsilon(x)) - f(v_\varepsilon(x))|^p \, dx \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} C_1^p \left(1 + |u_\varepsilon(x)|^{\gamma-1} + |v_\varepsilon(x)|^{\gamma-1} \right)^p |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)|^p \, dx \\ &\leq C_2 \int_{\Omega_\varepsilon} \left(1 + |u_\varepsilon(x)|^{p(\gamma-1)} + |v_\varepsilon(x)|^{p(\gamma-1)} \right) |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)|^p \, dx, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $C_2 = 2^{2p-2}C_1^p$.

Uma vez que $\gamma = \frac{2n}{p(n-2)}$ para $r = \frac{2n}{2n-pn+2p}$, γ e r são expoentes conjugados e, assim, $p\gamma = p(\gamma-1)r$. Logo, como $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon) = L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon) = L^{p(\gamma-1)r}(\Omega_\varepsilon)$, temos $(u_\varepsilon - v_\varepsilon)^p \in L^\gamma(\Omega_\varepsilon)$ e $u_\varepsilon^{p(\gamma-1)}, v_\varepsilon^{p(\gamma-1)} \in L^r(\Omega_\varepsilon)$, e com isso, $(1 + u_\varepsilon^{p(\gamma-1)} + v_\varepsilon^{p(\gamma-1)}) \in L^r(\Omega_\varepsilon)$.

Assim, tendo em vista r e γ como descritos acima, da Desigualdade de Hölder aplicada a (2.6), segue que

$$\begin{aligned} \|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}^p &\leq C_2 \int_{\Omega_\varepsilon} \left(1 + |u_\varepsilon(x)|^{p(\gamma-1)} + |v_\varepsilon(x)|^{p(\gamma-1)}\right) |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)|^p dx \\ &\leq C_2 \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)|^{p\gamma} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \left(1 + |u_\varepsilon(x)|^{p(\gamma-1)} + |v_\varepsilon(x)|^{p(\gamma-1)}\right)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_3 \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)|^{p\gamma} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} 1 + |u_\varepsilon(x)|^{p(\gamma-1)r} + |v_\varepsilon(x)|^{p(\gamma-1)r} dx \right)^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

onde $C_3 = 2^{\frac{2r-2}{r}}C_2$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)}^p &\leq C_3 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)}^p \left(|\Omega_\varepsilon| + \|u_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)}^{p\gamma} + \|v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)}^{p\gamma} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_4 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)}^p \left(1 + \|u_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)}^{\frac{p\gamma}{r}} + \|v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)}^{\frac{p\gamma}{r}} \right) \\ &\leq C_4 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)}^p \left(1 + \|u_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)} \right)^{\frac{p\gamma}{r}} \\ &= C_4 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)}^p \left(1 + \|u_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)} \right)^{p(\gamma-1)}, \end{aligned}$$

onde $C_4 = \max \left\{ 2^{\frac{2}{r}-2}C_3, 2^{\frac{2}{r}-2}C_3|\Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{r}} \right\}$. E, assim

$$\|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \leq C_4^{\frac{1}{p}} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)} \left(1 + \|u_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon\|_{L^{p\gamma}(\Omega_\varepsilon)} \right)^{(\gamma-1)}. \quad (2.7)$$

Em particular, para $p = 2$ em (2.7), tendo em vista a Observação 1.1.12, segue que existe constante $C_5 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq C_4^{\frac{1}{2}} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon)} \left(1 + \|u_\varepsilon\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon)} \right)^{(\gamma-1)} \\ &\leq C_4^{\frac{1}{2}} C_5 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \left(1 + \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \right)^{(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

Em conclusão, seja $\delta > 0$ tal que $\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \|v_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta$. Portanto,

$$\|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon} \leq C_{\delta,\gamma} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

onde $C_{\delta,\gamma} = C_4^{\frac{1}{2}} C_5 (1 + 2\delta)^{(\gamma-1)}$, o que implica que F é localmente Lipschitz contínuo.

E ainda, como $f \in C^1(\mathbb{R})$, segue que

$$\|F(0)\|_{X_\varepsilon} = \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |f(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = |f(0)| |\Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \leq C_6.$$

Como F é Lipschitz contínua em B_R , para $u_\varepsilon \in B_R$

$$\|F(u_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon} \leq \|F(u_\varepsilon) - F(0)\|_{X_\varepsilon} + \|F(0)\|_{X_\varepsilon} \leq C_{\delta,\gamma} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_6 \leq C(R),$$

onde $C(R) = C_{\delta,\gamma}R + C_6$. $\square$

Lema 2.2.3 (Solução Local). *Sob a hipótese de crescimento (2.2) o problema (2.4) possui solução local em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.*

Demonstração. Como A_ε é um operador setorial (Lema 2.2.1) e F é localmente Lipschitz contínuo (Lema 2.2.2), segue que as hipóteses do Teorema 1.3.2 são satisfeitas, daí segue o resultado. $\square$

Lema 2.2.4 (Solução Local Limitada). *Suponha que a condição de crescimento (2.2) vale. Se $u_\varepsilon^0 \in B_R$ no problema (2.4), então existe $\tau_R > 0$ tal que as soluções $u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)$ do problema (2.4) existem e são limitadas em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ uniformemente para $t \in [0, \tau_R]$.*

Demonstração. Como A_ε é um operador setorial (Lema 2.2.1) e F é localmente Lipschitz contínuo (Lema 2.2.2), segue que as hipóteses da Proposição 1.3.6 são satisfeitas, daí segue o resultado. $\square$

Lema 2.2.5. *Sob a condição de dissipatividade (2.3) as soluções $u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)$ do problema (2.4) são tais que, existe constante $C > 0$*

$$\sup_{t \geq 0} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C \max \left\{ \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, 1 \right\}. \quad (2.8)$$

Demonstração. Para obter o resultado usaremos a técnica de iteração de Moser-Alikakos (Ver [20, p. 213]), que é uma técnica que permite obter estimativas em L^∞ para soluções de equações parabólicas de segunda ordem. De fato, inicialmente multipliquemos a equação do problema (P $_\varepsilon$) por $u_\varepsilon^{2^k-1}$, para $k = 1, 2, \dots$, e integremos sobre Ω_ε , isto é,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon^{2^k-1} dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) u_\varepsilon^{2^k-1} dx - \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon^{2^k} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_\varepsilon) u_\varepsilon^{2^k-1} dx. \quad (2.9)$$

Observe que, analisando os termos da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon^{2^k-1} dx = \frac{1}{2^k} \int_{\Omega_\varepsilon} 2^k \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon^{2^k-1} dx \\ &= \frac{1}{2^k} \left[\int_{\Omega_\varepsilon} (2^k - 1) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon^{2^k-1} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon^{2^k-1} dx \right] \\ &= \frac{1}{2^k} \left[\left((2^k - 1) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon^{2^k-2}, u_\varepsilon \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, u_\varepsilon^{2^k-1} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right] \\ &= \frac{1}{2^k} \frac{d}{dt} \left(u_\varepsilon^{2^k-1}, u_\varepsilon \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \frac{1}{2^k} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &:= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) u_\varepsilon^{2^k-1} dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_\varepsilon^{2^k-1}) dx \\
&= -(2^k - 1) \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k-2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} dx \\
&= -\frac{(2^k - 1)}{2^{2k-2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \left(2^{k-1} u_\varepsilon^{2^{k-1}-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) \left(2^{k-1} u_\varepsilon^{2^{k-1}-1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right) dx \\
&= -\frac{(2^k - 1)}{2^{2k-2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_\varepsilon^{2^k-1}) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_\varepsilon^{2^k-1}) dx.
\end{aligned}$$

Substituindo o obtido em I_1 e I_2 em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^k} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx &= -\frac{(2^k - 1)}{2^{2k-2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_\varepsilon^{2^k-1}) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_\varepsilon^{2^k-1}) dx \\
&\quad - \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon^{2^k} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_\varepsilon) u_\varepsilon^{2^k-1} dx,
\end{aligned}$$

o que implica,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx &= -\frac{(2^k - 1)}{2^{k-2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_\varepsilon^{2^k-1}) \frac{\partial}{\partial x_i} (u_\varepsilon^{2^k-1}) dx \\
&\quad - 2^k \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon^{2^k} dx + 2^k \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon f(u_\varepsilon) u_\varepsilon^{2^k-2} dx.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Das condições de elipticidade (2.1) e de dissipatividade (2.3) aplicadas a equação (2.10), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx &\leq -\frac{(2^k - 1)}{2^{k-2}} \vartheta_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_\varepsilon^{2^k-1})|^2 dx \\
&\quad - 2^k \inf_{\bar{\Omega}} V \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + 2^k \int_{\Omega_\varepsilon} (\tau u_\varepsilon^2 + c_\tau) u_\varepsilon^{2^k-2} dx,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx &\leq -\frac{(2^k - 1)}{2^{k-2}} \vartheta_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_\varepsilon^{2^k-1})|^2 dx \\
&\quad + 2^k (\tau - \inf_{\bar{\Omega}} V) \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + 2^k c_\tau \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k-2} dx.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Como $u_\varepsilon^{2^k-2} \leq u_\varepsilon^{2^k} + 1$, para $k = 1, 2, \dots$, na equação (2.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx &\leq -\frac{(2^k - 1)}{2^{k-2}} \vartheta_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_\varepsilon^{2^k-1})|^2 dx \\
&\quad + 2^k (\tau - \inf_{\bar{\Omega}} V) \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + 2^k c_\tau \int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^{2^k} + 1) dx,
\end{aligned}$$

o que resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx &\leq -\frac{(2^k - 1)}{2^{k-2}} \vartheta_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_\varepsilon^{2^{k-1}})|^2 dx \\ &\quad + 2^k(\tau - \inf_{\bar{\Omega}} V + c_\tau) \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + 2^k c_\tau |\Omega_\varepsilon|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tendo em vista que $2 \leq \frac{(2^k - 1)}{2^{k-2}} \leq 4$, para $k = 1, 2, \dots$, na equação (2.12), obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx \leq -2\vartheta_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_\varepsilon^{2^{k-1}})|^2 dx + 2^k(\tau - \inf_{\bar{\Omega}} V + c_\tau) \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + 2^k c_\tau |\Omega_\varepsilon|. \quad (2.13)$$

Para $u_\varepsilon^{2^{k-1}}$ considerando a Desigualdade de Nirenberg-Gagliardo (Teorema 1.1.6) para $j = 0$, $p = 2$, $m = 1$, $r = 2$, $q = 1$, $\theta = \frac{n}{n+2}$, obtemos

$$\|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^\theta \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^{1-\theta},$$

onde $C_1 = C_1(\Omega_\varepsilon, n)$. Logo,

$$\|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C_1^2 \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^{2\theta} \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^{2(1-\theta)}. \quad (2.14)$$

Aplicando o Corolário 1.1.3 com $m = \frac{1}{\theta}$ e $\delta \in (0, 1)$ na desigualdade (2.14), obtemos

$$\|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \theta \delta^{\frac{1}{\theta}} \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + (1 - \theta) \delta^{-\frac{1}{1-\theta}} C_1^{\frac{2}{1-\theta}} \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (2.15)$$

Como $\theta = \frac{n}{n+2}$, segue da desigualdade (2.15) que

$$\|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \delta \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + C_\delta \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^2, \quad (2.16)$$

onde $C_\delta = \frac{2}{n+2} C_1^{n+2} \delta^{-\frac{n}{2}-1}$.

Observe, ainda, que da definição da norma em $H^1(\Omega_\varepsilon)$, a desigualdade (2.16) pode ser expressa da seguinte maneira

$$\|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \delta \left(\|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\nabla(u_\varepsilon^{2^{k-1}})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) + C_\delta \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^2,$$

o que implica

$$\frac{1 - \delta}{\delta} \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 - \frac{C_\delta}{\delta} \|u_\varepsilon^{2^{k-1}}\|_{L^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|\nabla(u_\varepsilon^{2^{k-1}})\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (2.17)$$

Utilizando a estimativa obtida em (2.17) em (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx &\leq -\frac{2\vartheta_0(1 - \delta)}{\delta} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + \frac{2\vartheta_0 C_\delta}{\delta} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^{k-1}} dx \right)^2 \\ &\quad + 2^k(\tau - \inf_{\bar{\Omega}} V + c_\tau) \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + 2^k c_\tau |\Omega_\varepsilon| \\ &= \left(-\frac{2\vartheta_0(1 - \delta)}{\delta} + 2^k(\tau - \inf_{\bar{\Omega}} V + c_\tau) \right) \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx \\ &\quad + \frac{2\vartheta_0 C_\delta}{\delta} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^{k-1}} dx \right)^2 + 2^k c_\tau |\Omega_\varepsilon|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Em (2.18) fixando $\delta = \delta_k$ para $k = 1, 2, \dots$, tal que

$$\left(-\frac{2\vartheta_0(1-\delta)}{\delta} + 2^k(\tau - \inf_{\Omega} V + c_\tau) \right) \leq -2^k$$

e $\delta_k = \varrho 2^{-k}$ com $\varrho > 0$ uma constante, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx &\leq -2^k \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + \frac{2^k 2\vartheta_0 C_{\delta_k}}{\varrho} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^{k-1}} dx \right)^2 + 2^k c_\tau |\Omega_\varepsilon| \\ &= -2^k \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx + C_2 (2^k)^{\frac{n}{2}+2} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^{k-1}} dx \right)^2 + 2^k c_\tau |\Omega_\varepsilon|, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde $C_2 = \vartheta_0 \frac{4}{n+2} C_1^{n+2} \varrho^{-\frac{n}{2}-2}$.

Aplicando o Lema 1.1.8 com $y(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} dx$ em (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^k} &\leq \max \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^0)^{2^k} dx, C_2 (2^k)^{\frac{n}{2}+1} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^{k-1}} dx \right)^2 + c_\tau |\Omega_\varepsilon| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^0)^{2^k} dx, C_2 (2^k)^{\frac{n}{2}+1} m_{k-1}^{2^k} + c_\tau |\Omega_\varepsilon| \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $m_{k-1} := \sup_{t \geq 0} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^{2^{k-1}} dx \right)^{2^{-k+1}}$.

Tomando a raiz 2^k -ésima em ambos os lados de (2.20) e o supremo do lado esquerdo, obtemos

$$m_k \leq \max \left\{ \|u_\varepsilon^0\|_{L^{2^k}(\Omega_\varepsilon)}, \left(C_2 (2^k)^{\frac{n}{2}+1} m_{k-1}^{2^k} + c_\tau |\Omega_\varepsilon| \right)^{\frac{1}{2^k}} \right\}. \quad (2.21)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^0\|_{L^{2^k}(\Omega_\varepsilon)} &= \left(\int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^0)^{2^k} dx \right)^{\frac{1}{2^k}} \leq \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |(u_\varepsilon^0)^{2^k}| dx \right)^{\frac{1}{2^k}} \leq \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} |(u_\varepsilon^0)| \left(\int_{\Omega_\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{2^k}} \\ &\leq \|u_\varepsilon^0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} |\Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{2^k}} \leq \max \{1, |\Omega_\varepsilon|\} \|u_\varepsilon^0\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} =: K. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Segue de (2.22) que o primeiro termo do lado direito da desigualdade (2.21) é uniformemente estimado por K , para todo $k \in \mathbb{N}$. E, ainda, para

$$c' := \max \{C^2, 1, c_\tau |\Omega_\varepsilon|, K^2\},$$

obtemos em (2.21)

$$m_k \leq \max \left\{ K, \left(c' (2^k)^{\frac{n}{2}+1} m_{k-1}^{2^k} + c' \right)^{\frac{1}{2^k}} \right\}. \quad (2.23)$$

Para o valor de m_1 (definido com $\sup_{t \geq 0} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$) segue que $m_1 \leq x_1 := \max\{m_1, 1\}$, assim os números m_k , $k = 1, 2, \dots$, são limitados pelos correspondentes números x_k satisfazendo a recorrência

$$x_k = \max \left\{ K, \left(c'(2^k)^{\frac{n}{2}+1} x_{k-1}^{2^k} + c' \right)^{\frac{1}{2^k}} \right\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Como $c' \geq 1$ e $x_1 \geq 1$, segue que a sequência $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ é crescente. De fato,

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \max \left\{ K, \left(c'(2^{k+1})^{\frac{n}{2}+1} x_k^{2^{k+1}} + c' \right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} \right\} - x_k \\ &\geq \left(c'(2^{k+1})^{\frac{n}{2}+1} x_k^{2^{k+1}} + c' \right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} - x_k \geq \left((2^{k+1})^{\frac{n}{2}+1} x_k^{2^{k+1}} + 1 \right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} - x_k \\ &\geq \left((2^{k+1})^{\frac{n}{2}+1} \right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} x_k - x_k \geq 0. \end{aligned}$$

Além disso, x_2 é sempre limitado. De fato,

$$\begin{aligned} x_2 &= \max \left\{ K, \left(c'2^{n+2} x_1^4 + c' \right)^{\frac{1}{4}} \right\} \leq \max \left\{ K, \left(2c'2^{n+2} x_1^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right\} \\ &= \max \left\{ K, \left(2c'2^{n+2} \right)^{\frac{1}{4}} x_1 \right\} = \max \left\{ K, \left(2c'2^{n+2} \right)^{\frac{1}{4}} \max\{m_1, 1\} \right\}. \end{aligned}$$

Logo a sequência $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ é dominada pela sequência $\{z_k\}_{k=1}^\infty$, dada por

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_k = \left(2c'(2^k)^{\frac{n}{2}+1} \right)^{\frac{1}{2^k}} z_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Assim, tomando o limite quando $k \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} z_k \\ &= z_1 \prod_{k=2}^\infty \left(2c'(2^k)^{\frac{n}{2}+1} \right)^{\frac{1}{2^k}} \leq z_1 \left(c'2^{\frac{n}{2}+2} \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^\infty \left(2c'(2^k)^{\frac{n}{2}+1} \right)^{\frac{1}{2^k}} \\ &\leq z_1 \left(c'2^{\frac{n}{2}+2} \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^\infty (2c')^{\frac{1}{2^k}} \left[\prod_{k=1}^\infty 2^{\frac{k}{2^k}} \right]^{\frac{n}{2}+1} \\ &= x_1 \left(c'2^{\frac{n}{2}+2} \right)^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^\infty (2c')^{\frac{1}{2^k}} (4)^{\frac{n}{2}+1} = x_1 \left(c'2^{\frac{n}{2}+2} \right)^{-\frac{1}{2}} 2c'(4)^{\frac{n}{2}+1} \\ &= 2^{\frac{3n}{4}+1} (c')^{\frac{1}{2}} \max \left\{ \sup_{t \geq 0} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por fim, veremos que $\sup_{t \geq 0} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \gamma$, onde $\gamma > 0$ é uma constante. De fato, multiplicando a equação do problema **(P_ε)** por u_ε e integrando sobre Ω_ε , obtemos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) u_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon^2 \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f(u_\varepsilon) u_\varepsilon \, dx. \quad (2.25)$$

Integrando por partes a equação (2.25), obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 \, dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon^2 \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon f(u_\varepsilon) \, dx. \quad (2.26)$$

Das condições de elipticidade (2.1) e de dissipatividade (2.3) aplicadas a equação (2.26), segue que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx \leq -2\vartheta_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx - 2 \inf_{\bar{\Omega}} V \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx + 2 \int_{\Omega_\varepsilon} (\tau u_\varepsilon^2 + c_\tau) dx. \quad (2.27)$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.1.5) a desigualdade (2.27), segue que existe constante $C_3 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx &\leq -2\vartheta_0 C_3 \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx - 2 \inf_{\bar{\Omega}} V \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx + 2 \int_{\Omega_\varepsilon} (\tau u_\varepsilon^2 + c_\tau) dx \\ &= 2 \left(-\vartheta_0 C_3 - \inf_{\bar{\Omega}} V + \tau \right) \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx + 2c_\tau |\Omega_\varepsilon|. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Escolha $\tau > 0$ de modo que

$$-\vartheta_0 C_3 - \inf_{\bar{\Omega}} V + \tau \leq -1,$$

assim, a equação (2.28), resulta

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx \leq -2 \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx + 2c_\tau |\Omega_\varepsilon|. \quad (2.29)$$

Aplicando a Desigualdade de Bernoulli (Lema 1.1.7) a equação (2.29) com $y(t) = \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2 dx$, $\rho = 1$, $\nu = 0$, $a = 2c_\tau |\Omega_\varepsilon|$, $b = 2$, segue que

$$\sup_{t \geq 0} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \max \left\{ \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, c_\tau |\Omega_\varepsilon| \right\},$$

o que implica

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \max \left\{ \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, (c_\tau |\Omega_\varepsilon|)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\leq c' \max \left\{ \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Portanto, usando (2.30) em (2.24), concluímos que

$$\sup_{t \geq 0} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C \max \left\{ \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, 1 \right\},$$

onde $C = 2^{\frac{3n}{4}+1} (c')^{\frac{3}{2}}$. □

Teorema 2.2.6 (Solução Global Limitada). *Sob as condições de crescimento (2.2) e de dissipatividade (2.3), a solução $u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)$ do problema (2.4) com $u_\varepsilon^0 \in B_R$ é globalmente definida e existe constante $C > 0$ tal que*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C.$$

Demonstração. Segue do Lema 2.2.5 que $u_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e, portanto, existe constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|F(u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0))\|_{X_\varepsilon} &\leq |\Omega_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \sup_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ |y| \leq \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}}} |f(y)| \\ &\leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \sup_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ |y| \leq \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}}} |f(y)| := C_1(\|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}). \end{aligned}$$

Assim, se $u_\varepsilon^0 \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, então u_ε é uma solução local em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ de (2.4) que satisfaz a equação integral (1.7). Logo, pelas Proposições 1.2.16 e 1.2.17, temos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|A_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon t} u_\varepsilon^0\|_{X_\varepsilon} + \int_0^t \|A_\varepsilon^\alpha e^{-A_\varepsilon(t-s)}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \|F(u_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0))\|_{X_\varepsilon} ds \\ &\leq c_1 e^{-\beta t} \|u_\varepsilon^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \int_0^t c_1 (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} \|F(u_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0))\|_{X_\varepsilon} ds \\ &\leq c_1 \|u_\varepsilon^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \int_0^t c_1 (t-s)^{-\alpha} \|F(u_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0))\|_{X_\varepsilon} ds \\ &\leq c_1 \|u_\varepsilon^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + c_1 C_1(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds, \end{aligned}$$

onde $c_1 > 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{Re} \sigma(A_\varepsilon) > \beta > 0$. Assim sendo, $\|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ é limitada em intervalos finitos de tempo, o que implica que a solução é global.

Por fim, novamente utilizando a fórmula da variação das constantes e do fato que $\|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq K_\infty$, para $t \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq c_1 t^{-\alpha} e^{-\beta t} \|u_\varepsilon^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \int_0^t c_1 (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} \|F(u_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0))\|_{X_\varepsilon} ds \\ &\leq c_1 t^{-\alpha} e^{-\beta t} \|u_\varepsilon^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + c_1 C_1(K_\infty) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(c_1 t^{-\alpha} e^{-\beta t} \|u_\varepsilon^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + c_1 C_1(K_\infty) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} ds \right) \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(c_1 C_1(K_\infty) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} ds \right) \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(c_1 C_1(K_\infty) \int_0^t r^{-\alpha} e^{-\beta r} dr \right) \\ &= c_1 C_1(K_\infty) \frac{\Gamma(1-\beta)}{\theta^{1-\beta}} =: C. \end{aligned}$$

□

Denote por $u_\varepsilon := u_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)$ a solução de (2.4) e por $T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)$ o semigrupo não linear associado a (2.4) obtido pela fórmula da variação das constantes

$$T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) = e^{-tA_\varepsilon} u_\varepsilon^0 + \int_0^t e^{-(s-t)A_\varepsilon} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0)) \, ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.31)$$

Corolário 2.2.7. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2.6 o C_0 -semigrupo $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ é ponto dissipativo.*

Teorema 2.2.8 (Atrator Global). *O C_0 -semigrupo $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ associado problema (2.4) possui um atrator global $\mathcal{A}_\varepsilon$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.*

Demonstração. Como $\mathcal{D}(A_\varepsilon)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega_\varepsilon)$, da Proposição 1.2.13 segue que o resolvente de A_ε é compacto. Diante disso, pelo Teorema 1.3.9, segue que o C_0 -semigrupo $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ é compacto. Além disso, do Corolário 2.2.7, o C_0 -semigrupo $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ é ponto dissipativo. Portanto, do Teorema 1.4.10, conclui-se o resultado. $\square$

Teorema 2.2.9. *Sob as hipóteses do Lema 2.2.5, segue que*

$$\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} < \infty.$$

Em outras palavras, o atrator $\mathcal{A}_\varepsilon$ é limitado em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

2.2.2 O Problema no Domínio Limite ($\mathbf{P}_0$)

Seja $X = L^2(\Omega)$. De forma análoga ao caso do operador A_ε , pode-se concluir que o operador A_0 é um operador setorial, logo A_0 gera um semigrupo analítico $\{e^{-tA_0} : t \geq 0\}$ e supondo, ainda, que $\operatorname{Re} \sigma(A_0) > 0$, defini-se as potências fracionárias A_0^α de A_0 e com isso os respectivos espaços de potências fracionárias $X^\alpha := \mathcal{D}(A_0^\alpha)$ com $\alpha \geq 0$ munidos da norma do gráfico.

Observe que $X^1 = \mathcal{D}(A_0) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $X^0 = L^2(\Omega)$ e $X^{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega)$. Assim, o problema ($\mathbf{P}_0$) pode ser escrito como uma equação de evolução do tipo

$$\begin{cases} \dot{u}_0 + A_0 u_0 = F(u_0), t > 0 \\ u_0(0) = u_0^0 \in X^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (2.32)$$

onde $F : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X$ é o operador de Nemitskii associado a f , isto é, $F(u_0(t))x = f(u_0(t, x))$.

Denote por $u_0 := u_0(t, u_0^0)$ a solução de (2.32) e por $T_0(t, u_0^0)$ o semigrupo não-linear associado a (2.32) obtido pela fórmula da variação das constantes

$$T_0(t, u_0^0) = e^{-tA_0} u_0^0 + \int_0^t e^{-(s-t)A_0} F(T_0(s, u_0^0)) \, ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.33)$$

O C_0 -semigrupo $\{T_0(t, u_0^0) : t \geq 0\}$ associado problema (2.32) possui um atrator global $\mathcal{A}_0$ em $X^{\frac{1}{2}}$.

CAPÍTULO 3

TEORIA LINEAR

Neste capítulo propõe-se analisar o comportamento das partes lineares dos operadores. Em outras palavras, veremos que o resolvente e espectro do operador A_ε , $\varepsilon \in [0, 1)$, convergem para o resolvente e para o espectro do operador limite, A_0 , no domínio sem buraco, respectivamente (veja [7, 8, 9, 10, 11] para outros exemplos em outras abordagens). E, ainda, com a convergência dos operadores resolventes será possível obter estimativas sobre o comportamento dos semigrupos lineares que serão essenciais para o análise da dinâmica não linear.

3.1 Convergência dos Resolventes

O objetivo desta seção é obter a convergência do resolvente do operador A_ε para o resolvente do operador A_0 (segundo o feito em [9]) e obter estimativas para tais convergências.

Antes de começarmos a comparar os operadores resolventes de A_ε e A_0 apresentamos alguns resultados que serão necessários para provar o resultado.

Para $\varepsilon \in [0, 1]$, considere a forma sesquilinear $\sigma_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \times X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) := (A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (V u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

As seguintes estimativas são satisfeitas:

$$|\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)| \leq \vartheta_2 \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \frac{\vartheta_0}{2} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 - K \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2, \quad (3.2)$$

onde a constante $\vartheta_2 > 0$ e a constante $K < \infty$ (Ver [12], Seção 5.6). Como A_ε é um operador elíptico, podemos escolher $K = 0$, assim a desigualdade (3.2) é reescrita da seguinte maneira

$$\operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \frac{\vartheta_0}{2} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2. \quad (3.3)$$

Uma vez que o operador A_ε , $\varepsilon \in [0, 1)$, é setorial (Lema 2.2.1), existem constantes $\phi_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $M_1 > 0$, tais que

$$S_{0,\phi_1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi_1 \leq |\arg \lambda| \leq \pi, \lambda \neq 0\} \subset \rho(A_\varepsilon) \quad (3.4)$$

e

$$\|(A_\varepsilon - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \leq \frac{M_1}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in S_{0, \phi_1}. \quad (3.5)$$

E, ainda, observe que

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon(A_\varepsilon - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} &= \|((- \lambda + A_\varepsilon) + \lambda)(A_\varepsilon - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\ &\leq \|I\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} + \|\lambda(A_\varepsilon - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\ &\leq 1 + M_1, \quad \forall \lambda \in S_{0, \phi_1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Além disso, podemos definir o operador e^{-tA_ε} , pela seguinte fórmula integral (integral de Dunfort - Veja Seção 2.1 em [26]) para $t > 0$:

$$e^{-tA_\varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-t\lambda} (A_\varepsilon - \lambda)^{-1} d\lambda,$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e Γ é a fronteira, orientada positivamente, percorrendo de $\infty e^{-i\phi_1}$ a $\infty e^{i\phi_1}$, do setor

$$\Sigma_{\phi_1} = \{\lambda : 0 \leq |\arg \lambda| \leq \phi_1\}, \quad \phi_1 \in (0, \frac{\pi}{2}). \quad (3.7)$$

Aliás, $\{e^{-tA_\varepsilon} : t \geq 0\}$ é o semigrupo analítico gerado por $-A_\varepsilon$ (Teorema 1.2.8).

A seguir, vejamos alguns resultados com respeito a imagem numérica da forma sesquilinear σ_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$.

Lema 3.1.1. *A seguinte estimativa é válida:*

$$|\operatorname{Im} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)| \leq \frac{4\vartheta_2}{\vartheta_0} \left(\operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \frac{\vartheta_0}{4} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 \right),$$

para todo $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Da continuidade, segue por (3.1), que

$$|\operatorname{Im} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)| \leq |\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)| \leq \vartheta_2 \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2. \quad (3.8)$$

Da desigualdade (3.3), obtemos

$$\vartheta_2 \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \frac{4\vartheta_2}{\vartheta_0} \operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \vartheta_2 \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 = \frac{4\vartheta_2}{\vartheta_0} \left(\operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \frac{\vartheta_0}{4} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 \right). \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.8), o resultado segue. $\square$

Pelo lema anterior, conclui-se que a imagem numérica da forma sesquilinear σ_ε está contida no seguinte setor

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{4\vartheta_2}{\vartheta_0} \operatorname{Re} \lambda \right\}.$$

Em vista disso, se denotarmos por $\kappa_0 = \frac{4\vartheta_2}{\vartheta_0}$, definimos

$$\phi_0 := \arctan \kappa_0 \quad \left(0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}\right),$$

e escolhemos ϕ_1 tal que $\phi_0 < \phi_1 < \frac{\pi}{2}$ e, assim, estabelecemos os setores S_{0,ϕ_1} e Σ_{ϕ_1} em (3.4) e (3.7) com tal ϕ_1 .

Lema 3.1.2. *Existe uma constante $\kappa_1 > 0$, independente de ε e de λ , tal que a seguinte estimativa é válida:*

$$|\lambda| \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 + \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \kappa_1 \left| \lambda \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 - \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \right|,$$

para todo $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e $\lambda \in S_{0,\phi_1}$.

Demonstração. Inicialmente, observe que para $u_\varepsilon \equiv 0$ a estimativa é satisfeita, assim suponha, sem perda de generalidade, que $u_\varepsilon \neq 0$, e desse modo, defina

$$\chi(u_\varepsilon) := \frac{\frac{\vartheta_0}{4} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2}{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2} \quad \text{e} \quad \zeta(u_\varepsilon) := \frac{\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2}.$$

Considere, ainda, o seguinte setor Σ_{ϕ_0} , com vértice em $\chi(u_\varepsilon)$, dado por

$$\Sigma_{\phi_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \chi(u_\varepsilon))| \leq \phi_0\}.$$

Observe que,

$$\zeta(u_\varepsilon) - \chi(u_\varepsilon) = \frac{\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \frac{\vartheta_0}{4} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2}{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2}. \quad (3.10)$$

Tomando as partes real e imaginária em (3.10), obtemos

$$\operatorname{Re}(\zeta(u_\varepsilon) - \chi(u_\varepsilon)) = \frac{\operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \frac{\vartheta_0}{4} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2}{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2}, \quad (3.11)$$

e

$$\operatorname{Im}(\zeta(u_\varepsilon) - \chi(u_\varepsilon)) = \frac{\operatorname{Im} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2}. \quad (3.12)$$

Combinando o Lema 3.1.1 com as desigualdades (3.11) e (3.12), segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\zeta(u_\varepsilon) - \chi(u_\varepsilon)) &= \frac{\operatorname{Im} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2} \leq \frac{|\operatorname{Im} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)|}{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2} \\ &\leq \kappa_0 \frac{\operatorname{Re} \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \frac{\vartheta_0}{4} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2}{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2} = \kappa_0 \operatorname{Re}(\zeta(u_\varepsilon) - \chi(u_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Deste modo, segue-se

$$|\arg(\zeta(u_\varepsilon) - \chi(u_\varepsilon))| = \left| \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(\zeta(u_\varepsilon) - \chi(u_\varepsilon))}{\operatorname{Re}(\zeta(u_\varepsilon) - \chi(u_\varepsilon))} \right) \right| \leq \arctan \kappa_0 = \phi_0.$$

Assim, $\zeta(u_\varepsilon) \in \Sigma_{\phi_0}$.

Para $\lambda \in S_{0,\phi_1}$, tem-se (Veja Figura 3.1)

$$\begin{aligned} d(\lambda, \Sigma_{\phi_0}) &= \inf \{|\lambda - \xi| : \xi \in \Sigma_{\phi_0}\} \\ &\geq d(\lambda, \chi(u_\varepsilon)) = |\lambda| \sin(\phi_1 - \phi_0) + \chi(u_\varepsilon) \sin(\phi_0). \end{aligned}$$

Tome $\kappa_1 = \left(\min \left\{ \sin(\phi_1 - \phi_0), \frac{\vartheta_0}{4} \sin(\phi_0) \right\} \right)^{-1}$, e assim

$$\begin{aligned} \left| \lambda \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 - \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \right| &= \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 |\lambda - \zeta(u_\varepsilon)| \\ &\geq \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 d(\lambda, S_{\chi(u_\varepsilon), \phi_0}) \\ &\geq \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 |\lambda| \sin(\phi_1 - \phi_0) + \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 \chi(u_\varepsilon) \sin(\phi_0) \\ &\geq \sin(\phi_1 - \phi_0) \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 |\lambda| + \frac{\vartheta_0}{4} \sin(\phi_0) \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 \\ &\geq \frac{1}{\kappa_1} \left(|\lambda| \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 + \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\lambda| \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 + \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 \leq \kappa_1 \left| \lambda \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 - \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \right|.$$

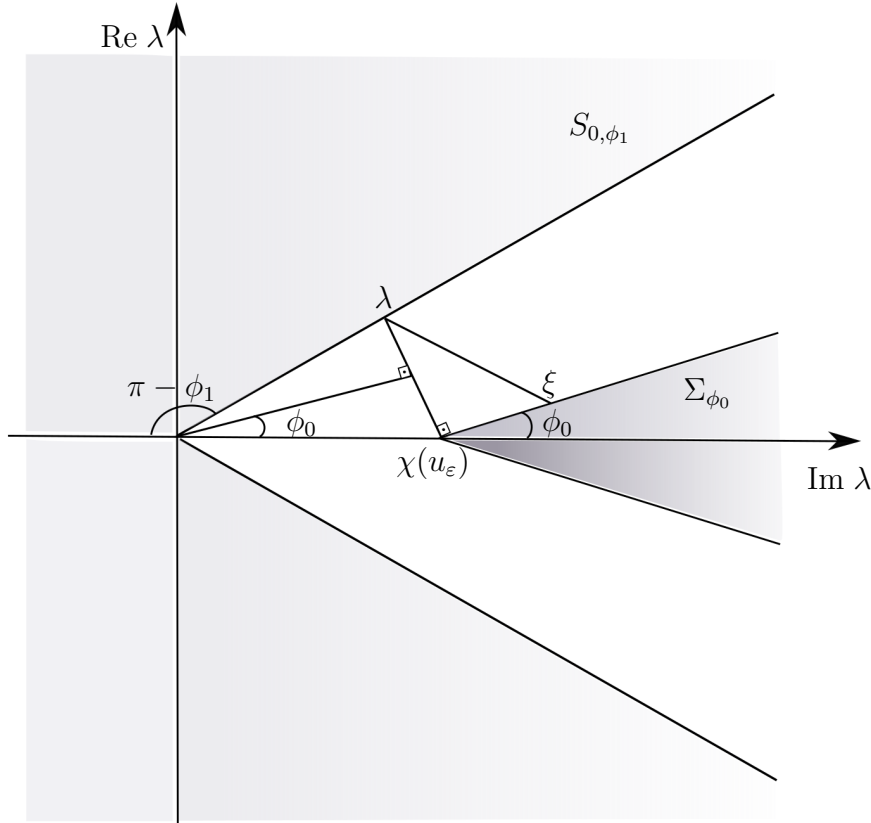


Figura 3.1: Representação dos setores S_{0,ϕ_1} e Σ_{ϕ_0} .

□

Corolário 3.1.3. Para $\lambda \in S_{0,\phi_1}$, a seguinte estimativa vale:

$$|\lambda| \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 + \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \kappa_1 \left| ((A_\varepsilon - \lambda) u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{X_\varepsilon} \right|, \quad u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Além disso, $S_{0,\phi_1} \subset \rho(A_\varepsilon)$, e as desigualdades são satisfeitas:

$$\|(A_\varepsilon - \lambda)^{-1} f\|_{X_\varepsilon} \leq \frac{\kappa_1}{|\lambda|} \|f\|_{X_\varepsilon}, \quad (3.14)$$

$$\|(A_\varepsilon - \lambda)^{-1} f\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\kappa_1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \|f\|_{X_\varepsilon}, \quad (3.15)$$

$$\|A_\varepsilon (A_\varepsilon - \lambda)^{-1} f\|_{X_\varepsilon} \leq (1 + \kappa_1) \|f\|_{X_\varepsilon}, \quad (3.16)$$

para todo $f \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e $\lambda \in S_{0,\phi_1}$.

Demonstração. Para $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, da definição de σ_ε , segue que

$$\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - \lambda \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 = (A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{X_\varepsilon} - \lambda (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{X_\varepsilon} = ((A_\varepsilon - \lambda) u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{X_\varepsilon}. \quad (3.17)$$

Substituindo a igualdade obtida em (3.17) no Lema 3.1.2, segue a desigualdade (3.13).

Dado $\lambda \in S_{0,\phi_1}$ e $f \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, existe $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$ dado por $w_\varepsilon = (A_\varepsilon - \lambda)^{-1} f$. Para $w_\varepsilon = u_\varepsilon$ em (3.13) e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|\lambda| \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 + \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \kappa_1 \left| ((A_\varepsilon - \lambda) w_\varepsilon, w_\varepsilon)_{X_\varepsilon} \right| = \kappa_1 \left| (f, w_\varepsilon)_{X_\varepsilon} \right| \leq \kappa_1 \|f\|_{X_\varepsilon} \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}. \quad (3.18)$$

Logo,

$$\|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 \leq \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \kappa_1 \|f\|_{X_\varepsilon} \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}.$$

Portanto, $\|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \leq \kappa_1 \|f\|_{X_\varepsilon}$, e consequentemente, $\lambda \in \rho(A_\varepsilon)$.

Por fim, segue de (3.18), que

$$\begin{aligned} |\lambda| \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} &\leq \kappa_1 \|f\|_{X_\varepsilon}, \\ \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2 &\leq \kappa_1 \|f\|_{X_\varepsilon} \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \leq \frac{\kappa_1^2}{|\lambda|} \|f\|_{X_\varepsilon}^2, \\ \|A_\varepsilon w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} &= \|f + \lambda w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \leq |\lambda| \|w_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} + \|f\|_{X_\varepsilon} \leq (1 + \kappa_1) \|f\|_{X_\varepsilon}, \end{aligned}$$

isto é, obtemos as desigualdades (3.14), (3.15) e (3.16). $\square$

Lema 3.1.4 ([9], Lema 2.1). Para qualquer função $u \in H^1(\Omega)$ a seguinte estimativa vale:

$$\|u\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.19)$$

onde a constante C independe de ε e de u .

Demonstração. Para $0 < R_1 < R_2$ sejam as bolas B_{R_1} e B_{R_2} centradas em x_0 e de raios R_1 e R_2 , respectivamente.

Como $\omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos as seguintes inclusões:

$$\omega_\varepsilon \subset B_{\varepsilon R_1} \subset B_{R_1} \subset B_{R_2}.$$

Seja $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um função *cut-off* de classe C^∞ satisfazendo:

$$\chi(B_{R_1}) = 1 \text{ e } \chi(\Omega \setminus B_{R_2}) = 0.$$

Defina a seguinte função $v := \chi u$. Como $\omega_\varepsilon \subset B_{R_1}$, então $v = \chi u = u$ em ω_ε , e portanto

$$\|u\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 = \int_{\omega_\varepsilon} |u|^2 dx = \int_{\omega_\varepsilon} |\chi u|^2 dx = \int_{\omega_\varepsilon} |v|^2 dx = \|v\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2.$$

Para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ denotemos por $r = |x|$ e $\varphi = \frac{x}{r} \in S^{n-1}$, onde S^{n-1} é a esfera de $\mathbb{R}^n$ $(n-1)$ -dimensional. Então a função v é uma função de r e φ , onde $v = v(x) = v(r, \varphi)$. Logo, para $R > R_2$, temos

$$|v(r, \varphi)|^2 = \left| \int_R^r \frac{dv}{dr}(t, \varphi) dt \right|^2 = \left| \int_r^R t^{-\frac{n+1}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv}{dr}(t, \varphi) dt \right|^2.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais, aplicada as funções $t^{-\frac{n+1}{2}}$ e $t^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv}{dr}(t, \varphi)$, temos

$$\left| \int_r^R t^{-\frac{n+1}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{dv}{dr}(t, \varphi) dt \right|^2 \leq \left| \int_r^R t^{-n+1} dt \right| \left| \int_r^R t^{n-1} \left(\frac{dv}{dr}(t, \varphi) \right)^2 dt \right|. \quad (3.20)$$

Integrando $|v|^2$ sobre ω_ε , em relação as variáveis r e φ , temos:

$$\int_{\omega_\varepsilon} |v|^2 dx = \int_{S^{n-1}} d\varphi \int_0^{R_1\varepsilon} r^{n-1} |v|^2 dr.$$

Portanto, segue de (3.20), que

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\varepsilon} |v|^2 dx &\leq \int_{S^{n-1}} d\varphi \int_0^{R_1\varepsilon} r^{n-1} \int_r^R t^{-n+1} dt \int_r^R t^{n-1} \left(\frac{dv}{dr}(t, \varphi) \right)^2 dt dr \\ &\leq \int_0^{R_1\varepsilon} r^{n-1} dr \int_r^R t^{-n+1} dt \int_{S^{n-1}} d\varphi \int_r^R t^{n-1} \left(\frac{dv}{dr}(t, \varphi) \right)^2 dt \\ &\leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_0^{R_1\varepsilon} r^{n-1} dr \int_r^R t^{-n+1} dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \int_0^{R_1\varepsilon} r^{n-1} dr \int_r^R t^{-n+1} dt &= \frac{1}{-n+2} \int_0^{R_1\varepsilon} r^{n-1} (R^{-n+2} - r^{-n+2}) dr \\ &= \frac{1}{-n+2} \int_0^{R_1\varepsilon} R^{-n+2} r^{n-1} - r dr \\ &= \frac{1}{-n+2} \left(\frac{R^{-n+2} R_1^n}{n} \varepsilon^n - \frac{R_1^2}{2} \varepsilon^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{-n+2} \left(\frac{R^{-n+2} R_1^n}{n} \varepsilon^2 - \frac{R_1^2}{2} \varepsilon^2 \right) \\ &= \left(\frac{R^{-n+2} R_1^n}{-n^2 + 2n} - \frac{R_1^2}{2n} \right) \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Assim, segue de (3.21), que

$$\int_{\omega_\varepsilon} |v|^2 dx \leq C_1 \varepsilon^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.22)$$

onde $C_1 = \left(\frac{R^{-n+2}R_1^n}{-n^2 + 2n} - \frac{R_1^2}{2n} \right)$.

Da Lei do Paralelogramo, temos que para $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2$

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\nabla(\chi u)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\nabla\chi + \chi\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= 2 \left(\|u\nabla\chi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\chi\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \|u\nabla\chi - \chi\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2 \left(\|u\nabla\chi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\chi\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

E uma vez que a função χ é limitada em Ω , temos

$$\|u\nabla\chi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u\nabla\chi|^2 dx = \int_{\Omega} |u|^2 |\nabla\chi|^2 dx \leq C_\chi^1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

e

$$\|\chi\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\chi\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} |\chi|^2 |\nabla u|^2 dx \leq C_\chi^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Então,

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left(C_\chi^1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\chi^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (3.23)$$

onde $C_2 = 2 \max \{C_\chi^1, C_\chi^2\}$.

Assim, em (3.22) utilizando o obtido em (3.23), segue que

$$\int_{\omega_\varepsilon} |v|^2 dx \leq C_1 \varepsilon^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 C_2 \varepsilon^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Portanto, a desigualdade acima implica em (3.19), isto é,

$$\|u\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

onde $C = (C_1 C_2)^{\frac{1}{2}}$. □

Lema 3.1.5 ([9], Lema 2.2). *Para qualquer função $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ a seguinte estimativa vale:*

$$\|v\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad (3.24)$$

onde a constante C independe de ε e de v .

Demonstração. Sejam $Q \subset \Omega$ um disco fixado, tal que $\bar{\omega} \subset Q$ e $V_{x_0} \subset \Omega$ uma vizinhança de x_0 . Em V_{x_0} considere a seguinte mudança de coordenadas $y = \varepsilon^{-1}(x - x_0)$. Então,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\partial\omega_\varepsilon} |v(x)|^2 dS(x) \\ &= \varepsilon^{n-1} \int_{\partial\omega} |v(x_0 + \varepsilon y)|^2 dS(y) = \varepsilon^{n-1} \|v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\partial\omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como as funções de $H^1(Q \setminus \omega)$ pertencem ao espaço $L^2(\partial\omega)$, segue do Teorema 1.1.14, que existe constante $C_1 > 0$, tal que

$$\|v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\partial\omega)}^2 \leq C_1 \|v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{H^1(Q \setminus \omega)}^2,$$

logo, segue de (3.25), que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)}^2 &\leq C_1 \varepsilon^{n-1} \|v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{H^1(Q \setminus \omega)}^2 \\ &= C_1 \varepsilon^{n-1} \left(\|v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(Q \setminus \omega)}^2 + \|\nabla v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(Q \setminus \omega)}^2 \right) \\ &\leq C_1 \varepsilon^{n-1} \left(\|v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(Q)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Considere em Q a seguinte mudança de coordenadas $z = \varepsilon y \in \varepsilon Q$. Assim,

$$\begin{aligned} \|v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_Q |v(x_0 + \varepsilon y)|^2 dy \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{\varepsilon Q} |v(x_0 + z)|^2 dz = \varepsilon^{-n} \|v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

e

$$\begin{aligned} \|\nabla v(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(Q)}^2 &= \int_Q |\nabla v(x_0 + \varepsilon y)|^2 dy \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{\varepsilon Q} \varepsilon^2 |\nabla v(x_0 + z)|^2 dz = \varepsilon^{-n+2} \|\nabla v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)}^2 &\leq C_1 \varepsilon^{n-1} \left(\varepsilon^{-n} \|v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 + \varepsilon^{-n+2} \|\nabla v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 \right) \\ &= C_1 \varepsilon^{-1} \|v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 + C_1 \varepsilon \|\nabla v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 \\ &\leq C_1 \varepsilon^{-1} \|v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 + C_1 \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Usando $\chi = \chi(x)$ uma função *cut-off* tal como no Lema 3.1.4 (isto é, é igual a 1 em uma vizinhança fixa de ω_ε e 0 fora de uma vizinhança maior (que está em Ω_ε)), temos $v = \chi v$. Logo, pelo Lema 3.1.4, temos

$$\|v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 \leq C_2 \varepsilon^2 \|\nabla(v\chi)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq C_3 \varepsilon^2 \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

Assim, de (3.29) temos

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)}^2 &\leq C_1 \varepsilon^{-1} \|v(x_0 + \cdot)\|_{L^2(\varepsilon Q)}^2 + C_1 \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &\leq C_1 C_3 \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + C_1 \frac{C_3}{C_2} \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = \left(C_1 C_3 + C_1 \frac{C_3}{C_2} \right) \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|v\|_{L^2(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

onde $C = \left(C_1 C_3 + C_1 \frac{C_3}{C_2} \right)^{\frac{1}{2}}$. □

O resultado a seguir é uma variação do Teorema 1.2 em [9].

Teorema 3.1.6. Para $\varepsilon \in (0, 1]$ e $\lambda \in S_{0, \phi_1}$ as seguintes estimativas são válidas:

$$\|(A_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (A_0 - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega_\varepsilon))} \leq \begin{cases} C(1 + |\lambda|)\varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C(1 + |\lambda|)\varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C(1 + |\lambda|)\varepsilon, & n \geq 5 \end{cases},$$

onde a constante C independe dos parâmetros ε e λ .

Demonstração. Para $f \in L^2(\Omega)$ uma função arbitrária, temos que as funções $u_\varepsilon := (A_\varepsilon - \lambda)^{-1}f$ e $u_0 := (A_0 - \lambda)^{-1}f$ pertencem aos espaços $H^2(\Omega_\varepsilon)$ e $H^2(\Omega)$ e são soluções dos seguintes problemas de fronteira

$$\begin{cases} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(x)u_\varepsilon - \lambda u_\varepsilon = f, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{cases} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + V(x)u_0 - \lambda u_0 = f, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.31)$$

respectivamente.

Para $x \in \Omega$, consideremos a seguinte matriz

$$A(x) := \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Seja Q uma matriz tal que $Q^T(A(x_0))Q = I$, onde I é a matriz identidade e defina o seguinte conjunto $E_R(x_0) = \{x \in \Omega : |Q(x - x_0)| < R\}$.

Observação 3.1.7. Como A é simétrica, semi-limitada inferiormente e uniformemente limitada em $x \in \bar{\Omega}$, logo Q também é simétrica, semi-limitada inferiormente e uniformemente limitada em $x \in \bar{\Omega}$. Assim, existe constante C_Q , tal que

$$0 < C_Q|x| \leq |Q(x)| \leq (C_Q)^{-1}|x|, \quad (3.32)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Consideremos, ainda, a seguinte função $W_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$W_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})|Q(x-x_0)|^{n-2}} + \frac{2^{n-2}}{2^{n-2}-1} & \text{em } E_{2\varepsilon R}(x_0) \setminus E_{\varepsilon R}(x_0), \\ 1 & \text{em } E_{\varepsilon R}(x_0), \\ 0 & \text{em } \Omega \setminus E_{2\varepsilon R}(x_0). \end{cases} \quad (3.33)$$

Seja $R > 0$ fixado tal que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\omega_\varepsilon \subset E_{\varepsilon R}(x_0)$.

Considere $v_\varepsilon := u_\varepsilon - (1 - W_\varepsilon)u_0$. A seguir, escrevemos a identidade integral correspondente para o problema (3.30), tomando v_ε como uma função teste:

$$\begin{aligned} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) \bar{v}_\varepsilon \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon \bar{v}_\varepsilon \, dx - \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \bar{v}_\varepsilon \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v}_\varepsilon \, dx \\ \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_\varepsilon}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon} V u_\varepsilon \bar{v}_\varepsilon \, dx - \lambda \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \bar{v}_\varepsilon \, dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v}_\varepsilon \, dx. \end{aligned}$$

Reescrevendo em termos do produto interno em $L^2(\Omega_\varepsilon)$, temos

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (V u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - \lambda (u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = (f, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.34)$$

Analogamente para o problema (3.31), obtemos

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} + (V u_0, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega)} - \lambda (u_0, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega)} = (f, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega)}. \quad (3.35)$$

Calculando a diferença das igualdades (3.34) e (3.35), segue que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial (u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (V(u_\varepsilon - u_0), v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - \lambda ((u_\varepsilon - u_0), v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = 0,$$

em outras palavras,

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + (V v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - \lambda \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_0 W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - (V u_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \lambda (u_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Observe que a identidade obtida em (3.36) pode ser escrita da seguinte forma

$$\sigma_\varepsilon(v_\varepsilon, v_\varepsilon) - \lambda \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = S_1 + S_2 + S_3, \quad (3.37)$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} W_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - (V u_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \lambda (u_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \\ S_2 &= - \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)) u_0 \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \\ S_3 &= - \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x_0) u_0 \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Observação 3.1.8. Considere a seguinte função $h : E_{2\varepsilon R}(x_0) \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 1$ e seja $V = [h] = \mathbb{R}$. Assim, podemos escrever

$$L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0)) = V \oplus V^\perp,$$

$$\text{onde } V^\perp = \left\{ v^\perp \in L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0)) : (t, v^\perp)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} = \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} t v^\perp \, dx = 0, \forall t \in V \right\}.$$

Então para $w \in L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))$, temos: $w = t + v^\perp$. E,

$$(w, t)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} = (t, t)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} + (v^\perp, t)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))},$$

o que implica

$$t \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} w \, dx = t^2 |E_{2\varepsilon R}(x_0)|.$$

Para $t \neq 0$, temos

$$t = \frac{1}{|E_{2\varepsilon R}(x_0)|} \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} w \, dx =: \langle w \rangle.$$

Consideremos, então, a seguinte decomposição de u_0 :

$$u_0 = \langle u_0 \rangle + u_0^\perp, \quad (3.38)$$

onde

$$\langle u_0 \rangle = \frac{1}{|E_{2\varepsilon R}(x_0)|} \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 \, dx \quad (3.39)$$

e a função $u_0^\perp \in H^2(\Omega)$ satisfaz a seguinte condição

$$\int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0^\perp \, dx = 0. \quad (3.40)$$

Usando a decomposição de u_0 dada em (3.38) podemos escrever S_3 da seguinte forma: $S_3 = S_4 + S_5$, onde

$$\begin{aligned} S_4 &= -\langle u_0 \rangle \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x_0) \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \\ S_5 &= - \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x_0) u_0^\perp \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Lema 3.1.9 ([9], Lema 3.1). *A seguinte estimativa vale:*

$$\|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C\varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.41)$$

onde a constante C independe de ε , $u_0^\perp$ e f .

Demonstração. Em $E_{2\varepsilon R}(x_0)$ considere a mudança de coordenadas $y = \varepsilon^{-1}(x - x_0)$. Então,

$$\|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 = \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |u_0^\perp|^2 \, dx = \varepsilon^n \int_{E_{2R}(0)} |u_0^\perp(\varepsilon y)|^2 \, dy = \varepsilon^n \|u_0^\perp(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(E_{2R}(0))}^2. \quad (3.42)$$

Da condição (3.40), para a função u_0 , temos

$$\int_{E_{2R}(0)} u_0^\perp(\varepsilon y) \, dy = 0.$$

Assim, da Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\|u_0^\perp(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(E_{2R}(0))} \leq C_1 \|\nabla u_0^\perp(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(E_{2R}(0))}. \quad (3.43)$$

Substituindo (3.43) em (3.42), obtemos

$$\|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 \leq C_1^2 \varepsilon^n \|\nabla u_0^\perp(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(E_{2R}(0))}^2. \quad (3.44)$$

Em $E_{2R}(0)$ fazendo a seguinte mudança de variáveis, $z = \varepsilon y + x_0$, temos

$$\|\nabla u_0^\perp(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(E_{2R}(0))}^2 = \int_{E_{2R}(0)} |\nabla u_0^\perp(\varepsilon \cdot)|^2 \, dy = \varepsilon^{-n} \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} \varepsilon^2 |\nabla u_0^\perp|^2 \, dz = \varepsilon^{-n+2} \|\nabla u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2.$$

Assim, reescrevendo (3.44), obtemos

$$\|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 \leq C_1^2 \varepsilon^n \varepsilon^{-n+2} \|\nabla u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 = C_1^2 \varepsilon^2 \|\nabla u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2. \quad (3.45)$$

Pelo Lema 3.1.4, temos

$$\|\nabla u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C_2 \varepsilon \|\nabla u_0^\perp\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.46)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_0^\perp\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|\nabla u_0^\perp\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u_0^\perp\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|u_0^\perp\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_0^\perp\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u_0^\perp\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_0^\perp\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Assim, segue de (3.46) que

$$\|\nabla u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 \leq C_2^2 \varepsilon^2 \|u_0^\perp\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (3.47)$$

E, ainda, da decomposição $u_0 = \langle u_0 \rangle + u_0^\perp$ e do Lema 1.1.15, segue que

$$\|u_0^\perp\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.48)$$

Substituindo (3.48) em (3.47), obtemos

$$\|\nabla u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 \leq C_2^2 \varepsilon^2 \left(C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (3.49)$$

Portanto, segue de (3.45) utilizando a estimativa obtida em (3.49), que

$$\|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 \leq C_1^2 \varepsilon^2 \left(C_2^2 \varepsilon^2 C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

o que implica

$$\|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $(C = C_1^2 C_2^2 C_3)^{\frac{1}{2}}$. □

Lema 3.1.10 ([9], Lema 3.2). *Para $\langle u_0 \rangle$ as seguintes estimativas valem:*

$$\begin{aligned} |\langle u_0 \rangle| &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n = 3 \\ |\langle u_0 \rangle| &\leq C |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n = 4 \\ |\langle u_0 \rangle| &\leq C \varepsilon^{-\frac{n}{2}+2} \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n \geq 5 \end{aligned}$$

onde a constante C independe de ε , u_0 e f .

Demonstração. Como $\omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, considere $\delta > 0$ independente de $\varepsilon > 0$ tal que satisfaça as seguintes inclusões:

$$\omega_\varepsilon \subset E_{2\varepsilon R}(x_0) \subset B_\delta \subset B_{2\delta} \subset \Omega.$$

Sejam $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função *cut-off* dada por

$$\chi(B_\delta) = 1 \text{ e } \chi(\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}) = 0,$$

e uma função $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\zeta(y) = \begin{cases} 1 & \text{em } E_{2R}(x_0), \\ 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus E_{2R}(x_0). \end{cases}$$

Observação 3.1.11. Dado $x \in \Omega$, temos que $\frac{x}{\varepsilon} \in E_{2R}(x_0)$ se, e somente se, $|Q(\frac{x}{\varepsilon} - x_0)| < 2R = |Q(x - \varepsilon x_0)| < 2\varepsilon R$. Logo,

$$\begin{aligned} |Q(x - x_0)| &= |Q(x - x_0 + \varepsilon x_0 - \varepsilon x_0)| \\ &\leq |Q(x - \varepsilon x_0)| + |Q(\varepsilon x_0 - x_0)| \\ &< 2\varepsilon R + (\varepsilon - 1)|Q(x_0)| < 2\varepsilon R. \end{aligned}$$

Então, $x \in E_{2\varepsilon R}(x_0)$.

Segue do fato que $E_{2\varepsilon R}(x_0) \subset B_\delta$ e da Observação 3.1.11, que

$$\int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 dx = \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} \chi(x) u_0 dx = \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} \chi(x) u_0 \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) u_0 \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx. \quad (3.50)$$

Considere ainda, a solução da equação $\Delta_y w = \zeta(y)$ em $\mathbb{R}^n$, dada por

$$w(y) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(s) \frac{ds}{|s-y|^{n-2}},$$

onde σ_n é a área da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$.

Vamos agora obter uma estimativa para a função w . Da definição da função ζ , temos

$$w(y) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{E_{2R}(x_0)} \frac{ds}{|s-y|^{n-2}}. \quad (3.51)$$

Observe que,

$$-\frac{1}{|s-y|^{n-2}} \leq \frac{1}{1+|y|^{n-2}}. \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) em (3.51), obtemos

$$w(y) \leq \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{E_{2R}(x_0)} \frac{1}{1+|y|^{n-2}} ds = \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{1+|y|^{n-2}} |E_{2R}(x_0)| = \frac{C_1}{1+|y|^{n-2}},$$

onde $C_1 = \frac{|E_{2R}(x_0)|}{(n-2)\sigma_n}$ (que é independente de y).

Resumidamente,

$$w(y) \leq \frac{C_1}{1+|y|^{n-2}}. \quad (3.53)$$

Para $y = \frac{x}{\varepsilon}$, temos

$$\zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \Delta_{\frac{x}{\varepsilon}} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^2 \Delta_x w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (3.54)$$

Substituindo (3.54) em (3.50), obtemos

$$\int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 dx = \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) u_0 \Delta_x w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{|x| < t} \chi(x) u_0 \Delta_x w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx. \quad (3.55)$$

Observe que, pela Fórmula de Green, temos que

$$\int_{|x| < t} \chi(x) u_0 \Delta_x w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{|x|=t} \left(\chi(x) u_0 \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial \chi(x) u_0}{\partial \nu} \right) dS + \int_{|x| < t} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x (\chi(x) u_0) dx.$$

Como $\chi(x) = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{|x|=t} \left(\chi(x) u_0 \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial \chi(x) u_0}{\partial \nu} \right) dS = 0,$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{|x| < t} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x (\chi(x) u_0) dx = \int_{|x| < 2\delta} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x (\chi(x) u_0) dx.$$

Logo, tendo em vista o obtido acima, para (3.55) obtemos

$$\int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 dx = \varepsilon^2 \int_{|x| < 2\delta} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x (\chi(x) u_0) dx.$$

Da Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 dx \right| &= \varepsilon^2 \left| \int_{|x| < 2\delta} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x (\chi(x) u_0) dx \right| \\ &\leq \varepsilon^2 \left\| w\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} \left\| \Delta (\chi u_0) \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \left\| \Delta (\chi u_0) \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} &= \left\| \chi \Delta u_0 + 2 \nabla \chi \nabla u_0 + u_0 \Delta \chi \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} \\ &\leq \left\| \chi \Delta u_0 \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} + 2 \left\| \nabla \chi \nabla u_0 \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} + \left\| u_0 \Delta \chi \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} \\ &\leq 2 \left(\left\| \chi \Delta u_0 \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} + \left\| \nabla \chi \nabla u_0 \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} + \left\| u_0 \Delta \chi \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} \right). \end{aligned}$$

Segue do fato que $\chi(x) \leq 1$ em $B_{2\delta}$ e do Lema 1.1.15, que

$$\begin{aligned} \|\Delta(\chi u_0)\|_{L^2(|x|<2\delta)} &\leq 2 \left(\|\Delta u_0\|_{L^2(|x|<2\delta)}^2 + \|\nabla u_0\|_{L^2(|x|<2\delta)}^2 + \|u_0\|_{L^2(|x|<2\delta)}^2 \right) \\ &= 2 \|u_0\|_{H^2(|x|<2\delta)}^2 \leq 2 \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Aplicando (3.57) em (3.56), tem-se

$$\left| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 \, dx \right| \leq C_2 \varepsilon^2 \left\| w \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(|x|<2\delta)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Observe, ainda, que

$$|E_{2\varepsilon R}(x_0)| = |\det Q| \operatorname{Vol}(B(0, 2\varepsilon R)) = (2R)^n |\det Q| \operatorname{Vol}(B(0, 1)) \varepsilon^n,$$

logo

$$\frac{1}{|E_{2\varepsilon R}(x_0)|} \left| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 \, dx \right| \leq \frac{C_3}{\varepsilon^{n-2}} \left\| w \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(|x|<2\delta)} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.58)$$

onde $C_3 = \frac{C_2}{(2R)^n |\det Q| \operatorname{Vol}(B(0, 1))}$.

E, ainda, fazendo a mudança de variáveis $y = \frac{x}{\varepsilon}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| w \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(|x|<2\delta)}^2 &= \int_{|x|<2\delta} \left| w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx = \varepsilon^n \int_{|y|<\frac{2\delta}{\varepsilon}} |w(y)|^2 dy \\ &= \varepsilon^n \left(\int_{|y|\leq 1} |w(y)|^2 dy + \int_{1\leq|y|<\frac{2\delta}{\varepsilon}} |w(y)|^2 dy \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Observe que, da desigualdade (3.53), para $|y| \leq 1$

$$w(y) \leq \frac{C_1}{1 + |y|^{n-2}} \leq C_1, \quad (3.60)$$

e, para $|y| \geq 1$

$$w(y) \leq \frac{C_1}{1 + |y|^{n-2}} \leq \frac{C_1}{|y|^{n-2}}. \quad (3.61)$$

Para a integral $\int_{|y|\leq 1} |w(y)|^2 dy$, pela desigualdade (3.60), segue que

$$\begin{aligned} \int_{|y|\leq 1} |w(y)|^2 dy &\leq \int_{|y|\leq 1} C_1^2 dy = C_1^2 \int_0^1 \int_{\partial B(0,r)} dS dr = C_1^2 \int_0^1 r^{n-1} \int_{\partial B(0,1)} dS dr \\ &= C_1^2 |\partial B(0, 1)| \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{C_1^2 |\partial B(0, 1)|}{n}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Para a integral $\int_{1 \leq |y| < \frac{2\delta}{\varepsilon}} |w(y)|^2 dy$, pela desigualdade (3.61), temos

$$\begin{aligned} \int_{1 \leq |y| < \frac{2\delta}{\varepsilon}} |w(y)|^2 dy &\leq \int_{1 \leq |y| < \frac{2\delta}{\varepsilon}} \frac{C_1^2}{(|y|^{n-2})^2} dy = \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{C_1^2}{(|y|^{n-2})^2} dS dr \\ &= \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \frac{C_1^2}{r^{2n-4}} \int_{\partial B(0,r)} dS dr = C_1^2 \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \frac{r^{n-1}}{r^{2n-4}} \int_{\partial B(0,1)} dS dr \\ &= C_1^2 |\partial B(0,1)| \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \frac{1}{r^{n-3}} dr. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Substituindo (3.62) e (3.63) em (3.59), segue que

$$\left\| w \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)}^2 \leq C_4 \varepsilon^n \left(1 + \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \frac{1}{r^{n-3}} dr \right), \quad (3.64)$$

onde $C_4 = C_1^2 |\partial B(0,1)|$.

- Para $n = 3$, em (3.64), temos

$$\left\| w \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)}^2 \leq C_4 \varepsilon^3 \left(1 + \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} dr \right) = C_4 \varepsilon^3 \left(1 + \frac{2\delta}{\varepsilon} - 1 \right) = C_5 \varepsilon^2, \quad (3.65)$$

onde $C_5 = 2C_4\delta$. E, portanto, substituindo (3.65) em (3.58), segue que

$$|\langle u_0 \rangle| = \frac{1}{|E_{2\varepsilon R}(x_0)|} \left| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 dx \right| \leq \frac{C_3}{\varepsilon} C_5^{\frac{1}{2}} \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} = C_6 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.66)$$

onde $C_6 = C_3 C_5^{\frac{1}{2}}$.

- Para $n = 4$, em (3.64), temos

$$\begin{aligned} \left\| w \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)}^2 &\leq C_4 \varepsilon^4 \left(1 + \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \frac{1}{r} dr \right) = C_4 \varepsilon^4 \left(1 + \ln \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} \right) - \ln 1 \right) \\ &= C_4 \varepsilon^4 (1 + \ln 2\delta - \ln \varepsilon) = C_4 \varepsilon^4 (1 + \ln 2\delta + |\ln \varepsilon|) \\ &\leq C_7 \varepsilon^4 (1 + |\ln \varepsilon|), \end{aligned}$$

onde $C_7 = \max \{(1 + \ln 2\delta), 1\}$.

Observe que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe constante $C_8 > 0$ tal que

$$\varepsilon^4 (1 + |\ln \varepsilon|) \leq C_8 \varepsilon^4 |\ln \varepsilon|,$$

logo

$$\left\| w \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)} \leq (C_7 C_8)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.67)$$

e, portanto, substituindo (3.67) em (3.58), segue que

$$\begin{aligned} |\langle u_0 \rangle| &= \frac{1}{|E_{2\varepsilon R}(x_0)|} \left| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 dx \right| \\ &\leq \frac{C_3}{\varepsilon^2} (C_7 C_8)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} = C_9 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde $C_9 = C_3(C_7 C_8)^{\frac{1}{2}}$.

• Para $n \geq 5$, em (3.64), temos

$$\begin{aligned} \left\| w \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(|x| < 2\delta)}^2 &\leq C_4 \varepsilon^n \left(1 + \int_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \frac{1}{r^{n-3}} dr \right) = C_4 \varepsilon^n \left(1 + \frac{r^{4-n}}{(4-n)} \Big|_1^{\frac{2\delta}{\varepsilon}} \right) \\ &= C_4 \varepsilon^n \left(1 + \frac{(2\delta)^{4-n}}{(4-n)} \varepsilon^{n-4} + \frac{1}{(4-n)} \right) \\ &\leq C_{10} \varepsilon^n (1 + \varepsilon^{n-4}) \leq 2C_{10} \varepsilon^n, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde $C_{10} = \max \left\{ \frac{(5-n)}{(4-n)}, \frac{(2\delta)^{4-n}}{(4-n)} \right\}$. E, portanto, substituindo (3.69) em (3.58), segue que

$$\begin{aligned} |\langle u_0 \rangle| &= \frac{1}{|E_{2\varepsilon R}(x_0)|} \left| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 dx \right| \leq \frac{C_3}{\varepsilon^{n-2}} (2C_{10})^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_{11} \varepsilon^{-\frac{n}{2}+2} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde $C_{11} = C_3(2C_{10})^{\frac{1}{2}}$.

Portanto o resultado segue, tomando $C = \max \{C_6, C_9, C_{11}\}$ em (3.66), (3.68) e (3.70), respectivamente. $\square$

Lema 3.1.12 ([9], Lema 3.3). *Para $u_0 \in H^2(\Omega)$ as seguintes estimativas valem:*

$$\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n = 3 \\ C \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n = 4, \\ C \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n \geq 5 \end{cases}$$

onde a constante C independe de u_0 e ε .

Demonstração. Usando a decomposição de u_0 dada em (3.38), temos

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 &= \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |u_0|^2 dx = \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |\langle u_0 \rangle + u_0^\perp|^2 dx \\ &= \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |\langle u_0 \rangle|^2 dx + \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} 2 \langle u_0 \rangle u_0^\perp dx + \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |u_0^\perp|^2 dx. \end{aligned}$$

Da condição de ortogonalidade (3.40), temos

$$\int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0^\perp dx = 0,$$

logo

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 &= |\langle u_0 \rangle|^2 |E_{2\varepsilon R}(x_0)| + \|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 \\ &= C_1 \varepsilon^n |\langle u_0 \rangle|^2 + \|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2,\end{aligned}\quad (3.71)$$

onde $C_1 = (2R)^n |\det Q| \text{Vol}(B(0, 1))$.

Pelo Lema 3.1.9, temos

$$\|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C_2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.72)$$

• Para $n = 3$, do Lema 3.1.10, segue que

$$|\langle u_0 \rangle| \leq C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.73)$$

Assim, substituindo (3.72) e (3.73) em (3.71), obtemos

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 &\leq C_1 \varepsilon^3 C_3^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2^2 \varepsilon^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= (C_1 C_3^2 \varepsilon^3 + C_2^2 \varepsilon^4) \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_1 C_3^2 + C_2^2) \varepsilon^3 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

logo,

$$\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq (C_1 C_3^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.74)$$

• Para $n = 4$, do Lema 3.1.10, segue que

$$|\langle u_0 \rangle| \leq C_3 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.75)$$

Assim, substituindo (3.72) e (3.75) em (3.71), obtemos

$$\begin{aligned}\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 &\leq C_1 \varepsilon^4 C_3^2 |\ln \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2^2 \varepsilon^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= (C_1 C_3^2 |\ln \varepsilon| + C_2^2) \varepsilon^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_4 (|\ln \varepsilon| + 1) \varepsilon^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

onde $C_4 = \max \{C_1 C_3^2, C_2^2\}$.

Observe que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe constante $C_5 > 0$ tal que

$$(1 + |\ln \varepsilon|) \leq C_5 |\ln \varepsilon|,$$

logo

$$\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq (C_4 C_5)^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.76)$$

• Para $n \geq 5$, do Lema 3.1.10, segue que

$$|\langle u_0 \rangle| \leq C_3 \varepsilon^{-\frac{n}{2}+2} \|f\|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.77)$$

Assim, substituindo (3.72) e (3.77) em (3.71), obtemos

$$\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2 \leq C_1 \varepsilon^n C_3^2 \varepsilon^{-n+4} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2^2 \varepsilon^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = (C_1 C_3^2 + C_2^2) \varepsilon^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

logo,

$$\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq (C_1 C_3^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.78)$$

Portanto, tomando $C = \max \{(C_1 C_3^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}, (C_4 C_5)^{\frac{1}{2}}\}$ em (3.74), (3.76) e (3.78), o resultado segue. $\square$

Lema 3.1.13. A função W_ε satisfaz as seguintes estimativas:

- (1) $0 \leq W_\varepsilon(x) \leq 1, \forall x \in \Omega_\varepsilon;$
- (2) $|\nabla W_\varepsilon(x)| \leq C_1 \varepsilon^{-1}, \forall x \in E_{2\varepsilon R}(x_0);$
- (3) $\|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0) \setminus E_{\varepsilon R}(x_0))} \leq C_2 \varepsilon^{\frac{n}{2}-1}.$

Demonstração. (1) Pela definição de W_ε , basta verificarmos em $E_{2\varepsilon R}(x_0) \setminus E_{\varepsilon R}(x_0)$. Então, para $x \in E_{2\varepsilon R}(x_0) \setminus E_{\varepsilon R}(x_0)$, temos

$$|Q(x - x_0)| < 2\varepsilon R \quad (3.79)$$

e,

$$|Q(x - x_0)| \geq \varepsilon R, \quad (3.80)$$

logo, segue de (3.79), que

$$|Q(x - x_0)|^{n-2} \leq (2\varepsilon R)^{n-2} \iff \frac{1}{(2\varepsilon R)^{n-2}} \leq \frac{1}{|Q(x - x_0)|^{n-2}}.$$

Note que, $\frac{1}{(1 - 2^{n-2})} < 0$, então

$$\frac{1}{(1 - 2^{n-2})|Q(x - x_0)|^{n-2}} \leq \frac{1}{(1 - 2^{n-2})(2\varepsilon R)^{n-2}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(x) &= \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1 - 2^{n-2})|Q(x - x_0)|^{n-2}} + \frac{2^{n-2}}{2^{n-2} - 1} \leq \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1 - 2^{n-2})(2\varepsilon R)^{n-2}} + \frac{2^{n-2}}{2^{n-2} - 1} \\ &= \frac{2^{n-2} - 1}{2^{n-2} - 1} = 1, \end{aligned}$$

isto é, $W_\varepsilon(x) \leq 1$.

Por outro lado, segue de (3.80), que

$$|Q(x - x_0)|^{n-2} \geq (\varepsilon R)^{n-2} \iff \frac{1}{(\varepsilon R)^{n-2}} \geq \frac{1}{|Q(x - M)|^{n-2}}.$$

Como $\frac{1}{(1 - 2^{n-2})} < 0$, então

$$\frac{1}{(1 - 2^{n-2})|Q(x - x_0)|^{n-2}} \geq \frac{1}{(1 - 2^{n-2})(\varepsilon R)^{n-2}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(x) &= \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1 - 2^{n-2})|Q(x - x_0)|^{n-2}} + \frac{2^{n-2}}{2^{n-2} - 1} \geq \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1 - 2^{n-2})(\varepsilon R)^{n-2}} + \frac{2^{n-2}}{2^{n-2} - 1} \\ &= \frac{2^{n-2} - 2^{n-2}}{2^{n-2} - 1} = 0, \end{aligned}$$

isto é, $W_\varepsilon(x) \geq 0$.

(2) Da definição de W_ε , basta verificarmos em $E_{2\varepsilon R}(x_0) \setminus E_{\varepsilon R}(x_0)$. Então, para $x \in E_{2\varepsilon R}(x_0) \setminus E_{\varepsilon R}(x_0)$, temos que

$$|\nabla W_\varepsilon(x)|^2 = \left| \left(\frac{\partial W_\varepsilon(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W_\varepsilon(x)}{\partial x_n} \right) \right|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial W_\varepsilon(x)}{\partial x_i} \right)^2.$$

Para $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_\varepsilon(x)}{\partial x_i} &= \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|Q(x-x_0)|^{n-2}} \right) \\ &= \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \frac{-\frac{\partial}{\partial x_i}(|Q(x-x_0)|^{n-2})}{(|Q(x-x_0)|^{n-2})^2} \\ &= \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \frac{-(n-2)|Q(x-x_0)|^{n-2-1} \frac{\partial}{\partial x_i}(|Q(x-x_0)|)}{(|Q(x-x_0)|^{n-2})^2} \\ &= \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \frac{-(n-2)|Q(x-x_0)|^{n-3} \frac{Q(x_i-x_{0_i})}{|Q(x-x_0)|}}{|Q(x-x_0)|^{2n-4}} \\ &= \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \frac{-(n-2)Q(x_i-x_{0_i})}{|Q(x-x_0)|^{-n+4}} \frac{1}{|Q(x-x_0)|^{2n-4}} \\ &= \frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \frac{-(n-2)Q(x_i-x_{0_i})}{|Q(x-x_0)|^n}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} |\nabla W_\varepsilon(x)|^2 &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\partial W_\varepsilon(x)}{\partial x_i} \right)^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \frac{-(n-2)Q(x_i-x_{0_i})}{|Q(x-x_0)|^n} \right)^2 \\ &= \left(\frac{-(n-2)(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})|Q(x-x_0)|^n} \right)^2 |Q(x-x_0)|^2 \\ &= \left(\frac{-(n-2)(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \right)^2 \frac{1}{|Q(x-x_0)|^{2n-2}}, \end{aligned}$$

o que implica

$$|\nabla W_\varepsilon(x)| = \left(\frac{-(n-2)(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \right) \frac{1}{|Q(x-x_0)|^{n-1}}. \quad (3.81)$$

Da desigualdade (3.80), segue que

$$\frac{1}{|Q(x-x_0)|^{n-1}} \leq \frac{1}{(\varepsilon R)^{n-1}}. \quad (3.82)$$

Substituindo (3.82) em (3.81), obtemos

$$|\nabla W_\varepsilon(x)| \leq \left(\frac{-(n-2)(2\varepsilon R)^{n-2}}{(1-2^{n-2})} \right) \frac{1}{(\varepsilon R)^{n-1}} = C_1 \varepsilon^{-1},$$

onde $C_1 = \frac{-(n-2)2^{n-2}}{(1-2^{n-2})R}.$

(3) Pelo item (2), temos

$$\begin{aligned} \|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0)\setminus E_{\varepsilon R}(x_0))}^2 &= \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)\setminus E_{\varepsilon R}(x_0)} |\nabla W_\varepsilon|^2 \, dx \leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |\nabla W_\varepsilon|^2 \, dx \\ &\leq C_1^2 \varepsilon^{-2} |E_{2\varepsilon R}(x_0)| = C_1^2 \varepsilon^{n-2} (2R)^n |\det Q| \text{Vol}(B(0,1)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0)\setminus E_{\varepsilon R}(x_0))} \leq C_2 \varepsilon^{\frac{n}{2}-1},$$

onde $C_2 = (C_1^2 (2R)^n |\det Q| \text{Vol}(B(0,1)))^{\frac{1}{2}}$. $\square$

• **Estimativa para S_1 .** Observe que

$$|S_1| \leq \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} W_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right| + |(Vu_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}| + |\lambda| |(u_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}|. \quad (3.83)$$

Assim, da definição de W_ε e pelo Lema 3.1.13 - item (1), temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} W_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right| &\leq \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} W_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \right| \\ &= \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} a_{ij} W_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \, dx \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |a_{ij}| |W_\varepsilon| \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \, dx \\ &\leq C_A \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right| \, dx, \end{aligned}$$

onde $C_A = n \max_{x \in \bar{\Omega}} |a_{ij}(x)|$. Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} W_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right| \leq C_A \|\nabla u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}. \quad (3.84)$$

E, ainda, da definição de W_ε e pelo Lema 3.1.13 - item (1), segue que

$$\begin{aligned} |(Vu_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}| &\leq |(Vu_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}| \\ &= \left| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} Vu_0 W_\varepsilon v_\varepsilon \, dx \right| \leq C_V \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |u_0 v_\varepsilon| \, dx, \end{aligned}$$

onde $C_V = \max_{\bar{\Omega}} |V|$. Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|(Vu_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}| \leq C_V \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}. \quad (3.85)$$

E, novamente, da definição de W_ε e pelo Lema 3.1.13 - item (1), temos

$$\begin{aligned} |\lambda| |(u_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}| &\leq |\lambda| |(u_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}| \\ &= |\lambda| \left| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} u_0 W_\varepsilon v_\varepsilon \, dx \right| \leq |\lambda| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |u_0 v_\varepsilon| \, dx. \end{aligned}$$

Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|\lambda| \left| (u_0 W_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right| \leq |\lambda| \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}. \quad (3.86)$$

Utilizando o obtido em (3.84), (3.85) e (3.86) em (3.83), obtemos

$$|S_1| \leq C_A \|\nabla u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} + (C_V + |\lambda|) \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}.$$

Como

$$\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}, \|\nabla u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{H^2(\Omega)},$$

segue do Lema 1.1.15 que

$$\|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}, \|\nabla u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Então, pelo Lema 3.1.4

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq C_A C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} + (C_V + |\lambda|) C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \\ &\leq ((C_A + C_V + |\lambda|) C_3) C_4 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C_5 (1 + |\lambda|) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde $C_5 = (\max \{2C_3 C_4 \max \{C_A, C_V\}, C_3 C_4\})$.

• **Estimativa para S_2 .** Da definição de W_ε , temos

$$\begin{aligned} |S_2| &= \left| \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)) u_0 \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right| \\ &\leq \left| \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)) u_0 \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \right| \\ &= \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} (a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)) u_0 \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |(A(x) - A(x_0)) \nabla W_\varepsilon| |u_0 \nabla v_\varepsilon| dx. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Afirmção. Para $x \in E_{2\varepsilon R}(x_0)$, existe constante $C_6 > 0$, tal que

$$|(A(x) - A(x_0)) \nabla W_\varepsilon(x)| \leq C_6. \quad (3.89)$$

De fato, como A é uniformemente limitada em $y \in \bar{\Omega}$, existe constante $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|A(y)| \leq \tilde{C} |y|. \quad (3.90)$$

Logo, segue das desigualdades (3.90), (3.79) e pelo Lema 3.1.13 - item (2), que

$$|(A(x) - A(x_0)) \nabla W_\varepsilon(x)| \leq \tilde{C} |x - x_0| |\nabla W_\varepsilon(x)| \leq \tilde{C} 2\varepsilon R C_1 \varepsilon^{-1} = C_6,$$

onde $C_6 = \tilde{C} 2RC_1$, e a afirmação é válida.

Substituindo (3.89) em (3.88) e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
 |S_2| &\leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |(A(x) - A(x_0)) \nabla W_\varepsilon| |u_0 \nabla v_\varepsilon| \, dx \\
 &\leq C_6 \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \\
 &\leq C_6 \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Pelo Lema 3.1.12 e da desigualdade (3.91), tem-se

- para $n = 3$

$$|S_2| \leq C_6 C_7 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}; \tag{3.92}$$

- para $n = 4$,

$$|S_2| \leq C_6 C_7 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}; \tag{3.93}$$

- para $n \geq 5$,

$$|S_2| \leq C_6 C_7 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \tag{3.94}$$

• **Estimativa para S_4 .** Da definição de W_ε , desigualdade (3.90) e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
 |S_4| &= \left| \langle u_0 \rangle \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x_0) \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right) \right|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\
 &\leq |\langle u_0 \rangle| \left| \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x_0) \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right) \right|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \\
 &\leq |\langle u_0 \rangle| \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |A(x_0)| |\nabla W_\varepsilon \nabla v_\varepsilon| \, dx \\
 &\leq \tilde{C} |x_0| |\langle u_0 \rangle| \|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \\
 &\leq \tilde{C} |x_0| |\langle u_0 \rangle| \|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

Aplicando os Lemas 3.1.10 e 3.1.13 - item(3) na desigualdade (3.95), segue que

- para $n = 3$

$$\begin{aligned}
 |S_4| &\leq \tilde{C} |x_0| C_8 \|f\|_{L^2(\Omega)} C_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}-1} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
 &\leq \tilde{C} |x_0| C_8 C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|f\|_{L^2(\Omega)},
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

- para $n = 4$,

$$\begin{aligned}
 |S_4| &\leq \tilde{C} |x_0| C_8 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} C_2 \varepsilon^{\frac{4}{2}-1} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
 &\leq \tilde{C} |x_0| C_8 C_2 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \varepsilon \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|f\|_{L^2(\Omega)},
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

- para $n \geq 5$,

$$\begin{aligned}
 |S_4| &\leq \tilde{C} |x_0| C_8 \varepsilon^{-\frac{n}{2}+2} \|f\|_{L^2(\Omega)} C_2 \varepsilon^{\frac{n}{2}-1} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
 &\leq \tilde{C} |x_0| C_8 C_2 \varepsilon \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

• **Estimativa para S_5 .** Da definição de W_ε , da desigualdade (3.90), Lema 3.1.13 - item (2) e Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
|S_5| &= \left| \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x_0) u_0^\perp \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right| \\
&\leq \left| \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x_0) u_0^\perp \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \right| \\
&\leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |A(x_0) \nabla W_\varepsilon| |u_0^\perp \nabla v_\varepsilon| \, dx \\
&\leq \tilde{C} |x_0| C_1 \varepsilon^{-1} \|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \\
&\leq \tilde{C} |x_0| C_1 \varepsilon^{-1} \|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 3.1.9 na desigualdade (3.99), temos

$$\begin{aligned}
|S_5| &\leq \tilde{C} |x_0| C_1 \varepsilon^{-1} C_9 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
&= \tilde{C} |x_0| C_1 C_9 \varepsilon \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.100}
\end{aligned}$$

• **Estimativa para $\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.** Pelo Lema 3.1.2, aplicado a v_ε em (3.37), segue que

$$\frac{1}{\kappa_1} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \left| \lambda \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}^2 - \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \right| \leq |S_1| + |S_2| + |S_4| + |S_5|. \tag{3.101}$$

• Caso $n = 3$: pelas desigualdades (3.87), (3.92), (3.96) e (3.100) aplicadas a desigualdade (3.101), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \kappa_1 (|S_1| + |S_2| + |S_4| + |S_5|) \\
&\leq \kappa_1 \left((C_5(1 + |\lambda|)\varepsilon + C_6 C_7 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \tilde{C} |x_0| C_8 C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \tilde{C} |x_0| C_1 C_9 \varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \\
&\leq C_{11} (1 + |\lambda|) \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},
\end{aligned}$$

onde $C_{11} = 4 \kappa_1 \max \{C_5, C_6 C_7, \tilde{C} |x_0| C_8 C_2, \tilde{C} |x_0| C_1 C_9\}$.

Em resumo,

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_{11} (1 + |\lambda|) \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.102}$$

• Caso $n = 4$: pelas desigualdades (3.87), (3.93), (3.97) e (3.100) aplicadas a desigualdade (3.101), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \kappa_1 (|S_1| + |S_2| + |S_4| + |S_5|) \\
&\leq \kappa_1 \left((C_5(1 + |\lambda|)\varepsilon + C_6 C_7 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} + \tilde{C} |x_0| C_8 C_2 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \varepsilon + \tilde{C} |x_0| C_1 C_9 \varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \\
&\leq C_{11} (1 + |\lambda|) \varepsilon (|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} + 1) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \tag{3.103}
\end{aligned}$$

Observe que $(|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} + 1)^2 \geq |\ln \varepsilon| + 1$ e, como $|\ln \varepsilon| + 1 \geq |\ln \varepsilon|$, temos

$$-(|\ln \varepsilon| + 1)^{\frac{1}{2}} \leq -|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \iff -(|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} + 1) \leq -|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}},$$

Assim de (3.103), obtemos

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq C_{11} \varepsilon (|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} + 1) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq -C_{11} \varepsilon (-(|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} + 1)) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_{11} \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.104)$$

• Caso $n \geq 5$: pelas desigualdades (3.87), (3.94), (3.98) e (3.100) aplicadas a desigualdade (3.101), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \kappa_1 (|S_1| + |S_2| + |S_4| + |S_5|) \\ &\leq \kappa_1 \left((C_5(1 + |\lambda|)\varepsilon + C_6 C_7 \varepsilon^2 + \tilde{C} |x_0| C_8 C_2 \varepsilon + \tilde{C} |x_0| C_1 C_9 \varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \\ &\leq C_{11} (1 + |\lambda|)\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Em resumo,

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_{11} (1 + |\lambda|)\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.105)$$

• **Vamos estimar agora** $u_\varepsilon - u_0$. Observe que podemos escrever esta diferença da seguinte maneira:

$$u_\varepsilon - u_0 = u_\varepsilon - (1 - W_\varepsilon)u_0 - W_\varepsilon u_0 = v_\varepsilon - W_\varepsilon u_0.$$

Assim,

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.106)$$

Com isto, basta estimar $\|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Pela definição da função W_ε , da desigualdade (3.83), temos a seguinte estimativa para a norma $\|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |W_\varepsilon u_0|^2 dx \leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |W_\varepsilon u_0|^2 dx \\ &\leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |u_0|^2 dx = \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}. \quad (3.107)$$

Pelo Lema 3.1.12 aplicado a desigualdade (3.107) tem-se:

• para $n = 3$

$$\|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C_7 \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}; \quad (3.108)$$

- para $n = 4$

$$\|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C_7 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}; \quad (3.109)$$

- para $n \geq 5$

$$\|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C_7 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.110)$$

Considere, agora, a seguinte estimativa para a norma $\|\nabla(W_\varepsilon u_0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$:

$$\|\nabla(W_\varepsilon u_0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_0 \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.111)$$

Da definição da função W_ε e do Lema 3.1.13 - item (1), temos a seguinte estimativa para a norma $\|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$:

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |W_\varepsilon \nabla u_0|^2 dx \leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |W_\varepsilon \nabla u_0|^2 dx \\ &\leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |\nabla u_0|^2 dx = \|\nabla u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\nabla u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}. \quad (3.112)$$

Pelo Lema 3.1.4 e Lema 1.1.15 aplicados a desigualdade (3.112), obtemos

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\nabla u_0\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \leq C_{13} \varepsilon \|\nabla u_0\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_{13} \varepsilon \|u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq C_{13} C_{14} \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Para procedermos com uma estimativa para a norma $\|u_0 \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$, lembremos a decomposição para u_0 dada em (3.38): $u_0 = \langle u_0 \rangle + u_0^\perp$. Então,

$$\|u_0 \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (3.114)$$

Pela definição da função W_ε e do Lema 3.1.13 - item (2), temos a seguinte estimativa para a norma $\|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$:

$$\begin{aligned} \|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |u_0^\perp \nabla W_\varepsilon|^2 dx \leq \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |u_0^\perp \nabla(W_\varepsilon)|^2 dx \\ &\leq C_1^2 \varepsilon^{-2} \int_{E_{2\varepsilon R}(x_0)} |u_0^\perp|^2 dx = C_1^2 \varepsilon^{-2} \|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon^{-1} \|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))}. \quad (3.115)$$

Aplicando o Lema 3.1.9 a desigualdade (3.115), obtemos

$$\begin{aligned} \|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq C_1 \varepsilon^{-1} \|u_0^\perp\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0))} \\ &\leq C_1 \varepsilon^{-1} C_{15} \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} = C_1 C_{15} \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Da definição da função W_ε e pelo Lema 3.1.13 - item (3), temos a seguinte estimativa para a norma $\|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$:

$$\begin{aligned} \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &= |\langle u_0 \rangle| \|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \\ &= |\langle u_0 \rangle| \|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(E_{2\varepsilon R}(x_0) \setminus E_{\varepsilon R}(x_0))} \leq C_2 |\langle u_0 \rangle| \varepsilon^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Aplicando o Lema 3.1.10 a desigualdade (3.117), tem-se:

- para $n = 3$

$$\begin{aligned} \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq C_2 |\langle u_0 \rangle| \varepsilon^{\frac{3}{2}-1} \\ &\leq C_2 \varepsilon^{\frac{3}{2}-1} C_8 \|f\|_{L^2(\Omega)} = C_2 C_8 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}; \end{aligned} \quad (3.118)$$

- para $n = 4$

$$\begin{aligned} \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq C_2 |\langle u_0 \rangle| \varepsilon^{\frac{4}{2}-1} \\ &\leq C_2 \varepsilon^{\frac{4}{2}-1} C_8 |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} = C_2 C_8 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}; \end{aligned} \quad (3.119)$$

- para $n \geq 5$

$$\begin{aligned} \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} &\leq C_2 |\langle u_0 \rangle| \varepsilon^{\frac{n}{2}-1} \\ &\leq C_2 \varepsilon^{\frac{n}{2}-1} C_8 \varepsilon^{-\frac{n}{2}+2} \|f\|_{L^2(\Omega)} = C_2 C_8 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Em síntese, temos que

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\nabla(W_\varepsilon u_0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &\leq \|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + (\|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_0 \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)})^2 \\ &\leq \|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + (\|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)})^2. \end{aligned} \quad (3.121)$$

- Caso $n = 3$: das estimativas obtidas em (3.108), (3.113), (3.118) e (3.116), aplicadas em (3.121), segue que

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + (\|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)})^2 \\ &\leq C_7^2 \varepsilon^3 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_{13} C_{14} \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2 C_8 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_1 C_{15} \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)})^2 \\ &\leq C_7^2 \varepsilon^3 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_{13} C_{14} + C_2 C_8 + C_1 C_{15})^2 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (C_7 + C_{13} C_{14} + C_2 C_8 + C_1 C_{15})^2 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq (C_7 + C_{13} C_{14} + C_2 C_8 + C_1 C_{15}) \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.122)$$

- Caso $n = 4$: das estimativas obtidas em (3.109), (3.113), (3.119) e (3.116), aplicadas em (3.121), segue que

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + (\|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)})^2 \\ &\leq C_7^2 \varepsilon^4 |\ln \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_{13} C_{14} \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2 C_8 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_1 C_{15} \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)})^2 \\ &\leq C_7^2 \varepsilon^4 |\ln \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_{13} C_{14} + C_2 C_8 + C_1 C_{15})^2 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (C_7 + C_{13} C_{14} + C_2 C_8 + C_1 C_{15})^2 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq (C_7 + C_{13}C_{14} + C_2C_8 + C_1C_{15}) \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.123)$$

• Caso $n \geq 5$: das estimativas obtidas em (3.110), (3.113), (3.120) e (3.116), aplicadas em (3.121), segue que

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 &\leq \|W_\varepsilon u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + (\|W_\varepsilon \nabla u_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\langle u_0 \rangle \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_0^\perp \nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)})^2 \\ &\leq C_7^2 \varepsilon^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_{13}C_{14}\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2C_8\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_1C_{15}\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)})^2 \\ &\leq C_7^2 \varepsilon^4 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_{13}C_{14} + C_2C_8 + C_1C_{15})^2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (C_7 + C_{13}C_{14} + C_2C_8 + C_1C_{15})^2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq (C_7 + C_{13}C_{14} + C_2C_8 + C_1C_{15}) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.124)$$

Por fim, voltemos a estimativa da norma $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$.

• Para $n = 3$, substituindo (3.102) e (3.122) em (3.106), obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C_{11}(1 + |\lambda|)\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} + (C_7 + C_{13}C_{14} + C_2C_8 + C_1C_{15}) \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{16}(1 + |\lambda|)\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.125)$$

onde $C_{16} = 5 \max \{C_{11}, C_7, C_{13}C_{14}, C_2C_8, C_1C_{15}\}$.

• Para $n = 4$, substituindo (3.104) e (3.123) em (3.106), obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C_{11}\varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} + (C_7 + C_{13}C_{14} + C_2C_8 + C_1C_{15}) \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{16}(1 + |\lambda|)\varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

• Para $n \geq 5$, substituindo (3.105) e (3.124) em (3.106), obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|v_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|W_\varepsilon u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C_{11}(1 + |\lambda|) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} + (C_7 + C_{13}C_{14} + C_2C_8 + C_1C_{15}) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{16}(1 + |\lambda|)\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Portanto, segue de (3.125), (3.126) e (3.127), que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq C(1 + |\lambda|) \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n = 3, \\ \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq C(1 + |\lambda|) \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n = 4, \\ \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq C(1 + |\lambda|) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, & n \geq 5, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

Observação 3.1.14. Como dito anteriormente, o Teorema 3.1.6 é uma variação do Teorema 1.2 em [9], onde a modificação obtida foi em relação a dependência em λ da constante, de modo que a tal dependência foi deixada explícita como $C(1 + |\lambda|)$, onde C independe agora de ambos parâmetros ε e λ . Cabe ressaltar que tal modificação somente foi possível devido o uso do Lema 3.1.2, por isso a restrição $\lambda \in S_{0,\phi_1}$ (diferentemente de somente $|\operatorname{Im} \lambda| \neq 0$ pedido no Teorema 1.2 em [9]) e, esta será necessária no decorrer do texto para obter a taxa de convergência dos semigrupos lineares quando o parâmetro $\varepsilon \rightarrow 0$ e, por conseguinte obter a taxa de convergência dos semigrupos não lineares.

3.2 Convergência dos Semigrupos

Os resultados obtidos na seção anterior detalham o comportamento dos resolvente das partes lineares dos operadores sob a perturbação que estamos considerando no domínio. Em vista disto, no que segue obteremos estimativas sobre o comportamento dos semigrupos lineares e estas serão fundamentais para o análise da dinâmica não linear.

Teorema 3.2.1. Para $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ existem constantes $\beta > 0$ e $C > 0$, tais que

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta}, & n = 3, \\ \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta}, & n = 4, \\ \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-j\theta}, & n \geq 5, \end{aligned}$$

onde $j = 0$ para $t \in [1, \infty)$ e $j = 3$ para $t \in (0, 1)$.

Demonstração. Inicialmente, observe que

$$e^{-A_\varepsilon t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} (\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda, \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

onde Γ é a fronteira orientada positivamente, percorrendo $\infty e^{-i\phi_1}$ a $\infty e^{i\phi_1}$, do setor S_{0,ϕ_1} do operador $A_\varepsilon, \varepsilon \in [0, 1)$.

Segue, do Teorema 1.2.9, a seguinte estimativa

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \|e^{-A_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} + \|e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_0 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.128)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{-\lambda t}| \|(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda - A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} |d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|(\lambda - A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda - A_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} d|\lambda|. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 3.1.6, segue que

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} (1 + |\lambda|) d|\lambda| & n = 3, \\ \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C_1 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} (1 + |\lambda|) d|\lambda| & n = 4, \\ \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C_1 \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} (1 + |\lambda|) d|\lambda| & n \geq 5. \end{aligned}$$

Vejamos, agora, uma estimativa para a integral $\int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} (1 + |\lambda|) \, d|\lambda|$. Observe que,

$$\int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} (1 + |\lambda|) \, d|\lambda| = \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} \, d|\lambda| + \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} |\lambda| \, d|\lambda| := I_1 + I_2. \quad (3.129)$$

Para I_1 , fazendo a seguinte mudança de variáveis $\mu = \lambda t$, obtemos

$$\int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} \, d|\lambda| = \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\mu} \, d\frac{|\mu|}{t} \leq \frac{1}{t} \int_{\Gamma} e^{|\mu|} \, d|\mu| = C_2 t^{-1}.$$

Para I_2 , fazendo a seguinte mudança de variáveis $\lambda = \rho e^{i\phi_1}$, obtemos

$$\int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} |\lambda| \, d|\lambda| \leq 2 \int_0^{\infty} e^{-t\rho \cos \phi_1} |\rho e^{i\phi_1}| |e^{i\phi_1}| \, d\rho \leq 2 \int_0^{\infty} e^{-t\rho \cos \phi_1} \rho \, d\rho,$$

e, fazendo a seguinte mudança de variáveis $s = t\rho \cos \phi_1$, segue que

$$\int_0^{\infty} e^{-t\rho \cos \phi_1} \rho \, d\rho \leq \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{s}{(t \cos \phi_1)^2} \, ds = \frac{1}{t^2 \cos^2 \phi_1},$$

logo,

$$I_2 = \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} |\lambda| \, d|\lambda| \leq \frac{1}{t^2 \cos^2 \phi_1}.$$

Assim, obtemos a seguinte estimativa em (3.129)

$$\int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} (1 + |\lambda|) \, d|\lambda| \leq C_2 t^{-1} + \frac{2}{\cos^2 \phi_1} t^{-2}.$$

Em vista disso, para

• $n = 3$:

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}})} &\leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} (1 + |\lambda|) \, d|\lambda| \\ &\leq \frac{C_1}{2\pi} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(C_2 t^{-1} + \frac{2}{\cos^2 \phi_1} t^{-2} \right) = C_3 \varepsilon^{\frac{1}{2}} (t^{-1} + t^{-2}), \end{aligned} \quad (3.130)$$

onde $C_3 = \frac{C_1}{2\pi} \max \left\{ C_2, \frac{2}{\cos^2 \phi_1} \right\}$.

• $n = 4$:

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}})} &\leq C_1 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\lambda t} (1 + |\lambda|) \, d|\lambda| \\ &\leq C_3 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} (t^{-1} + t^{-2}). \end{aligned} \quad (3.131)$$

• $n \geq 5$:

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_1 \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} (1 + |\lambda|) d|\lambda| \leq C_3 \varepsilon (t^{-1} + t^{-2}). \quad (3.132)$$

Observando que para $t \in (0, 1)$ temos $t^{-2} > t^{-1}$ e para $t \geq 1$ temos $t^{-\frac{1}{2}} > t^{-2}$, segue do Teorema 1.2.19 fazendo a interpolação das expressões (3.128) e (3.130), (3.128) e (3.131), (3.128) e (3.132), com $1 - 2\theta$ e 2θ e $\beta = \eta = \frac{1}{2}$, respectivamente, que para $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}-3\theta} & n = 3, \\ \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta t^{-\frac{1}{2}-3\theta} & n = 4, \\ \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-3\theta} & n \geq 5, \end{aligned}$$

e, tendo em vista a mesma interpolação para $t \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}} & n = 3, \\ \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta t^{-\frac{1}{2}} & n = 4, \\ \|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A_0 t}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}} & n \geq 5. \end{aligned}$$

□

O resultado a seguir relaciona a convergência dos semigrupos lineares com a convergência dos semigrupos não lineares via fórmula da variação das constantes. Isso, por sua vez, implicará na semicontinuidade superior e inferior dos atratores e dos pontos estacionários.

Teorema 3.2.2. *Seja $T_0(t, u_0^0) \in C([0, \tau(u_0^0)), X^{\frac{1}{2}})$ (ou $T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) \in C([0, \tau(u_\varepsilon^0)), X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$, $\varepsilon \in (0, 1]$), a solução correspondente da equação integral (2.33) (ou (2.31)) com dado inicial $u_0^0 \in X^{\frac{1}{2}}$ (ou $u_\varepsilon^0 \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$), a qual existe no intervalo máximo $[0, \tau(u_0^0))$ (ou $[0, \tau(u_\varepsilon^0))$, $\varepsilon \in (0, 1]$). Além disso, dado $R > 0$, $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ e $t_0 \in (0, \tau)$, onde $\tau := \min \{\tau(u_0^0), \tau(u_\varepsilon^0)\}$, com $\|T_0(t, u_0^0)\|_{X^{\frac{1}{2}}} \leq R$ e $\|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq R$, para todo $t \in [0, t_0]$. Então, existem constantes $C > 0$ e $L > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C e^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^\theta \right) & n = 3, \\ \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C e^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta \right) & n = 4, \\ \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C e^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} \right) & n \geq 5, \end{aligned}$$

onde $j = 0$ para $t \in [1, \infty)$ e $j = 3$ para $t \in (0, 1)$.

Demonstração. Para $\tau > 0$, considere $t \in (0, \tau)$, logo pela fórmula da variação das constantes, segue que

$$T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) = e^{-tA_\varepsilon} u_\varepsilon^0 + \int_0^t e^{-(s-t)A_\varepsilon} F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0)) ds, \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|e^{-tA_\varepsilon}u_\varepsilon^0 - e^{-tA_0}u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &+ \int_0^t \|e^{-(s-t)A_\varepsilon}F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0)) - e^{-(s-t)A_0}F(T_0(s, u_0^0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Analisaremos ambos dois termos no lado direito em (3.133). Para o primeiro termo, segue que

$$\|e^{-tA_\varepsilon}u_\varepsilon^0 - e^{-tA_0}u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|e^{-tA_\varepsilon}u_\varepsilon^0 - e^{-tA_\varepsilon}u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|e^{-tA_\varepsilon}u_0^0 - e^{-tA_0}u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando a Proposição 1.2.17 e o Teorema 3.2.1, obtemos para

• $n = 3$:

$$\|e^{-tA_\varepsilon}u_\varepsilon^0 - e^{-tA_0}u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C_1 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}} \|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.134)$$

• $n = 4$:

$$\|e^{-tA_\varepsilon}u_\varepsilon^0 - e^{-tA_0}u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C_1 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}} \|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.135)$$

• $n \geq 5$:

$$\|e^{-tA_\varepsilon}u_\varepsilon^0 - e^{-tA_0}u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C_1 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}} \|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.136)$$

Denotando por $\Psi_\varepsilon(t, s) := \|e^{-(s-t)A_\varepsilon}F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0)) - e^{-(s-t)A_0}F(T_0(s, u_0^0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ no segundo termo do lado direito em (3.133), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^t \Psi_\varepsilon(t, s) ds &\leq \int_0^t \|e^{-(s-t)A_\varepsilon} [F(T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0)) - F(T_0(s, u_0^0))] \|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &+ \int_0^t \| [e^{-(s-t)A_\varepsilon} - e^{-(s-t)A_0}] F(T_0(s, u_0^0)) \|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.17, Teorema 3.2.1 e Lema 2.2.2, utilizando L_F como a constante de Lipschitz de F , obtemos para

• $n = 3$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \Psi_\varepsilon(t, s) ds &\leq C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &+ C_1 C_3 \varepsilon^\theta \int_0^t e^{-\beta(1-2\theta)(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}-j\theta} ds. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Tomando $y = \beta(1 - 2\theta)(t - s)$ no segundo termo do lado direito de (3.137), resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}-j\theta}(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}-j\theta}} \int_0^{\beta(1-2\theta)t} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}-j\theta} dy &\leq \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}-j\theta}(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}-j\theta}} \int_0^\infty e^{-y} y^{-\frac{1}{2}-j\theta} dy \\ &= \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}-j\theta}(1-2\theta)^{-\frac{1}{2}-j\theta}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - j\theta\right) \\ &= C_{\beta,j,\theta} \leq D_{\beta,\theta}, \end{aligned} \quad (3.138)$$

onde $D_{\beta,\theta} = \max \{C_{\beta,1,\theta}, C_{\beta,3,\theta}\}$.

Logo, substituindo (3.134), (3.137) e (3.138) em (3.133), obtemos para $n = 3$

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C_1 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}} \|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + C_2 C_3 \varepsilon^\theta D_{\beta,\theta} \\ &\quad + C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= C_1 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}} t^{-j\theta} t^{j\theta} \|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad + C_2 C_3 \varepsilon^\theta D_{\beta,\theta} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} t^{\frac{1}{2}+j\theta} e^{-\beta t} e^{\beta t} \\ &\quad + C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(C_1 \tau^{j\theta} \|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{2\theta\tau} \varepsilon^\theta \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + C_2 C_3 \varepsilon^\theta D_{\beta,\theta} \tau^{\frac{1}{2}+j\theta} e^{\beta\tau} \right) \\ &\quad + C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^\theta \right) t^{-\frac{1}{2}-j\theta} e^{-\beta t} \\ &\quad + C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds, \end{aligned} \quad (3.139)$$

onde $C_4 = \max \left\{ C_1 \tau^{j\theta}, 2 \max \left\{ C_2 e^{2\theta\tau} \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, C_2 C_3 D_{\beta,\theta} \tau^{\frac{1}{2}+j\theta} e^{\beta\tau} \right\} \right\}$.

Multiplicando a expressão (3.139) por $e^{\beta t}$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\beta t} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^\theta \right) t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \\ &\quad + C_1 L_F \int_0^t e^{\beta s} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Agora, escrevendo

$$\phi_\varepsilon(t) := e^{\beta t} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, a_\varepsilon := C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^\theta \right) \text{ e } b := C_1 L_F,$$

reescrevendo a última desigualdade da seguinte forma

$$\phi_\varepsilon(t) \leq a_\varepsilon t^{-\frac{1}{2}-j\theta} + b \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \phi_\varepsilon(s) ds,$$

e, usando a Desigualdade de Gronwall (Lema 1.1.9), obtemos

$$\phi_\varepsilon(t) \leq C_5 a_\varepsilon t^{-\frac{1}{2}-j\theta}.$$

E, ainda, suponha que exista $\delta > 1$, tal que

$$e^{-\beta\delta t} e^{\beta t} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C_4 C_5 t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^\theta \right).$$

Logo, tomando $L = \beta(\delta - 1) > 0$, segue que

$$\|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C_4 C_5 e^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^\theta \right). \quad (3.140)$$

• $n = 4$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \Psi_\varepsilon(t, s) ds &\leq C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &+ C_1 C_3 \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta \int_0^t e^{-\beta(1-2\theta)(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}-j\theta} ds. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Logo, substituindo (3.135), (3.141) e (3.138) em (3.133), obtemos para $n = 4$

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C_1 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}} \|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &+ C_1 C_3 \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta D_{\beta, \theta} \\ &+ C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta \right) t^{-\frac{1}{2}-j\theta} e^{-\beta t} \\ &+ C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Multiplicando a expressão (3.142) por $e^{\beta t}$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\beta t} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta \right) t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \\ &+ C_1 L_F \int_0^t e^{\beta s} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Agora, escrevendo

$$\phi_\varepsilon(t) := e^{\beta t} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, a_\varepsilon := C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta \right) \text{ e } b := C_1 L_F,$$

reescrevendo a última desigualdade da seguinte forma

$$\phi_\varepsilon(t) \leq a_\varepsilon t^{-\frac{1}{2}-j\theta} + b \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \phi_\varepsilon(s) ds,$$

e, usando a Desigualdade de Gronwall (Lema 1.1.9), obtemos

$$\phi_\varepsilon(t) \leq C_6 a_\varepsilon t^{-\frac{1}{2}-j\theta}.$$

De maneira análoga ao caso $n = 3$, existe $\delta > 1$, tal que tomando $L = \beta(\delta - 1) > 0$, segue que

$$\|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C_4 C_6 e^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta \right). \quad (3.143)$$

• $n \geq 5$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \Psi_\varepsilon(t, s) ds &\leq C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &+ C_1 C_3 \varepsilon^{2\theta} \int_0^t e^{-\beta(1-2\theta)(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}-j\theta} ds. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Logo, substituindo (3.136), (3.144) e (3.138) em (3.133), obtemos para $n \geq 5$

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C_1 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}} \|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \|u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &+ C_1 C_3 \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta D_{\beta, \theta} \\ &+ C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} \right) t^{-\frac{1}{2}-j\theta} e^{-\beta t} \\ &+ C_1 L_F \int_0^t e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Multiplicando a expressão (3.145) por $e^{\beta t}$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\beta t} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} \right) t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \\ &+ C_1 L_F \int_0^t e^{\beta s} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|T_\varepsilon(s, u_\varepsilon^0) - T_0(s, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned}$$

Agora, escrevendo

$$\phi_\varepsilon(t) := e^{\beta t} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad a_\varepsilon := C_4 \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} \right) \text{ e } b := C_1 L_F,$$

reescrevendo a última desigualdade da seguinte forma

$$\phi_\varepsilon(t) \leq a_\varepsilon t^{-\frac{1}{2}-j\theta} + b \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \phi_\varepsilon(s) ds,$$

e usando a Desigualdade de Gronwall (Lema 1.1.9), obtemos

$$\phi_\varepsilon(t) \leq C_7 a_\varepsilon t^{-\frac{1}{2}-j\theta}.$$

De maneira análoga ao caso $n = 3$, existe $\delta > 1$, tal que tomando $L = \beta(\delta - 1) > 0$, segue que

$$\|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C_4 C_7 e^{Lt} t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} \right). \quad (3.146)$$

Portanto, de (3.140), (3.143) e (3.146), o resultado segue. $\square$

3.3 Convergência Espectral

É sabido que o comportamento espectral dos operadores lineares é importante ao analisar as propriedades de continuidade da dinâmica não linear. Isto posto, esta seção é dedicada a explorar resultados sobre o comportamento espectral de operadores do tipo A_ε quando o parâmetro $\varepsilon \rightarrow 0$. Veja também [8] para outros exemplos onde utiliza-se uma técnica semelhante.

Considere os seguintes problemas de autovalor

$$A_0 \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.147)$$

e

$$A_\varepsilon \varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon \quad \text{em } \Omega_\varepsilon. \quad (3.148)$$

Observe que os problemas (3.147) e (3.148) são equivalentes, respectivamente, aos seguintes problemas elípticos

$$\begin{cases} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} \right) + V(x) \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0, & x \in \Omega, \\ \varphi_0 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.149)$$

e

$$\begin{cases} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(x) \varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \varphi_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.150)$$

Para $\varphi_0 \in \mathcal{D}(A_0)$, o **quociente de Rayleigh**¹ do operador A_0 é dado por

$$R_{A_0}[\varphi_0] := \frac{\int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} V \varphi_0^2 dx}{\int_{\Omega} \varphi_0^2 dx},$$

e, para $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$, o **quociente de Rayleigh** do operador A_ε é dado por

$$R_{A_\varepsilon}[\varphi_\varepsilon] := \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} V \varphi_\varepsilon^2 dx}{\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_\varepsilon^2 dx}.$$

¹Veja [31], para mais detalhes.

Proposição 3.3.1. Se $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, então $R_{A_\varepsilon}[\varphi_\varepsilon] > 0$.

Demonstração. Dado $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$, segue que

$$\begin{aligned} R_{A_\varepsilon}[\varphi_\varepsilon] \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} V \varphi_\varepsilon^2 dx \\ &\geq \vartheta_0 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 dx + \inf_{\Omega} V \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_\varepsilon^2 dx \\ &\geq C \left(\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \right) \geq 0, \end{aligned}$$

onde $C = \min\{\vartheta_0, \inf_{\Omega} V\} \geq 0$. Logo, $R_{A_\varepsilon}[\varphi_\varepsilon] \geq 0$.

Observe que, $R_{A_\varepsilon}[\varphi_\varepsilon] = 0$ se, e somente se, $\varphi_\varepsilon = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $R_{A_\varepsilon}[\varphi_\varepsilon] > 0$. $\square$

Para $\varepsilon \in [0, 1]$, da caracterização variacional de autovalores, segue que

$$\lambda_\varepsilon^k(A_\varepsilon, \Omega_\varepsilon) = \min_{\substack{E_k \subset H_0^1(\Omega_\varepsilon) \\ \dim E_k = k}} \max_{\varphi_\varepsilon \in E_k, \varphi_\varepsilon \neq 0} R_{A_\varepsilon}[\varphi_\varepsilon].$$

Da Proposição 3.3.1, os autovalores, $\lambda_\varepsilon^k(A_\varepsilon, \Omega_\varepsilon)$, são reais positivos e contados com multiplicidades, temos $\sigma(A_\varepsilon) = \{\lambda_\varepsilon^k\}_{k=1}^\infty$, onde

$$0 < \lambda_\varepsilon^1 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \dots,$$

com $\lambda_\varepsilon^k \rightarrow +\infty$ se $k \rightarrow +\infty$.

Em $L^2(\omega_\varepsilon)$ considere o operador, $A_{\omega_\varepsilon} : \mathcal{D}(A_{\omega_\varepsilon}) \subset L^2(\omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\omega_\varepsilon)$, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_{\omega_\varepsilon}) &= \left\{ u_\varepsilon \in H^2(\omega_\varepsilon) : u_\varepsilon = 0 \text{ em } \partial\omega_\varepsilon \right\}, \\ A_{\omega_\varepsilon} u_\varepsilon &= - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\cdot) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(\cdot) u_\varepsilon, \end{aligned}$$

e o seguinte problema de autovalor

$$A_{\omega_\varepsilon} \gamma_\varepsilon = \tau_\varepsilon \gamma_\varepsilon \quad \text{em } \omega_\varepsilon. \quad (3.151)$$

Observe que o problema (3.151) é equivalente ao seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(x) \gamma_\varepsilon = \tau_\varepsilon \gamma_\varepsilon, & x \in \omega_\varepsilon, \\ \gamma_\varepsilon = 0, & x \in \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.152)$$

Para $\gamma_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_{\omega_\varepsilon})$, o **quociente de Rayleigh** do operador A_{ω_ε} é dado por

$$R_{A_{\omega_\varepsilon}}[\gamma_\varepsilon] := \frac{\int_{\omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_j} dx + \int_{\omega_\varepsilon} V \gamma_\varepsilon^2 dx}{\int_{\omega_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^2 dx}.$$

E de maneira análoga a Proposição 3.3.1, tem-se

Proposição 3.3.2. Se $\gamma_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_{\omega_\varepsilon})$, então $R_{A_{\omega_\varepsilon}}[\gamma_\varepsilon] > 0$.

Da caracterização variacional dos autovalores, temos que

$$\tau_\varepsilon^k(A_{\omega_\varepsilon}, \omega_\varepsilon) = \min_{\substack{E_k \subset H_0^1(\omega_\varepsilon) \\ \dim E_k = k}} \max_{\gamma_\varepsilon \in E_k, \gamma_\varepsilon \neq 0} R_{A_{\omega_\varepsilon}}[\gamma_\varepsilon].$$

Da Proposição 3.3.2, os autovalores, $\tau_\varepsilon^k(A_{\omega_\varepsilon}, \omega_\varepsilon)$, são reais positivos e contado as multiplicidades, temos $\sigma(A_{\omega_\varepsilon}) = \{\tau_\varepsilon^k\}_{k=1}^\infty$, onde

$$0 < \tau_\varepsilon^1 \leq \dots \leq \tau_\varepsilon^k \leq \dots,$$

com $\tau_\varepsilon^k \rightarrow +\infty$ se $k \rightarrow +\infty$.

Proposição 3.3.3. A seguinte estimativa vale:

$$\inf \sigma(A_{\omega_\varepsilon}) \geq C\varepsilon^{-2},$$

onde a constante C independe de ε .

Demonstração. Dado $\gamma_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_{\omega_\varepsilon})$, segue que

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{H}_{\omega_\varepsilon}^D}[\gamma_\varepsilon] \|\gamma_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\omega_\varepsilon} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_j} dx + \int_{\omega_\varepsilon} V \gamma_\varepsilon^2 dx \\ &\geq \vartheta_0 \int_{\omega_\varepsilon} |\nabla \gamma_\varepsilon|^2 dx + \inf_{\Omega} V \int_{\omega_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^2 dx \\ &\geq C_1 \left(\|\nabla \gamma_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \|\gamma_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.153)$$

onde $C_1 = \min\{\vartheta_0, \inf_{\Omega} V\}$.

Considere a seguinte mudança de coordenadas $y = (x - x_0)\varepsilon^{-1}$. Então,

$$\|\nabla \gamma_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 = \varepsilon^{n-2} \|\nabla \gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2, \quad (3.154)$$

$$\|\gamma_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 = \varepsilon^n \|\gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2. \quad (3.155)$$

Substituindo (3.154) e (3.155) em (3.153), obtemos

$$R_{A_{\omega_\varepsilon}}[\gamma_\varepsilon] \varepsilon^n \|\gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 \geq C_1 \left(\varepsilon^{n-2} \|\nabla \gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon^n \|\gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 \right),$$

isto é,

$$\begin{aligned} R_{A_{\omega_\varepsilon}}[\gamma_\varepsilon] &\geq C_1 \left(\varepsilon^{-2} \frac{\|\nabla \gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2}{\|\gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2} + 1 \right) \\ &\geq C_1 \varepsilon^{-2} \frac{\|\nabla \gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2}{\|\gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2}. \end{aligned} \quad (3.156)$$

Observe que, pela Desigualdade de Poincaré, existe constante $C_2 > 0$, tal que

$$\|\gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_2 \|\nabla \gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2. \quad (3.157)$$

Logo, substituindo (3.157) em (3.156), temos

$$R_{A_{\omega_\varepsilon}}[\gamma_\varepsilon] \geq \frac{C_1}{C_2} \varepsilon^{-2} \frac{\|\gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2}{\|\gamma_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2} = C \varepsilon^{-2},$$

onde $C = \frac{C_1}{C_2}$.

□

No que segue, seja $\lambda \in \mathbb{C}$ fixado arbitrariamente tal que $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Proposição 3.3.4. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno*

$$\|(A_{\omega_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\omega_\varepsilon), L^2(\omega_\varepsilon))} \leq C\varepsilon^2, \quad (3.158)$$

onde a constante C independe de ε , mas depende de λ .

Demonstração. Para $f \in L^2(\omega_\varepsilon)$ uma função arbitrária, temos que a função $u_\varepsilon := (A_{\omega_\varepsilon} - \lambda)^{-1} f$ pertence ao espaço $H^2(\omega_\varepsilon)$ e é solução do seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \right) + V(x)u_\varepsilon - \lambda u_\varepsilon = f, & x \in \omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.159)$$

Para o problema obtido em (3.159), escrevemos a identidade integral correspondente. Para tal, multipliquemos a equação por u_ε e integremos por partes levando em consideração a condição de fronteira. Assim, utilizando a notação do produto interno em $L^2(\omega_\varepsilon)$, obtemos

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\omega_\varepsilon)} + (Vu_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} - \lambda (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} = (f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

Logo, tomando as partes real e imaginária acima, temos

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\omega_\varepsilon)} + (Vu_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} - \text{Re } \lambda (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} = \text{Re } (f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} \quad (3.160)$$

$$-\text{Im } \lambda (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} = \text{Im } (f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}. \quad (3.161)$$

Da identidade (3.161) e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} &= -\frac{1}{\text{Im } \lambda} \text{Im } (f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} \\ &\leq C_1(\lambda) |(f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}| \leq C_1(\lambda) \|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.162)$$

onde $C_1(\lambda) = \frac{1}{|\text{Im } \lambda|}$.

Empregando a estimativa obtida em (3.162) em (3.160), temos

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\omega_\varepsilon)} + (Vu_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} &= \text{Re } (f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \text{Re } \lambda (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} \\ &\leq |\text{Re } (f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \text{Re } \lambda (u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}| \\ &\leq |\text{Re } (f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}| + |\text{Re } \lambda| |(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}| \\ &\leq |(f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}| + |\text{Re } \lambda| C_1(\lambda) |(f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}| \\ &\leq C_2(\lambda) |(f, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)}| \\ &\leq C_2(\lambda) \|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

onde $C_2(\lambda) = 1 + |\operatorname{Re} \lambda| C_1(\lambda)$.

Em suma,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\omega_\varepsilon)} + (Vu_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C_2(\lambda) \|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}. \quad (3.163)$$

Vamos estimar inferiormente o lado esquerdo da desigualdade acima. Observe que, usando a condição de elipticidade, temos

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(a_{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right)_{L^2(\omega_\varepsilon)} \geq C_0 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2.$$

E, como $V \in C(\bar{\Omega})$, tal que $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, segue que $(Vu_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L^2(\omega_\varepsilon)} \geq 0$.

Logo, de (3.163), segue que

$$C_0 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \leq C_2(\lambda) \|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}. \quad (3.164)$$

Considere as seguintes mudanças de coordenadas $y = (x - M)\varepsilon^{-1}$ e $z = \varepsilon y$. Então,

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 = \varepsilon^{n-2} \|\nabla u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 \quad (3.165)$$

$$\|u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 = \varepsilon^{-n} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2, \quad (3.166)$$

e, pela Desigualdade de Poincaré, existe constante $C_3 > 0$, tal que

$$\|u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_3 \|\nabla u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2. \quad (3.167)$$

Segue, de (3.165), (3.166) e (3.167), que

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \geq \frac{1}{C_3} \varepsilon^{n-2} \|u_\varepsilon(x_0 + \varepsilon \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 = \frac{1}{C_3} \varepsilon^{-2} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2. \quad (3.168)$$

Substituindo (3.168) em (3.164), obtemos

$$\frac{C_0}{C_3} \varepsilon^{-2} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \leq C_2(\lambda) \|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}.$$

Portanto,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)},$$

onde $C = \frac{C_2(\lambda)C_3}{C_0}$. □

Proposição 3.3.5. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno*

$$\|(A_0 - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\omega_\varepsilon))} \leq C\varepsilon, \quad (3.169)$$

onde a constante C independe de ε .

Demonstração. Para $f \in L^2(\Omega)$ uma função arbitrária, temos que a função $u_0 := (A_0 - \lambda)^{-1} f$ pertence ao espaço $H^2(\Omega)$.

Como $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ e pelo Lema 3.1.4, existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$\|u_0\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 C_2 \varepsilon \|u_0\|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.170)$$

Pelo Lema 1.1.15, existe constante $C_3 > 0$, tal que

$$\|u_0\|_{H^2(\Omega)} \leq C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.171)$$

Portanto, substituindo (3.171) em (3.170), obtemos

$$\|u_0\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

onde $C = C_1 C_2 C_3$. □

Lema 3.3.6. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, vale a seguinte decomposição:

$$L^2(\Omega) = L^2(\Omega_\varepsilon) \oplus L^2(\omega_\varepsilon).$$

Demonstração. Observe que $L^2(\Omega_\varepsilon) \cap L^2(\omega_\varepsilon) = \{0\}$. Suponha que para $u \in L^2(\Omega)$, tenhamos

$$u = u_1 + u_2 \text{ e } u = u_3 + u_4,$$

onde $u_1, u_3 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ e $u_2, u_4 \in L^2(\omega_\varepsilon)$.

Logo, $u_1 - u_3 = u_4 - u_2$. Como $u_1 - u_3 \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, segue que $u_4 - u_2 \in L^2(\Omega_\varepsilon) \cap L^2(\omega_\varepsilon) = \{0\}$, então $u_4 = u_2$. De maneira análoga concluímos que $u_1 = u_3$. □

Em $L^2(\Omega)$, tendo em vista a decomposição dada pelo lema 3.3.6, utilizaremos a seguinte norma

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|(u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon) \oplus L^2(\omega_\varepsilon)}^2 = \|u_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|u_\varepsilon^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2.$$

Em $L^2(\Omega_\varepsilon) \oplus L^2(\omega_\varepsilon)$ considere o operador, $A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon} : \mathcal{D}(A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon}) \subset L^2(\Omega_\varepsilon) \oplus L^2(\omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon) \oplus L^2(\omega_\varepsilon)$, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon}) &= \{u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) : u_\varepsilon^1 \in \mathcal{D}(A_\varepsilon), u_\varepsilon^2 \in \mathcal{D}(A_{\omega_\varepsilon})\} \\ (A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon})(u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) &= (A_\varepsilon u_\varepsilon^1, A_{\omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2). \end{aligned}$$

O espectro do operador $A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon}$ é dado por

$$\sigma(A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon}) = \sigma(A_\varepsilon) \cup \sigma(A_{\omega_\varepsilon}).^2$$

Lema 3.3.7. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\|(A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon} - \lambda)^{-1} - (A_0 - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} \longrightarrow 0, \quad (3.172)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

²Para mais detalhes veja [21].

Demonstração. Para $f \in L^2(\Omega)$ uma função arbitrária, temos que as funções $u_\varepsilon := (A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon} - \lambda)^{-1} f$ e $u_0 = (A_0 - \lambda)^{-1} f$ pertencem ao espaço $H^2(\Omega)$.

Como $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon})$, temos que $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, onde $u_\varepsilon^1 \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$ e $u_\varepsilon^2 \in \mathcal{D}(A_{\omega_\varepsilon})$.

Da mesma forma, observando a decomposição $L^2(\Omega) = L^2(\Omega_\varepsilon) \oplus L^2(\omega_\varepsilon)$, para $u_0 \in \mathcal{D}(A_0) \subset L^2(\Omega)$, podemos escrever $u_0 = (u_0^1, u_0^2)$, onde $u_0^1 \in \mathcal{D}(A_0)|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ e $u_0^2 \in \mathcal{D}(A_0)|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|(u_\varepsilon^1 - u_0^1, u_\varepsilon^2 - u_0^2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|(u_\varepsilon^1 - u_0^1, u_\varepsilon^2 - u_0^2)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon) \oplus L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \\ &= \|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2. \end{aligned} \quad (3.173)$$

Para $\|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$, pelo Teorema 3.1.6, existe constante $C_1 > 0$ tal que,

- para $n = 3$

$$\|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.174)$$

- para $n = 4$

$$\|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.175)$$

- para $n \geq 5$

$$\|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.176)$$

Para $\|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2$, observe que

$$\|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq \|u_\varepsilon^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \|u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}. \quad (3.177)$$

Pela Proposição 3.3.4, existe constante C_2 , tal que

$$\|u_\varepsilon^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C_2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C_2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.178)$$

Pela Proposição 3.3.5, existe constante C_3 , tal que

$$\|u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C_3 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.179)$$

Substituindo (3.178) e (3.179) em (3.177), obtemos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} &\leq \|u_\varepsilon^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \|u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \\ &\leq (C_2 \varepsilon^2 + C_3 \varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq (C_2 + C_3) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Assim,

- para $n = 3$, substituindo (3.174) e (3.180) em (3.173)

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \\ &\leq C_1^2 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_2 + C_3)^2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (C_1^2 + (C_2 + C_3)^2) \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

- para $n = 4$, substituindo (3.175) e (3.180) em (3.173)

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \\
&\leq C_1^2 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_2 + C_3)^2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= (C_1^2 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + (C_2 + C_3)^2 \varepsilon^2) \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq C_4 \varepsilon^2 (|\ln \varepsilon| + 1) \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

onde $C_4 = \max\{C_1^2, (C_2 + C_3)^2\}$. Observe, ainda, que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe constante C_5 , tal que

$$\varepsilon^2 (|\ln \varepsilon| + 1) \leq C_5 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|,$$

então

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_4 \varepsilon^2 (|\ln \varepsilon| + 1) \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_4 C_5 \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

- para $n \geq 5$, substituindo (3.176) e (3.180) em (3.173)

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|u_\varepsilon^1 - u_0^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|u_\varepsilon^2 - u_0^2\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \\
&\leq C_1^2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_2 + C_3)^2 \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq (C_1^2 + (C_2 + C_3)^2) \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \max\{(C_1^2 + (C_2 + C_3)^2)^{\frac{1}{2}}, (C_4 C_5)^{\frac{1}{2}}\}$, obtemos

- para $n = 3$,

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}; \quad (3.181)$$

- para $n = 4$,

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Omega)}; \quad (3.182)$$

- para $n \geq 5$,

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.183)$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (3.181), (3.182) e (3.183), o resultado segue. $\square$

Teorema 3.3.8. *O espectro do operador A_ε converge para o espectro do operador A_0 . Em outras palavras, se $\lambda \notin \sigma(A_0)$, então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $\lambda \notin \sigma(A_\varepsilon)$. E, se $\lambda \in \sigma(A_0)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_\varepsilon \in \sigma(A_\varepsilon)$ tal que $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3.7 e Teoremas 1.2.3 e 1.2.4 segue que o espectro do operador $A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon}$ converge para o espectro do operador A_0 .

Pela Proposição 3.3.3, existe constante $C > 0$, tal que

$$\tau_\varepsilon \geq C \varepsilon^{-2},$$

para todo $\tau_\varepsilon \in \sigma(A_{\omega_\varepsilon})$, isto é, $\sigma(A_{\omega_\varepsilon})$ se inicia a partir de $C \varepsilon^{-2}$.

Como

$$\sigma(A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon}) = \sigma(A_\varepsilon) \cup \sigma(A_{\omega_\varepsilon}),$$

logo em $\sigma(A_\varepsilon \oplus A_{\omega_\varepsilon})$ teremos apenas $\sigma(A_\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e, portanto, o espectro do operador A_ε converge para o espectro do operador A_0 . $\square$

CAPÍTULO 4

CONTINUIDADE DOS EQUILÍBRIOS, VARIEDADES INSTÁVEIS E ATRATORES

No capítulo precedente vimos o comportamento das partes lineares dos operadores sob a perturbação que estamos considerando no domínio e, com isto obteve-se um resultado com respeito a continuidade dos semigrupos não lineares via o uso da fórmula da variação das constantes. Desta forma, o presente capítulo é dedicado a estudar quando os atratores e soluções estacionárias serão semicontínuos superior e inferiormente, e, portanto contínuos em relação a essas perturbações. Além disso, ainda neste capítulo veremos que as variedades instáveis locais para um equilíbrio são contínuas quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como exemplo da técnica similar a empregada neste capítulo veja [2].

4.1 Continuidade dos Conjuntos de Equilíbrio

Com o intuito de obter a continuidade dos atratores iniciemos explorando a continuidade de uma classe de elementos que pertencem ao atrator, as soluções de equilíbrio.

As soluções de equilíbrio dos problemas (2.4) e (2.32) são aquelas que independem do tempo. Em outras palavras, as soluções de equilíbrio de (2.4), $\varepsilon \in (0, 1]$, são as soluções da equação elíptica

$$A_\varepsilon u_\varepsilon^* = F(u_\varepsilon^*), \quad (\mathbf{E}_\varepsilon)$$

e, denota-se por $\mathcal{E}_\varepsilon$ o conjunto das soluções de $(\mathbf{E}_\varepsilon)$. E as soluções de

$$A_0 u_0^* = F(u_0^*), \quad (\mathbf{E}_0)$$

são as soluções de equilíbrio do problema limite (2.32) e denota-se por $\mathcal{E}_0$ o conjunto das soluções de $(\mathbf{E}_0)$.

Lema 4.1.1. *Para $\varepsilon \in (0, 1]$, o conjunto $\mathcal{E}_\varepsilon$ é uniformemente limitado em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, bem como $\mathcal{E}_0$ é uniformemente limitado em $X^{\frac{1}{2}}$.*

Demonstração. Multiplicando a equação $(\mathbf{E}_\varepsilon)$ por u_ε^* , integrando sobre Ω_ε e usando as condições de elipticidade (2.1) e de dissipatividade (2.3), tem-se

$$c_1 \|u_\varepsilon^*\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^* F(u_\varepsilon^*) \, dx \leq \int_{\Omega_\varepsilon} (\tau(u_\varepsilon^*)^2 + c_\tau) \, dx \leq \tau \|u_\varepsilon^*\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + c_\tau |\Omega_\varepsilon|,$$

onde $c_1 = \min \left\{ \vartheta_0, \inf_{\bar{\Omega}} V \right\}$. Logo, escolhendo τ tal que $\tau \leq \frac{c_1}{2}$, tem-se

$$\|u_\varepsilon^*\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \frac{2c_\tau |\Omega_\varepsilon|}{c_1} \leq \frac{2c_\tau |\Omega|}{c_1} =: R^2.$$

Portanto, $\|u_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq R$. E, de maneira análoga, conclui-se que $\mathcal{E}_0$ é uniformemente limitado em $X^{\frac{1}{2}}$. $\square$

Lema 4.1.2. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno valem as seguintes estimativas:

$$\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega_\varepsilon))} \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases},$$

onde a constante C independe de ε .

Demonstração. A demonstração deste lema segue as ideias da demonstração do Teorema 3.1.6. $\square$

Lema 4.1.3. Para $\varepsilon \in (0, 1]$, a família de operadores $A_\varepsilon^{-1} : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ converge compactamente para o operador $A_0^{-1} : X_0^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_0^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Inicialmente, mostremos que a família $\{A_\varepsilon^{-1}\}_{\varepsilon \in [0, 1]}$ é formada por operadores compactos. Seja $g_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ (para $\varepsilon = 0$, convencionamos $\Omega_0 := \Omega$) tal que $\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq 1$. Então para $v_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}g_\varepsilon$, temos

$$C_1 \|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq (A_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon v_\varepsilon \, dx, \quad (4.1)$$

onde $C_1 = \min \{ \vartheta_0, \inf_{\bar{\Omega}} V \}$.

Observe que, pela Desigualdade de Young (Lema 1.1.2) e sendo C_2 a constante de imersão de $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ em $L^2(\Omega_\varepsilon)$ (Observação 1.1.12), obtemos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} g_\varepsilon v_\varepsilon \, dx \leq \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\delta}{2} |g_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2\delta} |v_\varepsilon|^2 \, dx \leq \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\delta} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \frac{\delta}{2} + \frac{C_2^2}{2\delta} \|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (4.2)$$

Utilizando o obtido em (4.2) em (4.1), temos

$$C_1 \|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \frac{\delta}{2} + \frac{C_2^2}{2\delta} \|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2,$$

logo,

$$\|v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \frac{\delta^2}{2\delta C_1 - C_2^2}, \quad (4.3)$$

para todo $\delta > 0$. E, portanto, existe $C > 0$, tal que

$$A_\varepsilon^{-1}(B_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}(0, 1)) \subset B_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)}(0, C), \text{ para quaisquer } \varepsilon \in [0, 1].$$

Logo, $A_\varepsilon^{-1} \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega_\varepsilon), H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, e como a imersão $H_0^1(\Omega_\varepsilon) \hookrightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$ é compacta, segue que A_ε^{-1} é um operador compacto de $L^2(\Omega_\varepsilon)$ nele mesmo.

O Lema 4.1.2 assegura que $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{-1}$, o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Lema 4.1.4. *Sejam $u^* \in X_0^{\frac{1}{2}}$, uma função mensurável $\theta : \Omega \rightarrow [0, 1]$ e $\delta > 0$, então para quaisquer $u, v \in B_{X_0^{\frac{1}{2}}}(u^*, \delta) := \left\{ u \in X_0^{\frac{1}{2}} : \|u - u^*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} < \delta \right\}$, a função $\gamma_\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$\gamma_\delta(x) := f'((1 - \theta(x))u(x) - \theta(x)v(x)) - f'(u^*(x))$$

verifica as propriedades: $\gamma_\delta \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma_\delta \in L^2(\Omega)$ com $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)} = 0$, e portanto, $\gamma_\delta \in L^p(\Omega)$ com $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)} = 0$ para $p \in [2, \infty)$.

Demonstração. Das propriedades (2.2) e (2.3) da função f segue que função $\gamma_\delta \in L^\infty(\Omega)$ e $\|\gamma_\delta\|_\infty \leq C$, com C independente de ε , e portanto, $\gamma_\delta \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [2, \infty)$. Basta mostrar que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)} = 0$ para $p \in [2, \infty)$.

Para $p = 2$, pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x \in \Omega$, existe $0 \leq \rho(x) \leq 1$ tal que

$$\begin{aligned} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |f'((1 - \theta(x))u(x) - \theta(x)v(x)) - f'(u^*(x))|^2 \, dx \\ &\leq L_{f'}^2 \int_{\Omega} |(1 - \theta(x))u(x) - \theta(x)v(x) - u^*(x)|^2 \, dx \\ &= L_{f'}^2 \int_{\Omega} |(1 - \theta(x))(u(x) - u^*(x)) - \theta(x)(v(x) - u^*(x))|^2 \, dx \\ &\leq L_{f'}^2 (\|(1 - \theta)u - u^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta(v - u^*)\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq 2L_{f'}^2 \delta^2, \end{aligned}$$

onde $L_{f'} = \sup_{x \in \Omega} (f''((1 - \rho(x))((1 - \theta(x))u(x) - \theta(x)v(x)) + \rho(x)u^*(x)))$, e portanto, $\|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta$, $C > 0$, o que implica que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Para $p > 2$, pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |\gamma_\delta|^p \, dx = \int_{\Omega} |\gamma_\delta|^{p-2} |\gamma_\delta|^2 \, dx \leq \|\gamma_\delta\|_\infty^{p-2} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

e portanto, $\|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\gamma_\delta\|_\infty^{\frac{p-2}{p}} \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}} \leq C \|\gamma_\delta\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2}{p}}$, e $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\gamma_\delta\|_{L^p(\Omega)} = 0$. $\square$

Teorema 4.1.5. *Considere $F : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon$ o operador de Nemitskii de f em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ assumindo valores em X_ε , isto é $F(u_\varepsilon)(x) = f(u_\varepsilon(x))$, $x \in \Omega_\varepsilon$, então F é um operador diferenciável de Fréchet. Além disso,*

- (1) *A aplicação derivada $F' : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)$ é contínua, e portanto, o operador de Nemitskii $F : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon$ é continuamente diferenciável;*
- (2) *Se $\{u_\varepsilon^*\}$ $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_0^* \in X_0^{\frac{1}{2}}$ e $0 \notin \sigma(A_0 - f'(u_0^*))$, então $f'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon^{-1}$ converge compactamente para $f'(u_0^*)A_0^{-1}$.*

Demonstração. Para $x \in \Omega_\varepsilon$ fixado, a derivada de Gâteaux de F em u_ε , na direção de v_ε , é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v_\varepsilon}(u_\varepsilon)(x) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_\varepsilon + tv_\varepsilon)(x) - F(u_\varepsilon)(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_\varepsilon(x) + tv_\varepsilon(x)) - f(u_\varepsilon(x))}{t} \\ &= f'(u_\varepsilon(x))v_\varepsilon. \end{aligned}$$

Com isto vejamos a diferenciabilidade (a Fréchet) da aplicação F em um ponto $v_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Como $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon)$ com $n \geq 3$ e pelas Desigualdade de Hölder com índices conjugados $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{n-2}$, e Desigualdade do Valor Médio, para cada $x \in \Omega_\varepsilon$ existem $0 < \theta(x)$, $\rho(x) < 1$, tais que

$$\begin{aligned} \|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon) - F'(u_\varepsilon) \cdot (u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon}^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |f(u_\varepsilon(x)) - f(v_\varepsilon(x)) - f'(u_\varepsilon(x))(u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x))|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\gamma_{u_\varepsilon, v_\varepsilon}|^2 |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)|^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\gamma_{u_\varepsilon, v_\varepsilon}|^n dx \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\leq \|\gamma_{u_\varepsilon, v_\varepsilon}\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)}^2 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon)}^2 \\ &\leq C \|\gamma_{u_\varepsilon, v_\varepsilon}\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)}^2 \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2, \end{aligned}$$

onde $\gamma_{u_\varepsilon, v_\varepsilon}(x) = f'((1 - \theta(x))u_\varepsilon(x) + \theta(x)v_\varepsilon(x)) - f'(v_\varepsilon(x))$ e $C > 0$.

Assim, pelo Lema 4.1.4 tomando $u^* = u_\varepsilon$, obtemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon) - F'(u_\varepsilon) \cdot (u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon}^2}{\|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^2} = 0,$$

e portanto, o operador F é (Fréchet) diferenciável.

(1) A aplicação derivada $F' : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)$ é contínua. De fato, considere a sequência $\{u_{\varepsilon_n}^*\}$ $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -convergente para u_0^* , logo

$$\begin{aligned} \|F'(u_{\varepsilon_n}^*) - F'(u_0^*)\|_{\mathcal{L}(X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}, X_{\varepsilon_n})} &= \sup_{\substack{u_{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ \|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}} = 1}} \|F'(u_{\varepsilon_n}^*) - F'(u_0^*)(u_{\varepsilon_n})\|_{X_{\varepsilon_n}} \\ &= \sup_{\substack{u_{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ \|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}} = 1}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |F'(u_{\varepsilon_n}^*)(x)u_{\varepsilon_n}(x) - F'(u_0^*)(x)u_{\varepsilon_n}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

usando o fato de que para cada $x \in \Omega_\varepsilon$ existe $0 < \theta(x) < 1$ e $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon)$, $n \geq 3$, da Desigualdade de Hölder utilizando como índices conjugados $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{n-2}$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |F'(u_{\varepsilon_n}^*)(x)u_{\varepsilon_n}(x) - F'(u_0^*)(x)u_{\varepsilon_n}(x)|^2 dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} |F'(u_{\varepsilon_n}^*)(x) - F'(u_0^*)(x)|^2 |u_{\varepsilon_n}(x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} |f''((1 - \theta(x))u_{\varepsilon_n}^*(x) + \theta(x)u_0^*(x))|^2 |u_{\varepsilon_n}^*(x) - u_0^*(x)|^2 |u_{\varepsilon_n}(x)|^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{\varepsilon_n}^*(x) - u_0^*(x)|^2 |u_{\varepsilon_n}(x)|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u_{\varepsilon_n}^*(x) - u_0^*(x)|^n dx \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |u_{\varepsilon_n}(x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &= \|u_{\varepsilon_n}^* - u_0^*\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)}^2 \|u_{\varepsilon_n}\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|u_{\varepsilon_n}^* - u_0^*\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)}^2 \|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}}^2, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|F'(u_{\varepsilon_n}^*) - F'(u_0^*)\|_{\mathcal{L}(X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}, X_{\varepsilon_n})} &\leq C \sup_{\substack{u_{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ \|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}} = 1}} \left\{ \|u_{\varepsilon_n}^* - u_0^*\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)}^2 \|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}}^2 \right\} \\ &\leq C \sup_{\substack{u_{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ \|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}} = 1}} \left\{ \|u_{\varepsilon_n}^* - u_0^*\|_{L^n(\Omega_\varepsilon)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, novamente pela Desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{\varepsilon_n}^*(x) - u_0^*(x)|^p dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{\varepsilon_n}^*(x) - u_0^*(x)|^{p-2} |u_{\varepsilon_n}^*(x) - u_0^*(x)|^2 dx \\ &\leq \|u_{\varepsilon_n}^* - u_0^*\|_\infty^{p-2} \|u_{\varepsilon_n}^* - u_0^*\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2, p > 2, \end{aligned}$$

assim como $\{u_{\varepsilon_n}^*\}$ é $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -convergente para u_0^* , temos que $\{u_{\varepsilon_n}^*\}$ é convergente para u_0^* em $L^2(\Omega_\varepsilon)$. Além disso, $\|u_{\varepsilon_n}^*\|_\infty, \|u_0^*\|_\infty < C$, para alguma constante $C > 0$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{\varepsilon_n}^* - u_0^*\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = 0, p > 2.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F'(u_{\varepsilon_n}^*) - F'(u_0^*)\|_{\mathcal{L}(X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)} = 0.$$

(2) Se $\{u_\varepsilon^*\}$ $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_0^* \in X_0^{\frac{1}{2}}$ e $0 \notin \sigma(A_0 - f'(u_0^*))$, então $f'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon^{-1}$ converge compactamente para $f'(u_0^*)A_0^{-1}$ (aqui usaremos como abuso de notação f para denotar o operador de Nemitskii da função f em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ assumindo valores em X_ε).

De fato, considere $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, assim segue da convergência compacta $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{-1}$, que em particular $A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{-1}u_\varepsilon$, e portanto, pela continuidade da aplicação derivada obtemos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon = f'(u_0^*)A_0^{-1}u_\varepsilon$.

Seja $\{u_\varepsilon\} \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ com $\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = 1$. Como $\{A_\varepsilon u_\varepsilon\}$ é relativamente compacta, para cada sequência $\{A_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}\}$ existe uma subsequência $\{A_{\varepsilon'_n} u_{\varepsilon'_n}\}$ e $u'_0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$ tal que $\lim_{n' \rightarrow 0} A_{\varepsilon'_n} u_{\varepsilon'_n} = u'_0$, logo $\lim_{n' \rightarrow 0} f'(u_{\varepsilon'_n}^*)A_{\varepsilon'_n} u_{\varepsilon'_n} = f'(u_0^*)u'_0$, o que implica que $\{f'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon u_\varepsilon\}$ é relativamente compacta. $\square$

No que segue assumiremos F nas condições do Teorema 4.1.5.

Definição 4.1.6. Uma **medida de não compacidade**¹ μ em um espaço métrico completo Y é uma função $\mu : 2^Y \rightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) $\mu(A) = 0$ se, e somente se, A é relativamente compacto;
- (2) $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$;
- (3) $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

¹Para mais detalhes veja [28, p. 04].

Lema 4.1.7. Para todo $\theta \in (0, 1)$, a família $\{A_\varepsilon^{-\theta}\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ é coletivamente compacta e $A_\varepsilon^{-\theta} \rightarrow A_0^{-\theta}$ em X_ε . Além disso, se $\{u_\varepsilon^*\} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_0^* \in X_0^{\frac{1}{2}}$, então $F'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon^{-\theta}$ converge compactamente para $F'(u_0^*)A_0^{-\theta}$.

Demonstração. Considere $S_{0,\phi}$ o setor do operador A_ε e Γ a fronteira de $S_{0,\phi}$. Como

$$A_\varepsilon^{-\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-\theta} (\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda,$$

segue que a integral acima é absolutamente uniformemente convergente para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Logo, dado $\delta > 0$, podemos dividir $\Gamma = \Gamma_1^\delta \cup \Gamma_2^\delta$ de tal forma que Γ_1^δ seja limitada e a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^\delta} \left\| \lambda^{-\theta} (\lambda - A_\varepsilon)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} d\lambda \leq \delta,$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Sobre Γ_1^δ , reescrevemos a integral como

$$B_\varepsilon := \frac{A_\varepsilon^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^\delta} \lambda^{-\theta} A_\varepsilon (\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda,$$

e usando o fato de que $\left\| \lambda^{-\theta} A_\varepsilon (\lambda - A_\varepsilon)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} = \left\| \lambda^{-\theta} (I - \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)}$ é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ e, ainda, como $\{A_\varepsilon^{-1} : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ é coletivamente compacta, segue que $\{B_\varepsilon : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ é coletivamente compacta. Seja $\mu : 2^{X_\varepsilon} \rightarrow [0, +\infty]$ uma medida de não compacidade. Assim, tomando quaisquer seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{u_n\}, u_n \in X_\varepsilon$ com $\|u_n\|_{X_\varepsilon} = 1$, obtemos

$$\mu(\{A_{\varepsilon_n}^{-\theta} u_n\}) \leq \mu(B_{\varepsilon_n}) + \mu\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^\delta} \lambda^{-\theta} (\lambda - A_{\varepsilon_n})^{-1} d\lambda u_n\right) \leq \delta.$$

Logo das seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{u_n\}, u_n \in X_\varepsilon$ com $\|u_n\|_{X_\varepsilon} = 1$, obtemos $\mu(\{A_{\varepsilon_n}^{-\theta} u_n\}) = 0$ e que $\{A_\varepsilon^{-\theta} : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ é coletivamente compacta. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$A_\varepsilon^{-\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-\theta} (\lambda - A_\varepsilon)^{-1} d\lambda \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-\theta} (\lambda - A_0)^{-1} d\lambda = A_0^{-\theta}, \lambda \in \Gamma.$$

Vejamos, agora, a convergência compacta de $F'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon^{-\theta}$ para $F'(u_0^*)A_0^{-\theta}$. Do Teorema 4.1.5 e da hipótese que se $\{u_\varepsilon^*\} X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_0^* \in X_0^{\frac{1}{2}}$, temos que para $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} & \left\| F'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon^{-\theta} u_\varepsilon - F'(u_0^*)A_0^{-\theta} u_\varepsilon \right\|_{X_\varepsilon} \\ & \leq \left\| F'(u_\varepsilon^*)(A_\varepsilon^{-\theta} u_\varepsilon - A_0^{-\theta} u_\varepsilon) \right\|_{X_\varepsilon} + \left\| (F'(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*))A_0^{-\theta} u_\varepsilon \right\|_{X_\varepsilon} \\ & \leq \|F'(u_\varepsilon^*)\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)} \left\| A_\varepsilon^{-\theta} u_\varepsilon - A_0^{-\theta} u_\varepsilon \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \left\| (F'(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*))A_0^{-\theta} u_\varepsilon \right\|_{X_\varepsilon} \\ & \leq C \left\| A_\varepsilon^{-\theta} u_\varepsilon - A_0^{-\theta} u_\varepsilon \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \left\| (F'(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*))A_0^{-\theta} u_\varepsilon \right\|_{X_\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde a constante $C > 0$ é obtida através do Princípio da Limitação Uniforme. Logo, $F'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon^{-\theta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F'(u_0^*)A_0^{-\theta}$. E, ainda, dada $\{u_\varepsilon\}$, $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$ com $\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} = 1$, da compacidade coletiva de $\{A_\varepsilon^{-\theta}\}$, temos que a família $\{A_\varepsilon^{-\theta}u_\varepsilon\}$ é relativamente compacta, e portanto, temos pela continuidade da aplicação derivada $F' : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)$, que a família $\{F'(u_\varepsilon^*)A_\varepsilon^{-\theta}u_\varepsilon\}$ é relativamente compacta. $\square$

Lema 4.1.8. *Suponha que $\{u_\varepsilon^*\}$ $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u_0^* \in X_0^{\frac{1}{2}}$ em $X^{\frac{1}{2}}$ e que $0 \notin \sigma(A_0 - F'(u_0^*))$. Então, para qualquer $0 < \theta < 1$, existe $\bar{\varepsilon} \in (0, 1]$ tal que*

$$\{A_\varepsilon^\theta(A_\varepsilon - F'(u_\varepsilon^*))^{-1} : 0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}\}$$

é coletivamente compacta, uniformemente limitada e $A_\varepsilon^\theta(A_\varepsilon - F'(u_\varepsilon^))^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^\theta(A_0 - F'(u_0^*))^{-1}$.*

Demonstração. Considere $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ fixado, r_1 e r_2 tais que $1 > \beta + r_1$ e $r_2 = 1 - \beta - r_1$. Observe que

$$A_\varepsilon^\theta(A_\varepsilon - F'(u_\varepsilon^*))^{-1} = (A_\varepsilon)^{-(\beta+r_1-\theta)}(I - (A_\varepsilon)^{-r_2}F'(u_\varepsilon^*)(A_\varepsilon)^{-\beta-r_1}(A_\varepsilon)^{-r_2}).$$

De fato,

$$\begin{aligned} & (A_\varepsilon)^{-(\beta+r_1-\theta)}(I - (A_\varepsilon)^{-r_2}F'(u_\varepsilon^*)(A_\varepsilon)^{-\beta-r_1}(A_\varepsilon)^{-r_2}) \\ &= A_\varepsilon^\theta(A_\varepsilon)^{-\beta-r_1}[(A_\varepsilon)^{r_2}(I - (A_\varepsilon)^{-r_2}F'(u_\varepsilon^*)(A_\varepsilon)^{-\beta-r_1})^{-1}]^{-1} \\ &= A_\varepsilon^\theta[(A_\varepsilon)^{r_2}(I - (A_\varepsilon)^{-r_2}F'(u_\varepsilon^*)(A_\varepsilon)^{-\beta-r_1})(A_\varepsilon)^{\beta+r_1}]^{-1} \\ &= A_\varepsilon^\theta[(A_\varepsilon)^{r_2} - F'(u_\varepsilon^*)(A_\varepsilon)^{-\beta-r_1}](A_\varepsilon)^{\beta+r_1}]^{-1} \\ &= A_\varepsilon^\theta(A_\varepsilon - F'(u_\varepsilon^*))^{-1}. \end{aligned}$$

Como $\beta + r_1 < 1$ e $r_2 < 1$, segue do Lema 4.1.7 que a família $\{(A_\varepsilon)^{-r_2}F'(u_\varepsilon^*)(A_\varepsilon)^{-\beta-r_1}\}$ é coletivamente compacta. Logo, $(I - (A_\varepsilon)^{-r_2}F'(u_\varepsilon^*)(A_\varepsilon)^{-\beta-r_1})^{-1}$ converge compactamente para $(I - A_0^{-r_2}F'(u_0^*)A_0^{-\beta-r_1})^{-1}$. Como $\beta + r_1 - \theta < 1$, o resultado segue. $\square$

Proposição 4.1.9. *A família $\{\mathcal{E}_\varepsilon; \varepsilon \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$.*

Demonstração. Do Lema 4.1.1 temos que $\sup_{\varepsilon \in [0, 1]} \left\{ \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}; u_\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon \right\} < \infty$, e, ainda, como $\mathcal{E}_\varepsilon \subset \mathcal{A}_\varepsilon$ e $\overline{\bigcup_{\varepsilon \in [0, 1]} \mathcal{A}_\varepsilon}$ é compacta em X segue que, para cada sequência $\{u_\varepsilon\}$ neste conjunto,

existem uma subsequência $\{u_{\varepsilon_n}\} \subset \{u_\varepsilon\}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $u \in X^{\frac{1}{2}}$ tais que $\{u_{\varepsilon_n}\}$ converge fracamente para u em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e fortemente em X . E, ainda, do Lema 2.2.2 a aplicação $F : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon$ é limitada, logo o conjunto $\{F(u_\varepsilon) \in X_\varepsilon; 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ é limitado em X_ε , e pelo Lema 4.1.3 a família $\{A_\varepsilon^{-1}F(u_\varepsilon) \in X_\varepsilon; 0 \leq \varepsilon \leq 1\}$ é relativamente compacta em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, o que implica, que cada sequência desta família admite uma subsequência $\{A_{\varepsilon_n}^{-1}F(u_{\varepsilon_n}) \in X_{\varepsilon_n}; 0 \leq \varepsilon_n \leq 1\}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $u_0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$ tais que $A_{\varepsilon_n}^{-1}F(u_{\varepsilon_n})$ converge para u_0 em $X_0^{\frac{1}{2}}$.

Tomando a subsequência $\{u_{\varepsilon_n}\} \subset \{u_\varepsilon\}$ com $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $u \in X^{\frac{1}{2}}$ e $u_{\varepsilon_n} = A_{\varepsilon_n}^{-1}f(u_{\varepsilon_n})$ convergindo para u_0 em $X_0^{\frac{1}{2}}$, o que implica, $u = u_0$. E, ainda, da continuidade de F , segue que $F(u_{\varepsilon_n}) \rightarrow F(u)$ em X_ε , o que resulta $A_{\varepsilon_n}^{-1}F(u_{\varepsilon_n}) \rightarrow A_0^{-1}F(u)$, isto é, $u = A_0^{-1}F(u)$, $u \in \mathcal{E}_0$. $\square$

Definição 4.1.10. Uma solução de equilíbrio u_0^* de $(\mathbf{P}_0)$ se diz hiperbólica se o espectro do operador $A_0 - F'(u_0^*)$, $\sigma(A_0 - F'(u_0^*))$, for disjunto do eixo imaginário.

Proposição 4.1.11. *Se todas as soluções de equilíbrio u_0^* de $(\mathbf{P}_0)$ são isoladas, então estas existem em um número finito. Qualquer solução de equilíbrio hiperbólica de $(\mathbf{P}_0)$ é isolada.*

Demonstração. Uma vez que A_0 possui resolvente compacto, segue que $\mathcal{E}_0$ é compacto em $X_0^{\frac{1}{2}}$, e portanto, os pontos de equilíbrio de $(\mathbf{P}_0)$ existem em número finito, pois caso contrário, existiria um sequência convergente em $\mathcal{E}_0$ para algum ponto de $\mathcal{E}_0$. Assim, resta mostrar que as soluções de equilíbrio hiperbólicas de $(\mathbf{P}_0)$ são isoladas. Para tal, observe que $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ se, e somente, se u_0^* é ponto fixo da aplicação

$$\begin{aligned} \psi : X_0^{\frac{1}{2}} &\longrightarrow X_0^{\frac{1}{2}} \\ u &\longmapsto \psi(u) := (A_0 - F'(u_0^*))^{-1}(F(u) - F'(u_0^*)u). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que ψ é uma contração de $\overline{B}_\delta(u_0^*) := \{u \in X_0^{\frac{1}{2}}; \|u - u_0^*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}$ em si mesma. E, portanto, obtemos que u_0^* é o único elemento de $\overline{B}_\delta(u_0^*) \cap \mathcal{E}_0$, e assim, isolado. De fato, considere $\delta > 0$ e $u, v \in \overline{B}_\delta(u_0^*)$, usando Lema 4.1.4, segue que

$$\begin{aligned} \|\psi(u) - \psi(v)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} &= \|(A_0 - F'(u_0^*))^{-1}[F(u) - F(v) - F'(u_0^*)(u - v)]\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \\ &= \|A_0^{\frac{1}{2}}(A_0 - F'(u_0^*))^{-1}[F(u) - F(v) - F'(u_0^*)(u - v)]\|_X \\ &\leq \|A_0^{\frac{1}{2}}(A_0 - F'(u_0^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \|F(u) - F(v) - F'(u_0^*)(u - v)\|_X \\ &\leq C \|F(u) - F(v) - F'(u_0^*)(u - v)\|_X, \end{aligned}$$

e, ainda

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v) - F'(u_0^*)(u - v)\|_X^2 &= \int_{\Omega} |F(u) - F(v) - F'(u_0^*)(u - v)|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} |F'((1 - \theta(x))u - \theta(x)v) - F'(u_0^*)(u - v)|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\gamma_\delta|^2 |(u - v)|^2 \, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\gamma_\delta|^n \, dx \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} |(u - v)|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &= \|\gamma_\delta\|_{L^n(\Omega)}^2 \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2, \end{aligned}$$

e utilizando o feito no Lema 4.1.4, obtemos

$$\|\psi(u) - \psi(v)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \leq C \|\gamma_\delta\|_{L^n(\Omega)}^2 \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq C\delta \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq C\delta \|u - v\|_{X_0^{\frac{1}{2}}}.$$

Logo, escolhendo δ tal que $C\delta < \frac{1}{2}$, obtemos que ψ é uma contração. E, ainda, se $v \in \overline{B}_\delta(u_0^*)$, então $\|\psi(v) - u_0^*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} = \|\psi(v) - \psi(u_0^*)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \leq c \|v - u_0^*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} < \delta$, para alguma constante $0 \leq c < 1$, o que implica que $\psi(\overline{B}_\delta(u_0^*)) \subset \overline{B}_\delta(u_0^*)$, isto é, ψ possui um único ponto fixo em $\overline{B}_\delta(u_0^*)$. $\square$

Lema 4.1.12. *Seja u_0^* seja uma solução de equilíbrio hiperbólica de $(\mathbf{P}_0)$, então a seguinte identidade é válida:*

$$\begin{aligned} & (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} \\ &= [I - (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} F'(u_0^*)] (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) [I - F'(u_0^*) (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Demonstração. De fato, inicialmente observe que

$$\begin{aligned} I &= \left((A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} A_\varepsilon \right) \left((A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} A_\varepsilon \right)^{-1} \\ &= \left[(A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} (A_\varepsilon + F'(u_0^*) - F'(u_0^*)) \right] \left[A_\varepsilon^{-1} (A_\varepsilon + F'(u_0^*)) \right] \\ &= [I - (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} F'(u_0^*)] (I + A_\varepsilon^{-1} F'(u_0^*)), \end{aligned}$$

o que implica que $I - (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} F'(u_0^*)$ é o operador inverso do operador $I + A_\varepsilon^{-1} F'(u_0^*)$.

Assim, concluímos que a identidade (4.4) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} & (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) [I - F'(u_0^*) (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}] \\ &= (I + A_\varepsilon^{-1} F'(u_0^*)) \left((A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como $F'(u_0^*) (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} = I - A_0 (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}$, expandido o lado direito da igualdade (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} & (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) [I - F'(u_0^*) (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}] \\ &= A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^{-1} F'(u_0^*) (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} - A_0^{-1} + A_0^{-1} (I - A_0 (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}) \\ &= A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^{-1} F'(u_0^*) (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $A_\varepsilon^{-1} = (I + A_\varepsilon^{-1} F'(u_0^*)) (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}$. Logo expandido o lado esquerdo em (4.5), obtemos

$$\begin{aligned} & (I + A_\varepsilon^{-1} F'(u_0^*)) \left((A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} \right) \\ &= A_\varepsilon^{-1} - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} - A_\varepsilon^{-1} F'(u_0^*) (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.1.13. *Sejam $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ um equilíbrio hiperbólico e $f \in L^2(\Omega)$ tal que $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$, então valem as seguintes estimativas:*

$$\left\| (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} f - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} f \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases},$$

onde a constante $C > 0$ independe de ε .

Demonstração. De fato, pelo Lema 4.1.8, segue que

$$\begin{aligned}
& \left\| (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}f - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}f \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \left\| (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left[(A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} \right] f \right\|_{X_\varepsilon} \\
& \leq \left\| \left[I - (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}F'(u_0^*) \right] (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) \left[I - F'(u_0^*)(A_0 + F'(u_0^*))^{-1} \right] f \right\|_{X_\varepsilon} \\
& \leq \left\| I - (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}F'(u_0^*) \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \left\| (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \left\| I - F'(u_0^*)(A_0 + F'(u_0^*))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\
& \leq \left\| I - (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}F'(u_0^*) \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \left\| A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \left\| I - F'(u_0^*)(A_0 + F'(u_0^*))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando o Lema 4.1.2, obtemos a existência da constante $C > 0$ (que irá depender de $\|F'(u_0^*)\|_\infty$), tal que

$$\begin{aligned}
\left\| (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}f - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}f \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} & \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} & n = 3, \\
\left\| (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}f - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}f \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} & \leq C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} & n = 4, \\
\left\| (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}f - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}f \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} & \leq C \varepsilon & n \geq 5.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.14. *Suponha que $u_0^* \in \mathcal{E}_0$ seja um equilíbrio hiperbólico e que $0 \notin \sigma(A_0 - F'(u_0^*))$. Então, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta > 0$ tais que existe um único equilíbrio $u_\varepsilon^* \in \mathcal{E}_\varepsilon \cap \overline{B_\delta^\varepsilon}(u_0^*) := \left\{ u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \|u_\varepsilon - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta \right\}$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Além disso,*

$$\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases},$$

onde a constante $C > 0$ independe de ε .

Demonstração. Observe que, pelo Lema 4.1.8 e da hiperbolicidade de u_0^* segue que $\sigma(A_\varepsilon - F'(u_0^*))$ é disjunto do eixo imaginário, assim existe $(A_\varepsilon - F'(u_0^*))^{-1}$ existe. Ainda, considerando o Lema 4.1.8 com $\theta = \frac{1}{2}$, segue que existe constante $K > 0$, tal que

$$\left\| (A_\varepsilon - F'(u_0^*))^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq K, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Se u_ε é uma solução de equilíbrio de $(\mathbf{E}_\varepsilon)$, então

$$0 = (A_\varepsilon - F'(u_0^*)) \left[u_\varepsilon + (A_\varepsilon - F'(u_0^*))^{-1} (F'(u_0^*)u_\varepsilon - F(u_\varepsilon)) \right].$$

Para mostrarmos que u_ε é uma solução de equilíbrio de $(\mathbf{E}_\varepsilon)$ equivalentemente mostraremos que u_ε é ponto fixo da seguinte aplicação

$$\psi_\varepsilon(u_\varepsilon) := (A_\varepsilon - F'(u_0^*))^{-1} (F(u_\varepsilon) - F'(u_0^*)u_\varepsilon).$$

Como $(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon - F'(u_0^*))^{-1}$ converge compactamente para $A_0^{\frac{1}{2}}(A_0 - F'(u_0^*))^{-1}$ (Lema 4.1.8), segue que

$$\psi_\varepsilon(u_0^*) := (A_\varepsilon - F'(u_0^*))^{-1}(A_0 - F'(u_0^*))u_0^* \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (A_0 - F'(u_0^*))^{-1}(A_0 - F'(u_0^*))u_0^* = u_0^* \text{ em } X_0^{\frac{1}{2}}. \quad (4.6)$$

Agora, vejamos que existem $\delta > 0$ (independente de ε) e $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ tais que ψ_ε é uma contração de $\overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*) := \left\{ u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \|u_\varepsilon - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta \right\}$ em si próprio, uniformemente em $\varepsilon_0 \in (0, 1]$. Inicialmente vejamos que ψ_ε é uma contração. De fato, sejam $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in \overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*)$ e observe que

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon(u_\varepsilon) - \psi_\varepsilon(v_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \|(A_\varepsilon - F'(u_0^*))^{-1}[F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon) - F'(u_0^*)(u_\varepsilon - v_\varepsilon)]\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \|(A_\varepsilon - F'(u_0^*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \|F(u_\varepsilon) - F(v_\varepsilon) - F'(u_0^*)(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\|_{X_0}, \end{aligned}$$

assim utilizando o Lema 4.1.4 e pelo Teorema 4.1.5, segue que

$$\|\psi_\varepsilon(u_\varepsilon) - \psi_\varepsilon(v_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C\delta \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Logo, escolhendo $\delta > 0$ tal que $C\delta < \frac{1}{2}$, segue que ψ_ε é contração.

Para mostrar que $\psi_\varepsilon(\overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*)) \subset \overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*)$, observe que, se $u_\varepsilon \in \overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*)$, então

$$\|\psi_\varepsilon(u_\varepsilon) - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} \|u_\varepsilon - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|\psi_\varepsilon(u_0^*) - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

De (4.6) segue que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\|\psi_\varepsilon(u_0^*) - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\delta}{2}$, e para qualquer $u_\varepsilon \in \overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*)$ temos $\|\psi_\varepsilon(u_\varepsilon) - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta$.

Assim, $\psi_\varepsilon : \overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*) \rightarrow \overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*)$ é uma contração para qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Então existe um único ponto fixo de ψ_ε em $\overline{B}_\delta^\varepsilon(u_0^*)$, o qual chamaremos de u_ε^* .

Por fim, veremos que $u_\varepsilon^* \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0^*$ em $X_0^{\frac{1}{2}}$. De fato, como $A_\varepsilon u_\varepsilon^* = F(u_\varepsilon^*)$ e $A_0 u_0^* = F(u_0^*)$, segue que

$$A_0 u_0^* + F'(u_0^*)u_0^* = F(u_0^*) + F'(u_0^*)u_0^* \quad (4.7)$$

$$A_\varepsilon u_\varepsilon^* + F'(u_0^*)u_\varepsilon^* = F(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*)u_\varepsilon^*, \quad (4.8)$$

e definindo os operadores $L_0 : X_0^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_0$, $L_0\psi = A_0\psi + F'(u_0^*)\psi$ e $L_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon$, $L_\varepsilon\psi = A_\varepsilon\psi + F'(u_0^*)\psi$, obtemos $u_0^* = L_0^{-1}[F(u_0^*) + F'(u_0^*)u_0^*]$ e $u_\varepsilon^* = L_\varepsilon^{-1}[F(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*)u_\varepsilon^*]$.

Assim, escrevendo $z_\varepsilon^* = F(u_\varepsilon^*) - F(u_0^*) + F'(u_0^*)(u_\varepsilon^* - u_0^*)$, temos

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|(L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1})[F(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*)u_\varepsilon^*] + L_0^{-1}z_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &= \|(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1})[F(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*)u_\varepsilon^*] + (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}L_0^{-1}z_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon} \\ &\leq \|(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(L_\varepsilon^{-1} - L_0^{-1})\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \|F(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*)u_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon} + \|(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}L_0^{-1}z_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 4.1.12, segue que

$$\begin{aligned} &(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}[(A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1}] \\ &= [I - (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1}F'(u_0^*)](A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - F'(u_0^*)(A_0 + F'(u_0^*))^{-1}]. \end{aligned}$$

E, ainda, pelo Lema 4.1.13, temos que para $f \in L^2(\Omega)$ tal que $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$, valem as seguintes estimativas:

$$\left\| (A_\varepsilon + F'(u_0^*))^{-1} f - (A_0 + F'(u_0^*))^{-1} f \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases}$$

onde a constante $C > 0$ independe de ε .

Por outro lado, como $z_\varepsilon^* = F(u_\varepsilon^*) - F(u_0^*) + F'(u_0^*)(u_\varepsilon^* - u_0^*)$ e F é diferenciável (Teorema 4.1.5), segue que

$$\left\| (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} L_0^{-1} z_\varepsilon^* \right\|_{X_\varepsilon} \leq \left\| (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} L_0^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \|z_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon} \leq C \|z_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon} \leq \frac{1}{2} \|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, uma vez que

$$\left\| (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} L_0^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} = \left\| (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} A_0^{-\frac{1}{2}} A_0^{\frac{1}{2}} L_0^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \leq \|A_0^{-\frac{1}{2}}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \|L_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_0, X_0^{\frac{1}{2}})},$$

é uniformemente limitado (Lema 4.1.8). Assim, pelo Teorema 4.1.5, temos para

• $n = 3$

$$\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \|F(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*)u_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon} \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

e

$$\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C(\|F(u_\varepsilon^*)\|_{X_\varepsilon} + \|F'(u_0^*)u_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon}) \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

o que implica, $\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

• $n = 4$

$$\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \|F(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*)u_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon} \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

e

$$\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C(\|F(u_\varepsilon^*)\|_{X_\varepsilon} + \|F'(u_0^*)u_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon}) \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}},$$

o que implica, $\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}$.

• $n \geq 5$

$$\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \|F(u_\varepsilon^*) + F'(u_0^*)u_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon} \varepsilon + \frac{1}{2} \|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

e

$$\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C(\|F(u_\varepsilon^*)\|_{X_\varepsilon} + \|F'(u_0^*)u_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon}) \varepsilon,$$

o que implica, $\|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq C \varepsilon$. □

4.2 Linearizações em Torno dos Equilíbrios

Para todo $\varepsilon \in [0, 1]$, defina os seguintes operadores $V_\varepsilon := -F'(u_\varepsilon^*) \in \mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)$. Como $u_\varepsilon^* \in \mathcal{E}_\varepsilon$, segue que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C$, para alguma constante $C > 0$, logo

$$|V_\varepsilon(x)| = |F'(u_\varepsilon^*)(x)| = |f'(u_\varepsilon^*(x))| \leq k,$$

onde $k = \sup \{|f'(b)|; |b| < \infty\}$. Portanto, $V_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon \in [0, 1]$.

Lema 4.2.1. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, vale a seguinte estimativa:*

$$\|V_\varepsilon - V_0\|_{X_\varepsilon} \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4, \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases}$$

onde a constante C independe de ε .

Demonstração. Utilizando as estimativas obtidas no Teorema 4.1.14, segue que

$$\begin{aligned} \|V_\varepsilon - V_0\|_{X_\varepsilon} &= \|F'(u_\varepsilon^*) - F'(u_0^*)\|_{X_\varepsilon} \\ &\leq \|f'(\xi_\varepsilon^*)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon^* - u_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4, \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Com as notações anteriores escrevemos $\overline{A}_\varepsilon = A_\varepsilon + V_\varepsilon$ e $B_\varepsilon = V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1}$, para todo $\varepsilon \in [0, 1]$. Como A_ε é um operador setorial e V_ε é um operador linear limitado, segue que o operador $\overline{A}_\varepsilon$ é um operador setorial e, assim, existem constantes $\phi_1 \in (0, \pi/2)$, $M_0 \geq 1$ (independente de ε), tais que

$$S_{0, \phi_1} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi_1 \leq |\arg(\lambda)| \leq \pi, \lambda \neq 0\} \subset \rho(\overline{A}_\varepsilon)$$

e

$$\|(\overline{A}_\varepsilon - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \leq \frac{M_0}{|\lambda|}, \text{ para todo } \lambda \in S_{0, \phi_1}. \quad (4.9)$$

De (4.9), segue que

$$\begin{aligned} \|\overline{A}_\varepsilon(\overline{A}_\varepsilon - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} &= \|((\overline{A}_\varepsilon - \lambda) + \lambda)(\overline{A}_\varepsilon - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\ &\leq \|I\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} + \|\lambda(\overline{A}_\varepsilon - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \leq 1 + M_0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

para todo $\lambda \in S_{0, \phi_1}$.

Lema 4.2.2. *A família de operadores $B_\varepsilon : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ com $\varepsilon \in (0, 1]$ converge compactamente para o operador $B_0 : X \rightarrow X$.*

Demonstração. Seja $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$. Segue, do Lema 4.1.2, que $A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon \rightarrow A_0^{-1}u_\varepsilon$. Logo, do Teorema 4.1.5, temos que $B_\varepsilon u_\varepsilon \rightarrow B_0 u_\varepsilon$. De fato, segue do Lema 4.1.2, que

$$\begin{aligned} \|B_\varepsilon u_\varepsilon - B_0 u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} &= \|V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon - V_0 A_0^{-1}u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \\ &\leq \|V_0\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)} \|A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon - A_0^{-1}u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|(V_\varepsilon - V_0)A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \\ &\leq \|V_0\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)} \|A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon - A_0^{-1}u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|V_\varepsilon - V_0\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon)} \|A_\varepsilon^{-1}u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Além disso, considere $\{u_\varepsilon\}$ em X_ε limitada fixada, então extraindo uma subsequência $\{u_{\varepsilon_n}\}$ e $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$ tal que $\{u_{\varepsilon_n}\}$ convirja fracamente para u_ε em X_ε , então $A_{\varepsilon_n}^{-1}u_{\varepsilon_n}$ converge para $A_0^{-1}u_\varepsilon$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Logo, segue do Teorema 4.1.5, que $B_{\varepsilon_n}u_{\varepsilon_n} = V_{\varepsilon_n}A_{\varepsilon_n}^{-1}u_{\varepsilon_n}$ converge para $B_0 u_\varepsilon = V_0 A_0^{-1}u_\varepsilon$. $\square$

Lema 4.2.3. *A seguinte identidade é válida:*

$$(\overline{A_\varepsilon})^{-1} - (\overline{A_0})^{-1} = (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + B_0)^{-1} - A_\varepsilon^{-1}(I + B_0)^{-1}(B_\varepsilon - B_0)(I + B_\varepsilon)^{-1}.$$

Demonstração. Observe que,

$$\begin{aligned} (I - B_\varepsilon)^{-1} - (I - B_0)^{-1} &= (I - B_0)^{-1}(I - B_0)(I - B_\varepsilon)^{-1} - (I - B_0)^{-1}(I - B_\varepsilon)(I - B_\varepsilon)^{-1} \\ &= (I - B_0)^{-1}[(I - B_0)(I - B_\varepsilon)^{-1} - (I - B_\varepsilon)(I - B_\varepsilon)^{-1}] \\ &= (I - B_0)^{-1}[(I - B_0) - (I - B_\varepsilon)](I - B_\varepsilon)^{-1} \\ &= (I - B_0)^{-1}(B_0 - B_\varepsilon)(I - B_\varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\overline{A_\varepsilon})^{-1} - (\overline{A_0})^{-1} &= (A_\varepsilon + V_\varepsilon)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1} \\ &= (A_\varepsilon A_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon + V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1} A_\varepsilon)^{-1} - (A_0 A_0^{-1} A_0 + V_0 A_0^{-1} A_0)^{-1} \\ &= A_\varepsilon^{-1}(I + V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1})^{-1} - A_0^{-1}(I + V_0 A_0^{-1})^{-1} \\ &\quad + A_\varepsilon^{-1}(I + V_0 A_0^{-1})^{-1} - A_\varepsilon^{-1}(I + V_0 A_0^{-1})^{-1} \\ &= A_\varepsilon^{-1}[(I + V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1})^{-1} - (I + V_0 A_0^{-1})^{-1}] + (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + V_0 A_0^{-1})^{-1} \\ &= A_\varepsilon^{-1}[(I + B_\varepsilon)^{-1} - (I + B_0)^{-1}] + (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + B_0)^{-1} \\ &= A_\varepsilon^{-1}(I - B_0)^{-1}(B_0 - B_\varepsilon)(I - B_\varepsilon)^{-1} + (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + B_0)^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.2.4. *Suponha que $0 \notin \sigma(\overline{A_0})$, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 \notin \sigma(\overline{A_\varepsilon})$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. E, ainda, $(\overline{A_\varepsilon})^{-1}$ converge compactamente para $(\overline{A_0})^{-1}$.*

Demonstração. Observe que,

$$\overline{A_\varepsilon} = A_\varepsilon + V_\varepsilon = (I + V_\varepsilon A_\varepsilon^{-1})A_\varepsilon = (I + B_\varepsilon)A_\varepsilon,$$

e pelo Lema 1.5.5, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 \notin \sigma(\overline{A_\varepsilon})$. Para provar que $(\overline{A_\varepsilon})^{-1}$ converge compactamente para $(\overline{A_0})^{-1}$, observe que para cada sequência em $\left\{u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\right\}$

com $\left\{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right\}$ uniformemente limitada, segue do Lema 1.5.5, que $\{(I + B_\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon\}$ é uniformemente limitada. Do mesmo argumento anterior, se escrevemos $v_\varepsilon = (I + B_\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon$, existe uma sequência $\{v_{\varepsilon_n}\}$ que converge para $v \in X_0^{\frac{1}{2}}$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e assim, $A_\varepsilon^{-1}v_{\varepsilon_n}$ converge fortemente em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ para $A_0^{-1}v_0$, isto é, para cada sequência em $\left\{u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\right\}$ com $\left\{\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right\}$ uniformemente limitada, existe uma subsequência $\{u_{\varepsilon_n}\}$ e $u_0 = A_0^{-1}v_0$ tal que $A_{\varepsilon_n}u_{\varepsilon_n}$ converge para u em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Vejamos, agora, que para cada $u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, temos que $(\overline{A_\varepsilon})^{-1}u \rightarrow (\overline{A_0})^{-1}u$ em X_ε . De fato, pela identidade dada no Lema 4.2.3, Lema 1.5.5 e Lema 4.2.2, segue que

$$\begin{aligned} \left\|(\overline{A_\varepsilon})^{-1} - (\overline{A_0})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \left\|(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})(I + B_0)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\ &\quad + \left\|(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1}(I + B_0)^{-1}(B_\varepsilon - B_0)(I + B_\varepsilon)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\ &\leq \left\|(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \left\|(I + B_0)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\ &\quad + \left\|(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}A_\varepsilon^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \left\|(I + B_0)^{-1}(B_\varepsilon - B_0)(I + B_\varepsilon)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\ &\leq C_1 \left\|(A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} + C_2 \|B_\varepsilon - B_0\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \\ &\leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Lema 4.2.5. *Se $A_\varepsilon : X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ é um operador linear invertível e V_0 um operador linear limitado tais que $(A_0 + V_0)$ e $(A_\varepsilon + V_0)$ são invertíveis, então*

$$(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1} = [I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0](A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}]. \quad (4.11)$$

Demonstração. Observe que,

$$\begin{aligned} I &= [(A_\varepsilon + V_0)^{-1}A_\varepsilon][(A_\varepsilon + V_0)^{-1}A_\varepsilon]^{-1} \\ &= [(A_\varepsilon + V_0)^{-1}(A_\varepsilon + V_0 - V_0)][A_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon + V_0)] \\ &= [I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0](I + A_\varepsilon^{-1}V_0), \end{aligned}$$

isto é, $I + A_\varepsilon^{-1}V_0$ é o operador inverso do operador $I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0$.

Com isso, para obter (4.11) é equivalente mostrar a seguinte igualdade

$$(I + A_\varepsilon^{-1}V_0)[(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1}] = (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}]. \quad (4.12)$$

Usando o fato de que $V_0(A_0 + V_0)^{-1} = I - A_0(A_0 + V_0)^{-1}$ para o lado direito de (4.12), obtemos

$$\begin{aligned} &(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}] \\ &= A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - A_\varepsilon^{-1}V_0(A_0 + V_0)^{-1} + A_0^{-1}V_0(A_0 + V_0)^{-1} \\ &= A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - A_\varepsilon^{-1}V_0(A_0 + V_0)^{-1} + A_0^{-1}[I - A_0(A_0 + V_0)^{-1}] \\ &= A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^{-1}V_0(A_0 + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1}. \end{aligned}$$

E, ainda, do fato de que $V_0(A_\varepsilon + V_0)^{-1} = I - A_\varepsilon(A_\varepsilon + V_0)^{-1}$ para o lado esquerdo de (4.12), obtemos

$$\begin{aligned} & (I + A_\varepsilon^{-1}V_0)[(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1}] \\ &= (A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1} + A_\varepsilon^{-1}V_0(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - A_\varepsilon^{-1}V_0(A_0 + V_0)^{-1} \\ &= (A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1} + A_\varepsilon^{-1}[I - A_\varepsilon(A_\varepsilon + V_0)^{-1}] - A_\varepsilon^{-1}V_0(A_0 + V_0)^{-1} \\ &= A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^{-1}V_0(A_0 + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Proposição 4.2.6. *Se $(A_0 + V_0) : \mathcal{D}(A_0) \subset X_\varepsilon \rightarrow X_\varepsilon$ possui inversa limitada, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$\left\| (A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases}, \quad (4.13)$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ e a constante C independe de ε .

Demonstração. Se $(A_0 + V_0)$ é invertível, então $(A_\varepsilon + V_0)$ é invertível para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, as estimativas dadas em (4.13) fazem sentido. Pelo Lema 4.2.5, segue que

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon &:= (A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1} \\ &= [I - (A_\varepsilon + V_0)^{-1}V_0](A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Somando e subtraindo $[(A_0 + V_0)^{-1}V_0(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})][I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}]$ em (4.14), obtemos

$$\Phi_\varepsilon = \Phi_\varepsilon^1 + \Phi_\varepsilon^2, \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon^1 &:= -[(A_\varepsilon + V_0)^{-1} - (A_0 + V_0)^{-1}]V_0(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}] \\ &= -\Phi_\varepsilon \left[V_0(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}] \right], \end{aligned}$$

e,

$$\Phi_\varepsilon^2 = [I - (A_0 + V_0)^{-1}V_0](A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}].$$

Inicialmente, iremos estimar $\|\Phi_\varepsilon^1\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}$. Observe que, pelo Teorema 4.1.5, da hipótese que $A_0 + V_0$ possui inversa limitada e do Lema 4.1.2, segue que

$$\begin{aligned} \|\Phi_\varepsilon^1\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \left\| V_0(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}] \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq C_1 \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \left\| (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})[I - V_0(A_0 + V_0)^{-1}] \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq C_1 \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \left\| A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \left(1 + C_1 \left\| (A_0 + V_0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \right) \\ &\leq C_1 \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \left\| A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} (1 + C_1 C_2) \\ &\leq \begin{cases} (C_1 + C_1^2 C_2) C_3 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}, & n = 3 \\ (C_1 + C_1^2 C_2) C_3 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}, & n = 4 \\ (C_1 + C_1^2 C_2) C_3 \varepsilon \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}, & n \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $C_4 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, C_4 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, C_4 \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, onde $C_4 = (C_1 + C_1^2 C_2) C_3$ e substituindo em (4.15) obtemos

$$\|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{2} \|\Phi_\varepsilon^1\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} + \|\Phi_\varepsilon^2\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\Phi_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq 2 \|\Phi_\varepsilon^2\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq 2 \left\| [I - (A_0 + V_0)^{-1} V_0] (A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}) [I - V_0 (A_0 + V_0)^{-1}] \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq 2(1 + C_1 C_2)^2 \|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4, \\ C \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

onde $C = 2(1 + C_1 C_2)^2 C_3$. □

Proposição 4.2.7. Para todo $\lambda \in S_{0, \phi_1}$ e $\varepsilon \in (0, 1)$, vale a estimativa

$$\left\| (\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1} - (\overline{A_0} - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \begin{cases} C (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4, \\ C (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases}$$

onde a constante $C > 0$ independe dos parâmetros λ e ε .

Demonstração. Para $\varepsilon \in [0, 1]$ em (4.11), substituindo A_ε por $\overline{A_\varepsilon}$ e V_0 por $-\lambda$, segue que

$$\begin{aligned} &\left\| (\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1} - (\overline{A_0} - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq \left\| I + (\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1} \lambda \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \left\| (\overline{A_\varepsilon})^{-1} - (\overline{A_0})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \left\| I + \lambda (\overline{A_0} - \lambda)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para todo $\lambda \in S_{0, \phi_1}$ e $\varepsilon \in [0, 1]$, pelo Corolário 3.1.3, segue que

$$\left\| I + (\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1} \lambda \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_1 (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}).$$

E, ainda, do Lema 4.2.4, obtemos

$$\left\| (\overline{A_\varepsilon})^{-1} - (\overline{A_0})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \begin{cases} C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C_2 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4, \\ C_2 \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases}$$

Com isso, segue de (4.16), o resultado. □

Proposição 4.2.8. Para $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ existem constantes $\beta > 0$ e $C > 0$, tais que

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\overline{A_\varepsilon} t} - e^{-\overline{A_0} t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta}, & n = 3, \\ \left\| e^{-\overline{A_\varepsilon} t} - e^{-\overline{A_0} t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta t^{-\frac{1}{2}-j\theta}, & n = 4, \\ \left\| e^{-\overline{A_\varepsilon} t} - e^{-\overline{A_0} t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-j\theta}, & n \geq 5, \end{aligned}$$

onde $j = 0$ para $t \in (0, 1)$ e $j = 1$ para $t \in [1, \infty)$.

Demonstração. Segue, do Teorema 1.2.9, a seguinte estimativa

$$\left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} + \left\| e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_0 e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.17)$$

Já que,

$$e^{-\overline{A}_\varepsilon t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} (\lambda - \overline{A}_\varepsilon)^{-1} d\lambda, \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

onde Γ é a fronteira orientada positivamente, percorrendo $\infty e^{-i\phi_1}$ a $\infty e^{i\phi_1}$, do setor S_{0, ϕ_1} do operador $\overline{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1)$, por outro lado, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| e^{-\lambda t} \right| \left\| (\lambda - \overline{A}_\varepsilon)^{-1} - (\lambda - \overline{A}_0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} |d\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} \left\| (\lambda - \overline{A}_\varepsilon)^{-1} - (\lambda - \overline{A}_0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} d|\lambda|. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 4.2.7 e utilizando argumentos similares aos aplicados no Teorema 3.2.1, obtemos para

• $n = 3$:

$$\left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d|\lambda| \leq C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} (t^{-1} + t^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.18)$$

• $n = 4$:

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C_1 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d|\lambda| \\ &\leq C_2 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} (t^{-1} + t^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

• $n \geq 5$:

$$\left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_1 \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\operatorname{Re} \lambda t} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d|\lambda| \leq C_2 \varepsilon (t^{-1} + t^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.20)$$

Observando que para $t \in (0, 1)$ temos $t^{-\frac{1}{2}} > t^{-1}$ e para $t \geq 1$ temos $t^{-1} > t^{-\frac{1}{2}}$, segue do Teorema 1.2.19 fazendo a interpolação das expressões (4.17) e (4.18), (4.17) e (4.19), (4.17) e (4.20), com $1 - 2\theta$ e 2θ e $\beta = \eta = \frac{1}{2}$, respectivamente, que para $t \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}} & n = 3, \\ \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta t^{-\frac{1}{2}} & n = 4, \\ \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}} & n \geq 5, \end{aligned}$$

e, tendo em vista a mesma interpolação para $t \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^\theta t^{-\frac{1}{2}-\theta} & n = 3, \\ \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta t^{-\frac{1}{2}-\theta} & n = 4, \\ \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} - e^{-\overline{A}_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C e^{-\beta(1-2\theta)t} \varepsilon^{2\theta} t^{-\frac{1}{2}-\theta} & n \geq 5. \end{aligned}$$

□

Lema 4.2.9.

- (i) Como $0 \in \rho(\overline{A_\varepsilon})$, $\varepsilon \in [0, 1]$, então $\lambda \in \rho(\overline{A_\varepsilon})$ para $|\lambda| < \frac{1}{M_1}$, onde $M_1 = \|(\overline{A_\varepsilon})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)}$.
 E, ainda, $\|(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \leq 2M_1$ para $|\lambda| \leq \frac{1}{2M_1}$;
 (ii) Nas hipóteses do item (i) a limitação em (4.9) pode ser escrita como

$$\|(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \leq \frac{M_2}{1 + |\lambda|}, \text{ para todo } \lambda \in S_{0, \phi_1}. \quad (4.21)$$

e, mais

$$\|(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{M_3}{1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}}, \text{ para todo } \lambda \in S_{0, \phi_1}. \quad (4.22)$$

Demonstração. (i) : Segue da Proposição 1.2.14.

(ii) : Como do item (i) $\|(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \leq 2M_1$ para $|\lambda| \leq \frac{1}{2M_1}$, obtemos

$$\begin{aligned} (1 + |\lambda|) \|(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} &\leq 2M_1 (1 + |\lambda|) \\ &\leq 2M_1 \left(1 + \frac{1}{2M_1}\right) = 1 + 2M_1, \end{aligned}$$

assim,

$$\|(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \leq \frac{M_2}{1 + |\lambda|},$$

onde $M_2 = 1 + 2M_1$.

Para mostrar que $\|(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{M_3}{1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}}$, considere uma função $g_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ arbitrária, assim para $u_\varepsilon := (\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}g_\varepsilon$, segue do Teorema 1.2.18 e de (4.10) que

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \|(\overline{A_\varepsilon})^{\frac{1}{2}}u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \\ &\leq C_0 \left(\|\overline{A_\varepsilon}u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} + \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \right) \\ &\leq C_0 \left(\|\overline{A_\varepsilon}(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} + \|(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)} \|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \right) \\ &\leq C_0 \left((1 + M_0) \|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} + 2M_1 \|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \right) \\ &= \tilde{M} \|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{M} = C_0(1 + M_0 + 2M_1)$.

Então,

$$\begin{aligned} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \tilde{M} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) \|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon} \\ &\leq \tilde{M} \left(1 + \frac{1}{(2M_1)^{\frac{1}{2}}}\right) \|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{M_3}{1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}} \|g_\varepsilon\|_{X_\varepsilon},$$

onde $M_3 = \tilde{M} \left(1 + \frac{1}{(2M_1)^{\frac{1}{2}}}\right)$.

□

O operador $\overline{A_0}$ é setorial e $\sigma(\overline{A_0})$ é um conjunto discreto tal que $\operatorname{Re} \sigma(\overline{A_0}) > \beta > 0$. Da continuidade do espectro de $\overline{A_\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno segue que $\sigma(\overline{A_\varepsilon})$ é um conjunto discreto tal que $\operatorname{Re} \sigma(\overline{A_\varepsilon}) > \beta > 0$.

Assim, existe $\delta > 0$ tal que $[\beta - \delta, \beta + \delta] \cap \sigma(\overline{A_0}) = \emptyset$. Logo, o espectro do operador $\overline{A_0}$ está dividido em duas partes disjuntas, $\sigma(\overline{A_0}) = \sigma_0^+ \cup \sigma_0^-$, onde o conjunto σ_0^+ está a esquerda de $\beta - \delta$ e é finito e, σ_0^- está a direita de $\beta + \delta$ e é infinito (possui uma sequência que converge para ∞). Novamente, pela continuidade do espectro de $\overline{A_\varepsilon}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que $[\beta - \delta, \beta + \delta] \cap \sigma(\overline{A_\varepsilon}) = \emptyset$ e o espectro do operador $\overline{A_\varepsilon}$ está dividido em duas partes disjuntas, $\sigma(\overline{A_\varepsilon}) = \sigma_\varepsilon^+ \cup \sigma_\varepsilon^-$, onde o conjunto σ_ε^+ está a esquerda de $\beta - \delta$ e é finito e, σ_ε^- está a direita de $\beta + \delta$ e é infinito.

Além disso, suponha que δ seja tal que exista uma curva fechada fixa $\Gamma_\beta^+ \subset \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \leq \beta - \delta\}$ em torno de σ_ε^+ e a curva $\Gamma_\beta^- \supset \sigma_\varepsilon^-$, dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta^- &= \{z \in \mathbb{C}; z = \rho e^{i\theta} + \beta, \rho \geq d\} \cup \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) = \beta + \delta, \operatorname{Im}(z) \leq h\} \\ &\cup \{z \in \mathbb{C}; z = \rho e^{-i\theta} + \beta, \rho \geq d\}, \end{aligned}$$

onde $d = \delta(\cos \theta)^{-1}$ e $h = \delta \tan \theta$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

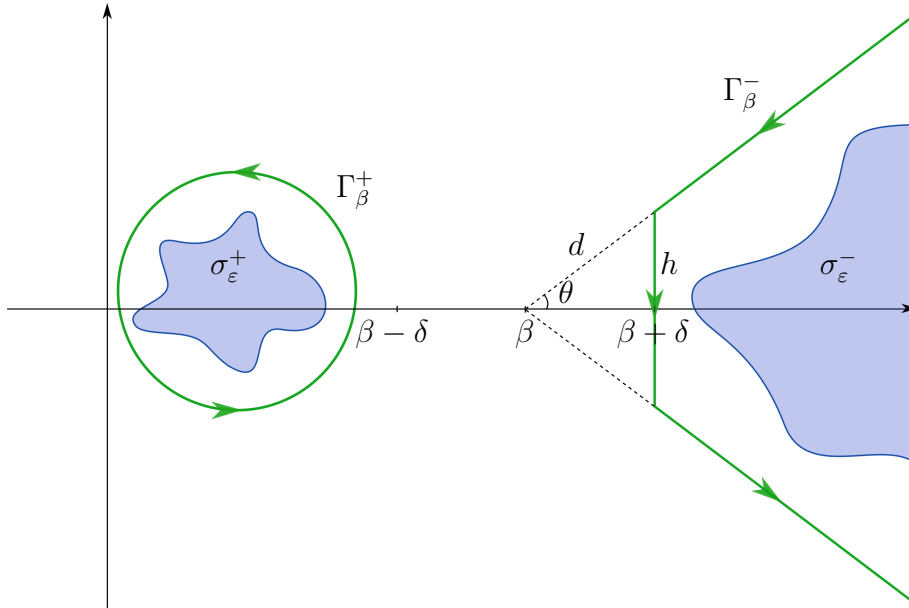


Figura 4.1: Representação das curvas $\Gamma_\beta^\pm$.

Assim, pode-se decompor o espaço $X^{\frac{1}{2}}$ pelo operador projeção $Q_0^+(\sigma_0^+) : X^{\frac{1}{2}} \rightarrow X^{\frac{1}{2}}$ determinada por σ_0^+ , isto é,

$$Q_0^+ := Q_0^+(\sigma_0^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\beta^+} (\overline{A_0} - \lambda)^{-1} d\lambda. \quad (4.23)$$

E, decompor o espaço $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ pelo operador projeção $Q_\varepsilon^+(\sigma_\varepsilon^+) : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ determinada por

σ_ε^+ , isto é,

$$Q_\varepsilon^+ := Q_\varepsilon^+(\sigma_0^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\beta^+} (\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (4.24)$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Proposição 4.2.10. *Existem constantes $\beta > 0$ e $C > 0$, que independem dos parâmetros ε e λ , tais que*

$$\begin{aligned} \|e^{-\overline{A_\varepsilon}t}(I - Q_\varepsilon^+) - e^{-\overline{A_0}t}(I - Q_0^+)\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}} t^{-1}, & t \in (0, 1) \\ C \varepsilon^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}, & t \in [1, \infty), \end{cases} & n = 3, \\ \|e^{-\overline{A_\varepsilon}t}(I - Q_\varepsilon^+) - e^{-\overline{A_0}t}(I - Q_0^+)\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \begin{cases} C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} t^{-1}, & t \in (0, 1) \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}, & t \in [1, \infty), \end{cases} & n = 4, \\ \|e^{-\overline{A_\varepsilon}t}(I - Q_\varepsilon^+) - e^{-\overline{A_0}t}(I - Q_0^+)\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \begin{cases} C \varepsilon t^{-1}, & t \in (0, 1) \\ C \varepsilon t^{-\frac{1}{2}}, & t \in [1, \infty), \end{cases} & n \geq 5. \end{aligned}$$

E, ainda,

$$\|e^{-\overline{A_\varepsilon}t}(I - Q_\varepsilon^+)\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}},$$

para todo $\varepsilon \in [0, 1]$ e $t > 0$.

Demonstração. Observe que

$$e^{-\overline{A_\varepsilon}t}(I - Q_\varepsilon^+) - e^{-\overline{A_0}t}(I - Q_0^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\beta^-} e^{-\lambda t} [(\overline{A_\varepsilon} - \lambda)^{-1} - (\overline{A_0} - \lambda)^{-1}] d\lambda.$$

Assim, pelas Proposições 4.2.7 e 4.2.8, segue que

• $n = 3$:

$$\begin{aligned} \|e^{-\overline{A_\varepsilon}t}(I - Q_\varepsilon^+) - e^{-\overline{A_0}t}(I - Q_0^+)\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq \frac{C_1}{2\pi} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{\Gamma_\beta^-} |e^{-\lambda t}| (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d\lambda \\ &\leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{1}{2}} t^{-1}, & t \in (0, 1) \\ C \varepsilon^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}, & t \in [1, \infty), \end{cases} \end{aligned}$$

onde $C = \frac{C_1}{2\pi}$.

• $n = 4$:

$$\begin{aligned} \|e^{-\overline{A_\varepsilon}t}(I - Q_\varepsilon^+) - e^{-\overline{A_0}t}(I - Q_0^+)\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \int_{\Gamma_\beta^-} |e^{-\lambda t}| (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d\lambda \\ &\leq \begin{cases} C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} t^{-1}, & t \in (0, 1) \\ C \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}, & t \in [1, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

• $n \geq 5$:

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} (I - Q_\varepsilon^+) - e^{-\overline{A}_0 t} (I - Q_0^+) \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq C \varepsilon \int_{\Gamma_\beta^-} |e^{-\lambda t}| (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d\lambda \\ &\leq \begin{cases} C \varepsilon t^{-1}, & t \in (0, 1) \\ C \varepsilon t^{-\frac{1}{2}}, & t \in [1, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Por fim, para $\varepsilon \in [0, 1]$, segue de (4.22), que

$$\left\| e^{-\overline{A}_\varepsilon t} (I - Q_\varepsilon^+) \right\|_{\mathcal{L}(X_0, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\beta^-} \frac{|e^{-\lambda t}|}{(1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}})} d\lambda \leq C e^{-\beta t} t^{-\frac{1}{2}}.$$

□

Observação 4.2.11. Para o caso $V_\varepsilon \equiv V_0 \equiv 0$ e $Q_\varepsilon^+ \equiv 0$ para ε suficientemente pequeno, na Proposição anterior, fazendo interpolação entre as estimativas encontradas, recaímos no resultado tratado no Teorema 3.2.1, utilizando do fato de que $t^{-\frac{1}{2}} < t^{-1} < t^{-2}$, para $t \in (0, 1)$ e que $t^{-\frac{1}{2}} > t^{-1} > t^{-2}$, para $t \in [1, \infty)$.

Observação 4.2.12. Para todo $\varepsilon \in [0, 1]$, Q_ε^+ é um operador uniformemente limitado. De fato,

$$\left\| Q_\varepsilon^+ \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\beta^+} \left\| (\overline{A}_\varepsilon - \lambda)^{-1} \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} |d\lambda| \leq C \int_{\Gamma_\beta^+} \frac{1}{1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}} |d\lambda| \leq C |\Gamma_\beta^+|,$$

onde $|\Gamma_\beta^+|$ é o comprimento de Γ_β^+ .

4.3 Atração Exponencial Uniforme e Continuidade das Variedades Instáveis

Nesta seção veremos que as variedades instáveis locais de um ponto de equilíbrio u_ε^* serão contínuas quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A existência de tais variedades provém da teoria de variedades invariantes, e pode ser encontrado, por exemplo, em [32]. Apesar de que aqui, a prova será adaptada de modo a abranger a possibilidade da dependência da variedade invariante sobre o parâmetro ε . E, ainda, veremos que as variedades instáveis estarão próximas para ε suficientemente pequeno. Para obter tais conclusões usaremos fortemente os resultados de convergência da parte linear obtidas no Capítulo 3.

Em uma vizinhança de uma solução de equilíbrio u_ε^* , fazendo a seguinte mudança de variáveis $w_\varepsilon = u_\varepsilon - u_\varepsilon^*$, podemos reescrever o problema (2.4), que é a versão abstrata de (P_ε), como

$$\dot{w}_\varepsilon + A_\varepsilon w_\varepsilon - F'(u_\varepsilon^*) w_\varepsilon = F(w_\varepsilon + u_\varepsilon^*) - F(u_\varepsilon^*) - F'(u_\varepsilon^*) w_\varepsilon. \quad (4.25)$$

Tendo em vista o operador projeção Q_ε^+ dado em (4.24) com $\beta = 0$, obtemos a seguinte decomposição do espaço $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \oplus (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Observe que esta decomposição induz uma representação da solução do problema (4.25) na forma $w_\varepsilon = v_\varepsilon + z_\varepsilon$, onde $v_\varepsilon = Q_\varepsilon^+ w_\varepsilon$ e $z_\varepsilon = (I - Q_\varepsilon^+) w_\varepsilon$.

Denotando por $(\overline{A_\varepsilon})^+$ (respec. por $(\overline{A_\varepsilon})^-$) a restrição do operador $\overline{A_\varepsilon}$ à imagem de Q_ε^+ (respec. ao núcleo de Q_ε^+), reescrevemos o problema (4.25) como o seguinte sistema acoplado

$$\begin{cases} \dot{v}_\varepsilon + (\overline{A_\varepsilon})^+ v_\varepsilon = H_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon), \\ \dot{z}_\varepsilon + (\overline{A_\varepsilon})^- z_\varepsilon = G_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon), \end{cases} \quad (4.26)$$

onde

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) &:= Q_\varepsilon^+ [F(v_\varepsilon + z_\varepsilon + u_\varepsilon^*) - F(u_\varepsilon^*) - F'(u_\varepsilon^*)(v_\varepsilon + z_\varepsilon)], \\ G_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) &:= (I - Q_\varepsilon^+) [F(v_\varepsilon + z_\varepsilon + u_\varepsilon^*) - F(u_\varepsilon^*) - F'(u_\varepsilon^*)(v_\varepsilon + z_\varepsilon)], \end{aligned}$$

e, ainda, $H_\varepsilon(0, 0) = 0 = G_\varepsilon(0, 0)$. Além disso, as hipóteses sobre F garantem que as aplicações H_ε e G_ε sejam continuamente Fréchet diferenciáveis com $H'_\varepsilon(0, 0) = 0 = G'_\varepsilon(0, 0)$.

Da limitação uniforme das projeções Q_ε^+ , $\varepsilon \in [0, 1]$, e como a função F independe de ε , segue que dado $\rho > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in B_\delta(0, 0)$ e $\varepsilon \in (0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|H_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho, \quad \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho \\ \|H_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) - H_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho \left(\|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z_\varepsilon - \tilde{z}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right) \\ \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, z_\varepsilon) - G_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{z}_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho \left(\|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z_\varepsilon - \tilde{z}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aqui, estamos interessados no comportamento das soluções próximas de $(0, 0)$, assim podemos cortar a não linearidade H_ε e G_ε fora da bola $B_\delta(0, 0)$ de modo que as estimativas em (4.27) sejam satisfeitas globalmente.

A fim de fixarmos a notação, como $\overline{A_\varepsilon}$ é setorial, podemos tomar constantes apropriadas M, β (independentes de $\varepsilon \in [0, 1]$), tais que

$$\begin{aligned} \|e^{-t(\overline{A_\varepsilon})^+} v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M e^{\beta t} \|v\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \leq 0, \\ \|e^{-t(\overline{A_\varepsilon})^-} z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M e^{-\beta t} \|z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \geq 0, \\ \|e^{-t(\overline{A_\varepsilon})^-} z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M t^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta t} \|z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

No que segue, mostraremos para $\rho > 0$ escolhido apropriadamente, que a variedade instável para $u_\varepsilon^* \in \mathcal{E}_\varepsilon$ é dada localmente como o gráfico

$$W_\varepsilon^u = \left\{ (v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : z_\varepsilon = S_\varepsilon^*(v_\varepsilon), v_\varepsilon \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\}$$

de uma aplicação $S_\varepsilon^* : Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ limitada e Lipschitz contínua. Além disso, para $R > 0$ qualquer, veremos que

$$\sup_{v_\varepsilon \in B^{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(0, R)} \|S_\varepsilon^*(v_\varepsilon) - S_0^*(v_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Teorema 4.3.1. *Seja u_0^* um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.32). Então, sabemos que existe um único $u_\varepsilon^* \in \mathcal{E}_\varepsilon$, suficientemente próximo de u_0^* , para todo $\varepsilon \in (0, 1)$. Para*

$D > 0$, $M > 0$, $\Delta > 0$ e $0 < \nu < 1$ dados, seja ρ_0 tal que para todo $0 < \rho \leq \rho_0$, valham as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &\leq D, \quad \rho M^2 (1 + \Delta) \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \leq \Delta, \\ \frac{\beta}{2} &\leq \beta - \rho M (1 + \Delta) \leq \beta, \quad \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + \frac{\rho M (1 + \Delta)}{\beta - \rho M (1 + \Delta)}\right] \leq \nu < 1, \\ \rho_1 &= \beta - \left[\rho M - \frac{\rho^2 M^2 (1 + \Delta) (1 + M)}{2\beta - \rho M (1 + \Delta)} \right] > 0, \\ \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &\left[1 + \rho M (1 + \Delta) \beta^{-\frac{1}{2}} (2\beta - \rho M (1 + \Delta))^{-\frac{1}{2}}\right] \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Para a escolha de ρ acima suponha-se que H_ε e G_ε satisfaçam as condições (4.27) para todo $(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \oplus (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Então, existe $S_\varepsilon^* : Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, tal que

$$\|S_\varepsilon^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} := \sup_{v_\varepsilon \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|S_\varepsilon^*(v_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq D, \quad \|S_\varepsilon^*(v_\varepsilon) - S_\varepsilon^*(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

e a variedade instável de u_ε^* é dada como sendo o gráfico da aplicação S_ε^* , isto é

$$W_\varepsilon^u := W_\varepsilon^u(u_\varepsilon^*) = \left\{ (v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : z_\varepsilon = S_\varepsilon^*(v_\varepsilon), v_\varepsilon \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Além disso, para escolha de $\rho_1 > 0$ acima e $M \geq 1$, independentes de ε , vale que

$$\|z_\varepsilon(t) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z_\varepsilon(t_0) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t_0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$$

durante o período que a órbita $(v_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ permanecer na vizinhança de u_ε^* .

Por conseguinte, para $\varepsilon \in (0, 1)$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ existe $C > 0$, independente de ε , tal que

$$\|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^\theta, & n = 3, \\ C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta, & n = 4, \\ C \varepsilon^{2\theta}, & n \geq 5. \end{cases}$$

Demonstração. Inicialmente, veremos a existência da variedade instável local do equilíbrio u_ε^* como um gráfico.

Considere o seguinte conjunto, para $v_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$

$$\mathcal{X}_\varepsilon = \left\{ S_\varepsilon : Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \|S_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq D, \|S_\varepsilon(v_\varepsilon) - S_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right\},$$

munido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} : \mathcal{X}_\varepsilon \rightarrow [0, \infty)$, dada por

$$\|S_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} = \sup_{v_\varepsilon \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|S_\varepsilon(v_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Não é difícil verificar que $(\mathcal{X}_\varepsilon, \|\cdot\|_{\mathcal{X}_\varepsilon})$ é um espaço métrico completo.

Seja $v_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t, \tau, \eta, S_\varepsilon)$ a solução de

$$\begin{cases} \dot{v}_\varepsilon + (\overline{A_\varepsilon})^+ v_\varepsilon = H_\varepsilon(v_\varepsilon, S_\varepsilon(v_\varepsilon)), & t < \tau \\ v_\varepsilon(t) = \eta, \end{cases}$$

como $S_\varepsilon \in \mathcal{X}_\varepsilon$ e $\eta \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Defina, ainda, a aplicação $\Phi : \mathcal{X}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{X}_\varepsilon$ por

$$\Phi(S_\varepsilon)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), S_\varepsilon(v_\varepsilon(s))) \, ds.$$

Observe que, utilizando as estimativas obtidas em (4.27) e (4.28), temos que

$$\|\Phi(S_\varepsilon)(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \int_{-\infty}^{\tau} M(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \rho \, ds = \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \leq D. \quad (4.29)$$

Logo, $\|\Phi(S_\varepsilon)\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \leq D$.

Suponha que $S_\varepsilon, \tilde{S}_\varepsilon \in \mathcal{X}_\varepsilon$ e $\eta, \tilde{\eta} \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e considere $v_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t, \tau, \eta, S_\varepsilon)$, $\tilde{v}_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t, \tau, \tilde{\eta}, \tilde{S}_\varepsilon)$. Então,

$$v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t) = e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(t-\tau)} (\eta - \tilde{\eta}) + \int_{\tau}^t e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(t-s)} [H_\varepsilon(v_\varepsilon(s), S_\varepsilon(v_\varepsilon(s))) - H_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon(s), \tilde{S}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon(s)))] \, ds.$$

Assim, por (4.27) e (4.28), segue que

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + M \int_{\tau}^t e^{\beta(t-s)} \|H_\varepsilon(v_\varepsilon(s), S_\varepsilon(v_\varepsilon(s))) - H_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon(s), \tilde{S}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon(s)))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \, ds \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M \int_{\tau}^t e^{\beta(t-s)} \left[\|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|S_\varepsilon(v_\varepsilon) - \tilde{S}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] \, ds \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M \int_{\tau}^t e^{\beta(t-s)} \left[\|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|S_\varepsilon(v_\varepsilon) - S_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \|S_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon) - \tilde{S}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] \, ds \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M \int_{\tau}^t e^{\beta(t-s)} \left[(1 + \Delta) \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right] \, ds \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M (1 + \Delta) \int_{\tau}^t e^{\beta(t-s)} \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \, ds + \rho M \int_{\tau}^t e^{\beta(t-s)} \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \, ds. \end{aligned}$$

Seja $\phi_\varepsilon(t) = e^{-\beta(t-\tau)} \|v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$. Assim,

$$\phi(t) \leq M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M (1 + \Delta) \int_{\tau}^t \phi_\varepsilon(s) \, ds + \rho M \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_{\tau}^t e^{\beta(\tau-s)} \, ds,$$

e, usando a Desigualdade de Gronwall Generalizada (Lema 1.1.9), segue que

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \left(M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds \right) e^{\rho M(1+\Delta)(\tau-t)} \\
&\leq \left(M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M \beta^{-1} (1 - e^{\beta(t-\tau)}) \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) e^{\rho M(1+\Delta)(\tau-t)} \\
&\leq \left(M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M \beta^{-1} \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) e^{\rho M(1+\Delta)(\tau-t)}. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(S_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{S}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_{-\infty}^\tau M(\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon, S_\varepsilon(v_\varepsilon)) - G_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{S}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \rho M \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \left[\|S_\varepsilon(v_\varepsilon) - \tilde{S}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] ds \\
&\leq \rho M \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} \left[(1+\Delta) \|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right] ds.
\end{aligned}$$

Das estimativas para $\|v_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$, obtidas em (4.30), segue que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(S_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{S}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho M(1+\Delta) \left(M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M \beta^{-1} \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) \\
&\times \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-[\beta-\rho M(1+\Delta)](\tau-s)} ds + \rho M \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_{-\infty}^\tau (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta(\tau-s)} ds.
\end{aligned}$$

Das propriedades da função Gamma, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(S_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{S}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho M(1+\Delta) \left(M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \rho M \beta^{-1} \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) \\
&\times [\beta - \rho M(1+\Delta)]^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \rho M \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\rho^2 M^2 (1+\Delta) \beta^{-1} [\beta - \rho M(1+\Delta)]^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right) \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \\
&\quad + \rho M^2 (1+\Delta) [\beta - \rho M(1+\Delta)]^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&= \rho M \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{\rho M(1+\Delta) \beta^{-1} [\beta - \rho M(1+\Delta)]^{\frac{1}{2}}}{\beta - \rho M(1+\Delta)} + \beta^{-\frac{1}{2}} \right] \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \\
&\quad + \rho M^2 (1+\Delta) [\beta - \rho M(1+\Delta)]^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \rho M \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \beta^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\rho M(1+\Delta)}{\beta - \rho M(1+\Delta)} + 1 \right] \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \\
&\quad + \rho M^2 (1+\Delta) [\beta - \rho M(1+\Delta)]^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de $\frac{\beta}{2} \leq \beta - \rho M(1+\Delta) \leq \beta$.

Dado $\nu < 1$, existe ρ_0 tal que, para $\rho \leq \rho_0$, temos

$$\rho M \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \beta^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\rho M(1+\Delta)}{\beta - \rho M(1+\Delta)} + 1 \right] \leq \nu$$

e

$$\rho M^2(1 + \Delta)[\beta - \rho M(1 + \Delta)]^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \leq \Delta,$$

e, assim

$$\left\| \Phi(S_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{S}_\varepsilon)(\tilde{\eta}) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|\eta - \tilde{\eta}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \nu \|S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_\varepsilon}. \quad (4.31)$$

As desigualdades (4.29) e (4.31) nos garantem que Φ é uma contração em $\mathcal{X}_\varepsilon$. Portanto, existe um único ponto fixo $S_\varepsilon^* = \Phi(S_\varepsilon^*) \in \mathcal{X}_\varepsilon$.

Mostremos, agora, que $W_\varepsilon^u := \left\{ (v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : z_\varepsilon = S_\varepsilon^*(v_\varepsilon), v_\varepsilon \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\}$ é uma variedade invariante para (4.26). Sejam $(v_0, z_0) \in W_\varepsilon^u$, como $z_0 = S_\varepsilon^*(v_0)$ e $v_\varepsilon^*(t)$ a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{v}_\varepsilon + (\overline{A}_\varepsilon)^+ v_\varepsilon = H_\varepsilon(v_\varepsilon, S_\varepsilon^*(v_\varepsilon)), \\ v_\varepsilon(0) = v_0. \end{cases}$$

Isto define uma curva $(v_\varepsilon^*(t), S_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t))) \in W_\varepsilon^u$, $t \in \mathbb{R}$. Contudo, a única solução da equação

$$\dot{z}_\varepsilon + (\overline{A}_\varepsilon)^- z_\varepsilon = G_\varepsilon(v_\varepsilon^*, S_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*)),$$

que permanece limitada quando $t \rightarrow -\infty$ é

$$z_\varepsilon^*(t) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\overline{A}_\varepsilon)^-(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon^*(s), S_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s))) \, ds = S_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(s)).$$

Portanto, $(v_\varepsilon^*(t), S_\varepsilon^*(v_\varepsilon^*(t)))$ é uma solução para (4.26) passando por (v_0, z_0) , o que mostra a invariância de W_ε^u .

A seguir, veremos que a variedade instável é exponencialmente atratora. Para tal, mostremos que se H_ε e G_ε satisfazem (4.27) para todo $(v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \oplus (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ com ρ suficientemente pequeno e se $(v_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução global de (4.26) que está em W_ε^u , então $z_\varepsilon(t) = S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste raciocínio, nosso objetivo consiste em mostrar que existem constantes $M \geq 1$ e $\rho_1 > 0$, independentes de ε , tais que

$$\|z_\varepsilon(t) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z_\varepsilon(t_0) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t_0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \geq t_0.$$

Fazendo $t \rightarrow -\infty$, obteremos $z_\varepsilon(t) = S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, considere $\xi_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))$ e $y_\varepsilon(s, t)$, com $s \leq t$ a solução de

$$\begin{cases} \dot{y}_\varepsilon + (\overline{A}_\varepsilon)^+ y_\varepsilon = H_\varepsilon(y_\varepsilon, S_\varepsilon(y_\varepsilon)), & s \leq t \\ y_\varepsilon(t, t) = v_\varepsilon(t). \end{cases}$$

Assim, por (4.27) e (4.28), temos

$$\begin{aligned}
\|y_\varepsilon(s, t) - v_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(s-t)} y_\varepsilon(t, t) \int_t^s e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(s-\theta)} H_\varepsilon(y_\varepsilon(\theta, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(\theta, t))) d\theta \right. \\
&\quad \left. - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(s-t)} v_\varepsilon(t) \int_t^s e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(s-\theta)} H_\varepsilon(v_\varepsilon(\theta), z_\varepsilon(\theta)) d\theta \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&= \left\| \int_t^s e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(s-\theta)} [H_\varepsilon(y_\varepsilon(\theta, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(\theta, t))) - H_\varepsilon(v_\varepsilon(\theta), z_\varepsilon(\theta))] d\theta \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \rho M \int_t^s e^{\beta(s-\theta)} \left[\|y_\varepsilon(\theta, t) - v_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(\theta, t)) - z_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] d\theta \\
&\leq \rho M \int_t^s e^{\beta(s-\theta)} \left[\|y_\varepsilon(\theta, t) - v_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(\theta, t)) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(\theta))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \|S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(\theta)) - z_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] d\theta \\
&\leq \rho M \int_t^s e^{\beta(s-\theta)} \left[(1 + \Delta) \|y_\varepsilon(\theta, t) - v_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] d\theta.
\end{aligned}$$

Para $\phi_\varepsilon(s) = e^{-\beta s} \|y_\varepsilon(s, t) - v_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$, temos

$$\phi_\varepsilon(s) \leq \rho M(1 + \Delta) \int_s^t \phi_\varepsilon(\theta) d\theta + \rho M \int_s^t e^{-\beta\theta} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta, \quad s \leq t.$$

Da Desigualdade de Gronwall Generalizada (Lema 1.1.9), segue que

$$\begin{aligned}
\|y_\varepsilon(s, t) - v_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho M \int_s^t e^{\beta s} e^{-\beta\theta} e^{\rho M(1+\Delta)(\theta-s)} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta \\
&\leq \rho M \int_s^t e^{-[\beta - \rho M(1+\Delta)](\theta-s)} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta, \quad s \leq t. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Considere, agora, $s \leq t_0 \leq t$. Então, usando (4.32), segue que

$$\begin{aligned}
\|y_\varepsilon(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(s-t_0)} [y_\varepsilon(t_0, t) - v_\varepsilon(t_0)] \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^s e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(s-\theta)} [H_\varepsilon(y_\varepsilon(\theta, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(\theta, t))) - H_\varepsilon(y_\varepsilon(\theta, t_0), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(\theta, t_0)))] d\theta \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq M e^{\beta(s-t_0)} \|y_\varepsilon(t_0, t) - v_\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + M \int_{t_0}^s e^{\beta(s-\theta)} \|H_\varepsilon(y_\varepsilon(\theta, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(\theta, t))) - H_\varepsilon(y_\varepsilon(\theta, t_0), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(\theta, t_0)))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta \\
&\leq \rho M^2 e^{\beta(s-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-[\beta - \rho M(1+\Delta)](\theta-t_0)} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta + \rho M(1 + \Delta) \int_s^{t_0} e^{\beta(s-\theta)} \|y_\varepsilon(\theta, t) - v_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta.
\end{aligned}$$

Novamente, utilizando a Desigualdade de Gronwall generalizada (Lema 1.1.9), obtemos

$$\|y_\varepsilon(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \rho M^2 \int_{t_0}^t e^{-[\beta - \rho M(1+\Delta)](\theta-s)} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta. \quad (4.33)$$

Vamos estimar agora o termo $\|\xi_\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$. Segue que

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-t_0)} \xi_\varepsilon(t_0) &= z_\varepsilon(t) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t)) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-t_0)} [z_\varepsilon(t_0) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t_0))] \\ &= \int_{t_0}^t e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) ds - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t)) + e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-t_0)} S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^t e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) ds - \int_{-\infty}^t e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-s)} G_\varepsilon(y_\varepsilon(s, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t))) ds \\ &\quad + e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-s)} G_\varepsilon(y_\varepsilon(s, t_0), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t_0))) ds \\ &= \int_{t_0}^t e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-s)} [G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) - G_\varepsilon(y_\varepsilon(s, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t)))] ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^t e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-s)} [G_\varepsilon(y_\varepsilon(s, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t))) - G_\varepsilon(y_\varepsilon(s, t_0), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t_0)))] ds. \end{aligned}$$

Por (4.27) e (4.28), temos

$$\begin{aligned} &\|\xi_\varepsilon(t) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-t_0)} \xi_\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \\ &\leq M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), z_\varepsilon(s)) - G_\varepsilon(y_\varepsilon(s, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t)))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\quad + M \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \|G_\varepsilon(y_\varepsilon(s, t), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t))) - G_\varepsilon(y_\varepsilon(s, t_0), S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t_0)))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \left[\|v_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s, t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z_\varepsilon(s) - S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] ds \\ &\quad + \rho M \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \left[\|y_\varepsilon(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t)) - S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t_0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] ds \\ &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \left[\|v_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s, t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z_\varepsilon(s) - S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] ds \\ &\quad + \rho M(1 + \Delta) \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \|y_\varepsilon(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \left[\|v_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s, t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z_\varepsilon(s) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(s))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \|S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(s)) - S_\varepsilon^*(y_\varepsilon(s, t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right] ds + \rho M(1 + \Delta) \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \|y_\varepsilon(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq \rho M(1 + \Delta) \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|v_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(s, t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds + \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \rho M(1 + \Delta) \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \|y_\varepsilon(s, t) - y_\varepsilon(s, t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds.
\end{aligned}$$

Usando as estimativas obtidas em (4.32) e (4.33), e o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\xi_\varepsilon(t) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-t_0)} \xi_\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \\
&\leq \rho^2 M^2(1 + \Delta) \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \int_s^t e^{-[\beta - \rho M(1 + \Delta)](\theta-s)} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta ds + \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \rho^2 M^3(1 + \Delta) \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \int_{t_0}^t e^{-[\beta - \rho M(1 + \Delta)](\theta-s)} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta ds \\
&\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \rho^2 M^2(1 + \Delta) e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{-[\beta - \rho M(1 + \Delta)]\theta} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_{t_0}^\theta e^{[2\beta - \rho M(1 + \Delta)]s} ds d\theta \\
&\quad + \rho^2 M^3(1 + \Delta) e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{-[\beta - \rho M(1 + \Delta)]\theta} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{t_0} e^{[2\beta - \rho M(1 + \Delta)]s} ds d\theta.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\|\xi_\varepsilon(t) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(t-t_0)} \xi_\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1 + \delta)}{2\beta - \rho M(1 + \delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \frac{\rho^2 M^3(1 + \Delta)}{2\beta - \rho M(1 + \Delta)} e^{-\beta(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-[\beta - \rho M(1 + \Delta)](\theta-t_0)} \|\xi_\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\theta.
\end{aligned}$$

Usando as propriedades de norma, (4.28) e que $\beta - \rho M(1 + \delta) \leq \beta$, segue que

$$\begin{aligned}
e^{\beta(t-t_0)} \|\xi_\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M \|\xi_\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1 + \delta)}{2\beta - \rho M(1 + \delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{\beta(s-t_0)} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\quad + \frac{\rho^2 M^3(1 + \Delta)}{2\beta - \rho M(1 + \Delta)} \int_{t_0}^t e^{-[2\beta - \rho M(1 + \Delta)](s-t_0)} e^{\beta(s-t_0)} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\
&\leq M \|\xi_\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1 + \Delta)(1 + M)}{2\beta - \rho M(1 + \Delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{\beta(s-t_0)} \|\xi_\varepsilon(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds.
\end{aligned}$$

Outra vez, da Desigualdade de Gronwall Generalizada (Lema 1.1.9), segue que

$$\|\xi_\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M \|\xi_\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} e^{-\rho_1(t-t_0)},$$

onde

$$\rho_1 = \beta - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1 + \Delta)(1 + M)}{2\beta - \rho M(1 + \Delta)} \right] > 0,$$

onde ρ_1 independe de ε , uma vez que β, M, ρ e Δ independam de ε . Portanto,

$$\|z_\varepsilon(t) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M e^{-\rho_1(t-t_0)} \|z_\varepsilon(t_0) - S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t_0))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \geq t_0,$$

e, fazendo $t \rightarrow -\infty$, obtemos $z_\varepsilon(t) = S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por fim, mostremos a taxa de continuidade dos pontos fixos S_ε^* em $\varepsilon = 0$. Em outras palavras, se $u_\varepsilon^* \in \mathcal{E}_\varepsilon$, com $\varepsilon \in (0, 1)$, é tal que sua variedade instável é dada pelo gráfico de S_ε^* , veremos que

$$\|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \sup_{\eta \in B(0, r_0)} \|S_\varepsilon^*(\eta) - S_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^\theta, & n = 3, \\ C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta, & n = 4, \\ C \varepsilon^{2\theta}, & n \geq 5, \end{cases}$$

onde $B(0, r_0)$ é uma bola $Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e lembremos que $\dim(Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}) = \dim(Q_0^+ X_0^{\frac{1}{2}}) < \infty$.

De fato,

$$\begin{aligned} & \|S_\varepsilon^*(\eta) - S_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(s))) - e^{-(\overline{A_0^D})^-(\tau-s)} G_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ & \leq \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(s))) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_\varepsilon(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ & + \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_\varepsilon(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ & + \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) - e^{-(\overline{A_0^D})^-(\tau-s)} G_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ & := I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(s))) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^-(\tau-s)} G_\varepsilon(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\tau} M e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|G_\varepsilon(v_\varepsilon(s), S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(s))) - G_\varepsilon(v_0(s), S_0^*(v_0(s)))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\tau} M e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \rho \left[(1 + \Delta) \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right] ds \\ &\leq M \rho \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \rho M (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Por outro lado,

$$I_2 \leq M \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|G_{\varepsilon}(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) - G_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s)))\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} ds,$$

Observe que, com a notação $S_0 = S_0 = S_0^*(v_0(s))$, $v_0 = v_0(s)$, somando e subtraindo o termo

$$(I - Q_{\varepsilon}^+) [F(v_0(s) + S_0 + u_0^*) - F(u_0^*) - F'(u_0^*)(v_0(s) + S_0)]$$

na diferença $G_{\varepsilon}(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) - G_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s)))$, obtemos

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon}(v_0, S_0^*(v_0)) - G_0(v_0, S_0^*(v_0)) &= (I - Q_{\varepsilon}^+) [F(v_0 + S_0 + u_{\varepsilon}^*) - F(u_{\varepsilon}^*) - F'(u_{\varepsilon}^*)(v_0 + S_0)] \\ &\quad - (I - Q_{\varepsilon}^+) [F(v_0 + S_0 + u_0^*) - F(u_0^*) - F'(u_0^*)(v_0 + S_0)] \\ &\quad + (I - Q_{\varepsilon}^+) [F(v_0 + S_0 + u_0^*) - F(u_0^*) - F'(u_0^*)(v_0 + S_0)] \\ &\quad - (I - Q_0^+) [F(v_0 + S_0 + u_0^*) - F(u_0^*) - F'(u_0^*)(v_0 + S_0)] \\ &= (I - Q_{\varepsilon}^+) \mathcal{Z}_{\varepsilon} + (Q_{\varepsilon}^+ - Q_0^+) [F(v_0 + S_0 + u_0^*) - F(u_0^*) - F'(u_0^*)(v_0 + S_0)], \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Z}_{\varepsilon} = F(v_0 + S_0 + u_{\varepsilon}^*) - F(v_0 + S_0 + u_0^*) - F(u_{\varepsilon}^*) - F(u_0^*) - [F'(u_{\varepsilon}^*) - F'(u_0^*)](v_0 + S_0).$$

E, ainda,

$$\begin{aligned} \|Q_{\varepsilon}^+ - Q_0^+\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\beta}^-} \|(\overline{A_{\varepsilon}} - \lambda)^{-1} - (\overline{A_0} - \lambda)^{-1}\|_{X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}} |d\lambda| \\ &\leq \begin{cases} \frac{C_1}{2\pi} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{\Gamma_{\beta}^-} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d\lambda, & n = 3 \\ \frac{C_1}{2\pi} \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}} \int_{\Gamma_{\beta}^-} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d\lambda, & n = 4 \\ \frac{C_1}{2\pi} \varepsilon \int_{\Gamma_{\beta}^-} (1 + |\lambda|^{\frac{1}{2}}) d\lambda, & n \geq 5 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \tilde{C}_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ \tilde{C}_1 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ \tilde{C}_1 \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Usando o fato que

$$\int_0^t (t-s)^{-\theta} e^{\zeta(1-\theta)(t-s)} ds \leq \frac{1}{\zeta^{1-\theta}(\theta-1)^{1-\theta}} \Gamma(1-\theta), \quad (4.35)$$

para algum $\zeta < 0$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, segue que

$$I_2 \leq \begin{cases} C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}, & n = 3 \\ C_2 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}, & n = 4 \\ C_2 \varepsilon, & n \geq 5 \end{cases}, \quad (4.36)$$

para alguma constante $C_2 > 0$.

Por último, do Teorema 3.2.1 e (4.35), segue que

$$I_2 \leq \begin{cases} C_3 \varepsilon^\theta, & n = 3 \\ C_3 \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta, & n = 4 \\ C_3 \varepsilon^{2\theta}, & n \geq 5 \end{cases}, \quad (4.37)$$

para alguma constante $C_3 > 0$ e $\theta \in (0, \frac{1}{2})$.

Portanto, substituindo o obtido em (4.34), (4.36) e (4.37), obtemos

$$\|S_\varepsilon^*(\eta) - S_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^\theta + M \rho \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{X_\varepsilon} + \\ \quad + \rho M (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds, & n = 3 \\ C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta + M \rho \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{X_\varepsilon} + \\ \quad + \rho M (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds, & n = 4 \\ C \varepsilon^{2\theta} + M \rho \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{X_\varepsilon} + \\ \quad + \rho M (1 + \Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds, & n \geq 5 \end{cases},$$

para alguma constante $C > 0$ uniformemente para η em subconjuntos limitados de $Q_\varepsilon^+ X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Logo, é suficiente estimarmos $\|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$. Como $\eta \in B(0, r_0)$, de maneira análoga ao feito anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon(t) - v_0(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(t-s)} \eta - e^{-(\overline{A_0^D})^+(t-s)} \eta \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &+ \int_t^\tau \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(t-s)} H_\varepsilon(v_\varepsilon(s), S_\varepsilon^*(v_\varepsilon(s))) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(t-s)} H_\varepsilon(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &+ \int_t^\tau \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(t-s)} H_\varepsilon(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) - e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(t-s)} H_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \\ &+ \int_t^\tau \left\| e^{-(\overline{A_\varepsilon})^+(t-s)} H_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) - e^{-(\overline{A_0^D})^+(t-s)} H_0(v_0(s), S_0^*(v_0(s))) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds \end{aligned}$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} C \varepsilon^\theta e^{\beta(t-\tau)} + M\rho \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds + \\ \quad + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds, \quad n = 3 \\ C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta e^{\beta(t-\tau)} + M\rho \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds + \\ \quad + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds, \quad n = 4 \\ C \varepsilon^{2\theta} e^{\beta(t-\tau)} + M\rho \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds + \\ \quad + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} ds, \quad n \geq 5 \end{array} \right. .$$

Seja $\phi_\varepsilon(t) = e^{\beta(\tau-t)} \|v_\varepsilon(s) - v_0(s)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$. Então,

$$\phi_\varepsilon(t) \leq \left\{ \begin{array}{l} C \varepsilon^\theta + M\rho \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau \phi_\varepsilon(s) ds, \quad n = 3 \\ C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta + M\rho \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau \phi_\varepsilon(s) ds, \quad n = 4 \\ C \varepsilon^{2\theta} + M\rho \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds + \rho M(1+\Delta) \int_t^\tau \phi_\varepsilon(s) ds, \quad n \geq 5 \end{array} \right. .$$

Outra vez, utilizando a Desigualdade de Gronwall Generalizada (Lema 1.1.9), obtemos

$$\|v_\varepsilon(t) - v_0(t)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \left\{ \begin{array}{l} \left(C \varepsilon^\theta + M\rho \beta^{-1} \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-t)}, \quad n = 3 \\ \left(C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta + M\rho \beta^{-1} \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-t)}, \quad n = 4 \\ \left(C \varepsilon^{2\theta} + M\rho \beta^{-1} \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) e^{[\rho M(1+\Delta)-\beta](\tau-t)}, \quad n \geq 5 \end{array} \right. .$$

Portanto,

$$\|S_\varepsilon^*(\eta) - S_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \left\{ \begin{array}{l} C \varepsilon^\theta + M\rho \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \\ \quad + \rho M(1+\Delta) \int_{-\infty}^\tau e^{[\rho M(1+\Delta)-2\beta](\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \left(C \varepsilon^\theta + M\rho \beta^{-1} \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) ds, \quad n = 3 \\ C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta + M\rho \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \\ \quad + \rho M(1+\Delta) \int_{-\infty}^\tau e^{[\rho M(1+\Delta)-2\beta](\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \left(C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta + M\rho \beta^{-1} \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) ds, \quad n = 4 \\ C \varepsilon^{2\theta} + M\rho \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} + \\ \quad + \rho M(1+\Delta) \int_{-\infty}^\tau e^{[\rho M(1+\Delta)-2\beta](\tau-s)} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} \left(C \varepsilon^{2\theta} + M\rho \beta^{-1} \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{\mathcal{X}_\varepsilon} \right) ds, \quad n \geq 5 \end{array} \right. .$$

E, assim,

$$\|S_\varepsilon^*(\eta) - S_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^\theta + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + \rho M (1 + \Delta) \beta^{-\frac{1}{2}} (2\beta - \rho M (1 + \Delta))^{-\frac{1}{2}}\right] \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{X_\varepsilon}, & n = 3 \\ C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + \rho M (1 + \Delta) \beta^{-\frac{1}{2}} (2\beta - \rho M (1 + \Delta))^{-\frac{1}{2}}\right] \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{X_\varepsilon}, & n = 4 \\ C \varepsilon^{2\theta} + \rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + \rho M (1 + \Delta) \beta^{-\frac{1}{2}} (2\beta - \rho M (1 + \Delta))^{-\frac{1}{2}}\right] \|S_\varepsilon^* - S_0^*\|_{X_\varepsilon}, & n \geq 5 \end{cases}.$$

E, portanto, como por hipótese

$$\rho M \beta^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + \rho M (1 + \Delta) \beta^{-\frac{1}{2}} (2\beta - \rho M (1 + \Delta))^{-\frac{1}{2}}\right] \leq \frac{1}{2},$$

concluimos que

$$\|S_\varepsilon^*(\eta) - S_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \begin{cases} C \varepsilon^\theta, & n = 3 \\ C \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta, & n = 4 \\ C \varepsilon^{2\theta}, & n \geq 5 \end{cases},$$

para alguma constante $C > 0$, que independe de ε . □

A figura abaixo ilustra o que ocorre em uma vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico:

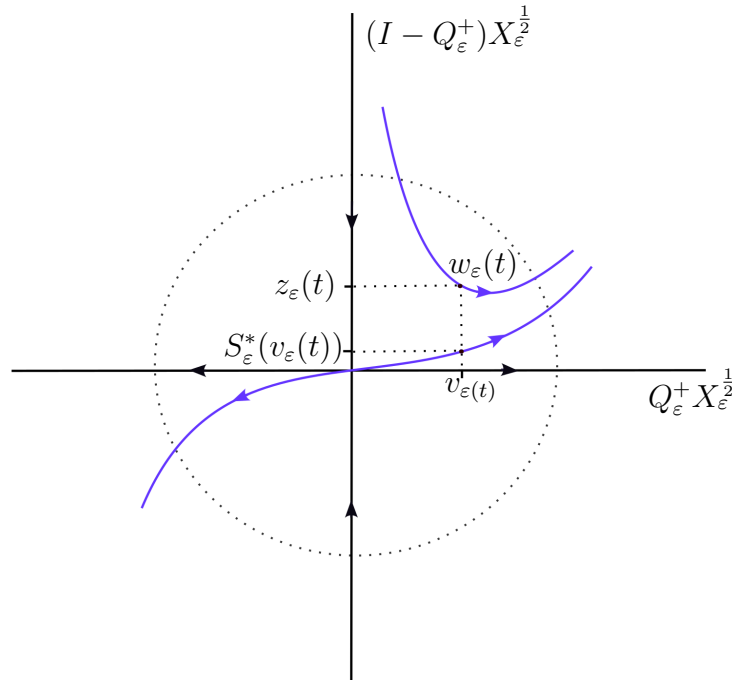


Figura 4.2: Variedade instável.

Corolário 4.3.2. *Nas hipóteses do Teorema 4.3.1, existe $\delta > 0$ tal que*

$$W_{\varepsilon, \text{loc}}^u = \left\{ (v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : (v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in W_\varepsilon^u, \|v_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta \right\}$$

é dada por

$$W_{\varepsilon, \text{loc}}^u = \left\{ (v_\varepsilon, S_\varepsilon^*(v_\varepsilon)) : v_\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\} \cap \left\{ (v_\varepsilon, z_\varepsilon) \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \|v_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|z_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta \right\}.$$

Corolário 4.3.3. *Assuma que as condições do Teorema 4.3.1 e que $\mathcal{E}_0 = \{u_{0,1}^*, \dots, u_{0,n_0}^*\}$ onde cada $u_{0,i}^*$, $i = 1, \dots, n_0$ seja hiperbólico. Então, existem $\delta > 0$ e $\varepsilon \in (0, 1)$ tais que $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_{\varepsilon,1}^*, \dots, u_{\varepsilon,n_0}^*\}$, e suas variedades instáveis locais, $W_{\varepsilon, \text{loc}}^u(u_{\varepsilon,i}^*)$, $i = 1, \dots, n_0$, se comportam continuamente em ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

4.4 Atração Exponencial Uniforme e Continuidade dos Atratores

Nesta seção veremos que os semigrupos não lineares associados ao problema (2.4) com $\varepsilon \in (0, 1]$ possuem atratores *gradient-like*, bem como mostraremos a atração exponencial e convergência uniforme dos mesmos com relação ao parâmetro ε , e portanto garantiremos a continuidade da família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : \varepsilon \in [0, 1]\}$ em $\varepsilon = 0$.

Teorema 4.4.1. *A família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : \varepsilon \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$.*

Demonstração. Considere uma sequência $\{u_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $u_{\varepsilon_n} \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Pelo Teorema 2.2.6, segue que $\sup_{u_\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \infty$. Logo existe $u_0 \in X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$ tal que $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\varepsilon_n \rightarrow 0} u_0$.

Mostremos que $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Para tal, mostremos que existe um órbita completa limitada por u_0 . Como $\mathcal{A}_{\varepsilon_n}$ é invariante para a cada $n \in \mathbb{N}$, existe um órbita limitada por u_{ε_n} , a dizer

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon_n} : \mathbb{R} &\longrightarrow X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ t &\longmapsto \gamma_{\varepsilon_n}(t, u_{\varepsilon_n}). \end{aligned}$$

Para $t \geq 0$ da convergência dos semigrupos não lineares (Teorema 3.2.2), tem-se

$$\gamma_{\varepsilon_n}(t, u_{\varepsilon_n}) = T_{\varepsilon_n}(t)u_{\varepsilon_n} \longrightarrow T_0(t)u_0.$$

Para $t < 0$, podemos construir um órbita da seguinte forma: para $t \in (-k, -k+1]$, $k \in \mathbb{N}^*$, considere a sequência $\{\gamma_{\varepsilon_n}(-k, u_{\varepsilon_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\bigcup_{\varepsilon \in [0, 1]} \mathcal{A}_\varepsilon$. Logo existe $\tilde{\gamma}_0(-k, u_0) \in X_0^{\frac{1}{2}}$ tal que

$\gamma_{\varepsilon_n}(-k, u_{\varepsilon_n}) \xrightarrow{X_{\varepsilon_n}} \tilde{\gamma}_0(-k, u_0)$. Assim, para $t \in (-k, -k+1]$,

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon_n}(t, u_{\varepsilon_n}) &= \gamma_{\varepsilon_n}(t+k, \gamma_{\varepsilon_n}(-k, u_{\varepsilon_n})) \\ &= T_{\varepsilon_n}(t+k)\gamma_{\varepsilon_n}(-k, u_{\varepsilon_n}) \longrightarrow T_0(t+k)\tilde{\gamma}_0(-k, u_0) = \tilde{\gamma}_0(t, u_0). \end{aligned}$$

Com isso, definindo

$$\gamma_0(t, u) = \begin{cases} T_0(t, u_0), & t \geq 0 \\ \tilde{\gamma}_0(t, u_0), & t < 0 \end{cases},$$

temos que γ_0 é uma órbita completa limitada por u_0 . Portanto, o resultado segue do Lema 1.4.37. $\square$

Teorema 4.4.2. *Seja $\{T_0(t, u_0^0) : t \geq 0\}$ o semigrupo gradient-like generalizado associado ao problema (2.32) com atrator global $\mathcal{A}_0$. Suponha que existam $\theta \in (0, \frac{1}{2})$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $L > 0$, $\beta > 0$, e $C > 0$, tais que*

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq Ce^{Lt}t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^\theta \right) & n = 3, \\ \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq Ce^{Lt}t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} |\ln \varepsilon|^\theta \right) & n = 4, \\ \|T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) - T_0(t, u_0^0)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq Ce^{Lt}t^{-\frac{1}{2}-j\theta} \left(\|u_\varepsilon^0 - u_0^0\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{2\theta} \right) & n \geq 5, \end{aligned}$$

onde $j = 0$ para $t \in [1, \infty)$ e $j = 3$ para $t \in (0, 1)$ e além disso, que os pontos de equilíbrio do problema (2.32) existam em número finito, a dizer $\mathcal{E}_0 = \{u_{0,1}^*, \dots, u_{0,n_0}^*\}$, e que todos sejam hiperbólicos. Então, para todo $\varepsilon \in (0, 1]$

(i) O semigrupo $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado com um número finito de pontos de equilíbrio $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u_{\varepsilon,1}^*, \dots, u_{\varepsilon,n_0}^*\}$ e

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n_0} W_\varepsilon^u(u_{\varepsilon,i}^*),$$

assim a família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon; \varepsilon \in [0, 1)\}$ é semicontínua inferiormente em $\varepsilon = 0$;

(ii) Existe $\rho > 0$ tal que dado $B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ limitado, existe $C_1 = C(B) > 0$, tal que

$$\text{dist}(T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)B, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq C_1 e^{-\rho t}, \text{ para todo } t \geq 1;$$

(iii) Existe $C_2 > 0$ tal que

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq \begin{cases} C_2 \varepsilon^{\frac{\theta\rho}{\rho+L}}, & n = 3 \\ C_2 \varepsilon^{\frac{2\theta\rho}{\rho+L}} |\ln \varepsilon|^{\frac{\theta\rho}{\rho+L}}, & n = 4 \\ C_2 \varepsilon^{\frac{2\theta\rho}{\rho+L}}, & n \geq 5 \end{cases},$$

onde $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ denota a semi-distância de Hausdorff.

Demonstração. O item (i) segue do Corolário 4.3.3 e como $\{T_0(t, u_0^0) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado e das hipóteses segue do Teorema 1.4.34 que $\{T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0) : t \geq 0\}$ é um semigrupo gradient-like generalizado e assim $\mathcal{A}_\varepsilon = \bigcup_{u_\varepsilon^* \in \mathcal{E}_\varepsilon} W_\varepsilon^u(u_\varepsilon^*)$.

O item (ii) segue da caracterização dos atratores obtida no item (i) do Teorema 1.4.31, Corolário 1.4.35 e Teorema 4.3.1, pois

$$d(T_\varepsilon(t, u_\varepsilon^0)u_0, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq ce^{-\rho t}, \quad \forall u_0 \in B \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \text{ limitado e } t \geq 1,$$

onde $c > 0$ e $\rho > 0$ independem de ε . O item (iii) segue do Teorema 1.4.42, onde obtemos

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}_0) + \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\varepsilon) \leq \begin{cases} C_2 \varepsilon^{\frac{\theta\rho}{\rho+L}}, & n = 3 \\ C_2 \varepsilon^{\frac{2\theta\rho}{\rho+L}} |\ln \varepsilon|^{\frac{\theta\rho}{\rho+L}}, & n = 4 \\ C_2 \varepsilon^{\frac{2\theta\rho}{\rho+L}}, & n \geq 5 \end{cases},$$

para alguma constante $C > 0$ independente de ε . O que conclui o resultado. $\square$

Corolário 4.4.3. *A família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon; \varepsilon \in [0, 1)\}$ é contínua em $\varepsilon = 0$.*

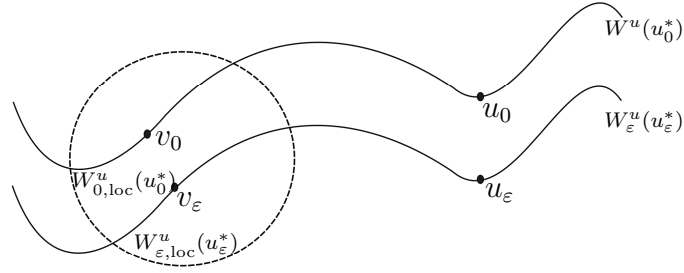


Figura 4.3: Semicontinuidade inferior dos atratores: Teorema 4.4.2 - item (i).

CONCLUSÕES

Nesta tese começamos com o estudo da dinâmica assintótica de uma classe de problemas parabólicos semilineares em um domínio com um pequeno buraco, $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Mais especificamente quando consideramos o problema de valor de contorno com condição de Dirichlet, mostramos que os atratores associados a esta classe de problemas se comportam continuamente quando o parâmetro envolvido se torna pequeno.

Pretende-se como próximo passo estudar a dinâmica assintótica da mesma classe de problemas parabólicos semilineares considerando agora a condição de Dirichlet na fronteira de Ω , i.e., $u_\varepsilon = 0$ em $\partial\Omega$ e condição de Neumann na fronteira do buraco, i.e., $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} = 0$ em $\partial\omega_\varepsilon$, bem como considerar ainda o caso com condição de Dirichlet na fronteira de Ω , i.e., $u_\varepsilon = 0$ em $\partial\Omega$ e condição de Robin na fronteira do buraco, i.e., $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + \alpha u_\varepsilon = 0$ em $\partial\omega_\varepsilon$, onde $\frac{\partial}{\partial N}$ é a derivada com respeito a normal e $\alpha > 0$. Salientamos, ainda, que neste estudo será abordado o caso $n \geq 2$ e que o caso $n = 2$, ainda em aberto deste estudo inicial, será também desenvolvido para condição de Dirichlet tanto na fronteira de Ω como na fronteira do buraco.

Um outro problema de estudo para o futuro é considerar o domínio Ω com mais de um buraco (veja, por exemplo, Figura 4.4) e estudar a dinâmica assintótica para a mesma classe de problemas parabólicos semilineares que consideramos nesta tese com as respectivas condições de contorno na fronteira dos pequenos buracos.

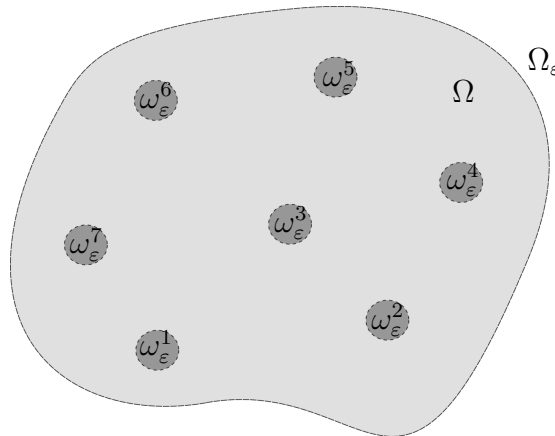


Figura 4.4: Domínio $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^7 \omega_\varepsilon^i$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Arrieta, J. M.; Bezerra, F. D. M.; Carvalho, A. N. *Rate of convergence of global attractors of some perturbed reaction-diffusion problems*, Topol. Methods Nolinear Anal., 41 2 (2013), 229–253.
- [2] Arrieta, J. M.; Carvalho, A. N. *Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction–diffusion equations under perturbations of the domain*, J. Differential Equations, 199 (2004), 143–178.
- [3] Arrieta, J. M.; Carvalho, A. N.; Lozada-Cruz, G. *Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria*, J. Differential Equations, 231 (2006), 551–597.
- [4] Arrieta, J. M.; Carvalho, A. N.; Lozada-Cruz, G. *Dynamics in dumbbell domains III. Continuity of attractors*, J. Differential Equations, 247 (2009), 225–259.
- [5] Babin, A. V.; Vishik, M. I. *Attractors in evolutionary equations*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1992. (Studies in mathematics and its applications, v. 25).
- [6] Bezerra, F. D. M. *Taxa de convergência de atratores de algumas equações de reação-difusão perturbadas*, 2009. 147 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-06042010-142547/pt-br.php>>. Acesso em: 19 ago. 2021.
- [7] Borisov, D. I. *Norm resolvent convergence of elliptic operators in domains with thin spikes*, Journal of Mathematical Sciences, 261, No. 3 (2022), 366–391.
- [8] Borisov, D. I.; Cardone, G.; Durante, T. *Homogenization and norm-resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 146A (2016), 1115–1158.
- [9] Borisov, D. I.; Mukhametrakhimova, A. I. *The norm resolvent convergence for elliptic operators in multi-dimensional domains with small holes*, J. Math. Sci.(N.Y.) 232 (2018), no. 3, Problems in mathematical analysis. No. 92 (Russian), 283–298.
- [10] Borisov, D. I.; Mukhametrakhimova, A. I. *Uniform convergence and asymptotics for problems in domains finely perforated along a prescribed manifold in the case of the homogenized Dirichlet condition*, Sbornik: Mathematics 212:8 (2021), 1068–1121.
- [11] Borisov, D. I.; Sharapov, T. F. *On the resolvent of multidimensional operators with frequently alternating boundary conditions with the Robin homogenized condition*, J. Math. Sci. 213 (2016), no. 4, 461–503.

- [12] Brenner, S. C.; Scott, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer New York, 1996.
- [13] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.
- [14] Carbone, V. L.; Carvalho, A. N.; Schiabel-Silva, K. *Continuity of attractors for parabolic problems with localized large diffusion*, Nonlinear Analysis 68 (2008), 515–535.
- [15] Carvalho, A. N.; Cholewa, J. W. *Exponential global attractors for semigroups in metric spaces with applications to differential equations*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, Cambridge, v. 31, n. 6, (2011), 1641–1667.
- [16] Carvalho, A. N.; Langa, J. A. *An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation*, J. Differential Equations, 246 (2009), 2646–2668.
- [17] Carvalho, A. N.; Langa, J. A. *Non-autonomous perturbation of autonomous semilinear differential equations: Continuity of local stable and unstable manifolds*, J. Differential Equations, 233 (2007), 622–653.
- [18] Carvalho, A. N.; Langa, J. A.; Robinson J. C. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Volume 182, Springer New York Heidelberg Dordrecht London 2013.
- [19] Carvalho, A. N.; Piskarev, S. *A general approximations scheme for attractors of abstract parabolic problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization, New York, v. 27, n. 7/8, (2006), 785–829.
- [20] Cholewa, J. W.; Dlotko, T. *Global attractors in abstract parabolic problems*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [21] Çevik, E. O.; Ismailov, Z. I. *Spectrum of the Direct Sum os Operators*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 210, 1–8.
- [22] Engel, K. J.; Nagel, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, New York: Springer-Verlag, (Graduate texts in mathematics, v.194) (2000).
- [23] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, 2nd ed. (Graduate studies in mathematics; v. 19) (2010).
- [24] Figueroa-López, R. N.; Lozada-Cruz, G. J. *Dynamics os parabolic equations via the finite element method I. Continuity of the set equilibria*, J. Differential Equations, 261 (2016), 5235–5259.
- [25] Figueroa-López, R. N.; Lozada-Cruz, G. J. *On Global Attractors for a Class of Parabolic Problems*, J. Differential Equations, Appl. Math. Inf. Sci. 8, No. 2, (2014), 493–500.
- [26] Fujita, H.; Saito, N.; Suzuki, T. *Operador Theory and Numerical Methods*, V. 30., Elsevier Science B.V., (2001).
- [27] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (2001).

- [28] Guo, D.; Cho, Y. J.; Zhu, J. *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems*, Nova Science Publishers, Inc. New York (2004).
- [29] Hale, J. K. *Asymptotic behavior of dissipative systems*, American Mathematical Society, 1988.
- [30] Hale, J. K.; Raugel, G. *Lower Semicontinuity of Attractors of Gradient Systems and Applications*, Ann. Mat. Pura Appl., v. CLIV (1988), 281–326.
- [31] Henrot, A. *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Birkhauser Verlag, Basel–Boston–Berlin (2006).
- [32] Henry, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Berlin: Springer–Verlag (1981).
- [33] Kesavan, S. *Topics in functional analysis and applications*, New Delhi: New Age International (2003).
- [34] Ladyzhenskaya, O. A.; Uraltseva, N. N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York etc. (1968).
- [35] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York (1983)
- [36] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press, (1980).
- [37] Rudin, W. *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., Second Edition (1991).
- [38] Triebel H., *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, Berlin: VEB Deutscher, (1978).
- [39] Vainikko, G. *Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem)*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Oxford, v. 2, n. 6 (1978), 647–687.