UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Gino Gustavo Maqui Huamán

Introdução à Análise Intervalar em Níveis Simples e Extensão de Zadeh

São José do Rio Preto
2014

.

Gino Gustavo Maqui Huamán

Introdução à Análise Intervalar em Níveis Simples e Extensão de Zadeh

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Matemática Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof.Dr. Geraldo Nunes Silva.
Co-Orientador: Prof.Dr. Weldon Lodwick

São José do Rio Preto
2014

Huamán, Gino Gustavo Maqui.
Introdução à análise intervalar em níveis simples e extensão de Zadeh / Gino Gustavo Maqui Huamán. -- São José do Rio Preto, 2014
105 f. : il.

Orientador: Geraldo Nunes Silva
Coorientador: Weldon Lodwick
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática aplicada. 2. Análise de intervalos (Matemática) 3. Conjuntos difusos. 4. Lógica difusa. I. Silva, Geraldo Nunes. II. Lodwick, Weldon. III. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU – 517

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Gino Gustavo Maqui Huamán

Introdução à Análise Intervalar em Níveis Simples e Extensão de Zadeh

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Matemática Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros
UNICAMP - Campinas

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP-São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
04 de abril de 2014

Resumo

Nesta dissertação propomos estudar a aritmética intervalar restrita em níveis simples ou simplesmente SLCIA (Single Level Constraint Interval Arithmetic) e também a ordem total no espaço intervalar. Detalharemos uma estrutura algébrica adequada, falaremos sobre as propriedades do espaço métrico intervalar, assim como a caracterização das funções intervalares. Além disto faremos um estudo crítico destas funções que seja pela sua classificação em Simples, Extremais ou Totais ou por suas propriedades mais gerais. Estudaremos as sequências de números intervalares, os limites de funções intervalares. Mostraremos uma aplicação de todas estas utilizando o principio de extensão de Zadeh no contexto fuzzy.

Palavras-chave: Espaço intervalar; Função intervalar; Sequência intervalar; Limite de funções intervalares; Conjuntos fuzzy; Principio de extensão.

Abstract

This work proposes to study the Single Level Constraint Interval Arithmetic or simply SLCIA, an appropriate algebraic structure and a metric of the interval space. Additionally, it will also make a critical study of interval functions and the characterization of these functions depending on their classification in Simple, Extremal or Totals or by its general properties. Furthermore, we will study the sequences of interval numbers and the limits of interval functions. Lastly, it will also show an application of all these using Zadeh´s extension principle on the Fuzzy context.

Keywords: Interval space; Interval function; Interval sequence; Limit of interval function, Fuzzy sets, Extension principle.

A Deus por me dar a força para vencer todos os obstáculos desde o princípio da minha vida.
Aos meus pais Benedicta e Julián por todo seu esforço e sacrifício para me dar todo o amor, a compreensão, o apoio incondicional e a confiança em cada momento da minha vida.
Dedico

Sumário

0.2 Introdução

A análise intervalar e a teoria dos conjuntos fuzzy, como campos ativos de pesquisa e aplicação, são disciplinas matemáticas relativamente novas, recebendo o ímpeto na forma em que foram definidos em campos de estudos separados em 1959 e 1965, respectivamente, primeiro por R. E. Moore em seu relatório técnico em análise intervalar [15] e em sua tese de Ph.D.[14] enquanto o segundo por L. A. Zadeh em seus muito originais e influentes artigos sobre teoria de conjuntos fuzzy [24] [3] [25]. A conexão entre a análise intervalar e a teoria das possibilidades (históricamente a teoria de possibilidades surgiu da teoria de conjuntos fuzzy) é evidente na matemática de incertezas [13]. A teoria dos modelos da análise intervalar, entre outras coisas a incerteza devido ao cálculo numérico (erros de aproximação ou redondeio) que pode ser considerado como uma fonte de ambiguidade. A teoria dos conjuntos fuzzy e os modelos da teoria das possibilidades, entre outras, a incerteza da vaguidade e ambiguidade que surge da natureza transitória das entidades e da falta de informação, respectivamente. Dado que os intervalos podem ser considerados como um tipo particular de conjuntos fuzzy pois, de um ponto de vista, a teoria de conjuntos fuzzy é uma teoria mais geral do que a análise intervalar. Isto é, a análise intervalar poderia ser pensada para lidar com um tipo particular de incerteza cuja teoria geral descreve-se por conjuntos fuzzy. Mas, a análise intervalar desenvolveu-se como parte do então campo emergente da análise numérica que inicialmente tinha três alvos (1) análise de erros de cálculo (os erros calculam-se automaticamente incluído o arredondamento), (2) cálculo verificado ao que RE Moore primeiramente chamou posto aritmético e posteriormente intervalo, e (3) a derivação da estrutura subjacente algébrica de números de ponto flutuante chamado álgebra computacional. A aritmética de intervalos tem suas bases na publicação de 1931 no artigo de R.C. Young denominado *the algebra of many-valued quantities*(a álgebra de quantidades multivalentes), [23] enquanto que as funções de intervalos ou funções intervalares, que é ramo da análise intervalar, foi estudado por J.C. Burkill num artigo do ano 1924 denominado *Functions of intervals* (funções de intervalos)[4]. O espírito de cálculos intervalares datam de Arquimedes que apareceu no estudo da aproximação interior e exterior da circunferência de um círculo, dando assim inicio ao conceito de aproximação. Mas a aritmética de intervalos como um estudo completo e bem desenvolvido apareceu pela primeira vez em 1956 com a publicação *calculus of approximations* (cálculo das aproximações) escrita pelo matemático polonês M. Warmus [22]. Independentemente em 1958, o matemático japonês T. Sunaga publicou *Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis* [21] (teoria de uma álgebra de intervalos e suas aplicações na análise numérica), isto para a aritmética de intervalos. Estas consideram-se como as duas primeiras publicações sobre a aritmética de intervalos. Um terceiro desenvolvimento independente da aritmética de intervalos é o de R.E. Moore 1959 em seus dois artigos *Automatic error analysis in digital computation* [15] (análise do erro automático) e *Interval analysis I* [17] (análise intervalar I). Mesmo que Warmus e Sunaga precederam a Moore, nem Warmus nem Sunaga e nenhum dos seus colaboradores foram mais longe do que seus respectivos artigos publicados. Foi R. E. Moore e seus colaboradores quem desenvolveram toda a área da análise intervalar começando com a computação científica (*rounded interval arithmetic*), equações diferenciais, análise funcional, otimização global e álgebra linear intervalar. Todas nos primeiros dez anos de suas duas primeiras publicações. Um desenvolvimento histórico e de conteúdo da aritmética e análise intervalar pode ser encontrado em *Publications related to early work* de R. E. Moore e, ainda mais extensamente, em *Interval and fuzzy analysis : A unified approach*, [13] de W. A. Lodwick.

A dissertação está formada por cinco capítulos, nos quais teremos: no primeiro capítulo faremos uma descrição sobre os números intervalares e o espaço intervalar próprio, estudando duas aritméticas intervalares e suas propriedades, veremos uma relação de ordem total no espaço intervalar, descreveremos uma estrutura algébrica e estudaremos a métrica de Pompeu-Hausdorff. No segundo capítulo faremos um estudo detalhado das relações e funções intervalares e suas propriedades. No terceiro capítulo, desenvolveremos os limites de sequências de números intervalares e no quarto capítulo estudaremos os limites das funções intervalares e suas propriedades e no quinto capítulo daremos uma breve introdução de conjuntos fuzzy, mostraremos o principio de extensão de Zadeh e depois mostraremos uma aplicação neste contexto.

O objetivo principal desta dissertação é estabelecer uma teoria consistente e uma base sólida do cálculo intervalar e futuramente no contexto fuzzy, de modo que que permita o futuro desenvolvimento de teorias como as de diferenciabilidade intervalar e/ou integrabilidade intervalar e posteriormente generalizar estes conceitos para o contexto Fuzzy.

Capítulo 1

NÚMEROS E ESPAÇO DE INTERVALOS

1.1 Números Intervalares

Lembre-se que um *intervalo fechado* denotado por $[\underline{a}, \overline{a}]$ é o conjunto dos números reais dado por:

$$[\underline{a}, \overline{a}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}$$

e mesmo que outros tipos de intervalo (aberto, semi-aberto) aparecem na matemática, o nosso trabalho será desenvolvido plenamente para intervalos fechados. Assim, durante nosso trabalho o termo intervalo significará intervalo fechado.

Definição 1.1.1 (Espaço Intervalar)**.** *Nós chamaremos de subespaço intervalar próprio real ao conjunto* $\mathbb{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *de modo que os elementos de* $\mathbb{I}$ *sejam da forma* $[\underline{a}, \overline{a}] = \{z \in \mathbb{R}; \underline{a} \leq z \leq \overline{a}\}$*. Em geral dizemos que,* $\mathbb{I}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *é o subespaço intervalar próprio n-dimensional, sendo este definido pelo produto cartesiano de n subespaços intervalares próprios reais, isto é,* $\underbrace{\mathbb{I} \times ... \times \mathbb{I}}_{n-vezes}$*; aos elementos deste conjunto chamaremos de vetores intervalares n-dimensionais e serão denotados por uma n-upla intervalar do tipo* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *onde* $X_i \in \mathbb{I},\ \forall i = 1, 2, ..., n$.

Chamaremos de *Intervalo degenerado* ao intervalo $X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \mathbb{I}$ onde $\underline{X} = \overline{X}$.

1.2 Ordens Intervalares

Sabemos que existem muitas ordens definidas sobre o espaço de intervalos, nós trabalharemos com a ordem lexicográfica, que detalharemos a seguir.

Definição 1.2.1. *Dados* $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ *e* $B = [\underline{b}, \overline{b}]$*, elementos de* $\mathbb{I}$*; definimos as seguintes relações de ordem:*

$$A \leq B \Leftrightarrow \{\underline{a} < \underline{b} \ (\ ou \ \ \underline{a} = \underline{b} \text{ e } \overline{a} < \overline{b})\}.$$

e

$$A \geq B \Leftrightarrow \{\overline{a} < \overline{b} \ (\ ou \ \ \overline{a} = \overline{b} \text{ e } \underline{a} < \underline{b})\}.$$

que são chamadas de ordens lexicográficas.

O espaço intervalar $\mathbb{I}$ munido com qualquer uma das relações de ordem lexicográficas forma um conjunto totalmente ordenado.

Da propriedade antissimétrica da relação de ordem lexicográfica, temos que: dois intervalos A e B são iguais, e fica denotado por $A = B$ se, e somente se $A \leq B$ e $B \leq A$.

Teorema 1.2.2. *Sejam* A *e* B *dois intervalos. Dizemos que eles são iguais, denotado por* $A = B$ *se, e somente se* $\underline{a} = \underline{b}$ e $\overline{a} = \overline{b}$*, cuja notação simbólica é*

$$A = B \ \Leftrightarrow \ \underline{a} = \underline{b} \ \text{ e } \ \overline{a} = \overline{b}.$$

1.3 Operações Aritméticas Intervalares

Como já foi visto na introdução, até agora existem muitas teorias desenvolvidas sobre operações aritméticas intervalares, teorias que geralmente causam sobre-estimativas [5] no momento dos cálculos ou elas não verificam algumas propriedades desejadas, propriedades como a do inverso aditivo de um intervalo, ou a positividade de um intervalo elevado ao quadrado, dentre outras, foi assim que nós tomamos interesse na *Aritmética Intervalar Restrita de Níveis Simples* ou simplesmente SLCIA (do inglês: Single Level Constraint Interval Arithmetic), aritmética que até agora tem comportamento linear, isto em comparação a outras como, por exemplo, as propostas por, Moore, Minkowski ou outros, no sentido de que ela pode adotar resultados desejados ou esperados nos contextos operacionais. É assim que apresentaremos agora algumas definições e teoremas importantes como parte do desenvolvimento destas aritméticas.

1.3.1 Aritmética Intervalar Standard (SIA)

Dados $X, Y \in \mathbb{I}$ define-se as operações aritméticas, chamadas de standard e que foram propostas por Moore[16] como segue:

Adição

Sejam $X = [\underline{X}, \overline{X}], Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathbb{I}$ vamos encontrar uma forma operacional para somar intervalos, como:

$$x \in X \text{ significa que } \underline{X} \leq x \leq \overline{X}$$

e:

$$y \in Y \text{ significa que } \underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}.$$

Podemos ver pela adição de inequações que a soma numérica $x + y \in X + Y$ deve satisfazer:

$$\underline{X} + \underline{Y} \leq x + y \leq \overline{X} + \overline{Y}.$$

Assim, a expressão:

$$X + Y = \left[\underline{X} + \underline{Y}\ ,\ \overline{X} + \overline{Y}\right]$$

pode ser utilizada para implementar a soma de intervalos.

Exemplo 1.3.1. *Sejam* $X = [0\ ,\ 2]$ *e* $Y = [-1\ ,\ 1]$*, então*

$$X + Y = [0 + (-1)\ ,\ 2 + 1] = [-1\ ,\ 3]$$

note que este resultado é diferente à união de intervalos, pois:

$$X \cup Y = [-1\ ,\ 2]$$

Subtração

A expressão $X + Y$ é expressa convenientemente em termos dos extremos de X e Y. Expressões similares podem-se derivar para as operações aritméticas restantes. Por exemplo, para a *subtração* poderíamos somar as inequações:

$$\underline{X} \leq x \leq \overline{X} \quad \text{e} \quad -\overline{Y} \leq -y \leq -\underline{Y}$$

para obter:

$$\underline{X} - \overline{Y} \leq x - y \leq \overline{X} - \underline{Y},$$

o que mostra que:

$$X - Y = \left[\underline{X} - \overline{Y}\ ,\ \overline{X} - \underline{Y}\right].$$

Note que

$$X - Y \ = \ X + (-Y)$$

onde:

$$-Y = \left[-\overline{Y}\ ,\ -\underline{Y}\right] = \{y : -y \in Y\}.$$

Exemplo 1.3.2. *Se* $X = [-1; 0]$ *e* $Y = [1, 2]$ *, então:*

$$-Y = [-2\ ,\ -1]$$

e

$$X - Y = X + (-Y) = [-1, 0] + [-2, -1] = [-3, -1].$$

Será que $X - X = 0$ em geral? Por que?

Sabemos que a resposta é negativa, pois esta aritmética não proporciona o inverso aditivo de um número intervalar, fato que é de vital importância para o desenvolvimento do cálculo intervalar, isto é:

Suponhamos que:

- $X = [-2, 4]$ então $X - X = [-2, 4] - [-2, 4] = [-2, 4] + [-4, 2] = [-6, 6]$;
- $X = [-4, 4]$ então $X - X = [-4, 4] - [-4, 4] = [-4, 4] + [-4, 4] = [-8, 8]$;
- $X = [3, 3]$ então $X - X = [3, 3] - [3, 3] = [3, 3] + [-3, -3] = [0, 0] = 0$.

Vale a pena observar que, na subtração, no caso de intervalos não degenerados, o resultado pode dobrar em cumprimento aos intervalos envolvidos. Somente no caso de intervalos degenerados é que obtemos o zero como resposta. E neste caso (substração) sempre teremos como resposta intervalos simétricos. Este fato de não ter um inverso aditivo dá alguns problemas, por exemplo, no caso de resolver uma equação intervalar simples $AX + B = 0$.

Multiplicação

Em termos dos extremos, o produto $X \cdot Y$ de dois intervalos X e Y é dado por:

$$X \cdot Y = [min\ S, max\ S]\,, \text{ onde } S = \left\{\underline{X}\ \underline{Y}, \underline{X}\ \overline{Y}, \overline{X}\ \underline{Y}, \overline{X}\ \overline{Y}\right\}.$$

Exemplo 1.3.3. *Sejam* $X = [-1\ ,\ 0]$ *e* $Y = [1\ ,\ 2]$*, então*

$$S = \{-1 \cdot 1, -1 \cdot 2, 0 \cdot 1, 0 \cdot 2\} = \{-1, -2, 0\}$$

e $X \cdot Y = [min\ S, max\ S] = [-2, 0]$*. Temos também, por exemplo, que a multiplicação de um intervalo por um escalar é:*

$$2Y = [2, 2] \cdot [1, 2] = [2, 4]\,.$$

A multiplicação de intervalos se dá em termos do mínimo e do máximo dos quatro produtos dos extremos. Na verdade, mediante a análise dos extremos $\underline{X}, \overline{X}, \underline{Y}$ e $\overline{Y}$, a fórmula dos extremos do intervalo produto pode-se dividir em nove casos especiais. Em oito destes, só dois produtos devem ser calculados, os casos são mostrados na Tabela 1.1, detalhada a seguir.

Divisão

Igual que com números reais, a divisão de dois intervalos $X = [\underline{X}, \overline{X}], Y = [\underline{Y}, \overline{Y}] \in \mathbb{I}$ pode ser realizada através da multiplicação pelo recíproco do segundo termo, assim:

$$X/Y = X \cdot (1/Y)$$

onde

$$1/Y = \{y : 1/y \in Y\} = \left[1/\overline{Y}, 1/\underline{Y}\right].$$

Supondo que $0 \notin Y$

Caso	$\underline{X \cdot Y}$	$\overline{X \cdot Y}$
$0 \leq \underline{X}$ e $0 \leq \underline{Y}$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
$\underline{X} < 0$ e $0 \leq \underline{Y}$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
$\overline{X} \leq 0$ e $0 \leq \underline{Y}$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$
$0 \leq \underline{X}$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
$\underline{X} \leq 0$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$
$0 \leq \underline{X}$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$	$\underline{X} \cdot \overline{Y}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X} \cdot \underline{Y}$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$
$\overline{X} \leq 0$ e $\overline{Y} \leq 0$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$	$\underline{X} \cdot \underline{Y}$
$\underline{X} < 0 < \overline{X}$ e $\underline{Y} < 0 < \overline{Y}$	$min\left\{\underline{X} \cdot \overline{Y}, \overline{X} \cdot \underline{Y}\right\}$	$min\left\{\underline{X} \cdot \underline{Y}, \overline{X} \cdot \overline{Y}\right\}$

Tabela 1.1: Fórmulas dos Extremos para a Multiplicação de Intervalos

Exemplo 1.3.4. *Podemos utilizar a divisão para resolver a equação $ax + b = 0$, onde os coeficientes a e b são números reais que estão nos intervalos A e B respectivamente. Podemos perceber que x se encontra em $-\frac{B}{A}$. Mas isto não quer dizer que $A \cdot (-B/A) = B$*

Agora mostraremos os exemplos sobre a não existência do oposto aditivo e aquele que trata das sobre-estimativas nos cálculos.

Exemplo 1.3.5. *Seja $A = [-2, 5]$. Note que $-A = [-5, 2]$ e se nós utilizarmos a aritmética acima proposta para operar $A - A$ teremos que $A - A = A + (-A) = [-2, 5] + [-5, 2] = [-7, 7]$ quando o esperado é $A - A = [0, 0] = \{0\}$; este exemplo tão simples mostra a não existência do oposto ou inverso aditivo de um intervalo com esta aritmética; os únicos casos nos quais obtemos os resultados esperados é quando os intervalos são da forma $A = [a, a]$.*

Exemplo 1.3.6. *Se tivermos a função $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ tal que $f(X) = X^2 - 2X$, e quiséssemos conhecer o valor de $f([0, 2])$, pois considerando as operações aritméticas acima definidas teremos que, $f([0, 2]) = [0, 2]^2 - 2[0, 2] = [0, 4] + [-4, 0] = [-4, 4]$ e se utilizamos a expressão equivalente $f(X) = X(X - 2)$ para nossa regra de correspondência teremos que, $f([0, 2]) = [0, 2]([0, 2] - 2) = [0, 2][-2, 0] = [-4, 0]$ ou* *se* $f(X) = (X-1)^2 - 1$ *teremos que* $f([0,2]) = ([0,2]-1)^2 - 1 = [-1,1]^2 - 1 = [-1,1] - 1 = [-2,0]$, *quando o resultado esperado é* $f([0,2]) = [-1,0]$ *e nenhuma das expressões de* f *deu o valor esperado, o que deve-se ao fato da estrutura da SIA (Standard Interval Arithmetic).*

Mesmo que hoje tenhamos novas aritméticas intervalares onde pelo menos possa-se ganhar o elemento oposto da adição de intervalos (por exemplo, ganha-se isto com a diferença generalizada de Hukuhara), [20] ainda não foi possível estabelecer uma estrutura de campo em $\mathbb{I}$. Fato que impossibilita, por exemplo, resolver uma equação intervalar na forma mais simples, isto é, não seria tão simples resolver $AX = B,\ A, B \in \mathbb{I}$ e em geral as técnicas conhecidas até agora são muito restritivas.

Agora apresentamos a outra aritmética intervalar, que chamaremos de aritmética intervalar restrita de níveis simples. Faremos também uma estudo detalhado desta e mostraremos algumas implicações que ela poderia ter.

1.3.2 Aritmética Intervalar Restrita (CIA)

Definição 1.3.1. *Seja* $A = [\underline{a}, \overline{a}] \in \mathbb{I}$ *um intervalo qualquer. Então*

i) *A função continua* $A : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\min_{0\leq\lambda\leq 1} A(\lambda) = \underline{a}, \quad \max_{0\leq\lambda\leq 1} A(\lambda) = \overline{a}$$

será chamada de função restrição associada ao intervalo A.

ii) *Associada ao intervalo* A, *definimos a função restrição convexa crescente* $A_c : [0,1] \to \mathbb{R}$ *como:*

$$A_c(\lambda) = \lambda\overline{a} + (1-\lambda)\underline{a},\ 0 \leq \lambda \leq 1,$$

ou equivalentemente,

$$A_c(\lambda) = (\overline{a} - \underline{a})\lambda + \underline{a},\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Analogamente, definimos a *função restrição convexa decrescente* $A_d : [0,1] \to \mathbb{R}$ como:

$$A_d(\lambda) = \lambda\underline{a} + (1-\lambda)\overline{a},\ 0 \leq \lambda \leq 1,$$

ou equivalentemente,

$$A_d(\lambda) = (\underline{a} - \overline{a})\lambda + \overline{a}, \ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Estas funções serve para caraterizar intervalos, isto é, todo intervalo próprio $X \in \mathbb{I}$ tem associado uma função restrição convexa, e a vantagem desta está quando nós queremos operar intervalos, isto é:

Definição 1.3.2. *Sejam A e B dois intervalos e seja $*$ uma operação binária sobre $\mathbb{R}$, então:*

i. *Definimos a função restrição do intervalo $A \circledast B$ por $(A \circledast B)(\lambda_1, \lambda_2) = A(\lambda_1) * B(\lambda_2)$, onde $A(\lambda_1)$ e $B(\lambda_2)$ são funções restritas associadas a A e B respectivamente;*

ii. *A operação restrita de níveis simples $A \circledast B$ em $\mathbb{I}$ é dada pelo intervalo:*

$$A \circledast B = \left[\min_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1} (A(\lambda_1) * B(\lambda_2)), \max_{0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1} (A(\lambda_1) * B(\lambda_2)) \right]$$

Nesta última definição temos que tomar em conta que, se $A = B$ temos que considerar $\lambda_1 = \lambda_2$.

Exemplo 1.3.7. *Sejam $A = [-2, 3]$ e $B = [-1, 4]$ utilizando esta aritmética teremos que associado a estes intervalos existem suas correspondentes funções restrição $A(\lambda_1)$ e $B(\lambda_2)$ e que o resultado de algumas operações destes intervalos são:*

- $A \oplus B = [-3, 7]$;
- $A \ominus B = [-6, 4]$;
- $A \odot B = [-8, 12]$;
- $A \odot A = [0, 9]$.

1.3.3 Aritmética Intervalar Restrita de Níveis Simples (SL-CIA)

Dado que um intervalo é caracterizado pela sua função restrição convexa crescente (decrescente) de acordo com a Definição 1.3.1, temos,

Proposição 1.3.3. *Sejam $A, B \in \mathbb{I}$. Então temos as seguintes equivalências:*

i) $A = B$;

ii) *As funções restrição convexas crescentes de A e B são iguais, i.e.* $A_c(\lambda) = B_c(\lambda),\ \forall \lambda \in [0,1]$;

iii) *As funções restrição convexas decrescentes de A e B são iguais, i.e.* $A_d(\lambda) = B_d(\lambda),\ \forall \lambda \in [0,1]$.

Demonstração.

i)$\Rightarrow$ ii) Se $A = B$ então $\underline{a} = \underline{b}$ e $\overline{a} = \overline{b}$, então é imediato que $A_c(\lambda) = \underline{a} + \lambda(\overline{a} - \underline{a}) = \underline{b} + \lambda(\overline{b} - \underline{b}) = B_c(\lambda)$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

i)$\Rightarrow$ iii) Analogamente, temos que se $A = B$ então $\underline{a} = \underline{b}$ e $\overline{a} = \overline{b}$ e assim $A_d(\lambda) = \overline{a} + \lambda(\underline{a} - \overline{a}) = \overline{b} + \lambda(\underline{b} - \overline{b}) = B_d(\lambda)$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

ii)$\Rightarrow$ i) Note que para todo $\lambda \in [0,1]$ temos $A_c(\lambda) = B_c(\lambda)$ então $\underline{a} = \min\limits_{0\le\lambda\le1} A(\lambda) = \min\limits_{0\le\lambda\le1} B(\lambda) = \underline{b}$ e $\overline{a} = \max\limits_{0\le\lambda\le1} A(\lambda) = \max\limits_{0\le\lambda\le1} B(\lambda) = \overline{b}$, portanto $A = B$.

iii)$\Rightarrow$ i) Agora, se para todo $\lambda \in [0,1]$ temos $A_d(\lambda) = B_d(\lambda)$ então $\underline{a} = \min\limits_{0\le\lambda\le1} A_d(\lambda) = \min\limits_{0\le\lambda\le1} B_d(\lambda)\underline{b}$ e $\overline{a} = \max\limits_{0\le\lambda\le1} A_d(\lambda) = \max\limits_{0\le\lambda\le1} B_d(\lambda)\overline{b}$, portanto $A = B$.

$\square$

Observação 1.3.1. *Por comodidade, chamaremos simplesmente de* função restrição *a toda função que verifique dois itens da Definição1.3.1, isto é, a partir deste ponto chamaremos simplesmente de função restrição de A e a denotaremos por $A(\cdot)$, para nos referirmos à função restrição convexa crescente $A_c(\cdot)$ de A.*

Definição 1.3.4. *Seja A um intervalo e seja " $\sim$ " uma operação unária em $\mathbb{R}$. Então,*

i) Definimos a função restrita associada ao intervalo $\sim A$ por $(\sim A)(\lambda) = \sim(A(\lambda))$, onde $A(\lambda)$ é a função restrita de A.

ii) A operação aritmética restrita de níveis simples $(\sim A)$ em $\mathbb{I}$ é dada pelo intervalo:

$$\sim A = \left[\underset{0\leq\lambda\leq 1}{min} (\sim A(\lambda)), \underset{0\leq\lambda\leq 1}{max} (\sim A(\lambda)) \right].$$

Como exemplo de uma operação unária poderíamos considerar a negação de um intervalo, isto é:

$$-A = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1} (-A(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1} (-A(\lambda)) \right],$$

o mesmo que pelas propriedades do mínimo, temos que.

$$-A = \left[-\max_{0\leq\lambda\leq 1} (A(\lambda)), -\min_{0\leq\lambda\leq 1} (A(\lambda)) \right].$$

Ou também poderíamos considerar um outro exemplo, considerando o inverso de um intervalo A, com $0 \notin A$.

$$A^{-1} = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1} \left(\frac{1}{A(\lambda)} \right), \max_{0\leq\lambda\leq 1} \left(\frac{1}{A(\lambda)} \right) \right].$$

As potências com base intervalar A podem ser interpretadas como uma operação unária, isto é:

$$A^n = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1} (A(\lambda))^n, \max_{0\leq\lambda\leq 1} (A(\lambda))^n \right], \; n \in \mathbb{R}$$

Nesta última expressão temos que observar que se trabalhamos com intervalos simétricos, por exemplo, se $A = [-1, 1]$ teremos uma diferença entre SIA proposta por Moore em [16] e a SLCIA, isto é, no caso do SIA teremos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = [-1, 1] = A$ enquanto que com a CIA e a SLCIA teremos $A^n = [-1, 1] = A$ quando n é impar e $A^n = [0, 1]$ quando n é par.

Definição 1.3.5. *Sejam A e B dois intervalos e seja $*$ uma operação binária sobre $\mathbb{R}$, então,*

i. *Definimos a função restrição do intervalo $A \circledast B$ por $(A \circledast B)(\lambda) = A(\lambda) * B(\lambda)$, onde $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são funções restritas associadas a A e B respectivamente;*

ii. *A operação restrita de níveis simples (C-operação, por comodidade) $A \circledast B$ em $\mathbb{I}$ é dada pelo intervalo:*

$$A \circledast B = \left[\underset{0\leq\lambda\leq1}{min} (A(\lambda) * B(\lambda)), \underset{0\leq\lambda\leq1}{max} (A(\lambda) * B(\lambda)) \right]$$

Observação 1.3.2. *É evidente que se nós temos operações que envolvem somente um intervalo A, então os resultados obtidos por CIA e SLCIA são os mesmos.*

Mostraremos algumas propriedades desta aritmética e as compararemos com algumas outras já conhecidas. Consideremos a operação de adição, $* = +$ como a soma usual em $\mathbb{R}$. Então de acordo com a Definição 1.3.5 a soma de intervalos é definido por:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \left[\min_{0\leq\lambda\leq1} (A(\lambda) + B(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq1} (A(\lambda) + B(\lambda)) \right] \\ &= \left[\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b} \right] \end{aligned}$$

Pelo que a soma de intervalos é a mesma que a soma usual de intervalos proposta por Minkowski, que é a mesma que é dada em [18]. Uma diferença entre a CIA, e SLCIA será mostrada no próximo exemplo.

Exemplo 1.3.8. *Sejam os intervalos $A = [1, 4]$ e $B = [2, 6]$, se nos queremos soma-los teremos:*

- *Se nos consideramos a CIA, teremos que as funções restrição associadas a estas são $A(\lambda_x) = 1 + 3\lambda_x$ e $B(\lambda_y) = 2 + 4\lambda_y$, respectivamente, onde $A + B = [3, 10]$. Neste caso teremos que o elemento $1 \in A$ é operado com todos os elementos de B e operamos assim para todos os elementos de A. Isto é, o jeito de operar é o mesmo que do SIA.*

- *por outro lado se nós consideramos a SLCIA, teremos que as funções restrição simples associadas a estas são $A(\lambda) = 1+3\lambda$ e $B(\lambda) = 2+4\lambda$ respectivamente e com $\lambda \in [0, 1]$, onde ao operar estes intervalos teremos como resultado $A \oplus B = [3, 10]$, que é o mesmo resultado que o anterior. Mas aqui o elemento $1 \in A$ é operado unicamente com o elemento $2 \in B$. E podemos ver um aspecto* *importante que, por exemplo, para* $\lambda = \frac{1}{2}$ *obrigatoriamente os elementos a serem operados serão aqueles que estão no meio dos intervalos; isto é, para este exemplo estamos obrigados a operar* $\frac{5}{2} \in A$ *e* $4 \in B$.

A multiplicação de um escalar (número real) α por um intervalo A está dado por:

$$\begin{aligned} \alpha \odot A &= \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}(\alpha \cdot A(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1}(\alpha \cdot A(\lambda))\right] && (1.1)\\ &= [\min\{\alpha \cdot \underline{a}, \alpha \cdot \overline{a}\}, \max\{\alpha \cdot \underline{a}, \alpha \cdot \overline{a}\}] && (1.2) \end{aligned}$$

Note que a multiplicação de um escalar (número real)α por un intervalo A tem o mesmo resultado que a aritmética intervalar estândar SIA dada em [18]. Também devemos observar que a negação definida em 1.3.4 é a mesma que $(-1) \odot A$ como foi definida acima.

Teremos que, a subtração de dois intervalos é:

$$\begin{aligned} A \ominus B &= \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}(A(\lambda) - B(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1}(A(\lambda) - B(\lambda))\right] && (1.3)\\ &= \left[\min\{\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\}, \max\{\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\}\right] && (1.4) \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.9. *Consideremos os intervalos* $A = [1, 4]$ *e* $B = [2, 6]$, *então teremos que as funções restrição convexas associadas a* A *e* B *são* $A(\lambda) = 1 + 3(\lambda)$ *e* $B = 2 + 4\lambda$ *com* $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} A \ominus B &= \left[\mathit{min}_{0\leq\lambda\leq 1}(-1 - \lambda), \mathit{max}_{0\leq\lambda\leq 1}(-1 - \lambda)\right]\\ &= [-2, -1] \end{aligned}$$

Teorema 1.3.6. *(ver [20])A substração SLCIA e a gH-diferença*[1] *de dois intervalos* $A = [\underline{a}, \overline{b}]$ *e* $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ *são equivalentes, isto é:*

$$A \ominus B = A \ominus_{gH} B = \left[\mathit{min}\{\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\}, \mathit{max}\{\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\}\right]$$

Definiremos o produto $A \times B$ de dois intervalos A e B por:

$$A \otimes B = \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}(A(\lambda) \times B(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1}(A(\lambda) \times B(\lambda))\right]$$

[1]*gH-diferença* é a diferença generalizada de Hukuhara de dois intervalos A e B

A divisão $A \div B$ de dois intervalos A e B quando $0 \notin B$, é definido por:

$$A \div B \;=\; \left[\min_{0\leq\lambda\leq 1}(A(\lambda) \div B(\lambda)), \max_{0\leq\lambda\leq 1}(A(\lambda) \div B(\lambda))\right]$$

Observação 1.3.3. *Um fato importante pelo qual utilizamos a SLCIA é o fato de que nesta aritmética teremos que se A é um intervalo então $A \oplus (-A) = A \ominus A = \{0\}$.*

1.4 Estrutura Algébrica em $\mathbb{I}$

Proposição 1.4.1. *I) a aplicação $\oplus : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ tal que $(A, B) \mapsto A \oplus B$; é simples provar que para todo $A, B, C \in \mathbb{I}$ ela verifica as seguintes propriedades:*

(a) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (lei associativa);

(b) $A \oplus B = B \oplus A$ (lei comutativa);

(c) existe $0 \in \mathbb{I}$ tal que $A \oplus 0 = A$, (lei do elemento neutro);

(d) para todo $A \in \mathbb{I}$ existe $-A \in \mathbb{I}$ tal que $A - A = A \ominus A = 0$, (lei do elemento oposto).

assim $\{\mathbb{I}\ , \oplus\}$ possui estrutura de Grupo Abeliano.

II) Com a aplicação $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ tal que $(\alpha, A) \mapsto \alpha \odot A$, é simples ver que se verificam as seguintes propriedades:

(a) $(\alpha\beta) \odot A = \alpha(\beta \odot A)$ (lei associativa);

(b) $(\alpha + \beta) \odot A = \alpha \odot A \oplus \beta \odot A$
$\alpha \odot (A \oplus B) = \alpha \odot A \oplus \alpha \odot B$ (lei distributiva);

(c) $1 \odot A = A$ (elemento unidade).

e com **I)** e **II)** fazendo de $\mathbb{I}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, fato que não tinha-se antes com a SIA.

Também é importante ver que todo intervalo $A \in \mathbb{I}$, tal que $0 \neq A$ possui inverso multiplicativo.

Como o sub-espaço intervalar $\mathbb{I}$ tem como elementos intervalos fechados e limitados faz sentido falar sobre a função de Pompeu-Hausdorff[19] [11], a mesma que será detalhada nas próximas seções.

Dado que temos já uma estrutura algébrica definida, é interessante ver o que acontece com a topologia do espaço intervalar $\mathbb{I}$, parar isto apresentaremos uma métrica adequada, chamada de métrica de Pompeu-Hausdorff, a mesma que será estudada na seguinte seção.

1.5 Métrica de Pompeu-Hausdorff sobre $\mathbb{I}$

Definição 1.5.1. *A função de Pompeu-Hausdorff é definida para dois elementos $A, B \in \mathbb{I}$ como $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, tal que:*

$$H(A, B) = \max\{d_1(A, B), d_1(B, A)\},$$

onde, $d_1 : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ dado por:

$$d_1(A, B) = \sup_{a \in A} d_2(a, B)$$

é uma quase métrica, e $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ é dado por

$$d_2(a, B) = \inf_{b \in B} d_3(a, b)$$

com d_3 distancia euclideana.

Proposição 1.5.2. *A função H é uma métrica em $\mathbb{I}$.*

Demonstração. .

$H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \ e \ H(A, B) > 0$. Se $A = B$, então $H(A, B) = 0$ pois todo $a \in A$ verifica que $d_2(a, B) = 0$, e também todo $b \in B$ verifica que $d_2(A, b) = 0$. Reciprocamente, se $H(A, B) = 0$ temos que os dois termos da expressão de máximo são zeros, e assim $d_2(a, B)$ para cada $a \in A$

$H(A, B) = H(B, A)$

$H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$ Note que, para $a \in A,\ b \in B$ e $c \in C$ temos que $d_2(a,C) \leq d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$, assim

$$d_2(a,C) \leq d(a,b) + d(b,C) \leq d(a,b) + H(B,C)$$

tomando o ínfimo do lado direito em função de $b \in B$, obtemos:

$$d(a,C) \leq d(a,B) + H(B,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$$

, daqui, $\sup\limits_{a \in A} d(a,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$ o que mostra que:

$$H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C).$$

□

Note que d_2 não é igual à distancia de Pompeu-Hausdorff quando nos referimos a um conjunto pontual simples ou intervalo degenerado $\{a\} = [a,a] \in \mathbb{I}$ e um conjunto $C \in \mathbb{I}$, com C não degenerado, pois em efeito:

$$\begin{aligned} H(a,C) &= \max\{d_1(A,B), d_1(B,A)\} \\ &= \max\{\sup_{a \in \{a\}} d_2(a,C), \sup_{c \in C} d_2(c,\{a\})\} \\ &= \max\{d_2(a,C), \sup_{c \in C} \inf_{a \in \{a\}} d_3(c,a)\} \\ &= \max\{\inf_{c \in C} d_3(a,c), \sup_{c \in C} d_3(c,a)\} \\ &= \sup_{c \in C} d_3(c,a) \end{aligned}$$

Esta definição da métrica de Pompeu-Hausdorff é algumas vezes simples para uma manipulação simbólica, mas poderia ser reformulada para ter uma ideia visual, isto é.

Teorema 1.5.3. *Dados $A, B \in \mathbb{I}$ temos:*

$$H(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(B,\epsilon) \ e \ B \subseteq N(A,\epsilon)\},$$

onde:

$$N(A,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : d_2(x,A) \leq \epsilon\}$$

Proposição 1.5.4. *A Definição (1.5.1) da métrica de Pompeu-Hausdorff e o Teorema (1.5.3) são equivalentes:*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
H(A,B) &= \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(B,\epsilon) \wedge B \subseteq N(A,\epsilon)\} \\
&= \max\{\inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq N(B,\epsilon)\}, \inf\{\epsilon > 0 : B \subseteq N(A,\epsilon)\}\} \\
&= \max\{\inf\{\epsilon > 0 : \forall a \in A, \inf_{b\in B} d_3(a,b)\}, \\
&\qquad \inf\{\epsilon > 0 : \forall b \in B, \inf_{a\in A} d_3(a,b)\}\} \\
&= \max\{\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d_3(a,b), \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d_3(a,b)\} \\
&= \max\{d_1(A,B), d_1(B,A)\}
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5.5. $(\mathbb{I}, H)$ *é um espaço métrico separável completo.*

Demonstração. Ver [7] □

Proposição 1.5.6. *Sejam* $A, B, C, D \in \mathbb{I}$*, e utilizando as operações com a SLCIA teremos:*

i $H(tA, tB) = |t|H(A,B)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

ii $H(A + C, B + D) \leq H(A,B) + H(C,D)$.

iii $H(A + C, B + C) = H(A,B)$.

iv $H(A,B) = H(A - B, 0)$

Definição 1.5.7. *Dado* $A = [\underline{a}, \overline{a}] \in \mathbb{I}$ *chamaremos de valor extremo absoluto do intervalo* A *ao valor da função* $|\cdot\|: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ *em* A *que é denotado por* $|A\|$ *e definido pelo máximo dos valores absolutos dos extremos de* A*, isto é:*

$$|A\| = \max\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}$$

No que diz respeito a esta última definição, temos que levar em consideração que no livro de Moore [17] ela é chamada simplesmente como valor absoluto, só que agora nós precisamos re-denotar este conceito, pois ele poderia causar confusão tanto no nome como na notação, com o conceito clássico de função valor absoluto, pois este último será estendido para o contexto intervalar.

Proposição 1.5.8. *Dado $A \in \mathbb{I}$, temos que:*

1. $|A\| = H(0, A)$.
2. $|tA\| = |t||A\| \ \forall t \in \mathbb{R}$.
3. $||A\| - |B\|| \leq H(A, B)$.

Demonstração. Ver ([6]) □

Definição 1.5.9. *Dado $A = [\underline{a}, \overline{a}] \in \mathbb{I}$ chamaremos de comprimento do intervalo A ao valor definido por:*

$$w(A) = \overline{a} - \underline{a}.$$

Conclusões do Capítulo

Neste capítulo foram apresentadas definições elementares dos espaços intervalares próprios, definimos uma ordem total, apresentamos três tipos de operações aritméticas, isto é, a aritmética intervalar standard (SIA), a aritmética intervalar restrita (CIA) e a aritmética intervalar restrita de níveis simples (SLCIA), exemplificando cada uma destas para mostrar assim as suas diferenças e semelhanças. Neste capítulo foi apresentado também uma estrutura de espaço vetorial em $\mathbb{I}$, e a métrica de Pompeu-Hausdorff fazendo de $\mathbb{I}$ um espaço métrico separável completo.

Capítulo 2

RELAÇÕES E FUNÇÕES INTERVALARES

Sabemos que para o desenvolvimento dos limites de funções intervalares é necessário ter claro as definições e as propriedades das funções intervalares. Assim, neste capítulo apresentaremos detalhadamente um estudo sobre as funções intervalares, classificando estas em simples, extremais ou totais, mostrando também algumas propriedades destas, mas, antes apresentaremos definições prévias como as de par ordenado intervalar, produto cartesiano intervalar e relações intervalares. Todos estes casos, no possível, serão exemplificados e terão uma interpretação geométrica.

2.1 Relações

Definição 2.1.1. *Define-se o par ordenado intervalar de elementos A e B em $\mathbb{I}$, como:*

$$(A, B) = \{\{A\}, \{A, B\}\}$$

Se $A \neq B$, (A, B) tem dois elementos, um simples ou singular $\{A\}$ e um par não ordenado $\{A, B\}$. A primeira coordenada de (A, B) é o elemento que pertence aos dois conjuntos, isto é A, e a segunda coordenada é o elemento que pertence só a um dos conjuntos, isto é B. Se $A = B$, então $(A, A) = \{\{A\}, \{A, A\}\}$ tem um único elemento $\{A\}$; neste caso ambas coordenadas são iguais.

Teorema 2.1.2. *$(A, B) = (C, D)$ se, e somente se $A = C$ e $B = D$, $\forall A, B, C, D \in \mathbb{I}$*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos que $\{\{A\}, \{A, B\}\} = \{\{C\}, \{C, D\}\}$. Se $A \neq B$ e aproveitando a cardinalidade dos conjuntos, teremos $\{A\} = \{C\}$ e $\{A, B\} = \{C, D\}$, daqui $A = C$ e $B = D$. Se $A = B$, $\{\{A\}, \{A, B\}\} = \{\{A\}\}$ disto $\{A\} = \{C\}$ e $\{A\} = \{C, D\}$, o que implica que $A = C = D$. Assim $A = C$ e $B = D$ □

Definição 2.1.3. *Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dois conjuntos com elementos intervalares. O produto cartesiano intervalar de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ é o Conjunto $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ que consta de todos os pares ordenados (A, B) tais que $A \in \boldsymbol{A}$ e $B \in \boldsymbol{B}$, isto é:*

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(A, B) : A \in \boldsymbol{A} \text{ e } B \in \boldsymbol{B}\}$$

Exemplo 2.1.1. *Sejam $\boldsymbol{A} = \{[0, 1], [2, 4]\}$ e $\boldsymbol{B} = \{[1, 3], [4, 5]\}$. O produto cartesiano destes conjuntos é:*

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{([0, 1], [1, 3]), ([0, 1], [4, 5]), ([2, 4], [1, 3]), ([2, 4], [4, 5])\}$$

agora, se utilizamos a SLCIA para representar os conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e o produto cartesiano, teremos que:
$(\boldsymbol{A})(\lambda) = \{\lambda, 2 + 2\lambda\}$
$(\boldsymbol{B})(\lambda) = \{1 + 2\lambda, 4 + \lambda\}$
$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})(\lambda) = \{(\lambda, 1 + 2\lambda), (\lambda, 4 + \lambda), (2 + 2\lambda, 1 + 2\lambda), (2 + 2\lambda, 4 + \lambda)\}$ *com* $\lambda \in [0, 1]$.
Desta última expressão podemos ver que, dependendo do valor de λ, e para cada valor de λ, os elementos do produto cartesiano serão, por exemplo, pares de pontos ou números reais, como poderia ser visto a continuação para alguns casos particulares de λ teremos os pares de números reais, isto é:

- *Se $\lambda = 0$ então $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})(0) = \{(0, 1), (0, 4), (2, 1), (2, 4)\}$;*
- *Se $\lambda = 1/2$ então $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})(1/2) = \{(0.5, 2), (0.5, 4.5), (3, 2), (3, 4.5)\}$;*
- *Se $\lambda = 1$ então $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})(1) = \{(1, 3), (1, 5), (4, 3), (4, 5)\}$.*

como pode ser visto no seguinte gráfico:

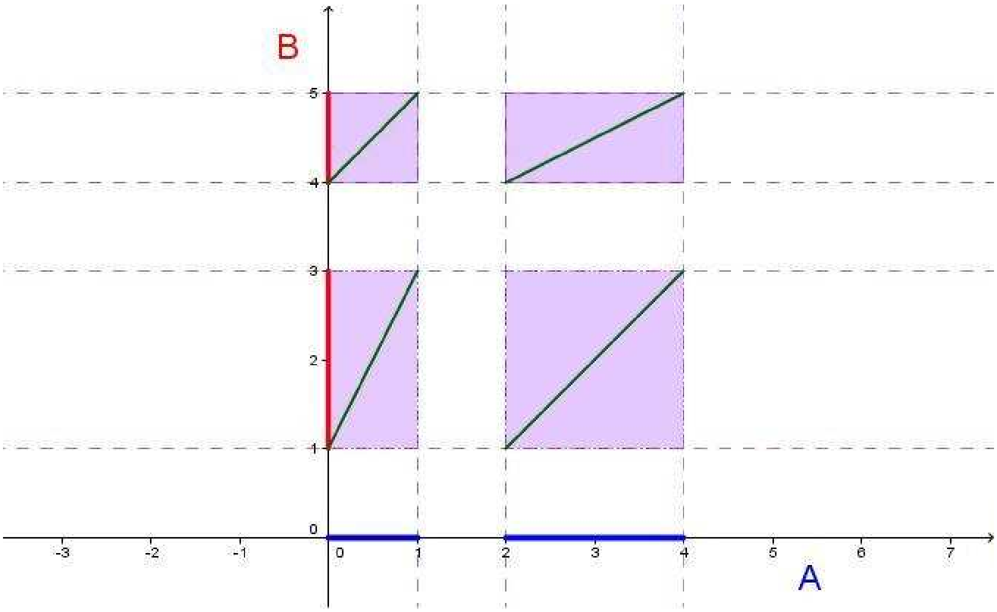

Figura 2.1: Produto Cartesiano Intervalar.

Exemplo 2.1.2. *Seja* $\boldsymbol{A} = \{(X, Y) \in \mathbb{I}^2 : X^2 + Y^2 = [1, 4]\}$ *e* $\boldsymbol{B} = \{[2, 3]\}$ *então* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ *é o conjunto de pontos de* $\mathbb{I}^3$ *que estão no tronco de um cone. Note que os conjuntos* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *do SLCIA serão:*

$\boldsymbol{A} = \{(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}), (\underline{y} + \lambda(\overline{y} - \underline{y}))) : (\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}))^2 + (\underline{y} + \lambda(\overline{y} - \underline{y}))^2 = 1 + 3\lambda\}$

$\boldsymbol{B} = \{2 + \lambda\}$

com $\lambda \in [0, 1]$ *e cuja interpretação geométrica é:*

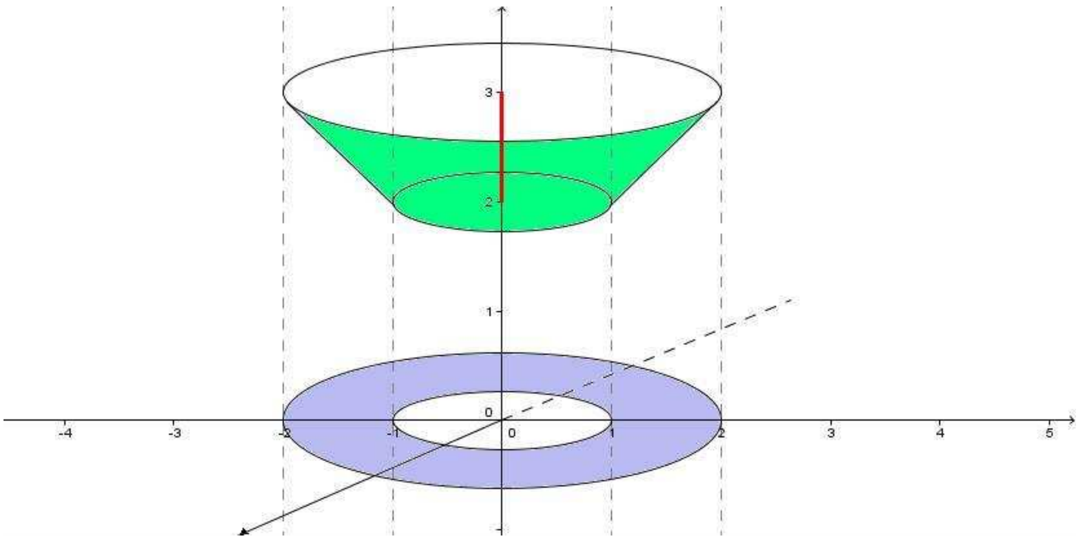

Figura 2.2: Produto Cartesiano Intervalar.

Teorema 2.1.4. *Dados* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{I}$ *temos que:*

1. $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \phi$ *se, e somente se* $\boldsymbol{A} = \phi$ *ou* $\boldsymbol{B} = \phi$*;*

2. *Se* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \neq \phi$ *então* $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ *se, e somente se* $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{B}$*;*

3. $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$*;*

4. $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$*.*

Definição 2.1.5. *Um conjunto* R *é uma relação (binária) intervalar se todo elemento de* R *é um par ordenado, isto é, se para todo* $Z \in R$*, existem* $X, Y \in \mathbb{I}$*, tais que* $Z = (X, Y)$*. Se* $R \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ *dizemos que* R *é uma relação de* $\boldsymbol{A}$ *em* $\boldsymbol{B}$*, ou entre* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$*; e se* $R \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ *dizemos simplesmente que* R *é uma relação em* $\boldsymbol{A}$*.*

Definição 2.1.6.

1. *Dizemos que* X *está em relação* R *com algum* Y *se* $(X, Y) \in R$*.*

2. *O conjunto de todos os* $X \in \mathbb{I}$ *que estão em relação* R *com algum* Y *é chamado domínio de* R *e é denotado por Dom* R*.*

3. *O conjunto de todos os* $Y \in \mathbb{I}$ *tal que para algum* X*,* X *esteja relacionado com* Y*, é chamada de Imagem de* R *e é denotado por* $Im\ R$*.*

O domínio e a imagem de uma relação intervalar R também podem ser descritos por:

$$Dom\ R = \{X \in \mathbb{I} : \exists Y \in \mathbb{I}\ e\ (X, Y) \in R\}.$$

$$Im\ R = \{Y \in \mathbb{I} : \exists X \in \mathbb{I}\ e\ (X, Y) \in R\}.$$

Definição 2.1.7. *Seja* R *uma relação intervalar. A relação intervalar inversa de* R *é o conjunto:*

$$R^{-1} = \{Z : Z = (X, Y)\ com\ (Y, X) \in R\}.$$

Definição 2.1.8. *Sejam* R *e* S *relações intervalares. A composição de* R *e* S *é a relação:*

$$S \circ R = \{(X, Z) : \exists Y\ para\ o\ qual\ (X, Y) \in R\ e\ (Y, Z) \in S\}.$$

2.2 Funções

Definição 2.2.1. *Uma relação intervalar f é chamada de função intervalar se dados $A, B, C \in \mathbb{I}$ de modo que $(A, B) \in f$ e $(A, C) \in f$ implica que $B = C$.*

Dados $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbb{I}$ costuma-se utilizar a notação $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ para denotar a função f; ou de modo mais preciso:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ & A & \longmapsto & f(A). \end{array}$$

Exemplo 2.2.1. *Sejam $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ subconjuntos de $\mathbb{I}$ e $B \in \boldsymbol{Y}$ fixo. Então $f = \boldsymbol{X} \times \{B\}$ é uma função, chamada de função constante de $\boldsymbol{X}$ em $\boldsymbol{Y}$. Note que neste caso poderíamos ter uma ideia intuitiva geométrica:*

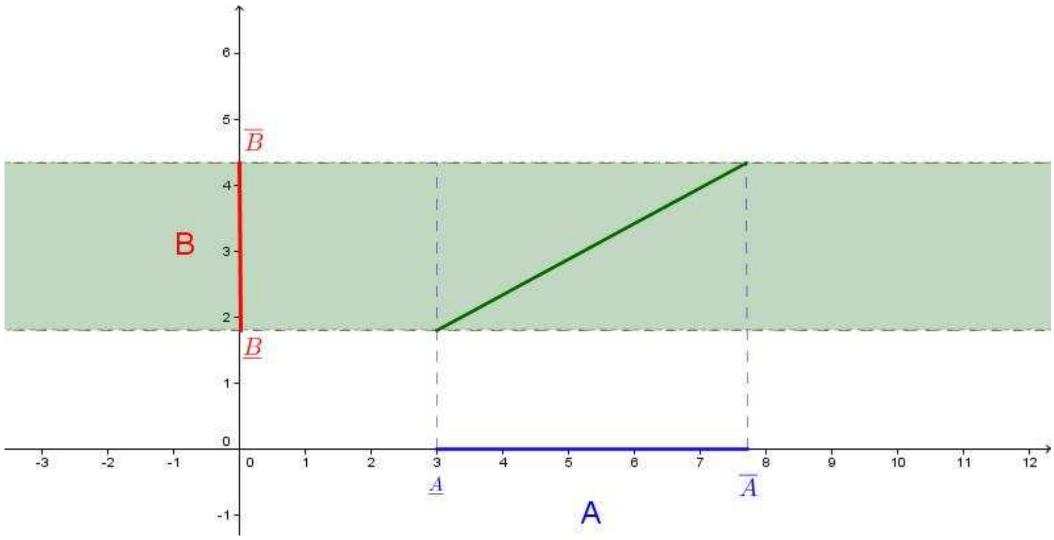

Figura 2.3: Função Intervalar Constante.

E utilizando a SLCIA teremos que:

$$\begin{array}{rccc} f: & \boldsymbol{X} & \longrightarrow & \boldsymbol{Y} \\ & A & \longmapsto & f(A) = B \end{array}$$

onde $A(\lambda) = \underline{A} + \lambda(\overline{A} - \underline{A})$ e $B(\lambda) = \underline{B} + \lambda(\overline{B} - \underline{B})$, e daqui teremos que:

$$f_\lambda = (\boldsymbol{X} \times \{B\})_\lambda = \{(\underline{A} + \lambda(\overline{A} - \underline{A}), \underline{B} + \lambda(\overline{B} - \underline{B})) : \forall A \in \boldsymbol{X}, B \text{ fixo } \text{ e } \lambda \in [0, 1]\}$$

onde f_λ é a função restrição associada a função intervalar f.

Exemplo 2.2.2. *Se* $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{I}$*,* $f = \{(X, Y) \in \boldsymbol{X}^2 : X = Y\}$ *é função, e chama-se de função identidade em* $\boldsymbol{X}$*,* $f = Id_{\boldsymbol{X}}$*, cuja ideia geométrica utilizando SLCIA é:*

$$f_\lambda = \{(X(\lambda), Y(\lambda)) \in \mathbb{R}^2 : X(\lambda) = Y(\lambda), \lambda \in [0, 1]\}$$

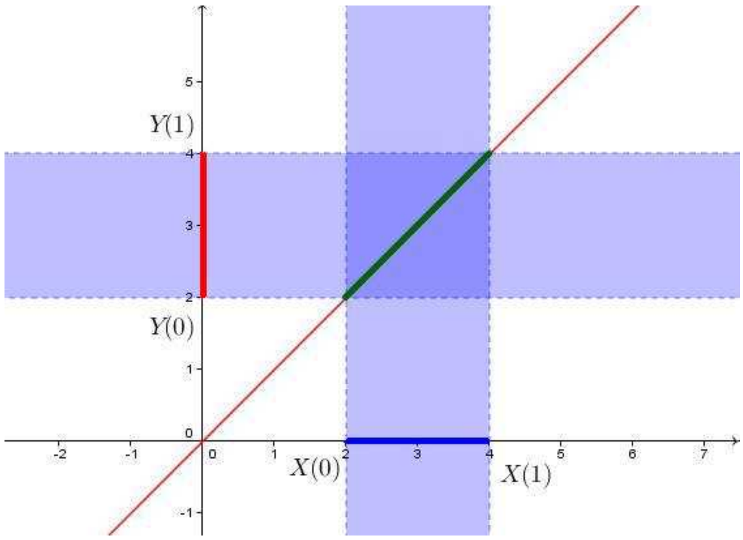

Figura 2.4: Função Identidade Intervalar.

Exemplo 2.2.3. *Se* $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{I}$*, então* $f = \{(X, Y) \in \boldsymbol{X}^2 : Y = X^2\}$ *é função, e chama-se de função quadrática definida em* $\boldsymbol{X}$*,a mesma que utilizando o SLCIA pode ser descrita por:*

$$f_\lambda = \{(X(\lambda), Y(\lambda)) \in \mathbb{R}^2 : Y(\lambda) = (X(\lambda))^2, \lambda \in [0, 1]\}.$$

E se nós fazemos uma análise desta função para alguns $X \in \mathbb{I}$ *específicos, teremos por exemplo que:*

- *Se* $X = [0, 2]$ *então* $Y(\lambda) = (X(\lambda))^2 = (2\lambda)^2;\ \lambda \in [0, 1]$*;*
- *Se* $X = [1, 3]$ *então* $Y(\lambda) = (X(\lambda))^2 = (1 + 2\lambda)^2;\ \lambda \in [0, 1]$*;*
- *Se* $X = [-2, -1]$ *então* $Y(\lambda) = (X(\lambda))^2 = (-2 + \lambda)^2;\ \lambda \in [0, 1]$*.*

Isto mostra que para cada valor de X*, com* λ *entre* $[0, 1]$ *obtemos que a função tenha o mesmo percorrido que uma função real cuja regra de correspondência está determinada por* $f(x) = x^2$*, fato que será mostrado geometricamente em:*

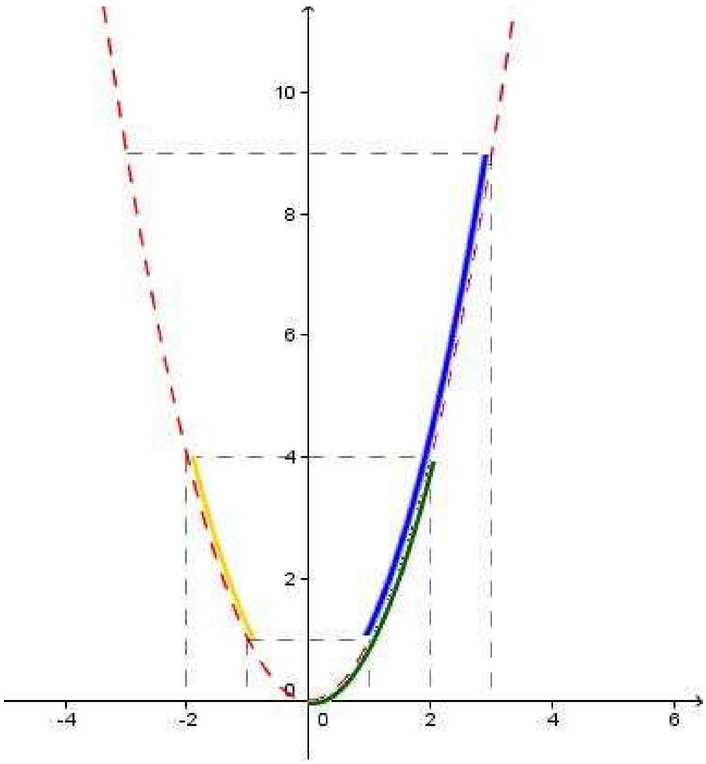

Figura 2.5: Função Quadrática Intervalar.

Neste último exemplo podemos dizer que XfY (X relacionado segundo f com Y) e que $Y = f(X)$ é a regra de correspondência de X com Y; é assim que toda função intervalar pode ser caracterizada simplesmente pela sua regra de correspondência.

Sem perda de generalidade, chamaremos de função intervalar a toda função cujos elementos da imagem sejam intervalos independentemente do domínio ou conjunto de partida. É assim que, se trabalhamos com subconjuntos de $\mathbb{R}$ poderíamos dizer que existem três formas de obter funções intervalares, as mesmas que classificaremos e detalharemos como segue:

- Função Intervalar Simples.
- Função Intervalar Extremal.
- Função Intervalar Total.

2.2.1 Função Intervalar Simples

Definição 2.2.2. *Chamaremos de Função Intervalar Simples a toda função f tal que:*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{I} \\ x &\longmapsto Y = f(x) = A \cdot g(x) \end{aligned}$$

onde $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{I}$ e $\cdot$ é o operador que multiplica um escalar por um intervalo utilizando a SLCIA.

Para este tipo de funções dizemos que a função intervalar f é gerada pela função real g e além disso $Dom\ f \subset \mathbb{R}$ e $Im\ f \subset \mathbb{I}$.

Exemplo 2.2.4. *seja*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{I} \\ x &\longmapsto Y = f(x) = [1,2] \cdot x \end{aligned}$$

cuja regra de correspondência é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} [x, 2x] & ; \quad x \geq 0 \\ [2x, x] & ; \quad x < 0. \end{cases}$$

e cuja ideia geométrica está dada por:

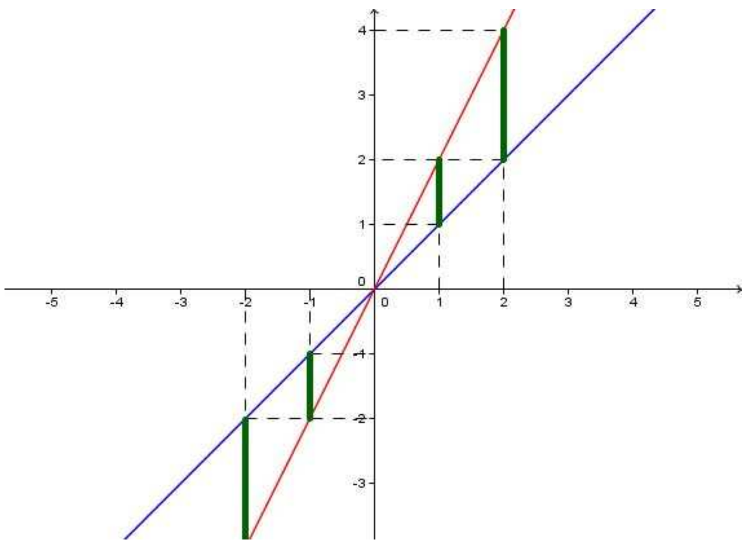

Figura 2.6: Gráfico da Função Intervalar Simples $f(x) = [1,2] \cdot x$.

Exemplo 2.2.5. *seja*

$$\begin{array}{rcll} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = f(x) = [1,2]\cdot x^2 \end{array}.$$

Neste caso g representa uma função quadrática; note que a f pode ser escrita como:

$$f(x) = [-x^2, 3x^2]$$

e cuja ideia geométrica é:

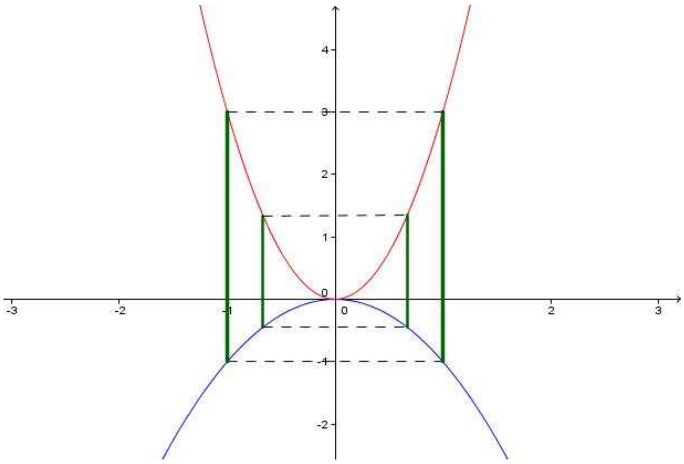

Figura 2.7: Função Quadrática Intervalar Simples $f(x) = [1,2]\cdot x^2$.

2.2.2 Operações com Funções Intervalares Simples

Sejam f_1 e f_2 duas funções intervalares simples, tal que:

$$\begin{array}{rcll} f_1: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = f_1(x) = A_1\cdot g_1(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} f_2: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = f_2(x) = A_2\cdot g_2(x) \end{array}$$

então utilizando a SLCIA teremos:

$$\begin{aligned} (f_1 \circledast f_2)(x) &= (f_1(x)) \circledast (f_2(x)) \\ &= (A_1\cdot g_1(x)) \circledast (A_2\cdot g_2(x)) \\ &= ((\underline{A_1} + \lambda(\overline{A_1} - \underline{A-1}))\cdot g_1(x)) * ((\underline{A_2} + \lambda(\overline{A_2} - \underline{A-2}))\cdot g_2(x))\ ;\ \lambda \in [0,1] \end{aligned}$$

onde $* \in \{+, -, \times, \div\}$ é um operador real.

Exemplo 2.2.6. *Sejam* $f_1(x) = [1,2] \cdot x$ *e* $f_2(x) = [-1,3] \cdot e^x$ *então, utilizando a SLCIA teremos que:*

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = \begin{cases} [x - e^x, 2x + 3e^x] & ; \quad x \geq 0, \\ [2x - e^x, x + 3e^x] & ; \quad x < 0. \end{cases}$$

A interpretação geométrica é:

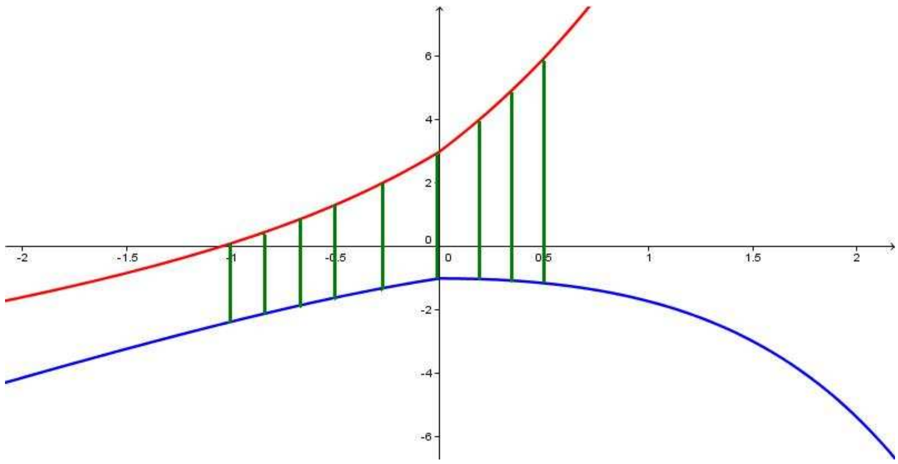

Figura 2.8: Soma de f_1 e f_2 via SLCIA.

Lembre-se que no caso da divisão de funções intervalares simples, o divisor não pode conter o zero como elemento.

2.2.3 Classificação de Funções Intervalares Simples

Definição 2.2.3. *Dizemos que a função intervalar simples* $f : U \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{B} \subset \mathbb{I}$ *é sobrejetora, se para todo* $Y \in B$ *, existem* $x_i \in U$; $i = 1, 2, ..., n$ *tais que* $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(x_i)$

Esta definição quer dizer que, qualquer intervalo $Y \in \mathbb{I}$ admite uma subcobertura finita, baseada na topologia induzida pela norma de Pompeu-Hausdorff, isto é, dado qualquer $Y \in \mathbb{I}$, ele pode ser coberto por uma união finita de compactos, conexos (intervalos); uma outra ideia de sobrejetividade poderia ser estabelecida quando a função a ser avaliada é transformada ou expressa em termos da sua função restrição, isto é:

Definição 2.2.4. *Dizemos que a função intervalar simples* $f : U \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{B} \subset \mathbb{I}$ *é sobrejetora, se* f_λ *o é* $\forall \lambda \in [0, 1]$*; isto é, se dada a função restrição* f_λ *temos que para todo* $y_\lambda \in Y$ *(*$Y \in \boldsymbol{B}$*)existem* $x_i \in U$ *tais que* $\bigcup\limits_{i,\lambda} f_\lambda(x_i) = \mathbb{R}$

Em outras palavras temos: $\forall Y \in \mathbf{B},\ f^{-1}(\{Y\}) \neq \phi$ ou $Im\ f = \mathbf{B}$

Exemplo 2.2.7. *Seja*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = f(x) = [1, 2] \cdot x \end{array}$$

Note que para $x \geq 0$ *teremos que* $f(x) = [x, 2x]$ *e cuja função restrição de níveis simples é* $f_\lambda(x) = x + \lambda x = y_\lambda$*. Daqui teremos que se* $x = \dfrac{y_\lambda}{1+\lambda}$ *então* $f_\lambda(x) = \dfrac{y_\lambda}{1+\lambda} + \lambda(\dfrac{y_\lambda}{1+\lambda}) = \dfrac{y_\lambda + \lambda y_\lambda}{1+\lambda} = y_\lambda$ *e fazendo o mesmo processo para* $x < 0$ *teremos que* f_λ *é sobrejetora, mostrando assim que a função intervalar simples* f *é sobrejetora.*

Exemplo 2.2.8. *Consideremos a função intervalar simples*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = f(x) = [1, 5] \cdot x^2 \end{array}$$

Utilizando o produto de um escalar por um intervalo teremos que $f(x) = [x^2, 5x^2]$ *e cuja função restrição convexa de níveis simples é* $f_\lambda(x) = x^2 + 4\lambda x^2 = y_\lambda$*.Desta última expressão teremos que* $x = \sqrt{\dfrac{y_\lambda}{1+\lambda}}$*, o que mostra que para algum* λ *teremos um* $y_\lambda < 0$ *tal que não exista um* x *que verifique* $f_\lambda(x) = y_\lambda$*, mostrando assim que* f *não é sobrejetora.*

Teorema 2.2.5. *Seja*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = f(x) = A \cdot g(x) \end{array}$$

uma função intervalar simples; se $w(A) \neq 0,\ 0 \in A$ *e* $Im\ g = [a, +\infty), a \leq 0$ *então* f *é sobrejetora.*

Demonstração. Seja $A = [\underline{A}, \overline{A}]$, por hipótese $\underline{A} < \overline{A}$, agora a $Im\ g$ dependerá dos valores que assume a, para isso faremos uma análise para os dois casos possíveis, isto é:

i) Se $a = 0$, neste caso teríamos que $Im\ g = [0, +\infty)$ e

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cdot g(x) \\ &= [\underline{A}, \overline{A}] \cdot g(x) \\ &= [\underline{A} \cdot g(x), \overline{A} \cdot g(x)]. \end{aligned}$$

Daqui $f_\lambda(x) = \underline{A}\dot{g}(x) + \lambda g(x)(\overline{A} - \underline{A}); \lambda \in [0,1]$ daqui $Im\ f_\lambda(x) = \mathbb{R}$ e daqui $Im\ f = \mathbb{R}$.

ii) Se $a < 0$, sem perda de generalidade podemos considerar um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tal que $Im\ (g|_B) = [a, 0]$ e assim teríamos que: $f(x) = A \cdot g|_B(x)$ e utilizando a SLCIA teremos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cdot g|_B(x) \\ &= [\underline{A}, \overline{A}] \cdot g|_B(x) \\ &= [\overline{A} \cdot g|_B(x), \underline{A} \cdot g|_B(x)] \end{aligned}$$

e assim obtemos que $Im\ f \subsetneq \mathbb{R}$ para todo $x \in B$

Note que só o item **i)** já garante que a função f é sobrejetora, enquanto o item **ii)** acrescentara a familia de funções que sejam sobrejetivas. □

Definição 2.2.6. *Dizemos que a função intervalar simples $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{B} \subset \mathbb{I}$ é injetora, quando:*

$$(\forall x, y \in A), (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

ou seja, elementos distintos em A possuem imagens distintas em $\boldsymbol{B}$.

Exemplo 2.2.9. *Seja:*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{I} \\ x &\longmapsto Y = f(x) = [1,2] \cdot x. \end{aligned}$$

o mesmo que pode-se reescrever como:

$$f(x) = \begin{cases} [2x, x] & ; \quad x < 0, \\ 0 & ; \quad x = 0, \\ [x, 2x] & ; \quad x > 0. \end{cases}$$

Se analisamos se esta função é injetora ou não teremos que:

- *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^-$, *tais que* $f(x) = f(y)$, *como* $f(x) = [2x, x]$ *e* $f(y) = [2y, y]$ *teremos que* $[2x, x] = [2y, y]$. *Utilizando a SLCIA é fácil ver que isto é verdade se, e somente se* $2x = 2y$ *com* $\lambda = 0$ *e* $x = y$ *com* $\lambda = 1$ *implicando que* $x = y$;

- *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^+$, *tais que* $f(x) = f(y)$. *Temos que* $[x, 2x] = [y, 2y]$ *e igualmente* $x = y$;

- *Se* $x < 0 < y$; *então temos que suas funções restrição são* $f_\lambda(x) = 2x - \lambda x = (2 - \lambda)x$ *e* $f_\lambda(y) = y + \lambda y = (1 + \lambda)x$.*Mas elas são diferentes, implicando que* $f(x) \neq f(y)$;

- *Para* $x = 0 < y$ *e* $x < 0 = y$ *a prova é análoga.*

Definição 2.2.7. *Dizemos que uma função intervalar simples é bijetora se f é injetora e sobrejetora.*

Teorema 2.2.8. *A função intervalar simples* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ *é injetora, se, e somente se, sua função geradora* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o é, e* $0 \notin A$.

Demonstração. Seja $f(x) = f(y)$, o mesmo poder ser reescrito pela sua função restrição $f_\lambda(x) = f_\lambda(y)$; $\forall \lambda \in [0, 1]$. Logo $(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}))g(x) = (\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}))g(y)$, o que implica que $g(x) = g(y)$ desde que $0 \notin A$ e como a g é injetora, $x = y$ $\square$

2.2.4 Função Intervalar Extremal

Uma pergunta imediata depois de ter falado sobre as funções intervalares simples é: será que toda função intervalar pode se escrever como produto de um intervalo com uma função real? Pois a resposta é evidente, não, isto considerando funções f com variável independente real e variável dependente intervalar; claro, isto sem considerar séries intervalares para aproximar este tipo de funções; é assim que, por exemplo, podemos estabelecer funções intervalares, cujos extremos possam ter como argumentos funções reais, de modo que estas funções não guardem relação alguma, tal e como serão apresentados nas seguintes definições e nos próximos exemplos.

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ é uma *função intervalar extremal* se sua regra de correspondência é do tipo $f(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$ com $\underline{f}, \overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções reais tais que $\underline{f} \leq \overline{f}$ para todo $x \in Dom\ f$. Neste caso $Dom\ f \subset \mathbb{R}$ e $Im\ f \subset \mathbb{I}$.

Exemplo 2.2.10. *Consideremos a função*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = f(x) = [sen\ x, \sqrt{x}] \end{array}$$

cuja interpretação geométrica é

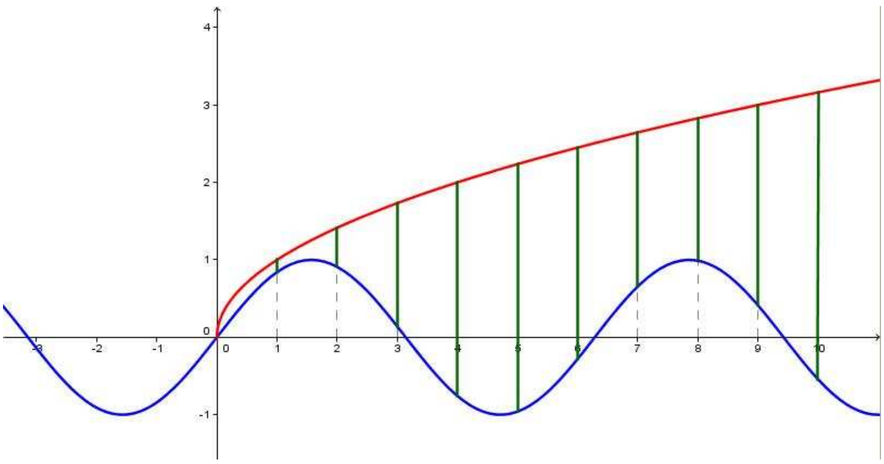

Figura 2.9: Função Intervalar Extremal $f(x) = [sen\ x, \sqrt{x}]$.

de onde podemos dizer que $Dom\ f = \mathbb{R}_0^+$.

Neste último exemplo apresentado, podemos ver que a nossa função intervalar ficou determinada por duas funções reais nos extremos as mesmas que não guardam relação alguma, ou seja, essa função não pode se escrever como produto de um intervalo por uma função real.

A seguir mostraremos as operações que podem ser feitas com funções intervalares extremais.

2.2.5 Operações com Funções Intervalares Extremais

Dadas f e g duas funções intervalares extremais, tais que:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = f(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & x & \longmapsto & Y = g(x) = [\underline{g}(x), \overline{g}(x)] \end{array}$$

então, as operações básicas entre estas funções f e g ficarão definidas pelas operações entre suas correspondentes funções restrição, isto é:

$$\begin{aligned} (f \circledast g)(x) &= (f(x)) \circledast (g(x)) \\ &= (\underline{f}(x) + \lambda(\overline{f}(x) - \underline{f}(x))) * (\underline{g}(x) + \lambda(\overline{g}(x) - \underline{g}(x))); \ \lambda \in [0,1], \end{aligned}$$

onde $* \in \{+, -, \times, \div\}$ é um operador real.

Isto quer dizer que, se nós queremos operar duas funções intervalares extremais teremos que utilizar a mesma ideia da SLCIA, isto é, expressar as funções originais com suas correspondentes funções restrição, e depois minimizar e maximizar para obter as novas funções extremais.

Exemplo 2.2.11. *Sejam as funções intervalares extremais* $f(x) = [sen^2x, 3]$ *e* $g(x) = [\cos^2 x, 1]$*, a soma de* f *e* g *fica determinada por:*

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(x) &= (f(x)) \oplus (g(x)), \\ &= (sen^2x + \lambda(3 - sen^2x)) + (\cos^2 x + \lambda(1 - \cos^2 x)) \ ; \ \lambda \in [0,1], \\ &= (sen^2x + \cos^2 x) + \lambda(3 + 1 - (sen^2x + \cos^2 x)) \ ; \ \lambda \in [0,1], \\ &= 1 + 3\lambda, \ \lambda \in [0,1], \\ &= [1, 4]. \end{aligned}$$

e cuja representação geométrica é:

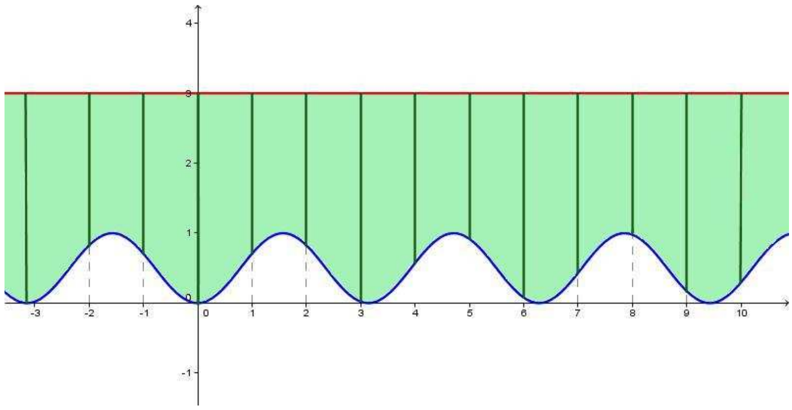

Figura 2.10: Função Intervalar Extremal $f(x) = [sen^2 x, 3]$.

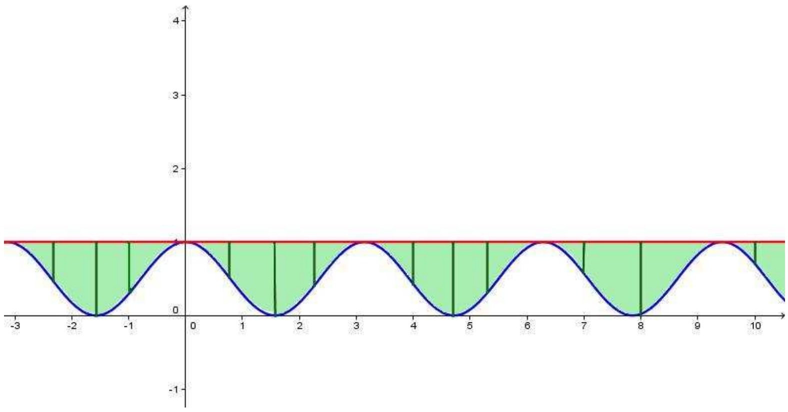

Figura 2.11: Função Intervalar Extremal $g(x) = [\cos^2 x, 1]$.

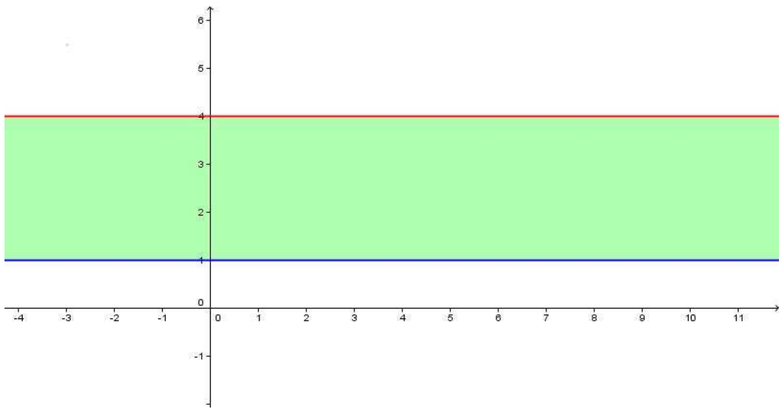

Figura 2.12: Soma das Funções Intervalares Extremais f e g.

Vale a pena lembrar que para este tipo de funções no caso da divisão o divisor não pode ter como elemento o zero.

2.2.6 Classificação das Funções Intervalares Extremais

Definição 2.2.9. *Dizemos que uma função intervalar extremal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ é sobrejetora se $Im\ f_\lambda = \mathbb{R}$, para algum $\lambda \in [0, 1]$.*

Exemplo 2.2.12. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ definida pela seguinte regra de correspondência $f(x) = [x - 2, x]$, neste caso é simples ver que associada a esta temos a sua função restrição $f_\lambda(x) = x + 2\lambda$ de onde temos que para todo λ se verifica que $Im\ f_\lambda = \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.2.13. *Para este exemplo consideremos a função intervalar extremal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ tal que $f(x) = [x - 2, x^2]$ e como queremos analisar a sua sobrejetividade, começamos estabelecendo a sua correspondente função restrição que é $f_\lambda(x) = x - 2 + \lambda(x^2 - x + 2)$ e desta expressão obtemos que para todo $\lambda > 0$ a imagem da função f_λ é, $Im\ f_\lambda = [\frac{8\lambda(\lambda - 1) - (1 - \lambda)^2}{4\lambda}, +\infty)$ e que para $\lambda = 0$ teremos que $Im\ f_0 = \mathbb{R}$, pois $f_0(x) = x - 2$; mostrando assim que a f é sobrejetora.*

Exemplo 2.2.14. *Agora consideremos a função intervalar extremal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ tal que:*

$$f(x) = \begin{cases} [x^3, x^2] & ; \quad x \leq 1 \\ [x^2, x^3] & ; \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Daqui que a sua correspondente função restrição é:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} x^3 + \lambda(x^2 - x^3) & ; \quad x \leq 1, \\ x^2 + \lambda(x^3 - x^2) & ; \quad x \geq 1. \end{cases}$$

É simples ver que para $\lambda = 0$ a função restrição é:

$$f_0(x) = \begin{cases} x^3 & ; \quad x \leq 1, \\ x^2 & ; \quad x \geq 1. \end{cases}$$

de onde $Im\ f_\lambda = \mathbb{R}$ mostrando assim que a função é sobrejetora.

Apresentemos agora um exemplo onde a função intervalar extremal não é sobrejetora.

Exemplo 2.2.15. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ *função intervalar extremal tal que:*

$$f(x) = \begin{cases} [\cos x, sen\ x] & ; \quad x \in [\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi], \\ \\ [sen\ x, \cos x] & ; \quad x \in [\frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \frac{9\pi}{4} + 2n\pi]. \end{cases}$$

Note que a função restrição para este exemplo é:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \cos x + \lambda(sen\ x - \cos x) & ; \quad x \in [\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi], \\ \\ sen\ x + \lambda(\cos x - sen\ x) & ; \quad x \in [\frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \frac{9\pi}{4} + 2n\pi]. \end{cases}$$

e que não existe λ *que verifique* $Im\ f_\lambda = \mathbb{R}$*, disto* f *não é sobrejetora.*

Definição 2.2.10. *Dada uma função intervalar extremal* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$*, dizemos que ela é injetora se* $\forall \lambda \in [0, 1]$ *e para todo par de pontos distintos* $x, y \in \mathbb{R}$ *temos que* $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$*.*

Exemplo 2.2.16. *Seja a função intervalar extremal* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ *dada por:* $f(x) = [x^3, e^x]$*. É simples ver que se* $x \neq y$ *teremos que* $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(y)$ *isto porque as funções envolvidas na função restrição são injetoras.*

Definição 2.2.11. *Dizemos que uma função intervalar extremal é bijetora se ela é injetora e sobrejetora.*

2.2.7 Função Intervalar Total

Dado o espaço intervalar $\mathbb{I}$ chamaremos de *função intervalar total* à função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{I} & \longrightarrow & \mathbb{I} \\ & A & \longmapsto & f(A) \end{array}$$

de onde tanto o conjunto de partida da função assim como o conjunto de chegada da mesma é o espaço intervalar proprio $\mathbb{I}$, é simples ver que se consideramos ao conjunto A como o conjunto de todos os intervalos degenerados, teremos que $A = \mathbb{R} \subset \mathbb{I}$ e daqui obteríamos os dois casos antes estudados. Nesta seção apresentaremos uma abordagem para encarar as funções intervalares totais como também encarar as operações destas como também na classificação e outras propriedades destas.

Para começar apresentaremos alguns exemplos de funções intervalares totais.

Exemplo 2.2.17. *As seguintes são funções intervalares totais:*

- $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}\ ;\ f(X) = [2,3] \cdot X$,
- $g : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}\ ;\ g(X) = sen\ X$,
- $h : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}\ ;\ h(X) = X^{[1,3]}$.

É claro que tanto o domínio e a imagem de uma função intervalar total são subconjuntos de $\mathbb{I}$; o interessante é como obter estes conjuntos; para isto, nos utilizaremos a SLCIA, isto é, utilizaremos a sua função restrição associada f_λ e depois analisaremos, conforme seja o caso.

Exemplo 2.2.18.

- *Se a função f fosse a do exemplo anterior teríamos que $Dom\ f = \mathbb{I}$ e a $Im\ f = \mathbb{I}$ pois $f_\lambda(X) = (2+\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}))$.*
- *Seja a função $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}\ ;\ f(X) = \dfrac{[-2,3]}{X}$; note que neste caso a sua função restrição é $f_\lambda(X) = \dfrac{-2+5_\lambda}{\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})}$. Temos que $\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}) \neq 0$ o que implica que $\lambda \neq -\dfrac{\underline{x}}{\overline{x} - \underline{x}}$, isto é, que para todo $\lambda \in [0,1]$ obrigatoriamente não deve existir $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ tal que $-\dfrac{\underline{x}}{\overline{x} - \underline{x}} = \lambda$ isto é $0 \notin X$, assim $Dom\ f = \mathbb{I} - J$ onde J é a classe de todos os intervalos que contém o zero.*

E daqui podemos dizer também que calcular a imagem de uma função intervalar total tem uma abordagem semelhante, isto é:

Exemplo 2.2.19. *Considerando a função intervalar total $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ tal que $f(X) = e^X$ teremos que sua correspondente função restrição é: $f_\lambda(X) = e^{\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})}$, $\lambda \in [0,1]$ de onde $Im\ f_\lambda = \mathbb{R}^+$ e daqui é que sempre será possível obter um $Y \in \mathbb{I}^+$ tal que $f(X) = Y$, ou seja, $Im\ f = \mathbb{I}^+$. Cabe esclarecer que $\mathbb{I}^+$ representa a todos os intervalos maiores do que zero, no sentido das ordens antes definidas.*

Observação 2.2.1. *Para ter uma ideia de como calcular a imagem de um determinado X dado no exemplo anterior, apresentaremos os seguintes casos:*

- *Quando $X = [2,2]$ então teríamos que $f([2,2]) = e^{[2,2]}$ e daqui sabemos que sua correspondente função restrição é $f_\lambda([2,2]) = e^{2+\lambda(2-2)} = e^2$ onde o mínimo e o máximo valor da $f\lambda$, para $\lambda \in [0,1]$, é e^2, assim $f\lambda([2,2]) = [e^2, e^2]$;*

- *e quando $X = [1,3]$ teremos que $f([1,3]) = e^{[1,3]}$ e daqui função restrição é $f\lambda([1,3]) = e^{1+2\lambda}$ que é uma função real injetora e de onde o mínimo $f\lambda$, para $\lambda \in [0,1]$, é quando $\lambda = 0$ e cujo valor é ($e = 2,718281828$), e o máximo valor da $f\lambda$, para $\lambda \in [0,1]$ é quando $\lambda = 1$ e cujo valor é e^3, e daqui que $f\lambda([1,3]) = [e, e^3]$.*

2.2.8 Operações com Funções Intervalares Totais

Dadas duas funções intervalares totais $f, g : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ temos que as operações aritméticas entre elas fica definida por:

$$(f \circledast g)(X) = f(X) \circledast g(X)$$

e que, por sua vez, pode ser expressa pela sua correspondente função restrição,

$$(f \circledast g)_\lambda(X) = f_\lambda(X) * g_\lambda(X)$$

onde $* \in \{+, -, \times, \div\}$.

Apresentaremos agora um exemplo de como operar funções intervalares totais.

Exemplo 2.2.20. *Dadas as seguintes funções intervalares totais $f, g : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ tais que $f(X) = [2,3]X$ e $g(X) = [1,5]X$ temos que:*

- *Para a soma teremos que:*

  $$\begin{aligned} (f \oplus g)(X) &= f(X) \oplus g(X) \\ &= [2,3]X \oplus [1,5]X, \end{aligned}$$

  e esta última ao ser representada pela sua correspondente função restrição, é:

$$
\begin{aligned}
(f \oplus g)_\lambda(X) &= f_\lambda(X) + g_\lambda(X) \\
&= (2+\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})) + (1+4\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})) \\
&= (2+\lambda+1+4\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})) \\
&= (3+5\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})),
\end{aligned}
$$

e daqui teremos que:

$$(f \oplus g)(X) = [3, 8]X.$$

- *para a subtração:*

$$
\begin{aligned}
(f \ominus g)(X) &= f(X) \ominus g(X) \\
&= [2, 3]X \ominus [1, 5]X,
\end{aligned}
$$

e sua correspondente função restrição, é:

$$
\begin{aligned}
(f \ominus g)_\lambda(X) &= f_\lambda(X) - g_\lambda(X) \\
&= (2+\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})) - (1+4\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})) \\
&= (2+\lambda-1-4\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})) \\
&= (1-3\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})),
\end{aligned}
$$

e daqui teremos que:

$$(f \ominus g)(X) = [-2, 1]X.$$

- *Para a multiplicação:*

$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(X) &= f(X) \ominus g(X) \\
&= [2, 3]X \ominus [1, 5]X,
\end{aligned}
$$

e sua correspondente função restrição, é:

$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)_\lambda(X) &= f_\lambda(X) \times g_\lambda(X) \\
&= (2+\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}))(1+4\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x})) \\
&= (2+\lambda)(1+4\lambda)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}))^2 \\
&= (2+9\lambda+4\lambda^2)(\underline{x} + \lambda(\overline{x} - \underline{x}))^2,
\end{aligned}
$$

e daqui teremos que:

$$(f \otimes g)(X) = [2, 15]X^2.$$

- *Para a divisão:*

$$
\begin{aligned}
(f \oslash g)(X) &= f(X) \oslash g(X) \\
&= [2, 3]X \oslash [1, 5]X.
\end{aligned}
$$

e sua correspondente função restrição, é:

$$\begin{aligned}(f \oslash g)_\lambda(X) &= \frac{f_\lambda(X)}{g_\lambda(X)}\\ &= \frac{(2+\lambda)(\underline{x}+\lambda(\overline{x}-\underline{x}))}{(1+4\lambda)(\underline{x}+\lambda(\overline{x}-\underline{x}))}\\ &= \frac{2+\lambda}{1+4\lambda},\ 0 \notin X,\end{aligned}$$

e daqui teremos que:

$$(f \oslash g)(X) = \left[2, \frac{3}{5}\right].$$

Podemos fazer uma análise parecida para os outros casos de funções (trigonométricas, exponenciais, valor absoluto...), isto é, representar as funções pelas suas correspondentes funções restrição e depois analisar estas dependendo do caso apresentado.

Conclusões do Capítulo

Neste segundo capítulo foram apresentadas as relações e funções intervalares, construímos detalhadamente estas, e as classificamos pela sua natureza em Simples, Extremais ou Totais, exemplificamos cada uma destas e mostramos suas propriedades. Consideramos que o estudo feito neste capítulo será de vital importância para estudos futuros no cálculo intervalar, pois foi estudada a forma mais geral de funções intervalares, isto é, quando tanto o domínio e a imagem são subconjuntos do espaço intervalar proprio $\mathbb{I}$. Foram apresentadas também abordagens para operar os três tipos de funções intervalares, isto, utilizando a aritmética intervalar restrita de níveis simples.

Capítulo 3

SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS INTERVALARES

Neste capítulo estudaremos os limites de sequência de números intervalares, isso com diferentes abordagens, assim o limite de uma sequência intervalar definida a seguir, desde um ponto de vista intuitivo, sera como um número intervalar do qual os números intervalares X_n torna-se e permanecem arbitrariamente próximos, desde que n seja suficientemente grande. Neste sentido consideraremos funções que são definidas sobre $\mathbb{N}$ onde pode-se definir uma quantidade enumerável de valores.

Definição 3.0.12. *Seja $\mathbb{I}$ o espaço intervalar próprio. Uma sequência em $\mathbb{I}$ é simplesmente uma função φ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{I}$. Se $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{I}$ é uma sequência, podemos escrever também:*

$$(X_n); \quad (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ou \quad (X_0, X_1, X_2, ...)$$

para φ, onde $X_n := \varphi(n)$ é o n-ésimo termo da sequência $\varphi = (X_0, X_1, X_2, ...)$.

3.1 Limite de Sequências Intervalares: Caso Clássico

Esta seção chamada de Limite de sequências intervalares: caso clássico estudará a convergência no sentido da convergência de Minkowsky. Apresentaremos alguns resultados clássicos desta teoria, adaptados no contexto intervalar, pois tem significância comparativa para nosso estudo. Apresentaremos também alguns exemplos adicionais, que consideramos importantes no contexto do cálculo intervalar.

Seja A_n uma sequência de intervalos, então define-se:

- O *limite superior* como o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a uma infinidade de conjuntos A_n.
- O *limite inferior* como o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a cada um dos A_n, exceto os que pertencem a um número finito deles.

Proposição 3.1.1.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} A_i$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=n}^{\infty} A_i$

Demonstração. Ver [2], [9] □

Exemplo 3.1.1. *Seja a sequência $\{A_n\}$ em $\mathbb{I}$, definida por:*

$$A_n = \begin{cases} [0,n] & \text{se} \quad n \ \text{ é par} \\ [-n,0] & \text{se} \quad n \ \text{ é impar.} \end{cases}$$

então: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n = \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n = 0$.

Exemplo 3.1.2. *Em $\mathbb{I}$ definamos a sequência cujos primeiros elementos são:* $A_1 = [0,1]$, $A_2 = [0,\frac{1}{2}]$, $A_3 = [\frac{1}{2},1]$, $A_4 = [0,\frac{1}{4}]$, $A_5 = [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, $A_6 = [\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$, $A_7 = [\frac{3}{4},1]$, $A_8 = [0,\frac{1}{8}]$, *...,* *então* $\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n = [0,1]$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n = \phi$.

Proposição 3.1.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n \subset \lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$.

Demonstração. Ver [2], [9] □

Se $\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$, com $A_n \in \mathbb{I}$, então utilizaremos a notação $\lim\limits_{n} A_n$ para este conjunto, e dizemos que o limite de $\{A_n\}$ existe e que esse conjunto é o limite de $\{A_n\}$. Algumas vezes será denotado por $A_n \to A$ quando $\lim\limits_{n} A_n = A$.

Exemplo 3.1.3. *Definamos em* $\mathbb{I}$ *a sequência de números intervalares dada por:* $\{A_n\} = \{[0,0],\ [1,1],\ [2,2],...\}$, *note que não existe o limite, pois nenhum dos limites nem o inferior nem o superior existem.*

Exemplo 3.1.4. *Consideremos em* $\mathbb{I}$ *a sequência cujos elementos são da forma:* $A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $\forall n > 0$, *note que neste caso também não existe o limite.*

Definição 3.1.3. *Dada a sequência* $A_n \in \mathbb{I}$*:*

- *Dizemos que* A_n *é crescente, se:*

$$A_n \subset A_{n+1},\ \forall n = 1, 2, 3, ...$$

- *Dizemos que* A_n *é decrescente, se:*

$$A_n \supset A_{n+1},\ \forall n = 1, 2, 3, ...$$

Os dois tipos de sequências são chamadas de monótonas.

Proposição 3.1.4. *Para qualquer sequência monótona* $\{A_n\}$ *em* $\mathbb{I}$ *o* $\underset{n}{lim} A_n$ *existe, e é igual a:*

$$\underset{n}{\cup} A_n \quad ou \quad \underset{n}{\cap} A_n,$$

dependendo se $\{A_n\}$ *é crescente ou decrescente, respectivamente.*

Nas abordagens mostradas até agora devemos tomar cuidado pois dada uma sequência de números intervalares $\{A_n\}$ ela poderia convergir para um intervalo A mas nem sempre esse A é um número intervalar, como veremos no seguinte exemplo.

Exemplo 3.1.5. *Seja em* $\mathbb{I}$ *a sequência* $\{A_n\}$ *tal que seus elementos estão dados por* $A_n = e^{-[0,n]}$*; note que* $\lim_n A_n = (0, 1] \notin \mathbb{I}$, *como será mostrado no 3.3.1.*

3.2 Limite de Sequências Intervalares no Espaço Métrico $\mathcal{H}(\mathbb{I}, H)$

O material apresentado até o momento valida alguns resultados da teoria de convergência no sentido Minkowsky como pode ser encontrado em [2], [9], e mesmo assim, provamos que alguns resultados nem sempre são validos no contexto intervalar. Além dessa teoria é possível extender a ideia de limite de sequências de números reais para os limites de sequências de números intervalares, isto com o objetivo de ganhar propriedades que sejam suporte para o desenvolvimento de temas como limites, derivadas e outros; para isto aproveitaremos o fato de que $\mathbb{I}$ munido da métrica H é um espaço métrico, e também utilizaremos as propriedades encontradas na *seção 1.5.*

Definição 3.2.1. *Dada uma sequência de números intervalares* $(A_n), i = 1, 2, ...;\ A_i \in \mathbb{I}, \forall i$ *(não necessariamente monótona) dizemos que ela é convergente para o número intervalar* A*, e escreve-se* $A = \lim A_n$ *quando para cada número real* $\epsilon > 0$ *dado arbitrariamente, for possível obter um número* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $H(A_n, A) < \epsilon$*, sempre que* $n > n_0$*.*

Em linguagem simbólica:

$$\lim A_n = A \quad se \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \Rightarrow H(A_n, A) < \epsilon.$$

Definição 3.2.2. *Dizemos que uma sequência de números intervalares* (A_n) *é limitada se existe um número real não negativo* k *tal que o valor extremo absoluto de* A *seja menor ou igual do que* k*, que em notação simbólica é:*

$$|A_n\| \leq k;\ \ k \in \mathbb{R}^+,\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A definição de sequência limitada quer dizer que todos os termos da sequência A_n sempre estão contidos na bola de centro zero e raio k, isto é, $A_n \subset B(0, k),\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Proposição 3.2.3. *Dada uma sequência de números intervalares* (A_n)*, temos que as seguintes proposições são equivalentes:*

1. *A sequência* (A_n) *é limitada;*

2. *A sequência determinada pelos valores dos comprimentos de* A_n *é uma sequência real limitada, isto é, se* $w_n(A_n) = \overline{A_n} - \underline{A_n}$ *é limitada para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

3. *Para todo* $\lambda \in [0, 1]$*, temos que a sequência* $(A_n(\lambda))$ *é limitada.*

Teorema 3.2.4 (Unicidade). *Se* $\lim A_n = A$ *e* $\lim A_n = B$ *então* $A = B$

Demonstração. Suponhamos que $A \neq B$, então:

$\lim A_n = A \cdot\ se\ \cdot \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n > n_0 \Rightarrow H(A_n, A) < \epsilon/2$

$\lim A_n = B \cdot\ se\ \cdot \forall \epsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}; \forall n > m_0 \Rightarrow H(A_n, B) < \epsilon/2$

tomando $p_0 = \max\{n_0, m_0\}$ temos que: $\forall n > p_0$:

$$H(A, B) \leq H(A, X_n) + H(X_n, B) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Daqui $A = B$, o que é absurdo □

Teorema 3.2.5. *Se A_n não é limitada e A fixo então $A_n - A$ não é limitada.*

Demonstração. Trivial. □

Teorema 3.2.6. *Se* $\lim A_n = A$ *então toda subsequência de (A_n) converge para o limite A.*

Demonstração. Trivial. □

Definição 3.2.7. *Um elemento A_{n_i} é destacado do tipo I se: $A_{n_i} \geq A_{n_j},\ \forall j \geq i$*

Definição 3.2.8. *Um elemento A_{n_i} é destacado do tipo II se: $A_{n_i} \leq A_{n_j},\ \forall j \geq i$*

Teorema 3.2.9. *Toda sequência limitada de números intervalares possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Para demonstrar este teorema utilizaremos a ideia de elemento destacado, então, agora analisamos os extremos da sequência limitada, isto é, primeiro pegamos um dos extremos e obtemos elementos destacados que sejam do tipo I ou tipo II, depois de obter uma sequência neste extremo, analisamos os outros extremos desta sequência e selecionamos uma sequência, que seja do tipo I ou II, e assim conseguimos uma sequência monótona de números intervalares e como ela é limitada ela é convergente. □

3.3 Limite em Níveis Simples de Sequências Intervalares

Apresentamos a seguir um olhar diferente de convergência para sequências de números intervalares; isto é, se temos que analisar a convergência de uma sequência de números intervalares podemos fazer o seguinte:

Definição 3.3.1 (Convergência). *Dada uma sequência de números intervalares* $(A_n), i = 1, 2, ...;$ $A_i \in \mathbb{I}, \forall i$ *(não necessariamente monótona) dizemos que ela converge em níveis simples se sua correspondente função restrição associada* $A_n(\lambda),\ \lambda \in [0, 1]$ *converge, isto é:*

Dados $A_n, A \in \mathbb{I}$ *e* $A_n(\lambda), A(\lambda) \in \mathbb{R}, \forall\lambda \in [0, 1]$ *suas correspondentes funções restrição, temos que* $A_n \longrightarrow A$ *se* $A_n(\lambda) \longrightarrow A(\lambda),\ ,\forall\lambda \in [0, 1]$

O limite desta sequência intervalar (A_n) *é* $A \in \mathbb{I}$ *que é denotado e determinado por* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \left[\min\limits_{\lambda\in[0,1]} A(\lambda), \max\limits_{\lambda\in[0,1]} A(\lambda)\right]$

Apresentaremos abaixo alguns exemplos de convergência em níveis simples.

Exemplo 3.3.1. *Lembremos em* $\mathbb{I}$ *da sequência* (A_n) *tal que seus elementos são dados por* $A_n = e^{-[0,n]}$*; note que associado ao expoente desta sequência temos a sua função restrição de níveis simples, isto é, se* $B = [0, n]$ *então* $B(\lambda) = 0 + \lambda(n - 0) = \lambda n,\ \lambda \in [0, 1],\ n \in \mathbb{N}$*; então, cada termo da sequência terá associado uma função restrição* $f(\lambda) = e^{-B(\lambda)} = e^{-\lambda n},\ \lambda \in [0, 1]$ *o que quer dizer que* $A_n = e^{-[0,n]} = \left[\underset{\lambda}{min}\ f(\lambda), \underset{\lambda}{max}\ f(\lambda)\right] = \left[\underset{\lambda}{min}\ e^{-\lambda n}, \underset{\lambda}{max}\ e^{-\lambda n}\right] = \left[e^{-\lambda n}, 1\right]$ *e daqui teremos que* $\lim\limits_{n} A_n = (0, 1] \notin \mathbb{I}$.

Exemplo 3.3.2. *Seja* $B_n = \left[-1 - \frac{1}{n}, 0\right]$ *e consideremos a sequência* $A_n = e^{B_n} = e^{\left[-1-\frac{1}{n},0\right]}$*, note que associado a cada termo da sequência temos uma função restrição* $B_n(\lambda) = -1 - \frac{1}{n} + \lambda(0 - (-1 - \frac{1}{n})) = -1 - \frac{1}{n} + \lambda(1 + \frac{1}{n})$ *assim desta última expressão teremos que* $\lim\limits_{n} A_n = [\frac{1}{e}, 1] = \bigcap\limits_{n} A_n$.

Proposição 3.3.2. *Se* A_n *é uma sequência monótona de intervalos então temos que para cada* $\lambda \in [0, 1]$ *fixo em* $A_i(\lambda),\ \forall i = 1, 2, 3, ...;$ $A_n(\lambda)_n$ *é uma sequência monótona de números reais.*

Demonstração. Note que dado $A_n(\lambda)$ temos que para $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$; $A_n(0) = \underline{a_n}$ e $A_n(1) = \overline{a_n}$ são sequências de números reais convergentes respectivamente, pois se A_n é uma sequência monótona temos dois casos. Analisando o primeiro deles temos $A_n \supset A_{n+1}$ o que quer dizer tanto $\underline{a_n} \leq \underline{a_{n+1}}$ e $\overline{a_{n+1}} \leq \overline{a_n}$ são sequências monótonas de números reais e elas são limitadas, porém elas são convergentes, agora para $\lambda \in (0,1)$ fixo temos que, da monotonicidade, $\overline{a_n} - \underline{a_n} \geq \overline{a_{n+1}} - \underline{a_{n+1}}$ e daqui $\lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n}) \geq \lambda(\overline{a_{n+1}} - \underline{a_{n+1}}) \geq 0$ que é uma sequência monótona decrescente limitada que converge para $\lambda(\overline{a} - \underline{a})$, tudo isso pelo fato de que $\underline{a_n} \to \underline{a}$ e $\overline{a_n} \to \overline{a}$ pois $A_n \to A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e daqui temos $\underline{a_n}\lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n}) \to \underline{a}\lambda(\overline{a} - \underline{a})$. O processo é análogo se, $A_n \subset A_{n+1}$ e A_n é limitado. □

Teorema 3.3.3. *Dada uma sequência intervalar A_n temos que as seguintes proposições são equivalentes:*

- *(A_n) é convergente;*
- *(A_n) é convergente em níveis simples.*

Demonstração. Sabemos que:

$$A_n \to A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow H(A_n, A) < \varepsilon.$$

daqui e das proposições *1.5.6* e *1.5.8* segue que, $H(A_n, A) = H(A_n - A, 0) = |A_n - A|| = \max\{|\underline{A_n - A}|, |\overline{A_n - A}|\} < \varepsilon \Leftrightarrow |\underline{A_n - A}| < \varepsilon \ e \ |\overline{A_n - A}| < \varepsilon \Leftrightarrow |A_n(0) - A(0)| < \varepsilon \ e \ |A_n(1) - A(1)| < \varepsilon$ o que significa que $\forall \lambda \in [0,1]$ temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0$ de modo que $|A_n(\lambda) - A(\lambda)| < \varepsilon$. Assim,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \lambda \in [0,1] \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow |A_n(\lambda) - A(\lambda)| < \varepsilon.$$

Portanto $A_n(\lambda) \to A(\lambda)$

□

3.3.1 Operações Aritméticas da Convergência em Níveis Simples

Proposição 3.3.4. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_n, B_n, A, B \in \mathbb{I}$ tal que $A_n \to A$, $B_n \to B$, então utilizando a SLCIA teremos os seguintes resultados:*

a) $A_n + B_n \longrightarrow A + B;$

b) $A_n - B_n \longrightarrow A - B;$

c) $A_n \cdot B_n \longrightarrow A \cdot B;$

d) $\dfrac{A_n}{B_n} \longrightarrow \dfrac{A}{B},$ *para todo* B_n *e* B *que não contém o zero.*

Demonstração. Como cada elemento da sequência tem associado uma função restrição, teremos que: $A_n(\lambda) = \underline{a_n} + \lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n})$ e $B_n(\lambda) = \underline{b_n} + \lambda(\overline{b_n} - \underline{b_n})$ com $\lambda \in [0, 1]$, e assim:

a)

$$\begin{aligned} A_n(\lambda) + B_n(\lambda) &= \underline{a_n} + \lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n}) + \underline{b_n} + \lambda(\overline{b_n} - \underline{b_n}) \\ &= \underline{a_n} + \underline{b_n} + \lambda((\overline{a_n} + \overline{b_n}) - (\underline{a_n} + \underline{b_n})) \\ &\to \underline{a} + \underline{b} + \lambda((\overline{a} + \overline{b}) - (\underline{a} + \underline{b})) \\ &= (A + B)(\lambda) \end{aligned}$$

$\therefore\ A_n + B_n \to A + B$

b)

$$\begin{aligned} A_n(\lambda) - B_n(\lambda) &= (\underline{a_n} + \lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n})) - (\underline{b_n} + \lambda(\overline{b_n} - \underline{b_n})) \\ &= \underline{a_n} - \underline{b_n} + \lambda((\overline{a_n} - \overline{b_n}) - (\underline{a_n} - \underline{b_n})) \\ &\to \underline{a} - \underline{b} + \lambda((\overline{a} - \overline{b}) - (\underline{a} - \underline{b})) \\ &= (A - B)(\lambda) \end{aligned}$$

$\therefore\ A_n - B_n \to A.B$

c) $A_n(\lambda).B_n(\lambda) - A.B =$

$$\begin{aligned} &= (\underline{a_n} + \lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n})).(\underline{b_n} + \lambda(\overline{b_n} - \underline{b_n})) - (\underline{a} + \lambda(\overline{a} - \underline{a})).(\underline{b} + \lambda(\overline{b} - \underline{b})) \\ &= (\underline{a_n} + \lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n})).\left[(\underline{b_n} + \lambda(\overline{b_n} - \underline{b_n})) - (\underline{b} + \lambda(\overline{b} - \underline{b}))\right] \\ &\quad - \left[(\underline{a_n} + \lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n})) - (\underline{a} + \lambda(\overline{a} - \underline{a}))\right].(\underline{b} + \lambda(\overline{b} - \underline{b})) \\ &\to (\underline{a_n} + \lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n}))0 - 0(\underline{b} + \lambda(\overline{b} - \underline{b})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ A_n.B_n \to A.B$

d) Como $0 \notin B_n$ e $0 \notin B$

$$\begin{aligned}
\frac{A_n(\lambda)}{B_n(\lambda)} &= \frac{\underline{a_n} + \lambda(\overline{a_n} - \underline{a_n})}{\underline{b_n} + \lambda(\overline{b_n} - \underline{b_n})} \\
&\to \frac{\underline{a} + \lambda(\overline{a} - \underline{a})}{\underline{b} + \lambda(\overline{b} - \underline{b})} \\
&= \frac{A}{B}(\lambda)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{A_n}{B_n} \to \frac{A}{B}$$

□

Conclusões do Capítulo

Neste terceiro capítulo foram estudadas as sequências de números intervalares. Analisamos a convergência destas sequências no sentido de Minkowski e a comparamos com a convergência da métrica de Pompeu-Hausdorff e a convergência em níveis simples, mostramos as propriedades operacionais das sequências intervalares, mostrando assim a simplicidade que obtém-se ao utilizar a convergência em níveis simples. Neste capítulo apresentamos também, extensões de alguns resultados das sequências de números reais ao contexto intervalar.

Capítulo 4

LIMITE DE FUNÇÕES INTERVALARES

Até o momento estudamos sequências de números intervalares e a pergunta imediata é saber como agir no caso dos limites de funções intervalares. No capítulo 2 estudamos que as funções intervalares podem se classificar em simples, extremais e totais. Neste capítulo tentaremos fazer um estudo detalhado do limite destas funções seguindo a classificação antes mencionada.

4.1 Limite de Funções Intervalares Simples

Definição 4.1.1. *Sabemos que uma função intervalar* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ *é simples quando existe uma função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = A \cdot g(x),\ A \in \mathbb{I}$. *Dizemos que* $B \in \mathbb{I}$ *é o limite de* $f(x)$ *quando* $x \to a$ *(*x *tende para* a*) e é denotado por* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ *se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $0 < |x - a| < \delta$ *implica* $H(f(x), B) < \varepsilon$.

Teorema 4.1.2. *Dada uma função intervalar simples* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ *tal que* $f(x) = A \cdot g(x),\ A \in \mathbb{I}$, *temos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot L$$

sempre que o limite de f *exista e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Demonstração. Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ temos que $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implica $|g(x) - L| < \varepsilon/c$ onde $c = H(A, 0) \in \mathbb{R}$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, temos:

$$\begin{aligned}
H(f(x), A \cdot L) &= H(A \cdot g(x), A \cdot L) \\
&= H(A \cdot (g(x), L)) \\
&\leq H(A, 0)H(g(x), L) \\
&= c|g(x) - L| \\
&< c\frac{c}{\varepsilon} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$. □

Como veremos a seguir, as propriedades básicas dos limites de funções reais ficam estendidas para o caso das funções intervalares simples, isto é:

4.1.1 Propriedades das Funções Intervalares Simples

Teorema 4.1.3. *Dadas as funções intervalares simples $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ tal que associadas a estas existam as funções $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f_1(x) = A_1 g_1(x),\ f_2(x) = A_2 g_2(x)$, com $A_i \in \mathbb{I}$ se:*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1 \cdot \lim_{x\to a} g_1(x) = A_1 \cdot L_1$$

$$\lim_{x\to a} f_2(x) = A_2 \cdot \lim_{x\to a} g_2(x) = A_2 \cdot g_2,\ \ 0 \notin A_2,\ \ L_2 \neq 0$$

então utilizando a SLCIA temos as seguintes propriedades:

- $\lim\limits_{x\to a} (f_1 + f_2)(x) = A_1 \cdot \lim\limits_{x\to a} g_1(x) + A_2 \cdot \lim\limits_{x\to a} g_2(x) = A_1 \cdot L_1 + A_2 \cdot L_2$
- $\lim\limits_{x\to a} (f_1 - f_2)(x) = A_1 \cdot \lim\limits_{x\to a} g_1(x) - A_2 \cdot \lim\limits_{x\to a} g_2(x) = A_1 \cdot L_1 - A_2 \cdot L_2$
- $\lim\limits_{x\to a} (f_1 \cdot f_2)(x) = A_1 \cdot \lim\limits_{x\to a} g_1(x) \cdot A_2 \cdot \lim\limits_{x\to a} g_2(x) = A_1 \cdot L_1 \cdot A_2 \cdot L_2$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1}{f_2}(x) = \dfrac{A_1 \cdot \lim\limits_{x\to a} g_1(x)}{A_2 \cdot \lim\limits_{x\to a} g_2(x)} = \dfrac{A_1 \cdot L_1}{A_2 \cdot L_2}$

Demonstração. Decorre imediatamente da definição de limite. □

Uma abordagem diferente seria analisar o limite utilizando as funções restrição das funções envolvidas nos cálculos, para logo assim utilizar a SLCIA se for necessário, e é dessa forma que obteremos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f_\lambda(x) &= \lim_{x\to a}(\underline{A}+\lambda(\overline{A}-\underline{A}))\cdot g(x)\\ &= (\underline{A}+\lambda(\overline{A}-\underline{A}))\cdot \lim_{x\to a} g(x)\\ &= A\cdot \lim_{x\to a} g(x).\end{aligned}$$

Disto decorre imediatamente que as propriedades do teorema anterior podem ser abordadas utilizando a SLCIA.

Exemplo 4.1.1. *Seja* $f(x) = [-1,3]sen\ x$ *então:* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[-1,3]\cdot sen\ x = [-1,3]\lim_{x\to 0} sen\ x = [-1,3]\cdot 0 = 0$

Exemplo 4.1.2. *Seja* $f(x) = [-5,2]\cdot\left(\dfrac{\tan^2 x - sen^2x}{1-cos^2x}\right)$ *então:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}[-5,2]\cdot\left(\frac{\tan^2 x - sen^2x}{1-cos^2x}\right)\\ &= [-5,2]\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan^2 x - sen^2x}{1-cos^2x}\right)\\ &= [-5,2]\cdot 2 =\\ &= [-10,4].\end{aligned}$$

4.2 Limite de Funções Intervalares Extremais

Definição 4.2.1. *Para este caso, dada uma função intervalar extremal* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{I}$*, tal que sua regra de correspondência esteja determinada por* $f(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$ *em que* $\underline{f}, \overline{f}$ *são funções reais; se* $\lim_{x\to 0}\underline{f}(x) = \underline{L}$ *e* $\lim_{x\to 0}\overline{f}(x) = \overline{L}$ *com* $L = [\underline{L}, \overline{L}]$*, dizemos que* $L\in\mathbb{I}$ *é o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existir um* $\delta > 0$ *tal que* $0 < |x-a| < \delta$ *implica* $H(f(x), L) < \varepsilon$*.*

Desta última definição e das propriedades da H deduzimos que:

$$\begin{aligned} H(f(x), L) &= H([\underline{f}(x), \overline{f}(x)], [\underline{L}, \overline{L}]) \\ &= H([\underline{f}(x), \overline{f}(x)] - [\underline{L}, \overline{L}], 0) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} H([\underline{f}(x) - \underline{L}, \overline{f}(x) - \overline{L}], 0) \\ \qquad e \\ H([\overline{f}(x) - \overline{L}, \underline{f}(x) - \underline{L}], 0). \end{array} \right\rangle \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim $H(f(x), L) < \varepsilon$ significa que $\underline{f}(x) - \underline{L}$ e $\overline{f}(x) - \overline{L}$ estão muito próximos do zero, e daqui poderíamos deduzir que, $|\underline{f}(x) - \underline{L}| < \varepsilon$ e $|\overline{f}(x) - \overline{L}| < \varepsilon$. Assim:

$$\lim_{x \to a} f(x) = [\lim_{x \to a} \underline{f}(x), \lim_{x \to a} \overline{f}(x)] = [\underline{L}, \overline{L}] = L.$$

4.2.1 Propriedades das Funções Intervalares Extremais

Teorema 4.2.2. *Sejam as funções intervalares extremais $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ cujas regras de correspondência são $f(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$ e $g(x) = [\underline{g}(x), \overline{g}(x)]$ tais que $\underline{f}, \overline{f}, \underline{g}, \overline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam funções. Se $\lim_{x \to a} f(x) = [\lim_{x \to a} \underline{f}(x), \lim_{x \to a} \overline{f}(x)] = [\underline{M}, \overline{M}] = M$ e $\lim_{x \to a} g(x) = [\lim_{x \to a} \underline{g}(x), \lim_{x \to a} \overline{g}(x)] = [\underline{N}, \overline{N}] = N$, teremos as seguintes propriedades:*

- $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = M + N,$
- $\lim_{x \to a} (f - g)(x) = M - N,$
- $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = M \cdot N,$
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{M}{N}$ *sempre que* $0 \notin N.$

Partiremos para a análise destes tipos de limites utilizando a SLCIA, para isto consideraremos uma função intervalar extremal, tal que $f(x) = [\underline{f}(x), \overline{f}(x)]$ e que verifique $\lim_{x \to a} f(x) = [\underline{L}, \overline{L}] = L$. Nisto poderíamos considerar a função restrita da f,

$f_\lambda(x)$. Tendo desse modo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f_\lambda(x) &= \lim_{x\to a}\left(\underline{f} + \lambda(\overline{f} - \underline{f})\right)\\
&= \lim_{x\to a}\underline{f} + \lambda(\lim_{x\to a}\overline{f} - \lim_{x\to a}\underline{f})\\
&= \underline{L} + \lambda(\overline{L} - \underline{L})\\
&= [\underline{L}, \overline{L}]\\
&= L
\end{aligned}$$

com isto fica provado também que o teorema anterior pode ser demonstrado utilizando a SLCIA, e que, de fato, é mais simples utilizar esta ferramenta.

4.3 Limite de Funções Intervalares Totais

As funções intervalares totais são a forma mais geral das funções intervalares. É assim que o limite destas nos darão uma ideia ou conceito, também mais geral de limite de funções intervalares, isto é: dada $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, uma função intervalar total, dizemos que $L \in \mathbb{I}$ é o limite de f quando X tende para A, e fica denotado por $\lim_{X\to A} f(X) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $0 < H(X, A) < \delta$ implicará $H(F(X), L) < \varepsilon$.

Exemplo 4.3.1. *Se* $f(X) = [2, 3]X$*, calcular* $\lim_{X\to[1,2]} f(X)$*; com efeito, note que se* $0 < H(X, [1, 2]) < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ *teremos que:*

$$\begin{aligned}
H(F(X), [2, 6]) &= H([2, 3]X, [2, 3][1, 2])\\
&= H([2, 3](X, [1, 2]))\\
&= |[2, 3]||H(X, [1, 2])\\
&< 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daí decorre que,

$$\lim_{X\to[1,2]} f(X) = [2, 6].$$

Teorema 4.3.1 (Unicidade)**.** *Se* $\lim_{X \to A} f(X) = B$ *e* $\lim_{X \to A} f(X) = C$ *então* $B = C$.

Demonstração. Da definição do limite temos que: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0 : 0 < H(X, A) < \delta_1 \Rightarrow H(f(X), B) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0 : 0 < H(X, A) < \delta_2 \Rightarrow H(f(X), C) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, considerando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ teremos que:

$$H(B, C) \leq H(B, f(X)) + H(f(X), C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e assim $B = C$ □

4.3.1 Propriedades do Limite das Funções Intervalares Totais

Apresentaremos agora as propriedades mais básicas dos limites das funções intervalares totais, sempre considerando as operações estabelecias pela SLCIA, como também, uma outra forma de abordar estes limites.

Teorema 4.3.2. *Dadas* $f, g : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *funções intervalares, tais que* $\lim_{X \to A} f(X) = B$ *e* $\lim_{X \to A} g(X) = C$, *então:*

1. $\lim_{X \to A} (f + g)(X) = \lim_{X \to A} f(X) + \lim_{X \to A} g(X) = B + C$;
2. $\lim_{X \to A} (f - g)(X) = \lim_{X \to A} f(X) - \lim_{X \to A} g(X) = B - C$;
3. $\lim_{X \to A} (f \cdot g)(X) = \lim_{X \to A} f(X) \cdot \lim_{X \to A} g(X) = B \cdot C$;
4. $\lim_{X \to A} \left(\dfrac{f}{g}\right)(X) = \dfrac{\lim_{X \to A} f(X)}{\lim_{X \to A} g(X)} = \dfrac{B}{C};\quad 0 \notin C$.

Demonstração. Temos por hipóteses do teorema que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; X \in \mathbb{I}, 0 < H(X, A) < \delta \ \Rightarrow\ H(f(X), B) < \dfrac{\varepsilon}{2},\ H(g(X), C) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Então:

1.

$$\begin{aligned}
H(f(X) + g(X), B + C) &= H(f(X) + g(X) - (B + C), 0) \\
&= H((f(X) - B) + (g(X) - C), 0) \\
&= H((f(X) - B, 0) + (g(X) - C), 0) \\
&\leq H(f(X) - B, 0) + H(g(X) - C, 0) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{X\to A}(f+g)(X) = \lim_{X\to A} f(X) + \lim_{X\to A} g(X) = B + C$$

2.

$$\begin{aligned}
H(f(X)-g(X), B-C) &= H(f(X)-g(X)-(B-C), 0) \\
&= H((f(X)-B)+(-g(X)+C), 0) \\
&= H((f(X)-B, 0)+(-g(X)+C), 0) \\
&\leq H(f(X)-B, 0) + H(g(X)-C, 0) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{X\to A}(f-g)(X) = \lim_{X\to A} f(X) - \lim_{X\to A} g(X) = B - C$$

Os outros dois casos tem um procedimento análogo ao caso clássico. □

Conclusões do Capítulo

Neste quarto capítulo foi apresentado o limite de funções intervalares. Para isto, utilizamos a classificação das funções intervalares apresentadas no capítulo 2 e assim analisamos seus respectivos limites. Apresentamos as propriedades operacionais dos limites das funções intervalares e as exemplificamos. O estudo feito neste capítulo é de vital importância para estudos futuros de conceitos como a de diferenciabilidade intervalar, ou estudos como as das equações diferenciais que dependerão diretamente das propriedades das funções intervalares.

Capítulo 5

CONJUNTOS FUZZY

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos elementares da matemática fuzzy, isto com o objetivo de mostrar algumas aplicações dos resultados obtidos nos capítulos anteriores; na primeira seção apresentaremos alguns conceitos clássicos que depois serão estendidos para o contexto fuzzy na seção seguinte, muitos destes resultados podem ser encontrados e extensamente detalhados em [1] e [10]. Também apresentaremos alguns resultados no contexto fuzzy que envolvem operações aritméticas intervalares, as mesmas que serão abordadas com a SLCIA e finalmente apresentaremos sequencias de números fuzzy.

5.1 Preliminares da Lógica e Matemática Fuzzy

Definição 5.1.1 (Universo de Discurso). *Na lógica, o universo de discurso, também chamado domínio de discurso, ou simplesmente domínio, é o conjunto de coisas acerca das quais se fala num determinado contexto*[1]*. Dependendo do domínio de discurso, uma mesma proposição poderia ser verdadeira, falsa ou estar entre verdadeira e/ou falsa.*

Exemplo 5.1.1. *Por exemplo, ao dizer «todos são amigos», então se estivermos falando acerca de um pequeno grupo de pessoas, a proposição talvez seja verdadeira, mas se estivermos falando acerca de todas as pessoas do mundo, então ela é falsa;*

[1] Kirwan, Christopher, The Oxford Companion to Philosophy, Oxford University Press

outro exemplo poderia ser a proposição «ele é jovem», onde o Universo do Discurso é um grupo de pessoas com idades muito dispersas. Entretanto, a palavra jovem que aparece na proposição poderia se referir a uma pessoa muito jovem, simplesmente jovem, um pouco jovem ou talvez nada jovem, dando a entender que uma proposição dependendo do universo do discurso poderia ter distintos tipos de valores de verdade e nem sempre só verdadeira ou falsa.

Por convenção, o domínio de discurso é sempre um conjunto não vazio.

Na teoria de modelos, o universo de discurso é o conjunto de entidades em que um modelo se baseia.

Uma base de dados é um modelo de algum aspecto da realidade de uma organização. A esta realidade também se denomina o universo ou domínio de discurso. Isto é, este será o conjunto de elementos que teremos em consideração, por exemplo se consideramos as pessoas de uma comunidade, este universo estará formado pelas pessoas baixas, as pessoas altas, os homens com óculos, etc.

Definição 5.1.2 (Variável Linguística)**.** *Uma* variável linguística *é em geral um tipo de dados que tem termos linguísticos que representam conceitos de uma quantidade mensurável como temperatura, ou valores abstratos como compreensão. É muito comum o uso de adjetivos para nomear as variáveis linguísticas (quente, alto, etc.), isto é, uma variável linguística contém termos linguísticos associados, que representam conceitos como frio, morna, quente, etc., referidos à variável temperatura.*

Na teoria elementar dos conjuntos, como o nome sugere, os conjuntos fuzzy são relacionados com os conjuntos clássicos. Portanto, faremos uma breve introdução sobre conceitos básicos da teoria elementar de conjuntos. Temos que esclarecer que não é nosso propósito introduzir estes conceitos com uma rigorosidade forte.

Conjuntos e Sub-conjuntos

A ideia de conjunto é que ele esta formado de objetos de qualquer natureza, os quais são chamados de elementos ou membros do conjunto [8].

A notação $x \in A$ (se lé "x pertence a A") significa que x é um elemento do conjunto A. Analogamente, se escrevemos $x \notin A$ significa que x não pertence a A, ou seja o objeto x não é um dos elementos do conjunto A.

Segundo [11] com respeito à notação utilizaremos as letras minúsculas $a, b, c, x, y, \alpha, \beta, ...$ para indicar objetos e/ou elementos e letras maiúsculas $A, B, C, X, Y, \Delta, \Gamma, ...$ para indicar conjuntos.

Dados os objetos $a, b, c, ...$ denotaremos por $\{a, b, c, ...\}$ o conjunto que está formado por esses elementos.

Geralmente os conjuntos considerados na matemática clássica não são definidos especificando todos seus elementos. O método usual de se obter um conjunto é o seguinte. Começamos de um objeto básico X e consideramos uma condição , ou uma propriedade P que se refere a um elemento genérico do conjunto X. A propriedade P define um conjunto S, que se chama uma parte ou um subconjunto de X. Dizer que S é formado pelos elementos $x \in X$ que gozam da propriedade P, é o mesmo que:

$$S = \{x \in X; x \textit{ goza da propriedade } P\}$$

De acordo com [12] e [16], para alguns conjuntos específicos temos uma notação estândar , tais como:

- ϕ: denota o conjunto vazio;
- $\mathbb{R}$: denota o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{N}$: denota o conjunto dos números naturais;
- $I = [0, 1]$: denota o intervalo unitário;
- $I_0 =]0, 1]$: denota o intervalo unitário sem o zero.

Definição 5.1.3 (Produto Cartesiano). *Dados os conjuntos X e Y, definimos o* produto cartesiano *destes conjuntos como o conjunto:*

$$X \times Y = \{(x, y)/x \in X \; e \; y \in Y\}$$

para algum $x \in X$ *e* $y \in Y$, *onde* (x, y) *é o par ordenado que tem como primeira coordenada* x, *e como segunda coordenada* y. *De forma mais geral, para os conjuntos* $X_1, X_2, ..., X_n$ *o produto cartesiano é definido pelo conjunto:*

$$X_1 \times ... \times X_n = \{(x_1, ..., x_n)/\forall i \in \{1, ..., n\} : x_i \in X_i\}$$

onde para $x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n, (x_1, ..., x_n)$ *será a* $n-$ *upla ordenada que tem como primeira coordenada* x_1 *e n-ésima coordenada* x_n.

5.1.1 Função Caraterística

Uma forma alternativa de caraterizar subconjuntos de um conjunto dado é por meio da chamada função caraterística. Esta função também provê o enlace com os conjuntos fuzzy, os quais definiremos depois.

Dado um conjunto X e um subconjunto $A \subset X$, nós podemos capturar informação acerca de cada elemento de A e dos puntos que não estejam em A atribuindo a cada tipo destes um número diferente.

É mais usual etiquetarmos com 0 e 1 os pontos que não estão em A e para os que estão, respectivamente.

Uma das características importantes a considerar nesta proposta é a relação (isomorfismo) que será observada entre: a teoria de conjuntos, a lógica e os sistemas matemáticos (reticulados e álgebras booleanas).

De acordo com o conjunto 1-dimensional, os elementos de uma relação podem ser definidos pela *função característica* μ_R, que é uma aplicação da forma:

$$\mu_R : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \longrightarrow \{0, 1\}, \tag{5.1}$$

indicando a pertinência de um elemento $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se $\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, e sua não pertinência se $\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Exemplo 5.1.2. *Como um exemplo de relação discreta, consideremos a relação binária:*

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \mid x_1 > x_2\}$$

com $A_1 = \{6, 15, 30\} \subset \mathbb{N}$ *e* $A_2 = \{1, 2, 5, 10\} \subset \mathbb{N}$. *Estes pares* (x_1, x_2) *do produto cartesiano de conjuntos* $A_1 \times A_2$ *que verificam a relação condicional:*

$$\mathcal{R}_1(x_1, x_2) = \text{“}x_1 \textit{ é maior do que } x_2\text{”}$$

pertencem à relação, e os outros são excluídos. A relação R_1 *pode ser expressa de forma tabular, como na Tabela 5.1, tendo os valores da função característica* $\mu_{R_1}(x_1, x_2)$ *como entrada:*

x_2 / x_1	1	2	5	10
6	1	1	1	0
15	1	1	1	1
30	1	1	1	1
	$\mu_{R_1}(x_1, x_2)$			

Tabela 5.1: Relação binaria discreta R_1 em forma tabular.

5.1.2 Operações de Conjuntos e Relações Clássicas

Considerando a definição de operações para conjuntos e relações clássicas, temos que distinguir entre operações para conjuntos ou relações de domínio compatível e as que não são. Os conjuntos ou relações de domínio compatível são caracterizados por que eles são definidos no mesmo conjunto universal ou no mesmo produto cartesiano de conjuntos. A seguir mostraremos as mais importantes operações para conjuntos ou relações de domínio compatível.

Definição 5.1.4 (Inclusão)**.** *Um conjunto* A *está incluído (contido) em, ou é igual a outro conjunto* B *se cada elemento de* A *também é um elemento de* B*. Considerando a* X *como o conjunto universal, podemos escrever em notação simbólica:*

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \;\; [x \in A \Rightarrow x \in B]\,. \tag{5.2}$$

Se A *está incluído em* B*,* A *pode ser referido como um subconjunto de* B*,* $A \subseteq B$*, e* B *como o conjunto que contem* A*,* $B \supseteq A$*. Se* A *está incluído em* B *e* A *não é* *igual a B, então podemos dizer que A é subconjunto proprio de B. e em notação simbólica, podemos escrever:*

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge A \neq B. \tag{5.3}$$

Re-escrevendo a definição em termos das funções características $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ dos conjuntos A e B, podemos escrever:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \ \forall x \in X. \tag{5.4}$$

E se falamos que A é subconjunto proprio de B, em termos de suas funções características, teríamos:

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \mu_A(x) < \mu_B(x), \ \forall x \in X. \tag{5.5}$$

Definição 5.1.5 (Igualdade). *Dois conjuntos A e B, $A, B \subseteq X$, são iguais se eles contem exatamente os mesmos elementos. Em notação simbólica, podemos escrever isto como:*

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \, [x \in A \Leftrightarrow x \in B] \tag{5.6}$$

ou, equivalentemente utilizando a definição de inclusão teríamos:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \tag{5.7}$$

e, em termos das funções características $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ dos conjuntos A e B, podemos reescrever estas definições como:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \mu_A(x) = \mu_B(x), \ \forall x \in X \tag{5.8}$$

Definição 5.1.6 (Complemento). *O complemento A^c do conjunto A é o conjunto de todos os elementos do conjunto universal X que não são elementos de A. Em notação simbólica podemos escrever isto como:*

$$A^c = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\} \tag{5.9}$$

Em termos da função característica $\mu_A(x)$ do conjunto A, a função característica $\mu_{A^c}(x)$ do complemento A^c de A é definido como:

$$\mu_{A^c}(x) = \begin{cases} 1 & se \quad \mu_A(x) = 0 \\ 0 & se \quad \mu_A(x) = 1. \end{cases} \tag{5.10}$$

Analogamente, poderíamos definir este complemento como uma diferença dada por:

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{5.11}$$

Definição 5.1.7 (Interseção). *A interseção de dois conjuntos A e B, $A, B \subseteq X$, é um conjunto $A \cap B$ que contem a cada elemento que é simultaneamente membro dos conjuntos A e B. Em notação simbólica podemos escrever:*

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \;\wedge\; x \in B\} \tag{5.12}$$

Se os conjuntos A e B estão dados en termos de suas funções características $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, a função característica $\mu_{A \cap B}(x)$ da intersecção $A \cap B$ é definido como:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & se \quad \mu_A(x) = 1 \wedge \mu_B(x) = 1, \\ 0 & \quad\; outros\ casos. \end{cases} \tag{5.13}$$

Analogamente, poderíamos definir esta intersecção por:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min_{x \in X} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\,. \tag{5.14}$$

Definição 5.1.8 (União). *A união de dois conjuntos A e B, $A, B \subseteq X$, é um conjunto $A \cup B$ que contem a todos los elementos do conjunto A e do conjunto B. Em notação simbólica podemos escrever:*

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \;\vee\; x \in B\} \tag{5.15}$$

Se os conjuntos A e B são dados em termos de suas funções características $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, a função característica $\mu_{A\cup B}(x)$ da união $A \cup B$ é definida como:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 1 & se \quad \mu_A(x) = 1 \vee \mu_B(x) = 1, \\ 0 & \quad\; outros\ casos. \end{cases} \tag{5.16}$$

Analogamente, poderíamos definir esta união por:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max_{x \in X} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \tag{5.17}$$

Definição 5.1.9 (Diferença). *O conjunto diferença de dois conjuntos A e B, $A, B \subseteq X$, é um conjunto $B \setminus A$ que contem a todos os elementos do conjunto B que não sejam elementos do conjunto A. Em notação simbólica podemos escrever:*

$$B \setminus A = \{x \in X \mid x \in B \;\wedge\; x \notin A\} \tag{5.18}$$

Esta operação é geralmente utilizada para facilitar uma notação compacta, não tem que ser considerada como outra operação básica de conjuntos, pois pode ser reformulado em termos do complemento e da interseção de conjuntos, por:

$$B \setminus A = B \cap A^c \tag{5.19}$$

Consequentemente a função característica $\mu_{B\setminus A}$ do conjunto diferença $B \setminus A$ pode ser expressa em termos das funções características $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ dos conjuntos A e B respectivamente, como segue:

$$\mu_{B\setminus A}(x) = \begin{cases} 1 & se \quad \mu_A(x) = 0 \wedge \mu_B(x) = 1, \\ 0 & \quad\quad outros\ casos. \end{cases} \tag{5.20}$$

Analogamente, poderíamos definir esta diferencia por:

$$\mu_{B\setminus A}(x) = \min_{x\in X}\{\mu_{A^c}(x), \mu_B(x)\} \tag{5.21}$$

Definição 5.1.10 (Composição). *A composição ou relação composição, $S \circ R$ de duas relações binarias $R \subseteq X_1 \times X_2$ e $S \subseteq X_2 \times X_3$ é o conjunto de todos os pares ordenados $(x_1, x_3) \in X_1 \times X_3$, para o qual existe pelo menos um elemento x_2 tal que $(x_1, x_2) \in R$ e $(x_2, x_3) \in S$. Em notação simbólica poderíamos escrever-o como:*

$$S \circ R = \{(x_1, x_3) \mid \exists x_2 \in X_2, [(x_1, x_2) \in R \wedge (x_2, x_3) \in S]\, R\}\,. \tag{5.22}$$

Se as relações R e S estão dados em termos de suas funções características $\mu_R(x_1, x_2)$ e $\mu_S(x_2, x_3)$, a função característica $\mu_{R\circ S}(x_1, x_3)$ da composição $S \circ R$ é definida como:

$$\mu_{S\circ R}(x_1, x_3) = \begin{cases} 1 & se \quad \exists x_2 \in X_2 \ \ com\ \mu_R(x_1, x_2) = 1 \wedge \mu_S(x_2, x_3) = 1 \\ 0 & \quad\quad outros\ casos. \end{cases} \tag{5.23}$$

5.2 Conjuntos Fuzzy

Como vimos na secção anterior, podemos dizer que *os predicados binários não são outra coisa que subconjuntos* e pelas definições mostradas temos que:

1. Para todo subconjunto A de X existe uma única função característica μ_A de $\{0,1\}^X$, onde $\{0,1\}^X$ denota ao conjunto das funções $f : X \to \{0,1\}$

2. Dada uma $f \in \{0,1\}^X$ qualquer, existe um conjunto $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$, tal que precisamente $f = \mu_A$. Este conjunto é único; de fato, $\mu_A = \mu_B$ se, e somente se $A = B$, para todo A, B de $\mathcal{P}(X)$.

Consequentemente, as estruturas $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c)$ e $(\{0,1\}^X, \min, \max, 1 - id)$ são isomorfas. Isto porque do ponto de vista da álgebra não existe diferença entre $A \subset X$ e $\mu_A \in \{0,1\}^X$. Em conclusão: *os subconjuntos não são outra coisa que funções.*

Tratando-se de um conjunto no sentido clássico, a relação dicotômica de pertinência de um elemento e um conjunto deve estar bastante clara como um conceito primitivo. Mais precisamente, dado um conjunto A e um elemento x, temos que x pertence a A ou x não pertence a A.

A noção de *conjunto fuzzy*, dada por Zadeh em 1965, generaliza a ideia de conjunto quando o conceito de pertinência de um elemento a um conjunto deixa de ser um conceito primitivo como no caso clássico. Por exemplo, seja A o conjunto dos números inteiros positivos pequenos, isto é:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é pequeno } \}.$$

Os números 2 e 20 pertencem a A? Intuitivamente poderíamos dizer que se $20 \in A$ então $2 \in A$, e isto quer dizer que 2 teria um *grau de pertinência* maior que o grau de pertinência do 20 em relação ao conjunto A. A atribuição de um grau de pertinência de cada elemento a um conjunto passa então a ser uma caracterização do próprio conjunto. Para nosso exemplo, se consideramos a função $\mu : \mathbb{N} \to [0,1]$, dada por $\mu(n) = \frac{1}{n}$ definindo o grau de pertinência de A, teríamos que $2 \in A$ com um grau de pertinência de 0,5 e $20 \in A$ com um grau de pertinência de 0,05, ou n com um grau de pertinência de $\frac{1}{n}$. Observemos que o atributo pequeno para $x \in \mathbb{N}$ é subjetivo no sentido que poderia-se ter uma infinidade de funções $\mu : \mathbb{N} \to [0,1]$ definindo o grau de pertinência de cada elemento de A.

Podemos ainda mais imaginar uma infinidade de conceitos que possuam a característica que não estejam bem definidas em suas fronteiras. Por exemplo, o conjunto, dos homens altos, dos lagos grandes, o diagnóstico médico de um paciente, a classificação de bactérias em quanto a sua natureza animal ou vegetal, os problemas de uma determinada localidade, etc.

Seja X um conjunto (clássico), consideraremos a definição apresentada por Zadeh:

Definição 5.2.1 (Subconjunto Fuzzy). *Um subconjunto fuzzy $\tilde{A}$ em X é um conjunto de pares ordenados*

$$\underset{\sim}{A} = \left\{(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]\right\} \tag{5.24}$$

onde $\mu_A : X \to [0,1]$ é uma função chamada grau de pertinência de x em $\underset{\sim}{A}$, com os graus 1 e 0 representando, respectivamente, a pertinência completa e a não pertinência do elemento ao conjunto fuzzy.

Exemplo 5.2.1. *Seja o universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e estabeleceremos o conjunto fuzzy A por:*

$$\underset{\sim}{A} = \{(1,\ 0);(2,\ 0.25);\ (3,\ 0.5);\ (4,\ 0.75);\ (5,\ 1)\}.$$

Este conjunto fuzzy poderia expressar quão grande é cada elemento de U. O grau de subjetividade associado ao significado de grande (o tão grande) em cada individuo reflexa-se nos valores assinados a $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$, este mesmo conjunto $\underset{\sim}{A}$ em notação Zadeh, poderia ser expressado por:

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0}{1} + \frac{0.25}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.75}{4} + \frac{1}{5}$$

Utilizando esta última ideia para *Universos Finitos* consideremos o universo $U = \{x_1, ..., x_n\}$, assim podemos definir o conjunto fuzzy $\underset{\sim}{A}$ por:

$$\underset{\sim}{A} = \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)}{x_2} + ... + \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_n)}{x_n}$$

que em notação de Zadeh comprimida, teríamos:

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)}{(x_i)} \tag{5.25}$$

Por outro lado, se o universo do discurso X é um intervalo de números reais, o conjunto fuzzy $\widetilde{A}$ pode ser expressado como:

$$\widetilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_i)}{(x_i)} \tag{5.26}$$

Observação 5.2.1. *Atê agora utilizamos a notação $\widetilde{A}$ para denotar um conjunto fuzzy, a partir deste ponto utilizaremos simplesmente A para denotar um conjunto fuzzy só que para diferencia-lo do conjunto clássico A, este será acompanhado pela palavra fuzzy; isto é, quando falemos sobre um conjunto clássico A, diremos somente conjunto A, sem utilizar a palavra clássico ou a palavra crisp. Se A for um conjunto fuzzy, utilizaremos a palavra fuzzy para diferencia-lo do conjunto clássico.*

5.2.1 Funções de Pertinência

Uma função de pertinência é uma aplicação $\mu_A : X \to [0,1]$ que associada a um conjunto fuzzy, representa a caracterização deste conjunto fuzzy, esta função em geral é pre-fixada e poderia ser interpretar como o relaxamento no conjunto imagem da função característica de um conjunto. O sub índice A na função de pertinência é usado de forma análoga à função característica de um subconjunto clássico. É assim que nesta seção serão mostradas as funções de pertinência mais comuns.

1. **Função de Pertinência Triangular**

   A função de pertinência triangular é totalmente descrita por três parâmetros denotados por $\{a, b, c\}$ ou (a, b, c) com $a < b < c$ onde $(a, 0)$ e $(c, 0)$ denotam os extremos do triangulo e $(b, 1)$ o extremo central do triangulo. Dita função de pertencia para um conjunto fuzzy A está descrita por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se} \quad b \leq x \leq c \\ 0 & \text{se} \quad c \leq x. \end{cases} \tag{5.27}$$

equivalentemente poderíamos descrever esta função pela seguinte fórmula alternativa:

$$\mu_A(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \tag{5.28}$$

e cujo gráfico é:

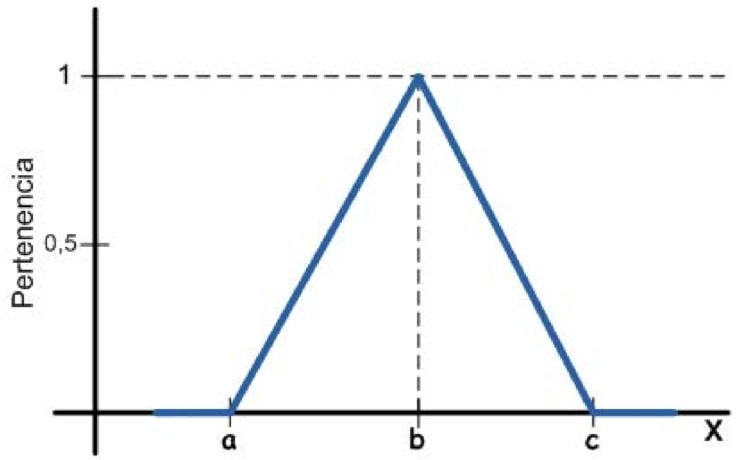

Figura 5.1: Função de Pertinência Triangular

2. **Função de Pertinência Trapezoidal:**

A função de pertinência trapezoidal está totalmente descrita por quatro parâmetros denotados por $\{a, b, c, d\}$ ou (a, b, c, d) com $a < b < c < d$ onde $(a, 0)$ e $(d, 0)$ denotam os extremos inferiores do trapézio e $(b, 1)$ e $(c, 1)$ os extremos superiores do trapézio. Dita função de pertencia para um conjunto fuzzy A está descrita por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se} \quad b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se} \quad c \leq x \leq d \\ 0 & \text{se} \quad d \leq x. \end{cases} \tag{5.29}$$

equivalentemente poderíamos descrever esta função pela seguinte fórmula alternativa:

$$\mu_A(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right) \tag{5.30}$$

e cujo gráfico é:

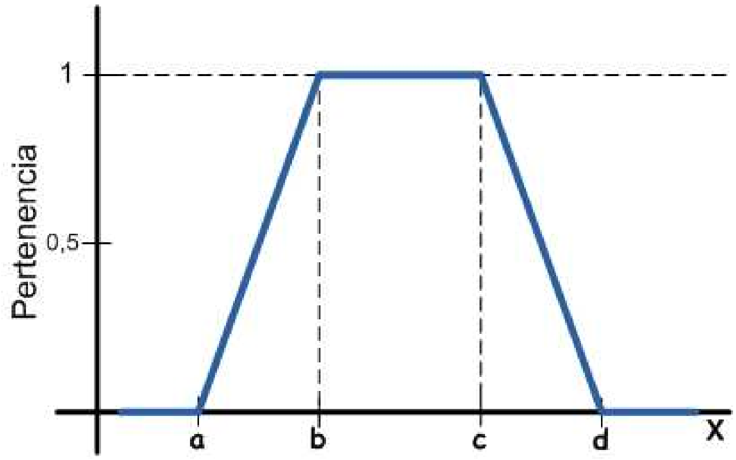

Figura 5.2: Função de Pertinência Trapezoidal

3. **Função de Pertinência Gaussiana:**

   A função de pertinência Gaussiana tem dois parâmetros: m que é responsável do seu centro e σ que é responsável da sua largura, dita função de pertencia para um conjunto fuzzy A está descrita por:

$$\mu_A(x) = e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \tag{5.31}$$

   O gráfico correspondente a função de pertinência Gaussiana é:

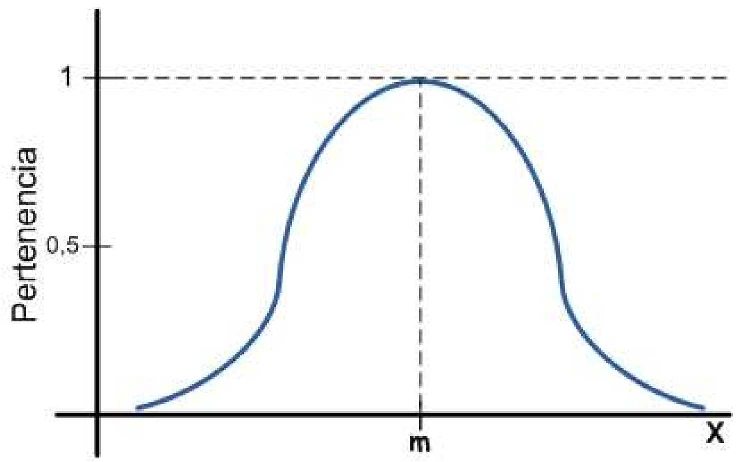

Figura 5.3: Função de Pertinência Gaussiana

4. **Função de Pertinência Sigmoidal**

A função de pertinência sigmoidal é totalmente descrita por dois parâmetros: m responsável do seu grau de inclinação, e $x = c$ o ponto de inflexão, dita função de pertencia para um conjunto fuzzy A está descrita por:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + e^{-m(x-c)}} \tag{5.32}$$

A gráfica correspondente a função de pertinência Sigmoidal é:

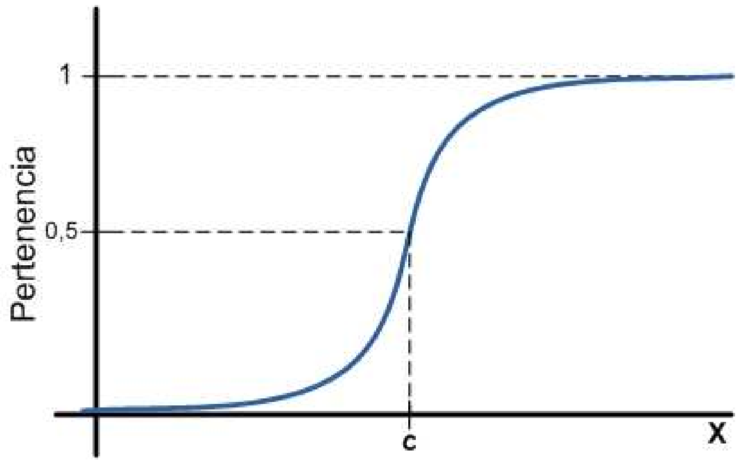

Figura 5.4: Função de Pertinência Sigmoidal

5. **Função de Pertinência Gamma**

A função de pertinência gamma esta totalmente descrita por dois parâmetros: a responsável pela coordenada do extremo inferior da gráfica da função e b responsável pela coordenada do extremo superior da gráfica da função de pertinência, dita função de pertencia para um conjunto fuzzy A está descrita por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se} \quad b \leq x. \end{cases} \tag{5.33}$$

O gráfico correspondente a função de pertinência Gamma é:

6. **Função de Pertinência Ele**

A função de pertinência ele esta totalmente descrita por dois parâmetros: a responsável pela coordenada del extremo superior da gráfica da função de

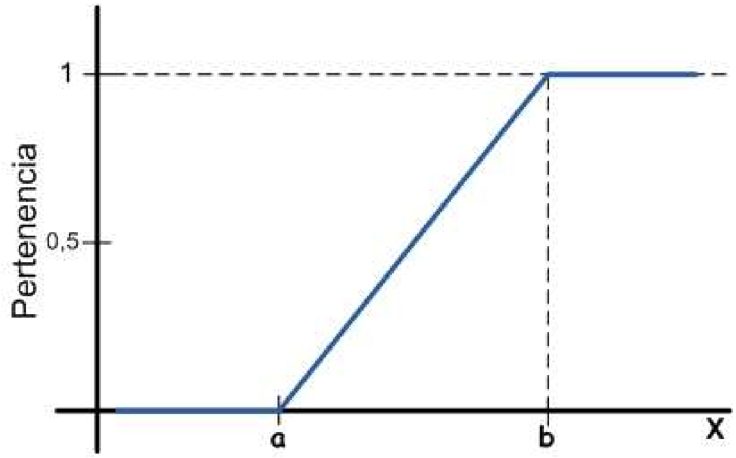

Figura 5.5: Função de Pertinência Gamma

pertinência e b responsável pela coordenada do extremo inferior da gráfica da função de pertinência , dita função de pertencia para um conjunto fuzzy A está descrita por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq a \\ -\frac{x-b}{b-a} & \text{se} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se} \quad b \leq x. \end{cases} \tag{5.34}$$

O gráfico correspondente a função de pertinência Ele é:

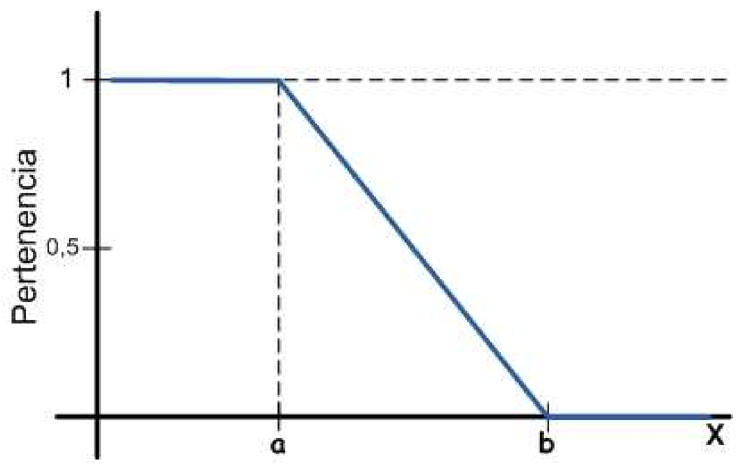

Figura 5.6: Função de Pertinência Ele

5.2.2 Operações de Conjuntos e Relaciones Fuzzy

Em concordância com as definições de operações para conjuntos e relações clássicas, temos que distinguir entre as operações para conjuntos e relações fuzzy que são de domínio compatível e as que não são. Os conjuntos ou relações de domínio compatível são definidos sobre o mesmo conjunto universal ou sobre o mesmo produto cartesiano de conjuntos, respectivamente; conjuntos ou relações que não são de domínio compatível estão definidos em diferentes conjuntos universais ou em diferentes produtos cartesianos de conjuntos, respectivamente. A seguir mostraremos as mais importantes operações para conjuntos e relações com domínios compatíveis. Veremos que as operações previamente definidas para conjuntos e relações clássicas, podem ser generalizadas por seus análogos fuzzy por uma simple substituição da função característica. Como novidade, temos uma propriedade característica das operações para conjuntos e relações fuzzy, o que indica a existência de diferentes possibilidades de aplicação de certas operações.

Definição 5.2.2 (Inclusão)**.** *Como uma generalização da definição de inclusão clássica, a inclusão de um conjunto fuzzy A em outro conjunto fuzzy B pode ser definido em termos da sua função de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ como:*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x),\ \forall x \in X \tag{5.35}$$

Definição 5.2.3 (Igualdade)**.** *Como uma generalização da definição de igualdade clássica, a igualdade de um conjunto fuzzy A em outro conjunto fuzzy B pode ser definido em termos da sua função de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ como:*

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x),\ \forall x \in X \tag{5.36}$$

Definição 5.2.4 (Complementar)**.** *Complemento Fuzzy Estândar:*

Dado um conjunto fuzzy $A \subseteq X$ com função de pertinência $\mu_A(x)$, a função de pertinência $\mu_{A^c}(x)$ do complemento A^c é definido por:

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x),\ \forall x \in X \tag{5.37}$$

Esta operação de complementação fuzzy, foi originalmente introduzida por Zadeh e foi referida como complemento fuzzy estândar. O complemento fuzzy estândar tem uma performance exatamente como a de complemento de um conjunto no sentido clássico quando a imagem da função de pertinência é restrito ao conjunto $\{0, 1\}$*. É assim que a forma fechada da expressão na definição de complemento de um conjunto fuzzy é uma extensão da definição de complemento de conjuntos clássicos. O gráfico desta estaria representado por:*

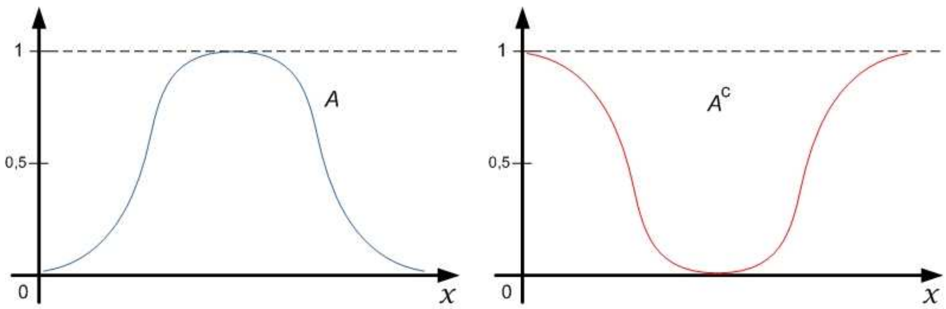

Figura 5.7: Função de pertinência $\mu_A(x)$ do conjunto A e Função de pertinência $\mu_{A^c}(x)$ do complemento fuzzy estândar A^c

É evidente que o complemento fuzzy estândar não é a única possível generalização do complemento clássico. De fato existe uma extensa variedade de funções que resultariam ser uma generalização da operação clássica de complemento. Estas funções serão tratadas como segue.

Complemento Fuzzy Generalizado

Como uma convenção na notação, referimos, em general como complemento de um conjunto fuzzy A *a* A^c*, e será definida por uma aplicação funcional* c *da forma:*

$$c : [0, 1] \longrightarrow [0, 1], \tag{5.38}$$

a mesma que relaciona o grau de pertinência:

$$\mu_{A^c}(x) = c[\mu_A(x)] \tag{5.39}$$

para cada grau de pertinência $\mu_A(x)$ *do conjunto fuzzy* A *e para todo* $x \in X$*. É evidente que esta função* c *possui certas propriedades para produzir o conjunto fuzzy* A^c*,* *propriedades que tem que ser verificadas em sua totalidade para que qualquer função* $c : [0,1] \to [0,1]$ *possa ser o complemento de um conjunto fuzzy* A. *Explicitamente, a função* c *deve satisfazer os seguintes axiomas:*

Axioma C1: $c(0) = 1$ *e* $c(1) = 0$ *(Condições de limitação)*

Axioma C2: *Para* $a, b \in [0,1]$: $a \leq b \Rightarrow c(a) \geq c(b)$ *(Monotonia)*

Todas as funções c *que satisfazem os axiomas* $C1$ *e* $C2$ *são a forma mais geral de complemento fuzzy. Os axiomas* $C1$ *e* $C2$ *são geralmente referidos como a axiomática de Skeleton para complementos fuzzy.*

Mas, em muitos casos de significância prática, consideraremos os seguintes dois axiomas adicionais para o complemento fuzzy:

Axioma C3: c *é uma função continua. (Continuidade)*

Axioma C4: $c[c(a)] = a;\ \forall a \in [0,1]$. *(Involução)*

É evidente que a classe de complementos fuzzy que adicionalmente satisfazem os axiomas $C3$ *e* $C4$ *formão uma subclasse da clase mais geral de complementos fuzzy induzidos pelos axiomas de Skeleton. Presentaremos a seguir três subclasses de complementos fuzzy contínuos e involutivos:*

- *Clase de Complementos de Sugeno*

  A classe de complementos de Sugeno é definido por:

  $$c_{Sug}(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x} \ \text{com } \lambda \in]-1, \infty[\tag{5.40}$$

  Para cada valor do parâmetro λ, *obtemos uma função complemento particular que é continua e involutiva. Para* $\lambda = 0$, *o complemento fuzzy de Sugeno torna-se no complemento estândar fuzzy definido por Zadeh.*

- *Clase de Complementos de Yager*

  A classe de complementos de Yager, é definido por:

  $$c_{Yag}(x) = (1 - x^{\eta})^{1/\eta} \ \text{com } \eta \in]0, \infty[\tag{5.41}$$

  Aqui o complemento estândar fuzzy é obtido quando $\eta = 1$.

- *Clase de Complementos de M.*

$$c_M(x) = \begin{cases} 1-\lambda x & si \quad x < \frac{1}{1+\lambda} \\ & \qquad\qquad\qquad \forall\lambda \in \langle 0,\infty\rangle \\ \frac{1-x}{\lambda} & si \quad \frac{1}{1+\lambda} \leq x \quad . \end{cases} \tag{5.42}$$

Note que aqui o complemento estândar obtém-se quando $\lambda = 1$.

Prova: Provaremos que $c_M(x)$ *é um complemento involutivo e continuo para* $\lambda > 1$

– ***C1:*** *Note que* $0 < \frac{1}{1+\lambda}$, $\forall\lambda > 0$, *então substituindo em (5.42) teremos que* $c_M(0) = 1 - \lambda \cdot 0 = 1$, *e para* $x = 1$ *temos que* $1 > \frac{1}{1+\lambda}$, $\forall\lambda > 0$, *então teremos que* $c_M = \frac{1-1}{\lambda} = 0$ *portanto* c_M *verifica as condições de limitação.*

– ***C2:*** *Esta parte da demostração será dividida em 3 partes:*

i. Para $x_1 \leq x_2 < \frac{1}{1+\lambda}$***:***

Note que como $\lambda > 0$, *então* $\frac{1}{\lambda} > 0$ *e assim* $-\frac{1}{\lambda} < 0$, *multiplicando esta expressão a* $x_1 \leq x_2$ *teremos* $-\frac{1}{\lambda} \cdot x_1 \geq -\frac{1}{\lambda} \cdot x_2$, *logo* $1 - \frac{1}{\lambda} \cdot x_1 \geq 1 - \frac{1}{\lambda} \cdot x_2$ *e assim obtemos que* $c(x_1) \geq c(x_2)$.

ii. Para $\frac{1}{1+\lambda} \leq x_1 \leq x_2$***:***

Como $x_1 \leq x_2$, *então* $-x_1 \geq -x_2$, *logo temos que* $1 - x_1 \geq 1 - x_2$ *e como sabemos que* $\frac{1}{\lambda} > 0$, *obtemos que* $\frac{1-x_1}{\lambda} \geq \frac{1-x_2}{\lambda}$ *e assim* $c(x_1) \geq c(x_2)$

iii. Para $x_1 \leq \frac{1}{1+\lambda} \leq x_2$***:***

Note que se $\lambda > 1$, *então* $\lambda > \frac{1}{\lambda} > 0$ *e daqui temos que,* $-\lambda < -\frac{1}{\lambda} < 0$, *multiplicando aos extremos desta desigualdade* $x_1 \leq x_2$ *teremos que* $-\lambda x_1 \leq -\frac{1}{\lambda}x_2$, *somando* $\frac{1}{\lambda}$ *obtemos que* $\frac{1}{\lambda} - \lambda x_1 \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}x_2$ *e daqui temos que,* $1 - \lambda x_1 > \frac{1}{\lambda} - \lambda x_1 \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}x_2$, *portanto temos que* $c(x_1) \geq c(x_2)$. *Por outro lado se* $0 < \lambda < 1$ *teremos que, se* $x_1 \leq x_2$ *então* $-\lambda x_1 \geq -\frac{1}{\lambda}x_2$ *e desta última expressão temos que* $1 - \lambda x_1 \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}x_2$, *o que quer dizer que,*$c(x_1) \geq c(x_2)$.

De ***i,ii*** e ***iii*** *obtemos que* c_M *verifica a condição de monotonia.*

- ***C3:*** *Sabemos que uma função* $f = c_M : [0,1] \to [0,1]$ *definida em* $[0,1]$ *é continua [12] em* $a = \frac{1}{1+\lambda} \in [0,1]$ *quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado arbitrariamente, pode-se obter* $\delta > 0$ *tal que* $x \in [0,1]$ *e* $|x - a| < \delta$ *impliquem* $|f(x) - f(a)| < \delta$*; para este caso, dado que a função* c_M *esta definida por duas funções lineares e como toda função linear é continua, basta provar que las dos funções se intersectam em* $x = \frac{1}{1+\lambda}$ *isto para garantir que ela é continua em dito ponto; isto é: dadas as duas funções lineares* $1 - \lambda x$ *e* $\frac{1-x}{\lambda}$ *dizemos que elas se intersectam se* $1 - \lambda x = \frac{1-x}{\lambda}$ *para algum* $x \in [0,1]$ *assim* $\lambda - \lambda^2 x = 1 - x$ *e daqui* $\lambda - 1 = (\lambda^2 - 1)x$ *e desta última temos que* $\frac{1}{1+\lambda} = x$ *que pertence a* $[0,1]$ *para todo* $\lambda > 0$*; o que garante que* c_M *é continua.*
- ***C4:*** *Es evidente que* $c_M(c_M(a)) = a$ *con* $a \in [0,1]$.

Da verificação destes quatro axiomas teremos que a função c_M *antes definida é um complemento fuzzy.*

Definição 5.2.5 (Interseção). *Interseção Fuzzy Estândar:*
Dados dois conjuntos fuzzy A *e* B, $A, B \subseteq X$ *com funções de pertinência* $\mu_A(x)$ *e* $\mu_B(x)$, *a função de pertinência* $\mu_{A\cap B}(x)$ *da interseção* $A \cap B$ *é definida por*

$$\mu_{A\cap B}(x) = min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \ \ \forall x \in X. \tag{5.43}$$

A operação de interseção fuzzy é também referida como MIN-interseção ou interseção fuzzy estândar e foi originalmente introduzida por Zadeh. Em similaridade com o caso do complemento estândar fuzzy, a interseção fuzzy estardar, atua exatamente como a interseção clássica de conjuntos, quando é restrita ao conjunto $\{0,1\}$. *É assim que a interseção fuzzy estândar é uma generalização da operação de interseção clássica de conjuntos.*

Para dois conjuntos fuzzy A *e* B *o gráfico da interseção fuzzy estândar estará representada por:*

É claro que, a interseção fuzzy estândar não é a única possível generalização da sua contraparte crisp o clássica. De fato, existem muitas classes de funções na

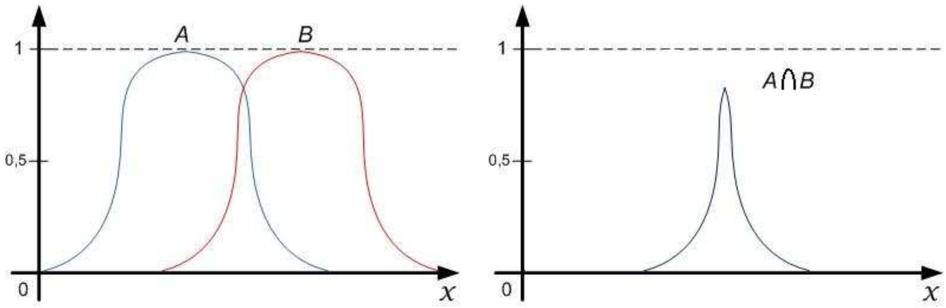

Figura 5.8: Funções de pertinência $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$ e função de pertinência $\mu_{A\cap B}(x)$ da interseção fuzzy estândar $A \cap B$

qual cada um dos seus elementos qualifica como possíveis generalizações da operação clássica da interseção. Estas funções serão tratadas como segue:

Intersecções Fuzzy Gerais, norma triangular ou t-normas

Como uma convenção notacional, a interseção $A \cap B$ de dois conjuntos fuzzy A e B, em geral, é definido pela aplicação funcional i da forma:

$$i : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \tag{5.44}$$

a qual relaciona o grau de pertinência:

$$\mu_{A\cap B}(x) = i[\mu_A(x), \mu_B(x)], \tag{5.45}$$

onde o argumento é formado por um par de graus de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$ dos conjuntos fuzzy A e B para todo $x \in X$. É evidente que a função i possui algumas propriedades para produzir $A \cap B$, estas propriedades caracterizarão a $A \cap B$ como interseção dos conjuntos fuzzy A e B. Explicitamente, a função i deve satisfazer os seguintes requerimentos, os quais serão apresentados em forma axiomática para todo $a, b, c \in [0,1]$:

Axioma I1: $i(a,1) = a$ *(Condição de Limitação).*

Axioma I2: $i(a,b) = i(b,a)$ *(Comutatividade).*

Axioma I3: $i(a, i(b,c)) = i(i(a,b), c)$ *(Associatividade).*

Axioma I4: $a \leq b \Rightarrow i(a,c) \leq i(b,c)$ *(Monotonicidade).*

*Todas as funções i que satisfaçam os axiomas de **I1** a **I4**, formam a classe mais geral de interseções fuzzy. Os axiomas de **I1** a **I4** são normalmente referidos como* *a Axiomática de Skeleton para interseções fuzzy e muito mais ainda referidas como normas triangulares ou t-normas, as mesmas que já foram extensamente estudadas.*

As t-normas mais frequentes que satisfazem os axiomas ***I1*** *-* ***I4****, serão listados como segue (todas definidas para todo* $a, b \in [0,1]$*):*

- *MIN-interseção:* $i_{min}(a,b) = min(a,b)$.
- *Produto Algébrico:* $i_{alg}(a,b) = ab$.
- *Diferença Limitada:* $i_{bnd}(a,b) = max(0, a+b-1)$
- *Produto drástico:* $i_{drt}(a,b) = \begin{cases} a & se & b=1 \\ b & se & a=1 \\ 0 & outros\ casos & \end{cases}$

O produto algebraico junto com a MIN-interseção foram introduzidos por Zadeh, a diferença limitada foi proposta por Giles e o Produto drástico por Dubois e Prade. Para as t-normas mencionadas anteriormente podemos estabelecer uma ordem, isto é, as 4 t-normas para todo $a, b \in [0,1]$ *ordenam-se do seguinte modo:*

$$i_{drt}(a,b) \leq i_{bnd}(a,b) \leq i_{alg}(a,b) \leq i_{min}(a,b) \tag{5.46}$$

Além disso, podemos dizer que em geral, toda t-norma i é limitada pelo produto drástico de um lado e pela MIN-interseção do outro. Assim, para todo $a, b \in [0,1]$*:*

$$i_{drt}(a,b) \leq i(a,b) \leq i_{min}(a,b) \tag{5.47}$$

Novamente varias classes de t-normas foram estudadas, dentre as quais enunciaremos a duas das mais importantes:

- *Clase de Intersecções de Yaguer*

  A classe de interseções de Yaguer, é definido por:

  $$i_{Yag}(a,b) = 1 - min\left[1, [(1-a)^w + (1-b)^w]^{1/w}\right], \quad com \;\; w \in [0, \infty]. \tag{5.48}$$

- *Clase de Intersecções de Dubois y Prade*

  $$i_{Dub}(a,b) = \frac{ab}{\max[a,b,\alpha]} \quad com \quad \alpha \in [0,1]$$

Definição 5.2.6 (União). *Dados dois conjuntos fuzzy A e B, $A, B \subseteq X$ com funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, a função de pertinência $\mu_{A\cup B}(x)$ da união $A \cup B$ é definida por*

$$\mu_{A\cup B}(x) = max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \;\; \forall x \in X \tag{5.49}$$

A operação de união fuzzy é também referida como MAX-união ou união fuzzy estândar e foi originalmente introduzida por Zadeh. Em similitude com o caso do complemento estândar fuzzy e da interseção fuzzy estândar, a união fuzzy estardar, actua como a união clássica de conjuntos, quando é restrita ao conjunto $\{0, 1\}$, é assim que a intersecção fuzzy estândar é uma generalização da operação de união clássica de conjuntos.

É assim que para dois conjuntos fuzzy A e B a gráfica da união fuzzy estândar estaria representada por:

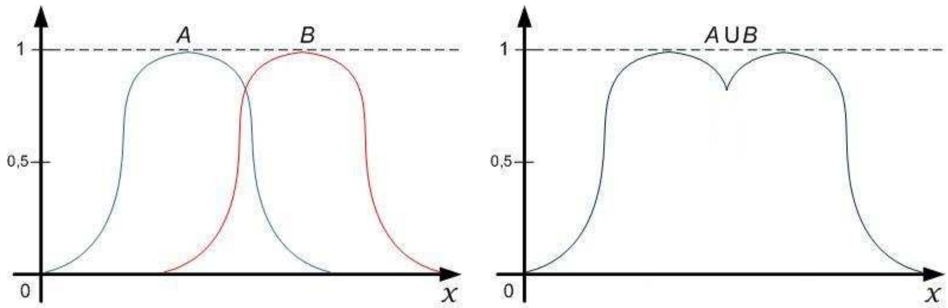

Figura 5.9: Funções de pertinência $\mu_A(x)$, μ_B e Função de pertinência $\mu_{A\cup B}(x)$ da união fuzzy estândar $A \cup B$

É claro que, a união fuzzy estândar não é a única possível generalização da sua contraparte crisp o clássica. De fato, existem muitas classes de funções na qual cada um dos seus membros qualifica como possíveis generalizações da operação clássica da intersecção. Estas funções serão tratadas como segue:

Uniões Fuzzy Gerais, norma triangular ou t-normas

Como uma convenção notacional, a união $A \cup B$ de dois conjuntos fuzzy A e B, em geral, é definido pela aplicação funcional u como segue:

$$u : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \tag{5.50}$$

a qual relaciona o grau de pertinência:

$$\mu_{A\cup B}(x) = u[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{5.51}$$

onde o argumento está formado por um par de graus de pertinência $\mu_A(x)$ *e* $\mu_B(x)$ *dos conjuntos fuzzy* A *e* B *para todo* $x \in X$. *É evidente que a função* u *possui algumas propriedades para produzir* $A \cup B$*, estas propriedades caracterizarão a* $A \cup B$ *como união dos conjuntos fuzzy* A *e* B. *Explicitamente, a função* u *debe satisfazer os seguintes requerimentos, os quais serão apresentados em forma axiomática para todo* $a, b, c \in [0, 1]$*:*

Axioma U1: $u(a, 0) = a$ *(Condição de Limitação).*

Axioma U2: $u(a, b) = u(b, a)$ *(Comutatividade).*

Axioma U3: $u(a, u(b, c)) = u(u(a, b), c)$ *(Associatividade).*

Axioma U4: $a \leq b \Rightarrow u(a, c) \leq u(b, c)$ *(Monotonicidade).*

*Todas as funções u que satisfaçam os axiomas de **U1** a **U4**, formam a classe mais geral de uniões fuzzy. Os axiomas de **U1** a **U4** são normalmente referidos como a Axiomática de Skeleton para interseções fuzzy e muito mais ainda referidas como conormas triangulares, t-conormas ou s-normas.*

*As s-normas mais frequentes que satisfazem os axiomas **U1** - **U4**, serão listados como segue (todas definidas para todo* $a, b \in [0, 1]$*):*

- *MAX-união:* $u_{max}(a, b) = max(a, b)$.
- *Soma Algébrica:* $u_{alg}(a, b) = a + b - ab$.
- *Soma Limitada:* $u_{bnd}(a, b) = min(1, a + b)$
- *União Drástica:* $u_{drt}(a, b) = \begin{cases} a & se & b = 0 \\ b & se & a = 0 \\ 0 & outros\ casos & \end{cases}$

A soma algébrica junto com a MAX-união foi introduzido por Zadeh, a soma limitada foi proposta por Giles e o União drástica por Dubois e Prade. Para as *s-normas dadas anteriormente podemos estabelecer uma ordem, isto é, para todo* $a, b \in [0,1]$ *as 4 s-normas ordenam-se da seguinte forma:*

$$u_{max}(a,b) \leq u_{alg}(a,b) \leq u_{bnd}(a,b) \leq u_{drt}(a,b) \tag{5.52}$$

Além disso, podemos dizer que em geral, toda s-norma u é limitada pela soma drástica de um lado e pela MAX-união do outro. Assim, para todo $a, b \in [0,1]$*:*

$$u_{max}(a,b) \leq u(a,b) \leq u_{drt}(a,b) \tag{5.53}$$

Novamente varias classes de t-normas foram estudadas, dentre as quais enunciaremos duas das mais importantes:

- *Clase de Uniões de Yaguer*

  A classe de uniões de Yaguer, é definido por:

  $$u_{Yag}(a,b) = min\left[1, [a^w + b^w]^{1/w}\right], \quad com \;\; w \in]0, \infty] \tag{5.54}$$

- *Clase de Uniões de Dubois e Prade*

  $$u_{Dub}(a,b) = \frac{a + b - ab - \min[a, b, (1-\alpha)]}{\max[(1-a), (1-b), \alpha]} \quad com \quad \alpha \in [0,1]$$

5.2.3 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Enunciaremos agora alguns elementos básicos sobre conjuntos fuzzy, utilizando o conceito de nível, mas antes apresentaremos alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento desta.

Definição 5.2.7. *Seja* $\mu : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *e* $\alpha \in [0,1]$*. Definimos o* α*-nível de* μ *como o conjunto:*

$$[\mu]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x) \geq \alpha\}, \;\; \alpha > 0.$$

Também definimos o Suporte $[\mu]^0$ *de um conjunto fuzzy* μ *por:*

$$supp(\mu) = [\mu]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \mu(x) > \alpha\}}$$

As propriedades dos α-níveis são:

Proposição 5.2.8. *A familia de níveis* $\{[\mu]^\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ *de um conjunto fuzzy* μ, *verifica as seguintes propriedades:*

1. $[\mu]^0 \supseteq [\mu]^\alpha \supseteq [\mu]^\beta$ *para todo* $0 \leq \alpha \leq \beta$;

2. *Se* $\alpha_n \nearrow \alpha$ *então* $[\mu]^\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$ *isto é, a aplicação de nível é continua a esquerda;*

3. $\mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow [\mu_1]^\alpha = [\mu_2]^\alpha,\ \forall\alpha \in [0,1]$;

4. $[\mu]^\alpha \neq \phi$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *é equivalente a* $\mu(x) = 1$ *para algum* $x \in X$;

5. *A relação:*

$$\mu_1 \subseteq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1(x) \leq \mu_2(x), \forall x \in X \Leftrightarrow [\mu]^\alpha \subseteq [\mu]^\alpha, \forall\alpha \in [0,1],$$

é uma ordem parcial sobre a classe de todos os conjuntos fuzzy $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *sobre* $\mathbb{R}^n$.

Definição 5.2.9. *Dado um conjunto fuzzy* μ *em* $\mathbb{R}$, *dizemos que:*

1. μ *é compacto, se* $[\mu]^\alpha$ *é compacto para todo* $\alpha \in [0,1]$;

2. μ *é convexo, se* $[\mu]^\alpha$ *é convexo para todo* $\alpha \in [0,1]$;

3. μ *é normal, se existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mu(x) = 1$.

é daqui dizermos que:

- $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ *é a familia de conjuntos fuzzy compactos e normais.*

- $\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ *é a familia de conjuntos fuzzy compactos, convexos e normais, familia que normalmente é conhecida como familia de intervalos fuzzy e cujos elementos chamaremos de números fuzzy.*

5.2.4 Operações Algébricas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

É claro que se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{R}^n)$, então podemos não esperar que as operações algébricas usuais entre funções sejas as adequadas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, dado que, por exemplo, se somamos μ_1 e μ_2 ponto a ponto, poderia acontecer que:

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) \notin [0,1]$$

A solução deste problema passa pelo chamado principio de extensão de Zadeh, o mesmo que detalharemos a continuação:

O Principio de Extensão de Zadeh

O principio de extensão de Zadeh para uma função $f : X_1 \times X_2 \to Y$ tem por objetivo indicar como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy A de X por meio de f. É de se esperar que esta imagem seja um subconjunto fuzzy de Y, isto é.

Definição 5.2.10. *(Principio de Extensão de Zadeh) Seja f uma função tal que $f : X_1 \times X_2 \to Y$, f pode ser estendida ao contexto fuzzy como:*

$$\hat{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \to \mathcal{F}(Y)$$

onde:

$$\hat{f}(\mu_1, \mu_2)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2)\in f^{-1}(y)} \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) & se \quad f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & se \quad f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

para cada $y \in Y$

Mesmo que o Principio de Extensão estenda o conceito de uma função aplicada a um subconjunto clássico de X, em geral, o calculo de $\hat{f}$ não foi implementada de modo prático, exceto para funções muito simples.

Exemplo 5.2.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax+b$ com $a \neq 0$, nos poderíamos obter facilmente $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ definida por: $\hat{f}(\mu)(y) = \mu\left(\dfrac{a}{y-b}\right)$, $\forall \mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.*

É dizer se f é bijetora, teremos $\hat{f}(\mu)(y) = \mu(f^{-1}(y))$.

Se retomamos a ideia das operações algébricas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ teremos que a adição e a multiplicação por escalar pode ser feita utilizando o principio de extensão de Zadeh, isto é:

Definição 5.2.11. *Se consideramos $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, então ela induz uma adição sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que:*

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \sup_{x_1+x_2=x} \mu_1(x) \wedge \mu_2(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Analogamente, se $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $\mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$*, então considerando a aplicação* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) = \delta x$ *e utilizando o principio de extensão de Zadeh teremos que* f *induz um produto por um escalar sobre* $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *tal que:*

$$(\delta\mu)(x) = \mu(\frac{x}{\delta})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

E claro que, destes últimos resultados, tanto $\mu_1+\mu_2$ como $\delta\mu$ pertencem a $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, e aqui surgi a seguinte pergunta muito interessante:

Como são os α-níveis de $\mu_1 + \mu_2$ e $\delta\mu$?

O seguinte teorema responderá esta pergunta.

Teorema 5.2.12. *Sejam* $f : X_1 \times X_2 \to Y$ *uma função continua e* μ *um subconjunto fuzzy de* $X_1 \times X_2$*, então para todo* $\alpha \in [0, 1]$ *vale:*

$$[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$$

Este resultado indica que os α-níveis do conjunto fuzzy, obtidos pero principio de extensão, coincidem com as imagens dos α-níveis pela função crisp.

Só que atê agora a proposta de obter $\hat{f}(\mu)$ utilizando a aritmética intervalar standard traz um serio inconveniente, que acontece nos processos de cálculo com intervalos, o mesmo que é conhecido como efeito de sobrestimação ([5]).

Exemplo 5.2.3. *Consideremos o número triangular fuzzy* $\mu(1/2; 1; 3/2)$ *onde:*

$$[\mu]^\alpha = \left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}\right]$$

se nos queremos obter $\mu^2 - 2\mu$*, então utilizaremos a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 - 2x$ *para assim obter* $\hat{f}(\mu) = \mu^2 - 2\mu$.

É assim que se nos utilizamos a SIA teremos que: $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-\frac{11}{4}, \frac{5}{4}\right]$

Agora se fatoramos a função a ser estendida, isto é $f(x) = x(x-2)$ teremos que a sua extensão será da forma $\hat{f}(\mu) = \mu(\mu - 2)$ e daqui utilizando a SIA obtém-se que $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}\right]$

Mas se nós utilizamos a SLCIA veremos que, mesmo se fatoramos ou utilizamos qualquer forma equivalente de nossa função a ser estendida, obteremos o mesmo resultado. É assim que para nosso exemplo teremos que $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[-1, -\frac{3}{4}\right]$ mesmo se a função esteja dada por $f(x) = x^2 - 2x$ ou $f(x) = x(x-2)$

Observação 5.2.2. *Dada uma função f a ser estendida no contexto fuzzy para $\hat{f}$ teremos que, dependendo da aritmética a ser utilizada esta mudará o resultado e/ou terá algumas propriedades adicionais, é assim que:*

SIA *Neste caso acontecem dois fenômenos interessantes, pois dependendo da função a ser estendida enquanto ela dependa menos da variável ou vaiáveis independentes na função a ser estendida, ela se aproximara mais ao resultado esperado, isto é, se consideramos a função de nosso último exemplo teremos que se $f_1(x) = x^2 - 2x$, $f_2(x) = x(x-2)$ e $f_3(x) = (x-1)^2 - 1$ são formas equivalentes da função original, mas na extensão, por exemplo, se analisamos o nível zero para cada caso obteremos $[\hat{f}_1(\mu)]^0 \supseteq [\hat{f}_2(\mu)]^0 \supseteq [\hat{f}_3(\mu)]^0$. O outro fenómeno interessante é que se nos particionamos o domínio, e fazemos a extensão para cada partição obteremos que, enquanto mais fina seja a partição a extensão se aproximara mais do resultado desejado.*

CIA *Para este caso suponhamos que a função a ser estendida é $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = xy$ então se consideramos $x = y + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ teremos que a extensão se comporta como se estivéssemos utilizando a SIA, fato que implica que, ante pequenas perturbações o resultado poderia mudar radicalmente.*

SLCIA *Atê agora ela nos esta dotando uma extensão consistente, no sentido de obter resultados desejados.*

Depois desta observação, utilizando a SLCIA teremos melhores resultados em proposições como a seguinte:

Proposição 5.2.13. *Sejam A e B números fuzzy com α-níveis dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha]$ e $[B]^\alpha = [\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha]$. Então utilizando a SLCIA valem as seguintes propriedades:*

1. *A soma entre A e B é o número fuzzy $A + B$ cujos α-níveis são:*
$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha;$$
2. *A diferença entre A e B é o número fuzzy $A - B$ cujos α-níveis são:*
$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha;$$
3. *A multiplicação de δ por A é o número fuzzy δA cujos α-níveis são:*
$$[\delta A]^\alpha = \delta[A]^\alpha;$$
4. *A multiplicação de A por B é o número fuzzy $A \cdot B$ cujos α-níveis são:*
$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha;$$
5. *A divisão de A por B, se $0 \notin\ supp(B)$, é o número fuzzy $\dfrac{A}{B}$ cujos α-níveis são:*
$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha}.$$

Demonstração. A demonstração segue imediatamente a partir da definição *1.3.5*, desde que as operações intervalares fiquem bem definidas. □

Se voltamos para nosso exemplo de extensão e se lembramos o teorema 5.2.12, teremos que, considerando a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores a $[\hat{f}(\mu)]\alpha = f([\mu]^\alpha)$ é uma função intervalar total, e assim ela poderia ser descrita por:

$$\begin{aligned} f([\mu]^\alpha) &= f(\left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}\right]) \\ &= \left[\min_{\lambda\in[0,1]}\{f_\lambda([\mu]^\alpha)\}, \max_{\lambda\in[0,1]}\{f_\lambda([\mu]^\alpha)\}\right] \end{aligned}$$

onde $f_\lambda([\mu]^\alpha) = \left(\frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha)\right)^2 - 2\left(\frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha)\right)$

Destas últimas expressões se analisamos o nível zero veremos que:

$$\begin{aligned} f([\mu]^0) &= f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) \\ &= \left[\min_{\lambda\in[0,1]}\{f_\lambda([\mu]^0)\}, \max_{\lambda\in[0,1]}\{f_\lambda([\mu]^0)\}\right] \\ &= \left[\min_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}\}, \max_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}\}\right] \\ &= \left[-1, -\frac{3}{4}\right] \end{aligned}$$

Note que este último é o resultado que esperávamos quando fazemos um analise ponto a ponto.

Uma outra aplicação imediata dos resultados dos capítulos anteriores poderia ser a seguinte:

5.2.5 Sequências de Números Fuzzy

Nesta parte apresentaremos as sequências de números fuzzy e analisaremos a sua convergência, utilizando as técnicas apresentadas nos capítulos anteriores.

Definição 5.2.14. *Uma sequência em $\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ é simplesmente uma função φ de $\mathbb{N}$ em $\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$. Se $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ é uma sequência, podemos escrever também:*

$$(A_n); \quad (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ou \quad (A_0, A_1, A_2, ...)$$

para φ, onde $A_n := \varphi(n)$ é o n-ésimo termo da sequência $\varphi = (A_0, A_1, A_2, ...)$.

Este tipo de sequencias antes definidas serão chamadas de *Sequencias de Números Fuzzy* e a continuação analisaremos a sua convergência.

Definição 5.2.15. *Dizemos que uma sequência de números fuzzy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se sua correspondente sequência de α-níveis o é, isto é:*

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \to A \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R}) \quad se \quad ([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \to [A]^\alpha \in \mathbb{I}$$

Proposição 5.2.16. *Sejam* $A_n, B_n, A, B \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ *tal que* $A_n \to A$, $B_n \to B$, *então teremos os seguintes resultados:*

a) $A_n + B_n \longrightarrow A + B$;

b) $A_n - B_n \longrightarrow A - B$;

c) $A_n \cdot B_n \longrightarrow A \cdot B$;

d) $\dfrac{A_n}{B_n} \longrightarrow \dfrac{A}{B}$, *para todo* B_n *e* $B \not\supset 0$.

Demonstração. A demonstração destes resultados decorre imediatamente dos resultados de convergência de números intervalares. □

Exemplo 5.2.4. *Seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números fuzzy tal que sua correspondente sequência de* α*-níveis é* $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ *e*

$$[A_n]^\alpha = \left[-1 - e^{-n} + (1 + e^{-n})\alpha, 1 + e^{-n} - (1 + e^{-n})\alpha\right]$$

, *é simples ver que* $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \to [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$

Exemplo 5.2.5. *Seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números fuzzy tal que sua correspondente sequência de* α*-níveis é* $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $[A_n]^\alpha = \left[\dfrac{sen\ n}{n} - 1 + a\alpha, 1 + e^{-n} - a\alpha\right]$ *onde* $a = 1 + \dfrac{1}{2}e^{-n} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{sen\ n}{n}$, *é simples ver que* $([A_n]^\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \to [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$

Conclusões do Capítulo

Este capítulo foi apresentado com o objetivo de mostrar uma aplicação das teorias desenvolvidas nos capítulos anteriores, neste sentido, fazemos uma breve introdução dos conceitos preliminares da matemática fuzzy, e com estas ferramentas definimos os conjuntos fuzzy como uma extensão natural dos conjuntos do caso clássico. Mostramos, alguns conjuntos fuzzy específicos e suas propriedades operacionais utilizando o conceito de α-nível, induzindo assim a utilização do principio de extensão de Zadeh, onde é mostrada que esta extensão depende diretamente da aritmética intervalar a ser utilizada, estes resultados são exemplificados. Finalmente foi introduzido o conceito de sequências de números fuzzy e depois é analisada a sua convergência utilizando a aritmética intervalar restrita de níveis simples.

CONCLUSÕES

Sabemos que a maioria dos conceitos e resultados importantes da Análise Matemática se referem, quer explicita quer indiretamente, a limites. Daí o papel principal deste estudo. O objetivo é desenvolver futuramente outros tipos de limites mais sofisticados, como derivadas intervalares, integrais intervalares, sequências de funções intervalares, etc. Nesse sentido, este estudo desenvolveu: os números e espaços de intervalos ou espaço intervalar próprio, seguido pelas relações e funções intervalares, dando assim sentido ao estudo das sequências de números fuzzy e dos limites das funções intervalares. Apresentamos também os conceitos preliminares utilizando a SLCIA, e mostramos algumas propriedades tais como, monotonicidade, injetividade, etc. E como aplicar estas propriedades e teorias do contexto intervalar no contexto fuzzy.

Temos a certeza de que este estudo terá um aporte significativo em estudos posteriores do cálculo intervalar, como também em outras áreas que envolvam estudos de modelos matemáticos com incerteza, dentre estas areas podemos citar desde equações diferenciais intervalares, atê aplicações em áreas que envolvam estudos com incerteza generalizada, como a matemática fuzzy.

Referências Bibliográficas

[1] BARROS, L. C. ; BASSANEZI, R. C.: *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. Unicamp-Imecc, 2006

[2] BARTLE, R. G.: *The elements of integration and Lebesgue measure*. Bd. 92. Wiley. com, 2011

[3] BELLMAN, R. E. ; ZADEH, L. A.: Decision-making in a fuzzy environment. In: *Management science* 17 (1970), Nr. 4, S. B–141

[4] BURKILL, J. C.: Functions of intervals. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2 (1924), Nr. 1, S. 275–310

[5] CHALCO-CANO, Y. ; MISUKOSHI, M. ; ROMÁN-FLORES, H. ; FLORES-FRANULIC, A. : Spline approximation for Zadeh's extensions. In: *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 17 (2009), Nr. 02, S. 269–280

[6] CHALCO-CANO, Y. ; RUFIÁN-LIZANA, A. ; ROMÁN-FLORES, H. : Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. In: *Fuzzy Sets and Systems* 219 (2013), S. 49–67

[7] FLORES, H. E. R.: *Análisis Fuzzy Multívoco*. FONDECYT REGULAR-2004, 2004

[8] HALMOS, P. R.: *Naive Set Theory. The University Series in Undergraduate Mathematics*. 1960

[9] HALMOS, P. R.: *Measure theory*. Bd. 2. van Nostrand New York, 1950

[10] Hanss, M. : *Applied fuzzy arithmetic.* Springer, 2005

[11] Hausdorff, F. : *Set Theory: Translated from the German by John R. Aumann, Et Al.* Bd. 119. AMS Bookstore, 1957

[12] Lima, E. L.: *Curso de Análise, vol. 1.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2004

[13] Lodwick, W. A.: Interval and fuzzy analysis: A unified approach. In: *Advances in Imaging and Electron Physics* 148 (2007), S. 75–192

[14] Moore, R. E.: *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing.* Stanford, CA, USA, Department of Mathematics, Stanford University, Ph.D. dissertation, Nov. 1962

[15] Moore, R. E.: *Automatic error analysis in digital computation.* Lockheed, Missiles and Space Division, 1959

[16] Moore, R. E. ; Kearfott, R. B. ; Cloud, M. J.: *Introduction to interval analysis.* Society for Industrial Mathematics, 2009

[17] Moore, R. E. ; Yang, C. : Interval analysis I. In: *Applied Mathematics. Technical Document. Lockheed Aircraft Corporation, Missiles and Space division, Sunnyvale, California, USA* (1959)

[18] Moore, R. : Interval analysis. 1966. In: *Prince-Hall, Englewood Cliffs, NJ* (1969)

[19] Rogers, C. A.: *Hausdorff measures.* Cambridge University Press, 1998

[20] Stefanini, L. : A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. In: *Fuzzy sets and systems* 161 (2010), Nr. 11, S. 1564–1584

[21] Sunaga, T. : Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis. In: *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* 26 (2009), Nr. 2, S. 125–143

[22] WARMUS, M. : Calculus of approximations. In: *Bulletin de l'Academie Polonaise de Sciences* 4 (1956), Nr. 5, S. 253–257

[23] YOUNG, R. C.: The algebra of many-valued quantities. In: *Mathematische Annalen* 104 (1931), Nr. 1, S. 260–290

[24] ZADEH, L. A.: Fuzzy sets. In: *Information and control* 8 (1965), Nr. 3, S. 338–353

[25] ZADEH, L. A.: Fuzzy logic= computing with words. In: *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 4 (1996), Nr. 2, S. 103–111

Índice Remissivo