

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

CAIO LUCAS DE ALMEIDA ARAUJO

**SISTEMAS DE AUMENTO DE ESTABILIDADE PARA O VEÍCULO AÉREO NÃO
TRIPULADO EOLO**

São João da Boa Vista

2025

Caio Lucas de Almeida Araujo

**SISTEMAS DE AUMENTO DE ESTABILIDADE PARA O VEÍCULO AÉREO NÃO
TRIPULADO EOLO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Aeronáutica .

Orientador: Profº Dr. David Fernando Castillo
Zúñiga

Coorientador: Profª Dra. Raphaela Carvalho
Machado

São João da Boa Vista

2025

A663s

Araujo, Caio Lucas de Almeida

Sistemas de aumento de estabilidade para o veículo aéreo não tripulado

EOLO / Caio Lucas de Almeida Araujo. -- São João da Boa Vista, 2025

74 f. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia Aeronáutica) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, São João
da Boa Vista

Orientador: David Fernando Castillo Zúñiga

Coorientadora: Raphaela Carvalho Machado

1. Engenharia aeroespacial. 2. Controle automático. 3. Drone. I. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**SISTEMAS DE AUMENTO DE ESTABILIDADE PARA O VEÍCULO AÉREO NÃO
TRIPULADO EOLO**

Aluno: Caio Lucas de Almeida Araujo
Orientador: Prof. Dr. David Fernando Castillo Zúñiga

Banca Examinadora:

- David Fernando Castillo Zúñiga (Orientador)
- Wilian Miranda dos Santos (Examinador)
- Clécio Fischer (Examinador)

Os formulários de avaliação e a ata da defesa, na qual consta a aprovação do trabalho, devidamente assinados pela banca encontram-se no prontuário eletrônico do aluno.

São João da Boa Vista, 08 de julho de 2025

Dedico este trabalho à todos que me apoiaram na minha jornada.

“Busquem conhecimento...”
(E.T. Bilu)

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de sistemas de controle para um veículo aéreo não tripulado, considerando duas configurações distintas de corpo rígido: uma com asa rígida e outra com asa flexionada. O objetivo principal é projetar sistemas de aumento de estabilidade longitudinal e latero-direcional, além de um piloto automático capaz de manter a velocidade e a altitude durante o voo de cruzeiro. Para isso, é realizada a modelagem da dinâmica da aeronave com base nas equações de movimento de seis graus de liberdade, seguida de linearização em torno de condições de equilíbrio. Os sistemas de controle são desenvolvidos utilizando a técnica LQR, com critérios de projeto baseados na norma MIL-F-8785C. O rastreamento de referências é implementado por meio de um compensador do tipo PI acoplado ao controlador ótimo. Os resultados das simulações demonstram que os controladores projetados são eficazes tanto na estabilização quanto no rastreamento das variáveis de interesse, mesmo sob a ação de perturbações.

Palavras-chave: controle LQR; piloto automático; estabilidade; flexibilidade.

ABSTRACT

This work presents the development of control systems for an unmanned aerial vehicle, considering two distinct rigid-body configurations: one with a rigid wing and another with a flexed wing. The main goal is to design stability augmentation systems for both longitudinal and lateral-directional dynamics, as well as an autopilot capable of maintaining constant cruise speed and altitude. The aircraft dynamics are modeled using six-degree-of-freedom equations of motion, followed by linearization around trimmed flight conditions. Control systems are developed using the Linear Quadratic Regulator (LQR) technique, with design criteria based on the MIL-F-8785C standard. Reference tracking is implemented through a PI compensator coupled to the optimal controller. Simulation results show that the designed controllers are effective in stabilizing the aircraft and tracking the desired variables, even in the presence of external disturbances.

Keywords: LQR control; autopilot; stability; flexibility.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Sistema de coordenadas fixo na Terra	17
Figura 2	Sistema de coordenadas fixo no corpo	17
Figura 3	Sistema de coordenadas aerodinâmico	18
Figura 4	Representação de autovalores no plano complexo	29
Figura 5	Requisitos de frequência para período curto	32
Figura 6	Diagrama de blocos da estrutura de rastreamento com compensador PI	34
Figura 7	Configuração de asa rígida	39
Figura 8	Configuração de asa flexionada	39
Figura 9	Resposta dos estados longitudinais para distúrbio	47
Figura 10	Resposta da taxa de arfagem para distúrbio	48
Figura 11	Resposta dos estados latero-direcionais para distúrbio	52
Figura 12	Resposta da saída de desempenho a um degrau unitário	55
Figura 13	Resposta dos estados longitudinais para distúrbio	62
Figura 14	Resposta da taxa de arfagem para distúrbio	63
Figura 15	Resposta dos estados latero-direcionais para distúrbio	66
Figura 16	Resposta da saída de desempenho a um degrau unitário	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Critérios de qualidade de voo (Classe 1, Fase B, Nível 1)	31
Tabela 2 – Propriedades de comprimento e massa	38
Tabela 3 – Derivadas longitudinais	40
Tabela 4 – Derivadas latero-direcionais	41
Tabela 5 – Parâmetros dos modos dinâmicos longitudinais do modelo de asa rígida	44
Tabela 6 – Parâmetros dos modos dinâmicos laterais do modelo de asa rígida	49
Tabela 7 – Parâmetros dos modos dinâmicos longitudinais do modelo de asa flexionada	59
Tabela 8 – Parâmetros dos modos dinâmicos laterais do modelo de asa rígida	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado
LQR	Linear Quadratic Regulator
PI	Proporcional-Integral
NED	North-East-Down

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ângulo de ataque
β	Ângulo de derrapagem lateral
γ	Ângulo de trajetória
ϕ	Ângulo de rolagem
θ	Ângulo de arfagem
ψ	Ângulo de guinada
u, v, w	Componentes da velocidade no corpo
p, q, r	Taxas angulares em torno dos eixos do corpo
V	Velocidade total da aeronave
x, y, z	Coordenadas no sistema inercial NED
h	Altitude
T	Força de tração
T_i	Comando percentual de tração
S	Área da asa
b	Envergadura da asa
c	Corda média aerodinâmica
ρ	Densidade do ar
g	Aceleração da gravidade
m	Massa da aeronave
I_x, I_y, I_z	Momentos de inércia em torno dos eixos do corpo
δ_e	Deflexão do profundor
δ_a	Deflexão dos ailerons
δ_r	Deflexão do leme
L	Sustentação
D	Arrasto

Y	Força lateral
l	Momento de rolagem
m	Momento de arfagem
n	Momento de guinada
C_L	Coeficiente de sustentação
C_D	Coeficiente de arrasto
C_Y	Coeficiente de força lateral
C_l	Coeficiente de momento de rolagem
C_m	Coeficiente de momento de arfagem
C_n	Coeficiente de momento de guinada
$\bar{c}$	Corda média aerodinâmica
AR	Alongamento efetivo da asa
η_i	Coordenada modal da flexão
$\dot{\eta}_i$	Derivada temporal da coordenada modal
K	Ganho da realimentação de estados
Q	Matriz de ponderação dos estados no LQR
R	Matriz de ponderação dos comandos no LQR
H	Matriz de saída de desempenho
A, B, C, D	Matrizes da forma de estado linearizada
F, G, D, J	Matrizes do compensador PI
x	Vetor de estados do sistema
u	Vetor de entradas
y	Vetor de saídas
x_{eq}, u_{eq}	Vetores de equilíbrio de estados e entradas
ω_n	Frequência natural
ζ	Fator de amortecimento
n	Fator de carga

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	MOTIVAÇÃO PARA O TEMA	14
1.2	OBJETIVO	14
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	DINÂMICA DE CORPO RÍGIDO	16
2.1.1	Definição dos sistemas de coordenadas	16
2.1.1.1	Sistema de Coordenadas fixo na Terra (NED)	16
2.1.1.2	Sistema de coordenadas do corpo	16
2.1.1.3	Sistema de coordenadas aerodinâmico	18
2.1.2	Matrizes de rotação	18
2.1.2.1	Sistema de coordenadas fixo na Terra para sistema de coordenadas fixo no corpo .	19
2.1.2.2	Sistema de coordenadas aerodinâmico para sistema de coordenadas fixo no corpo	19
2.1.3	Equações da Dinâmica de Translação	20
2.1.4	Equações da Dinâmica de Rotação	20
2.1.5	Relações Cinemáticas	21
2.1.5.0.1	<i>Cinemática de Translação</i>	21
2.1.5.0.2	<i>Cinemática de Rotação</i>	22
2.1.6	Relações de Velocidade	22
2.2	FORÇAS E MOMENTOS	23
2.2.1	Forças e Momentos Aerodinâmicos	23
2.2.2	Força Gravitacional	25
2.2.3	Força Propulsiva	25
2.3	EQUAÇÕES NÃO LINEARES DA DINÂMICA DA AERONAVE	26
2.4	LINEARIZAÇÃO	26
2.5	MODOS DINÂMICOS E ESTABILIDADE	27
2.5.1	Modos Característicos	29
2.6	CRITÉRIOS DE QUALIDADE DE VOO SEGUNDO O MIL-F-8785C	31
2.7	CONTROLE LQR	31
2.7.1	Regra de Bryson para Escolha das Matrizes de Peso	33
2.8	CONTROLE LQ COM RASTREIO DE REFERENCIA VIA COMPENSADOR PI	34
2.9	CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE	36
2.9.1	Controlabilidade	36
2.9.2	Observabilidade	37
3	OBJETO DE ESTUDO	38

3.1	CARACTERÍSTICAS GERAIS	38
3.2	CARACTERÍSTICAS AERODINÂMICAS	38
3.3	SENSORES E ATUADORES	39
4	SISTEMAS DE CONTROLE PARA O MODELO DE ASA RÍGIDA	42
4.1	MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS	42
4.2	SISTEMA DE AUMENTO DE ESTABILIDADE LONGITUDINAL	43
4.2.1	Avaliação da dinâmica longitudinal	43
4.2.2	Modelo reduzido longitudinal para controle	44
4.2.3	Projeto do controlador LQR	45
4.2.4	Análise do efeito do sistema de aumento de estabilidade longitudinal	45
4.3	SISTEMA DE AUMENTO DE ESTABILIDADE LATERO-DIRECIONAL	48
4.3.1	Avaliação da dinâmica latero-direcional	48
4.3.2	Modelo reduzido latero-direcional	49
4.3.3	Projeto do controlador LQR	50
4.3.4	Análise do efeito do sistema de aumento de estabilidade latero-direcional	50
4.4	PILOTO AUTOMÁTICO	52
4.4.1	Análise do efeito do piloto automático	55
5	SISTEMAS DE CONTROLE PARA O MODELO DE ASA FLEXIONADA	57
5.1	MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS	57
5.2	SISTEMA DE AUMENTO DE ESTABILIDADE LONGITUDINAL	58
5.2.1	Avaliação da dinâmica longitudinal	58
5.2.2	Modelo reduzido longitudinal para controle	59
5.2.3	Projeto do controlador LQR	60
5.2.4	Análise do efeito do sistema de aumento de estabilidade longitudinal	60
5.3	SISTEMA DE AUMENTO DE ESTABILIDADE LATERO-DIRECIONAL	61
5.3.1	Avaliação da dinâmica latero-direcional	61
5.3.2	Modelo reduzido latero-direcional para controle	63
5.3.3	Projeto do controlador LQR	64
5.3.4	Análise do efeito do sistema de aumento de estabilidade latero-direcional	64
5.4	PILOTO AUTOMÁTICO	65
5.4.1	Análise do efeito do piloto automático	68
6	CONCLUSÃO	70
	REFERÊNCIAS	72

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO PARA O TEMA

O desenvolvimento de aeronaves modernas tem exigido avanços significativos em termos de eficiência estrutural e aerodinâmica. Entre as estratégias adotadas para atingir tais objetivos, destaca-se o uso de materiais de alta resistência e baixo peso, que possibilitam a redução da massa total da aeronave e, conseqüentemente, o consumo energético durante a operação (Hodges; Pierce, 2011). Simultaneamente, o aumento do alongamento das asas é empregado para minimizar os efeitos adversos dos vórtices de ponta e reduzir o arrasto induzido, promovendo ganhos no desempenho em cruzeiro e na eficiência aerodinâmica.

Essas soluções de projeto, embora vantajosas, introduzem desafios adicionais no que se refere ao comportamento dinâmico da aeronave. A configuração alongada das asas e a utilização de estruturas mais esbeltas demandam uma abordagem de controle mais precisa, capaz de lidar com variações nas características aerodinâmicas e estruturais durante o voo (Wright; Cooper, 2007). Isso exige o desenvolvimento de sistemas de controle avançados que assegurem a estabilidade e a performance da aeronave em diferentes regimes operacionais.

Adicionalmente, o aprimoramento dos sistemas de controle de voo tornou-se essencial para garantir o desempenho e a segurança operacional de veículos aéreos com configurações cada vez mais otimizadas. Esses sistemas devem ser capazes de manter o controle eficiente da trajetória, da atitude e da velocidade do veículo, mesmo diante de perturbações externas e incertezas nos parâmetros do modelo (Cesnik; Brown, 2002).

Dessa forma, o presente estudo se justifica pela necessidade de avaliar e projetar sistemas de controle capazes de manter a estabilidade e o desempenho em diferentes configurações estruturais, explorando as implicações do projeto aerodinâmico sobre a dinâmica longitudinal do veículo. Ao abordar modelos com diferentes características estruturais, busca-se avançar na compreensão dos efeitos dessas escolhas de projeto sobre a eficiência e a robustez dos sistemas de controle, especialmente em aplicações voltadas a veículos aéreos não tripulados modernos.

1.2 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é desenvolver sistemas de controle para um veículo aéreo não tripulado com asa flexível, considerando modelos de corpo rígido. Serão projetados um sistema de aumento de estabilidade, atuando nas dinâmicas longitudinal e latero-direcional, e um piloto automático capaz de manter a velocidade e a altitude constantes durante o voo de cruzeiro. A abordagem adotada visa aumentar a robustez e a precisão do comportamento dinâmico do veículo.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em seis capítulos. O Capítulo 1 corresponde à introdução, onde são apresentadas a motivação para o tema e os objetivos do trabalho. O Capítulo 2 aborda a fundamentação teórica, contemplando os sistemas de referência utilizados, a modelagem da dinâmica da aeronave, o procedimento de linearização, as características dos modos dinâmicos e os métodos de controle adotados. No Capítulo 3, a aeronave utilizada como objeto de estudo é apresentada, com ênfase em suas características dimensionais e aerodinâmicas. O Capítulo 4 trata do desenvolvimento dos sistemas de aumento de estabilidade longitudinal e latero-direcional, bem como do piloto automático, aplicados ao modelo com asa rígida. O Capítulo 5 estende essa abordagem ao modelo com asa flexionada, apresentando os respectivos sistemas de controle e piloto automático. Por fim, o Capítulo 6 reúne as conclusões do trabalho, destacando os principais resultados obtidos e sugerindo possíveis direções para estudos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 DINÂMICA DE CORPO RÍGIDO

Para descrever o comportamento da aeronave no espaço tridimensional, utiliza-se uma representação em seis graus de liberdade, que considera tanto os movimentos de translação quanto os de rotação.

Este capítulo apresenta a metodologia para modelar a dinâmica de 6 graus de liberdade de um corpo rígido, com foco em aplicações aeronáuticas. Primeiramente, são definidos os sistemas de coordenadas necessários para a análise. Em seguida, aplicam-se matrizes de rotação para representar mudanças de orientação. Por fim, derivam-se as equações de movimento a partir da segunda lei de Newton, obtendo-se uma formulação matemática que descreve a dinâmica da aeronave em diferentes condições de voo.

2.1.1 Definição dos sistemas de coordenadas

A dinâmica de voo de uma aeronave pode ser descrita de maneira eficiente e precisa por meio de diferentes sistemas de coordenadas, que permitem modelar e analisar diversos aspectos de sua posição, orientação e movimento. A escolha do sistema de coordenadas depende do referencial adotado e do objetivo da análise, sendo fundamental para a definição das equações de movimento.

2.1.1.1 Sistema de Coordenadas fixo na Terra (NED)

O sistema de coordenadas *NED* (North-East-Down), ilustrado na Figura 1, é um referencial fixo à Terra, amplamente utilizado em navegação aérea e para a análise da posição da aeronave em relação ao solo. Neste sistema, a origem está localizada na superfície da Terra, e os eixos são definidos da seguinte maneira:

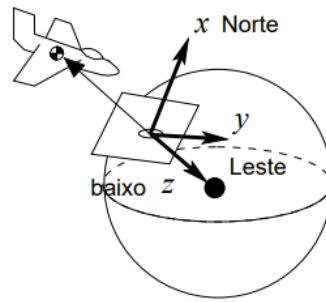
- O eixo x_T aponta para o norte geográfico, alinhado com o meridiano de referência.
- O eixo y_T aponta para o leste geográfico, no plano horizontal e ortogonal ao eixo x_T .
- O eixo z_T é perpendicular ao plano horizontal, apontando para baixo, em direção ao centro da Terra.

Este sistema é particularmente útil para a modelagem da trajetória da aeronave em um contexto global, permitindo a aplicação das leis de Newton para descrever a dinâmica da aeronave no espaço tridimensional.

2.1.1.2 Sistema de coordenadas do corpo

O sistema de coordenadas do corpo, ilustrado na Figura 2, é um referencial não inercial, cuja origem está no centro de massa da aeronave e se move com a mesma. Este sistema é essencial para a

Figura 1 – Sistema de coordenadas fixo na Terra

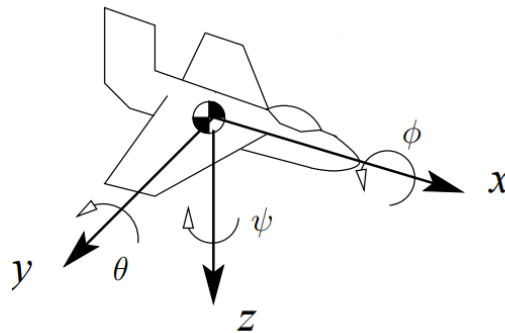


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

análise das forças e momentos internos da aeronave durante o voo. Os eixos do sistema de coordenadas do corpo são definidos como segue:

- O eixo x_B está alinhado com o eixo longitudinal da aeronave,
- O eixo y_B está alinhado com o eixo lateral da aeronave, apontando para a asa direita;
- O eixo z_B é ortogonal aos eixos x_B e y_B , apontando para baixo, no dorso da aeronave.

Figura 2 – Sistema de coordenadas fixo no corpo



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A orientação da aeronave em relação ao sistema de coordenadas fixo na Terra é caracterizada pelos ângulos de Euler, que definem a rotação da aeronave ao longo dos três eixos. O ângulo de rolagem (ϕ) representa a rotação da aeronave em torno do eixo x_B , que afeta a inclinação das asas. O ângulo de arfagem (θ) representa a rotação da aeronave em torno do eixo y_B , determinando o ângulo de elevação da cauda. Por fim, o ângulo de guinada (ψ) representa a rotação da aeronave em torno do eixo z_B , afetando a direção da aeronave em relação ao eixo vertical.

As velocidades lineares ao longo dos eixos x_B , y_B e z_B são designadas por u , v e w , respectivamente, enquanto as velocidades angulares são representadas por p , q e r . As forças e momentos que atuam sobre a aeronave são designados por X , Y , Z e l , m , n , respectivamente, correspondendo às direções dos eixos x_B , y_B e z_B .

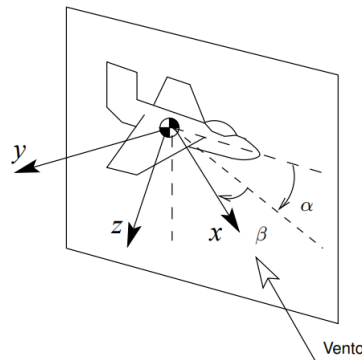
2.1.1.3 Sistema de coordenadas aerodinâmico

O sistema de coordenadas aerodinâmico, apresentado na Figura 3, é um referencial não inercial utilizado para analisar as forças e momentos aerodinâmicos gerados pelo fluxo de ar em torno da aeronave. Esse sistema é definido de acordo com a direção do vento relativo, com os seguintes eixos:

- O eixo x_w está alinhado com a direção do vento relativo, apontando para a frente, na direção do fluxo de ar que incide sobre a aeronave.
- O eixo z_w é perpendicular ao eixo x_w , apontando para baixo, ao longo da linha de simetria da aeronave.
- O eixo y_w completa o sistema ortogonal e aponta para a direita, na direção lateral da aeronave.

O ângulo de ataque (α) e ângulo de derrapagem (β) são as variáveis para a definição da orientação da aeronave em relação ao fluxo de ar. O ângulo de ataque é o ângulo formado entre o eixo x_B e o eixo x_w , enquanto o ângulo de derrapagem é o ângulo formado entre o eixo y_B e o eixo y_w . Estes ângulos determinam a distribuição das forças aerodinâmicas, como sustentação e arrasto, na superfície da aeronave.

Figura 3 – Sistema de coordenadas aerodinâmico



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Este sistema é utilizado para a análise de forças aerodinâmicas que afetam a aeronave durante o voo, pois as forças e momentos são sensíveis à orientação da aeronave em relação ao fluxo de ar (Hall; Lipták, 2014). Importante, a rotação em torno do vetor de velocidade do vento não altera as forças e momentos aerodinâmicos, simplificando a modelagem do comportamento aerodinâmico da aeronave.

2.1.2 Matrizes de rotação

Matrizes de rotação são ferramentas matemáticas utilizadas para converter uma grandeza vetorial de um sistema de coordenadas para outro. Essas rotações são definidas pelos ângulos de Euler, que especificam a orientação relativa entre dois sistemas.

2.1.2.1 Sistema de coordenadas fixo na Terra para sistema de coordenadas fixo no corpo

Para descrever as grandezas observadas no sistema de coordenadas fixo na Terra para o sistema de coordenadas fixo no corpo são necessárias três rotações sucessivas, sendo uma rotação em relação a cada um dos eixos do sistema de coordenadas fixo no corpo. Essas rotações parciais são descritas pelas matrizes R_ϕ , R_θ e R_ψ .

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A ordem de rotação das matrizes é essencial, isso porque cada rotação é dependente da anterior. A ordem adotada será a z - y - x , na qual a primeira rotação é aplicada em ψ , seguida pela rotação em θ e, por fim, em ϕ .

$$R_{I2B} = R_\phi R_\theta R_\psi \quad (4)$$

2.1.2.2 Sistema de coordenadas aerodinâmico para sistema de coordenadas fixo no corpo

Para representar grandezas vetoriais observadas no sistema de coordenadas aerodinâmico para o sistema de coordenadas fixo no corpo, apenas duas rotações são requeridas, pois em um escoamento uniforme, as forças e os momentos aerodinâmicos permanecem inalterados com a reorientação do corpo em relação à velocidade do vento relativo. As matrizes de rotação parciais são definidas por R_α e R_β .

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nesse caso, as rotações são aplicadas na ordem $y - x$, sendo que a primeira rotação é aplicada em $-\beta$, seguida pela rotação em α .

$$R_{A2B} = R_\alpha R_\beta \quad (7)$$

2.1.3 Equações da Dinâmica de Translação

O movimento de translação da aeronave é descrito pela segunda lei de Newton, que relaciona a força resultante à quantidade de movimento do corpo. Essa dinâmica permite calcular o deslocamento e a variação da velocidade ao longo do tempo. A mesma é expressa como:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (8)$$

Nesta equação, $\vec{p}$ representa o vetor quantidade de movimento linear, representado da forma:

$$\vec{p} = m \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_B \quad (9)$$

Sendo m a massa do corpo. Considera-se ainda o vetor de velocidade angular $\vec{\omega}_{B/I}$ do corpo em relação ao referencial inercial, dado por:

$$\vec{\omega}_{B/I} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_B \quad (10)$$

A aplicação da regra de transporte para referenciais móveis conduz a:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} + \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{p} \quad (11)$$

Substituindo 9 e 10 em 11, obtém-se a forma matricial expandida:

$$m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_B \times m \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_B = \sum \vec{F}_{\text{ext}B} \quad (12)$$

Expandindo em componentes escalares:

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - rv + qw) &= F_x \\ m(\dot{v} - pw + ru) &= F_y \\ m(\dot{w} - qu + pv) &= F_z \end{aligned} \quad (13)$$

em que F_x , F_y e F_z correspondem às componentes da força resultante no sistema de coordenadas fixo ao corpo.

2.1.4 Equações da Dinâmica de Rotação

A dinâmica de rotação de um corpo rígido é governada pelo análogo rotacional da Segunda Lei de Newton, que relaciona o torque externo resultante à taxa de variação do momento angular:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{ext}} \quad (14)$$

sendo $\vec{l}$ o vetor de momento angular em relação ao centro de massa, definido por:

$$\vec{l} = I\vec{\omega}_{B/I} \quad (15)$$

onde I é o tensor de inércia do corpo, assumido como:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Aplicando a regra de transporte ao momento angular, a equação torna-se:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{l}} + \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{l} \quad (17)$$

Expandindo os termos:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (18)$$

A expansão em componentes escalares fornece:

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})qr - I_{xz}pq &= M_x \\ I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})pr + I_{xz}(p^2 - r^2) &= M_y \\ I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})pq + I_{xz}qr &= M_z \end{aligned} \quad (19)$$

onde M_x , M_y e M_z são as componentes do vetor de momentos externos no referencial do corpo.

2.1.5 Relações Cinemáticas

As relações cinemáticas descrevem a conexão entre as variáveis de movimento, como posição, velocidade e aceleração, sem considerar as forças que causam esse movimento. Em outras palavras, elas descrevem como as coordenadas de um sistema de referência, como a posição e a orientação de um corpo, variam ao longo do tempo. As relações cinemáticas envolvem tanto a translação quanto a rotação.

2.1.5.0.1 Cinemática de Translação

As equações cinemáticas de translação descrevem o movimento do centro de massa no referencial inercial. Elas estabelecem a relação entre a posição e a velocidade do centro de massa ao longo do tempo. A relação entre as velocidades do corpo e as taxas de variação da posição no sistema inercial é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ -\dot{H} \end{bmatrix}_I = R_{I2B}^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_B \quad (20)$$

Expandindo em forma escalar:

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= u \cos \theta \cos \psi + v(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \dot{y}_I &= u \cos \theta \sin \psi + v(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \dot{H} &= u \sin \theta - v \sin \phi \cos \theta - w \cos \phi \cos \theta \end{aligned} \quad (21)$$

2.1.5.0.2 Cinemática de Rotação

As equações cinemáticas de rotação de uma aeronave descrevem o movimento angular da aeronave em torno de seu centro de massa. Elas estabelecem a relação entre os ângulos de rotação e as velocidades angulares. As velocidades angulares, por sua vez, estão diretamente relacionadas às taxas de variação dos ângulos de Euler, conforme a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = R_{I2B}^T \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (22)$$

ou, de forma expandida:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= q \sin \phi \sec \theta + r \cos \phi \sec \theta \end{aligned} \quad (23)$$

2.1.6 Relações de Velocidade

A partir das componentes de velocidade da aeronave, podemos obter equações complementares para a velocidade, ângulo de ataque e ângulo de derrapagem.

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (24)$$

$$\alpha = \arctan \frac{w}{u} \quad (25)$$

$$\beta = \arcsin \frac{v}{V} \quad (26)$$

2.2 FORÇAS E MOMENTOS

A dinâmica de um corpo rígido em voo é governada pelas forças e momentos externos que atuam sobre ele. No contexto da modelagem de aeronaves, as forças que influenciam o movimento são classificadas em três contribuições principais: a força aerodinâmica, a força gravitacional e a força propulsiva.

A força aerodinâmica, resultante da interação da aeronave com o escoamento de ar, é responsável por gerar sustentação, arrasto e forças laterais, essenciais para a manutenção e o controle do voo. A força gravitacional, correspondente ao peso da aeronave, atua verticalmente em direção ao centro da Terra e deve ser devidamente transformada para o sistema de coordenadas fixo no corpo para a correta formulação das equações de movimento. A força propulsiva é gerada pelo sistema de propulsão, como motores ou hélices, e é geralmente modelada como uma força alinhada ao eixo longitudinal da aeronave.

A soma dessas três contribuições determina a força resultante no sistema de coordenadas fixo ao corpo, que pode ser expressa como:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext } B} = \vec{F}_A + \vec{F}_G + \vec{F}_P \quad (27)$$

onde $\vec{F}_A$ representa a força aerodinâmica, $\vec{F}_G$ a força gravitacional e $\vec{F}_P$ a força propulsiva, todas expressas no referencial do corpo.

Os momentos atuando sobre a aeronave também desempenham papel fundamental na definição de sua orientação e estabilidade. No modelo adotado neste trabalho, considera-se que apenas os momentos aerodinâmicos contribuem significativamente para a dinâmica de rotação. Essa aproximação é válida especialmente para aeronaves convencionais em regime de voo onde a contribuição direta de momentos propulsivos ou gravitacionais é desprezível em comparação com os momentos aerodinâmicos.

Assim, o vetor de momentos externos pode ser escrito como:

$$\sum \vec{M}_{\text{ext } B} = \vec{M}_A \quad (28)$$

em que $\vec{M}_A$ é o vetor de momentos aerodinâmicos, definido no sistema aerodinâmico.

2.2.1 Forças e Momentos Aerodinâmicos

As forças e momentos aerodinâmicos representam os efeitos das interações entre a aeronave e o escoamento de ar ao seu redor. Essas forças e momentos são expressos em termos de coeficientes adimensionais, que dependem de variáveis aerodinâmicas como o ângulo de ataque, o ângulo de derrapagem, as deflexões de superfícies de controle e as taxas de rotação angular.

As forças aerodinâmicas atuando sobre a aeronave são o arrasto D , a força lateral Y e a sustentação L . O arrasto é a força que atua na direção oposta ao movimento relativo do veículo no ar, a sustentação é a força perpendicular ao escoamento que sustenta o peso da aeronave, e a força lateral é responsável pelas variações laterais de trajetória. Essas forças, expressas no sistema de coordenadas aerodinâmico, são modeladas como:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \quad Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y \quad L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (29)$$

em que ρ é a densidade do ar, V é a velocidade relativa, S é a área alar, e C_D , C_Y e C_L são os coeficientes adimensionais de arrasto, força lateral e sustentação, respectivamente.

$$C_D = C_{D_0} + \frac{1}{\pi A Re} C_L^2 \quad (30)$$

$$C_Y = C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_\delta} \delta \quad (31)$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_\delta} \delta + \frac{\bar{c}}{2V} (C_{L_\alpha} \dot{\alpha} + C_{L_q} q) \quad (32)$$

Associados a essas forças, surgem também momentos aerodinâmicos em torno dos eixos principais da aeronave. O momento de rolagem l , o momento de arfagem m e o momento de guinada n são modelados pelas seguintes expressões:

$$l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l \quad m = \frac{1}{2}\rho V^2 S c C_m \quad n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n \quad (33)$$

onde b representa a envergadura da aeronave, c a corda média aerodinâmica, e C_l , C_m e C_n são os coeficientes adimensionais associados a cada momento.

$$C_l = C_{l_0} + C_{l_\beta} \beta + C_{l_\delta} \delta + \frac{b}{2V} (C_{l_p} p + C_{l_q} q) \quad (34)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_\delta} \delta + \frac{\bar{c}}{2V} (C_{m_\alpha} \dot{\alpha} + C_{m_q} q) \quad (35)$$

$$C_n = C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_\delta} \delta + \frac{b}{2V} (C_{n_p} p + C_{n_r} r) \quad (36)$$

Após a determinação das forças e momentos aerodinâmicos no sistema de eixos do vento, é necessário transformá-los para o sistema fixo no corpo, que é utilizado nas equações de movimento. A transformação do vetor de forças é realizada através da matriz de rotação R_{A2B} , obtendo-se:

$$\vec{F}_A = R_{A2B} \begin{bmatrix} -D \\ Y \\ -L \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} F_{A_x} \\ F_{A_y} \\ F_{A_z} \end{bmatrix}_B \quad (37)$$

O vetor de momentos aerodinâmicos no sistema aerodinâmico, por sua vez, é dado por:

$$\vec{M}_A = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}_A \quad (38)$$

2.2.2 Força Gravitacional

A força gravitacional atua constantemente sobre a aeronave, independentemente de sua trajetória ou manobra, sendo responsável pela atração em direção ao centro da Terra. No sistema de coordenadas inercial, essa força é orientada ao longo do eixo vertical positivo para baixo. Para a correta formulação das equações de movimento no sistema de coordenadas fixo ao corpo, é necessário realizar a transformação da força gravitacional utilizando a matriz de rotação entre o referencial inercial e o referencial do corpo.

A força gravitacional expressa no sistema do corpo é dada por:

$$\vec{F}_G = R_{I2B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} F_{G_x} \\ F_{G_y} \\ F_{G_z} \end{bmatrix}_B \quad (39)$$

onde m é a massa da aeronave, g é a aceleração da gravidade. Essa conversão é necessária porque a orientação da aeronave em voo altera a direção relativa da força peso em relação aos eixos do corpo.

A projeção da força gravitacional nas direções longitudinal, lateral e vertical do corpo influencia diretamente a evolução da velocidade e da trajetória da aeronave, sendo um fator fundamental nos regimes de subida, descida e voo nivelado.

2.2.3 Força Propulsiva

A força propulsiva é gerada pelos motores da aeronave e tem como principal função fornecer o empuxo necessário para vencer as resistências aerodinâmicas.

Neste modelo, assume-se que a força propulsiva atua ao longo do eixo longitudinal da aeronave, isto é, alinhada com o eixo x_B do sistema fixo ao corpo. Desprezam-se efeitos secundários como desalinhamentos de tração ou torques propulsivos.

A força propulsiva é então expressa como:

$$\vec{F}_P = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B \quad (40)$$

onde T representa a magnitude da tração exercida pelo sistema de propulsão. Em casos mais complexos, poderiam ser considerados vetores de tração inclinados ou forças de múltiplos motores, mas tais efeitos estão além do escopo deste trabalho.

A força propulsiva atua diretamente na equação de movimento ao influenciar a aceleração longitudinal da aeronave, sendo também um dos parâmetros controláveis no gerenciamento de energia e desempenho durante o voo. Para o presente trabalho será considerado

$$T = T_i T_{max} \quad (41)$$

Sendo T_i o comando do motor e T_{max} a tração máxima do motor.

2.3 EQUAÇÕES NÃO LINEARES DA DINÂMICA DA AERONAVE

A dinâmica completa de uma aeronave em seis graus de liberdade pode ser descrita por um sistema de equações diferenciais não lineares que governam tanto os movimentos de translação quanto os de rotação, além das variações dos ângulos aerodinâmicos e da altura. Abaixo, são apresentadas as expressões utilizadas neste trabalho para o cálculo das derivadas das principais variáveis de estado:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}}{V} \\
 \dot{p} &= \frac{M_x - (I_{yy} - I_{zz})qr}{I_{xx}} \\
 \dot{q} &= \frac{M_y - (I_{zz} - I_{xx})pr}{I_{yy}} \\
 \dot{r} &= \frac{M_z - (I_{xx} - I_{yy})pq}{I_{zz}} \\
 \dot{\phi} &= p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\
 \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\
 \dot{\psi} &= \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta} \\
 \dot{h} &= u \sin \theta - v \sin \phi \cos \theta - w \cos \phi \cos \theta \\
 \dot{\alpha} &= \frac{u\dot{w} - w\dot{u}}{u^2 + w^2} \\
 \dot{\beta} &= \frac{V\dot{v} - v\dot{V}}{V\sqrt{u^2 + w^2}}
 \end{aligned} \tag{42}$$

Essas equações foram implementadas no ambiente de simulação para descrever a evolução temporal dos estados da aeronave. As variáveis u , v e w representam as velocidades nos eixos do corpo, enquanto p , q e r são as velocidades angulares. Os ângulos ϕ , θ e ψ correspondem aos ângulos de Euler, e α e β são os ângulos aerodinâmicos de ataque e de derrapagem lateral.

As derivadas $\dot{u}$, $\dot{v}$ e $\dot{w}$, bem como os momentos M_x , M_y e M_z , são calculados com base nas forças e momentos atuantes, conforme descrito nas seções anteriores. O uso dessas expressões permite uma análise da resposta dinâmica da aeronave, tanto para o modelo com asa rígida quanto para o modelo com asa flexionada.

2.4 LINEARIZAÇÃO

A linearização de sistemas dinâmicos é uma técnica fundamental na análise e controle de sistemas não lineares. A linearização permite aproximar um sistema não linear em torno de um ponto de operação específico, resultando em um modelo linear que é mais fácil de analisar e controlar.

A linearização é o processo de aproximar um sistema não linear por um sistema linear em torno de um ponto de operação. Consideremos um sistema dinâmico não linear descrito pelas equações de estado:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{43}$$

Onde x é o vetor de estados do sistema, u é o vetor de entradas de controle e $f(x, u)$ é uma função não linear que descreve a dinâmica do sistema.

Para linearizar o sistema, escolhemos um ponto de operação (x_0, u_0) , onde x_0 é o estado de equilíbrio e u_0 é a entrada correspondente. A aproximação linear do sistema dinâmico é obtida utilizando a expansão em série de Taylor da função $f(x, u)$ em torno do ponto de operação (x_0, u_0) . A expansão de Taylor até a primeira ordem é dada por:

$$f(x, u) \approx f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} (u - u_0) \quad (44)$$

Como x_0 é um ponto de equilíbrio, temos $f(x_0, u_0) = 0$. Portanto, a expressão linearizada do sistema é:

$$\dot{x} \approx A(x - x_0) + B(u - u_0) \quad (45)$$

onde:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \quad (46)$$

é a matriz Jacobiana da função f em relação ao vetor de estados x , e

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} \quad (47)$$

é a matriz Jacobiana da função f em relação ao vetor de entradas u .

Para simplificação, definimos $\tilde{x} = x - x_0$ e $\tilde{u} = u - u_0$, resultando na forma linearizada:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (48)$$

Ao omitir as notações de til, obtemos a forma padrão do sistema linearizado:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (49)$$

2.5 MODOS DINÂMICOS E ESTABILIDADE

A dinâmica de voo de uma aeronave apresenta características fundamentais que determinam os requisitos essenciais para o projeto de sistemas de controle. Essas características são descritas por modos dinâmicos distintos, que representam a resposta natural da aeronave a perturbações e comandos de controle (Stevens; Lewis; Johnson, 2015). Cada um desses modos apresenta características específicas de frequência natural, amortecimento e sensibilidade aos parâmetros da aeronave, como configuração aerodinâmica, distribuição de massa e condições de voo (Etkin; Reid, 1996).

Após a linearização em torno de um ponto de operação, a dinâmica da aeronave é representada no domínio do espaço de estados pela equação 49. Para a análise de estabilidade natural, considera-se o sistema não controlado, ou seja, sem entradas externas ($u(t) = 0$), resultando na equação homogênea

$$\dot{x}(t) = Ax \quad (50)$$

A solução geral deste sistema é obtida a partir dos autovalores e autovetores da matriz A . O problema de autovalores é formulado como

$$Av = \lambda v \quad (51)$$

em que λ representa um autovalor e v o autovetor associado. A determinação dos autovalores é feita pela solução da equação característica

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (52)$$

sendo I a matriz identidade de ordem apropriada. Os autovalores encontrados fornecem informações essenciais sobre a resposta do sistema: a parte real de λ indica a estabilidade do modo (negativa para estabilidade e positiva para instabilidade), enquanto a parte imaginária representa a frequência de oscilações em modos complexos conjugados.

Para cada modo oscilatório, é possível determinar a frequência natural ω_n e o fator de amortecimento ζ pelas expressões

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad (53)$$

$$\zeta = -\frac{\sigma}{\omega_n} \quad (54)$$

onde σ é a parte real e ω é a parte imaginária do autovalor. A partir dos autovalores, as características dos modos dinâmicos de um sistema podem ser interpretadas com base na parte real e imaginária desses autovalores. A parte real, denotada por σ , está associada à taxa de amortecimento do modo. Quando σ é negativo, o sistema apresenta amortecimento, ou seja, as oscilações diminuem com o tempo, e o sistema eventualmente retorna ao equilíbrio. Quanto mais negativa for a parte real, maior será a taxa de amortecimento, e o sistema se estabilizará mais rapidamente. Se $\sigma = 0$, o sistema exibe um amortecimento crítico, sem redução ou crescimento das oscilações. Quando σ é positivo, o sistema é instável, e as oscilações aumentam exponencialmente, caracterizando um comportamento de instabilidade (Ogata, 2010).

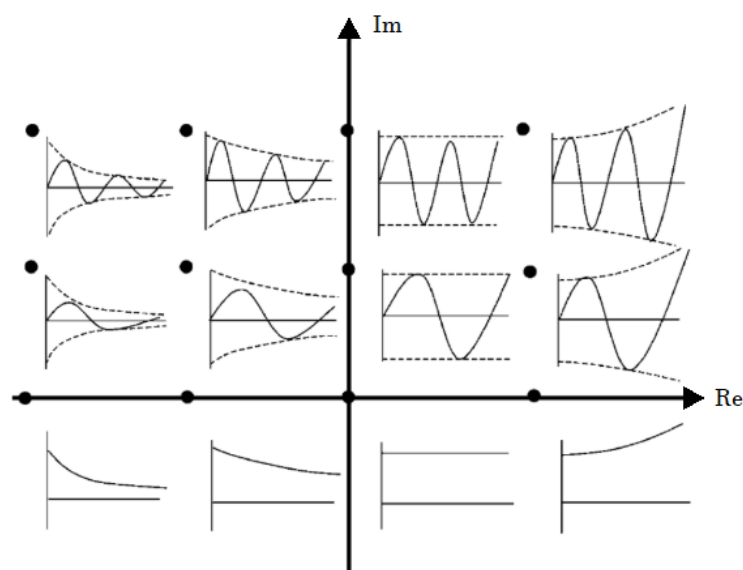
A parte imaginária do autovalor, ω , está associada à frequência natural do modo de oscilação. Esta frequência determina a quantidade de ciclos por unidade de tempo das oscilações do sistema. Em sistemas oscilatórios, a parte imaginária define a velocidade das oscilações, de modo que quanto maior a parte imaginária, maior será a frequência natural e, conseqüentemente, mais rápido será o movimento oscilatório. Para sistemas com amortecimento, em que $\sigma \neq 0$, as oscilações têm caráter senoidal, e a frequência ω controla o intervalo de tempo entre os picos das oscilações (Ogata, 2010).

O fator de amortecimento, denotado por ζ , indica a rapidez com que as oscilações do sistema diminuem ao longo do tempo. Quando ζ é inferior a 1, o sistema é subamortecido, ou seja, as oscilações não desaparecem imediatamente, mas diminuem de forma lenta antes de atingir o equilíbrio. Se $\zeta = 1$,

o sistema está criticamente amortecido, o que significa que as oscilações são eliminadas de forma eficiente, sem ultrapassar o ponto de equilíbrio. No caso em que $\zeta > 1$, o sistema é superamortecido, retornando ao equilíbrio de forma lenta e sem oscilar (Ogata, 2010).

A localização dos autovalores no plano complexo tem implicações diretas sobre o comportamento do sistema, conforme exemplificado na Figura 4. Quando os autovalores possuem uma parte real negativa ($\sigma < 0$), o sistema é estável, e as oscilações vão se atenuando ao longo do tempo. Para autovalores complexos conjugados, o sistema apresenta oscilações amortecidas, com a frequência de oscilação dada pela parte imaginária e a taxa de amortecimento determinada pela parte real. A magnitude da parte real indica a velocidade com que as oscilações desaparecem (Stengel, 1994).

Figura 4 – Representação de autovalores no plano complexo



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Se, por outro lado, a parte real dos autovalores for positiva ($\sigma > 0$), o sistema é instável. Nesse caso, as oscilações se amplificam, e o sistema se afasta do equilíbrio. A parte imaginária dos autovalores continua determinando a frequência de oscilação, mas agora as oscilações aumentam em vez de se dissiparem. Quando os autovalores são reais e não possuem componente imaginária, o sistema apresenta um comportamento não oscilatório, com as soluções do sistema descritas por funções exponenciais de crescimento ou decaimento. Se o autovalor for negativo, o sistema se estabiliza com o tempo, mas sem oscilações. Se o autovalor for positivo, o sistema se torna instável e suas variáveis aumentam exponencialmente (Stengel, 1994).

2.5.1 Modos Característicos

Os modos da dinâmica de uma aeronave são divididos em modos longitudinais e modos laterais-direcionais. Os modos longitudinais envolvem o deslocamento no plano vertical e a rotação sobre o eixo transversal da aeronave. Um dos principais modos longitudinais é o modo de período curto, caracterizado por oscilações rápidas no ângulo de ataque e no ângulo de inclinação da aeronave, sem variações significativas na velocidade ou na altitude. Esse modo é dominado pelas forças de sustentação

que reagem rapidamente às mudanças de atitude, sendo fortemente influenciado pela configuração da empenagem horizontal e pela posição do centro de gravidade (Cook, 2012).

Outro modo longitudinal importante é o fugóide, que se manifesta como oscilações de baixa frequência envolvendo a troca de energia cinética e potencial, refletindo-se em variações simultâneas de velocidade e altitude. A dinâmica do fugóide decorre da interação entre sustentação, peso, arrasto e tração, e tende a apresentar pouco amortecimento natural, embora em aeronaves bem projetadas permaneça estável.

A dinâmica lateral-direcional envolve movimentos de rolamento, guinada e derrapagem. O modo de rolagem caracteriza-se por uma rápida dissipação do ângulo de inclinação em resposta a perturbações laterais, associado principalmente à eficácia aerodinâmica das superfícies de controle laterais. Já o modo espiral consiste em uma tendência da aeronave a desviar progressivamente da sua trajetória inicial devido à interação sutil entre estabilidade lateral e estabilidade direcional. Esse modo pode ser estável ou instável, dependendo da posição do centro de gravidade e das características da empenagem vertical.

O modo de *dutch roll*, por sua vez, é uma oscilação acoplada entre rolamento e guinada, manifestando-se em frequências intermediárias e apresentando graus variados de amortecimento. Essa oscilação é causada pela interação entre a estabilidade direcional proporcionada pela empenagem vertical e a estabilidade lateral originada pela configuração das asas, sendo influenciada também pela razão entre os momentos de guinada e rolamento gerados pela aeronave.

A interpretação dos modos dinâmicos também requer a distinção entre estabilidade estática e estabilidade dinâmica. A estabilidade estática refere-se à tendência inicial da aeronave em resistir a uma perturbação e retornar à sua condição de equilíbrio. Em contraste, a estabilidade dinâmica está relacionada ao comportamento do sistema ao longo do tempo, ou seja, à capacidade de a resposta evoluir de maneira amortecida e convergir para o equilíbrio ou divergir, dependendo das características dos modos próprios.

No caso dos modos longitudinais, a estabilidade estática está associada à variação da força de sustentação em resposta a alterações no ângulo de ataque, enquanto a estabilidade dinâmica depende da interação entre a taxa de variação do ângulo de ataque e a força gerada pela empenagem horizontal. Para os modos laterais, a estabilidade estática lateral está ligada à tendência da aeronave de corrigir um deslizamento lateral através de forças de restabelecimento geradas pela asa e pela empenagem vertical, enquanto a estabilidade dinâmica manifesta-se no amortecimento ou amplificação das oscilações de rolamento e guinada (Nelson, 1998).

O fenômeno de acoplamento entre movimentos laterais é uma característica intrínseca à dinâmica de aeronaves. Devido à forma tridimensional do corpo e à interação entre forças aerodinâmicas em diferentes eixos, os movimentos de rolamento, guinada e derrapagem não são independentes. O modo de *dutch roll* exemplifica esse acoplamento: uma perturbação em rolamento gera uma resposta em guinada devido à estabilidade direcional, e a guinada resultante retroage sobre o rolamento, fechando o ciclo oscilatório. A intensidade desse acoplamento e a natureza do amortecimento dependem de parâmetros geométricos como a relação entre área vertical e área de asa, além da posição do centro de massa em relação ao centro aerodinâmico (McLean, 1990).

2.6 CRITÉRIOS DE QUALIDADE DE VOO SEGUNDO O MIL-F-8785C

O documento *MIL-F-8785C* (United States of America, 1980) é uma especificação militar norte-americana que estabelece os critérios de desempenho e controle para aeronaves militares tripuladas. Dentre os aspectos abordados, destaca-se a definição dos níveis de qualidade de voo com base em parâmetros objetivos dos modos dinâmicos da aeronave. Os critérios são organizados conforme a classe da aeronave, fase do voo e nível de qualidade desejado.

Para este trabalho, adota-se a classificação de uma aeronave Classe 1 – aeronaves pequenas, de baixa manobrabilidade operando na Fase B de voo, que corresponde a manobras e aproximação para pouso. O objetivo é atender ao Nível 1 de qualidade, correspondente ao melhor nível de desempenho, em que a aeronave responde de forma precisa e previsível às entradas do piloto, sem necessidade de compensações excessivas.

A seguir, na Tabela 1, apresenta-se um resumo dos critérios exigidos para os principais modos dinâmicos longitudinais e laterais:

Tabela 1 – Critérios de qualidade de voo (Classe 1, Fase B, Nível 1)

Modo	Métrica	Critério para Nível 1
Fugoide	Razão de amortecimento (ζ)	$\zeta \geq 0,04$
Short-Period	Frequência natural (ω_n) e relação n/α	O ponto ($\omega_n, n/\alpha$) deve situar-se no intervalo da curva de nível 1 (Figura 5)
Dutch Roll	Amortecimento e número de ciclos	A amplitude da oscilação deve reduzir-se a 1/10 em aproximadamente 7 ciclos ou menos
Rolagem	Tempo de meia amplitude ($T_{1/2}$)	$T_{1/2} \leq 1,0$ s
Espiral	Tempo de duplicação da amplitude	≥ 20 s

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A razão n/α , presente nos critérios do modo *short-period* do documento MIL-F-8785C, representa uma medida da resposta do fator de carga n em função do ângulo de ataque α . Ela é uma métrica essencial para avaliar a sensibilidade da aeronave a comandos de arfagem e o nível de esforço necessário do piloto.

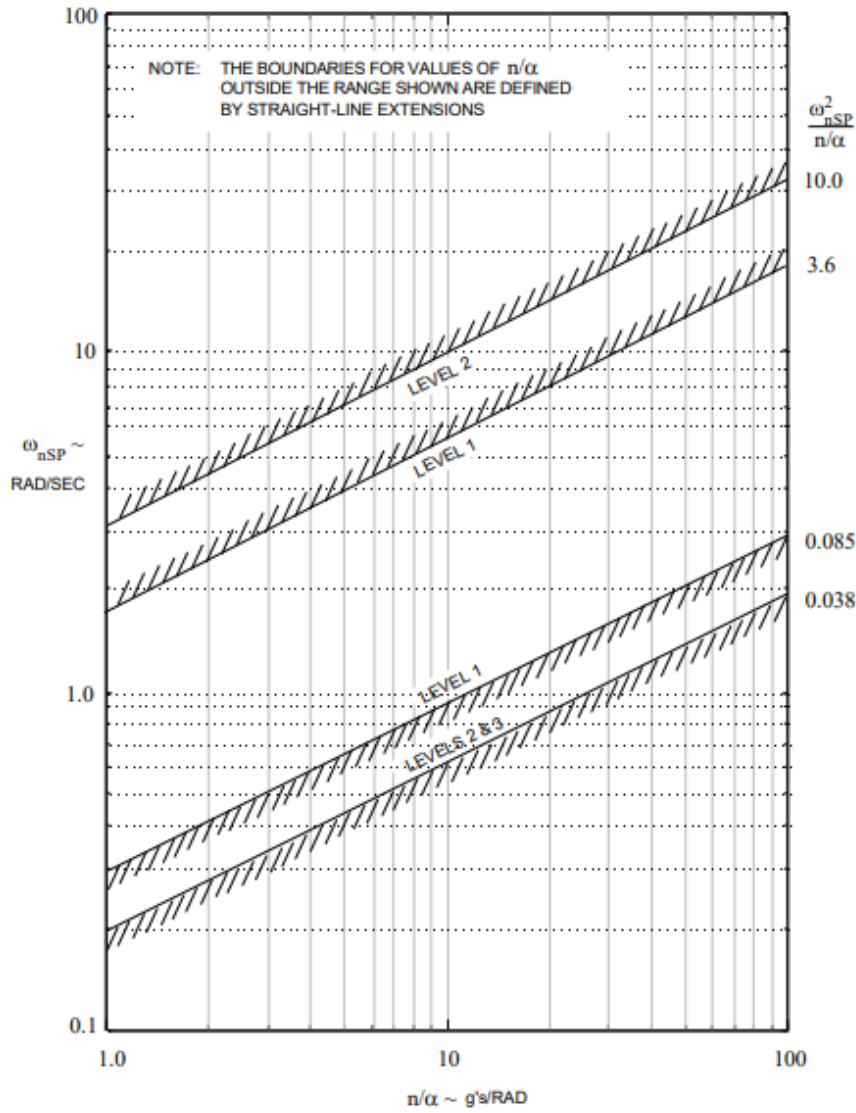
A aplicação desses critérios permite verificar se a aeronave atende aos requisitos de controlabilidade e estabilidade esperados em voo, além de embasar a necessidade de ajustes no projeto do sistema de controle.

2.7 CONTROLE LQR

O controle LQR (*Linear Quadratic Regulator*), é uma técnica que visa projetar leis de realimentação de estado capazes de otimizar simultaneamente o desempenho do sistema e o esforço aplicado pelos atuadores. A essência dessa abordagem está em minimizar uma função de custo definida a partir de combinações quadráticas entre os estados do sistema e os sinais de controle (Ogata, 2011).

O objetivo do controle LQR é determinar uma lei de controle do tipo

Figura 5 – Requisitos de frequência para período curto



Fonte: United States of America (1980).

$$u(t) = -Kx(t) \quad (55)$$

que minimize uma função de custo do tipo

$$J = \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (56)$$

A função de custo é composta por dois termos. O primeiro termo penaliza os desvios do estado em relação ao ponto de equilíbrio, atribuindo pesos através da matriz simétrica positiva definida ou positiva semi-definida Q . O segundo termo penaliza o esforço de controle, atribuindo pesos por meio da matriz simétrica e definida positiva R . Essa formulação representa um compromisso entre desempenho e economia de energia de controle.

Para encontrar o ganho ótimo K , é necessário resolver uma equação matricial conhecida como equação de Riccati algébrica. Essa equação é uma expressão não linear em uma matriz simétrica desconhecida P , cuja solução permite calcular o ganho por meio da expressão

$$K = R^{-1}B^T P \quad (57)$$

A matriz P é a solução da equação matricial

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (58)$$

Essa equação equilibra o comportamento dinâmico do sistema com os pesos de penalização definidos pelo projetista. O termo quadrático $-PBR^{-1}B^T P$ é responsável por introduzir a natureza não linear da equação e reflete a penalização sobre o esforço de controle. A existência de uma solução simétrica e definida positiva para essa equação depende da controlabilidade do par (A, B) e da escolha adequada das matrizes Q e R . Quando essa solução existe, ela garante que o sistema em malha fechada, com a realimentação (55), será estável.

2.7.1 Regra de Bryson para Escolha das Matrizes de Peso

O projeto de controladores do tipo LQR envolve a definição de duas matrizes de peso: a matriz Q , associada aos estados do sistema, e a matriz R , associada às entradas de controle. A escolha adequada desses pesos é essencial para o desempenho do sistema de controle, pois influencia diretamente no compromisso entre desempenho dinâmico e esforço de controle. Dentre os métodos empíricos mais utilizados para essa escolha, destaca-se a Regra de Bryson.

A Regra de Bryson estabelece uma forma sistemática e prática de dimensionar os elementos das matrizes Q e R com base nos valores máximos aceitáveis para os estados e para os sinais de controle. O princípio fundamental é penalizar mais fortemente aqueles estados e comandos que têm limites mais restritivos, normalizando suas magnitudes de modo que cada termo do custo seja adimensional e comparável.

Segundo essa abordagem, os pesos são definidos da seguinte maneira:

$$Q_{ii} = \frac{1}{x_{i,\max}^2}, \quad R_{jj} = \frac{1}{u_{j,\max}^2} \quad (59)$$

onde $x_{i,\max}$ representa o valor máximo aceitável para o estado x_i , e $u_{j,\max}$ representa o valor máximo aceitável para o comando u_j . As matrizes Q e R são, portanto, inicialmente construídas como matrizes diagonais, cujos elementos refletem o grau de importância e as limitações físicas de cada variável.

A vantagem principal da Regra de Bryson é sua simplicidade e aplicabilidade prática, especialmente em sistemas com grande número de estados, onde uma escolha intuitiva dos pesos pode ser inviável. Apesar de não fornecer uma solução ótima no sentido global, a regra oferece uma boa estimativa inicial, podendo, posteriormente, ser ajustada por meio de técnicas iterativas ou de otimização empírica.

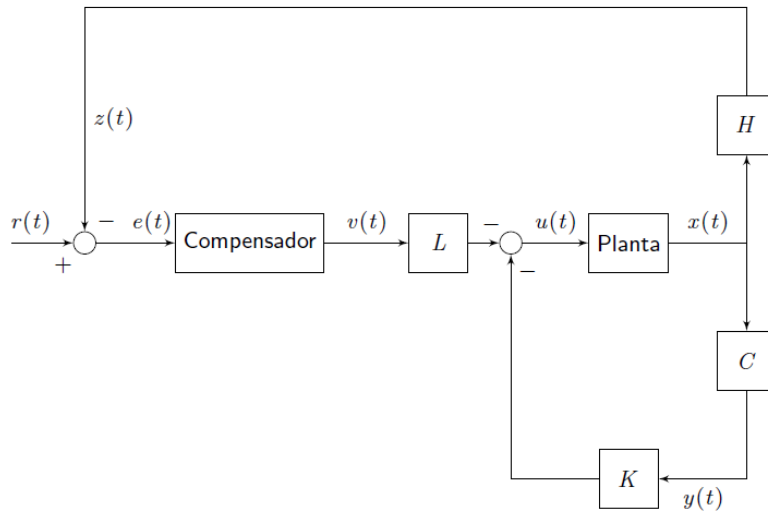
No presente trabalho, essa abordagem foi utilizada para a definição dos pesos do controlador LQR. Os valores máximos admissíveis foram definidos com base nos limites operacionais da aeronave, de forma a garantir que os estados do sistema permanecessem dentro de faixas seguras durante a atuação do controlador.

2.8 CONTROLE LQ COM RASTREIO DE REFERENCIA VIA COMPENSADOR PI

O rastreo de referência é uma exigência fundamental em sistemas de controle aplicados à aviação, nos quais se deseja que variáveis como velocidade e altitude acompanhem sinais de referência externos mesmo na presença de perturbações. Embora o controle ótimo linear-quadrático tradicional permita estabilizar a planta em torno de um ponto de equilíbrio, ele não assegura rastreamento assintótico de sinais constantes. Para contornar essa limitação, utiliza-se uma modificação estrutural baseada em um compensador com ação Proporcional-Integral (PI), cuja função é garantir rejeição de erro permanente no rastreamento de saídas específicas (Stevens; Lewis; Johnson, 2015).

A Figura 6 representa a arquitetura de controle adotada. A referência $r(t)$ é comparada com a saída de desempenho $z(t)$, resultando no erro de rastreamento $e(t)$, que é processado pelo compensador. A saída do compensador $v(t)$, composta por termos proporcionais e integrais do erro, é aplicada à planta juntamente com a realimentação direta das saídas medidas $y(t)$.

Figura 6 – Diagrama de blocos da estrutura de rastreamento com compensador PI



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A planta linearizada é descrita por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

em que $x(t)$ representa o vetor de estados e $u(t)$ o vetor de entradas. A saída medida da planta é dada por $y(t) = Cx(t)$, enquanto a saída de desempenho que se deseja rastrear é expressa como $z(t) = Hx(t)$.

A ação do compensador PI é formulada com base no erro de rastreamento $e(t) = r(t) - Hx(t)$. Esse erro é integrado por um estado auxiliar $w(t)$, cuja dinâmica é dada por:

$$\dot{w}(t) = G(r(t) - Hx(t)) \quad (60)$$

Para o caso de rastreamento de uma única variável de desempenho, a matriz G é escalar e adotada

como $G = 1$. A saída do compensador é um vetor com duas componentes, definido por:

$$v(t) = Dw(t) + J(r(t) - Hx(t)) \quad (61)$$

Em um compensador PI, são utilizadas as seguintes escolhas:

$$F = 0, \quad G = 1, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, a saída $v(t)$ é um vetor de duas dimensões, no qual o primeiro elemento corresponde à contribuição proporcional do erro de rastreamento e o segundo à ação integral acumulada no tempo. O controle aplicado à planta é composto pela soma ponderada das saídas medidas e da saída do compensador:

$$u(t) = -Ky(t) - Lv(t) \quad (62)$$

As matrizes K e L definem os ganhos de realimentação do sistema. O vetor total de realimentação pode ser reorganizado como $K_a = [K \ L]$, aplicado sobre uma saída aumentada $y_a(t)$ que agrupa $y(t)$ e $v(t)$.

O sistema completo é então descrito por um conjunto aumentado de equações de estado. Define-se o vetor aumentado $x_a(t) = [x(t) \ w(t)]^T$, e a dinâmica torna-se:

$$\dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) + G_a r(t) \quad (63)$$

com:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -GH & F \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_a = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}$$

A saída aumentada, utilizada na realimentação do controlador, é:

$$y_a(t) = C_a x_a(t) + F_a r(t) \quad (64)$$

com:

$$C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \\ -JH & D \end{bmatrix}, \quad F_a = \begin{bmatrix} 0 \\ J \end{bmatrix}$$

A saída de desempenho $z(t)$ é definida por:

$$z(t) = H_a x_a(t), \quad H_a = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Substituindo a lei de controle $u(t) = -K_a y_a(t)$, a dinâmica do sistema em malha fechada resulta em:

$$\dot{x}_a(t) = (A_a - B_a K_a C_a) x_a(t) + (G_a - B_a K_a F_a) r(t) \quad (66)$$

A função de custo associada ao projeto ótimo do controlador é composta por termos de rastreamento,

esforço de controle e erro de regime permanente. A função objetivo a ser minimizada é:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [z(t)^\top Q z(t) + u(t)^\top R u(t)] dt + \frac{1}{2} \bar{e}^\top V \bar{e} \quad (67)$$

A matriz $Q = H_a^\top H_a$ penaliza o erro de rastreamento durante o regime transitório, enquanto R penaliza o esforço de controle. O termo $\bar{e} = r_0 - z(\infty)$ representa o erro em regime permanente, calculado como:

$$\bar{e} = (I + H_a A_c^{-1} B_c) r_0 \quad (68)$$

em que $A_c = A_a - B_a K_a C_a$ e $B_c = G_a - B_a K_a F_a$. A penalização do erro de regime permanente é feita pela matriz V , que permite ajustar o peso dado à precisão do rastreamento final.

A matriz K_a é otimizada numericamente para minimizar J , utilizando a equação de Lyapunov contínua para avaliar a contribuição do regime transitório:

$$A_c^\top P + P A_c + Q + C_a^\top K_a^\top R K_a C_a = 0 \quad (69)$$

A estrutura resultante permite projetar um controlador com rastreamento robusto e estabilidade garantida. O uso do integrador do erro, aliado à penalização explícita do erro estacionário, assegura desempenho satisfatório tanto no regime transitório quanto no regime permanente, mesmo em presença de perturbações constantes.

2.9 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

O estudo da controlabilidade e da observabilidade de sistemas dinâmicos é fundamental para o projeto de controladores e observadores no domínio do espaço de estados. Esses conceitos estabelecem as condições sob as quais é possível manipular e reconstruir os estados internos de um sistema a partir de entradas e saídas, respectivamente (Ogata, 2011).

2.9.1 Controlabilidade

Um sistema linear e invariante no tempo representado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

é dito *completamente controlável* se, para qualquer par de estados $x(t_0)$ e $x(t_1)$, existe uma entrada $u(t)$ que transfere o sistema de $x(t_0)$ para $x(t_1)$ em um intervalo finito de tempo $[t_0, t_1]$. A verificação da controlabilidade pode ser realizada por meio da matriz de controlabilidade, dada por:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (70)$$

onde n é a ordem do sistema. O sistema é completamente controlável se e somente se $\mathcal{C}$ tiver posto completo, ou seja, $\text{rank}(\mathcal{C}) = n$.

O conceito de posto (ou *rank*) de uma matriz está intimamente relacionado à independência linear de suas colunas ou linhas. Formalmente, o posto de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é definido como o número

máximo de colunas (ou linhas) linearmente independentes, e corresponde também à dimensão do subespaço gerado por essas colunas, conhecido como espaço coluna da matriz. Esse número revela a quantidade de informações únicas presentes na matriz, sendo um indicador fundamental de sua estrutura e das possíveis soluções de sistemas lineares associados.

A controlabilidade garante que todos os modos dinâmicos do sistema possam ser influenciados pelas entradas disponíveis.

2.9.2 Observabilidade

Analogamente, um sistema é dito completamente observável se, a partir do conhecimento da saída $y(t)$ e da entrada $u(t)$ ao longo de um intervalo de tempo, é possível determinar unicamente o estado inicial $x(0)$. Para o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

a matriz de observabilidade é definida por:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (71)$$

e o sistema é completamente observável se e somente se $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.

A observabilidade é um requisito para o projeto de observadores de estado, como o observador de Luenberger, que estimam os estados não mensuráveis diretamente a partir das saídas e entradas do sistema. Neste trabalho, o sistema será considerado completamente observável.

3 OBJETO DE ESTUDO

Neste trabalho, os sistemas de controle serão desenvolvidos utilizando como base o modelo do veículo aéreo não tripulado EOLO. Esta aeronave é adotada como plataforma de pesquisa para testes aeroelásticos e identificação dinâmica, possuindo características adequadas para o estudo de efeitos estruturais flexíveis na dinâmica de voo. Este capítulo visa à apresentação das características dessa aeronave.

3.1 CARACTERÍSTICAS GERAIS

O EOLO é um VANT construído majoritariamente em materiais compósitos, com fuselagem em fibra de carbono e uma asa flexível, também em material composto, projetada para apresentar moderada flexibilidade. Essa flexibilidade permite observar variações nos coeficientes aerodinâmicos devido à deformação estrutural sob cargas aerodinâmicas.

As propriedades geométricas e inerciais do EOLO estão reunidas na Tabela 2. Elas serão utilizadas na modelagem do sistema.

Tabela 2 – Propriedades de comprimento e massa

Parâmetros	Simbolo	Valor
Área da asa	S	0,846 m^2
Corda média aerodinâmica da asa	$\bar{c}$	0,231 m
Envergadura	b	4,00 m
Alongamento	AR	18,9
Comprimento da fuselagem		1,89 m
Massa da asa	m_w	2,00 kg
Massa total	m_t	8,87 kg
Momento de inercia em X	I_{xx}	2,53 $kg\ m^2$
Momento de inercia em Y	I_{yy}	1,60 $kg\ m^2$
Momento de inercia em Z	I_{zz}	3,96 $kg\ m^2$

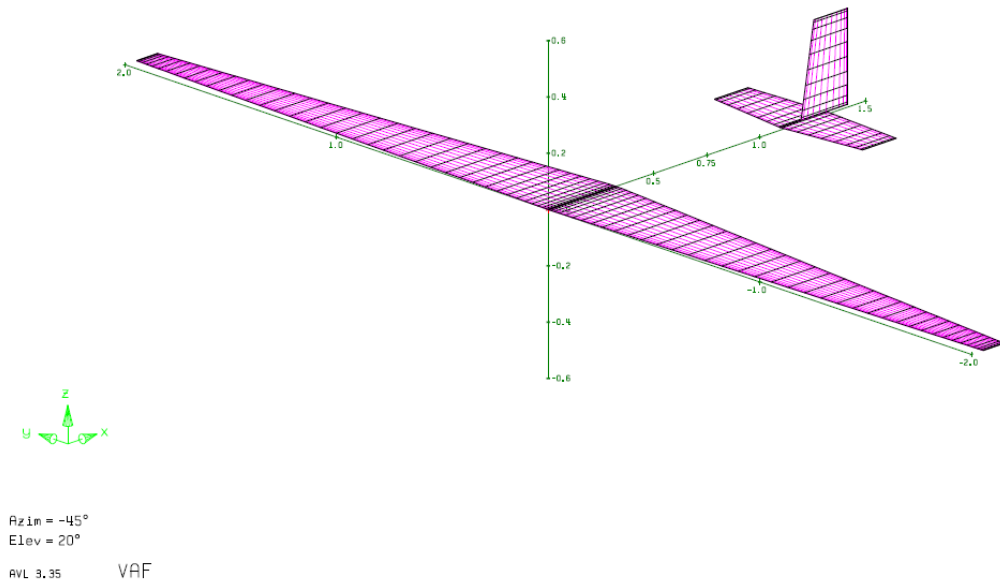
Fonte: Zuñiga (2019).

3.2 CARACTERÍSTICAS AERODINÂMICAS

As características aerodinâmicas do EOLO foram obtidas por meio do software AVL, com base no método Vortex Lattice (Zúñiga, 2019). O modelo foi simulado considerando a asa como um corpo rígido, representado na Figura 7, e posteriormente, considerando a deformação estática da asa sob a ação de um fator de carga unitário, representada na Figura 8.

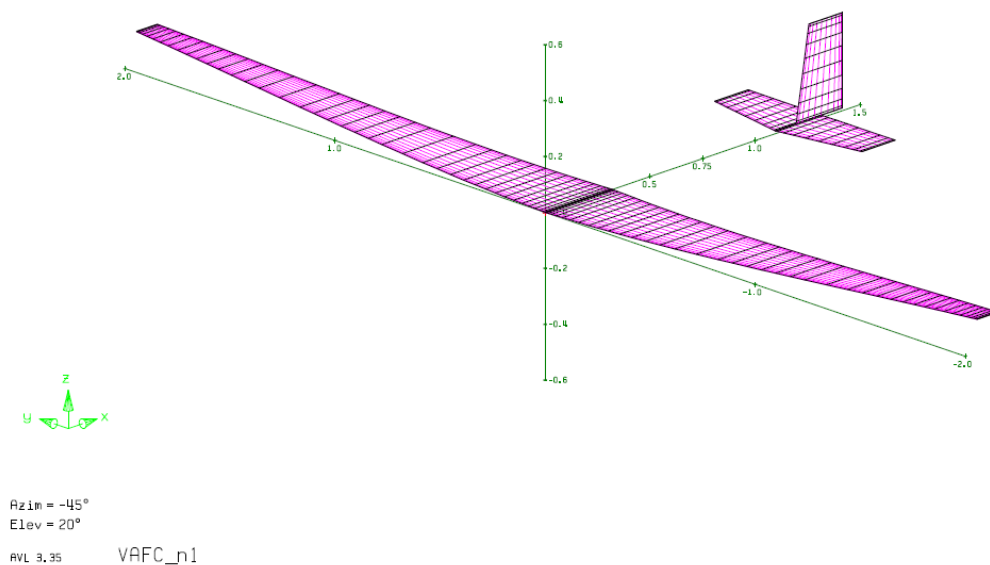
As derivadas aerodinâmicas associadas à estabilidade longitudinal e latero-direcional encontram-se nas Tabelas 3 e 4, e servem de base para o desenvolvimento dos modelos dinâmicos e dos controladores. Neste trabalho, serão consideradas as configurações de asa rígida e flexionada para o projeto dos controladores, de modo a comparar a influência da flexão no controlador.

Figura 7 – Configuração de asa rígida



Fonte: Zuñiga, 2019.

Figura 8 – Configuração de asa flexionada



Fonte: Zuñiga, 2019.

3.3 SENSORES E ATUADORES

Para a obtenção dos estados dinâmicos do EOLO, foram embarcados sensores específicos capazes de medir grandezas fundamentais à caracterização do voo da aeronave. Dentre esses sensores, destacam-se a unidade de navegação inercial e os sensores aerodinâmicos analógicos.

A unidade inercial é responsável pela medição das acelerações específicas e das velocidades angulares nos três eixos do corpo da aeronave. Com essas informações, é possível obter as variáveis de estado, como a orientação, a velocidade linear e a posição, utilizando métodos baseados nas equações cinemáticas e dinâmicas do corpo rígido. Essa estimativa é essencial para a análise do comportamento

Tabela 3 – Derivadas longitudinais

Coeficiente	Asa rígida	Asa flexionada
C_{L_0}	0,376	0,374
C_{L_α}	6,34	6,39
C_{L_q}	11,70	11,61
$C_{L_{\dot{\alpha}}}$	-	-
$C_{L_{\alpha e}}$	0,008	0,008
C_{D_0}	0,017	0,013
C_{m_0}	-0,0037	-0,0039
C_{m_α}	-1,55	-1,68
C_{m_q}	-26,41	-27,19
$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	-	-
$C_{m_{\delta_e}}$	-0,036	-0,036
e	1,035	0,9328

Fonte: Zuñiga (2019).

dinâmico e para a implementação de leis de controle.

Adicionalmente, a aeronave é equipada com sensores capazes de medir os ângulos aerodinâmicos de ataque (α) e de derivada (β). Esses ângulos são obtidos por meio de sensores analógicos, cuja função é fornecer informações sobre a orientação do vetor de velocidade do ar em relação ao corpo da aeronave.

No que se refere aos atuadores, EOLO utiliza sistemas eletromecânicos do tipo servomecanismo para acionar as superfícies de controle, como profundor, ailerons e leme. Esses atuadores são responsáveis por aplicar os comandos gerados pelo sistema de controle, possibilitando a execução de manobras e a estabilização da aeronave durante o voo.

Tabela 4 – Derivadas latero-direcionais

Coeficiente	Asa rígida	Asa flexionada
C_{Y_0}	0	0
C_{Y_β}	-0,250	-0,270
C_{Y_p}	0,0330	-0,1132
C_{Y_r}	0,1545	0,1777
$C_{Y_{\delta_a}}$	0,00022	-0,00115
$C_{Y_{\delta_r}}$	-0,00276	-0,002280
C_{l_0}	0	0
C_{l_β}	-0,007	-0,079
C_{l_p}	-0,640	-0,650
C_{l_r}	0,092	0,0963
$C_{l_{\delta_a}}$	-0,00550	-0,00561
$C_{l_{\delta_r}}$	-0,000096	-0,000097
C_{n_0}	0	0
C_{n_β}	0,071	0,067
C_{n_p}	-0,042	-0,043
C_{n_r}	-0,047	-0,048
$C_{n_{\delta_a}}$	-0,00013	-0,000125
$C_{n_{\delta_r}}$	0,00084	0,000859

Fonte: Zuñiga (2019).

4 SISTEMAS DE CONTROLE PARA O MODELO DE ASA RÍGIDA

Neste capítulo, é apresentado o desenvolvimento dos sistemas de controle aplicados ao modelo de asa rígida do EOLO. O objetivo principal é implementar sistemas de aumento de estabilidade que contribuam para melhorar a resposta dinâmica da aeronave e garantir um comportamento mais estável em voo. Adicionalmente, também é proposto um piloto automático de velocidade e altura.

Para o desenvolvimento dos controladores, foi necessário obter uma representação linearizada da dinâmica da aeronave em torno de um ponto de equilíbrio correspondente ao voo reto e nivelado. Esta modelagem permite aplicar técnicas clássicas de realimentação de estados no espaço de estados.

Inicialmente, foi desenvolvido o sistema de aumento de estabilidade no eixo longitudinal, com foco nos estados α e q para melhorar a resposta dinâmica do modo de período curto. Em seguida, foi projetado um sistema de aumento de estabilidade para o eixo latero-direcional, considerando os estados β e r para melhorar a resposta referente à dinâmica do modo *dutch roll*.

Para ambos os sistemas, foram utilizadas técnicas de realimentação de estados baseadas na solução de problemas de alocação ótima por meio do método LQR. Os ganhos dos controladores foram calculados com base nos modelos linearizados em torno da condição de equilíbrio.

4.1 MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS

A formulação no espaço de estados foi obtida a partir da linearização das equações não lineares de movimento da aeronave. A linearização foi realizada numericamente, por meio de aproximações por diferenças finitas, considerando pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio.

O vetor de estados adotado inclui as principais variáveis de movimento translacional e rotacional da aeronave:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} V & \alpha & \beta & p & q & r & \phi & \theta & h \end{bmatrix}^T$$

O vetor de entradas de controle é dado por:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} T_i & \delta_e & \delta_a & \delta_r \end{bmatrix}^T$$

Para a linearização, foi considerada a condição de voo reto e nivelado em regime de cruzeiro, com velocidade de 25 m/s e altitude de 1100 m. O vetor de estados de equilíbrio obtido é:

$$\vec{X}_{eq} = \begin{bmatrix} 25 & -0,0127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0127 & 0 & 1100 \end{bmatrix}^T$$

As entradas correspondentes a essa condição de equilíbrio são:

$$\vec{U}_{eq} = \begin{bmatrix} 0,4263 & 0,0078 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

As matrizes A e B , que representam as derivadas parciais das equações de movimento com respeito aos estados e às entradas, respectivamente. Ambas foram obtidas numericamente com base na

modelagem completa da aeronave.

$$A = \begin{bmatrix} -0,0384 & 0,6239 & 0 & 0 & 0,0053 & 0 & 0 & -9,8066 & 0 & 4,73 \times 10^{-5} \\ -0,0314 & -8,3207 & 0 & 0 & 0,9291 & 0 & 0 & 5,26 \times 10^{-13} & 0 & 3,86 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & -0,3281 & -0,0093 & 0 & -0,9837 & 0,3923 & 0 & -0,0050 & 0 \\ 0 & 0 & -3,207 & -23,5572 & 0 & 3,3864 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -65,1236 & 0 & 0 & -5,1265 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20,8707 & -0,9877 & 0 & -1,1053 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,0127 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25,0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1,1273 & 0,0451 & 0 & 0 \\ 5,7387 \times 10^{-4} & -0,6016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0165 & -0,2075 \\ 0 & 0 & -144,9905 & -2,5307 \\ 0 & -86,6626 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,1895 & 14,1476 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2 SISTEMA DE AUMENTO DE ESTABILIDADE LONGITUDINAL

O sistema de aumento de estabilidade longitudinal tem como objetivo melhorar a resposta dinâmica da aeronave associada ao modo de período curto. Para isso, foi implementado um controlador do tipo LQR com realimentação dos estados α e q . O comando associado é a deflexão de profundor.

4.2.1 Avaliação da dinâmica longitudinal

A estabilidade longitudinal foi avaliada com base nos autovalores referentes aos estados longitudinais V , α , q , θ e h . Para isso, foi gerada uma submatriz A_{long} referente a esses estados.

$$A_{long} = \begin{bmatrix} -0,0384 & 0,6239 & 0,0053 & -9,8067 & 0 \\ -0,0314 & -8,3207 & 0,9291 & 0 & 0 \\ 0 & -65,1236 & -5,1265 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -25,000 & 0 & 25,000 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz resultou nos seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -6,7358 + 7,6120i$$

$$\lambda_2 = -6,7358 - 7,6120i$$

$$\lambda_3 = -0,0070 + 0,4405i$$

$$\lambda_4 = -0,0070 - 0,4405i$$

$$\lambda_5 = 0,0000 + 0,0000i$$

São obtidos dois conjuntos de autovalores complexos conjugados, sendo os mais próximos da origem referentes ao modo fugóide e os mais afastados referentes ao período curto. Desses autovalores, foram extraídas as informações da Tabela 5. Foi obtido também um autovalor na origem referente à dinâmica de h . Isso implica que o modo referente a esse estado tem um comportamento não dinâmico com amortecimento nulo, podendo divergir a depender da entrada.

Tabela 5 – Parâmetros dos modos dinâmicos longitudinais do modelo de asa rígida

Modo	ω_n [rad/s]	ζ
Short-period	10,164	0,663
Fugoide	0,4406	0,016

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A avaliação dos modos longitudinais da aeronave foi feita com base nos critérios estabelecidos pelo documento MIL-F-8785C. Para essa análise, considerou-se um fator de carga unitário ($n = 1$) e um ângulo de ataque de equilíbrio de $-0,0127$ rad, resultando em uma razão $n/\alpha = -78,7402$. Com base nesse valor, verifica-se que o modo *short-period*, apesar de apresentar uma frequência natural elevada ($\omega_n = 10,164$ rad/s) e um fator de amortecimento adequado ($\zeta = 0,663$), não atende plenamente ao critério de qualidade de voo, pois a razão n/α encontra-se fora da faixa recomendada para o nível de pilotagem requerido. Já o modo *fugoide*, caracterizado por uma frequência natural muito baixa ($\omega_n = 0,4406$ rad/s) e um fator de amortecimento bastante reduzido ($\zeta = 0,016$), apresenta uma dinâmica oscilatória fraca e mal amortecida, o que também viola os critérios de desempenho longitudinal estabelecidos na norma.

4.2.2 Modelo reduzido longitudinal para controle

Para o projeto do controlador, foi extraído um modelo reduzido a partir das matrizes A e B anteriormente apresentadas. O controlador tem o objetivo de amortecer a dinâmica do modo de período curto. Para isso, foram considerados os estados dominantes nessa dinâmica, sendo eles α e q .

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix}, \quad u = \delta_e$$

A matriz de estados $A_{long,c}$ e a matriz de entrada $B_{long,c}$ foram obtidas pelas linhas e colunas correspondentes aos estados e entradas selecionados:

$$A_{long,c} = \begin{bmatrix} -8,3207 & 0,9291 \\ -65,1236 & -5,1265 \end{bmatrix}, \quad B_{long,c} = \begin{bmatrix} -0,6016 \\ -86,6626 \end{bmatrix}$$

O subsistema em malha aberta possui os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -6,7236 + 7,6127i$$

$$\lambda_2 = -6,7236 - 7,6127i$$

Nota-se que os autovalores obtidos são semelhantes aos autovalores da dinâmica do período curto do sistema longitudinal completo, logo, pode-se considerar que há desacoplamento desses estados no que se refere a essa dinâmica. O sistema possui autovalores complexos conjugados no semi-eixo negativo do eixo real, logo, possui dinâmica estável. Os autovalores possuem $\omega_n = 10,1567$ e $\zeta = 0,6620$.

Para avaliar a controlabilidade do sistema, obteve-se:

$$C = \begin{bmatrix} -0,6016 & -75,5093 \\ -86,6626 & 483,4481 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de redução de Gauss obteve-se $rank(C) = 2$, logo o subsistema é controlável.

4.2.3 Projeto do controlador LQR

Para selecionar Q e R , foi utilizado o método proposto por Bryson, em que os pesos são definidos de acordo com os valores máximos admissíveis para os estados e entradas. Esse método resulta em:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_{max}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_{max}^2} \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{\delta_{e,max}^2}$$

Os valores máximos foram definidos em torno das condições de equilíbrio, foram considerados $\alpha_{max} = 3^\circ$ ($\approx 0,0524$ rad), $q_{max} = 2^\circ/s$ ($\approx 0,0349$ rad/s) e $\delta_{e,max} = 5^\circ$ ($\approx 0,0873$ rad), obtém-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 364,7563 & 0 \\ 0 & 820,7016 \end{bmatrix}, \quad R = 131,3123$$

A matriz de ganho do controlador K foi obtida resolvendo a equação algébrica de Riccati associada ao sistema linearizado, utilizando os valores definidos para Q e R . A matriz obtida foi:

$$K = \begin{bmatrix} 0,6247 & -2,4382 \end{bmatrix}$$

4.2.4 Análise do efeito do sistema de aumento de estabilidade longitudinal

A análise do sistema de estabilidade foi realizada a partir da malha fechada com realimentação de estados, utilizando os ganhos obtidos para os estados considerados no projeto do sistema de aumento

de estabilidade. A submatriz dos estados longitudinais da matriz em malha fechada, denotada por $A_{long,c}$, assume a seguinte forma:

$$A_{long,c} = A_{long} - B_{long\delta_e} K_{\delta_e}$$

onde:

$$B_{long\delta_e} = \begin{bmatrix} 0,0451 \\ -0,6016 \\ -86,6626 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\delta_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0,6247 & -2,4382 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

substituindo os termos:

$$A_{long,c} = \begin{bmatrix} -0,0384 & 0,5958 & 0,1153 & -9,8067 & 0,0000 \\ -0,0314 & -7,9449 & -0,5377 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0 & -10,9871 & -216,4270 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -25,0000 & 0 & 25,0000 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $A_{long,c}$ tem autovalores

$$\lambda_1 = -216,46 + 0,0000i$$

$$\lambda_2 = -7,9144 + 0,0000i$$

$$\lambda_3 = -0,0203 + 0,0396i$$

$$\lambda_4 = -0,0203 - 0,0396i$$

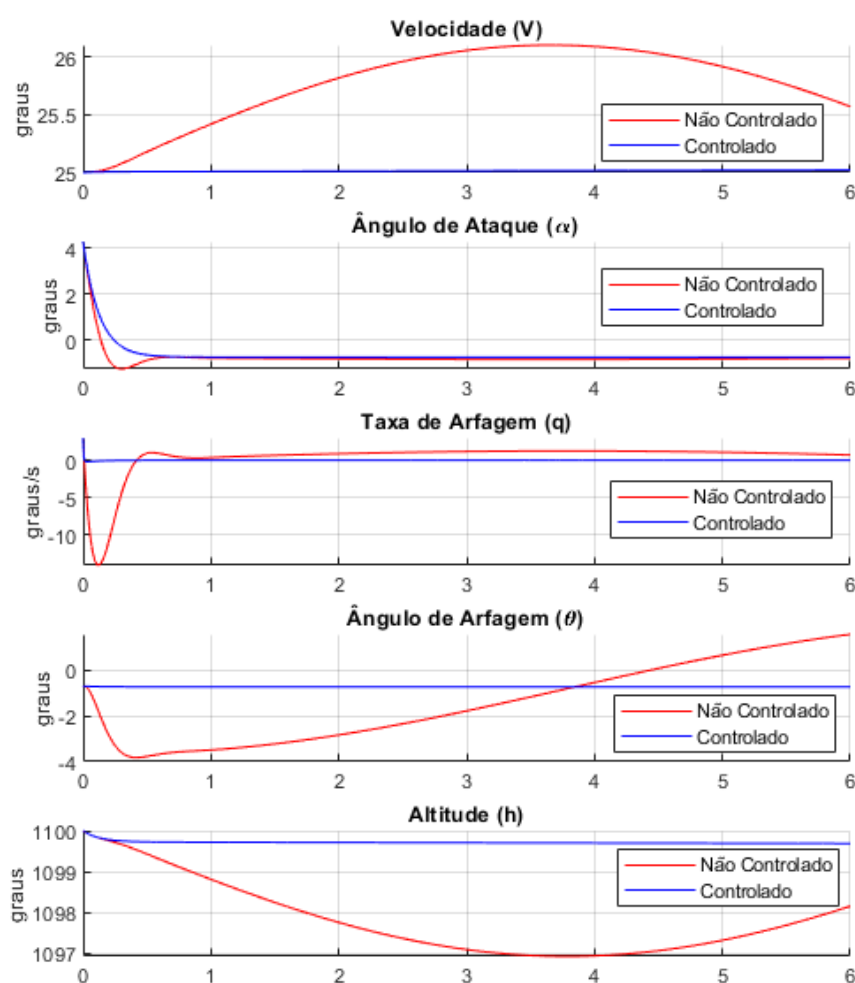
$$\lambda_5 = 0,0000 + 0,0000i$$

Os autovalores, antes referentes ao modo de período curto, λ_1 e λ_2 agora são reais, indicando modos puramente amortecidos e não oscilatórios. O autovalor λ_1 , com $\omega_n = 216,46 \text{ rad/s}$, representa um modo muito rápido, amplamente amortecido, cuja dinâmica é rapidamente eliminada após uma perturbação. Já o autovalor λ_2 possui uma frequência natural mais baixa e também não apresenta oscilação. O par complexo conjugado λ_3 e λ_4 representa um modo oscilatório, com frequência natural de $\omega_n = 0,0444 \text{ rad/s}$ e fator de amortecimento $\zeta = 0,457$. Esse valor indica um modo fracamente amortecido e dominante na resposta transitória, possivelmente associado ao modo fugóide ou de arfagem da aeronave. Assim, esse modo manteve sua frequência natural próxima do valor original, mas teve um aumento no amortecimento. Por fim, o autovalor nulo $\lambda_5 = 0$, referente à altitude, se manteve da mesma forma.

A Figura 9 mostra a resposta temporal do sistema controlado e não controlado após a aplicação de um distúrbio inicial de 5° no ângulo de ataque α e $3^\circ/s$ na taxa de arfagem q . Observa-se que, para o ângulo de ataque, ambos os sistemas retornam ao ponto de equilíbrio em aproximadamente

0,6 segundos; no entanto, o sistema com controle elimina completamente o *overshoot*, enquanto o sistema sem controle apresenta uma oscilação inicial antes de se estabilizar. Para a taxa de arfagem q , a ação do controlador proporciona uma resposta rápida e criticamente amortecida, atingindo o equilíbrio praticamente sem ultrapassagem. Em contraste, o sistema não controlado exibe uma resposta oscilatória com *overshoot* expressivo e tempo de assentamento próximo a 0,86 segundos. A dinâmica rápida da resposta de q no caso não controlado pode ser observada com mais detalhe na Figura 10, que amplia o intervalo de tempo nos primeiros 0,5 segundos.

Figura 9 – Resposta dos estados longitudinais para distúrbio

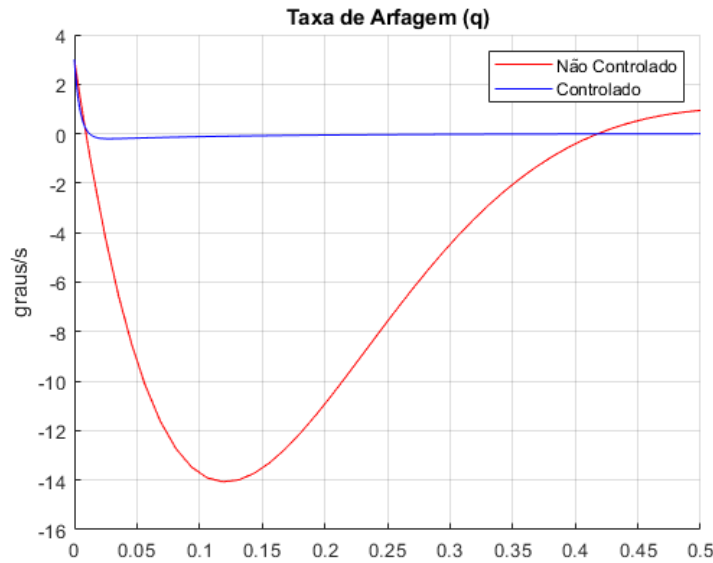


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Os estados não diretamente controlados também apresentam um comportamento estável frente ao distúrbio aplicado. A velocidade V e a altitude h mantêm-se praticamente inalteradas ao longo do tempo, indicando que o controlador não compromete a energia total do sistema. O ângulo de arfagem θ sofre apenas uma leve variação transitória, estabilizando-se rapidamente em função da rápida ação corretiva sobre a taxa de arfagem q . Embora a velocidade V seja dinamicamente acoplada a outros estados, seu principal termo de acoplamento está associado à taxa de arfagem q , que apresenta variação

mínima no sistema controlado. Por esse motivo, a resposta de V permanece praticamente constante.

Figura 10 – Resposta da taxa de arfagem para distúrbio



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4.3 SISTEMA DE AUMENTO DE ESTABILIDADE LATERO-DIRECIONAL

O sistema de aumento de estabilidade latero-direcional tem como objetivo melhorar a resposta dinâmica da aeronave ao modo dinâmico de *dutch roll*. Para isso, foi implementado um controlador LQR com realimentação dos estados β e r . Os comandos associados a esses estados são aileron e leme.

4.3.1 Avaliação da dinâmica latero-direcional

A estabilidade latero-direcional foi avaliada com base nos autovalores referentes aos estados latero-direcionais β , p , r , ϕ e ψ . Para isso, foi gerada uma submatriz A_{lat} referente a esses estados.

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} -0,3281 & -0,0093 & -0,9837 & 0,3923 & -0,0050 \\ -3,2207 & -23,5572 & 3,3864 & 0 & 0 \\ 20,8707 & -0,987 & -1,1053 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & -0,0127 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz resultou nos seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -23,4259 + 0,0000i$$

$$\lambda_2 = -0,8062 + 4,5548i$$

$$\lambda_3 = -0,8062 - 4,5548i$$

$$\lambda_4 = 0,0476 + 0,0000i$$

$$\lambda_5 = 0,0000 + 0,0000i$$

Desses autovalores, foram extraídas as informações da Tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros dos modos dinâmicos laterais do modelo de asa rígida

Modo	ω_n [rad/s]	ζ
Rolagem	23,4259	1,0000
Dutch Roll	4,6256	0,1743
Espiral	0,0476	-1,0000

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O comportamento de modos reais do sistema pode ser caracterizado pela evolução exponencial da forma $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, onde λ representa o autovalor associado ao modo dinâmico. Para modos estáveis com $\lambda < 0$, como o modo de rolagem, calcula-se o tempo para meia amplitude como o intervalo necessário para que a resposta decresça até metade de sua magnitude inicial, dado por $T_{\text{half}} = \ln(2)/|\lambda|$. Por outro lado, para modos instáveis com $\lambda > 0$, como o modo espiral, é possível calcular o tempo para dobrar a amplitude, que representa o tempo necessário para que a resposta atinja o dobro da amplitude inicial, obtido por $T_{\text{double}} = \ln(2)/\lambda$. Essas métricas são utilizadas para avaliar as métricas do documento MIL-F-8785C.

Para o modo *dutch roll*, é desejável que o fator de amortecimento seja superior a $\zeta \geq 0,08$, garantindo uma oscilação suavemente amortecida. Neste caso, obteve-se $\zeta = 0,174$, o que atende ao critério. Para o modo de rolagem, espera-se uma resposta rápida, com tempo para meia amplitude inferior a 1 segundo, isto é, $T_{\text{half}} \leq 1$ s. O valor encontrado foi de apenas $T_{\text{half}} = 0,03$ s, o que indica uma dinâmica rápida e satisfatória. Por outro lado, o modo espiral deve satisfazer $T_{\text{double}} \geq 20$ s. No entanto, o valor calculado foi de apenas $T_{\text{double}} = 14,6$ s, o que indica uma instabilidade mais acentuada do que o desejável, caracterizando que o critério não foi atendido.

4.3.2 Modelo reduzido latero-direcional

Para o projeto do sistema de estabilidade latero-direcional, foi extraído o modelo reduzido dos estados de interesse e comandos associados. Assim:

$$\vec{x}_{lat,c} = \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix}, \quad u_{lat,c} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix},$$

A matriz de estados A_{lat} e a matriz de entrada B_{lat} foram obtidas pelas linhas e colunas correspondentes aos estados e entradas selecionados:

$$A_{lat,c} = \begin{bmatrix} -0,3281 & -0,9837 \\ 20,8707 & -1,1053 \end{bmatrix}, \quad B_{lat,c} = \begin{bmatrix} 0,0165 & -0,2075 \\ -2,1895 & 14,1476 \end{bmatrix}$$

O sistema em malha aberta possui os seguintes polos:

$$\lambda_1 = -0,7167 + 4,5144i$$

$$\lambda_2 = -0,7167 - 4,5144i$$

O sistema possui autovalores complexos conjugados semelhantes aos autovalores de *dutch roll* obtidos na dinâmica latero-direcional completa, logo é possível assumir que esses estados são desacoplados.

Para avaliar a controlabilidade do sistema, foi obtido:

$$C = \begin{bmatrix} 0,0165 & -0,2075 & 2,1484 & -13,8488 \\ -2,1895 & 14,1476 & 2,7652 & -19,9682 \end{bmatrix}$$

A controlabilidade do sistema foi verificada por meio da eliminação de Gauss, constatando-se que as linhas da matriz de controlabilidade são linearmente independentes.

4.3.3 Projeto do controlador LQR

Utilizando a regra de Bryson para selecionar Q e R , considerando $\beta_{max} = 3^\circ (\approx 0,0524 \text{ rad})$, $r_{max} = 3^\circ (\approx 0,0524 \text{ rad})$, $\delta_{a,max} = 5^\circ (\approx 0,0873 \text{ rad})$ e $\delta_{r,max} = 5^\circ (\approx 0,0873 \text{ rad})$ obtém-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 364,7563 & 0 \\ 0 & 364,7563 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 131,3123 & 0 \\ 0 & 131,3123 \end{bmatrix}$$

Com esses valores, a matriz de ganho do controlador LQR calculada foi:

$$K = \begin{bmatrix} -1,5120 & -0,0253 \\ -0,0479 & 1,5873 \end{bmatrix}$$

4.3.4 Análise do efeito do sistema de aumento de estabilidade latero-direcional

A análise do sistema de estabilidade foi realizada a partir da malha fechada com realimentação de estados, utilizando os ganhos obtidos para os estados considerados no projeto do sistema de aumento de estabilidade. A submatriz dos estados latero-direcionais da matriz em malha fechada, denotada por $A_{lat,c}$, assume a seguinte forma:

$$A_{lat,c} = A_{lat} - B_{lat\delta_a,\delta_r} K_{\delta_a,\delta_r}$$

onde:

$$B_{lat_{\delta_a, \delta_r}} = \begin{bmatrix} 0,0165 & -0,2075 \\ -144,9905 & -2,5307 \\ -2,1895 & 14,1476 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\delta_a, \delta_r} = \begin{bmatrix} 0,0559 & 0 & -0,2433 & 0 & 0 \\ -0,7149 & 0 & 1,5719 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

substituindo os termos:

$$A_{lat,c} = \begin{bmatrix} -0,4774 & -0,0093 & -0,6534 & 0,3923 & -0,0050 \\ 3,0802 & -23,5572 & -27,9105 & 0 & 0 \\ 31,1080 & -0,9877 & -23,8771 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & -0,0127 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $A_{lat,c}$ tem autovalores

$$\lambda_1 = -28,5332 + 0,0000i$$

$$\lambda_2 = -18,0271 + 0,0000i$$

$$\lambda_3 = -0,6757 + 0,4046i$$

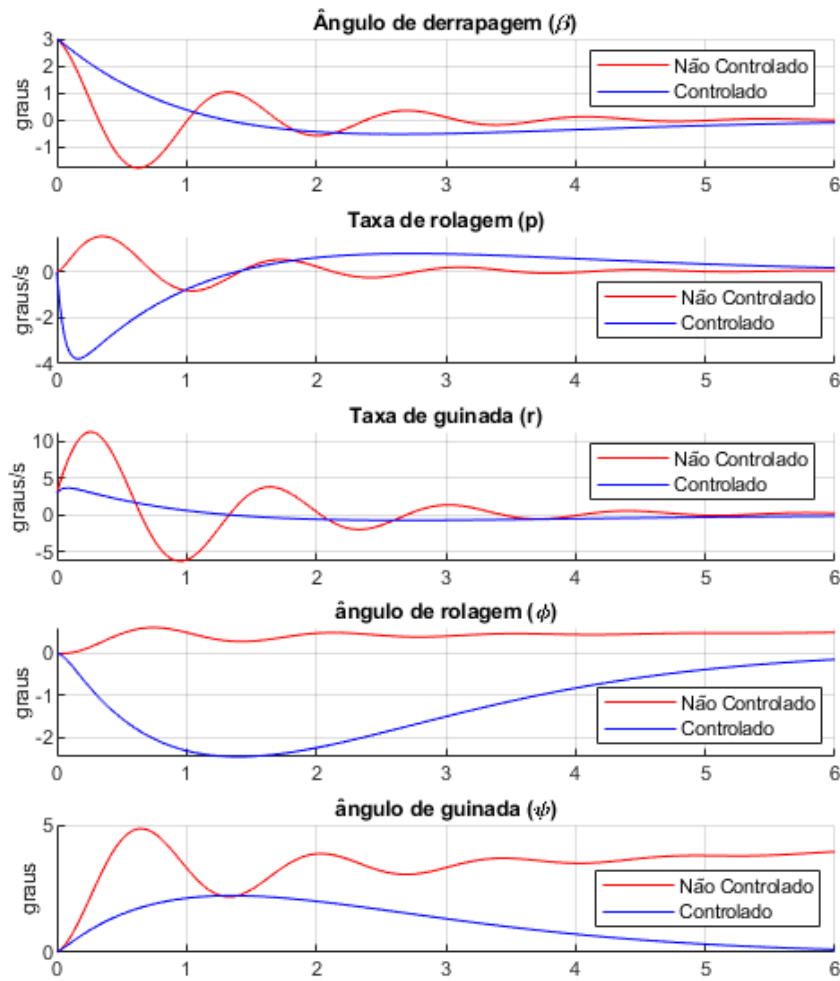
$$\lambda_4 = -0,6757 - 0,4046i$$

$$\lambda_5 = 0,0000 + 0,0000i$$

Os autovalores λ_1 e λ_2 são reais, negativos e bem afastados da origem, indicando modos puramente amortecidos e de resposta rápida. Esses valores sugerem dinâmicas rápidas que se dissipam rapidamente após uma perturbação, sem gerar oscilação. O par de autovalores complexos conjugados λ_3 e λ_4 representa um modo oscilatório, com frequência natural $\omega_n = 0,7890 \text{ rad/s}$ e fator de amortecimento $\zeta = 0,8564$. Esse valor de ζ indica um modo fortemente amortecido, com resposta oscilatória pouco pronunciada. Por fim, o autovalor nulo $\lambda_5 = 0$ aponta para um modo marginalmente estável, normalmente associado a um integrador no sistema relacionado ao estado de guinada ψ .

A Figura 11 apresenta a comparação da resposta do sistema controlado e do sistema não controlado a um distúrbio de 3° em β e em r . A resposta do sistema latero-direcional apresenta melhorias significativas com a atuação do controlador. Observa-se uma redução nas oscilações de todos os estados, com destaque para os estados controlados, o ângulo de derrapagem β e a taxa de guinada r , que atingem a estabilidade mais rapidamente no sistema controlado. Apesar disso, nota-se um leve aumento no *overshoot* inicial em alguns estados, como p e ϕ , reflexo da maior autoridade de controle aplicada no instante inicial. O ângulo acumulado ψ que não é diretamente realimentado estabiliza-se em um valor constante após a ação transitória no sistema não controlado, mas retorna para o valor inicial no sistema controlado.

Figura 11 – Resposta dos estados latero-direcionais para distúrbio



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4.4 PILOTO AUTOMÁTICO

Para o projeto do piloto automático, adotou-se uma metodologia de controle ótimo linear-quadrático com rastreamento de referência, implementada por meio de um compensador do tipo PI, conforme apresentado na equação seção 2.8. Foram desenvolvidos controladores dedicados ao rastreamento das variáveis de velocidade e altitude, com o objetivo de reduzir a carga de trabalho do piloto.

A matriz C é uma matriz identidade, considerando que todos os estados da planta estão disponíveis para medição, enquanto a matriz H seleciona as variáveis de desempenho a serem rastreadas, neste caso, a velocidade e a altitude:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para implementar o rastreamento de referência, foi utilizado um compensador PI multivariável, com estados integradores adicionados ao sistema. Considerando rastreamento de duas saídas, foram utilizados dois integradores independentes, resultando nas seguintes matrizes do compensador:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, a estrutura aumentada do sistema é composta pelas matrizes:

$$A_a = \begin{bmatrix} -0,0384 & 0,5958 & 0,1153 & -9,8067 & 4,7314 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ -0,0314 & -7,9449 & -0,5377 & 1,6462 \times 10^{-11} & 3,8641 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & -10,9871 & -216,4270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25,0000 & 0 & 25,0000 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_a = \begin{bmatrix} 1,1273 & 0,0451 \\ 5,7387 \times 10^{-4} & -0,6016 \\ 0 & -86,6626 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A saída aumentada do sistema, composta pelas saídas físicas e pela saída do compensador, é definida por:

$$C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de saída de desempenho H_a é construída de forma a preservar a associação original entre estados da planta e variáveis de interesse, estendendo-a ao sistema aumentado:

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essas matrizes definem completamente o sistema aumentado sobre o qual o controle ótimo com rastreamento de referência é projetado, garantindo que a estrutura do compensador PI seja corretamente acoplada ao modelo estabilizado da aeronave.

As matrizes de ponderação utilizadas na formulação da função de custo do controlador com rastreamento foram definidas de forma a refletir os limites máximos admissíveis para os sinais de entrada e para os erros de rastreamento. Para isso, foi aplicada a regra de Bryson, a qual estabelece que cada entrada ou saída deve ser ponderada por meio do inverso do quadrado do seu valor máximo permitido. Essa técnica garante que todas as variáveis, independentemente da escala física ou unidade, tenham contribuição balanceada na função de desempenho. Foi considerado erro admissível de até 2 m/s na velocidade ($V_{max} = 2$), 5 metros na altitude ($h_{max} = 5$), 50% na atuação do motor ($T_{i,max} = 0,5$) e uma deflexão máxima de 5° no profundor ($\delta_{e,max} = 0,0873$).

Com base nesses limites, a matriz de ponderação do esforço de controle foi definida como:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{i,max}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{e,max}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,0000 & 0 \\ 0 & 131,3123 \end{bmatrix}$$

A matriz que penaliza o erro de regime permanente foi construída da mesma forma, considerando os valores máximos admissíveis para os erros de rastreamento:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_{max}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{max}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2500 & 0 \\ 0 & 0,0400 \end{bmatrix}$$

Por fim, a matriz de ponderação do erro de rastreamento ao longo do tempo foi definida como:

$$Q = H_a^\top H_a$$

Essa construção assegura que o desempenho da saída rastreada, representada por $z(t) = H_a x_a(t)$,

seja diretamente penalizado na função de custo, promovendo a convergência da trajetória da planta à referência desejada. A definição de Q como o produto $H_a^T H_a$ garante que os estados associados às variáveis de desempenho sejam priorizados no projeto do controle ótimo, sem a necessidade de escalonamento adicional.

Essas matrizes foram utilizadas na equação 69 a fim de obter uma matriz K_a que minimiza J . Para uma referência unitária de velocidade e altitude, foi obtido

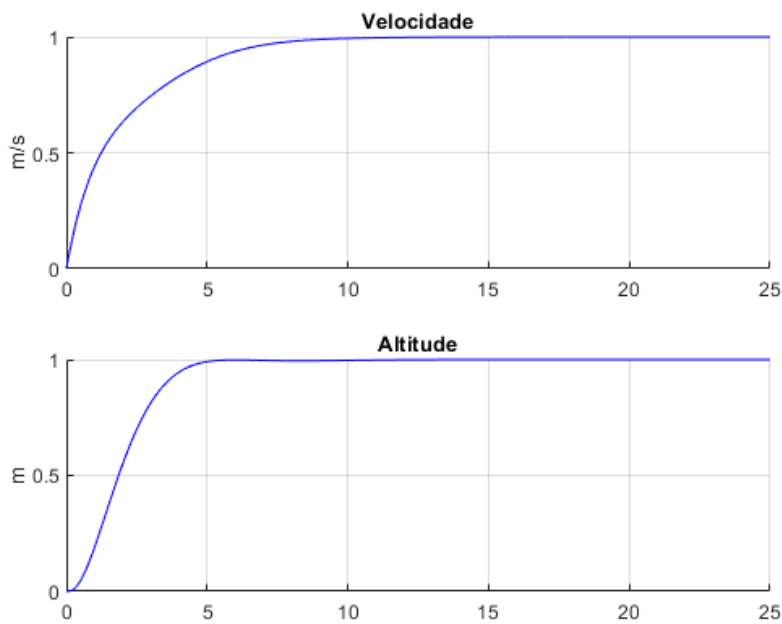
$$K_a = \begin{bmatrix} 11,8816 & -0,0025 \\ 323,8713 & -0,0147 \\ -11,5745 & 0,0673 \\ -2,2718 \times 10^3 & -3,8848 \\ -52,7765 & -0,0365 \\ -40,8262 & -0,0032 \\ 40,2275 & 0,0674 \\ -44,6203 & -2,8601 \times 10^{-4} \\ 61,0578 & 0,0116 \end{bmatrix}^T$$

A matriz K_a resultou em $J = 2,037541$.

4.4.1 Análise do efeito do piloto automático

Para avaliar o efeito do piloto automático, o sistema foi submetido a uma referência degrau unitário em velocidade e altitude e a saída de desempenho foi observada conforme apresentado na Figura 12.

Figura 12 – Resposta da saída de desempenho a um degrau unitário



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Percebe-se que o sistema é capaz de seguir a referência enviada. A velocidade alcança a referência em aproximadamente 10 segundos, enquanto a altitude leva 5 segundos para chegar no valor de

referência. Ambos apresentam tempo de acomodação consideravelmente elevados. Apesar de o sistema seguir a referência, os tempos de acomodação elevados sugerem a necessidade de otimização.

5 SISTEMAS DE CONTROLE PARA O MODELO DE ASA FLEXIONADA

5.1 MODELAGEM NO ESPAÇO DE ESTADOS

A formulação no espaço de estados foi obtida a partir da linearização das equações não lineares de movimento da aeronave. A linearização foi realizada numericamente, por meio de aproximações por diferenças finitas, considerando pequenas perturbações em torno do ponto de equilíbrio.

O vetor de estados adotado inclui as principais variáveis de movimento translacional e rotacional da aeronave:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} V & \alpha & \beta & p & q & r & \phi & \theta & h \end{bmatrix}^T$$

O vetor de entradas de controle é dado por:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} T_i & \delta_e & \delta_a & \delta_r \end{bmatrix}^T$$

Para a linearização, foi considerada a condição de voo reto e nivelado em regime de cruzeiro, com velocidade de 25 m/s e altitude de 1100 m. O vetor de estados de equilíbrio obtido é:

$$\vec{X}_{eq} = \begin{bmatrix} 25 & -0,0123 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0123 & 0 & 1100 \end{bmatrix}^T$$

As entradas correspondentes a essa condição de equilíbrio são:

$$\vec{U}_{eq} = \begin{bmatrix} 0,3179 & 0,0082 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

As matrizes A e B foram obtidas numericamente com base na modelagem completa da aeronave.

$$A = \begin{bmatrix} -0,0287 & 0,3248 & 0 & 0 & 0,0027 & 0 & 0 & -9,8066 & 0 & 3,53 \times 10^{-5} \\ -0,0314 & -8,3864 & 0 & 0 & 0,9296 & 0 & 0 & 1,01 \times 10^{-11} & 0 & 3,86 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & -0,3543 & -0,0242 & 0 & -0,9813 & 0,3923 & 0 & -0,0048 & 0 \\ 0 & 0 & -36,3481 & -23,9253 & 0 & 3,5446 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -70,5856 & 0 & 0 & -5,2779 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19,6949 & -1,0112 & 0 & -1,1288 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0,0123 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,78 \times 10^{-11} & -25,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25,0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1,1273 & 0,0233 & 0 & 0 & 0 \\ 5,5653 \times 10^{-4} & -0,6016 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0865 & 0 & -0,1714 \\ 0 & 0 & -147,8903 & 0 & -2,5571 \\ 0 & -86,6626 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,1053 & 0 & 14,4676 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2 SISTEMA DE AUMENTO DE ESTABILIDADE LONGITUDINAL

Assim como no sistema de aumento de estabilidade longitudinal desenvolvido anteriormente, o objetivo é reduzir a oscilação associada ao modo de período curto. Para isso, foi implementado um controlador do tipo LQR com realimentação dos estados α e q utilizando comandos de deflexão de profundor.

5.2.1 Avaliação da dinâmica longitudinal

A estabilidade longitudinal foi avaliada com base nos autovalores referentes aos estados longitudinais V , α , q , θ e h . Para isso, foi gerada uma submatriz A_{long} referente a esses estados.

$$A_{long} = \begin{bmatrix} -0,0287 & 0,3248 & 0,0027 & -9,8066 & 0 \\ -0,0314 & -8,3864 & 0,9296 & 0 & 0 \\ 0 & -70,5856 & -5,2779 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & -25,000 & 0 & 25,000 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz resultou nos seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -6,8442 + 7,9485i$$

$$\lambda_2 = -6,8442 - 7,9485i$$

$$\lambda_3 = -0,0022 + 0,4451i$$

$$\lambda_4 = -0,0022 - 0,4451i$$

$$\lambda_5 = 0,0000 + 0,0000i$$

São obtidos dois conjuntos de autovalores complexos conjugados, sendo os mais próximos da origem referentes ao modo fugóide e os mais afastados referentes ao período curto. Desses autovalores, foram extraídas as informações da Tabela 7. Foi obtido também um autovalor na origem referente à

dinâmica de h . Isso implica que o modo referente a esse estado tem um comportamento não dinâmico com amortecimento nulo, podendo divergir a depender da entrada.

Tabela 7 – Parâmetros dos modos dinâmicos longitudinais do modelo de asa flexionada

Modo	ω_n [rad/s]	ζ
Short-period	10,489	0,653
Fugoide	0,4444	0,005

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A avaliação dos modos longitudinais da aeronave foi feita com base nos critérios estabelecidos pelo documento MIL-F-8785C. Para essa análise, considerou-se um fator de carga unitário ($n = 1$) e um ângulo de ataque de equilíbrio de $-0,0123$ rad, resultando em uma razão $n/\alpha = -81,3008$. Com base nesse valor, verifica-se que o modo *short-period* não atende ao critério de qualidade de voo. Já o modo *fugoide*, caracterizado por uma frequência natural muito baixa ($\omega_n = 0,4444$ rad/s) e um fator de amortecimento de ($\zeta = 0,005$) também viola os critérios de desempenho longitudinal estabelecidos na norma.

5.2.2 Modelo reduzido longitudinal para controle

Foi extraído um modelo reduzido a partir das matrizes A e B obtidas do modelo de asa flexionada. O controlador tem o objetivo de amortecer a dinâmica do modo de período curto. Foram considerados os estados α e q .

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix}, \quad u = \delta_e$$

A matriz de estados $A_{long,c}$ e a matriz de entrada $B_{long,c}$ foram obtidas pelas linhas e colunas correspondentes aos estados e entradas selecionados:

$$A_{long,c} = \begin{bmatrix} -8,3864 & 0,9296 \\ -70,5856 & -5,2779 \end{bmatrix}, \quad B_{long,c} = \begin{bmatrix} -0,6016 \\ -86,6626 \end{bmatrix}$$

O subsistema em malha aberta possui os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -6,8321 + 7,9499i$$

$$\lambda_2 = -6,8321 - 7,9499i$$

Nota-se que os autovalores obtidos são semelhantes aos autovalores da dinâmica do período curto do sistema longitudinal completo, logo pode-se considerar que há desacoplamento desses estados no que se refere a essa dinâmica. O sistema possui autovalores complexos conjugados no semi-eixo negativo do eixo real, logo, possui dinâmica estável. Os autovalores possuem $\omega_n = 10,4891$ e $\zeta = 0,6525$.

Além disso, uma avaliação da controlabilidade, que resultou em:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -0,6016 & -75,5168 \\ -86,6626 & 499,8557 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de redução de Gauss obteve-se $\text{rank}(\mathcal{C}) = 2$, logo o subsistema é controlável.

5.2.3 Projeto do controlador LQR

O projeto desse controlador considerou as mesmas matrizes Q e R obtidas no projeto do controlador LQR para o modelo de asa rígida, sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 364,7563 & 0 \\ 0 & 820,7016 \end{bmatrix}, \quad R = 131,3123$$

A matriz de ganho do controlador K foi obtida para esse caso:

$$K = \begin{bmatrix} 0,6811 & -2,4362 \end{bmatrix}$$

5.2.4 Análise do efeito do sistema de aumento de estabilidade longitudinal

A análise do sistema de estabilidade foi realizada a partir da malha fechada com realimentação de estados, utilizando os ganhos obtidos para os estados considerados no projeto do sistema de aumento de estabilidade. A submatriz dos estados longitudinais da matriz em malha fechada, denotada por $A_{long,c}$, assume a seguinte forma:

$$A_{long,c} = A_{long} - B_{long\delta_e} K_{\delta_e}$$

onde:

$$B_{long\delta_e} = \begin{bmatrix} 0,0233 \\ -0,6016 \\ -86,6626 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\delta_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0,6811 & -2,4362 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

substituindo os termos:

$$A_{long,c} = \begin{bmatrix} -0,0287 & 0,3089 & 0,0595 & -9,8066 & 0,0000 \\ -0,0314 & -7,9767 & -0,5360 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0 & -11,5567 & -216,4071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0,0000 & -25,0000 & 0 & 25,0000 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $A_{long,c}$ tem autovalores

$$\lambda_1 = -216,44 + 0,0000i$$

$$\lambda_2 = -7,9459 + 0,0000i$$

$$\lambda_3 = -0,0149 + 0,0431i$$

$$\lambda_4 = -0,0149 - 0,0431i$$

$$\lambda_5 = 0,0000 + 0,0000i$$

Os autovalores apresentados indicam que os modos antes associados ao período curto, λ_1 e λ_2 , tornaram-se reais e negativos, representando modos puramente amortecidos e não oscilatórios. O autovalor λ_1 , com frequência natural $\omega_n = 216,44 \text{ rad/s}$, caracteriza um modo muito rápido e fortemente amortecido, cuja dinâmica se dissipa rapidamente após uma perturbação. Já λ_2 possui uma frequência natural mais baixa, $\omega_n = 7,95 \text{ rad/s}$, também sem componente oscilatório, indicando um modo lento e amortecido. O par complexo conjugado λ_3 e λ_4 representa um modo oscilatório, com frequência natural $\omega_n = 0,0444 \text{ rad/s}$ e fator de amortecimento $\zeta = 0,457$, sugerindo um modo fracamente amortecido e dominante na resposta transitória. Observa-se que esse modo manteve sua frequência natural próxima do valor original, porém com um aumento no amortecimento. Por fim, o autovalor nulo $\lambda_5 = 0$, referente à altitude, permaneceu inalterado.

A Figura 13 apresenta a resposta temporal dos sistemas controlado e não controlado após a aplicação de um distúrbio inicial de 5° no ângulo de ataque α e $3^\circ/s$ na taxa de arfagem q . Observa-se que, para α , o sistema controlado elimina completamente o *overshoot*, enquanto o não controlado apresenta oscilações antes de se estabilizar. Já para q , o controlador garante uma resposta rápida e criticamente amortecida, ao passo que o sistema sem controle exibe oscilações com *overshoot* expressivo. A dinâmica rápida da resposta de q no sistema não controlado é detalhada na Figura 14.

O mesmo comportamento observado para o modelo de asa rígida é percebido aqui. Os estados não controlados diretamente apresentam comportamento estável frente ao distúrbio aplicado. A velocidade V e a altitude h permanecem praticamente constantes, indicando que o controlador não afeta a energia total do sistema. O ângulo de arfagem θ sofre pequena variação transitória, estabilizando-se rapidamente devido à ação corretiva sobre a taxa de arfagem q . Como V é acoplada principalmente a q , que varia pouco no sistema controlado, sua resposta se mantém quase constante.

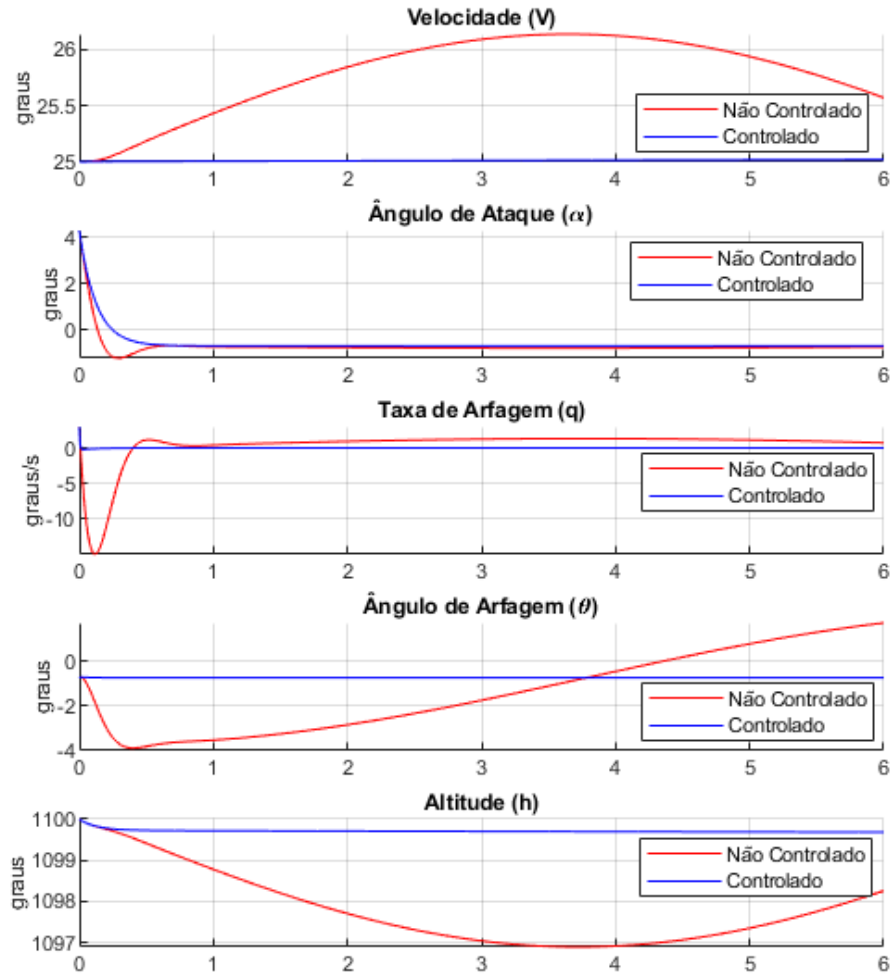
5.3 SISTEMA DE AUMENTO DE ESTABILIDADE LATERO-DIRECIONAL

Assim como para o modelo anterior, foi desenvolvido um sistema de aumento de estabilidade para melhorar a resposta dinâmica da aeronave ao modo dinâmico de *dutch roll*. Para isso, foi implementado um controlador LQR com realimentação dos estados β e r utilizando comandos de aileron e leme.

5.3.1 Avaliação da dinâmica latero-direcional

A estabilidade latero-direcional foi avaliada com base nos autovalores referentes aos estados latero-direcionais β , p , r e ϕ . Para isso, foi gerada uma submatriz A_{lat} referente a esses estados.

Figura 13 – Resposta dos estados longitudinais para distúrbio



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} -0,3543 & -0,0242 & -0,9813 & 0,3923 \\ -36,3481 & -23,9253 & 3,5446 & 0 \\ 19,6949 & -1,0112 & -1,1288 & 0 \\ 0 & 1,0000 & -0,0123 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz resultou nos seguintes autovalores:

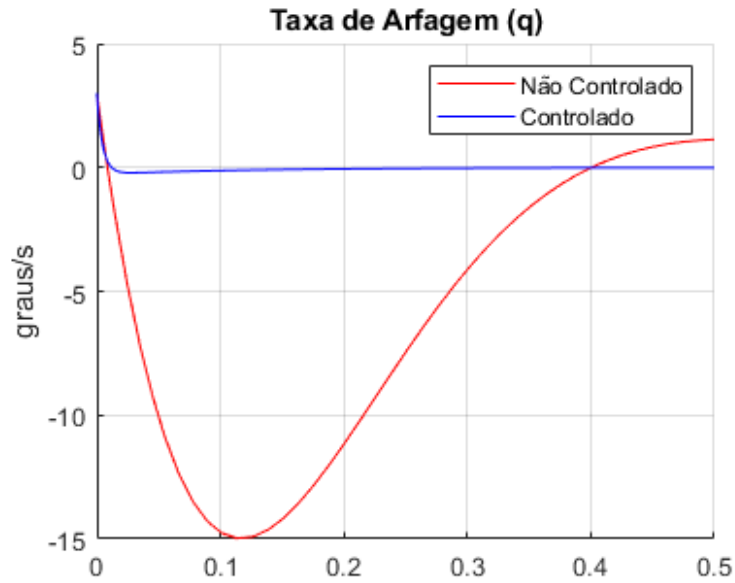
$$\lambda_1 = -23,9039 + 0,0000i$$

$$\lambda_2 = -0,7606 + 4,6258i$$

$$\lambda_3 = -0,7606 - 4,6258i$$

$$\lambda_4 = 0,0168 + 0,0000i$$

Figura 14 – Resposta da taxa de arfagem para distúrbio



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Desses autovalores, foram extraídas as informações da Tabela 8.

Tabela 8 – Parâmetros dos modos dinâmicos laterais do modelo de asa rígida

Modo	ω_n [rad/s]	ζ
Rolagem	23,9039	1,0000
Dutch Roll	4,688	0,1623
Espiral	0,0168	-1,0000

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para o modo *Dutch Roll*, o requisito do fator de amortecimento ser superior a $\zeta \geq 0,08$ é cumprido. Para o modo de rolagem, o tempo para meia amplitude encontrado foi de $T_{\text{half}} = 0,03$ s, o que indica uma dinâmica rápida e satisfatória em relação ao requisito. E o modo espiral, com $T_{\text{double}} = 41,2$ s atende ao critério de $T_{\text{double}} \geq 20$ s. A maior diferença para esse caso está no deslocamento do autovalor referente ao modo espiral para mais próximo da origem, indicando redução da frequência natural desse modo.

5.3.2 Modelo reduzido latero-direcional para controle

Para o projeto do sistema de estabilidade latero-direcional, foi extraído o modelo reduzido dos estados de interesse e comandos associados. Assim:

$$\vec{x}_{lat,c} = \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix}, \quad u_{lat,c} = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix},$$

A matriz de estados A_{lat} e a matriz de entrada B_{lat} foram obtidas pelas linhas e colunas correspondentes aos estados e entradas selecionados:

$$A_{lat,c} = \begin{bmatrix} -0,3543 & -0,9813 \\ 19,694 & -1,1288 \end{bmatrix}, \quad B_{lat,c} = \begin{bmatrix} -0,0865 & -0,1714 \\ -2,1053 & 14,4676 \end{bmatrix}$$

O sistema em malha aberta possui os seguintes polos:

$$\lambda_1 = -0,7416 + 4,3790i$$

$$\lambda_2 = -0,7416 - 4,3790i$$

Assim como no modelo anterior, o sistema possui autovalores complexos conjugados semelhantes aos autovalores de *dutch roll* obtidos na dinâmica latero-direcional completa, logo, é possível assumir que esses estados são desacoplados.

A matriz de controlabilidade obtida foi:

$$C = \begin{bmatrix} -0,0865 & -0,1714 & 2,0965 & -14,1358 \\ -2,1053 & 14,4676 & 0,6734 & -19,7072 \end{bmatrix}$$

Por eliminação de Gauss, obteve-se $rank(C) = 2$ indicando que o sistema obtido é controlável.

5.3.3 Projeto do controlador LQR

As matrizes Q e R consideradas para o projeto do sistema de aumento de estabilidade latero-direcional para o modelo de asa flexionada foram as mesmas do projeto para o modelo de asa rígida, assim:

$$Q = \begin{bmatrix} 364,7563 & 0 \\ 0 & 364,7563 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 131,3123 & 0 \\ 0 & 131,3123 \end{bmatrix}$$

Com esses valores, a matriz de ganho do controlador LQR calculada foi:

$$K = \begin{bmatrix} -0,2576 & -0,2290 \\ -0,5926 & 1,5773 \end{bmatrix}$$

5.3.4 Análise do efeito do sistema de aumento de estabilidade latero-direcional

A análise do sistema de estabilidade foi realizada a partir da malha fechada com realimentação de estados, utilizando os ganhos obtidos para os estados considerados no projeto do sistema de aumento de estabilidade. A submatriz dos estados latero-direcionais da matriz em malha fechada, denotada por $A_{lat,c}$, assume a seguinte forma:

$$A_{lat,c} = A_{lat} - B_{lat_{\delta_a, \delta_r}} K_{\delta_a, \delta_r}$$

onde:

$$B_{lat_{\delta_a, \delta_r}} = \begin{bmatrix} -0,0865 & -0,1714 \\ -147,8903 & -2,5571 \\ -2,1053 & 14,4676 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{\delta_a, \delta_r} = \begin{bmatrix} -0,2576 & 0 & -0,2290 & 0 & 0 \\ -0,5926 & 0 & 1,5773 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

substituindo os termos:

$$A_{lat,c} = \begin{bmatrix} -0,4782 & -0,0242 & -0,7307 & 0,3923 & -0,0048 \\ -75,9648 & -23,9253 & -26,2946 & 0 & 0 \\ 27,7267 & -1,0112 & -24,4309 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & -0,0123 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz $A_{lat,c}$ tem autovalores

$$\lambda_1 = -29,1225 + 0,0000i$$

$$\lambda_2 = -18,4368 + 0,0000i$$

$$\lambda_3 = -0,6375 + 1,2229i$$

$$\lambda_4 = -0,6375 - 1,2229i$$

$$\lambda_5 = 0,0000 + 0,0000i$$

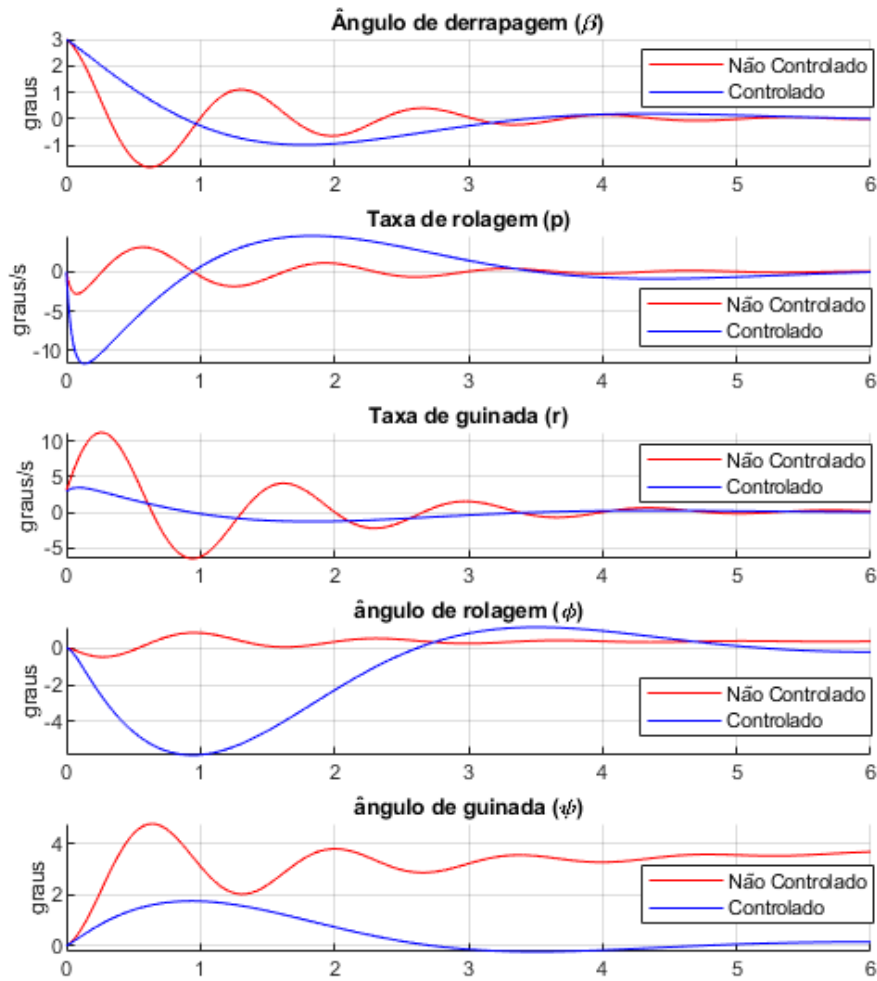
Os autovalores λ_1 e λ_2 são reais, negativos e bem afastados da origem, indicando modos puramente amortecidos e de resposta rápida. O par de autovalores complexos conjugados λ_3 e λ_4 representa um modo oscilatório, com frequência natural $\omega_n = 1,3694$ rad/s e fator de amortecimento $\zeta = 0,4655$. Esse valor de ζ indica um modo subamortecido, com resposta oscilatória mais pronunciada. Por fim, o autovalor nulo $\lambda_5 = 0$ aponta para um modo marginalmente estável, normalmente associado a um integrador no sistema relacionado ao estado de guinada ψ .

A Figura 15 compara a resposta do sistema controlado e não controlado a um distúrbio de 3° em β e r . O controlador melhora significativamente a resposta latero-direcional, reduzindo as oscilações e acelerando a estabilização dos estados controlados (β e r). Entretanto, há um leve aumento no *overshoot* inicial em p e ϕ , devido à maior autoridade de controle. O ângulo ψ estabiliza-se em um valor constante no sistema não controlado, mas retorna ao valor inicial quando controlado.

5.4 PILOTO AUTOMÁTICO

Para o projeto do piloto automático, adotou-se a mesma metodologia anterior. Foram desenvolvidos controladores dedicados ao rastreamento das variáveis de velocidade e altitude, com o objetivo de reduzir a carga de trabalho do piloto.

Figura 15 – Resposta dos estados latero-direcionais para distúrbio



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A matriz C é uma matriz identidade, considerando que todos os estados da planta estão disponíveis para medição, enquanto a matriz H seleciona as variáveis de desempenho a serem rastreadas:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O rastreamento de referência foi feito utilizando um compensador PI. Considerando rastreamento de duas saídas, foram utilizados dois integradores independentes:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com isso, a estrutura aumentada do sistema é composta pelas matrizes:

$$A_a = \begin{bmatrix} -0,0287 & 0,3089 & 0,0595 & -9,8066 & 3,5281 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ -0,0314 & -7,9767 & -0,5360 & 1,0087 \times 10^{-11} & 3,8634 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & -11,5567 & -216,4071 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,7756 \times 10^{-11} & -25,0000 & 0 & 25,0000 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_a = \begin{bmatrix} 1,1273 & 0,0233 \\ 5,5653 \times 10^{-4} & -0,6016 \\ 0 & -86,6626 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A saída aumentada do sistema, composta pelas saídas físicas e pela saída do compensador, é definida por:

$$C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de saída de desempenho H_a é estendida ao sistema aumentado:

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para as matrizes de ponderação foi considerado erro admissível de até 2 m/s na velocidade ($V_{max} = 2$), 5 metros na altitude ($h_{max} = 5$), 50% na atuação do motor ($T_{i,max} = 0,5$) e uma deflexão máxima de 5° no profundor ($\delta_{e,max} = 0,0873$).

Com base nesses limites, a matriz de ponderação do esforço de controle foi definida como:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{i,max}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{e,max}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,0000 & 0 \\ 0 & 131,3123 \end{bmatrix}$$

A matriz que penaliza o erro de regime permanente foi construída da mesma forma, considerando os valores máximos admissíveis para os erros de rastreamento:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_{max}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{max}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2500 & 0 \\ 0 & 0,0400 \end{bmatrix}$$

A matriz de ponderação do erro de rastreamento ao longo do tempo foi definida como:

$$Q = H_a^\top H_a$$

Essas matrizes foram utilizadas a fim de obter uma matriz K_a que minimiza J . Para uma referência unitária de velocidade e altitude, foi obtido

$$K_a = \begin{bmatrix} 12,5585 & 6,0994 \times 10^{-4} \\ 69,6045 & -0,1496 \\ -3,2057 & 0,1217 \\ -630,9383 & -3,7465 \\ 7,6750 & -0,0352 \\ -26,2286 & -3,6928 \times 10^{-4} \\ 25,6280 & 0,0632 \\ -25,6744 & -1,0577 \times 10^{-4} \\ 14,6053 & 0,0092 \end{bmatrix}^T$$

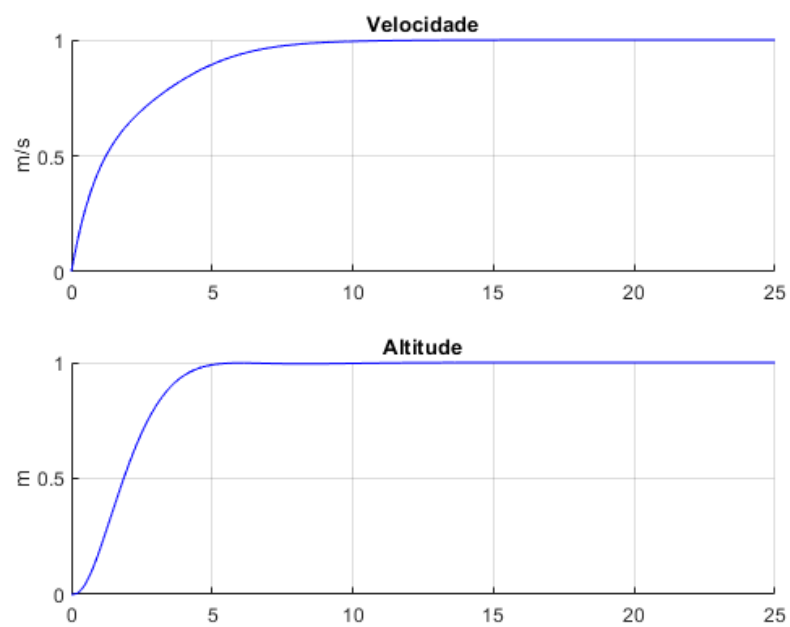
A matriz K_a resultou em $J = 2,060936$.

5.4.1 Análise do efeito do piloto automático

Para avaliar o efeito do piloto automático, o sistema foi submetido a uma referência degrau unitário em velocidade e altitude, e a saída de desempenho foi observada conforme apresentado na Figura 16.

Assim como nos projetos dos sistemas de aumento de estabilidade, o mesmo comportamento obtido no piloto automático do modelo de asa rígida foi observado no modelo de asa flexionada. Percebe-se que o sistema é capaz de seguir a referência enviada. A velocidade alcança a referência em aproximadamente 10 segundos, enquanto a altitude leva 5 segundos para chegar no valor de referência. Ambos apresentam tempo de acomodação consideravelmente elevados. Apesar de o sistema seguir a referência, os tempos de acomodação elevados sugerem a necessidade de otimização.

Figura 16 – Resposta da saída de desempenho a um degrau unitário



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o desenvolvimento e a análise de sistemas de controle aplicados a um veículo aéreo não tripulado com asa flexível, considerando duas configurações estruturais distintas: asa rígida e asa flexionada. O objetivo principal consistiu no projeto de sistemas de aumento de estabilidade longitudinal e latero-direcional, bem como de um piloto automático para voo de cruzeiro.

Para a configuração com asa rígida, foi realizada inicialmente a análise dos autovalores da dinâmica da aeronave, com base nos critérios estabelecidos pela norma MIL-F-8785C, que define métricas para o comportamento dinâmico dos modos característicos. Observou-se que a dinâmica longitudinal, em particular o modo de período curto, e o modo espiral da dinâmica latero-direcional não atendiam aos requisitos da norma.

Com o objetivo de melhorar a resposta do modo de período curto, foi projetado um sistema de aumento de estabilidade longitudinal por meio da realimentação dos estados α e q , utilizando a técnica LQR. A realimentação deslocou os autovalores do modo de período curto para o semiplano real negativo, eliminando as oscilações associadas e resultando em tempos de resposta adequados. Além disso, a resposta dos estados não diretamente controlados também apresentou melhora. Como consequência, tanto a dinâmica de período curto quanto a fugoidal passaram a satisfazer os critérios da norma MIL-F-8785C.

No caso do sistema de aumento de estabilidade latero-direcional, o foco foi a melhoria do modo *dutch roll*, com realimentação dos estados β e r . A aplicação dos ganhos LQR resultou em autovalores com parte real negativa, eliminando as oscilações desse modo. Os demais estados latero-direcionais também foram influenciados, especialmente o ângulo de rolagem ϕ e a taxa de rolagem p , que apresentaram maior overshoot em decorrência das ações de controle. Ainda assim, esses estados mantiveram comportamento estável, sem comprometer a segurança da dinâmica lateral da aeronave.

Por fim, foi desenvolvido um piloto automático capaz de rastrear comandos de velocidade e altitude. Embora tenha seguido adequadamente as referências impostas ao sistema, observou-se que os tempos de acomodação foram relativamente elevados, indicando a possibilidade de melhorias futuras no desempenho transitório.

As mesmas etapas de projeto e análise foram aplicadas ao modelo com asa flexionada. Devido à semelhança estrutural entre as matrizes linearizadas desse modelo e as do caso com asa rígida, os sistemas de controle projetados apresentaram desempenhos equivalentes. As realimentações aplicadas resultaram em autovalores igualmente deslocados para o semiplano real negativo, garantindo a estabilidade dos modos de interesse. As respostas dos estados controlados e não controlados mantiveram o mesmo padrão observado no caso rígido.

Cabe destacar que os modelos de corpo rígido utilizados para as configurações com asa rígida e asa flexionada não apresentaram diferenças significativas em suas respostas dinâmicas, uma vez que a flexibilidade estrutural foi representada apenas de forma implícita, por meio de alterações nos parâmetros do modelo linearizado. Para que os efeitos aeroelásticos sejam de fato capturados e analisados com maior fidelidade, seria necessário considerar explicitamente a dinâmica estrutural da

aeronave, incluindo modos de flexão e torção das superfícies sustentadoras. Tal abordagem é discutida em profundidade por Waszak e Schmidt (1988), que propõe a modelagem integrada da dinâmica de voo com os modos estruturais, possibilitando uma representação mais realista do comportamento aeroelástico e seus impactos na estabilidade e desempenho dos sistemas de controle. A inclusão desses efeitos representa um passo importante para futuras investigações e validações em sistemas reais.

Dessa forma, conclui-se que os objetivos propostos neste trabalho foram atingidos, com o desenvolvimento de sistemas de controle capazes de melhorar a estabilidade e o desempenho de um veículo aéreo não tripulado em voo de cruzeiro. A aplicação das técnicas de realimentação de estados demonstrou ser eficaz tanto para a configuração com asa rígida quanto para a flexionada, embora a representação da flexibilidade estrutural tenha sido limitada. Os resultados obtidos fornecem uma base sólida para estudos futuros, especialmente no sentido de incorporar modelos aeroelásticos mais completos, capazes de representar com maior precisão os efeitos da interação entre a dinâmica de voo e a flexibilidade estrutural da aeronave.

REFERÊNCIAS

- CESNIK, C. E. S.; BROWN, E. L. Active aeroelastic wing technology development. **Journal of Aircraft**, Reston, VA, v. 39, n. 5, p. 796–806, set. 2002.
- COOK, M. V. **Flight Dynamics Principles: a linear systems approach to aircraft stability and control** 3rd ed. [S. I.] Butterworth-Heinemann, 2012.
- ETKIN, B.; REID, L. D. **Dynamics of Flight: stability and control**. 3rd. ed. [S. I.]: John Wiley & Sons, 1996.
- HALL, A.; LIPTÁK, B. **Airplane Stability and Control: a history of the technologies that made aviation possible**. [S. I.]: Dover Publications, 2014.
- HODGES D. H.; PIERCE, G. A. **Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2011.
- MCLEAN, D. **Automatic Flight Control Systems**. [S. I.]: Prentice Hall, 1990.
- NELSON, R. C. **Flight Stability and Automatic Control**. 2nd ed. [S. I.]: McGraw-Hill, 1998.
- OGATA, K. **Modern Control Engineering**. [S. I.]: Prentice Hall, 2010.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. [S. I.]: Pearson, 2011.
- STENGEL, R. F. **Flight Dynamics**. [S. I.]: Princeton University Press, 1994.
- STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. **Aircraft Control and Simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems**. 3rd ed. [S. I.]: John Wiley & Sons, 2015.
- UNITED STATES OF AMERICA. Department of Defense. **MIL-F-8785C: Flying qualities of piloted airplanes**. Washington, D.C., 1980.
- WASZAK, M. R.; SCHMIDT, D. K. Flight dynamics of aeroelastic vehicles. **Journal of Aircraft**, v. 25, n. 6, p. 563–571, 1988.
- WRIGHT J. R.; COOPER, J. E. **Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads**. Chichester, United Kingdom: John Wiley & Sons, 2007.
- ZÚÑIGA, D. F. C. **Aeroelastic Testing of Flexible Aircraft using Acceleration and Strain Sensors**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos - SP, 2019