UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Ricardo Chicalé Lemes

Propriedades Genéricas de Sistemas Hamiltonianos

São José do Rio Preto
2013

Ricardo Chicalé Lemes

Propriedades Genéricas de Sistemas Hamiltonianos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto
2013

Lemes, Ricardo Chicalé.
Propriedades genéricas de sistemas hamiltonianos / Ricardo Chicalé Lemes. -- São José do Rio Preto, 2013
147 f. : il., fórmulas

Orientador: Vanderlei Minori Horita
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Geometria. 2. Geometria simplética. 3. Sistemas hamiltonianos. I. Horita, Vanderlei Minori. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 514.154

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Ricardo Chicalé Lemes

Propriedades Genéricas de Sistemas Hamiltonianos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan
Professor Adjunto
UFU - Uberlândia

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto

05 de Dezembro de 2013

À minha família,
dedido.

Agradecimentos

Com a conclusão deste trabalho, deixo meus agradecimentos:

À minha família, especialmente à minha mãe, Cleusa, pela paciência, incentivo e ajuda nos momentos mais difíceis do processo de pesquisa, escrita e apresentação deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita pela confiança nas minhas decisões, pela paciência e pela ajuda nos momentos mais complicados da pesquisa e produção da dissertação.

À banca examinadora, Prof. Dr.Thiago Aparecido Catalan e Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi, por aceitarem o convite para avaliar este trabalho.

Aos meus professores de graduação, especialmente aos professores Flavio Freitas Castilho, Nilton Borges Pimenta, cujo incentivo me trouxeram até esta fase da minha vida acadêmica.

Aos meus amigos e companheiros de graduação e pós-graduação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

E à todos que contribuíram direta ou indiretamente de alguma forma na conclusão deste trabalho.

"*So blind is the curiosity by which mortals are possessed, that they often conduct their minds along unexplored routes, having no reason to hope for success, but merely being willing to risk the experiment of finding whether the truth they seek lies there.*"

(René Descartes)

Resumo

Nosso objetivo neste trabalho é demonstrar o Teorema da Densidade Geral que é um resultado análogo ao Teorema de Kupka-Smale para campos de vetores hamiltonianos. O Teorema da Densidade Geral afirma que o conjuntos dos campos hamiltonianos em uma variedade simplética M que possuem a propriedade H2-N é residual em $\mathfrak{X}_H^k(M)$.

Começamos estabelecendo as teorias simpléticas linear e não-linear básicas e depois estudamos suas conexões com os sistemas hamiltonianos, provando os principais resultados da teoria e alguns resultados relacionados. Recebem destaque o estudo das curvas genéricas de matrizes simpléticas, a noção de funções geradoras de difeomorfismos simpléticos e sua aplicação na questão da estabilidade dos pontos fixos elípticos de campos hamiltonianos, a qual é respondida parcialmente através da Forma Normal de Birkhoff.

Depois de estabelecer os resultados necessários, passamos a estudar a dinâmica hamiltoniana do ponto de vista das famílias a um parâmetro de difeomorfismos simpléticos. Provamos um resultado devido a Pugh e consideramos a questão da estabilidade estrutural de certas famílias de difeomorfismos simpléticos. Finalmente, provamos o Teorema da Densidade Geral usando a noção de pseudotransversalidade dada no Apêndice C.

Este trabalho é baseado nas notas de aula *Lectures on Hamiltonian Systems* do professor R. Clark Robinson.

Palavras-chave: geometria simplética, campos de vetores hamiltonianos, dinâmica hamiltoniana, propriedades genéricas.

Abstract

In this work our goal is to prove the General Density Theorem which is an analogous result for hamiltonian vector fields of the Kupka-Smale Theorem. The General Density Theorem states that the set of hamiltonian vector fields on a symplectic manifold M that has the property H2-N is a residual subset of $\mathfrak{X}^k_H(M)$.

We begin by stating the basic linear and nonlinear symplectic theory and then we study its connections with hamiltonian systems, proving some of the main theorems of the theory and other related results. Here we give special attention to topics like generic curves of symplectic matrices, generating functions of symplectic diffeomorphisms and their applications in the problem of the stability of eliptic fixed points of hamiltonian systems, which is partially solved using the Birkhoff Normal Form.

After stating the necessary results, we begin to study some hamiltonian dynamics using one-parameter families of symplectic diffeomorphisms. We prove a result stated by Pugh and consider the problem of structural stability of a certain type of one-parameter family. Finally we prove the General Density Theorem using the notion of pseudotransversality given in Appendix C.

This work is based on the lecture notes *Lectures on Hamiltonian Systems* of professor R. Clark Robinson.

Keywords: symplectic geometry, hamiltonian vector field, hamiltonian dynamics, generic properties.

Lista de Símbolos

$[X, Y]$	Colchete de Lie dos campos vetoriais X e Y.
Δ_M	Diagonal da variedade produto $M \times M$.
$\mathrm{ev}(F_p \circ K)$	Aplicação de Avaliação de $F_p \circ K$.
$\mathrm{ev}(G_p \circ K)$	Aplicação de Avaliação de $G_p \circ K$.
$\Gamma(\ker(\omega))$	Espaço das seções do fibrado característico $\ker(\omega)$.
$\Gamma(f, p)$	Conjunto dos pontos periódicos de período $\leq p$ de f que pertencem a um conjunto compacto $V \subset I \times M$.
Γ_e	Superfície de energia $H^{-1}(e)$ no nível e.
$\iota(v)\omega_p$	1-forma induzida em T_pM através da forma simplética pela relação $\iota(v)\omega_p(u) = \omega(p)(v, u)$.
$\ker(\omega)$	Fibrado característico da 2-forma ω.
$\mathcal{E}_\lambda$	Autoespaço generalizado do autovalor λ.
$\mathcal{U}$	Conjunto das matrizes simpléticas que possuem um autovalor múltiplo.
$\mathfrak{X}(M)$	Espaço dos campos de vetores definidos em M.
$\mathfrak{X}^k_H(M)$	Espaço dos campos hamiltonianos de classe C^k definidos em M.
$\mathfrak{X}_\omega(M)$	Espaço dos campos de vetores simpléticos definidos em M.
$\mathscr{B}$	Álgebra de Banach formada por campos vetoriais de $I \times M$ com suporte compacto e cuja projeção na segunda coordenada são campos hamiltonianos.
$\mathscr{D}^k$	Interseção dos conjuntos $\mathscr{D}^k(p, N)$ sobre os números naturais p e N.
$\mathscr{D}^k(p, N)$	Conjunto das famílias a um parâmetro cujos pontos periódicos de período $\leq p$ tem a propriedade H2-N.
$\mathscr{G}$	Conjunto das curvas genéricas de matrizes simpléticas.
$\mathscr{L}_\omega$	Fibrado em M cujas fibras são formadas por transformações lineares simpléticas.

$\mathscr{L}_X\omega$	Derivada de Lie da forma ω na direção do campo vetorial X.
$\mathscr{R}^k$	Interseção dos conjuntos $\mathscr{R}^k(p,N)$ sobre os números naturais p e N.
$\mathscr{R}^k(p,N)$	Subconjunto de $\mathscr{D}^k(p,N)$ cujos elementos satisfazem a condição de transversalidade das aplicações F_j em relação Δ_M e G_j em relação a W^N nos pontos periódicos de período $j \leq p$.
μ	Aplicação entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\Omega^1(M)$ induzida por μ_p.
μ_p	Isomorfismo entre T_pM e T_p^*M dado por $\mu(p) = \iota(v)\omega_p$.
ω	Forma simplética.
$\Omega(f)$	Conjuntos dos pontos não-errantes da família a um parâmetro f.
$\Omega^1(M)$	Espaço das 1-formas diferenciais definidas em M.
$\Omega^k(M)$	Espaço das k-formas diferenciais definidas em M.
$\Omega_c(f)$	Conjunto dos pontos não-errantes de f cuja órbita está contida em um subconjunto compacto.
$\mathrm{Per}(f)$	Conjunto dos pontos periódicos da família a um parâmetro f.
ψ_H^t	Fluxo do campo hamiltoniano X_H.
ψ_t^X	Fluxo do campo vetorial X.
$\sigma(\Phi)$	Adjunta de uma matriz σ-simplética Φ.
Σ_1	Seção de Poincaré do campo hamiltoniano X_H.
$\mathrm{Symp}^k(I \times M)$	Conjunto das famílias a um parâmetro de difeomorfismos simpléticos.
$\mathrm{Symp}^k(M)$	Conjunto dos difeomorfismos simpléticos de classe C^k de uma variedade simplética (M,ω).
Θ	Aplicação de Poincaré do campo hamiltoniano X_H.
$\widetilde{\Phi}$	Adjunta simplética da matriz simplética Φ.
$C(f,p,\ell)$	Conjunto dos pontos de um compacto $V \subset I \times M$ que estão a uma distância maior ou igual $2^{-\ell}$ do conjunto $\Gamma(f,p)$.
$C^1(I,\mathrm{Sp}(2n))$	Espaço das curvas de matrizes simpléticas de classe C^1.
f^p	p-ésima iterada da família a um parêmtro f.
V_λ	Autoespaço do autovalor λ.
W^ω	Complemento simplético do subespaço W.
W^N	Subconjunto de $\mathscr{L}_\omega$ cujas fibras são transformações lineares que não são N-elementares.
X_H	Campo hamiltoniano associado à função hamiltoniana H.

Sumário

Introdução

Na Teoria de Sistemas Dinâmicos, o Teorema de Kupka-Smale afirma que a maioria dos campos vetoriais $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, onde M é uma variedade, só possuem elementos críticos hiperbólicos. Mais precisamente, dizemos que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ tem a propriedade (G3) se todo elemento crítico (singularidades e órbitas periódicas) é hiperbólico, isto é, os autovalores λ associados aos elementos críticos são tais que $\Re(\lambda) \neq 0$, e as variedades invariantes (variedades estável e instável) dos elementos críticos são transversais. Então, o Teorema de Kupka-Smale afirma que a propriedade (G3) é uma propriedade genérica em $\mathfrak{X}^k(M)$ nos termos da Definição 5.1.

Nosso objetivo neste trabalho é provar um resultado análogo ao Teorema de Kupka-Smale para sistemas hamiltonianos. O que faremos é substituir a hiperbolicidade dos elementos críticos pela propriedade H2-N e provar o Teorema da Densidade Geral que afirma que a propriedade H2-N é uma propriedade genérica em $\mathfrak{X}^k_H(M)$.

No primeiro capítulo, estudamos a teoria linear básica sobre os espaços vetoriais simpléticos. Começamos por definir uma forma simplética em um espaço vetorial de dimensão par e com essa definição, estabelecemos o conceito de espaço vetorial simplético e de simplectomorfismo linear. A partir daí, passamos a classificar certos subespaços de um espaço vetorial simplético, estabelecemos a noção de base simplética e provamos que todo espaço vetorial simplético admite uma base simplética. Dado esse fato, definimos os conceitos de matriz simplética e matriz hamiltoniana relativamente à base simplética e estudamos algumas de suas caracterizações. Por fim, estudamos o comportamento dos autovalores de matrizes simpléticas e seus autoespaços generalizados.

No Capítulo 2 utilizamos o estudo feito sobre os autovalores e autoespaços de matrizes simpléticas no Capítulo 1 para dar uma forma normal para essas matrizes, que é análogo à forma canônica de Jordan para matrizes em geral. Consideramos apenas o caso em que os autovalores tem multiplicidade 2, o que é justificado no Capítulo 3.

O Capítulo 3 trata do estudo das curvas genéricas de matrizes simpléticas. Tomamos o conjunto $\mathcal{U}$ das matrizes simpléticas que possuem um autovalor múltiplo e consideramos o conjunto das curvas de matrizes simpléticas que intersectam $\mathcal{U}$ transversalmente. Pelo Teorema da Transversalidade de Thom (Teorema C.6), o conjunto $\mathscr{G}$ dessa curvas é um subconjunto aberto e denso em $C^1(I, \mathrm{Sp}(2n))$ e aos elementos desse conjunto demos o nome de curvas genéricas. O objetivo principal do capítulo é estabelecer em que condições uma curva de matrizes simpléticas intersecta efetivamente o conjunto $\mathcal{U}$ e, a partir daí, estudar a bifurcação dos autovalores das matrizes simpléticas que são a intersecção de uma curva genérica com $\mathcal{U}$. Resulta do Lema 3.6 que as curvas genéricas só podem intersectar matrizes com autovalores de multiplicidade 2 e os Teoremas 3.9 e 3.10 dão critérios mais rigorosos sob os quais isso acontece. Finalmente, o Teorema 3.12 classifica todas as possibilidades de bifurcação dos autovalores de matrizes que não são 2-elementar, ou seja, que possuem pelo menos um autovalor de multiplicidade 2, e pertencem a uma curva genérica.

No Capítulo 4 passamos a estudar a teoria simplética não-linear. Na seção 4.1, definimos a forma diferencial simplética ω em uma variedade M de dimensão par e, em seguida, definimos o conceito de variedade simplética. A partir disso, damos as noções básicas de sistemas de coordenadas simpléticas locais e difeomorfismo simplético. Com essas noções, definimos campos vetoriais simpléticos e estudamos algumas propriedades do fluxo desses campos. Em seguida, provamos o Teorema de Darboux, que é uma generalização local para variedades simpléticas do teorema da existência de bases simpléticas para espaços vetoriais simpléticos, e os Teoremas 4.17 e 4.18 generalizam o Teorema de Darboux e dão uma caracterização para subvariedades de uma variedade simplética em um sistema de coordenadas simplético conveniente.

A seção 4.2 estuda a estrutura simplética do fibrado cotangente. Provamos nessa seção que o fibrado cotangente de toda variedade diferenciável M é uma variedade simplética tomando a forma simplética ω como sendo menos a diferencial da forma tautológica α definida na seção.

Na seção 4.3 começamos o estudo de campos hamiltonianos em variedades simpléticas. Primeiro, definimos o campo hamiltoniano X_H em termos da forma simplética e depois mostramos que em coordenadas simpléticas locais, o campo hamiltoniano tem a forma padrão $X_H = \mathbf{J} \cdot \nabla H$. Em seguida, provamos que o fluxo de X_H é um difemorfismo simplético que é tangente às superfícies de energia de H e que em um sistema de coordenadas simpléticas locais conveniente centrado em um ponto regular de X_H o campo X_H pode ser linearizado.

Na seção 4.4, construimos a aplicação de Poincaré de X_H e mostramos que se um ponto periódico $p \in \Sigma \cap \gamma$ é 0-elementar, onde Σ é uma seção de Poincaré e γ é órbita fechada de X_H, então γ pertence a uma família de órbitas fechadas de X_H. Provamos também que, quando restrita a uma superfície de energia, a aplicação de Poincaré é um difeomorfismo simplético.

A seção 4.5 trata das funções geradoras de difeomorfismos simpléticos. Nessa seção, colocamos uma estrutura simplética na variedade produto $M_1 \times M_2$, onde (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) são variedades simpléticas, e a forma simplética em $M_1 \times M_2$ é a forma $\Omega = \pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2$. Então, dado um difeomorfismos simplético $f : M_1 \to M_2$, usando o Lema de Poincaré construimos localmente uma função $S : U \subset \mathrm{Graf}(f) \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição $i_f^*\Lambda = dS$, onde $d\Lambda = -\Omega$ e i_f é a inclusão do gráfico de f em $M_1 \times M_2$. Em seguida, provamos localmente que com essa condição sobre S e com a condição adicional de que um dos blocos $n \times n$ do Hessiano de S tenha determinante diferente de zero, então f pode ser localmente exprimida em termos das derivadas parciais de S. Finalmente, a Proposição 4.35 nos dá uma recíproca particular da discussão sobre S.

Os resultados da seção 4.5 são então empregados na seção 4.6 para estudar o comportamento local de um campo hamiltoniano X_H que tem um ponto fixo elíptico. Primeiro, consideramos um caso em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ onde há um ponto fixo elíptico para X_H tomando um função H da forma

$$H = \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^n} a_J \xi_J, \tag{1}$$

onde $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $\xi_J = \rho_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{j_n}$ e $\rho_j = \dfrac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2)$. Nesse exemplo, constatamos que o ponto fixo elíptico é estável segundo Lyapunov. Em seguida, consideramos o caso em que X_H tem um ponto fixo elíptico mas H é arbitrária, e mostramos que existe um sistema de coordenadas simpléticas locais tal que H tem a forma (1) exceto por um função $\mathcal{O}_\infty : M \to \mathbb{R}$ que tem todas as suas derivadas parciais na origem igual zero e $\mathcal{O}_\infty(0) = 0$. Esse resultado é a chamada forma normal de Birkhoff. Como uma aplicação desse resultado, a Proposição 4.40 nos dá uma forma normal para um difeomorfismo simplético $g : M \to M$ que possui um ponto fixo elíptico elementar.

Finalmente, no Capítulo 5 estudamos alguns aspectos de dinâmica hamiltoniana e provamos o Teorema da Densidade Geral para sistemas hamiltonianos. A demonstração é feita no contexto geral de famílias a um parâmetro de difeomorfismos simpléticos. A razão disso é que pela Proposição 4.32, a aplicação de Poincaré quando restrita a uma superfície de energia é um difeomorfismo simplético, então é suficiente considerar aplicações $f : I \times M \to I \times M$ da forma $f(t, q) = (t, f_t(q))$, onde $f_t : M \to M$ é um difeomorfismo simplético para cada $t \in I$ e I é um intervalo de números reais, uma vez que, localmente, a aplicação de Poincaré é uma aplicação da forma de f. Assim, provando a densidade no conjunto $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$ das famílias a um parâmetro de difeomorfismos simpléticos, estaremos provando a densidade em $\mathfrak{X}^k(M)$.

Na seção 5.1, damos a definições básicas de pontos periódicos, pontos periódicos 0-elementar (respec. N-elementar), definimos a propriedade H2-N para campos hamiltonianos e também definimos de forma precisa o que significa uma propriedade no espaço de aplicações $C^k(M, N)$ ser genérica. Em seguida, enunciamos o Teorema da Densidade Geral e demonstramos alguns resultados relacionados. Dentre eles, a Proposição 5.6 estuda o comportamento de famílias que possuem 1 como um de seus autovalores e a Proposição 5.8, a qual também é chamada de Teorema da Densidade Geral (de Pugh), e nos diz que para um subconjunto residual $\mathscr{R} \subset \mathrm{Symp}^1(I \times M)$ temos que o fecho do conjunto dos pontos não-errantes de $f \in \mathscr{R}$ é igual ao fecho dos pontos periódicos de f, ou seja, é uma propriedade genérica das famílias em $\mathrm{Symp}^1(I \times M)$.

Na seção 5.2, damos as definições de família estruturalmente estável e P-estável e mostramos que se uma família $f \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ tem um ponto periódico (t, q) de período p e $df_t^p(q)$ tem 1 como um autovalor de módulo 1, então f não é P-estável.

Na seção 5.3 provamos o Teorema da Densidade Geral usando os métodos descritos no Apêndice C sobre pseudotransversalidade. A idéia da demonstração é basicamente converter a propriedade H2-N em termos de transversalidade e aplicar o Teorema C.13.

Capítulo 1

Álgebra linear simplética

Seja V um espaço vetorial e $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear sobre V.

Definição 1.1. Dizemos que a forma $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ é **alternada** se $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ para todo $u, v \in V$.

Definição 1.2. Dizemos que a forma $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ é **não-degenerada** se $\omega(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ implica $u = 0$.

Definição 1.3. Dizemos que a forma bilinear $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma **simplética** se ela for alternada e não-degenerada.

Definição 1.4. Um **espaço vetorial simplético** é um par (V, ω), onde V é um espaço vetorial de dimensão par e ω é uma forma simplética sobre V. Dizemos que ω é uma **estrutura simplética** sobre V.

Exemplo 1.5. O exemplo padrão de espaço vetorial simplético é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$ com a forma bilinear

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j,$$

onde $dx_j(z) = z_j$ e $dy_j(z) = z_{n+j}$, para todo $z = (z_1 \ldots, z_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Para verificar que ω_0 é uma forma simplética basta mostrar que ela é não-degenerada, pois ser alternada é uma consequência direta da definição de produto exterior de formas. Assim, seja $u = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j e_j \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega_0(u, v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^{2n}$. Então, em particular, temos que $\omega_0(u, e_k) = 0$, para $k = 1, \ldots, 2n$. Mas,

$$\begin{aligned} \omega_0(u, e_k) &= \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j(u, e_k) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} dx_j(u) & dx_j(e_k) \\ dy_j(u) & dy_j(e_k) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \delta_{(j+n)k} - \alpha_{j+n} \delta_{jk}) = \left\{ \begin{array}{rll} \alpha_{k-n}, & \text{se} & k = n+1, \ldots, 2n \\ -\alpha_{k+n}, & \text{se} & k = 1, \ldots, n \end{array} \right. , \end{aligned}$$

onde δ_{jk} é o delta de Kronecker. Em qualquer caso, resulta que $\alpha_j = 0$, para $j = 1, \dots, 2n$. Ou seja, $u = 0$ e portanto, ω_0 é não-degenerada.

Veremos que, a menos de isomorfismo, este é o único exemplo de espaço vetorial simplético de dimensão $2n$.

Definição 1.6. Um **simplectomorfismo linear** entre espaços vetoriais simpléticos (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) é um isomorfismo linear $\Phi : V_1 \to V_2$ que satisfaz a condição

$$\Phi^* \omega_2 = \omega_1,$$

onde $\Phi^* \omega_2(u, v) = \omega_2(\Phi u, \Phi v)$ é o **pull-back** de ω_2 pela transformação Φ, com $u, v \in V_1$.

Quando $V_1 = V_2 = V$ e $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ simplesmente dizemos que $\Phi : V \to V$ é um simplectomorfismo linear de V.

Os simplectomorfismos lineares de V formam um grupo de Lie denotado por $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ e chamado de **grupo linear simplético**. No caso em que $V = \mathbb{R}^{2n}$ e $\omega = \omega_0$ usa-se a notação $\mathrm{Sp}(2n)$ em vez de $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Definição 1.7. Seja V um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ com estrutura simplética ω e $W \subset V$ um subespaço de V. Definimos o **complemento simplético** de W em V com sendo o subespaço

$$W^\omega = \{v \in V;\ \omega(u, v) = 0, \quad \forall u \in W\}.$$

Diferente do complemento ortogonal de um subespaço W em um espaço vetorial V com uma forma bilinear simétrica, não se tem necessariamente que $W \oplus W^\omega = V$. O subespaço $W_3 \subset \mathbb{R}^{2n}$ do Exemplo 1.10 abaixo é um subespaço tal que $W_3^\omega \subset W_3$ e $W_3 \neq \mathbb{R}^{2n}$ e portanto, $W_3 \oplus W_3^\omega \neq \mathbb{R}^{2n}$.

Lema 1.8. *Sejam (V, ω) um espaço vetorial simplético e $W \subseteq V$ um subespaço. Então, valem as seguintes propriedades a respeito do complemento simplético:*

(1) $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$*;*

(2) $W^{\omega\omega} = W$*;*

(3) $(W_1 \cap W_2)^\omega = W_1^\omega + W_2^\omega$*;*

(4) Se $W_1 \subset W_2$*, então* $W_2^\omega \subset W_1^\omega$.

Demonstração. (1) Considere a aplicação $i_\omega : V \to V^*$ definida por $i_\omega(u)(v) = \omega(u, v)$, onde V^* é o dual de V. Temos que i_ω é linear e como ω é simplética, segue que i_ω é injetiva. Consequentemente, i_ω é sobrejetiva, uma vez que $\dim V = \dim V^*$. Logo, i_ω é um isomorfismo de V em V^*.

Assim,

$$i_\omega(W^\omega) = \{\varphi \in V^*;\ \varphi(v) = 0,\ \forall v \in W\} = W^\circ,$$

onde W° é o **aniquilador** de W em V^*. Dessa forma, temos $\dim W^\omega = \dim W^\circ$ e como para qualquer espaço vetorial V vale $\dim V = \dim W + \dim W^\circ$ (ver [38], Teorema 5.29, p. 178) resulta que $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$.

(2) Essa propriedade decorre da propriedade (1), visto que $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$ e $\dim W^\omega + \dim W^{\omega\omega} = \dim V$ implicam que $\dim W = \dim W^{\omega\omega}$. Logo, se $u \in W$, então $\omega(u, v) = 0$ para todo $v \in W^\omega$, o que implica $u \in W^{\omega\omega}$ e portanto, $W \subset W^{\omega\omega}$. Como as dimensões são iguais, resulta que $W = W^{\omega\omega}$.

(3) Se $w \in (W_1 \cap W_2)^\omega$, então $\omega(w, v) = 0$ para todo $v \in W_1 \cap W_2$. Logo, $w \in W_1^\omega$ ou $w \in W_2^\omega$. Em qualquer caso, temos $w \in W_1^\omega + W_2^\omega$, o que implica $(W_1 \cap W_2)^\omega \subset W_1^\omega + W_2^\omega$.

Reciprocamente, se $w \in W_1^\omega + W_2^\omega$, então $w = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1^\omega$ e $w_2 \in W_2^\omega$. Assim, dado $v \in W_1 \cap W_2$ temos que

$$\omega(w, v) = \omega(w_1, v) + \omega(w_2, v) = 0,$$

pois $\omega(w_1, v) = 0$ e $\omega(w_2, v) = 0$. Logo, $w \in (W_1 \cap W_2)^\omega$, o que implica $W_1^\omega + W_2^\omega \subset (W_1 \cap W_2)^\omega$ e obtemos a igualdade.

(4) Seja $u \in W_2^\omega$. Então, $\omega(u, v) = 0$ para todo $v \in W_2$ e como $W_1 \subset W_2$, segue que $\omega(u, v) = 0$ para todo $v \in W_1$. Dessa forma, temos que $u \in W_1^\omega$ e, portanto, $W_2^\omega \subset W_1^\omega$. □

Definição 1.9. Sejam $W \subset V$ um subespaço do espaço vetorial simplético V e W^ω seu complemento simplético. Então, dizemos que W é

(i) **isotrópico** se $W \subset W^\omega$;

(ii) **coisotrópico** se $W^\omega \subset W$;

(iii) **simplético** se $W \cap W^\omega = \{0\}$;

(iv) **lagrangiano** se $W = W^\omega$.

Observemos que se W é isotrópico, então $\omega|_W \equiv 0$ e se W é simplético, então $\omega|_W$ é não degenerada.

Do Lema 1.8 concluímos que se W é simplético, então W^ω é simplético e $W \oplus W^\omega = V$. Também concluímos que se W é isotrópico, então W^ω é coisotrópico e que se W é lagrangiano, então $\dim W = \dfrac{1}{2}\dim V$.

Exemplo 1.10. Seja $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ o espaço vetorial simplético do Exemplo 1.5 com a base canônica $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$. Da expressão obtida nesse exemplo, segue que

$$\omega_0(e_j, e_{j+n}) = 1 \quad \text{e} \quad \omega_0(e_j, e_k) = 0, \quad \text{se} \quad k \neq j+n, \tag{1.1}$$

para $j = 1 \ldots, n$. Uma base desse tipo é chamada de **base simplética** do espaço $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Essa observação nos permite destacar alguns dos subespaços caracterizados na Definição 1.9.

Os subespaços

$$W_1 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{e} \quad W_2 = \operatorname{span}\{e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}\}$$

são isotrópicos pois $\omega_0(e_j, e_k) = \omega_0(e_{n+j}, e_{n+k}) = 0$, para $j, k = 1, 2, 3$. O subespaço

$$W_3 = \operatorname{span}\{e_4 \ \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\}$$

é coisotrópico, uma vez que $W_3^{\omega_0} = \operatorname{span}\{e_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}\} \subset W_3$. O subespaço

$$W_4 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2}\}$$

é simplético. De fato, considerando a restrição $\omega_0|_{W_4} : W_4 \times W_4 \to \mathbb{R}$, basta supor que existe $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_{n+1} e_{n+1} + \alpha_{n+2} e_{n+2} \in W_4$ tal que $\omega_0(u, v) = 0$ para todo $v \in W_4$ e mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = 0$ da mesma forma que no Exemplo 1.5.

Finalmente, os subespaços $W_5 = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $W_6 = \operatorname{span}\{e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\}$ são lagrangianos. Para ver isso, notemos inicialmente que um subespaço lagrangiano é, ao mesmo tempo, isotrópico e coisotrópico. Que W_5 é isotrópico isso decorre das condições (1.1). Seja $u \in W_5^{\omega_0} \cap W_5^\perp$. Então, como $u \in W_5^\perp = W_6$, temos que

$$u = \sum_{i=1}^{q} \alpha_{j_i} e_{j_i}$$

e os j_i são da forma $n + k_i$, com $k_i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim,

$$\omega_0(e_{k_i}, u) = \alpha_{j_i} \omega_0(e_{k_i}, e_{j_i}) = \alpha_{j_i}.$$

Mas $e_{k_i} \in W_5$ e $u \in W_5^{\omega_0}$. Logo, $\alpha_{j_i} = \omega_0(e_{k_i}, u) = 0$, o que implica $u = 0$. Dessa forma, $W_5^{\omega_0} \cap W_5^\perp = \{0\}$ e com isso, $W_5^{\omega_0} \subset W_5$. Assim, W_5 é coisotrópico e, portanto, é lagrangiano.

Uma argumento análogo demonstra que W_6 também é lagrangiano.

A proposição a seguir mostra que todo espaço vetorial simplético (V,ω) de dimensão $2n$ admite uma base simplética e é isomorfo a $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ com a base (simplética) canônica.

Teorema 1.11. *Seja (V,ω) um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$. Então, existe uma base $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ de V tal que*

$$\omega(u_j,u_k)=\omega(v_j,v_k)=0 \quad e \quad \omega(u_j,v_k)=\delta_{jk},$$

onde δ_{jk} é o delta de Kronecker. Mais ainda, existe um isomorfismo linear $\Phi:\mathbb{R}^{2n}\to V$ tal que

$$\Phi^*\omega=\omega_0.$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre n. Como ω é não degenerada, dado $u_1\in V$ não nulo, existe $v_1\in V$ tal que $\omega(u_1,v_1)\neq 0$. Em particular, podemos escolher v_1 de forma que $\omega(u_1,v_1)=1$. Dessa forma, o subespaço gerado por u_1 e v_1 é simplético e a base $\{u_1,v_1\}$ é simplética.

Seja W o complemento simplético do subespaço gerado por u_1 e v_1. Então, (W,ω) é uma espaço simplético de dimensão $2n-2$. Pela hipótese de indução, existe uma base simplética $\{u_2,\dots,u_n,v_2,\dots,v_n\}$ de W. Assim, $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ é uma base simplética de V.

Seja $\Phi:\mathbb{R}^{2n}\to V$ dada por

$$\Phi z=\sum_{j=1}^n z_j u_j+\sum_{j=1}^n z_{n+j}v_j,$$

onde $z=(z_1,\dots,z_n)$. Afirmamos que Φ é um simplectomorfismo linear entre $\mathbb{R}^{2n}$ e V. Que Φ é um isomorfismo linear isso é claro, pois Φ é linear, $\Phi e_j=u_j$ e $\Phi e_{j+n}=v_j$, para $1\le j\le n$, onde $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ é a base (simplética) canônica de $\mathbb{R}^{2n}$. Então, basta mostrar que $\Phi^*\omega=\omega_0$.

Dados $z=(z_1,\dots,z_{2n})$ e $w=(w_1,\dots,w_{2n})$ em $\mathbb{R}^{2n}$, temos que

$$\begin{aligned}\omega_0(z,w)&=\sum_{j=1}^n dx_j\wedge dy_j(z,w)=\sum_{j=1}^n \det\begin{pmatrix} dx_j(z) & dx_j(w)\\ dy_j(z) & dy_j(w)\end{pmatrix}\\ &=\sum_{j=1}^n\det\begin{pmatrix} z_j & w_j\\ z_{j+n} & w_{j+n}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n(z_jw_{n+j}-z_{n+j}w_j).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\omega(\Phi z, \Phi w) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[z_j w_k \omega(u_j, u_k) + z_j w_{n+k}\omega(u_j, v_k) + z_{n+j} w_k \omega(v_j, u_k)$$
$$+ z_{n+j} w_{n+k}\omega(v_j, v_k)] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[z_j w_{n+k}\delta_{jk} - z_{n+j} w_k \delta_{jk}]$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(z_j w_{n+j} - z_{n+j} w_j)\,.$$

Portanto, $\Phi^*\omega = \omega_0$ e Φ é um simplectomorfismo entre $\mathbb{R}^{2n}$ e V.

$\square$

Corolário 1.12. *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ e $u_1, \dots, u_k$, $v_1, \dots, v_{k+q} \in V$ vetores linearmente independentes tais que $\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$ e $\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0$. Então, existem $u_{k+1}, \dots, u_n, v_{k+q+1}, \dots, v_n \in V$ tais que $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ é uma base simplética de V.*

Demonstração. Usaremos indução em q.

Para $q = 1$, considere o subespaço $W = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k\}$. Então, W é um subespaço simplético. Logo, W^ω é simplético e $V = W \oplus W^\omega$. Temos $v_{k+1} \in W^\omega$ e aplicando a construção do Teorema 1.11, obtemos uma base simplética $u_{k+1}, \dots, u_n, v_{k+1}, \dots, v_n$ de W^ω. Logo, $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ é uma base simplética de V.

Suponha agora que o resultado foi provado para o número natural $q \geq 1$ e sejam $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{k+q+1}$ nas condições do corolário. Seja $u_{k+q+1} \in V$ tal que

$$\omega(u_{k+q+1}, v_{k+q+1}) = 1$$

e seja $W = \operatorname{span}\{u_{k+q+1}, v_{k+q+1}\}$. Então, W é subespaço simplético de V e, consequentemente, W^ω é simplético, $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{k+q} \in W^\omega$ e $V = W \oplus W^\omega$. Pela hipótese de indução, podemos completar os vetores $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{k+q}$ para uma base simplética $\{u_1, \dots, u_{k+q}, u_{k+q+2}, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{k+q}, v_{k+q+2}, \dots, v_n\}$ de W^ω. Resulta que união dessas bases é uma base simplética de V.

$\square$

Relativamente à base simplética do Teorema 1.11, a matriz de ω é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

e dados $u, v \in V$, podemos expressar $\omega(u,v)$ na forma matricial como

$$\omega(u,v) = u^{\mathrm{T}}\mathbf{J}v.$$

Mas, como todo espaço vetorial simplético é simplectomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, segue que a matriz de ω_0 também é $\mathbf{J}$. Mais ainda, dado esse fato, podemos trabalhar apenas com $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ em vez de um espaço simplético arbitrário (V, ω). É o que faremos de agora em diante e escreveremos ω no lugar de ω_0.

Um fato extremamente útil é que dada uma base simplética $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$ em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ e $z \in \mathbb{R}^{2n}$, podemos escrever z como

$$z = \sum_{j=1}^{n} \omega(z, v_j)u_j - \sum_{j=1}^{n} \omega(z, u_j)v_j, \tag{1.2}$$

pois se $z = \sum_{j=1}^{n} z_j u_j + \sum_{j=1}^{n} z_{j+n} v_j$, então $\omega(z, u_j) = -z_{j+n}$ e $\omega(z, v_j) = z_j$. Essa representação das coordenadas de z através ω será útil em algumas ocasiões.

A forma simplética ω determina de modo natural uma forma de volume em $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\Omega = \omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega = \omega^n,$$

onde $\wedge$ representa a operação de multiplicação *exterior de formas*. (Ver Definição B.2, Apêndice B.)

Definição 1.13. Dizemos que $\Phi \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ é **simplética** se $\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\Phi = \mathbf{J}$. Uma matriz $\Phi \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ é chamada de **hamiltoniana** se

$$\omega(\Phi u, v) + \omega(u, \Phi v) = 0, \tag{1.3}$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Indicamos o conjunto das matrizes hamiltonianas por $\mathrm{sp}(2n)$.

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ é **simplética (hamiltoniana)** se a matriz de T relativamente à base simplética de $\mathbb{R}^{2n}$ for uma matriz simplética (hamiltoniana).

Seja Φ uma matriz simplética. Então, dados $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, temos

$$\omega(u,v) = u^{\mathrm{T}}\mathbf{J}v = u^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\Phi v = (\Phi u)^{\mathrm{T}}\mathbf{J}(\Phi v) = \omega(\Phi u, \Phi v) = \Phi^*\omega(u,v).$$

Assim, uma matriz Φ é simplética se, e somente se, $\omega(u,v) = \Phi^*\omega(u,v)$. Portanto, toda matriz simplética é a matriz de um simplectomorfismo linear de $\mathbb{R}^{2n}$, ou seja, o conjunto das matrizes simpléticas coincide com $\mathrm{Sp}(2n)$.

Observemos que a condição (1.3) é equivalente à igualdade

$$\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J} + \mathbf{J}\Phi = 0. \tag{1.4}$$

Dessa forma, fazendo os cálculos explicitamente, concluímos que o conjunto $\mathrm{sp}(2n)$ é exatamente a álgebra de Lie associada ao grupo simplético $\mathrm{Sp}(2n)$. A equação (1.4) nos dá uma caracterização alternativa para matrizes hamitoniana na forma de uma equação matricial.

Exemplo 1.14. Considere a matriz

$$\Phi = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

onde

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Então, temos que $\Phi^{\mathrm{T}} = \Phi$ e notando que $B_1B_2 = B_2B_1 = I_4$, através de um cálculo simples obtemos

$$\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\Phi = \begin{pmatrix} 0 & B_1B_2 \\ -B_2B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{J}.$$

Assim, Φ é uma matriz simplética. Mais ainda, do Teorema 1.1 e do fato de que toda matriz simplética é a matriz de um simplectomorfismo linear, segue que os vetores-coluna da matriz Φ formam uma base simplética de $\mathbb{R}^8$. De fato, pondo

$$\begin{aligned} u_1 &= (2,0,0,0,0,0,0,0) & u_2 &= (0,3,0,0,0,0,0,0) \\ u_3 &= (0,0,-4,0,0,0,0,0) & u_4 &= (0,0,0,8,0,0,0,0) \\ v_1 &= (0,0,0,0,1/2,0,0,0) & v_2 &= (0,0,0,0,0,1/3,0,0) \\ v_3 &= (0,0,0,0,0,0,-1/4,0) & v_4 &= (0,0,0,0,0,0,0,1/8) \end{aligned}$$

e considerando a forma simplética $\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$, o conjunto $\{u_1, \ldots, u_4, v_1, \ldots, v_4\}$ satisfaz as condições do Teorema 1.1.

Exemplo 1.15. Seja

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

uma matriz em $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Usando a caracterização (1.4), podemos obter condições sobre os blocos A, B, C e D de dimensão $n \times n$ para que Φ seja hamiltoniana. Seja

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J} + \mathbf{J}\Phi &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -C^{\mathrm{T}} & A^{\mathrm{T}} \\ -D^{\mathrm{T}} & B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C - C^{\mathrm{T}} & D + A^{\mathrm{T}} \\ -A - D^{\mathrm{T}} & -B + B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pela caracterização (1.4), teremos que Φ é hamiltoniana se, e somente se, $C = C^{\mathrm{T}}$, $A = -D^{\mathrm{T}}$ e $B = B^{\mathrm{T}}$. Essas igualdades em geral são úteis pois caracterizam uma matriz hamitoniana em função dos seus blocos $n \times n$.

Proposição 1.16. *Se Φ é uma matriz hamiltoniana, então* $\exp(\Phi)$ *é simplética.*

Demonstração. Seja Φ uma matriz hamiltoniana. Então $\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J}+\mathbf{J}\Phi = 0$ ou, equivalentemente, $\Phi^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}\Phi\mathbf{J}$. Queremos mostrar que $\exp(\Phi)^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\exp(\Phi) = \mathbf{J}$.

Inicialmente, temos que

$$\exp(\Phi)^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^k}{k!}\right)^{\mathrm{T}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\Phi^k\right)^{\mathrm{T}}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\Phi^{\mathrm{T}}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{J}\Phi\mathbf{J}\right)^k}{k!}.$$

Agora, por um cálculo simples vemos que $(\mathbf{J}\Phi\mathbf{J})^k = (-1)^{k-1}\mathbf{J}\Phi^k\mathbf{J}$. Logo,

$$\exp(\Phi)^{\mathrm{T}} = -\mathbf{J}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\Phi^k}{k!}\right)\mathbf{J} = -\mathbf{J}\exp(-\Phi)\mathbf{J}.$$

Finalmente, obtemos que

$$\exp(\Phi)^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\exp(\Phi) = -\mathbf{J}\exp(-\Phi)\mathbf{J}\mathbf{J}\exp(\Phi) = \mathbf{J}\exp(-\Phi)\exp(\Phi) = \mathbf{J}.$$

Portanto, $\exp(\Phi)$ é simplética.

□

Proposição 1.17. *Se* $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$*, então* $\det \Phi = 1$.

Demonstração. Seja $\Omega = \omega^n$ a forma de volume em $\mathbb{R}^{2n}$ determinada por ω. Então, pela definição de determinante através de formas, temos que

$$\Phi^*\Omega(v_1, \dots, v_{2n}) = (\det \Phi)\Omega(v_1, \dots, v_{2n})$$

para todo $v_1, \dots, v_{2n} \in \mathbb{R}^{2n}$. Mas

$$\Phi^*\Omega = (\Phi^*\omega) \wedge \dots \wedge (\Phi^*\omega) = \omega \wedge \dots \wedge \omega = \Omega,$$

pois Φ é simplética. Logo, $\det \Phi = 1$.

□

Assim, $\mathrm{Sp}(2n)$ é um subgrupo do **grupo linear especial** $\mathrm{SL}(2n)$ formado pelas matrizes $2n \times 2n$ que tem determinante 1.

Definição 1.18. Dada uma matriz simplética $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$, definimos a **adjunta simplética** de Φ, denotada por $\widetilde{\Phi}$, como sendo a matriz que satisfaz a igualdade $\omega(\Phi u, v) = \omega(u, \widetilde{\Phi} v)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$.

Vemos que a igualdade $\omega(\Phi u, v) = \omega(u, \widetilde{\Phi} v)$ é equivalente a $\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J} = \mathbf{J}\widetilde{\Phi}$. Assim, obtemos uma definição alternativa para a adjunta simplética de Φ que, pela igualdade anterior, é dada por $\widetilde{\Phi} = -\mathbf{J}\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J}$.

Lema 1.19. *Seja* $\Phi \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$*. Então,*

(a) Φ *é simplética se, e somente se,* $\widetilde{\Phi} = \Phi^{-1}$*;*

(b) Φ *é hamiltoniana se, e somente se,* $\widetilde{\Phi} = -\Phi$.

Demonstração. (a) Seja Φ uma matriz simplética. Então, Φ é a matriz de um isomorfismo (simplético) e vale a igualdade $\omega(\Phi u, \Phi v) - \omega(u, v) = 0$. Assim, se $\Phi v = w$, então $v = \Phi^{-1} w$. Logo,

$$0 = \omega(\Phi u, w) - \omega(u, \Phi^{-1} w) = \omega(u, \widetilde{\Phi} w) - \omega(u, \Phi^{-1} w) = \omega(u, (\widetilde{\Phi} - \Phi^{-1}) w),$$

para todo $u, w \in \mathbb{R}^{2n}$. Como ω é não-degenerada, segue que $(\widetilde{\Phi} - \Phi^{-1})w = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^{2n}$. Portanto, $\widetilde{\Phi} = \Phi^{-1}$.

Reciprocamente, se $\widetilde{\Phi} = \Phi^{-1}$, então, dados $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ quaisquer, temos

$$\omega(\Phi u, \Phi v) = \omega(u, \widetilde{\Phi}\Phi v) = \omega(u, \Phi^{-1}\Phi v) = \omega(u, v)$$

e assim, Φ é simplética.

(b) Seja Φ hamiltoniana. Então, temos que $\omega(\Phi u, v) = -\omega(u, \Phi v)$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Subtraindo essa equação de $\omega(\Phi u, v) = \omega(u, \widetilde{\Phi} v)$, obtemos

$$0 = \omega(u, (\widetilde{\Phi} + \Phi)v).$$

Assim, temos que $(\widetilde{\Phi} + \Phi)v = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^{2n}$, pois ω é não-degenerada. Portanto, $\widetilde{\Phi} = -\Phi$.

Reciprocamente, se $\widetilde{\Phi} = -\Phi$, então, dados $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ quaisquer, temos que

$$\omega(\Phi u, v) + \omega(u, \Phi v) = \omega(u, \widetilde{\Phi} v) + \omega(u, \Phi v) = \omega(u, -\Phi v) + \omega(u, \Phi v) = 0.$$

Logo, Φ é hamiltoniana.

□

Definição 1.20. Seja $\Phi \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Diremos que a matriz Φ é **σ-simplética** se $\widetilde{\Phi} = \Phi^{-1}$ ou $\widetilde{\Phi} = -\Phi$.

Ou seja, uma matriz é σ-simplética se ela for simplética ou hamiltoniana. Nesse caso, vamos definir a matriz

$$\sigma(\Phi) = \begin{cases} \Phi^{-1}, & \text{se } \Phi \text{ é simplética;} \\ -\Phi, & \text{se } \Phi \text{ é hamiltoniana} \end{cases}$$

e teremos que Φ é σ-simplética se, e somente se, $\widetilde{\Phi} = \sigma(\Phi)$, a verificação desse fato sendo imediata.

Seja Φ uma matriz com autovalor λ. Então, indicaremos com $\sigma(\lambda)$ o autovalor de $\sigma(\Phi)$ correspondente ao autovalor λ. Se Φ for simplética, então $\sigma(\lambda) = \lambda^{-1}$. Da mesma forma, se Φ for hamiltoniana, temos que $\sigma(\lambda) = -\lambda$. Isso pode ser visto por uma simples manipulação algébrica, juntamente com o fato de que $\det(\Phi - \lambda I_{2n}) = 0$.

Quando Φ for σ-simplética, usaremos a notação $\widetilde{\lambda}$ para indicar o autovalor $\sigma(\lambda)$ de $\sigma(\Phi) = \widetilde{\Phi}$.

Lema 1.21. *Se $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ e $p(x) = \det(\Phi - xI)$ é o polinômio característico de Φ, então vale a identidade*

$$p(x) = x^{2n} p\left(\frac{1}{x}\right).$$

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que $\det \mathbf{J} = (-1)^{n+1}$ e portanto, $\det \mathbf{J}^{-1} =$

$(-1)^{n+1}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\det(\Phi - xI) &= \det \mathbf{J}^{-1} \cdot \det \left[\mathbf{J}(\Phi - xI)\mathbf{J}^{-1}\right] \cdot \det \mathbf{J} = \det(\mathbf{J}\Phi\mathbf{J}^{-1} - xI)\\ &= \det \left[\left(\Phi^{-1}\right)^{\mathrm{T}} - xI\right] = \det(\Phi^{-1} - xI) = \det\left[(-x)\Phi^{-1}\left(-x^{-1}I + \Phi\right)\right]\\ &= x^{2n} \det(\Phi - x^{-1}I) = x^{2n} p\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

E assim, o resultado segue.

□

Proposição 1.22. *Se $\lambda \neq 0$ é um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$, então $\frac{1}{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ e $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ também são autovalores de Φ com a mesma multiplicidade de λ. Em particular, se ± 1 é autovalor de Φ, então a multiplicidade de ± 1 é um número par.*

Demonstração. Como λ é um autovalor de Φ segue que $p(\lambda) = 0$, onde $p(x)$ é polinômio característico de Φ. Pelo Lema 1.21, segue que

$$0 = p(\lambda) = \lambda^{2n} p\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

e como $\lambda \neq 0$, resulta que $p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$, ou seja, $\frac{1}{\lambda}$ também é autovalor de Φ.

Sendo $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais, segue que se λ é uma raíz de $p(x)$, então $\bar{\lambda}$ também uma raíz de $p(x)$. Assim, $\bar{\lambda}$ é um autovalor de Φ e pelo mesmo argumento acima, temos que $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ também é um autovalor de Φ.

□

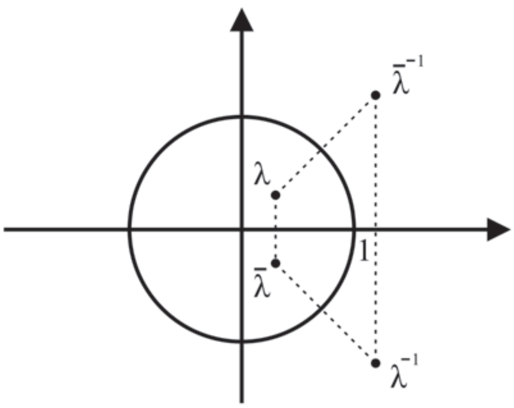

Figura 1.1: Autovalores de uma matriz simplética associados ao autovalor λ, com $|\lambda| > 1$.

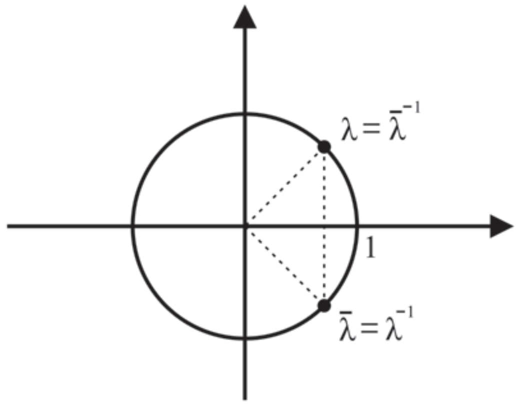

Figura 1.2: Autovalores de uma matriz simplética associados ao autovalor λ, com $|\lambda| = 1$.

Proposição 1.23. *Se λ é um autovalor de $\Phi \in \mathrm{sp}(2n)$, então $-\lambda$ e $-\bar{\lambda}$ também são autovalores de Φ com a mesma multiplicidade de λ. Em particular, se 0 é um autovalor de Φ, então a multiplicidade de 0 é um número par.*

Demonstração. Como $\Phi \in \mathrm{sp}(2n)$, vale $\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J} + \mathbf{J}\Phi = 0$. Assim, se $p(x)$ é o polinômio característico de Φ, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(\Phi - xI) = \det(\mathbf{J}\Phi\mathbf{J}^{-1} - xI) = \det(-\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{J}^{-1} - xI) = \det(-\Phi^{\mathrm{T}} - xI) \\ &= \det(-\Phi - xI) = \det(\Phi - (-x)I) = p(-x). \end{aligned}$$

Dessa forma, se λ é um autovalor de Φ, então $0 = p(\lambda) = p(-\lambda)$ e portanto, $-\lambda$ é um autovalor de Φ. Como $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais, segue que $-\bar{\lambda}$ também é um autovalor de Φ.

□

As Proposições 1.22 e 1.23 nos dizem que se uma matriz Φ é σ-simplética e λ é um autovalor de Φ, então $\overline{\lambda}$, $\sigma(\lambda)$ e $\sigma(\overline{\lambda})$ também são autovalores de Φ. Vemos assim que, em geral, os autovalores de uma matriz σ-simplética vêm em grupos do tipo $\{\lambda, \overline{\lambda}, \sigma(\lambda), \sigma(\overline{\lambda})\}$.

Definição 1.24. Seja Φ uma matriz simplética. Chamamos de **autovalores principais** de Φ os n autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de Φ tais que

(i) $|\lambda_j| > 1$ ou

(ii) $|\lambda_j| = 1$ e $\Im(\lambda_j) \geq 0$,

onde $\Im(\lambda_j)$ é a parte imaginária de λ_j.

Definição 1.25. Uma matriz simplética Φ é chamada N**-elementar** ($N > 0$) se os autovalores principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de Φ satisfazem a seguinte condição: se $\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\ldots\lambda_n^{\alpha_n} = 1$ com $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \leq N$, então $\alpha_j = 0$ para todo j.

Diremos que Φ é **elementar** se a condição anterior vale para todo $N > 0$.

Quando uma matriz simplética Φ é N-elementar diremos também que seus autovalores principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são **não-ressonantes de ordem** N. Se Φ é elementar, diremos apenas que os autovalores principais são **não-ressonantes**.

Exemplo 1.26. Uma matriz simplética Φ que é 1-elementar não pode possuir 1 como um de seus autovalores. De fato, sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores principais de Φ. Suponha que $\lambda_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{\alpha_n} = 1$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\alpha_n| \leq 1$, para os números inteiros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Se $\alpha_j \neq 0$ para algum

j, então necessariamente temos $\alpha_j = \pm 1$ e os outros números α_k, com $k \neq j$, são todos nulos pela restrição da soma anterior. Resulta que $\lambda_j^{\pm 1} = 1$ e portanto, $\lambda_j = 1$.

Isso prova que matrizes simpléticas 1-elementares não possuem 1 como autovalor. Em contrapartida, matrizes simpléticas que não são 1-elementar necessáriamente possuem 1 como autovalor.

Outro caso particular interessante é o caso das matrizes 2-elementares. Uma matriz Φ que é 2-elementar não possui um autovalor múltiplo. De fato, seja Φ uma matriz simplética com autovalores principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Suponha que $\lambda_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{\alpha_n} = 1$ e $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_n| \leq 2$. Se Φ não é 2-elementar, então existe $\alpha_j \neq 0$ para algum j. Aqui temos três casos distintos:

(a) $\alpha_j = \pm 1$ e $\alpha_k = 0$, para $k \neq j$.

Nesse caso, Φ possui 1 como autovalor e que, por sua vez, é um autovalor múltiplo de Φ pela Proposição 1.22.

(b) $\alpha_j = \pm 2$ e, necessariamente, $\alpha_k = 0$, para $k \neq j$.

Nesse caso, resulta que $\lambda_j^{\pm 2} = 1$ e portanto, $\lambda_j = 1$ ou $\lambda_j = -1$. Ambos os autovalores são múltiplos.

(c) $\alpha_j = -1$ e $\alpha_i = 1$, para algum i e algum j.

O caso $\alpha_j = 1$ e $\alpha_i = 1$ não é válido, pois se assim fosse teríamos $\lambda_j \cdot \lambda_i = 1$ e portanto, $\lambda_j = \lambda_i^{-1}$, o que é um absurdo em vista da Definição 1.24.

Assim, se $\alpha_j = -1$ e $\alpha_i = 1$ temos que $\lambda_j^{-1} \cdot \lambda_i = 1$ e portanto, $\lambda_j = \lambda_i$. Ou seja, λ_j é um autovalor múltiplo de Φ.

Esses três casos mostram que matrizes simpléticas que não são 2-elementar possuem um autovalor múltiplo. Resulta, portanto, que matrizes simpléticas 2-elementares não possuem autovalores múltiplos.

Nos Capítulos 2 e 3 faremos um pequeno estudo sobre o comportamento das matrizes simpléticas que não são 2-elementar.

Definição 1.27. Seja λ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ com multiplicidade $k \geq 1$. Definimos o **autoespaço de** λ como sendo o conjunto $V_\lambda = \ker(\Phi - \lambda I)$, se λ é um número real ou $V_\lambda = \ker(\Phi^2 - 2\Re(\lambda)\Phi + |\lambda|^2 I)$, se $\Im(\lambda) \neq 0$.

Definição 1.28. Sejam λ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ com multiplicidade $k \geq 1$. Considere os conjuntos $V_\lambda^j = \ker(\Phi - \lambda I)^j$, se λ é um número real ou $V_\lambda^j = \ker(\Phi^2 - 2\Re(\lambda)\Phi + |\lambda|^2 I)^j$, se $\Im(\lambda) \neq 0$. Definimos o **autoespaço generalizado** de λ como sendo o conjunto

$$\mathcal{E}_\lambda = \bigcup_j V_\lambda^j,$$

onde essa é uma união finita.

Os vetores do autoespaço e do autoespaço generalizado são chamados, respectivamente, de **autovetores** e **autovetores generalizados** de Φ.

Lema 1.29. *Sejam $\lambda = a + bi$ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$, com $b \neq 0$, e u um vetor do autoespaço de λ. Então, existe outro vetor v do autoespaço de λ tal que $\Phi u = au + bv$ e $\Phi v = -bu + av$.*

Demonstração. Seja $v = \dfrac{1}{b}(\Phi u - au)$. Então, $\Phi u = au + bv$.

Como u é autovetor de Φ associado a λ, segue que

$$\left[\Phi^2 - 2a\Phi + (a^2 + b^2)I\right] u = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi^2 u - 2a\Phi u + a^2 u + b^2 u = 0 \Rightarrow (\Phi - aI)^2 u + b^2 u = 0 \Rightarrow$$

$$(\Phi - aI)(bv) + b^2 u = 0 \Rightarrow b\Phi v - abv + b^2 u = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi v = -bu + av.$$

□

Considere uma matriz $\Phi \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ com autovalores λ e μ. Quando $\omega(u, v) = 0$ para todo $u \in V_\lambda$ e $v \in V_\mu$, indicaremos essa fato com a notação $\omega(V_\lambda, V_\mu) = 0$, por simplicidade.

Lema 1.30. *Sejam $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ e λ e μ autovalores de Φ tais que $\lambda \neq \widetilde{\mu}$. Então, $\omega(V_\lambda, V_\mu) = 0$.*

Demonstração. Provaremos o resultado no caso complexo, ou seja, em $(\mathbb{C}^{2n}, \omega)$ com a forma simplética $\omega : \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$. No caso real, basta tomar a complexificação do espaço, pois pela Proposição A.3 do Apêndice A, temos que $V_\lambda \subseteq V_\lambda^{\mathbb{C}}$ e se provarmos que $\omega^{\mathbb{C}}(V_\lambda^{\mathbb{C}}, V_\mu^{\mathbb{C}}) = 0$, então teremos $\omega(V_\lambda, V_\mu) = 0$.

Como $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$, segue ela preserva a forma simplética, ou seja,

$$\omega(\Phi u, \Phi v) = \omega(u, v).$$

Por outro lado, como $\Phi u = \lambda u$ e $\Phi v = \mu v$, segue que

$$\omega(\Phi u, \Phi v) = (\lambda\mu)\omega(u, v).$$

Assim, temos $\omega(u,v) = (\lambda\mu)\omega(u,v)$ e, como $\lambda \neq \widetilde{\mu}$, resulta que $\lambda\mu \neq 1$ e portanto, $\omega(u,v) = 0$. $\square$

Lema 1.31. *Seja Φ uma matriz σ-simplética com autovalor λ. Então, $V_\lambda^j = V_{\widetilde{\lambda}}^j$.*

Demonstração. Faremos por indução sobre j. Novamente, a demonstração será feita para o caso complexo, onde o caso real se reduz a este por complexificação, assim como no Lema 1.30.

No caso em que $j = 1$, temos $V_\lambda^1 = V_\lambda$ e $V_{\widetilde{\lambda}}^1 = V_{\widetilde{\lambda}}$. Assim, dados $u \in V_\lambda$, temos que $\Phi u = \lambda u$ e assim, $\widetilde{\Phi}u = \widetilde{\lambda}u$ pois $\widetilde{\Phi} = -\Phi$ ou Φ^{-1}. Logo, $u \in V_{\widetilde{\lambda}}$ e portanto, $V_\lambda^1 \subseteq V_{\widetilde{\lambda}}^1$.

Seja agora, $u \in V_{\widetilde{\lambda}}^1$ e com o fato de que $\sigma(\sigma(\Phi)) = \Phi$, obtemos a inclusão oposta $V_{\widetilde{\lambda}}^1 \subseteq V_\lambda^1$ e concluímos que $V_\lambda^1 = V_{\widetilde{\lambda}}^1$.

Suponhamos a igualdade válida para o número natural j. Então, dado $u \in V_\lambda^{j+1}$ temos que $(\Phi - \lambda I)^{j+1}u = (\Phi - \lambda I)^j(\Phi - \lambda I)u = 0$. Assim, por hipótese de indução, temos que $(\Phi - \lambda I)u \in V_{\widetilde{\lambda}}^j$. Logo,

$$0 = (\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda}I)^j(\Phi - \lambda I)u = (\Phi - \lambda I)(\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda}I)^j u.$$

A comutatividade acima resulta do fato de que

$$(\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda}I)(\Phi - \lambda I) = \widetilde{\Phi}\Phi - \widetilde{\lambda}\Phi - \lambda\widetilde{\Phi} + \widetilde{\lambda}\lambda I$$

e $\widetilde{\Phi}\Phi = \Phi\widetilde{\Phi}$, esta última sendo de verificação imediata em virtude do Lema 1.19.

Portanto, resulta que $(\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda}I)^j u \in V_\lambda = V_{\widetilde{\lambda}}$. Logo,

$$0 = (\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda}I)(\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda}I)^j u = (\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda}I)^{j+1}u.$$

Portanto, $u \in V_{\widetilde{\lambda}}^{j+1}$ e $V_\lambda^{j+1} \subseteq V_{\widetilde{\lambda}}^{j+1}$.

Usando um argumento completamente análogo, mostramos que $V_{\widetilde{\lambda}}^{j+1} \subseteq V_\lambda^{j+1}$, e portanto vale a igualdade.

$\square$

A próxima proposição mostra que a forma simplética ω é não degenerada no autoespaço generalizado associado aos autovalores unitários de uma matriz simplética.

Proposição 1.32. *Sejam λ e μ autovalores de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ e $\mathcal{E}_\lambda$ e $\mathcal{E}_\mu$ os seus respectivos autoespaços generalizados, com $\mu \neq \widetilde{\lambda}$. Nessas condições, $\omega(\mathcal{E}_\lambda, \mathcal{E}_\mu) = 0$.*

Demonstração. Como $\mathcal{E}_\lambda = \bigcup_j V_\lambda^j$ e $\mathcal{E}_\mu = \bigcup_j V_\mu^j$, com $V_\lambda^j \subseteq V_\lambda^{j+1}$ e $V_\mu^j \subseteq V_\mu^{j+1}$, é suficiente mostrar que $\omega(V_\lambda^j, V_\mu^j) = 0$. Faremos isso por indução em j. Assim como nos Lemas 1.30 e 1.31, a demonstração será feita no caso complexo.

O caso $j = 1$ é verdadeiro pelo Lema 1.30. Supondo o resultado válido para o número natural j, sejam $u \in V_\lambda^{j+1}$ e $v \in V_\mu^j$. Então, temos $(\Phi - \lambda I)^{j+1}u = 0$ e $(\Phi - \mu I)^j v = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 = \omega(u, (\Phi - \mu I)^j v) &= \omega(u, (\Phi - \widetilde{\lambda} I + [\widetilde{\lambda} - \mu]I))^j v) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (\widetilde{\lambda} - \mu)^{j-i} \omega(u, (\Phi - \widetilde{\lambda} I)^i v) \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (\widetilde{\lambda} - \mu)^{j-i} \omega((\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda} I)^i u, v) \end{aligned} \tag{1.5}$$

pois $\widetilde{(\Phi - \widetilde{\lambda} I)} = \widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda} I$ e $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$, para quaisquer duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Pelo Lema 1.21, $u \in V_\lambda^{j+1}$ implica $u \in V_{\widetilde{\lambda}}^{j+1}$. Logo,

$$0 = (\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda} I)^{j+1} u = (\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda} I)^{j+1-i} (\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda} I)^i u.$$

Assim, $(\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda} I)^i u \in V_{\widetilde{\lambda}}^{j+1-i} \subseteq V_{\widetilde{\lambda}}^j = V_\lambda^j$, para $i = 1, \ldots, j$. Pela hipótese de indução, segue que $\omega((\widetilde{\Phi} - \widetilde{\lambda} I)^i u, v) = 0$, para $i = 1 \ldots, j$, pois $v \in V_\mu^j$. Portanto, em (1.5), resulta que $(\widetilde{\lambda} - \mu)^j \omega(u, v) = 0$ e como $\mu \neq \widetilde{\lambda}$, obtemos que $\omega(u, v) = 0$. Com isso provamos que $\omega(V_\lambda^{j+1}, V_\mu^j) = 0$.

Tomando agora, $u \in V_\lambda^{j+1}$, $v \in V_\mu^{j+1}$ e repetindo o mesmo argumento acima trocando os papéis de u e v, resulta que $\omega(V_\lambda^{j+1}, V_\mu^{j+1}) = 0$, utilizando o que acabamos de provar.

Portanto, como $\mathcal{E}_\lambda = V_\lambda^k$ e $\mathcal{E}_\mu = V_\mu^k$ para algum k, o resultado está demonstrado.

□

Corolário 1.33. *Seja λ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$. Então, a forma simplética ω é não-degenerada no subespaço gerado pela união dos autoespaços generalizados de λ e $\dfrac{1}{\lambda}$. Em particular, se $|\lambda| = 1$, então ω é não-degenerada no autoespaço generalizado de λ.*

Demonstração. Seja $\lambda \neq 1$, considere os autoespaços generalizados $\mathcal{E}(\lambda)$ e $\mathcal{E}(1/\lambda)$ e sejam $e_1, \ldots, e_k$ e $f_1, \ldots, f_k$, respectivamente, bases desses subespaços. Resulta que $e_1, \ldots, e_k$, $f_1 \ldots, f_k$ é uma base de $W = \operatorname{span}\{\mathcal{E}(\lambda) \cup \mathcal{E}(1/\lambda)\}$.

Dado $w \in W$, temos que $w = \alpha u + \beta v$, onde $u \in \mathcal{E}(\lambda)$ e $v \in \mathcal{E}(1/\lambda)$. Suponha agora que $\alpha, \beta \neq 0$ e $\omega(w, z) = 0$, para todo $z \in W$. Então, em particular, temos que

$$\omega(w, e_j) = \omega(w, f_j) = 0.$$

Logo, obtemos que $\alpha\omega(u, e_j) + \beta\omega(v, e_j) = 0$ e $\alpha\omega(u, f_j) + \beta\omega(v, f_j) = 0$.

Pela Proposição 1.32, resulta que $\omega(u, e_j) = 0$ e $\omega(v, f_j) = 0$. Logo, $\omega(u, f_j) = 0$ e $\omega(v, e_j) = 0$. Finalmente, pela expressão (1.2), obtemos que $w = 0$, ou seja, ω é não-degenerada em W. Portanto, W é um subespaço simplético. □

Corolário 1.34. *Seja λ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ e $\mathcal{E}_\lambda \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ o seu autoespaço generalizado, com $|\lambda| = 1$ e $\lambda \neq \pm 1$. Se $\omega(u, \Phi u) = 0$ para $u \in \mathcal{E}_\lambda$ não-nulo, então $\omega(v, \Phi v)$ é positivo ou negativo para $v \in \mathcal{E}_\lambda$.*

Assim, $\omega(\,\cdot\,, \Phi\,\cdot\,)$ é positiva definida, negativa definida ou assume os dois sinais no autoespaço $\mathcal{E}$ associado ao autovalor λ.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{E}_\lambda$ tal que $\omega(u, \Phi u) = 0$. Então, como $\omega|_{\mathcal{E}_\lambda}$ é não-degenerada e $\Phi^2 u - u \neq 0$, existe $v \in \mathcal{E}_\lambda$ tal que $\omega(\Phi v, \Phi^2 u - u) \neq 0$. Dado k uma constante arbitrária, temos

$$\begin{aligned}
\omega(v + ku, \Phi(v + ku)) &= \omega(v, \Phi v) + k\omega(v, \Phi u) + k\omega(u, \Phi v) + k^2\omega(u, \Phi u) \\
&= \omega(v, \Phi v) + k\left(\omega(\Phi v, \Phi^2 u) - \omega(\Phi v, u)\right) \\
&= \omega(v, \Phi v) + k\omega(\Phi v, \Phi^2 u - u)
\end{aligned}$$

Escolhendo k de forma conveniente, podemos fazer com que $\omega(v + ku, \Phi(v + ku))$ seja positivo ou negativo.

□

Considerando as três possibilidades apresentadas no Corolário 1.34 para o sinal de $\omega(\,\cdot\,, \Phi\,\cdot\,)$ no autoespaço generalizado $\mathcal{E}_\lambda$, damos a seguinte definição:

Definição 1.35. Sejam $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$, λ um autovalor de Φ e $\mathcal{E}_\lambda \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ o autoespaço generalizado associado a λ. Dizemos que λ é do tipo

(i) **positivo** se $\omega(v, \Phi v) \geq 0$ para todo vetor não-nulo $v \in \mathcal{E}_\lambda$;

(ii) **negativo** se $\omega(v, \Phi v) \leq 0$ para todo vetor não-nulo $v \in \mathcal{E}_\lambda$;

(iii) **misto** se $\omega(u, \Phi u) \geq 0$ e $\omega(v, \Phi v) < 0$ com $u, v \in \mathcal{E}_\lambda$.

As rotações R_θ de ângulo θ (positivo ou negativo) em $\mathbb{R}^2$ tem sempre os mesmos autovalores, a saber, $\lambda_1 = e^{i\theta}$ e $\lambda_2 = e^{-i\theta}$. No entanto, se ω é uma forma não-degenerada em $\mathbb{R}^2$, então ela induz uma orientação para essas rotações no seguinte sentido: se $\omega(u, v) = 1$, $R_\theta u = (\cos\theta)u + (\operatorname{sen}\theta)v$ e $R_\theta v = -(\operatorname{sen}\theta)u + (\cos\theta)v$, então, $\omega(u, R_\theta u) = \omega(v, R_\theta v) = \operatorname{sen}\theta$, que distingue os casos de rotações no sentido positivo e negativo.

Provaremos agora que se λ é um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ do tipo positivo ou do tipo negativo, então o autoespaço e o autoespaço generalizado de λ coincidem. Para isso, precisamos dos lemas seguintes.

Lema 1.36. *Seja $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ com autovalor λ do tipo positivo (negativo) tal que $|\lambda| = 1$ e $\lambda \neq \pm 1$. Então, $\omega|_{V_\lambda}$ é não-degenerada.*

Demonstração. Seja $\lambda = a + bi$ um autovalor do tipo positivo de Φ tal que $|\lambda| = 1$ e $b \neq 0$. Ou seja, temos que $\omega(w, \Phi w) > 0$ para todo $w \neq 0$ em $\mathcal{E}_\lambda$. Como $V_\lambda \subseteq \mathcal{E}_\lambda$, temos, em particular, que $\omega(w, \Phi w) > 0$ para todo $w \neq 0$ em V_λ.

Seja $u \neq 0$ em V_λ. Pelo Lema 1.31, existe $v \in V_\lambda$ tal que $\Phi u = au + bv$ e $\Phi v = bu - av$. Então, temos

$$0 < \omega(u, \Phi u) = a\omega(u, u) + b\omega(u, v) = b\omega(u, v),$$

donde $\omega(u, v) \neq 0$.

Assim, mostramos que para todo $u \neq 0$ em V_λ existe $v \in V_\lambda$ tal que $\omega(u, v) \neq 0$. Em particular, temos que ω é não-degenerada em V_λ.

Um argumento análogo mostra o caso em que λ é do tipo negativo. □

Lema 1.37. *Sejam $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ e $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ um subespaço invariante por Φ tal que $\omega|_V$ é não-degenerada. Nessas condições, V^ω é invariante por Φ.*

Demonstração. Suponha que V^ω não é invariante por Φ. Então, existe $u \in V^\omega$ tal que $\Phi u = v + w$, com $v \in V$ e $w \in V^\omega$. Seja $w' \in V$ tal que $\omega(w, \Phi w') \neq 0$. Então,

$$0 = \omega(u, w') = \omega(\Phi u, \Phi w') = \omega(v + w, \Phi w') = \omega(w, \Phi w') \neq 0;$$

um absurdo. □

Proposição 1.38. *Seja λ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ do tipo positivo ou do tipo negativo, com $|\lambda| = 1$ e $\lambda \neq \pm 1$. Nessas condições, o autoespaço e o autoespaço generalizado associados a λ coincidem.*

Demonstração. Seja $\lambda = a + bi$. Pelo Corolário 1.33 e pelo Lema 1.36, $\omega|_{V_\lambda}$ e $\omega|_{\mathcal{E}_\lambda}$ são não-degeneradas. Do Lema 1.37, segue que $V_\lambda^\omega \cap \mathcal{E}_\lambda$ é invariante por Φ e assim, $\Phi|_{V_\lambda^\omega \cap \mathcal{E}_\lambda}$ deve ter um autovetor u associado a λ. Mas como todo autovetor das restrições de Φ estão em V_λ, resulta que $u = 0$. Logo, $V_\lambda^\omega \cap \mathcal{E}_\lambda = \{0\}$ e assim, $\mathcal{E}_\lambda \subseteq V_\lambda$. Como a inclusão oposta é sempre verdadeira, resulta que $\mathcal{E}_\lambda = V_\lambda$.

□

Capítulo 2

Formas normais de matrizes simpléticas

Usando os resultados sobre autovalores de matrizes simpléticas obtidos no capítulo anterior, exibiremos explícitamente a forma normal ou canônica de uma matriz com autovalores de multiplicidade até no máximo 2.

Dada uma transformação linear simplética Φ em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, a Proposição 1.32 e o Corolário 1.33 garantem a existência de uma base simplética $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ de modo que cada v_j pertença a um autoespaço generalizado de Φ. Como ω é não-degenerada no subespaço V gerado pela união dos autoespaços generalizados de λ e λ^{-1}, é suficiente estudar o caso da forma normal para a restrição $\Phi|_V$.

Proposição 2.1. *Seja $\lambda = a + bi$ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ tal que $|\lambda| = 1$ e seus autoespaço V e autoespaço generalizado $\mathcal{E}$ coincidem. Então, existe uma base simplética de V de λ de modo que a matriz de $\Phi|_{\mathcal{E}}$ nessa base é*

$$\begin{pmatrix} aI_j & 0 & -bI_j & 0 \\ 0 & aI_k & 0 & bI_k \\ bI_j & 0 & aI_j & 0 \\ 0 & -bI_k & 0 & aI_k \end{pmatrix},$$

onde I_k e I_k são, respectivamente, as matrizes identidade $j \times j$ e $k \times k$ e λ tem multiplicidade $q = j + k$.

Demonstração. Podemos supor que $b > 0$ tomando λ ou $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$.

Suponha que $\omega(u, \Phi u) > 0$ para algum vetor $u \in V$. Pelo Lema 1.4, existe $v \in V$ tal que $\Phi u = au + bv$ e $\Phi v = -bu + av$. Dessa forma, temos que

$$\omega(u, \Phi u) = a\omega(u, u) + b\omega(u, v) = b\omega(u, v)$$

e, portanto, $\omega(u, v) \neq 0$. Podemos tomar $\omega(u, v) = 1$, por multiplicação por escalar e reordenação de u e v.

Sejam $u_1 = u$ e $u_q = v$ e considere o subespaço span$\{u_1, u_q\}$ gerado por u_1 e u_q. Temos que ω é não-degenerada nesse subespaço o qual é invariante por Φ. Pelo Lema 1.37, span$\{u_1, u_q\}^\omega$ é invariante por Φ e tem dimensão dois a menos que a dimensão de V. Prosseguindo por indução, encontramos vetores $u_1, \ldots, u_j, u_q, \ldots, u_{j+q}$ tais que $\Phi u_i = au_i + bu_{i+q}$, $\Phi u_{i+q} = -bu_i + au_{i+q}$ e $\omega(u_i, u_{i+q}) = 1$.

Seja $V_1 = \text{span}\{u_1, \ldots, u_j, u_q, \ldots, u_{j+q}\}$ o espaço gerado pelos vetores $u_1, \ldots, u_j$, $u_q, \ldots, u_{j+q}$. Pela construção anterior, dado $w \in V_1^\omega$, temos que $\omega(w, \Phi w) \leq 0$. Tomando $u' \in V_1^\omega$ de forma $\omega(u', \Phi u') < 0$, pelo Lema 1.29, existe $v' \in V$ tal que $\Phi u' = au' + bv'$ e $\Phi v' = -bu' + av'$. Assim, temos que $\omega(u', \Phi u') = b\omega(u', v') < 0$ e portanto, $\omega(u', v') \neq 0$. Assim, segue que $v' \in V_1^\omega$ e, como antes, podemos fazer $\omega(u', v') = 1$.

Tomamos agora $u_{j+1} = v'$ e $u_{(j+1)+q} = u'$. Dessa forma, ω será não-degenerada no subespaço span$\left\{u_{j+1}, u_{(j+1)+q}\right\}$. Procedendo como na primeira construção, obtemos elementos $u_{j+1} \ldots, u_q, u_{(j+1)+q}, \ldots, u_{2q}$ tais que $\Phi u_{i+q} = au_{i+q} + bu_i$, $\Phi u_i = -bu_{i+q} + au_i$, com $j+1 \leq i \leq q$, que completam a base de V.

□

Corolário 2.2. *Sejam $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ uma transformação linear e $\lambda = a + bi$ um autovalor de Φ com multiplicidade 2, $|\lambda| = 1$, do tipo misto e que seus autoespaço e autoespaço generalizado coincidem. Nessas condições, existe uma base simplética $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ do autoespaço de λ tal que $\omega(v_1, v_3) = 1$, $\omega(v_2, v_4) = 1$ e a matriz de Φ relativamente a essa base é*

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Seja $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ a base de Φ dada pela Proposição 2.1, com $j = k = 1$. Então, temos que $\Phi u_1 = au_1 + bu_3$, $\Phi u_3 = -bu_1 + au_3$, $\Phi u_2 = -bu_4 + au_2$ e $\Phi u_4 = au_4 + bu_2$.

Tomando $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = u_3 - u_4$, $v_3 = \frac{1}{2}(u_3 + u_4)$ e $v_4 = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$, temos que

$$\Phi v_1 = \Phi u_1 + \Phi u_2 = a(u_1 + u_2) + b(u_3 - u_4) = av_1 + bv_2,$$

$$\Phi v_2 = \Phi u_3 - \Phi u_4 = a(u_3 - u_4) - b(u_1 + u_2) = -bv_1 + av_2,$$

$$\Phi v_3 = \frac{1}{2}(\Phi u_3 + \Phi u_4) = \frac{a}{2}(u_3 + u_4) + \frac{b}{2}(u_2 - u_1) = av_2 + bv_4$$

e

$$\Phi v_4 = \frac{1}{2}(\Phi u_2 - \Phi u_1) = \frac{a}{2}(u_2 - u_1) - \frac{b}{2}(u_3 + u_4) = -bv_3 + av_4.$$

Isso mostra que a matriz Φ na base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é a matriz acima.

Que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é simplética é imediato, uma vez que $\omega(v_1, v_3) = \omega(v_2, v_4) = 1$ e

$\omega(v_1, v_2) = \omega(v_3, v_4) = 0.$ □

Proposição 2.3. *Sejam* $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *uma transformação linear e* $\lambda = a \pm bi$ *um autovalor de* Φ *com multiplicidade 2,* $|\lambda| = 1$*, do tipo misto onde os seus autoespaço e autoespaço generalizado não coincidem. Nessas condições, existe uma base simplética* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *tal que a matriz de* Φ *nessa base é*

$$\begin{pmatrix} A & \mu A \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e $\mu = \pm 1$*.*

Demonstração. Considere dois autovetores u e v tais que $\Phi u = au + bv$ e $\Phi v = -bu + av$. Se $\omega(u, v) \neq 0$, então o complementar simplético $\operatorname{span}\{u, v\}^\omega$ do subespaço $\operatorname{span}\{u, v\}$ gerado por u e v seria invariante por Φ e, como consequência, o autoespaço e ou autoespaço generalizado de λ coincidem pela Proposição 1.38. Portanto, temos que $\omega(u, v) = 0$.

Tomando $u_1 = u$ e $u_2 = v$, sejam u_3 e u_4 vetores que completam a base simplética. A matriz de Φ na base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é

$$\begin{pmatrix} a & -b & \alpha_1 & \beta_1 \\ b & a & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & \beta_4 \end{pmatrix},$$

onde $\Phi u_3 = \sum_{j=1}^{4} \alpha_j u_j$ e $\Phi u_4 = \sum_{j=1}^{4} \beta_j u_j$.

Como

$$\begin{cases} a\alpha_3 + b\alpha_4 = \omega(\Phi u_1, \Phi u_3) = \omega(u_1, u_3) = 1 \\ -b\alpha_3 + a\alpha_4 = \omega(\Phi u_2, \Phi u_3) = \omega(u_2, u_3) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a\beta_3 + b\beta_4 = \omega(\Phi u_1, \Phi u_4) = \omega(u_1, u_4) = 0 \\ -b\beta_3 + a\beta_4 = \omega(\Phi u_2, \Phi u_4) = \omega(u_2, u_4) = 1 \end{cases},$$

resolvendo os dois sistemas obtemos que $\alpha_3 = a$, $\alpha_4 = b$, $\beta_3 = -b$ e $\beta_4 = a$. Assim, a matriz de Φ é

$$\begin{pmatrix} a & -b & \alpha_1 & \beta_1 \\ b & a & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Sejam $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$, $v_3 = u_3 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2$ e $v_4 = u_4 + \gamma_3 u_1 + \gamma_4 u_2$. Para que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ seja uma base simplética, devemos ter $\omega(v_3, v_4) = \gamma_2 - \gamma_3 = 0$, ou seja, $\gamma_2 = \gamma_3$.

Assim,

$$\begin{aligned}\Phi v_3 &= \Phi u_3 + \gamma_1 \Phi u_1 + \gamma_2 \Phi u_2\\ &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + a u_3 + b u_4 + \gamma_1(a u_1 + b u_2) + \gamma_2(-b u_1 + a u_2)\\ &= (\alpha_1 + a\gamma_1 - b\gamma_2)u_1 + (\alpha_2 + b\gamma_1 + a\gamma_2)u_2 + a u_3 + b u_4\\ &= (\alpha_1 - b\gamma_2 - b\gamma_3)u_1 + (\alpha_2 + b\gamma_1 - b\gamma_4)u_2 + a(u_3 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2) + b(u_4 + \gamma_3 u_1 + \gamma_4 u_2)\\ &= (\alpha_1 - 2b\gamma_2)u_1 + (\alpha_2 + b\gamma_1 - b\gamma_4)u_2 + a v_3 + b v_4\\ &= z_1 v_1 + z_2 v_2 + a v_3 + b v_4\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Phi v_4 &= \Phi u_4 + \gamma_3 \Phi u_1 + \gamma_4 \Phi u_2\\ &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 - b u_3 + a u_4 + \gamma_3(a u_1 + b u_2) + \gamma_4(-b u_1 + a u_2)\\ &= (\beta_1 + a\gamma_3 - b\gamma_4)u_1 + (\beta_2 + b\gamma_3 + a\gamma_4)u_2 - b u_3 + a u_4\\ &= (\beta_1 + b\gamma_1 - b\gamma_4)u_1 + (\beta_2 + b\gamma_3 + b\gamma_2)u_2 - b(u_3 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2) + a(u_4 + \gamma_3 u_1 + \gamma_4 u_2)\\ &= (\beta_1 + b\gamma_1 - b\gamma_4)u_1 + (\beta_2 + 2b\gamma_2)u_2 + -b v_3 + a v_4\\ &= z_3 v_1 + z_4 v_2 - b v_3 + a v_4,\end{aligned}$$

onde $z_1 = \alpha_1 - 2b\gamma_2$, $z_2 = \alpha_2 + b\gamma_1 - b\gamma_2$, $z_3 = \beta_1 + b\gamma_1 - b\gamma_4$ e $z_4 = \beta_2 + 2b\gamma_3$.

Escolhendo γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4 de modo que $z_4 = z_1$ e $z_3 = -z_2$, teremos que a matriz de Φ na base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b & z_1 & -z_2 \\ b & a & z_2 & z_1 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Como Φ é simplética, temos que $0 = \omega(v_3, v_4) = \omega(\Phi v_3, \Phi v_4) = 2az_2 - 2bz_1$, donde $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a}{b}$, e portanto, $z_1 = \mu a$ e $z_2 = \mu b$, com $\mu \neq 0$.

Tomando a base simplética $\{|\mu| v_1, |\mu| v_2, |\mu|^{-1} v_2, |\mu|^{-1} v_4\}$, podemos escolher $\mu = \pm 1$ e assim, obter a matriz de Φ na forma

$$\begin{pmatrix} A & \mu A \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

com

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e $\mu = \pm 1$, como queríamos.

$\square$

Proposição 2.4. *Seja $\lambda = \pm 1$ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ de multiplicidade 2. Então, existe uma base simplética na qual a matriz de Φ é da forma*

$$\begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde $k = 1$, $k = 0$ ou $k = -1$.

Demonstração. Sejam, respectivamente, V e $\mathcal{E}$ o autoespaço e o autoespaço generalizado de λ. Como $\lambda = \pm 1$ é um autovalor real de multiplicidade 2, temos que $\dim \mathcal{E} \leq 2$ e ω é não-degenerada em $\mathcal{E}$ pelo Corolário 1.3. Assim, $\dim \mathcal{E} = 2$ e ω é uma forma simplética em $\mathcal{E}$.

Temos, então, dois casos:

1° Caso: $V = \mathcal{E}$.

Seja $\{u, v\}$ é uma base simplética de $\mathcal{E}$. Então, $\{u, v\}$ também é uma base de V, com $\Phi u = \lambda u$ e $\Phi v = \lambda v$. Assim, a matriz de Φ relativamente a essa base é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2° Caso: $V \neq \mathcal{E}$.

Como V é um subespaço próprio de $\mathcal{E}$ segue que $\dim V = 1$, pois $V \neq \{0\}$. Logo, dado $u \in V$ não nulo, $\{u\}$ é uma base de V e $\Phi u = \lambda u$.

Seja $v \in \mathcal{E} - V$ tal que $\omega(u, v) = 1$. Então, $(\Phi - \lambda I)v \neq 0$ e $\{u, v\}$ é linearmente independente, constituindo uma base para $\mathcal{E}$.

Tomemos $w = (\Phi - \lambda I)v$. Como $v \in \mathcal{E}$, temos que

$$0 = (\Phi - \lambda I)^2 v = (\Phi - \lambda I)w.$$

Assim, $w \in V$ e portanto, $w = ku$ para algum $k \neq 0$. Logo, $\Phi v = ku + \lambda v$ e a matriz Φ na base $\{u, v\}$ é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Tomando a base $\{|k|u, |k|^{-1}v\}$, podemos fazer $k = \pm 1$.

Isso completa a demonstração.

$\square$

Proposição 2.5. *Seja λ um autovalor de $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ tal que $|\lambda| \neq 1$. Então, dada qualquer base do autoespaço generalizado de λ, existe uma base do autoespaço de $\dfrac{1}{\lambda}$ tal que a reunião dessas duas bases é uma base simplética. Em termos dessa base, a matriz de Φ é da forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

onde $A_2^{-1} = A_1^{\mathrm{T}}$. Em particular, podemos tomar A_1 na forma de Jordan.

Demonstração. Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base do autoespaço de generalizado $\mathcal{E}_\lambda$ de λ. Como $|\lambda| \neq 1$, segue da Proposição 1.3 que $\mathcal{E}_\lambda$ é isotrópico, ou seja, $\omega(u_j, u_k) = 0$ quaisquer que sejam $j, k = 1, \ldots, n$.

Pelo Corolário 1.33, ω é não-degenerada no subespaço gerado pela união $\mathcal{E}_\lambda \cup \mathcal{E}_{\frac{1}{\lambda}}$, onde $\mathcal{E}_{\frac{1}{\lambda}}$ é o autoespaço generalizado de $\dfrac{1}{\lambda}$, o qual também é isotrópico pela Proposição 1.32. Existem, então, vetores $u_{n+1}, \ldots, u_{2n} \in \mathcal{E}_{\frac{1}{\lambda}}$ que completam uma base do subespaço $\mathrm{span}\left\{\mathcal{E}_\lambda \cup \mathcal{E}_{\frac{1}{\lambda}}\right\}$ gerado por $\mathcal{E}_\lambda \cup \mathcal{E}_{\frac{1}{\lambda}}$, tais que $\omega(u_j, u_{n+j}) \neq 0$, para $j = 1, \ldots, n$. Em particular, podemos fazer $\omega(u_j, u_{n+j}) = 1$ por multiplicação por escalar. Isto nos dá uma base simplética para $\mathrm{span}\left\{\mathcal{E}_\lambda \cup \mathcal{E}_{\frac{1}{\lambda}}\right\}$.

Como Φ é invariante no autoespaço generalizado, temos que sua matriz nessa base é da forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Agora, como $\Phi \in \mathrm{Sp}(2n)$ temos que $\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\Phi = \mathbf{J}$, donde obtemos que $A_1^{\mathrm{T}}A_2 = I$ e portanto, $A_2^{-1} = A_1^{\mathrm{T}}$.

$\square$

Capítulo 3

Bifurcação de autovalores de curvas genéricas

Neste capítulo, estudaremos as propriedades genéricas de caminhos de classe C^1 em $\mathrm{Sp}(2n)$ definidos no intervalo $I = [-1, 1]$, ou seja, estamos interessados nas propriedades genéricas do conjunto $C^1(I, \mathrm{Sp}(2n))$ de tais caminhos.

Sejam $\mathcal{U} = \{\Phi \in \mathrm{Sp}(2n); \Phi \textit{ tem um autovalor múltiplo}\}$ e $\mathcal{V} = V_1 \cup V_2$, onde

$$V_1 = \{\Phi \in \mathrm{Sp}(2n);\ \Phi \textit{ tem um autovalor de multiplicidade } \geq 3\}$$

e

$$V_2 = \left\{ \Phi \in \mathrm{Sp}(2n); \begin{array}{l} \Phi \textit{ tem dois autovalores } \lambda_1 \textit{ e } \lambda_2 \textit{ de multiplicidade } 2 \\ \textit{tais que } \lambda_1 \neq \lambda_2,\ |\lambda_1|, |\lambda_2| \geq 1 \textit{ e } \operatorname{Im}\lambda_1, \operatorname{Im}\lambda_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Lema 3.1. *O conjunto* $\mathcal{D} = \{\Phi \in \mathrm{Sp}(2n);\ \Phi \textit{ tem autovalores distintos}\}$ *é aberto e denso em* $\mathrm{Sp}(2n)$ *na topologia induzida de* $\mathbb{R}^{2n}$.

Demonstração. A demonstração é feita da mesma forma que em [11], p. 100, para mostrar que o conjunto das matrizes que tem autovalores distintos é denso em $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. No nosso caso porém, usamos as formas normais em vez da forma canônica de Jordan.

Considere a identificação $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{4n^2}$, onde tomaremos em $\mathbb{R}^{4n^2}$ a norma do máximo, e seja $\mathrm{Sp}(2n) \subseteq \mathbb{R}^{4n^2}$ com a topologia induzida.

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^{4n^2}$ um aberto; então $\mathcal{A} = A \cap \mathrm{Sp}(2n)$ é aberto em $\mathrm{Sp}(2n)$. Tomando $\Phi \in \mathcal{A}$, se Φ tem autovalores distintos, então $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Se, por outro lado, Φ possui um autovalor múltiplo λ, então Φ pode assumir umas formas normais do Capítulo 2. Faremos a demonstração apenas no caso em que $\lambda = a+bi$ é um autovalor do tipo positivo (ou negativo), tem multiplicidade 2, $|\lambda| = 1$ e os autoespaço e autoespaço generalizado coincidem. Os demais casos são análogos a este.

Pela Proposição 2.1, existe uma base simplética segundo a qual Φ é da forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Seja $0 < \varepsilon < 1$ tal que a bola aberta $B(\Phi;\varepsilon)$ esteja contida em A e tomemos $c \in \mathbb{R}$ de modo que ele tenha o mesmo sinal de a e $0 < |a-c| < \frac{\varepsilon}{4}$. Considere a matriz

$$\Psi = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -\dfrac{b}{ac+b^2} & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & -\dfrac{b}{ac+b^2} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ b & 0 & 0 & \dfrac{c}{ac+b^2} & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & \dfrac{a}{ac+b^2} & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Fazendo os cálculos explicitamente, vemos que $\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\Psi = \mathbf{J}$, ou seja, Ψ é uma matriz simplética. Mais ainda, Ψ não possui nenhum autovalor múltiplo. Logo, $\Psi \in \mathcal{D}$.

Como $\mathrm{Sp}(2n)$ está com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{4n^2}$ com a norma do máximo, a distância entre Ψ e Φ é

$$d(\Psi,\Phi) = \max\left\{|a-c|, \left|a - \frac{c}{ac+b^2}\right|, \left|c - \frac{a}{ac+b^2}\right|, \left|b - \frac{b}{ac+b^2}\right|\right\}.$$

Temos que $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq b \leq 1$, $0 < ac < \frac{5}{4}$ e

$$ac + b^2 > a\left(a - \frac{\varepsilon}{4}\right) + b^2 = a^2 + b^2 - \frac{a\varepsilon}{4} > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

pois $a\varepsilon < 1$. Logo,

$$\left|a - \frac{c}{ac+b^2}\right| = \left|\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{c}{ac+b^2}\right| \leq \frac{b^2}{|ac+b^2|}|a-c| \leq |a-c| < \varepsilon;$$

$$\left|b - \frac{b}{ac+b^2}\right| = \left|\frac{b}{a^2+b^2} - \frac{b}{ac+b^2}\right| \leq |ab||c-a| < \varepsilon;$$

$$\left|c - \frac{a}{ac+b^2}\right| = \left|\frac{c}{a^2+b^2} - \frac{a}{ac+b^2}\right| = \frac{|c-a|}{ac+b^2}\left|a(c+a)+b^2\right| < \varepsilon.$$

Logo, $d(\Psi, \Phi) < \varepsilon$, ou seja, $\Psi \in B(\Phi, \varepsilon)$ e portanto, $\Psi \in B(\Phi, \varepsilon) \cap \mathrm{Sp}(2n) \subseteq \mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

Portanto, vemos que em qualquer caso, $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ e assim, $\mathcal{D}$ é denso em $\mathrm{Sp}(2n)$.

Resta mostrar que $\mathcal{D}$ é aberto. Para isso, seja $D \subseteq \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes que só possui autovalores distintos. Pelo Teorema da seção 5.6, p. 100, de [11], D é aberto e denso em $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Agora, observando que $\mathcal{D} = D \cap \mathrm{Sp}(2n)$, resulta que $\mathcal{D}$ é aberto em $\mathrm{Sp}(2n)$.

□

Pelo Lema 3.1 temos que $\mathcal{U} = \mathrm{Sp}(2n) - \mathcal{D}$ e portanto, $\mathcal{U}$ é fechado e tem interior vazio em $\mathrm{Sp}(2n)$.

Definição 3.2. Dizemos que um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é **semi-algébrico** se ele é a união finita de subconjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ f_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R}^n; g_j(x) < 0,\ j = 1, \ldots, q\},$$

onde f_i e g_j são polinômios em $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Diremos que S é **algébrico** se ele é a reunião finita de apenas subconjuntos do primeiro tipo acima.

Em [39], Whitney provou que todo conjunto algébrico (variedade algébrica real) $S \subset \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como união finita de subvariedades de $\mathbb{R}^n$. Robbin estendeu esse resultado em [2] para conjuntos semi-algébricos:

Lema 3.3 (Teorema de Whitney)**.** *Todo conjunto semi-algébrico $S \subset \mathbb{R}^n$ é escrito como união finita*

$$S = \bigcup_{j=1}^{m} S_j,$$

onde $S_1, \ldots, S_m \subset \mathbb{R}^n$ são subvariedades diferenciáveis de dimensão crescente.

Demonstração. Ver [39] e [2], Apêndice B, p. 133. □

Usando a Forma Canônica de Jordan, obtemos que $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são semi-algébricos. Pelo Teorema de Whitney (Lema 3.3), temos que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{Z}_i \quad e \quad \mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{W}_j,$$

onde os $\mathcal{Z}_i$ e $\mathcal{W}_j$ são subvariedades de $\mathrm{Sp}(2n)$.

Como $\mathcal{U}$ é fechado, pelo item (b) do Teorema C.6 temos que o conjunto

$$\mathscr{G} = \left\{A \in C^1(I, \mathrm{Sp}(2n));\ A \pitchfork \mathcal{U}\right\} = \left\{A \in C^1(I, \mathrm{Sp}(2n));\ A \pitchfork \mathcal{Z}_i,\ i = 1, \dots, m\right\}$$

é aberto e denso em $C^1(I, \mathrm{Sp}(2n))$, onde $A \pitchfork \mathcal{U}$ significa que a curva genérica A é **transversal** a $\mathcal{U}$.

Definição 3.4. Chamamos de **curvas genéricas de matrizes simpléticas** ou simplesmente **curvas genéricas** aos elementos do conjunto $\mathscr{G}$ definido acima.

Nosso objetivo nesse capítulo é descrever o que ocorre quando $A \in \mathscr{G}$ e $A(0) \in \mathcal{U}$. O próximo lema é o primeiro resultado nessa direção.

Lema 3.5. *Seja $A \in \mathscr{G}$ uma curva genérica. Se $A(0) \in \mathcal{U}$, então $A(0) \in \mathcal{U} - \mathcal{V}$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathscr{G}$, com $A(0) \in \mathcal{U}$. Vimos que $\mathcal{U} \subset \mathrm{Sp}(2n)$ é fechado e tem interior vazio. Logo, os $\mathcal{Z}_i$ tem codimensão maior ou igual a 1 em $\mathrm{Sp}(2n)$.

O mesmo argumento usado na demonstração do Lema 3.1 pode ser usado para mostrar que o conjunto

$$\mathcal{U}_0 = \{\Phi \in \mathrm{Sp}(2n);\ \Phi \text{ tem um único autovalor } \lambda \text{ de multiplicidade } 2\}$$

é denso em $\mathcal{U}$, com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{4n^2}$ munido da norma do máximo.

Pela definição de $\mathcal{U}_0$, vê-se imediatamente que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} - \mathcal{U}_0$ e portanto, $\mathcal{V}$ tem interior vazio em $\mathcal{U}$. Dessa forma, segue que os $\mathcal{W}_j$ tem codimensão maior ou igual a 1 em $\mathcal{U}$ e consequentemente, codimensão maior ou igual a 2 em $\mathrm{Sp}(2n)$.

Portanto, vemos que nenhum dos $\mathcal{W}_j$ satisfaz a condição de transversalidade

$$dA(t)(\mathbb{R}) + T_{A(t)}\mathcal{W}_j = T_{A(t)}\,\mathrm{Sp}(2n)$$

qualquer que seja $t \in I$, uma vez que $\dim A(I) = 1$. Logo, A não pode intersectar (de forma genérica) nenhum $\mathcal{W}_j$, e assim $A(0) \notin \mathcal{V}$.

□

Lema 3.6. *Seja $A(t)$ uma curva de matrizes, diferenciável em $t = 0$, tal que $A(0)$ possua um autovalor λ de multiplicidade r, com r autovetores linearmente independentes. Nessas condições, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem constantes $\mu_1, \dots, \mu_r$ tais que $A(\varepsilon)$ tem r autovalores da forma $\lambda + \varepsilon\mu_j + o(\varepsilon)$, $j = 1 \dots, r$.*

Demonstração. Ver [6]. □

Lema 3.7. *Seja $A(t)$ uma curva de matrizes simpléticas com um autovalor $\lambda(t)$ do tipo misto de multiplicidade exatamente igual a 2, $|\lambda(t)| \neq 1$, $\Im(\lambda(t)) \neq 0$ e os seus autoespaço e autoespaço generalizado não coincidem. Se $B : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathcal{U}$ é tal que*

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} D(x,y) & 0 \\ 0 & [D(x,y)^{\mathrm{T}}]^{-1} \end{pmatrix},$$

onde $D : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ é dada por

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y & x & -y \\ y & x & y & x \\ 0 & 0 & x & -y \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix},$$

então existe uma curva $C(t)$ em $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $C(t)A(t)C(t)^{-1} = B(\Re(\lambda(t)), \Im(\lambda(t)), C(t))$.

Demonstração. Seja $P_t = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma (z\,\mathbf{I} - A(t))^{-1} dz$.

Se γ é uma curva fechada simples tal que $\lambda(t)$ é o único autovalor de $A(t)$ que está no interior de γ e os outros autovalores estão em $\mathbb{R}^2 - \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D} = \mathrm{int}(\gamma) \cup \gamma$, então pelo Teorema da Decomposição (ver *Decomposition Theorem* em [32], p. 421), segue que P_t é uma projeção no autoespaço generalizado de $\lambda(t)$.

Pelas Proposições 2.3 e 2.5 existe uma base simplética $\{u_1, \ldots, u_4, v_1, \ldots, v_4\}$, onde $u_1, \ldots, u_4$ formam uma base do autoespaço generalizado de $\lambda(0) = a + bi$ de $A(0)$ e

$$A(0) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

com $A_2 = (A_1^{\mathrm{T}})^{-1}$ e

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -b & a & -b \\ b & a & b & a \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

é o bloco associado a $\lambda(0)$. Temos que $A(0) = B(\Re(\lambda(0)), \Im(\lambda(0)))$.

Suponha que $u_3, u_4 \in \mathcal{E}_{\lambda(0)} - V_{\lambda(0)}$. Então, tomando $v = u_3 - iu_4$, $v(t) = P_t v$ e $u(t) = \dfrac{1}{\lambda(0)}(A(t) - \lambda(t))v(t)$, segue por verificação direta usando a construção da base de $\mathcal{E}_{\lambda(0)}$ na Proposição 2.3 que $u(0) = u_1 - iu_2 \neq 0$. Por continuidade, temos que $u(t) \neq 0$, para t suficientemente pequeno.

Sejam $u_1(t) = \Re(u(t))$, $u_2(t) = -\Im(u(t))$, $u_3(t) = \Re(v(t))$ e $u_4 = -\Im(v(t))$. Como os $u_1(0), \ldots, u_4(0)$ fazem parte de uma base simplética e variam diferenciavelmente, pela

Proposição 2.5 podemos completar os vetores $u_1(t), \ldots, u_4(t)$ para uma base simplética $\{u_1(t), \ldots, u_4(t), v_1(t), \ldots, v_4(t)\}$, onde os vetores $v_1(t), \ldots, v_4(t)$ pertecem ao autoespaço generalizado de $\lambda(t)^{-1}$.

Finalmente, seja $C(t)$ a matriz de mudança de base de $\{u_1(t), \ldots, u_4(t), v_1(t), \ldots, v_4(t)\}$ para $\{u_1, \ldots, u_4, v_1, \ldots, v_4\}$. Então,

$$C(t)A(t)C(t)^{-1} = B(\Re(\lambda(t)), \Im(\lambda(t)), C(t)),$$

e $C(0) = \mathbf{I}$.

$\square$

Observação 3.8. O Lema 3.7 é bem mais geral do que aparenta. De fato, o lema é válido para outros tipos de autovalores do tipo misto de matrizes simpléticas cujas formas normais são dadas no Capítulo 2. A idéia é modificar convenientemente a matriz $D(x, y)$. A prova em cada caso é exatamente a mesma dada acima.

Teorema 3.9. *Seja $\Phi \in \mathcal{U}$ com autovalor múltiplo λ tal que* (i) *o autoespaço V_λ e o autoespaço generalizado $\mathcal{E}_\lambda$ de λ coincidem ou* (ii) $|\lambda| \neq 1$ *e* $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. *Nessas condições, não existe $A \in \mathscr{G}$ tal que $A(0) = \Phi$, ou seja, Φ não é a imagem de nenhuma curva genérica $A \in \mathscr{G}$.*

Demonstração. Do Lema 3.5, segue que basta considerar o caso em que $\Phi \in \mathcal{U} - \mathcal{V}$. Pelos Corolário 1.34, Definição 1.35 e Proposição 1.38 temos os seguintes casos:

(a) λ é autovalor do tipo positivo ou do tipo negativo de multiplicidade 2;

(b) λ é autovalor do tipo misto de multiplicidade 2 e seus autoespaço e autoespaço generalizado coincidem;

(c) λ é uma autovalor real múltiplo e seus autoespaço e autoespaço generalizado coincidem;

(d) λ é autovalor múltiplo, com $|\lambda| \neq 1$ e $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Caso (a): Seja $\Phi \in \mathcal{U} - \mathcal{V}$ com um autovalor positivo $\lambda = a + bi$ de multiplicidade 2. É suficiente mostrar que a codimensão de $T_\Phi \mathcal{U}$ em $T_\Phi \operatorname{Sp}(2n)$ é 2. Para isso, vamos construir um subespaço $X \subset T_\Phi \operatorname{Sp}(2n)$ de dimensão 2 que não é tangente a $\mathcal{U}$, ou seja, que $X \cap T_\Phi \mathcal{U} = \emptyset$.

Pelas Proposições 1.38 e 2.1, existe uma base simplética $\{u_1, \ldots, u_{2n}\}$ tal que a matriz

de Φ nessa base é da forma
$$\begin{pmatrix} a\,\mathbf{I}_2 & 0 & -b\,\mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 \\ b\,\mathbf{I}_2 & 0 & a\,\mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 \end{pmatrix},$$
onde $\mathbf{I}_2$ é a matriz identidade 2×2 e A_1, B_1, A_2, B_2 são os blocos matriciais cujas colunas de Φ associadas a esses blocos correspondem aos outros autovalores. Como $|\lambda| = 1$, segue que $\lambda = e^{iu}$ para algum $u \in [0, 2\pi)$. Assim, temos que $a = \cos u$ e $b = \operatorname{sen} u$.

Sejam $a(t) = \cos(u + t)$ e $b(t) = \operatorname{sen}(u + t)$ e considere a curva de matrizes $B : J \to \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dada por

$$B(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & -b(t) & 0 & 0 \\ 0 & a(-t) & 0 & 0 & -b(-t) & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ b(t) & 0 & 0 & a(t) & 0 & 0 \\ 0 & b(-t) & 0 & 0 & a(-t) & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Calculando explicitamente, vemos que $B(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{J}B(t) = \mathbf{J}$, para todo $t \in J$, ou seja, $B(t)$ é uma curva definida em $\mathrm{Sp}(2n)$.

Temos $B(0) = \Phi$, mas $B(t) \notin \mathcal{U}$ para $t \neq 0$ suficientemente pequeno. De fato, para $t \neq 0$ pequeno, temos que $a(t) \neq a(-t)$ e $b(t) \neq b(-t)$, ou seja, $B(t)$ passa a ter autovalores distintos.

Consideremos agora a aplicação $C : [0, 2\pi) \to \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dada por

$$C(v) = \begin{pmatrix} R(v) & 0 \\ 0 & R(v) \end{pmatrix},$$

onde
$$R(v) = \begin{pmatrix} \cos(v/2) & -\operatorname{sen}(v/2) & 0 \\ \operatorname{sen}(v/2) & \cos(v/2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

A aplicação $C(v)$ é simplética para todo $v \in [0, 2\pi)$. Para ver isso, observemos inicialmente que os blocos $R(v)$ da matriz $C(v)$ são rotações de ângulo $v/2$ no plano em algum subespaço de dimensão 2 em $\mathbb{R}^n$. Assim, como $R(v)^{\mathrm{T}} = R(v)^{-1} = R(-v)$, vemos facilmente que $C(v)^{\mathrm{T}}\mathbf{J}C(v) = \mathbf{J}$.

Consideremos agora a aplicação $\Psi : J \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Sp}(2n)$ dada por

$$\Psi(t, v) = C(v)B(t)C(-v).$$

Como $C(-v) = C(v)^{-1}$ para todo $v \in [0, 2\pi)$, segue que $\Psi(t, v)$ é simplesmente a matriz $B(t)$ depois da mudança de base dada por $C(v)$. Mas ainda, Ψ é uma aplicação de classe C^1.

Assim, faz sentido calcular a derivada parcial de Ψ em relação a t. Calculando a derivada em $t = 0$, obtemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, v) = C(v)B'(0)C(-v) = A_1 \cos v + A_2 \operatorname{sen} v,$$

onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & 0 & -a & 0 \\ -b & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & -b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

É imediato que $\{A_1, A_2\} \subset T_\Phi \operatorname{Sp}(2n)$ é L.I. e definindo o conjunto

$$X = \{A_1 t \cos v + A_2 t \operatorname{sen} v;\ v \in [0, 2\pi) \ e \ t \in \mathbb{R}\},$$

temos que X é um subespaço vetorial de dimensão 2 de $T_\Phi \operatorname{Sp}(2n)$. De fato, as funções $(t, v) \mapsto t \cos v$ e $(t, v) \mapsto t \operatorname{sen} v$ são sobrejetoras e o sistema de equações

$$\begin{cases} t \cos v = \alpha t_1 \cos v_1 + \beta t_2 \cos v_2 \\ t \operatorname{sen} v = \alpha t_1 \operatorname{sen} v_1 + \beta t_2 \operatorname{sen} v_2 \end{cases}$$

nas variáveis t e v tem solução dada por

$$t = \alpha^2 t_1^2 + \beta^2 t_2^2 + 2\alpha\beta \cos(v_1 - v_2)$$

e

$$v = \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha t_1 \operatorname{sen} v_1 + \beta t_2 \operatorname{sen} v_2}{\alpha t_1 \cos v_1 + \beta t_2 \cos v_2}\right), \ \text{se } t \neq 0$$

para todo $\alpha, \beta, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in [0, 2\pi)$. Com isso, garantimos que a soma e a multiplicação por escalar de elementos de X ainda estão em X. Logo, como $0 \in X$, a afirmação segue.

A conjugação por $C(v)$ não altera a forma de $B(t)$, isto é, se $B'(0) \notin T_\Phi \mathcal{U}$, então $A_1 t \cos v + A_2 t \operatorname{sen} v = t \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(0, v) \notin T_\Phi \mathcal{U}$ para todo $(t, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$. Assim, assuma que $B'(0) \in T_\Phi \mathcal{U}$. Então, existe uma curva de matrizes $D : I \to \mathcal{U}$ tal que $D(0) = \Phi$ e $D'(0) = B'(0)$.

Os números complexos $b+ai$, $-b+ai$, $b-ai$ e $-b-ai$ são autovalores de $B'(0)$ e o autoespaço generalizado do autovalor $\lambda = a+bi$ de $D(0) = \Phi$ coincide com o seu autoespaço. Segue do Lema 3.3 que, em particular, os números complexos $(a+bi)+\varepsilon(-b+ai)+o(\varepsilon)$, $(a+bi)+\varepsilon(b-ai)+o(\varepsilon)$ e seus complexos conjugados são autovalores de $D(\varepsilon)$, para ε suficientemente pequeno. Os outros autovalores de $D(\varepsilon)$ devem ser distintos. É imediato que os autovalores de $D(t)$ não podem continuar múltiplos, ou seja, $D(t)$ não pode pertencer a $\mathcal{U}$.

Mostramos assim, que não existe uma curva de matrizes $D(t)$ contida em $\mathcal{U}$ tal que $D(0) = \Phi$ e $D'(0) = B'(0)$. Assim, $B'(0) \notin T_\Phi \mathcal{U}$ e, portanto, $X \cap T_\Phi \mathcal{U} = \emptyset$. Dessa forma, concluímos que $T_\Phi \mathcal{U}$ tem codimensão 2 em $T_\Phi \operatorname{Sp}(2n)$.

Caso (b): Seja $\Phi \in \mathcal{U} - \mathcal{V}$ com autovalor do tipo misto $\lambda = a+bi$ e de multiplicidade 2. Pelo Corolário 2.1, existe uma base simplética tal que a matriz de Φ nessa base é da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & & & \\ b & a & 0 & & & \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ & & 0 & a & -b & 0 \\ & & 0 & b & a & 0 \\ & & B_1 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Defina $B : J \subset \mathbb{R} - \{0\} \to \operatorname{Sp}(2n)$ por

$$B(t) = \begin{pmatrix} at & -bt & 0 & & & \\ bt & at & 0 & & & \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ & & 0 & a/t & -b/t & 0 \\ & & 0 & b/t & a/t & 0 \\ & & B_1 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Temos $B(1) = \Phi$.

Seja $K : [0, 2\pi) \to \operatorname{Sp}(2n)$ dada por

$$K(v) = \begin{pmatrix} E(v) & -F(v) \\ F(v) & E(v) \end{pmatrix}$$

onde

$$E(v)=\begin{pmatrix}\cos(v/2) & 0 & 0\\ 0 & \cos(v/2) & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{I}\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F(v)=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(v/2) & 0 & 0\\ 0 & \operatorname{sen}(v/2) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Considere a aplicação $\Psi : J \times [0, 2\pi) \to \operatorname{Sp}(2n)$ dada por $\Psi(t, v) = K(v)^{-1}B(t)K(v)$. Então, Ψ é de classe C^1 e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(1, v) = K(v)^{-1}B'(1)K(v) = B_1 \cos v + B_2 \operatorname{sen} v,$$

onde

$$B_1=\begin{pmatrix} a & -b & 0 & & & \\ b & a & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & -a & b & 0\\ & & & -b & -a & 0\\ & & & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2=\begin{pmatrix} & & & -a & b & 0\\ & & & -b & -a & 0\\ & & & 0 & 0 & 0\\ -a & b & 0 & & & \\ -b & -a & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

É imediato que $\{B_1, B_2\}$ é L.I.. Assim, definindo o conjunto

$$X = \{B_1 t \cos v + B_2 t \operatorname{sen} v;\ v \in [0, 2\pi)\ e\ t \in \mathbb{R}\},$$

segue que X é um subespaço vetorial de dimensão 2 em $T_\Phi \operatorname{Sp}(2n)$, como foi mostrado no Caso (a). Finalmente, pelo mesmo argumento utilizado no Caso (a), temos que $X \cap T_\Phi \mathcal{U} = \emptyset$ e portanto, $T_\Phi \mathcal{U}$ tem codimensão 2 em $T_\Phi \operatorname{Sp}(2n)$.

Caso (c): Seja $\Phi \in \mathcal{U} - \mathcal{V}$ com autovalor real λ. Temos duas possibilidades para λ: $\lambda = \pm 1$ ou $\lambda \neq \pm 1$.

Se $\lambda = \pm 1$, então o autoespaço generalizado de λ tem dimensão 2 e pela Proposição 2.3 existe uma base simplética tal que a matriz de Φ é da forma

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_1 & 0 & A_2\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & B_1 & 0 & B_2\end{pmatrix}.$$

Defina $B : J \subset \mathbb{R} - \{0\} \to \mathrm{Sp}(2n)$ por

$$B(t) = \begin{pmatrix} \lambda t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & \lambda/t & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Temos $B(1) = \Phi$. Consideremos a aplicação $K : [0, 2\pi) \to \mathrm{Sp}(2n)$ dada por

$$K(v) = \begin{pmatrix} E(v) & -F(v) \\ F(v) & E(v) \end{pmatrix},$$

onde

$$E(v) = \begin{pmatrix} \cos v & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F(v) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} v & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Definindo a função $\Psi : J \times [0, 2\pi) \to \mathrm{Sp}(2n)$ por $\Psi(t, v) = K(v)^{-1} B(t) K(v)$, o resultado segue como no Caso (b).

Seja $\lambda \neq \pm 1$. Então, como o autoespaço e o autoespaço generalizado coincidem, segue das Proposições 2.4 e 2.5 que existe uma base simplética tal que a matriz de Φ nessa base é da forma

$$\begin{pmatrix} J_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & H_\lambda & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

onde

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

e H_λ é tal que $H_\lambda^{-1} = J_\lambda^{\mathrm{T}}$, ou seja,

$$H_\lambda = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}.$$

Defina a curva de matrizes $B : J \subset \mathbb{R} \to \mathrm{Sp}(2n)$ por

$$B(t) = \begin{pmatrix} \lambda \cos t & 0 & 0 & -\lambda^{-1} \operatorname{sen} t & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \cos(-t) & 0 & 0 & -\lambda^{-1} \operatorname{sen}(-t) & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ \lambda \operatorname{sen} t & 0 & 0 & \lambda^{-1} \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \operatorname{sen}(-t) & 0 & 0 & \lambda^{-1} \cos(-t) & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Temos $B(0) = \Phi$. Considerando a aplicação $C : [0, 2\pi) \to \mathrm{Sp}(2n)$ do Caso (a),

$$C(v) = \begin{pmatrix} R(v) & 0 \\ 0 & R(v) \end{pmatrix},$$

definimos $\Psi : J \times [0, 2\pi) \to \mathrm{Sp}(2n)$ dada por $\Psi(t, v) = C(v)^{-1} B(t) C(v)$. Assim, o resultado segue de forma análoga ao Caso (a).

Caso (d): Seja $\Phi \in \mathcal{U} - \mathcal{V}$ com autovalor múltiplo $\lambda = a + bi$, $|\lambda| \neq 1$ e $\Im(\lambda) \neq 0$. Temos duas possibilidades para λ: (1) $\mathcal{E}_\lambda = V_\lambda$ ou (2) $\mathcal{E}_\lambda \neq V_\lambda$.

No caso (1), pelos Corolário 2.2 e Proposição 2.5 existe uma base simplética na qual a matriz de Φ é da forma

$$\begin{pmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

e $H^{-1} = J^{\mathrm{T}}$. Calculando explicitamente a matriz H, vemos que

$$H = \begin{pmatrix} ka & -kb & 0 & 0 \\ kb & ka & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ka & -kb \\ 0 & 0 & kb & ka \end{pmatrix},$$

onde $k = \dfrac{1}{|\lambda|^2}$. Tomando $D_\lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, definamos a curva de matrizes $B : J \subset$

$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathrm{Sp}(2n)$ por

$$B(t) = \begin{pmatrix} tD_\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1}D_\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & tkD_\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^{-1}kD_\lambda & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Temos que $B(1) = \Phi$. Consideremos a aplicação $K : [0, 2\pi) \to \mathrm{Sp}(2n)$ dada por

$$K(v) = \begin{pmatrix} E(v) & 0 & 0 & -F(v) & 0 & 0 \\ 0 & E(v) & 0 & 0 & -F(v) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ F(v) & 0 & 0 & E(v) & 0 & 0 \\ 0 & F(v) & 0 & 0 & E(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

onde

$$E(v) = \begin{pmatrix} \cos v & 0 \\ 0 & \cos v \end{pmatrix} \qquad e \qquad F(v) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} v & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} v \end{pmatrix}.$$

Definimos, como nos casos anteriores, a aplicação $\Psi : J \times [0, 2\pi) \to \mathrm{Sp}(2n)$ dada por $\Psi(t, v) = K(v)^{-1}B(t)K(v)$, o resultado segue de modo análogo ao Caso (b).

Consideremos agora o caso (2), onde $\mathcal{E}_\lambda \neq V_\lambda$. As idéias principais da demonstração no caso geral são obtidas do caso particular em que $n = 4$, isto é, em $\mathbb{R}^8$. Faremos, portanto, a demonstração somente nesse caso.

Pelas Proposições 2.3 e 2.5, existe uma base simplética segundo a qual a matriz de Φ é da forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

com $A_2^{-1} = A_1^{\mathrm{T}}$ e

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -b & a & -b \\ b & a & b & a \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Defina $A : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ por

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y & x & -y \\ y & x & y & x \\ 0 & 0 & x & -y \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}$$

e considere a aplicação $B : W \subseteq \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathcal{U} \subset \mathrm{Sp}(8)$ dada por

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) & 0 \\ 0 & \left[A(x,y)^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \end{pmatrix},$$

onde W é uma vizinhança do autovalor $\lambda = (a,b)$.

Seja $F : W \times \mathrm{Sp}(8) \to \mathcal{U} \subset \mathrm{Sp}(8)$ a aplicação dada por

$$F(x,y,C) = C^{-1}B(x,y)C.$$

Claramente, F é de classe C^1. Calculando a derivada de F no ponto $(x,y,\mathbf{I})$, obtemos

$$\begin{aligned} dF(x,y,\mathbf{I}) \cdot (u,v,H) &= -HB(x,y) + dB(x,y) \cdot (u,v) + B(x,y)H \\ &= dB(x,y) \cdot (u,v) + [B(x,y),H], \end{aligned}$$

onde $(u,v) \in T_{(x,y)}W = \mathbb{R}^2$, $H \in T_{\mathbf{I}}\,\mathrm{Sp}(8) = \mathrm{sp}(8)$ e $[B(x,y),H]$ é o colchete de Lie de $B(x,y)$ e H.

O kernel de $dF(x,y,\mathbf{I})$ é formado, portanto, pelos elementos (u,v,H) tais que

$$dB(x,y) \cdot (u,v) = [H, B(x,y)]. \tag{3.1}$$

Note que o primeiro membro de (3.1) não depende de H. Tomando $u = v = 0$, obtemos $[H, B(x,y)] = 0$ e, portanto, o subespaço

$$\mathcal{S}_{B(x,y)} = \left\{(0,0,H) \in \mathbb{R}^2 \times \mathrm{sp}(8);\ [H, B(x,y)] = 0\right\}$$

é um subespaço do kernel de $dF(x,y,\mathbf{I})$. O subespaço $\mathcal{S}_{B(x,y)}$ tem dimensão 4 e as matrizes H são da forma

$$\begin{pmatrix} D & E & & \\ 0 & D & & \\ & & -D^{\mathrm{T}} & 0 \\ & & -E^{\mathrm{T}} & -D^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

onde D e E são matrizes 2×2 que pertecem ao subespaço gerado por $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$. Ou seja, D e

E são produtos de rotações e expansões no plano. Para ver isso, seja

$$Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

o bloco 2×2 não-nulo de $A(x, y)$. Se $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ é uma matriz que comuta com Z, então verificamos por cálculo direto que $\alpha_1 = \beta_2$ e $\beta_1 = -\alpha_2$, ou seja,

$$M = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{J}, \tag{3.3}$$

com $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Como $|\lambda| \neq 1$, podemos diminuir W de modo que nenhum elemento de W tenha norma 1. Nesse caso, usando a caracterização de matrizes hamiltonianas obtida no Exemplo 1.15, verificamos por cálculo direto que se

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

é uma matriz que comuta com $B(x, y)$, então H é da forma (3.2), onde D e E são matrizes da forma (3.3). Assim, $\mathcal{S}_{B(x,y)}$ tem dimensão 4 quando $(x, y) \in W$.

No ponto (x, y, C), a derivada de F é

$$dF(x, y, C) \cdot (u, v, H) = -C^{-1}HC^{-1}B(x, y)C + C^{-1}dB(x, y) \cdot (u, v)C + C^{-1}B(x, y)H$$

$$= -C^{-1}H(C^{-1}B(x, y)C) + C^{-1}dB(x, y) \cdot (u, v)C + (C^{-1}B(x, y)C)C^{-1}H$$

e portanto, vemos que $dF(x, y, C)$ é simplesmente a conjugação de $dF(x, y, \mathbf{I})$ por C. Logo, $\ker(dF(x, y, \mathbf{I}))$ e $\ker(dF(x, y, C))$ têm mesma dimensão.

Seja $k = \dim(\mathrm{Sp}(8)) = \dim(\mathrm{sp}(8))$. Então, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem aplicado a $dF(x, y, \mathbf{I})$, temos

$$k + 2 = \dim(\ker(dF(x, y, \mathbf{I}))) + \dim(\mathrm{Im}(dF(x, y, \mathbf{I}))) \geq 4 + \dim(\mathrm{Im}(dF(x, y, \mathbf{I}))).$$

Portanto, $\dim(\mathrm{Im}(dF(x, y, \mathbf{I}))) \leq k - 2$ e assim, $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(dF(x, y, \mathbf{I}))) \geq 2$.

Finalmente, provaremos que F é sobrejetora em uma vizinhança de Φ em $\mathcal{U}$. Sejam $A(t)$ um curva diferenciável em $\mathcal{U}$ tal que $A(0) = \Phi$ e $\gamma : I \to W$ uma curva fechada simples em torno do autovalor $\lambda = (a, b)$, e portanto, em torno do autovalor $\lambda(t)$ de $A(t)$, para t suficientemente pequeno. Se $p_t(z)$ é o polinômio característico de $A(t)$, então, diminuindo W se necessário, temos que $\lambda(t)$ é a única raíz de $p_t(z)$ em W. Logo, escrenvendo

$p_t(z) = (z - \lambda(t))^2 h_t(z)$, onde h_t não possui raizes em W, temos

$$\frac{p_t'(z)}{p_t(z)} = \frac{2}{z - \lambda(t)} + \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}.$$

Como $h_t(z) \neq 0$ para todo $z \in W$, segue que $\dfrac{h_t'}{h_t}$ é homotópico a uma constante em W. Aplicando a fórmula integral de Cauchy (ver [29], p. 193), obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zp_t'(z)}{p_t(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{2z}{z-\lambda(t)} + \frac{zh_t'(z)}{h_t(z)}\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{2z}{z-\lambda(t)}dz = 2\lambda(t),$$

para todo $z \in W - \gamma(I)$. A segunda igualdade na equação acima vem do fato de que $\dfrac{h_t'}{h_t}$ é homotópica a uma constante α; nesse caso, temos que $\displaystyle\int_\gamma \frac{zh_t'(z)}{h_t(z)}dz = \int_\gamma \alpha z dz = 0$, pois $\alpha z dz$ é uma forma exata.

Resulta que $\lambda(t)$ é um autovalor de $A(t)$ com multiplicidade 2 e que varia diferenciavelmente em t, uma vez que p_t varia diferenciavelmente com t. Pelo Lema 3.7, existe uma curva diferenciável $C(t)$ tal que $C(t)A(t)C(t)^{-1} = B(\Re(\lambda(t)), \Im(\lambda(t)))$. Assim,

$$A(t) = C(t)^{-1}B(\Re(\lambda(t)), \Im(\lambda(t)))C(t) = F(\Re(\lambda(t)), \Im(\lambda(t)), C(t)).$$

Logo, toda curva de matrizes $A(t)$ em $\mathcal{U}$ tal que $A(0) = \Phi$ é a imagem de F por alguma curva $D(t) = (a(t), b(t), C(t))$, onde $\lambda(t) = a(t) + ib(t)$ é um autovalor múltiplo de $A(t)$. Como $\mathcal{U}$ é reunião de subvariedades de Sp(8), segue que uma vizinhança de Φ em $\mathcal{U}$ pode ser escrita como a união de todas as curvas $A(t)$ em $\mathcal{U}$ ligando Φ a uma outra matriz Ψ da vizinhança de Φ. Isso mostra que F é sobrejetora em vizinhança de Φ em $\mathcal{U}$ e como a imagem de $dF(a, b, \mathbf{I})$ tem codimensão maior ou igual 2, segue que $T_\Phi\mathcal{U}$ tem codimensão maior ou igual a 2.

□

Teorema 3.10. *Seja $\Phi \in \mathcal{U} - \mathcal{V}$ com autovalor múltiplo λ tal que* (i) $|\lambda| = 1$ *ou* $\operatorname{Im}\lambda = 0$ *e* (ii) $V_\lambda \neq \mathcal{E}_\lambda$, *onde V_λ e $\mathcal{E}_\lambda$ são, respectivamente, o autoespaço e o autoespaço generalizado de λ. Nessas condições, existe $A \in \mathscr{G}$ tal que $A(0) = \Phi$.*

Demonstração. Pelos Corolário 1.34, Definição 1.35 e Proposição 1.38 temos os casos:

(a) λ é autovalor do tipo misto e seus autoespaço e autoespaço generalizado não coincidem;

(b) λ é autovalor real múltiplo e seus autoespaço e autoespaço generalizado não coincidem;

Caso (a): Suponha que $\Phi \in \mathcal{U} - \mathcal{V}$ tenha um autovalor do tipo misto, com multiplicidade 2 e que seus autoespaço e autoespaço generalizado não coincidem. É suficiente provar no caso em $2n = 4$, isto é, basta considerar o espaço todo como autoespaço generalizado de Φ, uma vez que a forma dos blocos remanescentes no caso geral não importam.

Pela Proposição 2.3, existe uma base simplética tal que Φ é da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b & \mu a & -\mu b \\ b & a & \mu b & \mu a \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix},$$

onde $\mu = \pm 1$ e $b \neq 0$. Defina a curva diferenciável $B : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ passando por Φ como sendo

$$B(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) & \mu a(t) & -\mu b(t) \\ b(t) & a(t) & \mu b(t) & \mu a(t) \\ 0 & 0 & a(t) & -b(t) \\ 0 & 0 & b(t) & a(t) \end{pmatrix},$$

onde $a(t) = \cos(t_0 + t)$, $b(t) = \operatorname{sen}(t_0 + t)$, $a(0) = a$ e $b(0) = b$. Seja $G : \mathbb{R} \times \mathrm{Sp}(4) \to \mathcal{U}$ por $G(t, C) = C^{-1}B(t)C$. Pela definição de G, segue ela é analítica. Usando mesmo argumento do Caso (d) do Teorema 3.9 para mostrar que F era sobrejetora numa vizinhança de Φ em $\mathcal{U}$, podemos mostrar que G também é sobrejetora numa vizinhança de Φ em $\mathcal{U}$.

Calculando a derivada de G em $(t, \mathbf{I})$, obtemos

$$dG(t, \mathbf{I}) \cdot (s, H) = B(t)H - HB(t) + sB'(t) = [B(t), H] + sB'(t).$$

Por cálculo direto, verifica-se que $\dim(\ker(dG(t, \mathbf{I}))) = 2$ e é gerado pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, se $k = \dim(\mathrm{Sp}(4))$, aplicando o Teorema do Núcleo e da Imagem a $dG(t, \mathbf{I})$, temos

$$k + 1 = \dim(\mathrm{Im}(dG(t, \mathbf{I}))) + \dim(\ker(dG(t, \mathbf{I}))) = \dim(\mathrm{Im}(dG(t, \mathbf{I}))) + 2$$

e assim, $\dim(\mathrm{Im}(dG(t, \mathbf{I}))) = k - 1$. Logo, a codimensão de $\mathrm{Im}(dG(t, \mathbf{I}))$ em $\mathrm{Sp}(4)$ é 1 e deve existir, portanto, uma curva genérica $A \in \mathscr{G}$ tal que $A(0) = \Phi$.

Caso (b): Por simplicidade, faremos a demonstração apenas no caso em que $2n = 2$, uma vez que ω é não-degenerada no autoespaço generalizado de λ.

Temos duas possibilidades: $\lambda = \pm 1$ ou $\lambda \neq \pm 1$.

Se $\lambda = \pm 1$, então pela Proposição 2.4 existe uma base simplética tal que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde $k = \pm 1$, pois o autoespaço e o autoespaço generalizado de λ não coincidem. Seja $B : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ dada por

$$B(t) = \begin{pmatrix} \lambda t & k \\ 0 & \lambda / t \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

e defina $F : \mathbb{R} \times \mathrm{Sp}(4) \to \mathcal{U}$ por $F(t, C) = C^{-1} B(t) C$. Pelo mesmo argumento do Caso (d) do Teorema 3.9 resulta que F é sobrejetora em uma vizinhança de Φ em $\mathcal{U}$. Calculando a derivada de F no ponto $(t, \mathbf{I})$ obtemos

$$dF(t, \mathbf{I}) \cdot (s, H) = [B(t), H] + sB'(t).$$

Por cálculo direto, verifica-se que o kernel de $dF(t, \mathbf{I})$ tem dimensão 2 e é formado por elementos da forma $(0, H)$ tais que H é combinação linear das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resulta como no Caso (a) acima que $\mathrm{codim}(dF(0, \mathbf{I})) = \mathrm{codim}(T_\Phi \mathcal{U}) = 1$ em $\mathrm{sp}(2)$ e portanto, deve existir uma curva genérica $A \in \mathscr{G}$ tal que $A(0) = \Phi$.

$\square$

Lema 3.11. *Seja $A \in \mathscr{G}$ tal que $A(0) \in \mathcal{U}$. Então, em qualquer vizinhança de $A(0)$ em $\mathrm{Sp}(2n)$ exisitem matrizes $B_1 \in \mathrm{Sp}(2n) - \mathcal{U}$ com o mesmo número de autovalores de valor absoluto igual 1 e o mesmo número de autovalores reais e matrizes $B_2 \in \mathrm{Sp}(2n) - \mathcal{U}$ com um número inferior de autovalores de valor absoluto igual 1 e um número inferior de autovalores reais.*

Demonstração. Como $A(0) \in \mathcal{U}$, temos que $A(0)$ satifaz uma das duas condições do Teorema 3.10.

Caso (a): Para $A(0)$ nas condições do Caso (a) do Teorema 3.10, existe uma base simplética tal que $A(0)$ é da forma

$$\begin{pmatrix} a & -b & ka & -kb \\ b & a & kb & ka \\ 0 & 0 & -a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

Considere a matriz

$$B(\varepsilon) = \begin{pmatrix} a\varepsilon & -b\varepsilon & ka & -kb \\ b\varepsilon & a\varepsilon & kb & ka \\ 0 & 0 & -a/\varepsilon & b/\varepsilon \\ 0 & 0 & b/\varepsilon & a/\varepsilon \end{pmatrix}$$

que varia com ε. Os autovalores de de $B(\varepsilon)$ são os números complexos $\lambda_1(\varepsilon) = \varepsilon(a+bi)$, $\lambda_2(\varepsilon) = \varepsilon(a-bi)$, $\lambda_3(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(a+bi)$ e $\lambda_4(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(a-bi)$. Logo, $B(\varepsilon) \in \mathrm{Sp}(2n) - \mathcal{U}$ e seus autovalores tem valor absoluto diferente de 1 para ε próximo de 1. Isso nos dá a matriz B_2 do Lema.

Para achar B_1, sejam $a = \cos t_0$, $b = \cos t_0$ e considere a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -t_0 & k & 0 \\ t_0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & -t_0 \\ 0 & 0 & t_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, C é hamiltoniana pela caracterização dada no Exemplo 1.15 e $A(0) = \exp(C)$. Seja

$$C(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -t_0 & k & 0 \\ t_0 & 0 & 0 & k \\ -\varepsilon & 0 & 0 & -t_0 \\ 0 & -\varepsilon & t_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de $C(f)$ são os números $\pm\sqrt{-t_0^2 - k\varepsilon \pm 2t_0\sqrt{k\varepsilon}}$, que são distintos para $\varepsilon \neq 0$. Assim, $\exp(C(\varepsilon)) \in \mathrm{Sp}(2n) - \mathcal{U}$. Além disso, se ε for suficientemente pequeno e tem o mesmo sinal de k, teremos que $C(\varepsilon)$ está próximo de C e os autovalores de $C(\varepsilon)$ são todos números imaginários puros. Logo, todos os autovalores de $\exp(C(\varepsilon))$ tem valor absoluto igual a 1 e portanto, tem o mesmo número de autovalores de valor absoluto 1 que $\exp(C) = A(0)$. Assim, tomamos as matrizes B_1 do Lema como sendo as matrizes $\exp(C(\varepsilon))$, para ε suficientemente pequeno.

Caso (b): Para $A(0)$ nas condições do Caso (b) do Teorema 3.9, temos dois subcasos. O primeiro, é quando o autovalor múltiplo λ de $A(0)$ é ± 1. Nesse caso, existe uma base simplética que coloca $A(0)$ na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $k = \pm 1$.

Considere as matrizes

$$C = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, $A(0) = \exp(C)$, se $\lambda = 1$ ou $A(0) = -\exp(D)$, se $\lambda = -1$.

Agora, sejam

$$C(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad D(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores dessas matrizes são, respectivamente, $\pm\sqrt{k\varepsilon}$ para C e $\pm\sqrt{-k\varepsilon}$ para D.

Se $\lambda = 1$, tomando ε suficientemente pequeno e com sinal contrário ao de k, teremos que $C(\varepsilon)$ está próximo de C e os autovalores de $C(\varepsilon)$ são todos números imaginários puros. Nesse caso, todos os autovalores de $\exp(C(\varepsilon))$ são números complexos e assim tem menos autovalores reais que $A(0)$. Logo tomamos $\exp(C(\varepsilon))$, para $k\varepsilon < 0$ e ε suficientemente pequeno, como sendo as matrizes B_2 do Lema.

Para obter as matrizes B_1, tomamos ε de forma que $k\varepsilon > 0$. Nesse caso, os autovalores de $C(\varepsilon)$, e portanto os de $\exp(C(\varepsilon))$, são todos números reais. Assim, $\exp(C(\varepsilon))$, para $k\varepsilon > 0$, tem o mesmo número de autovalores reais que $A(0)$.

Se $\lambda = -1$, tomando ε suficientemente pequeno e com o mesmo sinal de k, teremos que $D(\varepsilon)$ terá somente autovalores imaginários puros. Se tomarmos ε suficientemente pequeno e com sinal contrário ao de k, teremos que os autovalores de $D(\varepsilon)$ são todos números reais. O resultado segue como no caso $\lambda = 1$.

Finalmente, o segundo subcaso se dá quando $\lambda \neq \pm 1$. Nesse caso, existe uma base simplética tal que $A(0)$ é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & -k/\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda > 0$, existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = e^u$. Considere a matriz

$$C = \begin{pmatrix} u & k/e^u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u & 0 \\ 0 & 0 & -k/e^u & -u \end{pmatrix}.$$

Então, $A(0) = \exp(C)$. Seja

$$C(\varepsilon) = \begin{pmatrix} u & k/e^u & 0 & 0 \\ \varepsilon & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u & -\varepsilon \\ 0 & 0 & -k/e^u & -u \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de $C(\varepsilon)$ são os números $\pm\left(\pm ue^u + \sqrt{(k\varepsilon)e^u}\right)e^{-u}$, que são números complexos ou reais conforme $k\varepsilon < 0$ ou $k\varepsilon > 0$, respectivamente. O resultado segue como no caso anterior. $\square$

O próximo teorema mostra como variam os autovalores de $A(\varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente penqueno, onde $A(t)$ é uma curva genérica de matrizes simpléticas tal que $A(0) \in \mathcal{U}$.

Teorema 3.12. *Seja $A \in \mathscr{G}$ tal que $A(0) \in \mathcal{U}$. Então, existe $\delta > 0$ e autovalores $\lambda(\varepsilon)$ e $\mu(\varepsilon)$ de $A(\varepsilon)$ tais que ocorre um dos três casos abaixo:*

1. *(i)* $\lambda(0) = \mu(0)^{-1}$;

   (ii) $|\lambda(\varepsilon)| = |\mu(\varepsilon)| = 1$ *e* $\lambda(\varepsilon) \neq \mu(\varepsilon)^{-1}$, *para* $-\delta \leq \varepsilon < 0$;

   (iii) $\lambda(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)^{-1}$ *e* $|\lambda(\varepsilon)| > 1$, *para* $0 < \varepsilon \leq \delta$.

2. *(i)* $\lambda(0) = 1$ *ou* $\lambda(0) = -1$;

   (ii) $|\lambda(\varepsilon)| = 1$ *e* $\lambda(\varepsilon) \neq \pm 1$, *para* $-\delta \leq \varepsilon < 0$;

   (iii) $\lambda(\varepsilon) \neq \pm 1$ *é um número real, para* $0 < \varepsilon \leq \delta$.

3. *(a)* $\lambda(0) = \mu(0)^{-1}$;

   (b) $\Im(\lambda(\varepsilon)) = \Im(\mu(\varepsilon)) = 0$ *e* $\lambda(\varepsilon) \neq \mu(\varepsilon)^{-1}$, *para* $-\delta < \varepsilon < 0$;

   (c) $\lambda(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)^{-1}$ *e* $\Im(\lambda(\varepsilon)) > 0$, *para* $0 < \varepsilon \leq \delta$.

Demonstração. Seja N uma vizinhança convexa de $A(0)$ tal que $N - \mathcal{U}$ tenha duas componentes conexas N_1 e N_2. Isso possível, pois $\operatorname{codim}_{\mathrm{Sp}(2n)}(\mathcal{U}) = 1$.

Afirmamos que os dois tipos de matrizes descritas no Lema 3.11 estão em componentes conexas distintas. De fato, sejam $D(t)$ um caminho em N que vai do conjunto do primeiro tipo de matrizes U_1 do Lema 3.11 e vai para o conjunto do segundo tipo U_2 e $t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R};\ D(t) \text{ é do primeiro tipo}\}$. Provaremos que $D(t_0) \in \mathcal{U}$.

Suponha por absurdo que $D(t_0) \notin \mathcal{U}$. Então, $D(t) \in U_1$ ou $D(t) \in U_2$ pois não há outra possibilidade bifurcação além dessas. Além disso, U_1 e U_2 são componentes conexas de $\mathrm{Sp}(2n) - \mathcal{U}$. Se $D(t_0) \in U_1$, então, por continuidade, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que $D(t_0 + \varepsilon) \in U_1$. Por outro lado, temos que $D(t_0 + \varepsilon) \in U_2$, o que implica $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$; um absurdo em vista do Lema 3.11. Assumindo $D(t_0) \in U_2$, chegamos a uma contradição de forma análoga a anterior.

Logo, $D(t_0) \notin U_1 \cup U_2 = \mathrm{Sp}(2n) - \mathcal{U}$ e portanto, $D(t_0) \in \mathcal{U}$.

Assim, temos que $U_1 \cap (N - \mathcal{U}) = N_1$ e $U_2 \cap (N - \mathcal{U}) = N_2$ ou $U_1 \cap (N - \mathcal{U}) = N_2$ e $U_2 \cap (N - \mathcal{U}) = N_1$. Assuma a primeira possibilidade.

Seja $A(t)$ como no Teorema e tome $\delta > 0$ tal que $A(\varepsilon) \in N$, para $-\delta \leq \varepsilon \leq \delta$ e $A(\varepsilon) \notin \mathcal{U}$, se $\varepsilon \neq 0$. Observando as condições em cada um dos casos no Teorema, vemos que se $-\delta \leq \varepsilon < 0$, então $A(\varepsilon) \in N_1$, e se $0 < \varepsilon \leq \delta$, temos $A(\varepsilon) \in N_2$. Logo, temos que $\{A(\varepsilon);\ -\delta \leq \varepsilon < 0\} \subset N_1$ e $\{A(\varepsilon);\ 0 < \varepsilon \leq \delta\} \subset N_2$.

□

Capítulo 4

Teoria simplética não-linear

Neste capítulo, começaremos a estudar a teoria simplética não-linear, isto é, passaremos agora a transferir, com as devidas adaptações, os resultados obtidos no Capítulo 1 para contexto de variedades diferenciáveis. As noções e resultados estudados aqui serão usados no Capítulo 5 para estudar as propriedades genéricas dos sistemas Hamiltionianos.

São pré-requisitos para este capítulo as noções de variedade diferenciável, campos vetoriais e formas diferenciais em variedades. Assim, é recomendável recorrer ao Apêndice B e às referências indicadas no mesmo para obter as definições e resultados básicos sobre esses conceitos.

4.1 Variedades simpléticas e o Teorema de Darboux

Sejam M^{2n} uma variedade de dimensão $2n$ e $\omega : M \to \Lambda^2(T^*M)$ uma forma diferencial de grau 2 em M.

Definição 4.1. Dizemos que ω é uma **forma simplética** em M se ω é fechada e $\omega(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é uma forma simplética no espaço tangente T_pM, para todo $p \in M$.

Definição 4.2. Uma **variedade simplética** é um par (M, ω) tal que M é uma variedade de dimensão $2n$ e ω é uma forma simplética em M.

No Capítulo 1, vimos que se (V, ω) é um espaço vetorial simplético, então $\Omega = \omega^n$ define uma forma de volume em V. Dessa forma, segue que em cada espaço tangente de uma variedade simplética podemos definir uma forma de volume Ω e portanto, segue que toda variedade simplética é orientável.

Exemplo 4.3. O exemplo mais simples de variedade simplética é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2n}$ com a forma simplética padrão

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Consideremos uma variedade simplética M de dimensão $2n$ com forma simplética ω e $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ um sistema de coordenadas locais centrado em $p \in M$, isto é, $U \subseteq M$ é um aberto contendo p e a aplicação $\varphi : U \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\varphi(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q), y_1(q), \ldots, y_n(q))$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Definição 4.4. Um **sistema de coordenadas simplético** em M é um sistema de coordenadas locais $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ tal que nesse sistema a forma ω é escrita como

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Resulta de definição acima que o conjunto

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_p \right\}$$

é uma base simplética de T_pM, para todo $p \in U$.

Definição 4.5. Um **difeomorfismo simplético** $f : M_1 \to M_2$ entre as variedades simpléticas (M, ω_1) e (M_2, ω_2) é um difeomorfismo que satisfaz a condição

$$f^*\omega_2 = \omega_1,$$

onde $f^*\omega_2$ é o pull-back de ω_2 por f. Dizemos nesse caso, que as variedades M_1 e M_2 são **simplectomorfas**.

Assim, um difeomorfismo simplético f é um difeomorfismo que preserva a estrutura simplética das variedades. Estaremos interessados no caso especial em que $M_1 = M_2$ e $\omega_1 = \omega_2$, ou seja, $f^*\omega = \omega$.

Denotaremos por $\mathrm{Symp}(M)$ o conjunto de todos os difeomorfismos simpléticos de M. O conjunto $\mathrm{Symp}(M)$ é um subgrupo de Lie do grupo dos difeomorfismos $\mathrm{Diff}(M)$ com a operação de composição de aplicações.

Exemplo 4.6. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas e $(U_1; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ um sistema de coordenadas em M_1. Se $f : M_1 \to M_2$ é um difeomorfismo simplético, então f induz um sistema de coordenadas simpléticas locais $(U_2, \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ em M_2. De fato, tomando $U_2 = f(U_1)$ defina $\xi_j = x_j \circ f^{-1}$ e $\eta_j = y_j \circ f^{-1}$, para $j = 1, \ldots, n$. Então, pela definição de difeomorfismo simplético, temos que

$$\omega_2 = (f^{-1})^*\omega_1 = \sum_{j=1}^{n} d(x_j \circ f^{-1}) \wedge d(y_j \circ f^{-1}) = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge d\eta_j.$$

Logo, $(U_2; \xi_1 \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ é um sistema de coordenadas simpléticas locais em M_2, o qual chamaremos de sistema de coordenadas **induzido** pelo difeomorfismo simplético f. Observemos que nesse sistema de coordenadas a representação de f é dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Seja $p \in M$ e considere a aplicação linear $\mu_p : T_pM \to T_p^*M$ definida por

$$\mu_p(v) = \iota(v)\omega_p,$$

onde $\iota(v)\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é o funcional linear dado por $\iota(v)\omega_p(u) = \omega_p(v, u)$. Como ω_p bilinear e não-degenerada, segue que μ_p é um isomorfismo para todo $p \in M$. Isso nos dá uma correspondência biunívoca entre campos de vetores e 1-formas em M através da aplicação linear induzida $\mu : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ dada por

$$\mu(X) = \iota(X)\omega : M \to T^*M, \tag{4.1}$$

que associa cada ponto $p \in M$ ao funcional linear $\mu(X)(p) = \mu_p(X(p)) \in T_p^*M$. Com isso, damos a seguinte definição:

Definição 4.7. Dizemos que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, definido em uma variedade simplética (M, ω), é um **campo vetorial simplético** se a forma $\iota(X)\omega$ é fechada. O conjunto dos campos vetoriais simpléticos em M será denotado por $\mathfrak{X}_\omega(M)$.

A proposição a seguir nos diz que se M é uma variedade fechada, isto é, compacta e sem bordo, então $\mathfrak{X}_\omega(M)$ é a álgebra de Lie do grupo $\mathrm{Symp}(M)$.

Proposição 4.8. *Seja (M, ω) uma variedade simplética fechada. Suponha que $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ seja uma família de difeomorfismos de M que é gerado por uma família de campos vetoriais*

$X_t \in \mathfrak{X}(M)$, $t \in \mathbb{R}$, através das relações

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t \\ \\ \psi_0 = \mathrm{id} \end{cases}.$$

Então, $\psi_t \in \mathrm{Symp}(M)$ para todo t se, e somente se, $X_t \in \mathfrak{X}_\omega(M)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mais ainda, se $X, Y \in \mathfrak{X}_\omega(M)$, então $[X,Y] \in \mathfrak{X}_\omega(M)$ e

$$\iota([X,Y])\omega = dH,$$

onde $H = \omega(Y,X)$.

Demonstração. Notemos inicialmente que

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi_{t+s}^*\omega = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi_t^*(\psi_s^*\omega).$$

Como o pull-back ψ_t^* é uma aplicação $\psi^* : \mathbb{R} \times \Omega^2(M) \to \Omega^2(M)$, aplicando a regra da cadeia para derivadas parciais, temos

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi^*(t, \psi^*(s,\omega)) = \partial_1\psi^*(t,\omega)) \cdot \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} t + \partial_2\psi^*(t,\omega) \cdot \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi^*(s,\omega)$$

$$= \partial_2\psi^*(t,\omega) \cdot \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi_s^*\omega$$

Notemos que ψ é linear na segunda variável e portanto, segue que $\partial_2\psi_t^* = \psi_t^*$. Além disso, $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \psi_s^*\omega = \mathscr{L}_{X_t}\omega$. Logo,

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*(\mathscr{L}_{X_t}\omega) \tag{4.2}$$

Combinando a equação (4.2) com fórmula de Cartan,

$$\mathscr{L}_{X_t}\omega = \iota(X_t)d\omega + d(\iota(X_t)\omega),$$

e com o fato de ω ser fechada, obtemos que

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^* d(\iota(X_t)\omega) \tag{4.3}$$

Agora, se $\psi_t \in \mathrm{Symp}(M)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\psi_t^*\omega = \omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$0 = \frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^* d(\iota(X_t)\omega),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $d(\iota(X_t)\omega) = \psi_0^* d(\iota(X_t)\omega) = 0$, donde $\iota(X_t)\omega$ é fechada e portanto, $X_t \in \mathfrak{X}_\omega(M)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se $X_t \in \mathfrak{X}_\omega(M)$, então a forma $\iota(X_t)\omega$ é fechada. Assim, da equação (4.3), resulta que

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\psi_t^*\omega$ é constante e como $\psi_0^*\omega = \omega$, segue que $\psi_t^*\omega = \omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $\psi_t \in \mathrm{Symp}(M)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para provar a segunda afirmação, observemos que a aplicação $\mu : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ é linear e portanto,

$$\iota([X,Y])\omega = \mu([X,Y]) = \mu\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\psi_t^X)^*Y\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\mu\left((\psi_t^X)^*Y\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\iota\left((\psi_t^X)^*Y\right)\omega.$$

Observemos agora que o pull-back $(\psi_t^X)^* : \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$ é um isomorfismo, para todo $t \in \mathbb{R}$, cujo inverso é $\left[\left(\psi_t^X\right)^*\right]^{-1} = \left(\psi_{-t}^X\right)^*$. Assim, dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, temos que

$$\left(\psi_{-t}^X\right)^*\iota((\psi_t^X)^*Y)\omega_p(v) = \iota((\psi_t^X)^*Y)\omega_{\psi_{-t}^X(p)}(d\psi_{-t}^X(p)v)$$

$$= \omega_{\psi_{-t}^X(p)}((\psi_t^X)^*Y(\psi_{-t}^X(p)), d\psi_{-t}^X(p)v) = \omega_{\psi_{-t}^X(p)}(d\psi_{-t}^X(p)Y(p), d\psi_{-t}^X(p)v)$$
$$= (\psi_{-t}^X)^*\omega_p(Y(p),v) = \omega(Y(p),v) = \iota(Y)\omega_p(v).$$

Logo, resulta que $\iota((\psi_t^X)^*Y)\omega = (\psi_t^X)^*\iota(Y)\omega$. Portanto,

$$\iota([X,Y])\omega = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\iota((\psi_t^X)^*Y)\omega = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\psi_t^X)^*\iota(Y)\omega = \mathscr{L}_X\iota(Y)\omega.$$

Usando a fórmula de Cartan e o fato de que $Y \in \mathfrak{X}_\omega(M)$, isto é, $\iota(Y)\omega$ é fechada, obtemos que

$$\iota([X,Y])\omega = d(\iota(X)\iota(Y)\omega) = d\omega(Y,X).$$

Assim, $\iota([X,Y])\omega$ é uma forma exata e portanto, $[X,Y] \in \mathfrak{X}_\omega(M)$ pois toda forma exata é fechada.

□

Provaremos agora um resultado importante sobre a teoria local de variedades simpléticas: o Teorema de Darboux. Esse teorema nos diz que variedades simpléticas não possuem invariantes locais, isto é, localmente todas elas são simplectomorfas ao espaço simplético padrão $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Para tanto, utilizaremos um argumento apresentado por Moser em [26], p. 292. Antes disso, damos seguinte definição:

Definição 4.9. Seja M uma variedade de dimensão n. Uma **isotopia** $\psi : \mathbb{R} \times M \to M$ entre dois difeomorfismos $\psi_0, \psi_1 \in \mathrm{Diff}(M)$ é uma homotopia formada por difeomorfismos de M tais $\psi(0,p) = \psi_0(p)$ e $\psi(1,p) = \psi_1(p)$, para todo $p \in M$. Nesse caso, dizemos que ψ_0 e ψ_1 são **isotópicos**.

Usaremos também a notação ψ_t para indicar uma isotopia e fica subentendido que se trata de uma aplicação $\psi : \mathbb{R} \times M \to M$, onde $\psi(t,p) = \psi_t(p)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$.

Dada uma isotopia ψ_t entre um difeomorfismo $\psi_1 : M \to M$ e a identidade $\mathrm{id} : M \to M$, podemos associar de modo natural um campo vetorial dependente do tempo X_t tal que ψ_t seja o fluxo de X_t. De fato, colocando para cada $p \in M$,

$$X_t(p) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \psi_s(\psi_t^{-1}(p)),$$

obtemos um campo vetorial $X_t : M \to TM$ de classe C^∞, para cada $t \in \mathbb{R}$. Notemos que a igualdade acima é equivalente a $\dfrac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t$. Para ver isso, basta observar que, sendo ψ_t um difeomorfismo e pondo $q = \psi_t^{-1}(p)$, teremos que

$$X_t(\psi_t(q)) = \frac{d}{dt}\psi_t(q),$$

para todo $q \in M$. Isso mostra que a isotopia ψ_t é o fluxo do campo X_t.

A recíproca da argumentação anterior nem sempre é verdadeira, isto é, nem sempre podemos garantir que um campo X_t dependente do tempo determina uma isotopia ψ_t entre a identidade e um difeomorfismo de M. Para garantir isso, devemos garantir que o fluxo dependente do tempo Ψ_{t,t_0} de X_t esteja definido em um domínio $\mathfrak{D}_{X_t}$ tal que $[0,1] \times [0,1] \times M \subseteq \mathfrak{D}_{X_t}$. Se este for o caso, então para $t_0 = 0$, temos que $\psi_t = \Psi_{t,0}$ é uma isotopia entre a identidade e um difeomorfismo $\psi_1 = \Psi_{1,0} \in \mathrm{Diff}(M)$. Quando M é compacta o fluxo Ψ_{t,t_0} está definido para todo $t, t_0 \in \mathbb{R}$ e portanto, sempre podemos recuperar a isotopia ψ_t nesse caso.

A próxima proposição ilustra o argumento de Moser, o qual afirma que as formas simpléticas de uma variedade que estão na mesma classe de cohomologia e na mesma componente conexa do conjunto $\{\omega \in \Omega^2(M);\ \omega \text{ é simplética e } [\omega] = c,\ \text{com } c \in H^2(M)\}$ são simplectomorfas, onde $H^2(M)$ é o grupo de cohomologia de de Rham de ordem 2.

Proposição 4.10. *Seja M uma variedade compacta de dimensão $2n$ e ω_t uma família C^∞ de formas simpléticas tais que $[\omega_t] = [\omega_0]$, para $0 \le t \le 1$. Então, existe uma isotopia $\psi_t \in \mathrm{Diff}(M)$ tal que $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$, para $0 \le t \le 1$.*

Demonstração. Vamos assumir que exista uma tal isotopia ψ_t satisfazendo as condições do proposição e, mais ainda, que ψ_t seja o fluxo de algum campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assumindo isso, nosso único trabalho agora é encontrar o campo X que satisfaça essas condições.

Observemos que a condição $[\omega_t] = [\omega_0]$ equivale a

$$\left[\frac{d}{dt}\omega_t\right] = \frac{d}{dt}[\omega_t] = 0. \tag{4.4}$$

Isso significa que $\frac{d}{dt}\omega_t$ é exata e portanto, existe uma 1-forma σ_t tal que

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d\sigma_t,$$

para $0 \leq t \leq 1$.

Agora, derivando $\omega_0 = \psi_t^*\omega_t$ em relação a t, levando em consideração que ψ_t^* é uma aplicação $\psi^* : \mathbb{R} \times \Omega^2(M) \to \Omega^2(M)$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\psi_t^*\omega_t &= \partial_1\psi_t^*\omega_t \cdot \frac{d}{dt}(t) + \partial_2\psi_t^*\omega_t \cdot \frac{d}{dt}\omega_t = \psi_t^*\mathscr{L}_X\omega_t + \psi_t^* d\sigma_t \\ &= \psi_t^*(\iota(X)d\omega_t + d(\iota(X)\omega_t) + d\sigma_t) = \psi_t^* d(\iota(X)\omega_t + \sigma_t). \end{aligned}$$

Logo, $\iota(X)\omega_t + \sigma_t$ é uma forma fechada. Assim, obtemos o campo X resolvendo a equação

$$\iota(X)\omega_t + \sigma_t = \beta \tag{4.5}$$

para alguma 1-forma fechada $\beta : M \to T^*M$ de classe C^∞. É suficiente resolver a equação (4.5) quando $\beta = 0$, ou seja, queremos obter X tal que

$$\iota(X)\omega_t + \sigma_t = 0. \tag{4.6}$$

Assumindo que $X(p) \neq 0$ para todo $p \in M$, a equação (4.6) pode ser resolvida pontualmente através da família C^∞ de isomorfismos $\mu_p^t : T_pM \to T_p^*M$ associados a ω_t, dada por

$$\mu_p^t(v) = \iota(v)(\omega_t)_p, \quad \forall v \in T_pM.$$

Assim, obtemos

$$X(p) = -(\mu_p^t)^{-1}\sigma_t(p), \quad \forall p \in M. \tag{4.7}$$

O campo X é de classe C^∞, pois $\sigma_t \in C^\infty$ e a aplicação $(t, p) \mapsto \mu_p^t$ também é de classe C^∞.

Notemos que X, da maneira como foi construído, é em geral um campo dependente do tempo e como M é compacta, existe um fluxo dependente do tempo Ψ_{t,t_0} de X definido para todo $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Fixando $t_0 = 0$, obtemos uma isotopia $\psi_t = \Psi_{t,0}$ satisfazendo $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$. □

Corolário 4.11. *Se ω_0 e ω_1 são formas simpléticas em uma variedade compacta M tais que $[\omega_0] = [\omega_1]$ e $\omega_t = t\omega_0 + (1-t)\omega_1$ é simplética para $0 \leq t \leq 1$, então existe uma isotopia $\psi : M \times \mathbb{R} \to M$ tal que $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$, para $0 \leq t \leq 1$.*

Demonstração. Como $[\omega_0] = [\omega_1]$, temos que

$$[\omega_t] = t[\omega_0] + (1-t)[\omega_1] = [\omega_0].$$

Aplicando a Proposição 4.10, obtemos o resultado. □

Proposição 4.12. *Sejam M uma variedade de dimensão n, $S \subset M$ uma subvariedade de M, $U \subseteq M$ uma vizinhança tubular de S e $i : S \hookrightarrow U$ a inclusão. Se $\omega \in \Omega^k(U)$ é uma k-forma fechada tal que $i^*\omega = 0$, então existe $\sigma \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $\omega = d\sigma$. Mais ainda, podemos tomar σ de modo que $\sigma_p = 0$, para todo $p \in S$.*

Demonstração. Façamos a identificação natural de S com a seção zero $S_0 \subset NS$ do fibrado normal e seja $U_0 \subset NS$ a vizinhança convexa de S em NS, a qual é simplesmente a imagem inversa por U do difeomorfismo descrito no teorema da vizinhança tubular. Temos duas aplicações naturais: a projeção $\pi_0 : U_0 \to S$ e a inclusão $i_0 : S \hookrightarrow U_0$, para todo t.

Para cada $0 \leq t \leq 1$, defina $\psi_t : U_0 \to U_0$ dada por

$$\psi_t(p, v) = (p, tv).$$

Como U_0 é convexo, ψ_t está bem definida. Temos que $\psi_1 = \mathrm{id}_{U_0}$, $\psi_0 = i_0 \circ \pi_0$ e ψ_t fixa S, isto é, $\psi_t \circ i_0 = i_0$. A família $(\psi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ é uma homotopia entre a id_{U_0} e $i_0 \circ \pi_0$.

Seja $Q : \Omega^k(U_0) \to \Omega^{k-1}(U_0)$ um operador homotópico entre id_{U_0} e $i_0 \circ \pi_0$, isto é, um operador satisfazendo a igualdade

$$\mathrm{id}_{U_0} - (i_0 \circ \pi_0)^* = dQ + Qd,$$

onde d é a diferencial exterior. Como $d\omega = 0$ e $i^*\omega = 0$, obtemos que $dQ\omega = \omega$ e portanto, basta tomar $\sigma = Q\omega$. Tomemos o operador homotópico como sendo

$$Q\omega = \int_0^1 \psi_t^* \iota(X_t)\omega \; dt, \tag{4.8}$$

onde X_t, no ponto $q = \psi_t(p)$, é o vetor tangente à curva $\psi_s(p)$ em $s = t$.

Como observamos, $\psi_t|_S = \mathrm{id}_S$, para todo t. Logo, $\psi_t(p) = p$ é a curva constante, para todo $p \in S$. Isso implica que $X_t = 0$ em S, e portanto, $\sigma|_S = Q\omega|_S \equiv 0$.

Resta provar que (4.8) define, de fato, um operador homotópico entre id_{U_0} e $i_0 \circ \pi_0$. Mas,

$$\begin{aligned}
Qd\omega + dQ\omega &= \int_0^1 \psi_t^* \iota(X_t) d\omega \; dt + d \int_0^1 \psi_t^* \iota(X_t)\omega \; dt \\
&= \int_0^1 (\psi_t^* \iota(X_t) d\omega + \psi_t^* d(\iota(X_t)\omega)) dt \\
&= \int_0^1 \psi_t^* (\iota(X_t) d\omega + d(\iota(X_t)\omega)) dt \\
&= \int_0^1 \psi_t^* \mathscr{L}_{X_t}\omega \; dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} \psi_t^* \omega \; dt \\
&= \psi_1^*\omega - \psi_0^*\omega.
\end{aligned}$$

Portanto, Q é um operador homotópico entre id_{U_0} e $i_0 \circ \pi_0$.

□

Teorema 4.13 (Teorema Local de Moser). *Seja M uma variedade de dimensão $2n$, $N \subseteq M$ uma subvariedade, $i : N \hookrightarrow M$ a aplicação de inclusão e ω_0 e ω_1 formas simpléticas em M. Se $\omega_0(p) = \omega_1(p)$ para todo $p \in N$, então existem vizinhanças U_0 e U_1 de N em M e um difeomorfismo $\varphi : U_0 \to U_1$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
U_0 \arrow[rr, "\varphi"] & & U_1 \\
& N \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo e $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$.

Demonstração. Seja $U_0 \subseteq M$ uma vizinhança tubular de N. A forma $\omega_1 - \omega_0$ é fechada em U_0 e $(\omega_1 - \omega_0)_p \equiv 0$, para todo $p \in N$. Pela Proposição 4.12 existe uma 1-forma σ em U_0 tal que $\omega_1 - \omega_0 = d\sigma$ e $\sigma_p = 0$, para todo $p \in N$. Em particular, temos $[\omega_0] = [\omega_1]$.

Seja $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0 = \omega_1 + td\sigma$ uma família C^∞ de formas fechadas em U_0. Diminuindo U_0 se necessário, podemos fazer com que ω_t seja simplética para todo $t \in [0,1]$. Seja

$$X_t(p) = -(\mu_p^t)^{-1}\sigma,$$

o campo vetorial dependente do tempo obtido na demonstração da Proposição 4.10. A partir dele obtemos uma família $\psi : J \times U_0 \to U_0$ de difeomorfismos de U_0 tal que $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$, para todo $t \in J \cap [0,1]$. Diminuindo U_0 novamente, podemos fazer com que $[0,1] \subset J$.

Como $X_t(p) = 0$ em N, temos que $\psi_t|_N = \mathrm{id}_N$. Tomando $\varphi = \psi_1$ e $U_1 = \psi_1(U_0)$, obtemos $\varphi \circ i = i$ e $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$, como queríamos. □

Do teorema local de Moser resulta o teorema de Darboux:

Teorema 4.14 (Teorema de Darboux)**.** *Sejam (M,ω) uma variedade simplética e $p \in M$ um ponto. Então, existe uma sistema de coordenadas simpléticas locais $(U; x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ centrado em p tal que em U a forma ω é escrita como*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Demonstração. Seja $p \in U$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial v_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_n}\Big|_p \right\}$ uma base simplética de T_pM tal que

$$\omega_p = \sum_{j=1}^{n} (du_j \wedge dv_j)_p. \tag{4.9}$$

Considere um sistema de coordenadas locais $(U', u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)$ centrado em p com a forma simplética

$$\omega_1 = \sum_{j=1}^{n} du_j \wedge dv_j$$

definida em U'.

Temos que ω e ω_1 são iguais em $N = \{p\}$ por (4.9) e pelo Teorema de Local de Moser, existe um difeomorfismo $\varphi : U \to U'$ tal que $\varphi^*\omega_1 = \omega$. Agora, como

$$\varphi^*\omega_1 = \sum_{j=1}^{n} d(u_j \circ \varphi) \wedge d(v_j \circ \varphi),$$

só precisamos definir novas coordenadas $x_j = v_j \circ \varphi$ e $y_j = v_j \circ \varphi$ de modo que obtemos

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

no sistema $(U, x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$.

$\square$

Definição 4.15. Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n, $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma em M e TM o seu fibrado tangente. Definimos o **subfibrado característico** de ω como sendo o conjunto

$$\ker(\omega) = \{(p,v) \in TM;\ \nu(p,v) = 0 \in T^*M\},$$

onde $\nu : TM \to T^*M$ é a aplicação dada por $\nu(p,v) = \mu_p(v)$. Dizemos que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ é um **campo característico** de ω se $X \in \Gamma(\ker(\omega))$, isto é, se $\mu(X) = 0$.

Lema 4.16. *Seja M uma variedade de dimensão n. Se $\omega \in \Omega^2(M)$ é fechada, então* $\ker(\omega)$ *é integrável.*

Demonstração. Em vista do Teorema de Frobenius é suficiente provar que $\ker(\omega)$ é uma distribuição involutiva, isto é, que $\Gamma(\ker(\omega))$ é uma subálgebra de Lie de $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$. Como $\Gamma(\ker(\omega)) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ é um subespaço vetorial, resta provar que dados $X, Y \in \Gamma(\ker(\omega))$, temos $[X, Y] \in \Gamma(\ker(\omega))$.

Notemos inicialmente, que se X é um campo característico de ω e ψ_t^X é o seu fluxo, então $(\psi_t^X)^*\omega = \omega$, para todo t. De fato, temos que

$$\frac{d}{dt}(\psi_t^X)^*\omega = (\psi_t^X)^*\mathscr{L}_X\omega = (\psi_t^X)^*(\iota(X)d\omega + d\iota(X)\omega) = 0,$$

pois $d\omega = 0$ e $\iota(X)\omega = 0$. Logo, $(\psi_t^X)^*\omega = (\psi_0^X)^*\omega = \omega$, para todo t.

Agora, sejam $X, Y \in \Gamma(\ker(\omega))$. Usando o fato anterior, provamos na demonstração da Proposição 4.8 que

$$\mu([X, Y]) = \mathscr{L}_X\iota(Y)\omega = \mathscr{L}_X\mu(Y).$$

Como Y é um campo característico, segue que $\mu(Y) = 0$ e assim, $\mu([X, Y]) = 0$. Logo, $[X, Y] \in \Gamma(\ker(\omega))$ e portanto, $\Gamma(\ker(\omega))$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

$\square$

Teorema 4.17. *Sejam N^{q+2k} uma variedade de dimensão $2k + q$ e $\omega \in \Omega^2(N)$ uma forma fechada de posto constante $2k$, isto é, a dimensão da imagem de $\mu_p : T_pN \to T_p^*N$ independe de p e é igual a $2k$. Então, dado $p \in N$, existe um sistema de coordenadas locais $(U; x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{k+q})$ de N centrado em p tal que em U a forma ω é escrita como*

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} dx_j \wedge dy_j.$$

Demonstração. Dado $p \in N$, sejam $E \subset T_pN$ um subespaço de dimensão $2k$ tal que $\omega|_E$ tem posto máximo e V uma subvariedade local de N tal que $T_pV = E$. Seja $i_V : V \hookrightarrow N$ a inclusão. Pelo Teorema de Darboux, existem coordenadas locais $u_1 \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k$ em $V' \subset V$ tal que

$$i_V^*\omega = \sum_{j=1}^{k} du_j \wedge dv_j.$$

Seja $\ker(\omega)$ o fibrado característico de ω. Pelo Lema 4.16, $\ker(\omega)$ é integrável e existe, portanto, uma subvariedade $W \subset N$ de dimensão q tal que $T_mW = \ker(\omega_m)$, para todo $m \in W$.

Resulta do Teorema do Núcleo e da Imagem aplicado à μ_m que

$$T_mV \oplus T_mW = T_mN,$$

para $m \in V \cap W$, isto é, V e W são transversais.

Sejam $v_{k+1}, \ldots, v_{k+q}$ coordenadas locais em $W' \subseteq W$. Então, $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{k+q}$ são coordenadas locais em $V \times W$ e, portanto, em N através da inclusão $i_{V\times W} : V \times W \hookrightarrow N$. Os elementos de $V \times W$ no sistema $v_{k+1}, \ldots, v_{k+q}$ são da forma $p = (p_1, p_2)$, onde $p_1 = (u_1(p), \ldots, u_k(p), v_1(p), \ldots, v_k(p)) \in V$ e $p_2 = (v_{k+1}(p), \ldots, v_{k+q}(p)) \in W$.

Considere $X \in \Gamma(\ker(\omega))$ um campo vetorial tal que $X(m) \notin T_mV$, para todo $m \in V$, ψ_t^X o seu fluxo e seja $p = (p_1, 0) \in V \subset V \times W$ um ponto no sistema de coordenadas anterior. Note que é possível obter esse campo, uma vez que V e W são transversais. Então, existe uma função $s : U \subset W \times V \to \mathbb{R}$, definida em uma vizinhança de p, tal que $\psi_{s(m)}^X(m) \in V$. De fato, $\psi_t^X(m) \in V$ é equivalente a resolver locamente em t a equação

$$\pi_2(\psi_t(m)) = 0,$$

onde $\pi_2 : V \times W \to W$ é a projeção na segunda coordenada. Assim,

$$\frac{d}{dt}\pi_2(\psi_t^X(p)) = d\pi_2(\psi_t^X(p)) \cdot X(p) \neq 0,$$

pois $X(p) \notin T_pV$, e aplicando o Teorema da Função Implícita obtemos a função s.

Seja $\varphi : U \to V$ dada por $\varphi(m) = \psi_{s(m)}^X(m)$. Na demonstração do Lema 4.1, vimos que se $X \in \Gamma(\ker(\omega))$, então ω é constante ao longo fluxo de X, ou seja, $(\psi_t^X)^*\omega = \omega$, para todo t. Assim,

$$\omega = \varphi^*(i_V^*\omega) = \sum_{j=1}^{k} d(u_j \circ \varphi) \wedge d(v_j \circ \varphi).$$

Defina em U novas coordenadas $x_j = u_j \circ \varphi$ e $y_j = v_j \circ \varphi$, para $j = 1, \ldots, k$, e $y_r = v_r$, para $r = k+1, \ldots, k+q$. Com isso, obtemos um sistema de coordenadas $(U, x_1, \ldots, x_k, y_1 \ldots, y_{k+q})$ tal que

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} dx_j \wedge dy_j.$$

□

Teorema 4.18. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$ e $S^{q+2k} \subseteq M$ uma subvariedade tal que $\omega|_S$ tem posto constante $2k$. Então, dado $p \in S$, existe um sistema de coordenadas simpléticas $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ centrado em p tais que*

$$S \cap U = \{m \in M;\ x_i(m) = 0,\ y_j(m) = 0,\ i = k+1, \ldots, n \ \ e \ \ j = k+q+1, \ldots, n\}.$$

Demonstração. Se $\omega|_S$ tem posto constante $2k$, então pelo Teorema 4.17, dado $p \in S$, existe um sistema de coordenadas locais $w_1, \ldots, w_k, z_1, \ldots, z_{k+q}$ numa vizinhança de p em S tal que

$$\omega|_S = \sum_{j=1}^{k} dw_j \wedge dz_j.$$

Sejam $T_S M$ a restrição do fibrado TM à subvariedade S e $X_1, \ldots, X_k, Y_1 \ldots, Y_{k+q} \in \Gamma(T_S M)$ tais que $X_j = \dfrac{\partial}{\partial w_j}$ e $Y_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j}$ e considere a separação natural

$$T_S M = TS \oplus NS,$$

onde $\oplus$ indica a **soma de Whitney** dos fibrados vetoriais TS e NS. Temos que $X_1, \ldots, X_k$, $Y_1, \ldots, Y_{k+q} \in \Gamma(TS)$. Usando o Corolário 1.12 obtemos localmente seções $X_{k+1}, \ldots, X_n$, $Y_{k+q+1}, \ldots, Y_n \in \Gamma(T_V M)$, onde V é uma vizinhança de p em S, tais que $X_1(m), \ldots, X_n(m)$, $Y_1(m), \ldots, Y_n(m)$ é uma base simplética de $T_m M$, para cada $m \in V$.

Pela construção acima, resulta que $X_{k+1}, \ldots, X_m, Y_{k+q+1}, \ldots, Y_n$ é uma base de seções de $N_V S = NV$. Ponha em NS um sistema de coordenadas local

$$(NV; w_1, \ldots, w_k, z_1, \ldots, z_{k+q}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+k+q+1}, \ldots, \alpha_{2n}),$$

tal que se $(p, v) \in NV$, então $p = (w_1(p), \ldots, w_k(p), z_1(p), \ldots, z_{k+q}(p))$ e

$$v = \alpha_{k+1}(v) X_{k+1}(p) + \ldots, \alpha_n(v) X_n(p) + \alpha_{n+k+q+1}(v) Y_{k+q+1}(p) + \ldots + \alpha_{2n}(v) Y_n(p)$$

são as representações de p e v nesse sistema. Em particular, temos que $\dfrac{\partial}{\partial \alpha_i} = X_i$, para $i = k+1, \ldots, n$ e $\dfrac{\partial}{\partial \alpha_j} = Y_j$, para $j = k+q+1, \ldots, n$.

Pela Teorema da Vizinhança Tubular (Teorema B.7), existe uma vizinhança convexa $Z_0 \subseteq NV$ da seção zero de NV, uma vizinhança $Z \subset M$ de S e um difeomorfismo $\varphi : Z_0 \to Z$ tal que $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$ e $\varphi \circ i_0 = i$, onde $i_0 : S \hookrightarrow NV$ e $i : S \hookrightarrow M$ são, respectivamente, a identificação de S com a seção zero de NV e a inclusão natural em M. Seja $(U; \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ o sistema de coordenadas locais em M induzido por φ, onde

$$\begin{cases} \xi_j = w_j \circ \varphi^{-1}, & \text{para } \ j = 1 \ldots, k \\ \eta_j = z_j \circ \varphi^{-1}, & \text{para } \ j = 1, \ldots, k+q \\ \xi_i = \alpha_i \circ \varphi^{-1}, & \text{para } \ i = k+1, \ldots, n \\ \eta_i = \alpha_{n+i} \circ \varphi^{-1}, & \text{para } \ i = k+q+1, \ldots, n \end{cases} . \tag{4.10}$$

Como $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$, resulta de (4.10) que o sistema de coordenadas locais $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ é uma extensão do sistema de coordenadas locais de S e os campos vetoriais $X_{k+1}, \ldots, X_n$,

$Y_{k+q+1}, \ldots, Y_n$ são φ-relacionados com os campos $\dfrac{\partial}{\partial \xi_{k+1}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial \xi_n}, \dfrac{\partial}{\partial \eta_{k+q+1}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial \eta_n}$, respectivamente.

Seja $\zeta : U \to \mathbb{R}^{2n}$ o difeomorfismo dado por

$$\zeta(p) = (\xi_1(p), \ldots, \xi_n(p), \eta_1(p), \ldots, \eta_n(p))$$

e considere a forma

$$\omega_1 = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge d\eta_j.$$

Pela construção, temos que

$$\omega|_S = \sum_{j=1}^{k} dw_j \wedge dz_j = \sum_{j=1}^{k} d\xi_j \wedge d\eta_j = \omega_1|_S,$$

pois $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$. Logo, segue do Teorema Local de Moser (Teorema 4.13) que existem vizinhanças $V_1, V_2 \subseteq M$ de $S \cap U$ e um difeomorfismo $\psi : V_1 \to V_2$ tal que $\psi^*\omega_1 = \omega$ e $\psi|_{S\cap U} = \mathrm{id}_{S\cap U}$. Em coordenadas, isso é equivalente a afirmar que

$$\omega = \psi^* \left(\sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge d\eta_j \right) = \sum_{j=1}^{n} d(\xi_j \circ \psi) \wedge d(\eta_j \circ \psi). \tag{4.11}$$

Finalmente, defina coordenadas locais $\zeta \circ \psi : V_1 \subset M \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$(\zeta \circ \psi)(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p), y_1(p), \ldots, y_n(p)).$$

Nesse sistema de coordenadas, temos que ω é escrita como

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$$

em virtude de (4.11), ou seja, é um sistema de coordenadas simpléticas locais. Além disso, se $p \in S \cap U$, então, como $\psi|_{S\cap U} = \mathrm{id}_{S\cap U}$, resulta de (4.10) que $x_i(p) = 0$, para $i = k+1, \ldots, n$ e $y_j(p) = 0$, para $j = k+q+1, \ldots, n$ e portanto,

$$S \cap U = \{m \in M;\ x_i(m) = 0,\ y_j(m) = 0,\ i = k+1, \ldots, n \ \text{ e } \ j = k+q+1, \ldots, n\}.$$

$\square$

4.2 Estrutura simplética do fibrado cotangente

Mostremos agora que, dada uma variedade diferenciável arbitrária M de dimensão n, sempre podemos obter uma 1-forma $\alpha : T^*M \to T^*(T^*M)$ tal que a 2-forma $\omega = -d\alpha$ é uma forma simplética em T^*M, ou seja, sempre podemos colocar uma estrutura de variedade simplética em T^*M.

Sejam M uma variedade de dimensão n, $U \subseteq M$ um aberto e $(U; x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em M. Então, dado $p \in U$, as diferenciais $(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p$ formam uma base do espaço cotangente T_p^*M. Assim, se $\varphi \in T_p^*M$, então

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} y_j (dx_j)_p, \tag{4.12}$$

onde os y_j são as coordenadas do funcional φ na base $\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$. Isso induz um sistema de coordenadas locais $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ em T^*M.

Dada a projeção natural $\pi : T^*M \to M$ do fibrado cotangente, sua diferencial em cada ponto (p, φ) é uma transformação linear $d\pi_{(p,\varphi)} : T_{(p,\varphi)}(T^*M) \to T_pM$ tal que

$$d\pi_{(p,\varphi)} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \qquad \text{e} \qquad d\pi_{(p,\varphi)} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_\varphi = 0, \tag{4.13}$$

onde $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_\varphi, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_\varphi \right\}$ é a base de $T(T^*M)$ no sistema de coordenadas locais $(T^*U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ induzido por $(U; x_1, \ldots, x_n)$.

Definição 4.19. Definimos a **forma tautológica** em T^*M como sendo a 1-forma $\alpha : T^*M \to T^*(T^*M)$ dada por

$$\alpha_{(p,\varphi)}(v) = ((d\pi_{(p,\varphi)})^*\varphi)(v),$$

para todo $v \in T_{(p,\varphi)}(T^*M)$.

Em coordenadas locais, temos que φ é dado por (4.12) e

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p + \sum_{j=1}^{n} v_{n+j} \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_\varphi .$$

Assim, usando as igualdades (4.13), temos

$$\begin{aligned} \alpha_{(p,\varphi)}(v) &= ((d\pi_{(p,\varphi)})^*\varphi)(v) = \varphi(d\pi_{(p,\varphi)} \cdot v) \\ &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right) = \sum_{j=1}^{n} y_j (dx_j)_p(v'), \end{aligned}$$

onde $v' = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \in T_pM$. Ou seja, em coordenadas locais, a forma tautológica é simplesmente a 1-forma

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j, \tag{4.14}$$

ou seja, é a própria forma φ quando calculada no ponto em (p, φ).

Definição 4.20. Sejam M uma variedade dimensão n, T^*M seu fibrado cotangente e $\alpha : T^*M \to T^*(T^*M)$ sua forma tautológica. Definimos a **forma canônica** em T^*M como sendo a forma diferencial de grau 2, $\omega = -d\alpha$.

Por (4.14) segue que, em coordenadas locais, a forma canônica é dada por

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j,$$

a qual é uma forma simplética em T^*M.

O fibrado cotangente T^*M é um dos exemplos mais importantes de variedades simpléticas. De fato, o fibrado cotangente é o espaço de fase dos sistemas hamiltonianos, cujos elementos são da forma (p, q) onde p é a posição e q é momento de uma partícula que se movimenta sobre uma variedade.

4.3 Campos hamiltonianos em variedades

Em Mecânica Clássica, as equação de Hamilton do movimento formam um sistema de equação diferenciais de primeira ordem da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\[2ex] \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{4.15}$$

O sistema (4.15) pode ser escrito na forma vetorial

$$\dot{z} = X_H(z),$$

onde $z = (x, y)$ e $X_H = \mathbf{J} \cdot \nabla H$ é um campo vetorial associado à função H. Vamos agora definir essas noções no contexto de variedades diferenciáveis e mostrar que em coordenadas locais, o campo hamiltoniano é o mesmo da equação (4.15).

Sejam (M, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$ e $H : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{k+1} cuja diferencial exterior $dH : M \to T^*M$ é uma 1-forma de classe C^k em M.

Através de dH, definimos o campo vetorial $X_H : M \to TM$ associado à função H pela relação:

$$dH \cdot v = \omega(X_H, v). \tag{4.16}$$

Definição 4.21. O campo X_H definido acima é chamado de **campo hamiltoniano** associado à função $H : M \to \mathbb{R}$, a qual é chamada de **função hamiltoniana** ou **função energia**. O conjunto de todos os campos hamiltonianos de M será denotado por $\mathfrak{X}_H(M)$.

Essa definição do campo hamiltoniano independe de sistemas de coordenadas. Mostremos agora que dado um sistema de coordenadas simpléticas locais $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, a condição (4.16) determina o campo X_H da equação (4.15).

Proposição 4.22. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $H : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{k+1} e X_H o seu campo hamiltoniano associado. Dado um sistema de coordenadas simpléticas locais $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, o campo hamiltoniano tem a seguinte representação nesse sistema:*

$$X_H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Ou, equivalentemente, $X_H = \boldsymbol{J} \cdot \nabla H$.

Demonstração. Em coordenadas locais, dados $p \in U$ e $v \in T_pM$, temos que

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p + \sum_{j=1}^{n} v_{j+n} \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p.$$

Assim, a diferencial de H em p avaliada no vetor v é dada por

$$dH_p \cdot v = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial H}{\partial x_j}(p) + \sum_{j=1}^{n} v_{j+n} \frac{\partial H}{\partial y_j}(p).$$

Seja $X_H = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_H^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} X_H^{j+n} \frac{\partial}{\partial y_j}$. Então,

$$\omega(X_H(p), v) = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j(X_H(p), v) = -\sum_{j=1}^{n} X_H^{j+n}(p) v_j + \sum_{j=1}^{n} X_H^j(p) v_{j+n},$$

onde a última igualdade resulta do fato de que $dx_j \wedge dy_j(X_H(p), v) = X_H^j(p) v_{j+n} - X_H^{j+n}(p) v_j$.

Como a relação (4.16) é válida para todo v, tomando em particular $v = \left.\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$ e $v = \left.\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right|_p$, obteremos, respectivamente, que $X_H^{j+n}(p) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j}(p)$ e $X_H^j(p) = \dfrac{\partial H}{\partial y_j}(p)$. Como isso vale para todo $p \in U$, segue que $X_H^{j+n} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j}$ e $X_H^j = \dfrac{\partial H}{\partial y_j}$, concluindo a demonstração.

□

Sejam (M, ω) uma variedade simplética fechada e $H : M \to \mathbb{R}$ uma função hamiltoniana. O campo hamiltoniano X_H associado a H gera um grupo a um parâmetro de difeomorfismos $\psi_H^t : M \to M$ satisfazendo as condições

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi_H^t = X_H \circ \psi_H^t \\ \\ \psi_H^0 = \mathrm{id} \end{cases} . \tag{4.17}$$

Definição 4.23. O grupo a um parâmetro $\psi_H^t \in \mathrm{Diff}(M)$ gerado por X_H satisfazendo (4.17) é o **fluxo hamiltoniano** associado à função H.

Definição 4.24. Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $H : M \to \mathbb{R}$ uma função energia com campo hamiltoniano associado X_H e $e = H(p)$, para algum $p \in M$. Uma **superfície de energia** no nível e é o conjunto de nível $\Gamma_e = H^{-1}(e)$ da função H.

Provaremos agora que a função energia H e a forma simplética ω de uma variedade M são preservadas pelo fluxo hamiltoniano.

Proposição 4.25. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $H : M \to \mathbb{R}$ uma função hamiltoniana e X_H seu campo hamiltoniano associado.*

(i) O fluxo hamiltoniano $\psi_H^t : \mathfrak{D}_{X_H} \to M$ é um difeomorfismo simplético que preserva H, isto é, temos $(H \circ \psi_H^t)(p) = H(p)$, para todo $(t, p) \in \mathfrak{D}_{X_H}$;

(ii) Para todo difeomorfismo simplético $\psi \in \mathrm{Symp}(M)$ vale $X_{H\circ\psi} = \psi^* X_H$;

Demonstração. (i) Por (4.16), X_H é um campo simplético e a Proposição 4.8 garante, nesse caso, que ψ_H^t é um difeomorfismo simplético. Para mostrar que ψ_H^t preserva H, basta mostrar que $\dfrac{d}{dt}(H \circ \psi_H^t)(p) = 0$, para todo $p \in M$. Mas, por (4.16), temos

$$\frac{d}{dt}(H \circ \psi_H^t)(p) = dH(p) \cdot X_H(p) = \omega(X_H(p), X_H(p)) = 0$$

e o resultado segue.

(ii) Para mostrar essa afirmação usaremos o fato de que μ definida por (4.1) é isomorfismo para cada $p \in M$. Assim,

$$\mu(X_{H\circ\psi}) = d(H \circ \psi) = \psi^* dH = \psi^* \mu(X_H) = \mu(\psi^* X_H).$$

A última igualdade é obtida ponto a ponto usando o fato de que ψ é um difeomorfismo simplético:

$$(\psi^* \mu(X_H))_p \cdot v = \omega_{\psi(p)}(X_H(\psi(p)), d\psi(p) \cdot v)$$

$$= \omega_{\psi^{-1}(\psi(p))}(d\psi^{-1}(\psi(p)) \cdot X_H(\psi(p)), d\psi^{-1}(\psi(p)) \cdot d\psi(p) \cdot v) =$$

$$= \omega_p(\psi^* X_H(p), v) = \mu_p(\psi^* X_H) \cdot v,$$

para todo $p \in M$ e $v \in T_pM$. Assim, $\psi^*\mu(X_H) = \mu(\psi^* X_H)$.

Para cada $p \in M$, μ_p é um isomorfismo linear e portanto, de $\mu(X_{H\circ\psi}) = \mu(\psi^* X_H)$ resulta $X_{H\circ\psi}(p) = \psi^* X_H(p)$, para todo $p \in M$. Logo, $X_{H\circ\psi} = \psi^* X_H$. □

Proposição 4.26. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $H : M \to \mathbb{R}$ uma função hamiltoniana, $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$ o campo hamiltoniano associado e $p \in M$ tal que $X_H(p) \neq 0$. Então, existe um sistema de coordenadas simpléticas locais $(U; x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ em torno de p tal que $H = y_1 + H(p)$ e $X_H = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$.*

Demonstração. Ver Teorema 5.4 em [35]. □

4.4 Aplicação de Poincaré de um campo hamiltoniano

Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$ com fluxo hamiltoniano $\psi_H^t : \mathfrak{D}_{X_H} \to M$, e $\gamma : I \to M$ uma órbita fechada de X_H pertecente à supefície de energia $\Gamma_0 = H^{-1}(0)$, com período $T \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\gamma(t + T) = \gamma(t) = \psi_H^t(\gamma(0)) \qquad \text{e} \qquad (H \circ \gamma)(t) = 0, \ \forall t \in I.$$

Suponha que 0 seja um valor regular de H, de modo que Γ_0 seja uma subvariedade de M. Vamos mostrar que uma órbita fechada γ de um campo hamiltoniano X_H, sob certas condições gerais, pertence a uma família a um parâmetro de órbitas fechadas de X_H. Para tanto, construiremos uma aplicação que "detecta órbitas fechadas" a partir do fluxo hamiltoniano.

Seja $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$ com função hamiltoniana $H : M \to \mathbb{R}$. Pela Proposição 4.26, existe uma sistema de coordenadas simpléticas locais $(U; x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tais que $H = y_1$ e $X_H = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$. Seja $\gamma : I \to M$ uma órbita fechada de X_H e considere o conjunto

$$\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in U; \ x_1 = 0\} = \pi_1^{-1}(0),$$

onde $\pi_1 : U \to \mathbb{R}$ é a projeção na primeira coordenada. O conjunto Σ é uma subvariedade de codimensão 1 em U e transversal a γ. De fato, dado $p \in \Sigma \cap \gamma$, temos que $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p, \dfrac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, \dots, \dfrac{\partial}{\partial y_n}\Big|_p \right\}$ é uma base de $T_p\Sigma$ e $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p \right\}$ é uma base de $T_p\gamma$. Logo,

$$T_pU = T_p\Sigma \oplus T_p\gamma,$$

e portanto, Σ e γ são transversais.

Afirmamos que, dado $p_0 = \gamma(t_0)$, existe uma vizinhança $U_0 \subseteq U$ de p_0 e uma aplicação $\tau : \Sigma \cap U_0 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tau(p_0) = T \qquad \text{e} \qquad \psi_H^{\tau(p)}(p) \in \Sigma$$

para todo $p \in \Sigma \cap U_0$. Para provar isso, precisamos resolver a equação $\pi_1(\psi_H^t(p)) = 0$ em $t = \tau(p)$. Mas, em p_0, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\pi_1(\psi_H^t(p_0)) = d\pi_1 \circ \frac{d}{dt}\psi_H^t(p_0) &= (d\pi_1 \circ X_H \circ \psi_H^t)(p_0) \\
&= \omega_{p_0}((X_{\pi_1} \circ \psi_H^t)(p_0), (X_H \circ \psi_H^t)(p_0)) \\
&= \omega_{p_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_{p_0}, \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{p_0} \right) = -1 \neq 0,
\end{aligned}$$

onde $X_{\pi_1} = \dfrac{\partial}{\partial y_1}$ foi obtido através da Proposição 4.3. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança $U_0 \subseteq U$ de p_0 tal que $t = \tau(p)$ é diferenciável e $\psi_H^{\tau(p)}(p) \in \Sigma$, para todo $p \in \Sigma \cap U_0$.

Definição 4.27. Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$, com fluxo hamiltoniano $\psi_H^t : \mathfrak{D}_H \to M$, e $\gamma : I \to M$ uma órbita fechada de X_H. Definimos a **aplicação (da seção) de Poincaré** da órbita γ como sendo a aplicação local $\Theta : \Sigma \cap U_0 \to \Sigma$ dada por $\Theta(p) = \psi_H^{\tau(p)}(p)$. O conjunto $\Sigma_1 = \Sigma \cap U_0$ é chamado de **seção de Poincaré** de γ.

Pela construção acima, segue que Θ é uma aplicação diferenciável com a propriedade de que seus pontos fixos correspondem a órbitas fechadas γ do campo hamiltoniano. Isso é visto fácilmente observando que se $q \in \Sigma \cap U_0$ é um ponto fixo de Θ, então $q = \Theta(q) = \psi_H^{\tau(q)}(q)$. Assim, se $\gamma : I \to M$ é uma curva integral com $\gamma(0) = q$, então

$$\gamma(t) = \psi_H^t(\gamma(0)) = \psi_H^t(q) = \psi_H^t(\psi_H^{\tau(q)}(q)) = \psi_H^{t+\tau(q)}(q) = \psi_H^{t+\tau(q)}(\gamma(0)) = \gamma(t + \tau(q)).$$

Logo, γ é uma órbita fechada com período $\tau(q)$.

Considere o conjunto Σ da construção anterior. Localmente, existe um campo vetorial $Y : \Sigma \cap U \to T\Sigma$ tal que $\omega(X_H, Y) = 1$. Nas coordenadas simpléticas acima, Y é simplesmente o campo $\dfrac{\partial}{\partial y_1}$. Defina a aplicação $\pi : T\Sigma \to T\Sigma$ dada por

$$\pi(p, v) = v - Y(p)\omega(X_H(p), v). \tag{4.18}$$

Afirmamos que π é uma projeção sobre o fibrado tangente das superfícies de energia de H. Para ver isso, notemos inicialmente que espaço tangente no ponto $p \in \Sigma \cap U$ de uma superfície de energia $H^{-1}(e)$ é simplesmente o núcleo da diferencial $dH(p)$. Assim, é suficiente mostrar que, para cada $p \in \Sigma \cap U$, temos $dH(p) \cdot \pi(p,v) = 0$. De fato,

$$dH(p) \cdot \pi(p,v) = dH(p) \cdot (v - Y(p)\omega(X_H(p),v))$$

$$= dH(p) \cdot v - (dH(p) \cdot v) dH(p) \cdot Y(p)$$

$$= dH(p) \cdot v - \omega(X_H(p), Y(p)) dH(p) \cdot v = 0.$$

Logo, $\pi(p,v) \in T_p H^{-1}(e)$ e portanto, π é uma projeção em $TH^{-1}(e)$.

Teorema 4.28 (Família a um parâmetro de órbitas fechadas)**.** *Sejam (M,ω) uma variedade simplética, $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$, γ uma órbita fechada de X_H, $\pi : T\Sigma \to T\Sigma$ a projeção definida acima e $p_0 \in \Sigma \cap \gamma$, com $e = H(p_0)$ sendo um valor regular de H. Tomando $\Sigma' = \Sigma \cap H^{-1}(e)$, se a aplicação $\pi \circ d\Theta(p_0) - \pi : T_{p_0}\Sigma \to T_{p_0}\Sigma'$ é sobrejetora, então γ pertence a uma família a um parâmetro de órbitas fechadas que são pontos fixos de Θ.*

Demonstração. Seja $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ um sistema de coordenadas locais em torno de p_0 em M tal que $H = y_1$ e $X_H = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ e considere o difeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U)$ dado por $\varphi(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p), y_1(p), \ldots, y_n(p))$.

Como $X_H(p_0) \neq 0$, temos que $dH(p_0) \neq 0$ e portanto, $\Gamma_e = H^{-1}(e)$ é uma subvariedade regular de M. Seja ainda $\Sigma = \{p \in U;\ x_1(p) = 0\}$. O conjunto Σ é uma subvariedade de codimensão 1 em U. Então, $\Sigma' = \Sigma \cap \Gamma_e = \{p \in U;\ x_1(p) = 0 \text{ e } y_1(p) = e\}$ é uma subvariedade de codimensão 2 em U cujo espaço tangente $T_p\Sigma'$ é gerado pelos vetores

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y_n}\right|_p \right\}.$$

Pela definição de Σ, temos que $\varphi(\Sigma) = \Sigma$, ou seja, Σ é invariante por φ. Suponhamos por simplicidade que $e = 0$.

Sejam $\alpha : \Sigma \to \mathbb{R}^{2n-2}$ definida por

$$\alpha(p) = (x_2(p), \ldots, x_n(p), y_2(p), \ldots, y_n(p)),$$

$i : \mathbb{R}^{2n-2} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a inclusão e consideremos a aplicação $\beta = \varphi^{-1} \circ i \circ \alpha : \Sigma \to \Sigma$. Temos que $(\varphi^{-1} \circ i \circ \alpha)(p) \in \Sigma'$, para todo $p \in \Sigma$, e $\varphi|_{\Sigma'} = i \circ \alpha|_{\Sigma'}$. Logo,

$$d(\varphi^{-1} \circ i \circ \alpha)(p) = d\varphi^{-1}(i \circ \alpha(p)) \cdot d(i \circ \alpha)(p) : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$

é uma projeção em $T_p\Sigma'$. Defina $\pi_\# : T\Sigma \to T\Sigma$ por

$$\pi_\#(p,v) = d(\varphi^{-1} \circ i \circ \alpha)(p) \cdot v.$$

Provaremos que $\pi_\#$ coincide com a projeção π definida em (4.18). De fato, no sistema de coordenadas acima, dado $v = \sum_{j=1}^{n} v_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p + \sum_{j=1}^{n} v_{j+n} \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p \in T_p\Sigma$, verificamos diretamente que

$$\varphi_*\pi(p,v) = \sum_{j=2}^{n} v_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p + \sum_{j=2}^{n} v_{j+n} \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p = d(i \circ \alpha)(p) \cdot v.$$

Mas $\varphi_*\pi(p,v) = d\varphi(p)\cdot\pi(p,v)$. Dado $w = \sum_{j=2}^{n} w_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p + \sum_{j=2}^{n} w_{j+n} \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p \in T_p\Sigma'$, observemos que

$$d\varphi(p) \cdot w = \sum_{j=2}^{n} w_j dx_j(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p + \sum_{j=2}^{n} w_{j+n} dy_j(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p = d\varphi(\beta(p)) \cdot w.$$

Logo, como $\pi(p,v) \in T_p\Sigma'$, temos

$$\pi(p,v) = [d\varphi(\beta(p))]^{-1} d(i \circ \alpha)(p) \cdot v = d\varphi^{-1}(\varphi(\beta(p))) \cdot d(i \circ \alpha)(p) \cdot v$$

$$= d\varphi^{-1}(i \circ \alpha(p)) \cdot d(i \circ \alpha)(p) \cdot v = \pi_\#(p,v).$$

Agora, seja $\psi : \Sigma \to \Sigma'$ dada por $\psi(p) = (\beta \circ \Theta)(p) - \beta(p)$. Então, temos que $\psi(p_0) = 0$ e $d\psi(p_0) = \pi_\# \circ d\Theta(p_0) - \pi_\#$ que é sobrejetora, por hipótese. Segue do teorema da função implícita que existe uma curva unidimensional Γ que é levada por ψ em 0. Assim, para $p \in \Gamma$, temos $\beta \circ \Theta(p) = \beta(p)$.

Finalmente, pelo item (i) da Proposição 4.25 temos que $H \circ \Theta(p) = H(p)$. Pelas expressões de β e H resulta que $\Theta(p) = p$, para todo $p \in \Gamma$. Isso nos dá uma família $\{\gamma_u\}_{u\in\Gamma}$ de órbitas fechadas parametrizada por Γ que são pontos fixos de Θ e é tal que $\gamma \in \{\gamma_u\}_{u\in\Gamma}$.

□

Em vista do Teorema 4.28 damos a seguinte definição:

Definição 4.29. Sejam (M,ω) uma variedade simplética, $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$, γ uma órbita fechada de X_H e Θ a aplicação de Poincaré de γ. A órbita γ é chamada de **0-elementar** se a aplicação $\pi \circ d\Theta(p) - \pi : T_p\Sigma \to T_p\Sigma'$ do Teorema 4.28 é sobrejetora.

O proximo exemplo mostra uma interessante relação entre os autovalores de $d\Theta(p)$ e órbitas 0-elementares.

Exemplo 4.30. Quando 1 não é autovalor de $d\Theta(p)|_{T_p\Sigma'} : T_p\Sigma' \to T_p\Sigma$, a órbita γ é necessáriamente 0-elementar.

Para ver isso, notemos inicialmente que se 1 não é autovalor de $d\Theta(p)|_{T_p\Sigma'}$, então

$$d\Theta(p)|_{T_p\Sigma'} \cdot v - v \neq 0,$$

para todo $v \neq 0$ em $T_p\Sigma'$. Logo, $\ker(d\Theta(p)|_{T_p\Sigma'} - \mathrm{id}_{T_p\Sigma'}) = \{0\}$, ou seja, aplicação linear

$$d\Theta(p)|_{T_p\Sigma'} - \mathrm{id}_{T_p\Sigma'} : T_p\Sigma' \to T_p\Sigma$$

é injetiva. Agora, como

$$d\Theta(p) \cdot v = d\psi_H^{\tau(p)}(p) \cdot v + (d\tau(p) \cdot v)X_H(p),$$

para todo $v \in T_p\Sigma$. Da equação (4.16), temos que $X_H(p) \in T_p\Sigma'$. Pela parte (i) da Proposição 4.25 segue que se $v \in T_p\Sigma'$, então $d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot v \in T_p\Sigma'$. Assim, $d\Theta(p)|_{T_p\Sigma'}\cdot v \in T_p\Sigma'$ e portanto, $d\Theta(p)|_{T_p\Sigma'} - \mathrm{id}_{T_p\Sigma'}$ é um isomorfismo de $T_p\Sigma'$. Isso implica, em particular, que a imagem de $d\Theta(p) - \mathrm{id}_{T_p\Sigma} : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ contém o subespaço $T_p\Sigma'$.

Finalmente, como $\pi : T\Sigma \to T\Sigma'$ é sobrejetora, segue que $\pi \circ (d\Theta(p) - \mathrm{id}) = \pi \circ d\Theta(p) - \pi$ é sobrejetora e, portanto, γ é 0-elementar.

Proposição 4.31. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$ e $\pi : T\Sigma \to T\Sigma$ a projeção definida acima. Tomando $\Sigma' = \Sigma \cap H^{-1}(e)$, onde $e = H(p)$, se a aplicação $\pi \circ d\Theta(p) - \pi : T_p\Sigma \to T_p\Sigma'$ é sobrejetora, então o conjunto unidimensional Γ formado pelos pontos fixos de Θ é parametrizado ou por H ou pelo período $\tau(p)$ da órbita fechada em $p \in \Gamma$.*

Demonstração. Na demonstração do Teorema 4.28, o conjunto Γ é parametrizado por H. Isso pode ser visto facilmente observando que ψ é localmente uma aplicação da forma

$$\psi(x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (\psi_2, \ldots, \psi_n, \psi_{n+2}, \ldots, \psi_{2n}).$$

Como $d\psi(p_0)$ é sobrejetora e $\psi(p_0) = 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de uma aplicação $\xi : J \to \Sigma'$ dada por $\xi(y_1) = (\xi_2(y_1), \ldots, \xi_n(y_1), \xi_{n+2}(y_1), \ldots, \xi_{2n}(y_1))$, definida no intervalo $J \subset \mathbb{R}$, tal que

$$\psi(\xi_2(y_1), \ldots, \xi_n(y_1), y_1, \xi_{n+2}(y_1), \ldots, \xi_{2n}(y_1)) = 0.$$

Então, $\Gamma = \{(\xi_2(y_1), \ldots, \xi_n(y_1), y_1, \xi_{n+2}(y_1), \ldots, \xi_{2n}(y_1))\}_{y_1 \in J}$ e como $y_1 = H$ obtemos o resultado.

Se Γ não é parametrizado por H, então Γ é tangente à superfície de energia $H^{-1}(e)$, onde $e = H(p)$ e $p \in \Gamma$. Como $\Gamma \subset \Sigma$, dado $p \in \Gamma$, existe um vetor $u_2 \in T_p\Sigma'$ tal que

$d\Theta(p)\cdot u_2 = u_2$. De fato, seja $u_2 \in T_p\Gamma \cap T_p\Sigma'$, o qual existe pela condição de tangencia. Para esse vetor u_2 temos que

$$d\Theta(p)\cdot u_2 = d\Theta(p)|_{T_p\Gamma}\cdot u_2 = d(\Theta|_\Gamma)(p)\cdot u_2 = u_2,$$

pois $\Theta|_\Gamma = \mathrm{id}_\Gamma$.

Agora, como $d\Theta(p)\cdot u_2 = d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_2 + aX_H(\psi_H^{\tau(p)}(p))$, onde $a = d\tau(p)\cdot u_2$, obtemos que

$$d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_2 = u_2 - aX_H(p),$$

pois $\psi_H^{\tau(p)}(p) = \Theta(p) = p$.

Observemos que $d\tau(p)|_{T_p\Gamma} = d(\tau|_\Gamma)(p)$. Logo, se provarmos que $a \neq 0$, teremos que $d(\tau|_\Gamma)(p)$ é um isomorfismo e o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa $\xi : J \to \Gamma$, onde $J \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança de $\tau(p)$, o que prova a afirmação da proposição.

Seja $u_1 = X_H(p)$ e $v_1 \in T_pM$ tal que $\omega(u_1, v_1) = 1$ e $\omega(u_2, v_1) = 0$. Completemos esses vetores para obter uma base simplética $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$ de T_pM usando o Corolário 1.12. Dado $w = \sum_{j=1}^{n} w_j u_j + \sum_{j=1}^{n} w_{j+n} v_j \in T_pM$, temos que

$$d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot w = \sum_{j=1}^{n} w_j d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_j + \sum_{j=1}^{n} w_{j+n} d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot v_j. \tag{4.19}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_j &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j u_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i+n}^j v_i, \\ d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot v_j &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i+n}^j v_i. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Assim, substituindo essa duas expressões em (4.19), obtemos

$$d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_{i+n} v_i, \tag{4.21}$$

onde $\mu_i = \sum_{j=1}^{n} (w_j\alpha_i^j + w_{j+n}\beta_i^j)$ e $\mu_{i+n} = \sum_{j=1}^{n} (w_j\alpha_{i+n}^j + w_{j+n}\beta_{i+n}^j)$.

Consideremos o coeficiente μ_{2+n}. Para obtê-lo precisamos calcular os valores de α_{2+n}^j e β_{2+n}^j. De (4.20) e (1.2), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\alpha^j_{2+n} &= -\omega(d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_j, u_2) = -\omega(d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_j, d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_2 + aX_H(p)) \\
&= -\omega(d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_j, d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_2) + a\omega(X_H(p), d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_j) \\
&= -\omega(u_j, u_2) + a\omega(X_H(p), d\Theta(p)\cdot u_j) - a\omega(X_H(p), (d\tau(p)\cdot u_j)X_H(p)) \\
&= a\cdot dH(p)\cdot d\Theta(p)\cdot u_j = a\cdot d(H\circ\Theta)(p)\cdot u_j \\
&= a\cdot dH(p)\cdot u_j = a\omega(X_H(p), u_j) = 0,
\end{aligned}
$$

onde, na penúltima linha, as igualdades são válidas pois $\Theta(p) = p$ e o fluxo hamiltoniano preserva H pelo item (i) da Proposição 4.25. Da mesma forma, temos

$$
\begin{aligned}
\beta^j_{2+n} &= -\omega(d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot v_j, u_2) = -\omega(d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot v_j, d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_2 + aX_H(p)) \\
&= -\omega(d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot v_j, d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot u_2) + a\omega(X_H(p), d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot v_j) \\
&= -\omega(v_j, u_2) + a\omega(X_H(p), d\Theta(p)\cdot u_2) - a\omega(X_H(p), (d\tau(p)\cdot v_j)X_H(p)) \\
&= \delta_{2j} + a\cdot dH(p)\cdot d\Theta(p)\cdot v_j = \delta_{2j} + a\cdot d(H\circ\Theta)(p)\cdot v_j \\
&= \delta_{2j} + a\cdot dH(p)\cdot v_j = \delta_{2j} + a\omega(X_H(p), v_j) = \delta_{2j} + a\delta_{1j},
\end{aligned}
$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Logo, $\mu_{2+n} = w_{n+2} + aw_{n+1}$ e portanto,

$$d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot w = (w_{n+1} + aw_{n+2})v_2 + [...],$$

onde [...] representa os outros termos de $d\psi_H^{\tau(p)}(p)$.

Finalmente, seja $w' = \sum_{j=2}^{n} w_j u_j + \sum_{j=1}^{n} w_{j+n} v_j \in T_p\Sigma$. Como

$$d\Theta(p)\cdot w = d\psi_H^{\tau(p)}(p)\cdot w + (d\tau(p)\cdot w)X_H(p),$$

segue de (4.18) que

$$(\pi\circ d\Theta(p) - \pi)w' = aw_{n+1}v_2 + [...],$$

onde [...] representa os outros termos de $(\pi\circ d\Theta(p) - \pi)w'$. Por hipótese, $\pi\circ d\Theta(p) - \pi$ é sobrejetora, mas isso só é verdade se $a \neq 0$.

□

O próximo resultado mostra que quando restringimos $\Theta : \Sigma_1 \to \Sigma$ a uma superfície de energia Γ_e de H, a aplicação de Poincaré se torna um difeomorfismo que preserva a forma simplética restrita a $\Sigma_1 \cap \Gamma_e$.

Proposição 4.32. *Sejam (M,ω) uma variedade simplética, $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$, γ uma órbita fechada de X_H, $\Theta : \Sigma_1 \to \Sigma$ a aplicação de Poincaré de γ, $p \in \Sigma\cap\gamma$, $e = H(p)$ e*

$\Sigma' = \Sigma_1 \cap H^{-1}(e)$. *Nessas condições, a restrição* $\Theta|_{\Sigma'}$ *é um difeomorfismo simplético, isto é, preserva a forma* $\omega|_{\Sigma'}$.

Demonstração. Como o fluxo de X_H é simplético, dados $p \in \Sigma'$ e $v_1, v_2 \in T_p\Sigma' \subset T_pH^{-1}(H(p))$ temos que

$$\omega_p(v_1, v_2) = \omega_{\psi_H^{\tau(p)}(p)}(d\psi_H^{\tau(p)}(p) \cdot v_1, d\psi_H^{\tau(p)}(p) \cdot v_2).$$

Por outro lado,

$$d\psi_H^{\tau(p)} \cdot v_j = d\Theta(p) \cdot v_j - a_j X_H(\Theta(p)),$$

onde $a_j = d\tau(p) \cdot v_j$, com $j = 1, 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\omega_p(v_1, v_2) &= \omega_{\Theta(p)}(d\Theta(p) \cdot v_1 - a_1 X_H(\Theta(p)), d\Theta(p) \cdot v_2 - a_2 X_H(\Theta(p))) \\
&= \omega_{\Theta(p)}(d\Theta(p) \cdot v_1, d\Theta(p) \cdot v_2) - a_2 \omega_{\Theta(p)}(d\Theta(p) \cdot v_1, X_H(\Theta(p))) \\
&- a_1 \omega_{\Theta(p)}(X_H(\Theta(p)), d\Theta(p) \cdot v_2) + a_1 a_2 \omega_{\Theta(p)}(X_H(\Theta(p), X_H(\Theta(p))) \\
&= (\Theta^*\omega)_p(v_1, v_2) + a_2 \cdot dH(\Theta(p)) \cdot d\Theta(p) \cdot v_1 - a_1 \cdot dH(\Theta(p)) \cdot d\Theta(p) \cdot v_2 \\
&= (\Theta^*\omega)_p(v_1, v_2) - a_2 \cdot d(H \circ \Theta)(p) \cdot v_1 + a_1 \cdot d(H \circ \Theta)(p) \cdot v_2 \\
&= (\Theta^*\omega)_p(v_1, v_2) - a_2 \cdot dH(p) \cdot v_1 + a_1 \cdot dH(p) \cdot v_2 \\
&= (\Theta^*\omega)_p(v_1, v_2),
\end{aligned}$$

pois, $v_1, v_2 \in T_pH^{-1}(H(p))$.

Como isso vale para todo $p \in \Sigma'$, obtemos que $\omega|_{\Sigma'} = \Theta^*\omega|_{\Sigma'}$ e portanto, $\Theta|_{\Sigma'}$ é um difeomorfismo simplético. □

4.5 Funções geradoras

Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) duas variedades simpléticas e $f : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo simplético. Então, por definição, temos que $f^*\omega_2 = \omega_1$. Nosso objetivo nessa seção é reformular o conceito de difeomorfismo simplético de modo a introduzir a noção de função geradora, a qual será importante na próxima seção. Para isso, consideremos a seguinte proposição:

Proposição 4.33. *Sejam* (M_1, ω_1) *e* (M_2, ω_2) *duas variedades simpléticas e considere as projeções* $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ *e* $\pi : M_1 \times M_2 \to M_2$. *Defina uma 2-forma* Ω *em* $M_1 \times M_2$ *pondo*

$$\Omega = \pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2.$$

Então:

(i) Ω *é uma forma simplética em* $M_1 \times M_2$*;*

(ii) *uma aplicação* $f : M_1 \to M_2$ *é simplética se, e somente se,* $i_f^*\Omega = 0$, *onde* $i_f : \mathrm{Graf}(f) \to M_1 \times M_2$ *é a inclusão e* $\mathrm{Graf}(f)$ *é o gráfico de* f.

Demonstração. (i) Temos que Ω é fechada pois $d\Omega = \pi_1^* d\omega_1 - \pi_2^* d\omega_2 = 0$.

Sejam $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ e $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) = T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2$. Suponha que $\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = 0$, para todo $(v_1, v_2) \in T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2$. Então, temos que

$$0 = \Omega(p_1, p_2)((u_1, u_2), (v_1, 0)) = \omega_1(p_1)(u_1, v_1), \quad \forall\ v_1 \in T_{p_1}M_1$$

e

$$0 = \Omega(p_1, p_2)((u_1, u_2), (0, v_2)) = \omega_2(p_2)(u_2, v_2), \quad \forall\ v_2 \in T_{p_2}M_2.$$

Logo, $u_1 = u_2 = 0$, pois ω_1 e ω_2 são não-degeneradas, e portanto, Ω é não-degenerada.

(ii) Seja $p \mapsto (p, f(p))$ o difeomorfismo de M_1 em $\mathrm{Graf}(f)$ induzido por f. Assim, temos que

$$T_{(p,f(p))}\,\mathrm{Graf}(f) = \{(v, df(p)\cdot v);\ v \in T_pM_1\}.$$

Logo, por definição, obtemos

$$\begin{aligned}(i_f^*\Omega)(p, f(p))((v_1, df(p)\cdot v_1), (v_2, df(p)\cdot v_2)) &= \omega_1(p)(v_1, v_2) - \omega_2(f(p))(df(p)\cdot v_1, df(p)\cdot v_2) \\ &= (\omega_1 - f^*\omega_2)(p)(v_1, v_2) = 0,\end{aligned}$$

pois $f^*\omega_2 = \omega_1$. □

Pelo Lema de Poincaré existe uma 1-forma Λ em $M_1 \times M_2$ tal que, localmente, $\Omega = -d\Lambda$. Podemos fazer uma escolha de Λ aplicando o Lema de Poincaré a ω_1 e ω_2 para obter 1-formas λ_1 e λ_2, respectivamente, tais que $\omega_1 = -d\lambda_1$ e $\omega_2 = -d\lambda_2$. Então, tomamos $\Lambda = \pi_1^*\lambda_1 - \pi_2^*\lambda_2$. Assim, se f é um difeomorfismo simplético, temos que

$$di_f^*\Lambda = i_f^* d\Lambda = -i_f^*\Omega = 0.$$

E portanto, f é um difeomorfismo simplético se, e somente se, $i_f^*\Lambda$ é fechada. Pelo Lema de Poincaré, isso é equivalente à existência de uma função $S : U \subset \mathrm{Graf}(f) \to \mathbb{R}$ tal que, localmente, $i_f^*\Lambda = dS$, onde U é aberto $\mathrm{Graf}(f)$.

Definição 4.34. Uma aplicação S satisfazendo as condições acima é chamada de **função geradora** do difeomorfismo simplético f.

É claro que a função S depende da escolha de Λ. Além disso, como podemos colocar um sistema de coordenadas locais em $\mathrm{Graf}(f)$ de várias formas, dependendo dos sistemas coordenadas em M_1 e M_2, temos que S pode ser uma função definida em vários tipos variáveis. Vejamos o que acontece em um sistema de coordenadas locais.

Sejam $(U_1, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ e $(f(U_1), \xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ sistemas de coordenadas locais em (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2), respectivamente, onde em M_2 estamos considerando o sistema de coordenadas induzido por f. Então, temos que a representação de f nesses sistemas de coordenadas é

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n),$$

com $\omega_1 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$ e $\omega_2 = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge d\eta_j$.

Sejam $\lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j$ e $\lambda_2 = -\sum_{j=1}^{n} \xi_j d\eta_j$ e consideremos S como sendo uma função em $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

Pela expressão de Λ temos que $i_f^*\Lambda = dS$ se traduz por

$$\sum_{j=1}^{n} y_j dx_j + \sum_{j=1}^{n} \xi_j d\eta_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \eta_j} d\eta_j.$$

Portanto, temos as igualdades

$$\begin{cases} y_j = \dfrac{\partial S}{\partial x_j}(x, \eta) \\ \\ \xi_j = \dfrac{\partial S}{\partial \eta_j}(x, \eta) \end{cases}. \tag{4.22}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, se

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial \eta_i \partial x_j}(x_0, \eta_0) \right]_{n \times n} \neq 0,$$

em algum ponto $(x_0, \eta_0) \in \mathrm{Graf}(f)$, podemos resolver locamente a primeira equação de (4.22) para obter η em função de x e y. Depois, substituindo η na segunda equação, obtemos ξ em função de x e y. Isso nos dá o difeomorfismo f em termos da sua função geradora.

O seguinte caso particular é importante para nós.

Proposição 4.35. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ um sistema de coordenadas locais em torno de $p \in M$ tal que $x_j(p) = y_j(p) = 0$, para $j = 1, \ldots, n$, e $G : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ uma função nas variáveis $x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ tal que $G(0) = 0$, $dG(0) = 0$ e $d^2G(0) = 0$. Se $f : M \to M$ é dada localmente por*

$$f(p) = (\xi_1(p), \ldots, \xi_n(p), \eta_1(p), \ldots, \eta_n(p)),$$

com

$$y_j = \eta_j + \frac{\partial G}{\partial x_j}(x, \eta) \qquad e \qquad \xi_j = x_j + \frac{\partial G}{\partial \eta_j}(x, \eta), \tag{4.23}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ *e* $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$*, então* f *é difeomorfismo simplético local.*

Demonstração. Pela discussão acima, tomemos

$$\frac{\partial S}{\partial x_j}(x,\eta) = \eta_j + \frac{\partial G}{\partial x_j}(x,\eta) \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial \eta_j}(x,\eta) = x_j + \frac{\partial G}{\partial \eta_j}(x,\eta).$$

Então,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta_i \partial x_j}(0,0) = \delta_{ij} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial x_j}(0,0) = \delta_{ij}.$$

Logo, temos que

$$\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \eta_i \partial x_j}(0,0)\right] = 1 \neq 0$$

e pelo Teorema da Função Implícita, existe uma aplicação $\alpha : V \subset U \to \mathbb{R}^n$ tal que $\eta = \alpha(x,y)$. Assim, obtemos ξ e η em função de x e y através das relações

$$\xi_j = x_j + \frac{\partial G}{\partial \eta_j}(x,\alpha(x,y)) \quad \text{e} \quad \eta_j = y_j - \frac{\partial G}{\partial x_j}(x,\alpha(x,y)).$$

Dessas relações e das hipóteses sobre G resulta que $df(0) = \mathrm{id}$. Como isso vale para todo $p \in M$ com o referido sistema de coordenadas, segue f é um difeomorfismo local pelo Teorema de Aplicação Inversa.

Sejam $(f(U), \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ o sistema de coordenadas induzido por f e

$$\omega' = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge d\eta_j$$

a forma simplética nesse sistema. Então, $\omega = f^*\omega'$ pelo Exemplo 4.6 e portanto, para que f seja simplética, basta provar que $\omega' = \omega$.

Das equações (4.23) temos que

$$dy_j = d\eta_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial x_j} d\eta_i \tag{4.24}$$

e

$$d\xi_j = dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \eta_j} dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_j} d\eta_i. \tag{4.25}$$

Multiplicando à esquerda por dx_j na equação (4.24), obtemos

$$dx_j \wedge dy_j = dx_j \wedge d\eta_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial x_j} dx_j \wedge d\eta_i.$$

Somando em j, temos

$$\sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\eta_j + \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial x_j} dx_j \wedge d\eta_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\eta_j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial x_j} dx_j \wedge d\eta_i.$$

Da mesma forma, multiplicando à direita por $d\eta_j$ na equação (4.25), obtemos

$$d\xi_j \wedge d\eta_j = dx_j \wedge d\eta_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \eta_j} dx_i \wedge d\eta_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_j} d\eta_i \wedge d\eta_j.$$

Somando em j, temos

$$\sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge d\eta_j = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\eta_j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \eta_j} dx_i \wedge d\eta_j + \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \eta_i \partial \eta_j} - \frac{\partial^2 G}{\partial \eta_j \partial \eta_i} \right) d\eta_i \wedge d\eta_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\eta_j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \eta_j} dx_i \wedge d\eta_j.$$

Logo, $\omega = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge d\eta_j = \omega'$ e portanto, temos que $f^*\omega = \omega$ ou seja, f é simplética.

$\square$

Das equações (4.23) obtemos que $\xi_j = x_j + \dfrac{\partial G}{\partial y_j}(x, y) + [...]$ e $\eta_j = y_j - \dfrac{\partial G}{\partial x_j}(x, y) + [...]$, onde [...] representa os outros termos da igualdade. Dessa forma, o difeomorfismo f pode ser representado localmente como

$$f(x, y) = \mathrm{id} + X_G(x, y) + [...]. \tag{4.26}$$

4.6 Estabilidade na vizinhança de um ponto fixo elíptico

Nessa seção estudaremos o comportamento do fluxo hamiltoniano na vizinhança de um ponto fixo (crítico) elíptico. Veremos um caso especial em que há estabilidade e depois motraremos que o comportamento geral na vizinhança desses pontos é o mesmo que o do caso especial através da Forma Normal de Birkhoff.

Definição 4.36. Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$, com ponto de equilíbrio (ou ponto fixo) $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que p_0 é um ponto fixo **elíptico** se todos os autovalores de $dX(p_0)$ são números imaginários puros.

No exemplo a seguir, vamos construir um campo hamiltoniano $X_H \in \mathfrak{X}_H(\mathbb{R}^{2n})$, com a origem sendo um ponto fixo elíptico, e vamos estudar o comportamento do fluxo hamiltoniano perto desse ponto.

Exemplo 4.37. Considere o espaço simplético padrão $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ e defina as funções $\rho_j : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ por

$$\rho_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2).$$

Seja $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ uma n-upla de números inteiros positivos e considere a função $\xi_J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\xi_J = \rho_1^{j_1} \cdot \rho_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{j_n}.$$

Tomaremos a função hamiltoniana $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ como sendo a série de potências em ρ_j,

$$H = \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^n} a_J \xi_J. \tag{4.27}$$

Calculando as derivadas parciais de H, obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = x_j \frac{\partial H}{\partial \rho_j} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial H}{\partial y_j} = y_j \frac{\partial H}{\partial \rho_j}.$$

Assim, pela Proposição 4.22, temos que o campo hamiltoniano associado a H é

$$X_H = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial H}{\partial \rho_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial H}{\partial \rho_j} \frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{4.28}$$

Concluímos que $0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo de X_H, visto que, pela expressão acima, temos $X_H(0) = 0$. Calculando o jacobiano de X_H em 0, obtemos uma matriz da forma

$$dX_H(0) = \begin{pmatrix} & & & \alpha_1 & \ldots & 0 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \ldots & \alpha_n \\ -\alpha_1 & \ldots & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \ldots & -\alpha_n & & & \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_j = a_{(0,\ldots,1,\ldots,0)} = \dfrac{\partial H}{\partial \rho_j}(0)$. Essa matriz possui $2n$ autovalores da forma $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_n$ e assim, $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ é um ponto fixo elíptico de X_H.

Seja $\psi_H^t = (\psi_1^t \dots, \psi_{2n}^t)$ o fluxo hamiltoniano. Observemos que

$$\frac{d}{dt}(\rho_j \circ \psi_H^t) = d\rho_j(\psi_H^t) \circ X_H(\psi_H^t) = \psi_j^t dx_j(X_H(\psi_H^t)) + \psi_{j+n}^t dy_j(X_H(\psi_H^t))$$

$$= \psi_j^t \psi_{j+n}^t \frac{\partial H}{\partial \rho_j} - \psi_{j+n}^t \psi_j^t \frac{\partial H}{\partial \rho_j} = 0.$$

Isso prova que o fluxo preserva as funções ρ_j, ou seja, temos que

$$(\psi_j^t)^2 + (\psi_{j+n}^t)^2 = 2\rho_j, \tag{4.29}$$

para $j = 1, \dots, n$. As equações (4.29) nos dizem, em particular, que dado p_0 numa vizinhança da origem, a curva integral $\psi_H^t(p_0) \in \mathbb{T}_R^n = S_{r_1}^1 \times \dots \times S_{r_n}^1$ para todo t, onde $R = (r_1, \dots, r_n)$, $r_j = \sqrt{2\rho_j(p_0)}$ e $S_{r_j}^1$ é a circunferência de centro na origem e raio r_j no plano $x_j y_j$. Com isso, concluímos que o ponto fixo elíptico 0 é estável segundo Lyapunov.

Mostraremos agora que o exemplo acima é uma forma normal para o fluxo hamiltoniano perto de um ponto fixo elíptico, isto é, existe um sistema de coordenadas simpléticas locais tais que a função hamiltoniana tem a forma da equação (4.27). Para tanto, precisamos do seguinte resultado preliminar:

Proposição 4.38. *Sejam $q : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática positiva definida e $Q : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ a função dada por $Q(z) = q(z, z)$. Então, existem um isomorfismo linear $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ e números $0 < \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$ tais que*

$$(Q \circ \varphi)(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2}(x_j^2 + y_j^2),$$

onde $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Os números $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n$ são os autovalores do campo hamiltoniano linear X_Q gerado pela função Q.

Demonstração. Ver [12], Teorema 8, p. 35. □

Agora provaremos o resultado principal da seção:

Teorema 4.39 (Forma normal de Birkhoff)**.** *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, $X_H \in \mathfrak{X}_H(M)$ um campo hamiltoniano de classe C^∞ com um ponto fixo elíptico $p_0 \in M$ tal que os autovalores de $dX_H(p_0)$ são linearmente independentes sobre os inteiros. Então, existe um sistemas de coordenadas simpléticas locais $(U; x_1 \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tais que*

$$H = H(0) + \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^n} a_J \xi_J + \mathcal{O}_\infty, \tag{4.30}$$

onde $\xi_J = \rho_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{j_n}$*, com* $\rho_j = \frac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2)$*,* $a_J \in \mathbb{R}$ *e* $\mathcal{O}_\infty$ *tem todas as suas derivadas parciais na origem iguais a zero. A série* H *pode não convergir, mas ainda é uma função de classe* C^∞ *definida localmente no sistema de coordenadas.*

Demonstração. Como estamos usando apenas as derivadas de H na origem, é suficiente trabalhar com série de potências formais, isto é, séries que podem divergir. A razão disso é que pelo Teorema da Extensão de Whitney (Ver [13], Teorema 2.3.6, p. 48) toda série de potências formal é a série de Taylor de alguma função de classe C^∞.

Seja

$$H = H_2 + \ldots + H_m + \ldots$$

a representação de H em série de potências, onde os H_j são polinômios homogeneos de grau j. Suponhamos ter encontrado um sistema de coordenadas locais $(U; w_1, \ldots, w_m, z_1, \ldots, z_n)$ tal que H está na forma desejada até o termo $m-1$ e

$$H_2(z, w) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2}(w_j^2 + z_j^2)$$

pela Proposição 4.38.

Consideremos uma função geradora P que é um polinômio de grau m e a correspondente mudança de coordenadas

$$w_j = x_j + \frac{\partial P}{\partial y_j}(x, y) + [...] \qquad \text{e} \qquad z_j = y_j - \frac{\partial P}{\partial x_j}(x, y) + [...].$$

Temos

$$H_2(w, z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{2} \left[\left(x_j + \frac{\partial P}{\partial y_j} + [...] \right)^2 + \left(y_j - \frac{\partial P}{\partial x_j} + [...] \right)^2 \right] =$$

$$= H_2(x, y) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) P + [...].$$

Sejam V_m o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau m e $D : V_m \to V_m$ dado por

$$D(P) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) P.$$

Então,

$$H(w, z) = H_2(x, y) + \ldots + H_{m-1}(x, y) + (H_m(x, y) + D(P)) + [...].$$

O operador D é linear e pelo Lema 4 em [12], p. 44, segue que $\ker(D) \oplus \mathrm{Im}(D) = V_m$ e

$$\ker(D) = \mathrm{span}\left\{\rho_1^{j_1} \cdot \rho_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot \rho_n^{j_n};\ \sum_{k=1}^{n} k_i = \frac{m}{2}\right\},$$

se m é par ou $\ker(D) = \{0\}$ se m é ímpar.

Agora, sejam $H_m^{\ker(D)}$ e $H_m^{\mathrm{Im}(D)}$ as projeções de H_m em $\ker(D)$ e $\mathrm{Im}(D)$, respectivamente. Então, colocamos H na forma normal até a ordem m escolhendo um polinômio P que é solução da equação $H_m^{\mathrm{Im}(D)} + D(P) = 0$.

Repetindo esse processo para cada $m \in \mathbb{N}$ obtemos a expressão (4.30).

□

Finalmente, o seguinte resultado, também devido a Birkhoff, caracteriza uma forma normal para um difeomorfismo simplético com um ponto fixo elíptico elementar numa vizinhança do mesmo.

Teorema 4.40 (Birkhoff)**.** *Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $\psi : M \to M$ um difeomorfismo simplético com um ponto fixo elíptico elementar $p_0 \in M$, isto é, os autovalores de $d\psi(p_0)$ são imáginários puros de módulo 1 e são multiplicativamente independentes sobre os inteiros. Então, existe um sistema de coordenadas simpléticas locais $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ em torno de p_0 tal que $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{2n})$ com*

$$\begin{aligned} \psi_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &= x_j \cos L - y_j \,\mathrm{sen}\, L + \mathcal{O}_\infty \\ \psi_{j+n}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &= x_j \sin L + y_j \cos L + \mathcal{O}_\infty, \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde

$$L = \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_j}{2}(x_j^2 + y_j^2) + \mathcal{O}_\infty$$

e $\mathcal{O}_\infty$ tem todas as suas derivadas parciais na origem iguais a zero.

A idéia da demonstração é considerar a aplicação ψ como um difeomorfismo formal. Nesse caso, ψ é a aplicação de tempo um de algum campo vetorial. Como ψ é simplética resulta que é localmente a aplicação de tempo um de um campo hamiltoniano X_H. Então, colocando X_H na forma normal usando o Teorema 4.39, obtemos a expressão desejada para ψ através da aplicação exponencial.

Capítulo 5

Teorema da densidade geral para sistemas hamiltonianos

Dada uma variedade M de classe C^k, dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ tem a **propriedade (G2)** se todo elemento crítico (singularidades e órbitas periódicas) de X é hiperbólico. Diremos que X tem a **propriedade (G3)** se ele tiver a propriedade (G2) e se $p \in W^s(\gamma_1) \cap W^u(\gamma_2)$, então $W^s(\gamma_1)$ e $W^u(\gamma_2)$ são transversais em p, onde γ_1 e γ_2 são elementos críticos de X e $W^s(\gamma_1)$ e $W^u(\gamma_2)$ são, respectivamente, as variedades estável de γ_1 e instável de γ_2.

O Teorema de Kupka-Smale afirma que o subconjunto dos campos de vetoriais $X \in \mathfrak{X}(M)$ que tem a propriedade (G3) é residual em $\mathfrak{X}(M)$ com a topologia C^k de Whitney. Um resultado similar afirma que o subconjunto do conjunto $\mathrm{Diff}_V^k(M)$ dos difeomorfismos de classe C^k de M que preservam volume e cujos pontos periódicos são todos hiperbólicos é residual em $\mathrm{Diff}_V^k(M)$, também com a topologia C^k de Whitney. Isso também vale para campos vetoriais que preservam volume. Já no caso de campos hamiltonianos isso não é verdade. (Veja [30] e [33] para mais detalhes.)

Nosso objetivo neste capítulo é provar um resultado análogo ao Teorema de Kupka-Smale para campos hamiltonianos. Nesse caso, a hiperbolicidade das órbitas desses campos será substituida por outra propriedade que depende dos autovalores principais de uma família a um parâmetro de difeomorfismos simpléticos.

5.1 Genericidade de sistemas hamiltonianos

Sejam M e N variedades de classe C^∞ e $C^k(M,N)$ o conjunto das aplicações de classe C^k de M em N com a topologia C^k de Whitney. Uma propriedade $P(f)$ em $C^k(M,N)$ é uma proposição lógica que toma valores $f \in C^k(M,N)$.

Definição 5.1. Dizemos que uma propriedade $P(f)$ em $C^k(M,N)$ é **genérica** se o subconjunto

$$\mathscr{G}^k = \left\{f \in C^k(M,N);\ P(f)\right\}$$

contém um subconjunto residual de $C^k(M,N)$. Dizemos também que $P(f)$ é C^k **genérica** em $C^\infty(M,N)$ se $\mathscr{G} = \{f \in C^\infty(M,N);\ P(f)\}$ é a intersecção de $C^\infty(M,N)$ com um subespaço de $C^k(M,N)$ que contém um subconjunto residual.

Como $C^k(M,N)$ com a topologia C^k de Whitney é um espaço de Baire, segue que $\mathscr{G}^k$ na definição acima é, na verdade, denso em $C^k(M,N)$. Intuitivamente, isso significa que quase todas as aplicações em $C^k(M,N)$ posssuem a propriedade $P(f)$ ou então que a propriedade $P(f)$ é "comum" em $C^k(M,N)$.

Pela Proposição 4.32, a aplicação de Poincaré na vizinhança de uma órbita fechada é uma aplicação de uma variedade Σ^{2n-1} de dimensão ímpar em si mesma que quando restrita a uma superfície de energia $\Sigma_e^{2n-2} = \Gamma_e \cap \Sigma$ é uma difeomorfismo simplético local. Assim, pela construção da aplicação de Poincaré do campo hamiltoniano na Seção 4.4, temos que os detalhes sobre o comportamento numa vizinhança de uma órbita fechada se resumem a estudar o comportamento de aplicações $f : I \times M \to I \times M$ da forma

$$f(t,p) = (t, f_t(p)), \tag{5.1}$$

onde $I = [-1,1]$ e um intervalo fechado, M é uma variedade simplética e $f_t : M \to M$ é um difeomorfismo simplético de classe C^k. As aplicações f da forma (5.1) são chamadas de **famílias a um parâmetro de difeomorfismos simpléticos** e o conjunto de tais famílias será denotado por $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$. Como a aplicação de Poincaré de todo campo hamiltoniano é localmente uma aplicação da forma (5.1), segue que os resultados sobre a genericidade que enunciarmos para $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$ também são válidos para $\mathfrak{X}_H(M)$.

Definição 5.2. Seja $f \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$. Dizemos que um ponto $(t,q) \in I \times M$ é **periódico** e tem **período** $p \in \mathbb{N}$ se $f^p(t,q) = (t,q)$, onde $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (p vezes). O período p é **primo** se $f^m(t,q) \neq (t,q)$, para $0 < m < p$.

Definição 5.3. Sejam $N > 0$, $f \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ e $\pi : I \times M \to M$ a projeção natural.

(a) Um ponto periódico (t,q) de período primo p de f é **0-elementar** se a transformação linear $d(\pi \circ f^p)(t,q) - d\pi(t,q) : T_{(t,q)}(I \times M) \to T_qM$ é sobrejetora.

(b) Um ponto periódico (t,q) de período primo p de f é N**-elementar** se a matriz da transformação linear $df_t(q) : T_qM \to T_qM$ é N-elementar.

Pelo Teorema 4.28, se (t,q) é periódico com período primo p e é 0-elementar, então existe uma família $\gamma = \{(t(s), q(s));\ s \in \mathbb{R}\}$ em $I \times M$ formada por pontos de período primo p de f.

Sejam

$$\mathscr{L}_\omega = \{(q,A);\ q \in M \text{ e } A : T_qM \to T_qM \ \text{ é uma transformação linear simplética}\}$$

e $W^N = \{(q,A) \in \mathscr{L}_\omega;\ A$ não é N-elementar$\}$. Temos que $\mathscr{L}_\omega$ é um fibrado de classe C^∞ sobre M com projeção natural $\mathrm{pr} : \mathscr{L}_\omega \to M$ e cujas fibras são grupos de Lie difeomorfos a $\mathrm{Sp}(2n)$. Assim, $\mathscr{L}_\omega$ é uma variedade de classe C^∞. Além disso, cada fibra de W^N é um conjunto semi-algébrico que têm interior vazio nas fibras de $\mathscr{L}_\omega$ pelo Lema 3.1. Logo, pelo Teorema de Whitney (Lema 3.3) segue que W^N é localmente união de subvariedades de $\mathscr{L}_\omega$.

Seja $\xi : \mathbb{R} \to \mathscr{L}_\omega$ a aplicação definida por

$$\xi(s) = (q(s), df^p_{t(s)}(q(s))),$$

onde $\gamma(s) = (t(s), q(s))$ é a família de pontos periódicos de período primo p cuja existência discutimos acima.

Definição 5.4. Dizemos que $f \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ tem a **propriedade H2-N** no ponto periódico (t,q) de período primo p, se

(i) o ponto (t,q) é 0-elementar;

(ii) a aplicação $\xi : \mathbb{R} \to \mathscr{L}_\omega$ definida acima é transversal a W^N. (Ou seja, é transversal a cada subvariedade que compõe W^N.)

A definição acima nos diz que parq que f tenha a propriedade H2-N não é necessário que (t,q) seja N-elementar mas em uma vizinhança do mesmo exista no máximo um número finito de pontos periódicos N-elementares.

Consideremos os conjuntos

$$\mathscr{D}^k(p,N) = \left\{ f \in \mathrm{Symp}^k(I \times M);\ \begin{array}{c} f \text{ tem a propriedade H2-N em todos os} \\ \text{pontos periódicos de período primo} \leq p \end{array} \right\}$$

e $\mathscr{D}^k = \displaystyle\bigcap_{p,N\in\mathbb{N}} \mathscr{D}^k(p,N)$.

Teorema 5.5 (Teorema da Densidade Geral)**.** *Seja* $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$ *o espaço topológico das famílias a um parâmetro de difeomorfismos simpléticos com a topologia* C^k *de Whitney, com* $2 \leq k \leq \infty$*. Então, os conjuntos* $\mathscr{D}^k(p,N)$ *e* $\mathscr{D}^k$ *são residuais (e portanto, densos) em* $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$*.*

Este é o resultado central do capítulo pois mostra que conjunto dos campos hamiltonianos que tem a propriedade H2-N é denso em $\mathfrak{X}_H(M)$. Faremos a demonstração na Seção 5.3. Agora, enunciaremos outros resultados relacionados à genericidade de campos hamiltonianos.

Se um ponto periódico (t,q) de período primo p de f não é 2-elementar, então $df_t^p(q)$ tem um autovalor múltiplo. A análise feita no capítulo 3 mostra o comportamento da família de matrizes simpléticas $df_{t(s)}^p(q(s))$, onde $\gamma = \{(t(s),q(s));\ s \in \mathbb{R}\}$ é uma família de pontos periódicos numa vizinhança de uma ponto periódico que não é 2-elementar. Se (t,q) não for 1-elementar, então 1 é autovalor de $df_t^p(q)$. A próxima proposição exibe o comportamento numa vizinhança de um ponto periódico que não é 1-elementar.

Proposição 5.6. *Suponha que $f \in \mathscr{D}^2(p,1)$ tenha um ponto periódico (t,q) de período p que não é 1-elementar. Seja $\gamma = \{(t(s),q(s));\ s \in \mathbb{R}\}$ a família de pontos periódicos de período p numa vizinhança de (t,q), com $t(0) = t$. Então, temos que $t'(0) = 0$ e $t''(0) \neq 0$. Além disso, para todo $k \geq p$ existe uma vizinhança $U(k) \subset I \times M$ tal que os únicos pontos de período $\leq k$ são os pontos do conjunto $\gamma \cap U(k)$.*

Demonstração. Provaremos a primeira parte da demonstração. Para a demonstração da segunda parte, ver a Proposição 6.2 em [35].

Se γ é uma família de pontos periódicos de período p de f, então ela é uma família de pontos fixos de f^p. Temos que $df^p(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \gamma'(0)$. Isso vem do fato de que f^p restrito ao conjunto γ é a identidade.

Seja $A(s)$ a restrição de $df_{t(s)}^p(q(s))$ ao espaço tangente $T_{\gamma(s)}M$. Temos que $A(s)$ leva vetores de $T_{\gamma(s)}M$ em vetores de $T_{f^p(\gamma(s))}M = T_{\gamma(s)}M$, uma vez que $f^p(\gamma(s)) = \gamma(s)$.

Considere S como sendo o conjunto das matrizes simpléticas que tem um autovalor igual a 1. Temos que S é uma subvariedade de $\mathrm{Sp}(2n)$. Isso pode ser provado facilmente usando o polinomio característico das matrizes em S. Resulta que $A(0) \in S$ e $A(s)$ é transversal a S, pois f tem a propriedade H2-1.

Suponha por absurdo que $t''(0) = 0$. Isso é equivalente a afirmar que $\gamma''(0) \in T_{\gamma(0)}M$. Seja $\pi : \mathbb{R} \oplus T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t)}M$ a projeção na segunda componente. Então, por hipótese, temos que $\pi(\gamma'(0)) = \gamma(0)$ e $\pi(\gamma''(0)) = \gamma''(0)$. Como $(df_{t(s)}^p(q(s)) - \mathbf{I}) \cdot \gamma'(s) = 0$, para todo s, obtemos que

$$0 = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \left[(df_{t(s)}^p(q(s)) - \mathbf{I}) \cdot \gamma(s)\right] = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \left[df_{t(s)}^p(q(s))\right] \cdot \gamma'(0) + (df_{t(0)}^p(q(0)) - \mathbf{I}) \cdot \gamma''(0).$$

Observemos que $\displaystyle\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \left[df_{t(s)}^p(q(s))\right] \cdot \gamma'(0) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} A(s) \cdot \pi(\gamma'(0))$ e

$$(df_{t(0)}^p(q(0)) - \mathbf{I}) \cdot \gamma''(0) = (A(0) - \mathbf{I}) \cdot \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \pi(\gamma'(s)).$$

Assim,

$$0 = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} A(s) \cdot \pi(\gamma'(0)) + (A(0) - \mathbf{I}) \cdot \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \pi(\gamma'(s)) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} [(A(s) - \mathbf{I}) \cdot \pi(\gamma'(s))]$$

e $(A(0) - \mathbf{I}) \cdot \pi(\gamma'(0)) = 0$.

Seja $u_1(s) = \pi(\gamma'(s))$. Completemos $u_1(s)$ para uma base simplética $u_1(s), \ldots, u_n(s)$, $v_1(s), \ldots, v_n(s)$ que é diferenciável em s e seja $C(s)$ o mudança de base, onde

$$B(s) = C(s)A(s)C(s)^{-1} \tag{5.2}$$

é a matriz $A(s)$ na nova base. Seja $C(s)u_1(s) = e_1$ o vetor da primeira componente. Temos $B(0)e_1 = C(0)A(0)u_1(0) = C(0)u_1(0) = e_1$. Então, por (5.2) e pelo fato de que $\left.\dfrac{d}{ds}\right|_{s=0} [(A(s) - \mathbf{I}) \cdot \pi(\gamma'(s))] = 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left[C(s)^{-1}B(s)C(s)u_1(s) - C(s)^{-1}C(s)u_1(s)\right] \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left[C(s)^{-1}\right] \cdot (B(0)C(0)u_1(0) - C(0)u_1(0)) + C(0)^{-1} \cdot \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [B(s)e_1 - e_1] \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left[C(s)^{-1}\right] \cdot (B(0)e_1 - e_1) + C(0)^{-1} \cdot \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [B(s)e_1] \\
&= C(0)^{-1} \cdot \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [B(s)e_1].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [B(s)e_1] = 0. \tag{5.3}$$

Seja $D = \left.\dfrac{d}{ds}\right|_{s=0} B(0)^{-1}B(s)$ e defina

$$F(s) = B(0)\exp(sD).$$

Como $D \in T_{\mathbf{I}}\operatorname{Sp}(2n) = \operatorname{sp}(2n)$, segue que $F(s)$ é simplética para todo s, pela Proposição 1.16. Resulta de (5.3) que $Pe_1 = 0$ e portanto, $F(s)e_1 = B(0)e_1 = e_1$, para todo s. Assim, temos que $F(s) \in S$. Além disso, temos

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [B(s) - F(s)] = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} B(s) - B(0)P = 0.$$

Logo, $F(s)$ é tangente a $B(s)$ em $s = 0$.

Seja $H(s) = C(s)^{-1}F(s)C(s)$. Então, $H(0) = C(0)^{-1}B(0)C(0) = A(0)$ e $H(s)u_1(s) = u_1(s)$. Logo, $H(s) \in S$. Agora, observemos que

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [A(s) - H(s)] = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} C(s)^{-1}\left[B(s) - F(s)\right]C(s) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} C(s)^{-1}(B(0){-}F(0))C(0)$$

$$+C(0)^{-1} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} [B(s - F(s)]\, C(0) + C(0)^{-1}(B(0) - F(0)) \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} C(s) = 0.$$

Portanto, temos que $A(s)$ é tangente a $H(s)$ em $s = 0$ e como $H(s)$ é tangente a S, segue que $A(s)$ é tangente a S em $s = 0$. Mas isso contradiz hipótese de transversalidade de $A(s)$ em S. Com isso completamos a primeira parte da demonstração. □

Em [25], Meyer analisou o caso geral da bifurcação dos pontos periódicos em pontos periódicos que não são N-elementares quando $\dim M = 2$. Nesse caso, os pontos periódicos só possuem um autovalor principal, o qual é necessariamente uma raíz N-ésima da unidade.

Suponhamos que um ponto periódico $(t, q) \in I \times M$ que não é N-elementar tenha período p, onde $\dim M = 2$. Então, existem duas famílias de pontos com período Np que birfurcam a partir de (t, q): uma família é formada por pontos periódicos hiperbólicos e a outra é formada por pontos periódicos elípticos. (Ver Proposições 1.16, 1.17 e 1.18 em [25].)

Definição 5.7. Seja $f \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$. Um ponto $(t, q) \in I \times M$ é chamado **não-errante** se para toda vizinhança $U \subset I \times M$ de (t, q) existe um número inteiro positivo m tal que $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$

Considere os conjuntos

$$\Omega_c(f) = \left\{ (t, q) \in I \times M; \begin{array}{l} (t, q) \text{ é não-errante e sua órbita está contida em} \\ \text{um subconjunto compacto de } I \times M \end{array} \right\}$$

e

$$\mathrm{Per}(f) = \{(t, q) \in I \times M;\ (t, q) \text{ é um ponto periódico de } f\}$$

e denotemos por $\overline{\mathrm{Per}(f)}$ e $\overline{\Omega_c(f)}$ o fecho dos respectivos conjuntos.

Proposição 5.8 (Pugh)**.** *Seja* $\mathrm{Symp}^1(I \times M)$ *com a topologia* C^1 *de Whitney. Então, existe um subconjunto residual* $\mathscr{R} \subset \mathrm{Symp}^1(I \times M)$ *tal que para toda* $f \in \mathscr{R}$ *temos* $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \overline{\Omega_c(f)}$.

Demonstração. A idéia da demonstração é tomar um corbertura $I \times M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$ por compactos $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subset I \times M$ e considerar a aplicação $F_j : \mathrm{Symp}^1(I \times M) \to 2^{V_j}$ definida por

$$F_j(f) = \liminf \left\{ \overline{\mathrm{Per}(f_n)} \cap V_j;\ f_n \to f \right\}$$

$$= \left\{ (t, q) \in V_j;\ \forall f_n\ \exists (t_n, q_n) \in \overline{\mathrm{Per}(f_n)} \text{ tal que } (t_n, q_n) \to (t, q) \text{ quando } f_n \to f \right\}.$$

A aplicação F_j é semicontínua inferiormente, uma vez que ela é definida a partir do limite inferior. Resulta da Proposição 26 em [33], p. 601, que F_j é contínua em um subconjunto residual $\mathscr{R}_j \subset \mathrm{Symp}^1(I \times M)$. Logo, $\mathscr{R} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathscr{R}_j$ é residual em $\mathrm{Symp}^1(I \times M)$.

Agora, seja $f \in \mathscr{R}$ e suponha por absurdo que $\overline{\Omega_c(f)} - \overline{\text{Per}(f)} \neq \emptyset$. Dado $(t,q) \in \overline{\Omega_c(f)} - \overline{\text{Per}(f)}$, temos que $(t,q) \in \text{int}(V_j)$, para algum j. Pelo Lema do Fechamento de Pugh (Teorema 4, [33], p. 569), em toda vizinhança U_i de f existe uma $g_i \in U_i$ tal que $(t,q) \in \overline{\text{Per}(g_i)}$. Logo, $(t,q) \in F_j(g_i)$.

Assim, obtemos uma sequência de famílias $g_i \in \text{Symp}^1(I \times M)$ convergindo para f tal que $(t,q) \in F_j(g_i)$, para todo i. Pela continuidade de F_j em f, segue $(t,q) \in F_j(f) \subseteq \overline{\text{Per}(f)}$. Uma contradição. Portanto, deve ser $\overline{\Omega_c(f)} = \overline{\text{Per}(f)}$.

Para os detalhes da demonstração, ver [33].

□

5.2 Estabilidade estrutural e P-estabilidade

Definição 5.9. Sejam $f, g \in \text{Symp}^k(I \times M)$. Dizemos que f e g são **topologicamente conjugadas** se existe um homeomorfismo $h : I \times M \to I \times M$ tal que $g \circ h = h \circ f$. Diremos que f e g são **P-conjugadas** se existe um homeomorfismo $h_P : \text{Per}(f) \to \text{Per}(g)$ tal que $g \circ h_P = h_P \circ f|_{\text{Per}(f)}$.

Definição 5.10. Dizemos que $f \in \text{Symp}^k(I \times M)$ é **estruturalmente estável** se existe uma vizinhança $U \subset \text{Symp}^k(I \times M)$ de f tal que toda $g \in U$ é topologicamente conjugada a f.

Definição 5.11. Dizemos que $f \in \text{Symp}^k(I \times M)$ é **P-estável** se existe uma vizinhança $\subset \text{Symp}^k(I \times M)$ de f tal que toda $g \in U$ é P-conjugada a f.

Resulta das definições acima que estabilidade estrutural implica P-estabilidade. O próximo teorema mostra que famílias de difeomorfismos simpléticos que possuem um ponto periódico com um autovalor de módulo 1 não são P-estáveis.

No que se segue, uma **variedade central local** de um elemento crítico γ de $f \in \text{Symp}^k(I \times M)$ é uma variedade C invariante por f cujo espaço tangente $T_{(t,q)}C$ em $(t,q) \in \gamma$ é a soma dos autoespaços dos autovalores de (t,q) que tem módulo 1 mais o espaço $T_{(t,q)}\gamma$. A existência de variedades centrais locais (e outros tipos de variedades invariantes) é garantida pelo Teorema 7.2.2, p. 526, de [1].

Teorema 5.12. *Suponha que $f \in \text{Symp}^k(I \times M)$, para $1 \leq k \leq \infty$, seja uma família com um ponto periódico (t,q) de período p tal que $df_t^p(q)$ tenha um autovalor de módulo 1. Nessas condições, f não é P-estável.*

Demonstração. Provaremos no caso em que $k < \infty$. Suponha que f é P-estável e seja W uma vizinhança de f em $\text{Symp}^k(I \times M)$ tal que f é P-conjugada com toda $g \in W$. Tomemos $g \in W \cap \mathscr{D}^\infty$ de modo que (t,q) seja um ponto periódico com autovalores $\lambda_1 \ldots, \lambda_m$,

$\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_m$ de módulo 1. Como $g \in \mathscr{D}^\infty$, temos que g tem uma quantidade enumerável de pontos periódicos.

Seja $P \subset T_qM$ o subespaço gerado pela união dos autoespaços de $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Então a dimensão de P é $2m$ e $\omega|_P$ é não-degenerada pelo Corolário 1.33. Existe, portanto, uma variedade central local C invariante por g_t e cujo espaço tangente em (t, q) é P. Logo, C tem dimensão $2m$ e $\omega|_C$ é não-degenerada numa vizinhança V de q em C. Pelo Teorema 4.18 existe um sistema de coordenadas locais $(U; u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ tal que

$$U \cap C = \{q \in M;\ u_i(q) = 0,\ v_j(q) = 0,\ i = m+1, \ldots, n \text{ e } j = m+1, \ldots, n\}.$$

Pelo Teorema 4.40, existe um sistema de coordenadas simpléticas locais tais $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ tais que $u_i = x_i$, para $i = m+1, \ldots, n$, $v_j = y_j$, para $j = m+1, \ldots, n$, e para s suficientemente próximo de t,

$$g_j(s, x) = h_j(s, x) + \mathcal{O}_k,$$

onde $h_j(s, x)$ é um polinômio em $\rho_i = x_i^2 + y_i^2$, $i = 1, \ldots, m$ e $\mathcal{O}_k$ é de classe C^∞ e tem suas primeiras r derivadas parciais iguais a zero no pontos $(s, 0)$. Podemos assumir que o determinante formado pelos coeficientes dos termos quadráticos de $h(s, \cdot\,)$ é diferente de zero através de uma perturbação de g. Pelo Exemplo 4.37, a origem é preenchida com toros formados por pontos periódicos de h_t.

Seja $h_j(s, x) = g_j(s, x)$ para os índices restantes e considere a aplicação $h : I \times M \to I \times M$ dada por

$$h(s, x) = (h_1(s, x), \ldots, h_{2n}(s, x)).$$

Para s suficientemente próximo de t, todas as derivadas parciais de h e g avaliadas em $(s, 0)$ são iguais. Considere uma bump function $\psi : I \times M \to \mathbb{R}$, tal que $\psi|_V \equiv 1$, onde V é uma vizinhança de $(t, 0)$. Defina $\psi_\lambda(s, x) = \psi(s, x/\lambda)$ e seja

$$h_\lambda(s, x) = (1 - \psi_\lambda(s, x))h(s, x) + \psi_\lambda(s, x)g(s, x).$$

Temos que h_λ converge para g na topologia C^k de Whitney, quando $\lambda \to 1$. Assim, para λ suficientemente próximo de 1, temos que $h_\lambda \in W$. Mas h_λ tem uma vizinhança de $(t, 0)$ preenchida com toros formados por pontos periódicos. Logo, não pode existir um homeomorfismo entre $\mathrm{Per}(h_\lambda)$ e $\mathrm{Per}(g)$. Portanto, g e h_λ não são P-conjugadas e assim, f não pode ser P-conjugada a ambas h_λ e g. Uma contradição.

□

5.3 Demonstração do Teorema da Densidade Geral

Nessa seção provaremos o Teorema da Densidade Geral enunciado na Seção 5.1. O que faremos é traduzir a propriedade H2-N em termos de transversalidade de um certo tipo de aplicação e usar perturbações para mostrar que, de fato, essas aplicações são pseudotransversais (ver Definição C.8) a certas variedades que definiremos na ocasião. Então, aplicaremos o Teorema de Transversalidade do Apêndice C (Teorema C.3) para obter o resultado principal.

Fixemos $N \geq 1$. Defina $F_j : \mathrm{Symp}^k(I \times M) \to C^2(I \times M; M \times M)$ por

$$F_j(f)(t,q) = (q, f_t^j(q)).$$

Seja $\Delta_M = \{(q,q);\ q \in M\} \subset M \times M$ a diagonal. Então, $F_j(f)(t,q) \in \Delta_M$ se, e somente se, (t,q) é um ponto de período j. Mais ainda, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.13. *$F_j(f)$ é transversal a Δ_M em (t,q) se, e somente se, (t,q) é um ponto periódico 0-elementar.*

Demonstração. De fato, se $F_j(f)$ é transversal a Δ_M em (t,q), então

$$dF_j(f)(t,q) \cdot T_{(t,q)}(I \times M) + T_{(q,q)}\Delta_M = T_{(q,q)}(M \times M). \tag{5.4}$$

Mas $T_{(q,q)}\Delta_M \cong \Delta_{T_qM}$ e $T_{(q,q)}(M \times M) \cong T_qM \times T_qM$. Assim, dado qualquer $(w,z) \in T_{(q,q)}(M \times M)$, existem $(s,v) \in T_{(t,q)}(I \times M)$ e $(-u,-u) \in T_{(q,q)}\Delta_M$ tais que

$$dF_j(f)(t,q) \cdot (s,v) - (u,u) = (w,z).$$

Isso é o mesmo que afirmar que o sistema

$$\begin{cases} v - u = w \\ df_t^j(q) \cdot v - u = z \end{cases}$$

sempre tem solução. Tomando em particular $w = 0$, temos que, para todo $z \in T_qM$, existe $v \in T_qM$ tal que $(df_t^j(q) - \mathrm{id}_{T_qM}) \cdot v = z$, ou seja, a aplicação $df_t^j(q) - \mathrm{id}_{T_qM} : T_qM \to T_qM$ é sobrejetora. Mas $df_t^j(t,q) = \pi \circ df^j(t,q)$ e $\mathrm{id}_{T_qM} = \pi \circ \mathrm{id}_{T_{(t,q)}(I \times M)}$, onde

$$f^j(t,q) = (t, f_t^j(q))$$

e $\pi : T_{(t,q)}(I \times M) \to T_qM$ é projeção natural. Assim, temos que $\pi \circ df^j(t,q) - \pi$ é sobrejetora e portanto, (t,q) é um ponto periódico 0-elementar.

Para provarmos a recíproca, notemos que um elemento $w \in dF_j(f)(t,q) \cdot T_{(t,q)}(I \times M) +$

$T_{(q,q)}\Delta_M$ é escrito na forma

$$w = (v, d(f_t^j)\cdot(s,v)) - (u,u) = (v-u, \pi\circ df^j(t,q)\cdot(s,v) - \pi(s,u)),$$

para $(s,u),(s,v) \in T_{(t,q)}(I\times M)$. Sejam $h : M \to \Delta_M$ o difeomorfismo $h(q) = (q,q)$, $\alpha : \mathbb{R}\times T_qM \to \mathbb{R}\times\Delta_{T_qM}$ o isomorfismo $\alpha(s,v) = (s, dh(q)\cdot v)$ e $g : \mathbb{R}\times T_qM\times T_qM \to T_qM$ a aplicação dada por

$$g(s,(u,v)) = \pi\circ df^j(t,q)\cdot(s,v) - \pi(s,u).$$

Então, temos que

$$g|_{\mathbb{R}\times\Delta_{T_qM}}(\mathbb{R}\times\Delta_{T_qM}) \subset g(\mathbb{R}\times T_qM\times T_qM)$$

e $g|_{\mathbb{R}\times\Delta_{T_qM}}\circ\alpha = \pi\circ df^j(t,q) - \pi$. Por hipótese, $\pi\circ df^j(t,q)-\pi$ é sobrejetora e portanto, $g|_{\mathbb{R}\times\Delta_{T_qM}}(\mathbb{R}\times\Delta_{T_qM}) = T_qM$. Assim, temos que $g(\mathbb{R}\times T_qM\times T_qM) = T_qM$ e como a aplicação $(u,v)\mapsto v-u$ de $T_qM\times T_qM$ em T_qM é sobrejetora, obtemos que

$$dF_j(f)(t,q)\cdot T_{(t,q)}(I\times M) + T_{(q,q)}\Delta_M = T_{(q,q)}(M\times M) \cong T_qM\times T_qM.$$

Logo, $F_j(f)$ é transversal a Δ_M em (t,q).

$\square$

Assim, se (t,q) é um ponto periódico 0-elementar, temos que $F_j(f)^{-1}(\Delta_M)$ é uma subvariedade regular de $I\times M$ cuja codimensão é igual a codimensão de Δ_M em $M\times M$. Logo, $F_j(f)^{-1}(\Delta_M)$ tem dimensão 1.

Defina $G_j : \mathrm{Symp}^k(I\times M) \to C^1(I\times M; \mathscr{L}_\omega)$ por

$$G_j(f)(t,q) = (F_j(f)(t,q), df_t^j(q)),$$

onde $\mathscr{L}_\omega = M\times M\times \mathrm{Sp}(2n)$.

Sejam $\Delta_{\mathscr{L}_\omega} = \Delta_M\times\mathrm{Sp}(2n)$ e $B^N = \{\Phi\in\mathrm{Sp}(2n);\ \Phi \text{ não é } N\text{-elementar}\}$ e $W^N = \Delta_M\times B^N$. Então, W^N é fechado em $\mathscr{L}_\omega$, pois Δ_M é fechado e B^N é o complementar do conjunto das matrizes N-elementares, que é aberto e denso em $\mathrm{Sp}(2n)$. Isso é apenas uma generalização do Lema 3.1. Mais ainda, como B^N e Δ_M são semi-algébricos e o produto cartesiano de conjuntos semi-algébricos é um conjunto semi-algébrico, segue que W^N é semi-algébrico. Pelo Teorema de Whitney, existem subvariedades fechadas $W_1^N,\ldots,W_{k_N}^N \subset E$ tais que

$$W^N = W_1^N\cup\ldots\cup W_{k_N}^N.$$

Da discussão acima, resulta que W^N tem codimensão maior ou igual a 1 em $\Delta_{\mathscr{L}_\omega}$ e portanto, codimensão maior ou igual a $2n+1$ em $\mathscr{L}_\omega$, uma vez que a codimensão de $\Delta_{\mathscr{L}_\omega}$

em $\mathscr{L}_\omega$ é $2n$. Logo, W_λ^N tem codimensão maior ou igual a $2n+1$ em $\mathscr{L}_\omega$, para $\lambda = 1\ldots, k_N$.

Se $F_j(f)$ é transversal a Δ_M e $G_j(f)$ é transversal às subvariedades W_λ^N, então a aplicação $\pi_3 \circ G_j(f) : F_j(f)^{-1}(\Delta_M) \to \mathrm{Sp}(2n)$ é transversal a B^N, onde $\pi_3 : \mathscr{L}_\omega \to \mathrm{Sp}(2n)$ é a projeção na terceira coordenada. Essa última afirmação é simplesmente a condição (ii) da propriedade H2-N.

Um ponto periódico 0-elementar (t,q) de período primo p possuindo um autovalor λ que é uma raíz i-ésima da unidade é tal que $df_t^{pi}(q)$ possui 1 como um de seus autovalores. De fato, se λ é um autovalor de $df_t^p(q)$ que é uma raíz i-ésima da unidade e $v \in T_qM$ é um autovetor, então

$$df_t^{pi}(q)\cdot v = \underbrace{df_t^p(q)\circ\ldots\circ df_t^p(q)}_{i \text{ vezes}}\cdot v = \lambda^i v = v.$$

Mas nesse caso, $F_{pi}(f)$ não é transversal a Δ_M pela Proposição 5.13 e não podemos aplicar os teoremas de transversalidade do Apêndice C. Assim, vamos definir conjuntos $\mathscr{R}^k(p,N) \subset \mathscr{D}^k(p,N)$ pondo

$$\mathscr{R}^k(p,N) = \left\{ f \in \mathrm{Symp}^k(I\times M);\ \begin{array}{l} \text{se } (t,q) \text{ é um ponto de período } j \le p \text{ de } f, \\ \text{então } F_j(f) \pitchfork \Delta_M \text{ e } G_j(f) \pitchfork W_\lambda^N \text{ em } (t,q), \\ \text{para } \lambda = 1,\ldots,k_N. \end{array} \right\}.$$

Fazendo isso estaremos excluindo os casos anteriores onde os autovalores são raízes da unidade. Porém, se mostrarmos que o conjunto $\mathscr{R}^k(p,N)$ é residual, então o conjunto $\mathscr{D}^k(p,N)$ também será residual, visto que ele contém o $\mathscr{R}^k(p,N)$ e $\mathrm{Symp}^k(I\times M)$ com a topologia C^k de Whitney é um espaço de Baire.

Seja V uma subvariedade compacta com bordo de $I \times M$ e considere o conjunto

$$\mathscr{R}^k(p,N,V) = \left\{ f \in \mathrm{Symp}^k(I\times M);\ \begin{array}{l} \text{se } (t,q)\in V \text{ é um ponto de período } j \le p \\ \text{de } f, \text{ então } F_j(f) \pitchfork \Delta_M \text{ e } G_j(f) \pitchfork W_\lambda^N \\ \text{em } (t,q), \text{ para } \lambda = 1,\ldots,k_N. \text{ Mais ainda, se} \\ (t,q)\in \partial V, \text{ então } \partial F_j(f) \pitchfork \Delta_M \text{ em } (t,q). \end{array} \right\},$$

onde $\partial F_j(f) = F_j(f)|_{\partial V}$. Nosso objetivo é provar que o novo conjunto $\mathscr{R}^k(p,N,V)$ é residual (e portanto, denso) em $\mathrm{Symp}(I\times M)$. Então, o Teorema da Densidade Geral resulta dessa versão local quando tomamos uma cobertura $I \times M = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ por compactos $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$. Nesse caso, teremos que

$$\mathscr{R}^k(p,N) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathscr{R}^k(p,N,V_j).$$

Logo, $\mathscr{R}^k(p,N)$ é residual em $\mathrm{Symp}^k(I\times M)$. Pelo mesmo motivo, $\mathscr{R}^k = \bigcap_{p,N\in\mathbb{N}} \mathscr{R}^k(p,N)$ é residual em $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$.

Comecemos a prova fixando N e V e denotando por $\mathscr{R}(p)$ o conjunto $\mathscr{R}^k(p, N, V)$. Considere a distância d em $I \times M$ proveniente de alguma métrica riemanniana e indiquemos também por d a distância

$$d(q, K) = \inf\{d(q, m);\ m \in K\}, \tag{5.5}$$

para $K \in 2_c^{I\times M}$, entre pontos e subconjuntos compactos de $I \times M$ induzida pela distância entre pontos de $I \times M$. Seja $d_{\mathbf{H}}$ a métrica de Hausdorff em $2_c^{I\times M}$. (Ver Definição C.14, Apêndice C.)

Dados $f \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ e $p \in \mathbb{Z}^+$, sejam

$$\Gamma(f, p) = \{(t, q) \in V;\ (t, q) \text{ é um ponto de período} \leq p \text{ de } f\}$$

e

$$C(f, p, \ell) = \left\{(t, q) \in V;\ d((t, q); \Gamma(f, p)) \geq 2^{-\ell}\right\}.$$

Proposição 5.14. *A aplicação* $\zeta : \mathrm{Symp}^k(I \times M) \to 2_c^{I\times M}$ *dada por* $\zeta(f) = \Gamma(f, p)$ *é contínua nos pontos de* $\mathscr{R}(p)$.

Demonstração. De fato, dado $f \in \mathscr{R}(p)$, temos que $F_j(f)|_V \pitchfork \Delta_M$ e $\partial F_j(f) \pitchfork \Delta_M$ pela definição de $R(p)$. Logo, pelo Teorema C.16, a aplicação $\alpha_j : \mathrm{Symp}^k(I \times M) \to 2_c^{I\times M}$ dada por $\alpha_j(x) = F_j(x)^{-1}(\Delta_M) \cap V$ é contínua em f, para todo $j \leq p$. Afirmamos que a aplicação $\alpha : \mathrm{Symp}^k(I \times M) \to 2_c^{I\times M}$ dada por

$$\alpha(x) = \bigcup_{j \leq p} \alpha_j(x)$$

é contínua em $f \in R(p)$. Para ver isso, basta notar que como cada α_j é contínua em f, tomando $\varepsilon > 0$, existem vizinhanças $U_j(f)$ de f em $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$ tais que

$$d_{\mathbf{H}}(\alpha_j(f), \alpha_j(g)) < \varepsilon \tag{5.6}$$

para toda $g \in U_j(f)$.

Seja $U(f) = \bigcap_{j \leq p} U_j(f)$. Dado $g \in U(f)$, pela definição da métrica de Hausdorff (Definição C.14) temos que

$$d_{\mathbf{H}}(\alpha(f), \alpha(g)) = \max\left\{\sup_{(t_1, q_1) \in \alpha(f)} d((t_1, q_1); \alpha(g)),\ \sup_{(t_2, q_2) \in \alpha(g)} d((t_2, q_2); \alpha(f))\right\}.$$

Como $\alpha(f)$ e $\alpha(g)$ são compactos, existem $(\bar{t}_1, \bar{q}_1) \in \alpha(f)$ e $(\bar{t}_2, \bar{q}_2) \in \alpha(g)$ tais que

$$d_{\mathbf{H}}(\alpha(f), \alpha(g)) = \max\left\{d((\bar{t}_1, \bar{q}_1); \alpha(g)), d((\bar{t}_2, \bar{q}_2); \alpha(f))\right\}.$$

Mas $d((\bar{t}_1, \bar{q}_1); \alpha(g)) = \min_{j \le p} d((\bar{t}_1, \bar{q}_1); \alpha_j(g))$ e $d((\bar{t}_2, \bar{q}_2); \alpha(f)) = \min_{i \le p} d((\bar{t}_2, \bar{q}_2); \alpha_i(f))$. Portanto,

$$d_{\mathbf{H}}(\alpha(f), \alpha(g)) = \max\left\{\min_{j \le p} d((\bar{t}_1, \bar{q}_1); \alpha_j(g)), \min_{i \le p} d((\bar{t}_2, \bar{q}_2); \alpha_i(f))\right\}.$$

Agora, observemos que se $(\bar{t}_1, \bar{q}_1) \in \alpha(f)$, então $(\bar{t}_1, \bar{q}_1) \in \alpha_m(f)$, para algum $m \le p$. Assim, por (5.6) temos que

$$\min_{j \le p} d((\bar{t}_1, \bar{q}_1); \alpha_j(g)) \le d((\bar{t}_1, \bar{q}_1); \alpha_m(g)) \le d_{\mathbf{H}}(\alpha_m(f), \alpha_m(g)) < \varepsilon.$$

Pelo mesmo argumento, concluimos que $\min_{i \le p} d((\bar{t}_2, \bar{q}_2); \alpha_i(f)) < \varepsilon$. Portanto,

$$d_{\mathbf{H}}(\alpha(f), \alpha(g)) < \varepsilon$$

e com isso, α é contínua em f.

Finalmente, a definição de α_j nos diz que

$$\alpha_j(x) = \{(t, q) \in V;\ (t, q) \text{ é um ponto de período } j \text{ de } x\}.$$

Dessa forma, temos que $\alpha(x) = \zeta(x)$, para todo $x \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$, e o resultado segue.

□

Sejam $U_1 \subset I \times M$ um subconjunto compacto, U_2 um vizinhança compacta de U_1 em $I \times M$ e $\mathfrak{X}^k(I \times M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^k em $I \times M$. A cada $X \in \mathfrak{X}^k(I \times M)$ associamos de modo natural um campo vetorial dependente do tempo $X_t \in \mathfrak{X}^k(M)$ pondo

$$X_t(p) = (\pi \circ X)(t, q),$$

para cada $(t, q) \in I \times M$, onde $\pi : \mathbb{R} \times T_q M \to T_q M$ é a projeção na segunda componente.

Considere o conjunto

$$\mathscr{B} = \left\{ X \in \mathfrak{X}^k(I \times M);\ \begin{array}{l} X(t, q) = 0, \text{ para } (t, q) \in (I \times M) - U_2, \text{ e} \\ X_t \in \mathfrak{X}^k_H(M), \text{ isto é, } X_t(q) \in T_q H^{-1}(H(q)), \\ \text{para todo } (t, q) \in I \times M. \end{array} \right\}.$$

Pela definição de $\mathscr{B}$, temos que se $X \in \mathscr{B}$, então

$$X(t, q) = (0, X_t(q)),$$

para todo $(t,q) \in I \times M$. Além disso, como todo $X \in \mathscr{B}$ tem suporte compacto, resulta que $\mathscr{B}$ é um espaço de Banach com a topologia induzida pela topologia C^k de Whitney em $\mathfrak{X}^k(I \times M)$. A topologia induzida em $\mathscr{B}$ é a topologia da convergência uniforme nas partes compactas a qual também é induzida pela norma da convergência uniforme.

Seja $\mathfrak{X}^k_\omega(I \times M)$ a álgebra de Lie de $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$. Então, $\mathscr{B} \subset \mathfrak{X}^k_\omega(I \times M)$. De fato, dado $X \in \mathscr{B}$, temos que $\exp(X)(t,q) = (t, f_t(q))$, onde $f_t = \psi^{X_t}_{t,1}$ é a aplicação de tempo um do campo hamiltoniano X_t e portanto, é um difeomorfismo simplético. Logo, $\exp(X) \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ e assim, $X \in \mathfrak{X}^k_\omega(I \times M)$.

Consideremos a aplicação $\varphi_1 : \mathscr{B} \to \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ dada por

$$\varphi_1(X) = \psi^X_1.$$

Então, φ_1 leva campos vetoriais de $\mathscr{B}$ nas aplicações de tempo um dos seus respectivos fluxos. Pela Proposição 4.8, $\mathfrak{X}^k_\omega(I \times M)$ é a álgebra de Lie de $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$ e portanto, φ_1 é simplesmente a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{X}^k_\omega(I \times M) \to \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ restrita ao conjunto $\mathscr{B}$. Logo, φ_1 é de classe C^k.

Seja $f \in \mathscr{R}(p-1)$ tal que f não possua pontos de período $m \leq p-1$ em U_1. Defina a aplicação $K : \mathscr{B} \to \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ por

$$K(X) = \varphi_1(X) \circ f.$$

Então, as aplicações $F_p \circ K : \mathscr{B} \to C^2(I \times M; M \times M)$ e $G_p \circ K : \mathscr{B} \to C^1(I \times M; \mathscr{L}_\omega)$ são representações de classe C^2 e classe C^1, respectivamente. De fato, as aplicações de avaliação $\mathrm{ev}(F_p \circ K) : \mathscr{B} \times (I \times M) \to M \times M$ e $\mathrm{ev}(G_p \circ K) : \mathscr{B} \times (I \times M) \to \mathscr{L}_\omega$ dadas por

$$\mathrm{ev}(F_p \circ K)(X,(t,q)) = (F_p \circ K)(X)(t,q) \quad \text{e} \quad \mathrm{ev}(G_p \circ K)(X,(t,q)) = (G_p \circ K)(X)(t,q)$$

são de classe C^2 e classe C^1, respectivamente, pois K é de classe C^k e F_p e G_p são, respectivamente, de classe C^2 e classe C^1.

Lema 5.15. *A aplicação $\mathrm{ev}(F_p \circ K)$ é transversal a Δ_M numa vizinhança de $\{0\} \times U_1$.*

Demonstração. Como a condição de transversalidade é uma condição aberta pelo Teorema da Extensão (Ver [8], *Extension Theorem*, p. 72), basta provarmos que $\mathrm{ev}(F_p \circ K)$ é transversal a $\{0\} \times U_1$.

Suponha que $F_p(f)(t,q) \in \Delta_M$ e tome um sistema de coordenadas simpléticas locais $(U; x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ em M em torno de q. Seja $\psi : I \times M \to \mathbb{R}$ uma bump function tal que $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq U$ e $\psi|_V \equiv 1$, onde $V \subset U$ é uma pequena vizinhança de (t,q) em U. Sejam também k um número real e $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ uma aplicação $L(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ independente de t e linear nas outras variáveis.

Seja $k\psi L : I \times M \to \mathbb{R}$ a aplicação dada por

$$k\psi L(t,q) = k\psi(t,q)L(t, x_1(q), \ldots, x_n(q), y_1(q), \ldots, y_n(q))$$

e considere o campo hamiltoniano $X_{k\psi L}$ associado à função $k\psi L$. Em coordenadas, $X_{k\psi L}$ é da forma

$$X_{k\psi L} = \sum_{j=1}^{n} k\frac{\partial(\psi L)}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} k\frac{\partial(\psi L)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} = kX_{\psi L}.$$

Agora, seja $\widetilde{X}_{k\psi L} \in \mathfrak{X}^k(I \times M)$ dado por

$$\widetilde{X}_{k\psi L}(t,q) = (0, X_{k\psi L}(q)).$$

Temos que $\widetilde{X}_{k\psi L} \in \mathscr{B}$. Além disso, como $K(\widetilde{X}_{k\psi L}) = \varphi_1(\widetilde{X}_{k\psi L}) \circ f$ e φ_1 é a restrição da aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{X}^k(I \times M) \to \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ ao espaço $\mathscr{B}$, obtemos

$$\frac{d}{dk}\bigg|_{k=0} K(\widetilde{X}_{k\psi L}) = \frac{d}{dk}\bigg|_{k=0} \varphi_1(\widetilde{X}_{k\psi L}) \circ f = \frac{d}{dX}\bigg|_{X=0} \exp(X) \circ \frac{d}{dk}\bigg|_{k=0} \widetilde{X}_{k\psi L} \circ f$$

$$= \widetilde{X}_{\psi L} \circ f = (0, X_{\psi L} \circ f_t),$$

pois $\displaystyle\frac{d}{dX}\bigg|_{X=0} \exp(X) = \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$ e $\widetilde{X}_{k\psi L} = k\widetilde{X}_{\psi L}$ no sistema de coordenadas. Logo,

$$\frac{d}{dk}\bigg|_{k=0} (F_p \circ K)(\widetilde{X}_{k\psi L})(t,q) = \partial_f F_p(f)(t,q) \circ \frac{d}{dk}\bigg|_{k=0} K(\widetilde{X}_{k\psi L})(t,q),$$

onde $\partial_f F_p(f)(t,q)$ é a derivada parcial de F_p em relação a f.

Fazendo L assumir as aplicações lineares

$$L_j(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = x_j \qquad \text{e} \qquad L_{j+n}(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = y_j,$$

temos que os vetores $X_{L_1}(t,q), \ldots, X_{L_{2n}}(t,q)$ formam um base de T_qM. Logo, temos que $d\,\mathrm{ev}(F_p \circ K)(0,(t,q)) \cdot T_{(0,(t,q))}(\mathscr{B} \times (I \times M)) \supseteq \{0\} \times T_qM$ e assim,

$$d\,\mathrm{ev}(F_p \circ K)(0,(t,q)) \cdot T_{(0,(t,q))}(\mathscr{B} \times (I \times M)) + T_{(q,q)}\Delta_M = T_{(q,q)}(M \times M) \cong T_qM \times T_qM.$$

Portanto, $\mathrm{ev}(F_p \circ K)$ é transversal a Δ_M.

□

Lema 5.16. *A aplicação* $\mathrm{ev}(G_p \circ K)$ *é transversal a cada* W^N_λ *numa vizinhança de* $\{0\} \times U_1$.

Demonstração. Suponha que $G_p(f)(t,q) \in W^N_\lambda$. Defina o campo vetorial $\widetilde{X}_{k\psi L}$ como no Lema 5.15, onde agora L é função quadrática homogênea em $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Como antes, temos que $X_{k\psi L} = kX_{\psi L}$ em coordenadas locais. Assim,

$$dX_{k\psi L} = k \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial y_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial y_n \partial y_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial y_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial y_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial y_n} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial y_n \partial y_n} \\ 0 & -\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & -\frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial^2 L}{\partial y_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & -\frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_n} & -\frac{\partial^2 L}{\partial y_1 \partial x_n} & \cdots & -\frac{\partial^2 L}{\partial y_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

A submatriz $2n \times 2n$ formada pela derivadas parciais de segunda ordem de L é hamiltoniana pela caracterização feita no Exemplo 1.15. Mais ainda, fazendo L variar no conjunto das funções quadráticas homogêneas, a submatriz varia no conjunto das matrizes hamiltonianas.

Agora,

$$d(K(\widetilde{X}_{k\psi L}))(t,q) = d\varphi_1(X)(f(t,q)) \circ df(t,q) = \exp(d\widetilde{X}_{k\psi L}(f(t,q))) \circ df(t,q).$$

Tomando a derivada da expressão acima em relação k quando $k = 0$, obtemos

$$\left.\frac{d}{dk}\right|_{k=0} d(K(\widetilde{X}_{k\psi L}))(t,q) = \left.\frac{d}{dk}\right|_{k=0} \exp(d\widetilde{X}_{k\psi L}(f(t,q))) \circ df(t,q) =$$

$$= \left.\frac{d}{dY}\right|_{Y=0} \exp(Y) \circ d\widetilde{X}_{\psi L} \circ df(t,q) = d\widetilde{X}_{\psi L} \circ df(t,q).$$

Fazendo L assumir as formas quadráticas $L_{ij} = x_i x_j$, $L_{i(j+n)} = x_i y_j$, $L_{(i+n)j} = y_i x_j$ e $L_{(i+n)(j+n)} = y_i y_j$, temos que $d\widetilde{X}_L$ percorre uma base de $\mathrm{sp}(2n)$.

Notando que $\mathrm{ev}(G_p \circ K)(0,(t,q)) = ((t,q),\mathbf{I})$, temos que

$$d\,\mathrm{ev}(G_p \circ K)(0,(t,q)) \cdot T_{(0,(t,q))}(\mathscr{B} \times (I \times M)) \supset \{0\} \times \mathrm{sp}(2n).$$

Finalmente, do Lema 5.15 segue que

$$d\,\mathrm{ev}(G_p \circ K)(0,(t,q)) \cdot T_{(0,(t,q))}(\mathscr{B} \times (I \times M)) + T_{((q,q),\mathbf{I})} W_\lambda^N = T_{((q,q),\mathbf{I})} E.$$

Portanto, $\mathrm{ev}(G_p \circ K)$ é transversal a W_λ^N.

□

A próxima proposição nos dá um critério local para a densidade de subconjuntos em

$\mathrm{Symp}^k(I \times M)$.

Proposição 5.17. *Seja $f \in \mathscr{R}(p-1)$, $U_1 \subset I \times M$ um subconjunto compacto tal que f não tenha pontos de período $m \leq p-1$ em U_1 e $V \subset I \times M$ uma subvariedade compacta com bordo. Então, se $\mathscr{R}(p-1)$ é residual em $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$, existe uma vizinhança $U(f) \subset \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ de f tal que o conjunto*

$$\mathscr{R}(f) = \left\{ g \in U(f);\ \begin{array}{l} F_p(g) \pitchfork \Delta_M,\ \partial F_p(g) \pitchfork \Delta_M \text{ e} \\ G_p(g) \pitchfork W_\lambda^N, \text{ para } \lambda = 1, \ldots, k_N, \text{ nos} \\ \text{pontos de } U_1. \end{array} \right\}$$

é residual em $U(f)$.

Demonstração. Considere as aplicações de avaliação $\mathrm{ev}(F_p \circ K)$ e $\mathrm{ev}(G_p \circ K)$.

Pelos Lemas 5.15 e 5.16, $\mathrm{ev}(F_p \circ K)$ é transversal a Δ_M e $\mathrm{ev}(G_p \circ K)$ é transversal a cada W_λ^N, numa vizinhança de $\{0\} \times U_1$. Tomando $\mathcal{D} = \mathscr{R}(p-1)$ na Definição C.8, resulta que $F_p \circ K$ é C^2 pseudotransversal a Δ_M e $G_p \circ K$ é C^1 pseudotransversal às subvariedades W_λ^N. Pelo Teorema C.13, o conjunto

$$\mathcal{Z} = \left\{ X \in \mathscr{B};\ \begin{array}{l} (F_p \circ K)(X) \pitchfork \Delta_M,\ \partial(F_p \circ K)(X) \pitchfork \Delta_M \text{ e} \\ \partial(G_p \circ K)(X) \pitchfork W_\lambda^N, \text{ para } \lambda = 1, \ldots, k_N, \\ \text{nos pontos de } U_1. \end{array} \right\}$$

é aberto e denso em uma vizinhança de 0 em $\mathscr{B}$. Como $\exp : \mathfrak{X}_\omega^k(I \times M) \to \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ é um difeomorfismo numa vizinhança de $0 \in \mathfrak{X}_\omega^k(I \times M)$, existe uma vizinhança $U(f) \subset \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ de f tal que $K(\mathcal{Z}) \cap U(f)$ é residual em $U(f)$. Finalmente, temos que $K(\mathcal{Z}) \cap U(f) \subset \mathscr{R}(f)$ e portanto, $\mathscr{R}(f)$ é residual em $U(f)$.

□

Provaremos agora o resultado principal e que completa a demonstração do Teorema da Densidade Geral:

Proposição 5.18. *O conjunto $\mathscr{R}(p)$ é residual em $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$, para todo $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em p.

No caso $p = 1$, aplicaremos a Proposição 5.17 substituindo o conjunto $\mathscr{R}(p-1)$ e a hipótese de residualidade sobre ele pelo conjunto $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$. Nesse caso, a condição de residualidade é satisfeita trivialmente e não é difícil verificar que a Proposição 5.17 contínua válida com essas alterações. Assim, para cada $f \in \mathrm{Symp}^k(I \times M)$ temos que o conjunto

$$\mathscr{R}_1(f) = \left\{ g \in U(f);\ \begin{array}{l} F_1(g) \pitchfork \Delta_M,\ \partial F_1(g) \pitchfork \Delta_M \text{ e} \\ G_1(g) \pitchfork W_\lambda^N, \text{ para } \lambda = 1, \ldots, k_N, \text{ nos} \\ \text{pontos de } V. \end{array} \right\}$$

é residual em $U(f)$, onde $U(f)$ é uma vizinhança de f em $\mathrm{Symp}^k(I\times M)$. Mas, pela definição de $\mathscr{R}_1(f)$, é fácil ver que

$$\mathscr{R}(1) = \bigcup_{f\in \mathrm{Symp}^k(I\times M)} \mathscr{R}_1(f)$$

e como $\mathrm{Symp}^k(I\times M)$ é residual em si mesmo, segue que $\mathscr{R}(1)$ é residual em $\mathrm{Symp}^k(I\times M)$.

Suponha que o resultado foi provado para o número natural $p-1$ e $\mathscr{R}(p-1)$ é residual. Dado $f\in\mathscr{R}(p-1)$, pela Proposição 5.14 existe uma vizinhança $U(f)$ de f em $\mathrm{Symp}^k(I\times M)$ tal que $d(\Gamma(f,p-1);\Gamma(g,p-1))\le 2^{-(\ell+1)}$, para toda $g\in U(f)$. Seja

$$R(f,p,\ell) = \left\{ g\in U(f);\ \begin{array}{l} F_p(g) \ \pitchfork\ \Delta_M,\ \partial F_p(g)\ \pitchfork\ \Delta_M \text{ e} \\ G_p(g) \pitchfork W_\lambda^N, \text{ para } \lambda = 1,\dots,k_N, \text{ nos} \\ \text{pontos de } C(f,p-1,\ell). \end{array} \right\}.$$

Pelo item (a) do Teorema C.13 e pela Proposição 5.17, $R(f,p,\ell)$ é aberto e denso em $U(f)$. Sejam

$$R(p,\ell) = \bigcup_{f\in\mathscr{R}(p-1)} R(f,p,\ell)$$

e

$$R^*(p) = \left(\bigcap_{\ell\in\mathbb{Z}^+} R(p,\ell)\right)\cap\mathscr{R}(p-1).$$

Pela hipótese de indução, $\mathscr{R}(p-1)$ é residual e portanto, $R(p,\ell)$ é aberto e denso e $R^*(p)$ é residual em $\mathrm{Symp}^k(I\times M)$.

Agora, sejam $g\in U(f)$ e $(t,q)\in C(g,p-1,j)$. Então,

$$2^{-\ell}\le d((t,q);\Gamma(g,p-1))\le d((t,q);\Gamma(f,p-1)) + d(\Gamma(f,p-1);\Gamma(g,p-1))$$

$$\le d((t,q);\Gamma(p,f)) + 2^{-(\ell+1)}.$$

Logo, $d((t,q);\Gamma(f,p-1))\ge 2^{-(\ell+1)}$ e assim, $(t,q)\in C(f,p-1,\ell+1)$. Portanto, temos que $C(g,p-1,\ell)\subset C(f,p-1,\ell+1)$. Logo, $R(p,\ell+1)\subset\mathscr{R}(p,\ell)$, onde

$$\mathscr{R}(p,\ell) = \left\{ g\in \mathrm{Symp}^k(I\times M);\ \begin{array}{l} F_p(g) \ \pitchfork\ \Delta_M,\ \partial F_p(g)\ \pitchfork\ \Delta_M \text{ e} \\ G_p(g) \pitchfork W_\lambda^N, \text{ para } \lambda = 1,\dots,k_N, \text{ nos} \\ \text{pontos de } C(g,p-1,\ell). \end{array} \right\}.$$

Resulta que

$$R^*(p) = \left(\bigcap_{\ell\in\mathbb{Z}^+} R(p,\ell+1)\right)\cap\mathscr{R}(p-1)\subseteq \left(\bigcap_{\ell\in\mathbb{Z}^+} \mathscr{R}(p,\ell)\right)\cap\mathscr{R}(p-1) = \mathscr{R}(p).$$

Assim $\mathscr{R}(p)$ contém a interseção de dois conjuntos residuais, e portanto, é residual em $\mathrm{Symp}^k(I \times M)$.

$\square$

Apêndice A

Complexificação de espaços vetoriais

No que se segue, uma aplicação $f : V \to V$ do espaço vetorial V é $\mathbb{R}$-linear se ela é linear em relação à multiplicação por escalar de números reais em V. Nos mesmos termos, diremos que a aplicação f é $\mathbb{C}$-linear se ela for linear em relação à multiplicação por escalar de números complexos em V.

Definição A.1. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo. Uma **forma real** em $\mathcal{V}$ é um subespaço $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ tal que

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus i\mathcal{V}_0.$$

Definição A.2. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. A **complexificação de** V é um par $(V^{\mathbb{C}}, \psi)$, onde $V^{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial complexo e $\psi : V \to V^{\mathbb{C}}$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear injetiva na qual a imagem $\mathcal{V}_0 = \psi(V)$ é uma forma real em $V^{\mathbb{C}}$.

Dada uma complexificação $(V^{\mathbb{C}}, \psi)$ de um espaço vetorial V, a multiplicação por um número complexo fica, então, definida da seguinte maneira:

$$(a + bi) \cdot (u + iv) = (au - bv) + i(bu + av),$$

onde $a + bi \in \mathbb{C}$ e $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathcal{V}_0 = \psi(V)$.

Um dos principais resultados sobre complexificação de espaços vetoriais é a proposição seguinte da qual resulta um corolário que nos diz que, a menos de isomorfismo, existe uma única complexificação de um espaço vetorial V.

Proposição A.3. *Seja V um espaço vetorial real, $(V^{\mathbb{C}}, \psi)$ uma complexificação de V e W um espaço vetorial complexo. Então, dada uma aplicação $\mathbb{R}$-linear $f : V \to W$ existe uma única aplicação $\mathbb{C}$-linear $\widetilde{f} : V^{\mathbb{C}} \to W$ tal que o diagrama a seguir é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} V^{\mathbb{C}} \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ V \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

Em particular, se f é injetora, então $\widetilde{f}$ é um isomorfismo sobre sua imagem.

Demonstração. Como $(V^{\mathbb{C}}, \psi)$ é uma complexificação de V, temos que ψ é um isomorfismo linear sobre sua imagem e $V^{\mathbb{C}} = \mathcal{V}_0 \oplus i\mathcal{V}_0$, onde $\mathcal{V}_0 = \psi(V)$. Assim, definiremos a aplicação $\widetilde{f}$ da seguinte maneira: para todo $u + iv \in \mathcal{V}_0 \oplus i\mathcal{V}_0 = V^{\mathbb{C}}$, colocamos

$$\widetilde{f}(u + iv) = f(\psi^{-1}(u)) + if(\psi^{-1}(v)).$$

Notemos que $\widetilde{f}$ está bem definida. Para ver isso, sejam $u_1 + iv_1 = u_2 + iv_2$. Então, $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$ e

$$\widetilde{f}(u_1 + v_1) = f(\psi^{-1}(u_1)) + if(\psi^{-1}(v_1)) = f(\psi^{-1}(u_2)) + if(\psi^{-1}(v_2)) = \widetilde{f}(u_2 + iv_2).$$

Além disso, $\widetilde{f}$ é $\mathbb{C}$-linear. De fato, dados $u_1 + iv_1$, $u_2 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}}$ temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}((u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2)) &= \widetilde{f}((u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2)) \\
&= f(\psi^{-1}(u_1 + u_2)) + if(\psi^{-1}(v_1 + v_2)) \\
&= f(\psi^{-1}(u_1) + \psi^{-1}(u_2)) + if(\psi^{-1}(v_1) + \psi^{-1}(v_2)) \\
&= f(\psi^{-1}(u_1)) + f(\psi^{-1}(u_2)) + if(\psi^{-1}(v_1)) + if(\psi^{-1}(v_2)) \\
&= [f(\psi^{-1}(u_1)) + if(\psi^{-1}(v_1))] + [f(\psi^{-1}(u_2)) + if(\psi^{-1}(v_2))] \\
&= \widetilde{f}(u_1 + iv_1) + \widetilde{f}(u_2 + iv_2)
\end{aligned}$$

Sejam $a + bi \in \mathbb{C}$ e $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}((a + bi)(u + iv)) &= \widetilde{f}((au - bv) + i(bu + av)) \\
&= f(\psi^{-1}(au - bv)) + if(\psi^{-1}(bu + av)) \\
&= f(a\psi^{-1}(u) - b\psi^{-1}(v)) + if(b\psi^{-1}(u) + a\psi^{-1}(v)) \\
&= af(\psi^{-1}(u)) - bf(\psi^{-1}(v)) + bif(\psi^{-1}(u)) + aif(\psi^{-1}(v)) \\
&= af(\psi^{-1}(u)) + bi^2 f(\psi^{-1}(v)) + bif(\psi^{-1}(u)) + aif(\psi^{-1}(v)) \\
&= a[f(\psi^{-1}(u)) + if(\psi^{-1}(v))] + bi[f(\psi^{-1}(u)) + if(\psi^{-1}(v))] \\
&= a\widetilde{f}(u + iv) + bi\widetilde{f}(u + iv) \\
&= (a + bi)\widetilde{f}(u + iv),
\end{aligned}$$

onde todas as passagem se justificam pelo fato de f e $\psi^{-1} : \mathcal{V}_0 \to V$ serem $\mathbb{R}$-lineares. Portanto, $\widetilde{f}$ é $\mathbb{C}$-linear.

Dado $u \in V$, temos

$$\widetilde{f}(\psi(u)) = \widetilde{f}(\psi(u) + i0) = \widetilde{f}(\psi(u) + i\psi(0))$$

$$= f(\psi^{-1}(\psi(u))) + if(\psi^{-1}(\psi(0))) = f(u) + if(0) = f(u).$$

Isso mostra que o diagrama é comutativo.

Finalmente, para mostrar a unicidade, seja $g : V^{\mathbb{C}} \to W$ uma aplicação satisfazendo as condições da proposição. Então, g é $\mathbb{C}$-linear e para todo $u \in V$ temos que

$$(g \circ \psi)(u) = f(u) = (\widetilde{f} \circ \psi)(u),$$

ou seja, $(g - \widetilde{f})(\psi(u)) = 0$ para todo $u \in V$. Como ψ é um isomorfismo sobre $\mathcal{V}_0$, segue que $(g - \widetilde{f})(v) = 0$ para todo $v \in \mathcal{V}_0$. Mas, $V^{\mathbb{C}} = \mathcal{V}_0 \oplus i\mathcal{V}_0$. Logo, como $g - \widetilde{f}$ é $\mathbb{C}$-linear, obtemos

$$(g - \widetilde{f})(u + iv) = (g - \widetilde{f})(u) + i(g - \widetilde{f})(v) = 0,$$

para todo $u + iv \in V^{\mathbb{C}} = \mathcal{V}_0 \oplus i\mathcal{V}_0$. Portanto, $g - \widetilde{f} = 0$ e assim, $g = \widetilde{f}$.

□

Corolário A.4. *Sejam $(V_1^{\mathbb{C}}, \psi_1)$ e $(V_2^{\mathbb{C}}, \psi_2)$ complexificações de um espaço vetorial V. Então, existe um único isomorfismo $\mathbb{C}$-linear $\phi : V_1^{\mathbb{C}} \to V_2^{\mathbb{C}}$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} V_1^{\mathbb{C}} \arrow[rr, "\phi"] & & V_2^{\mathbb{C}} \\ & V \arrow[ul, "\psi_1"] \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Pela proposição anterior, existe uma única aplicação $\mathbb{C}$-linear $\phi : V_1^{\mathbb{C}} \to V_2^{\mathbb{C}}$ tal que o diagrama acima é comutativo. Mais ainda, como ψ_2 é injetora, segue que ϕ é um isomorfismo sobre sua imagem. Mas, sendo $\psi_1(V) = \mathcal{V}_1$, temos que

$$\phi(V_1^{\mathbb{C}}) = \phi(\mathcal{V}_1 \oplus i\mathcal{V}_1) = \psi_2(\psi_1^{-1}(\mathcal{V}_1)) \oplus i\psi_2(\psi_1^{-1}(\mathcal{V}_1)) = \psi_2(V) \oplus i\psi_2(V) = V_2^{\mathbb{C}}.$$

Logo, ϕ é um isomorfismo entre $V_1^{\mathbb{C}}$ e $V_2^{\mathbb{C}}$. □

Pelo Corolário A.1, segue existe apenas uma complexificação, a menos de isomorfismo, de um espaço vetorial V. Assim, consideremos o espaço vetorial complexo $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ e aplicação de inclusão $i : V \to V^{\mathbb{C}}$. Então, o par $(V^{\mathbb{C}}, i)$ é uma complexificação de V chamada de **complexificação canônica** de V.

A partir de agora, quando nos referirmos a uma complexificação de V estaremos nos referindo à complexificação canônica.

Exemplo A.5. Seja $V = \mathbb{R}^{2n}$. Então, a complexificação de $\mathbb{R}^{2n}$ é o espaço

$$\left(\mathbb{R}^{2n}\right)^{\mathbb{C}} = \mathbb{R}^{2n} \oplus i\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^{2n},$$

das $2n$-uplas de números complexos.

Definição A.6. Seja V um espaço vetorial, $V^{\mathbb{C}}$ a complexificação de V e $\Phi : V \to V$ um transformação linear de V. Definimos a **complexificação de** Φ com sendo a transformação linear $\Phi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ definida por

$$\Phi^{\mathbb{C}}(u + iv) = \Phi(u) + i\Phi(v),$$

onde $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$.

Da mesma forma, se $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ é forma bilinear em V, então a **complexificação de** ω é definida com sendo a forma bilinear $\omega^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\omega^{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = [\omega(u_1, u_2) - \omega(v_1, v_2)] + i\,[\omega(u_1, v_2) + \omega(v_1, u_2)]\,,$$

onde $u_1 + iv_1, u_2 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}}$.

A proposição seguinte mostra que a maioria das características relevantes de transformações lineares e formas bilineares são preservadas sob a operação de complexificação.

Proposição A.7. *Sejam V um espaço vetorial, $\Phi, \Psi : V \to V$ transformações lineares, $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ um forma bilinear sobre V e $V^{\mathbb{C}}$ sua complexificação. Nessas condições, temos*

(i) $(\Phi \circ \Psi)^{\mathbb{C}} = \Phi^{\mathbb{C}} \circ \Psi^{\mathbb{C}}$;

(ii) *se ω é simétrica, então $\omega^{\mathbb{C}}$ é simétrica;*

(iii) *se ω é alternada, então $\omega^{\mathbb{C}}$ é alternada;*

(iv) *se (V, ω) é um espaço vetorial simplético, então $(V^{\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}})$ também é um espaço vetorial simplético;*

(v) *se $\Phi : (V, \omega) \to (V, \omega)$ é simplética, então $\Phi^{\mathbb{C}} : (V^{\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}}) \to (V^{\mathbb{C}}, \omega^{\mathbb{C}})$ também é simplética.*

Demonstração. Os item (i), (ii) e (iii) decorrem diretamente da Definição A.3.

(iv) Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Então, ω é alternada e não-degenerada. Pelo item (iii), segue que $\omega^{\mathbb{C}}$ é alternada. Resta provar que $\omega^{\mathbb{C}}$ é não-degenerada.

Sejam $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ uma base simplética de V e $u + iv \in V^{\mathbb{C}}$ tal que $\omega^{\mathbb{C}}(u+iv, u_1+iv_1) = 0$, para todo $u_1+iv_1 \in V^{\mathbb{C}}$. Então, tomando em particular, $e_j, f_j \in V^{\mathbb{C}}$, obtemos da Definição A.3 que

$$0 = \omega^{\mathbb{C}}(u + iv, e_j) = \omega(u, e_j) + i\omega(v, e_j) = -u_{j+n} - iv_{j+n},$$

$$0 = \omega^{\mathbb{C}}(u + iv, f_j) = \omega(u, f_j) + i\omega(v, f_j) = u_j + iv_j,$$

para todo $j = 1, \ldots, n$, onde os u_j e v_j são as coordenadas de u e v, respectivamente, na base simplética. Assim, obtemos que $u_k = v_k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, 2n$, ou seja, $u + iv = 0$. Logo, $\omega^{\mathbb{C}}$ é não-degenerada e portanto, é uma forma simplética em $V^{\mathbb{C}}$.

(v) Seja (V, ω) um espaço simplético e $\Phi : V \to V$ uma transformação linear simplética, ou seja, vale $\omega(\Phi u, \Phi v) = \omega(u, v)$ para todo $u, v \in V$. Dados, $u_1 + iv_1, u_2 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}}$, temos

$$\begin{aligned}
\omega^{\mathbb{C}}(\Phi^{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1), \Phi^{\mathbb{C}}(u_2 + iv_2)) &= \omega^{\mathbb{C}}(\Phi u_1 + i\Phi v_1, \Phi u_2 + i\Phi v_2) \\
&= \omega(\Phi u_1, \Phi u_2) - \omega(\Phi v_1, \Phi v_2) + i\,[\omega(\Phi u_1, \Phi v_2) + \omega(\Phi v_1, \Phi u_2)] \\
&= \omega(u_1, u_2) - \omega(v_1, v_2) + i\,[\omega(u_1, v_2) + \omega(v_1, u_2)] \\
&= \omega^{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2),
\end{aligned}$$

e portanto, $\Phi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ é uma transformação linear simplética.

□

Consideremos agora uma transformação linear $\Phi : V \to V$ com autovalor complexo λ e V_λ o seu autoespaço real. Indiquemos com $V_\lambda^{\mathbb{C}} \subseteq V^{\mathbb{C}}$ o autoespaço complexo de λ. Mostraremos agora que $V_\lambda^{\mathbb{C}} = V_\lambda \oplus iV_\lambda$, isto é, $V_\lambda^{\mathbb{C}}$ é , de fato, a complexificação do subespaço V_λ.

Proposição A.8. *Sejam $\Phi : V \to V$ uma transformação linear com autovalor complexo $\lambda = a + bi$, com $b \neq 0$, e V_λ o seu autoespaço real. Se $V_\lambda^{\mathbb{C}}$ é o autoespaço complexo de λ, então $V_\lambda^{\mathbb{C}} = V_\lambda \oplus iV_\lambda$, isto é, $V_\lambda^{\mathbb{C}}$ é a complexificação de V_λ.*

Apêndice B

Noções da teoria de variedades

Faremos nesse apêndice um resumo dos principais conceitos e resultados sobre a teoria de variedades diferenciáveis que precisaremos para estabelecer a teoria de variedades simpléticas. Para uma exposição mais detalhada sobre os assuntos tratados aqui, ver [1], [18], [19] e [5].

B.1 Fibrados em uma variedade

Comecemos com uma variedade diferenciável M^n de dimensão n e um sistema de coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ centrado em $p \in M$. O **espaço vetorial tangente** a M no ponto p é o conjunto T_pM de todas as derivações $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ no ponto p, da forma

$$v(f) = \sum_{j=1}^{n} v_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p f,$$

onde $C^\infty(M)$ é o conjunto de todas as funções $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Lembremos que uma **derivação em** p, $D_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, é um funcional linear que satisfaz a condição adicional de que $D_p(fg) = D_p(f)g(p) + f(p)D_p(g)$ quaisquer que sejam $f, g \in C^\infty(M)$. O conjunto $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$ é uma base de T_pM.

Dado o espaço vetorial tangente T_pM à variedade M no ponto p, definimos o **espaço vetorial cotangente** T_p^*M como sendo o dual do espaço tangente T_pM:

$$T_p^*M = (T_pM)^*.$$

O **fibrado tangente** da variedade M é conjunto TM formado pela união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M:

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM.$$

Embora os elementos de TM sejam vetores da forma $v = \sum_{j=1}^{n} v_j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$, normalmente os indicamos por pares ordenados (p, v), onde $p \in M$ e $v \in T_pM$. Essa notação permite definir de forma natural uma projeção $\pi : TM \to M$, que associa cada vetor de T_pM ao ponto base $p \in M$ do espaço tangente, isto é, $\pi(p, v) = p$.

Dado um sistema de coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ centrado em p, é possível mostrar que este induz em TM um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ em TM, dando ao mesmo uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$. (Ver [18], Proposição 3.18, p. 66.)

Da mesma forma, definimos o **fibrado cotangente** da variedade M como sendo o conjunto T^*M formado pela união disjunta dos espaços cotangentes T_p^*M em todos os pontos de M:

$$T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M.$$

Os elementos de T^*M são os pares ordenados (p, φ), onde $p \in M$ e $\varphi \in T_p^*M$. O fibrado cotangente também admite uma projeção natural $\pi^* : T^*M \to M$ dada por $\pi^*(p, \varphi) = p$. Um elemento de T^*M também é chamado de **tensor covariante de ordem** 1.

Seja $p \in M$ e consideremos a operação $\otimes$ de produto tensorial definida por

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in T_pM,$$

onde $\varphi_1, \varphi_2 \in T_p^*M$. Os elementos $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ geram um espaço vetorial, denotado por $T_p^*M \otimes T_p^*M$ ou $T^2(T_p^*M)$, e chamado de **produto tensorial de ordem** 2 sobre M. Os elementos de $T^2(T_p^*M)$ são chamados de **tensores covariantes de ordem** 2. Dada a base dual $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ de T_p^*M, o conjunto $\{dx_i \otimes dx_j\}_{1 \le i,j \le n}$ é uma base de $T^2(T_p^*M)$.

O **fibrado tensorial de ordem** 2 sobre M é definido como sendo o conjunto $T^2(T^*M)$ formado pela união disjunta dos produtos tensoriais de ordem 2 em todos os pontos de M:

$$T^2(T^*M) = \coprod_{p \in M} T^2(T_p^*M).$$

Em $T^2(T^*M)$ também definimos a projeção $\pi^{**} : T^2(T^*M) \to M$ dada por $\pi^{**}(p, \omega) = p$, onde $(p, \omega) \in T^2(T^*M)$, com $\omega \in T^2(T_p^*M)$.

Observemos que em todos fibrados definidos na variedade M todos têm em comum uma projeção natural π e o fato de que a imagem inversa $\pi^{-1}(p)$ da projeção natural por um ponto de M é um espaço vetorial. Em geral, temos a seguinte definição:

Definição B.1. Seja M um espaço topológico. Um **fibrado vetorial real de ordem** k sobre M é um espaço topológico E com uma aplicação sobrejetora $\pi : E \to M$ satasfazendo as seguintes condições:

(i) Para todo $p \in M$, a fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão k;

(ii) Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subseteq M$ de p e um homeomorfismo $\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (chamado de **trivialização local de** E **sobre** U) tal que:

- $\pi_U \circ \Psi = \pi$, onde $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \to U$ é a projeção na primeira coordenada;
- Para cada $p \in U$, a restrição de $\Psi|_{E_p}$ é um isomorfismo linear entre E_p e $\{p\} \times \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^k$.

O espaço E é chamado de **espaço total** do fibrado vetorial, M é chamado de **base** e π é a **projeção**. Em geral, denota-se o fibrado vetorial pela notação de função $\pi : E \to M$ ou simplesmente por $E \to M$.

Se M é uma variedade diferenciável, então diremos que o fibrado $\pi : E \to M$ é de classe C^∞ se π e a trivialização local Ψ são aplicações de classe C^∞. Consideraremos apenas este caso.

Um **subfibrado** de E é um subespaço topológico $F \subseteq E$ tal que existe uma projeção natural de F em M dada pela restrição $\pi_F = \pi|_F : F \to M$ da projeção de E e o conjunto $\pi_F^{-1}(p) = F \cap \pi^{-1}(q)$ é um subespaço vetorial de $\pi^{-1}(p)$, para todo $p \in M$.

Uma **seção** de E é uma aplicação diferenciável $\sigma : M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Isso significa que, dado $p \in M$, $\sigma(p)$ é um elemento do espaço vetorial $\pi^{-1}(p)$. O conjunto das seções de E será denotado por $\Gamma(E)$.

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to M$, existe uma inclusão natural $i : M \hookrightarrow E$ dada por $i(p) = (p, 0)$. O conjunto $E_0 = i(M)$ é chamado de **seção zero** do fibrado vetorial E.

B.2 Campos vetoriais

Um **campo vetorial de classe** C^k em M é uma seção C^k do fibrado tangente, ou seja, é uma aplicação de classe C^k, $X : M \to TM$, que associa a cada $q \in M$ um vetor $X(q) \in T_qM$ e que satisfaz a condição $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, onde π é a projeção do fibrado tangente. Dado um sistema de coordenadas locais $(U; x_1, \ldots, x_n)$, um campo vetorial X é uma aplicação da

forma
$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p ,$$
para todo $p \in M$. Isso define funções $X_i : U \subseteq M \to \mathbb{R}$ de classe C^k chamadas de **funções-coordenada** do campo vetorial X na carta local $(U; x_1, \ldots, x_n)$.

O conjunto de todos os campos vetoriais $X : M \to TM$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções de classe C^∞ em M, o qual denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

Sejam M^m, N^n duas variedades, $f : M \to N$ uma função diferenciável e $X : M \to TM$ um campo vetorial em M. Se existir um campo vetorial $Y : N \to TN$ tal que $Y_{f(p)} = df(p)(X_p)$ para todo $p \in M$, dizemos que os campos X e Y estão relacionados pela função f ou que são **f-relacionados**. Quando f é um difeomorfismo, o campo Y existe e é único.

Sejam $(x_1 \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais, $f \in C^\infty(M)$ e $X : M \to TM$ um campo vetorial de classe C^∞ em M. Então, a ação de X sobre f nos dá uma nova função $Xf \in C^\infty(M)$ definida por
$$Xf(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df(p) \cdot X(p),$$
para todo $p \in M$. Dessa forma, o campo X pode ser visto como uma aplicação de $C^\infty(M)$ em $C^\infty(M)$, a qual satisfaz a condição
$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$
para todo $f, g \in C^\infty(M)$. Ou seja, X é uma **derivação global**[1] em $C^\infty(M)$.

Dados dois campos vetoriais $X, Y : M \to TM$, obtemos um aplicação $XY : M \to TM$ através da igualdade $XYf = X(Yf)$, para toda $f \in C^\infty(M)$. Em geral, XY não é um campo vetorial de M, mas podemos obter um novo campo vetorial a partir de X e Y, o qual denotamos por $[X, Y]$, através da expressão
$$[X, Y] = XY - YX.$$
Esse novo campo vetorial é chamado de **colchete de Lie** dos campos X e Y.

O colchete de Lie entre dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mede a comutatividade entre X e Y. É claro que, se X e Y comutam, então $[X, Y] = 0$. Nesse caso, $XY : M \to TM$ determina um campo vetorial em M.

[1]Diferente de uma derivação em um ponto p, que associa uma função $f \in C^\infty(M)$ a um número real.

Sejam M, N variedades diferenciáveis, $\psi : M \to N$ um difeomorfismo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Definimos o **pull-back** de Y pelo difeomorfismo ψ como sendo o campo vetorial $\psi^*Y : M \to TM$ dado por

$$\psi^*Y(p) = d\psi^{-1}(\psi(p)) \cdot Y(\psi(p)), \quad \forall p \in M \tag{B.1}$$

Da mesma forma, definimos o **push-forward** de X pelo difeomorfismo ψ como sendo o campo vetorial $\psi_*X : N \to TN$ dado por

$$\psi_*X(p) = d\psi(\psi^{-1}(p)) \cdot X(\psi^{-1}(p)), \quad \forall p \in N \tag{B.2}$$

B.2.1 Curvas integrais e fluxo

Associado a todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ em uma variedade M, estão os conceitos de curva integral e fluxo, os quais definiremos agora.

Um caminho $\gamma : \mathbb{R} \to M$ é uma **curva integral** de X no ponto $p_0 \in M$ se satisfaz as condições

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \ \forall t \in \mathbb{R} \\ \gamma(0) = p_0 \end{cases} \tag{B.3}$$

Dado um sistema de coordenadas locais $(U; x_1, \ldots, x_n)$ centrado em p_0, sejam $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ e $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ nesse sistema. Então, localmente a equação (B.3) se traduz por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = X_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \\ \qquad \vdots \\ \dot{\gamma}_n = X_n(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \end{cases} \tag{B.4}$$

Assim, as curvas integrais são locamente obtidas como soluções de uma EDO de primeira ordem, as quais sempre existem pois X é de classe C^∞.

Geometricamente, as curvas integrais descrevem a evolução de uma partícula na variedade M, a princípio fixada no ponto p_0 em $t = 0$, com o passar do tempo pela ação do campo X. Podemos então pensar no comportamento da variedade M inteira na presença de X, isto é, como a variedade M "flui" no tempo pela ação de X. Isso nos dá a idéia de fluxo de campos vetoriais.

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial em M. O **fluxo** de X é uma aplicação $\psi : \mathbb{R} \times M \to M$

tal que $\psi(t,p) = \psi_t(p)$ e que satisfaz as relações

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi_t = X \circ \psi_t \\ \\ \psi_0 = \mathrm{id} \end{cases} . \tag{B.5}$$

Em geral, o fluxo não é definido em todo $\mathbb{R} \times M$. Isso é visto em coordenadas locais aplicando o Teorema Fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias Autônomas (ver [18], p. 664).

Definimos o **domínio do fluxo** $\mathfrak{D}_X$ de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ como sendo um subconjunto de $\mathbb{R} \times M$ que serve de domínio para o fluxo ψ_X de X e tem a propriedade de que para, todo $p \in M$, o conjunto

$$\mathfrak{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R}; (t,p) \in \mathfrak{D}\}$$

é um intervalo aberto contendo 0 e é domínio para a curva integral $\gamma : \mathfrak{D}^{(p)} \to M$ satisfazendo a condição inicial $\gamma(0) = p$.

B.2.2 Derivadas de Lie

Estenderemos agora o conceito de derivada direcional para funções definidas em variedades e campos vetoriais. Sabemos do Cálculo Avançado que, dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou um campo vetorial $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, a derivada direcional em $p \in \mathbb{R}^n$ na direção do vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é definida como sendo o limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(p+tv) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} \tag{B.6}$$

e

$$\frac{\partial Y}{\partial v}(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Y(p+tv) = \lim_{t\to 0} \frac{Y(p+tv) - Y(p)}{t}. \tag{B.7}$$

Essas expressões fazem sentido devido a estrutura de espaço vetorial em $\mathbb{R}^n$ e a identificação natural $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$. O mesmo não é verdade para uma variedade diferenciável M qualquer. Isso pode ser visto facilmente, uma vez que em geral, uma variedade não tem uma estrutura de espaço vetorial e portanto, a expressão $p + tv$ não faz sentido. Além disso, na escolha de um vetor v para a direção devemos levar em conta em qual espaço tangente este vetor está. De fato, não temos liberdade para dizer "a derivada direcional de f ou de Y no ponto p e na direção de v", pois v pode não pertencer ao espaço tangente à variedade no ponto p.

Para resolver esse problema, usamos um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ no lugar do vetor

v. Considerando o fluxo de $\psi_t^X : \mathfrak{D}_X \to M$ de X, definimos a **derivada de Lie de f no ponto p e na direção de X** como sendo número

$$(\mathscr{L}_X f)(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\psi_t^X)^* f(p). \tag{B.8}$$

Resolvendo essa derivada em t, obtemos que $(\mathscr{L}_X f)(p) = Xf(p)$. Portanto, temos que

$$\mathscr{L}_X f = Xf. \tag{B.9}$$

Da mesma forma, definimos a **derivada de Lie de Y no ponto p na direção de X** como sendo o vetor

$$(\mathscr{L}_X Y)(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\psi_t^X)^* Y(p). \tag{B.10}$$

B.2.3 Relação entre derivada e colchete de Lie

Nessa seção provaremos que localmente, a derivada de Lie de um campo vetorial Y na direção de um campo X em uma variedade M é igual ao colchete de Lie $[X, Y]$.

Comecemos com uma variedade M e dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ cujos fluxos são, respectivamente, ψ_t^X e ψ_t^Y. Dado um sistema de coordenadas locais $(U; x_1, \ldots, x_n)$ escrevemos $\psi_t^X = (\psi_{t1}^X, \ldots, \psi_{tn}^X)$, $\psi_t^Y = (\psi_{t1}^Y, \ldots, \psi_{tn}^Y)$, $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ nesse sistema.

Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função qualquer de classe C^∞. Então,

$$[X,Y]f = (XY - YX)f = X(Yf) - Y(Xf) = X\left(\sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) - Y\left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + X_j Y_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + Y_j X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

Como a última igualdade vale para toda $f \in C^\infty(M)$, segue que

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{B.11}$$

em todos os pontos de U.

Agora, provaremos nossa afirmação mostrando que a derivada de Lie

$$\mathscr{L}_X Y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\psi_t^X)^* Y$$

é igual a (B.9). Lembremos que

$$(\psi_t^X)^* Y(p) = d\psi_{-t}^X(\psi_t^X(p)) \cdot Y(\psi_t^X(p)).$$

Mas,

$$d\psi_{-t}^X(\psi_t^X(p)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_{-t1}^X}{\partial x_1}(\psi_t^X(p)) & \dots & \dfrac{\partial \psi_{-t1}^X}{\partial x_n}(\psi_t^X(p)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi_{-tn}^X}{\partial x_1}(\psi_t^X(p)) & \dots & \dfrac{\partial \psi_{-tn}^X}{\partial x_n}(\psi_t^X(p)) \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $Y(\psi_t^X(p))$ como vetor-coluna

$$Y(\psi_t^X(p)) = \begin{pmatrix} Y_1(\psi_t^X(p)) \\ \vdots \\ Y_n(\psi_t^X(p)) \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} d\psi_{-t}^X(\psi_t^X(p)) \cdot Y(\psi_t^X(p)) &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^n Y_i(\psi_t^X(p)) \frac{\partial \psi_{-t1}^X}{\partial x_i}(\psi_t^X(p)) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n Y_i(\psi_t^X(p)) \frac{\partial \psi_{-tn}^X}{\partial x_i}(\psi_t^X(p)) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n Y_i(\psi_t^X(p)) \frac{\partial \psi_{-tj}^X}{\partial x_i}(\psi_t^X(p)) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\mathscr{L}_X Y)(p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d\psi_{-t}^X(\psi_t^X(p)) \cdot Y(\psi_t^X(p)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n Y_i(\psi_t^X(p)) \frac{\partial \psi_{-tj}^X}{\partial x_i}(\psi_t^X(p)) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(Y_i(\psi_t^X(p)) \frac{\partial \psi_{-tj}^X}{\partial x_i}(\psi_t^X(p)) \right) \right] \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p. \end{aligned}$$

Notemos que $\dfrac{\partial \psi_{0j}^X}{\partial x_i} = \dfrac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ e que $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\psi_t^X = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{d}{dt}\psi_t^X$, uma vez que o fluxo é uma aplicação $\psi : \mathfrak{D}_X \subseteq \mathbb{R} \times M \to M$ de classe C^∞ tal que $\psi_0^X = \mathrm{id}$. Portanto, aplicando as regras do produto e da cadeia na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_X Y)(p) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n dY_i(p) \cdot X(p) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n Y_i(p) \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(p) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n dY_i(p) \cdot X(p) \cdot \delta_{ij} - \sum_{i=1}^n Y_i(p) \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(p) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \\ &= \sum_{j=1}^n \left(dY_j(p) \cdot X(p) - \sum_{i=1}^n Y_i(p) \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(p) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\end{aligned}$$

Agora, notando que $dY_j(p) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial Y_j}{\partial x_i}(p) dx_i$, temos que

$$dY_j(p) \cdot X(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(p) X_i(p).$$

Portanto,

$$(\mathscr{L}_X Y)(p) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(p) - \sum_{i=1}^n Y_i(p) \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(p) \right) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p = [X,Y](p),$$

por (B.9). Como isso vale para todo $p \in U$, segue que $\mathscr{L}_X Y = [X,Y]$.

B.3 Formas diferenciais

Uma **forma diferencial de grau** 1 **ou** 1**-forma** em M é uma seção do fibrado cotangente T^*M, ou seja, é uma aplicação $\omega : M \to T^*M$ que associa a cada $q \in M$ um funcional linear $\omega(q) : T_qM \to \mathbb{R}$. Em coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$, ω é expressa na forma

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i,$$

onde os $a_i : M \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis definidas na variedade M.

A forma ω será de classe C^k se as funções coordenadas a_i forem de classe C^k em qualquer sistema de coordenadas. Trataremos apenas das formas de classe C^∞. O conjunto das formas de classe C^∞ e grau 1 é um espaço vetorial, o qual denotaremos por $\Omega^1(M)$.

Uma **forma diferencial de grau** 2 **ou** 2**-forma** em M é uma seção do subfibrado

$\Lambda^2(T^*M)$, ou seja, é uma aplicação $\omega : M \to T^2(T^*M)$ tal que $\omega(q)$ é uma forma alternada de grau 2 e $\pi^{**} \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Em coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$, a forma ω é dada por

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

onde $\wedge$ é o produto exterior de formas.

O conjunto das formas de classe C^∞ e grau 2 é um espaço vetorial o qual denotaremos por $\Omega(\Lambda^2(T^*M))$ ou simplesmente $\Omega^2(M)$, quando não houver confusão.

Em geral, tem-se as formas diferenciais de classe C^∞ e grau k ($k \geq 1$) ou k-formas em M que são seções C^∞ dos subfibrados $\Lambda^k(T^*M)$ de $T^k(T^*M)$. Elas formam um espaço vetorial denotado por $\Omega^k(M)$. As formas diferenciais de classe C^∞ e grau 0 são as funções de classe C^∞ definidas em M. A expressão de uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ em um sistema de coordenadas locais $(U; x_1, \ldots, x_n)$ é

$$\omega = \sum_I a_I dx_I,$$

onde $I = \{i_1 < \ldots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ e $a_I : M \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞.

Dadas duas formas diferenciais $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\beta \in \Omega^m(M)$ vamos definir um produto entre essas formas de modo a obter uma forma diferencial em $\Omega^{k+m}(M)$. Para isso, sejam

$$\alpha = \sum_I \alpha_I dx_I \qquad \text{e} \qquad \beta = \sum_J \beta_J dx_J$$

as representações em coordenadas locais de α e β, respectivamente. Então, damos a seguinte definição:

Definição B.2. Definimos o **produto exterior** de formas em $\Omega^k(M)$ por formas em $\Omega^m(M)$ como sendo a aplicação bilinear anti-simétrica $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^m(M) \to \Omega^{k+m}(M)$ dada, em coordenadas locais, por

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J dx_I \wedge dx_J.$$

Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada número natural $k \leq \min\{m, n\}$, associamos um homomorfismo linear $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ tal que

$$(f^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \ldots, df(p) \cdot v_k),$$

para todo $p \in M$ e toda k-forma $\omega \in \Omega^k(N)$. A aplicação f^* assim definida é chamada de **pull-back** da forma ω pela aplicação f.

Proposição B.3. *Seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^k entre duas variedades M e N. Então, o pull-back $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) f^* *é linear sobre* $\mathbb{R}$*;*

(b) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^*\omega_1) \wedge (f^*\omega_2)$*, para quaisquer* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(N)$*;*

(c) *Em um sistema de coordenadas locais* $(U; y_1, \ldots, y_n)$ *em* N*, temos que*

$$f^*\left(\sum_J a_J dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}\right) = \sum_J (a_J \circ f) d(x_{j_1} \circ f) \wedge \ldots \wedge d(x_{j_k} \circ f),$$

onde $J = \{j_1 < \ldots < j_k\}$*.*

Definição B.4. A **diferencial exterior** é a única aplicação linear $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ com as seguintes propriedades:

(i) $d \circ d = 0$;

(ii) dadas $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$, temos que

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(iii) dadas $f : M \to N$ de classe C^k, entre duas variedades M e N, e $\omega \in \Omega^k(N)$, temos que

$$f^* d\omega = d(f^*\omega).$$

(iv) se $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, então df é a diferencial de f, a qual é dada por

$$df(X) = Xf$$

para qualquer campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Dado um sistema de coordenadas locais $(U; x_1, \ldots, x_n)$, uma forma de grau k é expressa nesse sistema

$$\omega = \sum_I a_I dx_I$$

nesse sistema, onde $I = \{i_1 < \ldots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ e $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, a diferencial exterior de ω é dada por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I,$$

onde da_I é a diferencial da função $a_I : M \to \mathbb{R}$ e portanto, uma forma de grau 1.

Definição B.5. Uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ é dita **fechada** se $d\omega = 0$. Diremos que ω é **exata** se existe uma forma $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\beta$.

Sejam $Z_k(M)$ e $B_k(M)$, respectivamente, o conjunto das formas fechadas e exatas de grau k em M. Ambos $B_k(M)$ e $Z_k(M)$ são subespaços vetoriais de $\Omega^k(M)$ e $B_k(M) \subset Z_k(M)$.

Definição B.6. Defina o **grupo de cohomologia de De Rham de ordem** k **de** M com sendo espaço vetorial quociente

$$H_k(M) := \frac{Z_k(M)}{B_k(M)}.$$

Os elementos de $H_k(M)$ são as classes de equivalência $[\omega]$ com a propriedade de que se $\omega_0 \in [\omega]$, então

$$\omega - \omega_0 = d\mu_0,$$

para alguma $(k-1)$-forma μ_0. Ou seja, a diferença $\omega - \omega_0$ é um forma exata. É claro que se $0 \in [\omega]$, então toda forma $\omega_0 \in [\omega]$ é exata.

B.4 Subvariedades e vizinhança tubular

B.4.1 Variedades riemannianas

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Uma **métrica riemanniana** em M é uma aplicação $g : M \to T^2(T^*M)$ de classe C^∞ que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno g_p em T_pM.

Uma **variedade riemanniana** é uma par (M, g), onde g é uma métrica riemanniana em M.

Dado um sistema de coordenadas locais $(U; x_1, \ldots, x_n)$, a métrica g é escrita em geral como o tensor de ordem 2

$$g_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p) dx_i \otimes dx_j, \tag{B.12}$$

onde $(g_{ij}(p))$ é uma matriz simétrica e positiva definida relativamente à base de T_pM induzida pelo sistema de coordenadas $(U; x_1 \ldots, x_n)$.

Um fato importante é que toda variedade diferenciável (de classe C^∞) M admite uma métrica riemanniana. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [14], p. 15, e [18], p. 329. Como sabemos do espaço euclidiano, um produto interno dá origem a uma noção de norma que, por sua vez, permite medir distâncias, ângulos, áreas, etc, nesse espaço. Assim, o fato de que toda variedade diferenciável admite uma métrica riemanniana nos diz que podemos fazer medições dessa natureza em qualquer variedade.

Consideremos uma métrica riemanniana g em M. Definimos a **norma** de um vetor

$v \in T_pM$, relativamente à métrica g, da maneira usual como sendo o número

$$|v| = \sqrt{g_p(v, v)}. \tag{B.13}$$

Essa noção nos permite medir o comprimento de curvas na variedade M.

Seja $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to M$ é uma curva de classe C^∞ em M. Definimos o **comprimento** de γ relativamente à metrica g como sendo o número

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

e por (B.11) temos que

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\ dt. \tag{B.14}$$

Podemos exprimir (B.12) em coordenadas locais. Tomando a métrica g no sistema $(U; x_1, \ldots, x_n)$, a qual é representada por (B.10), temos que

$$L(\gamma) = \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) \right)^{1/2} dt$$

Dados dois pontos $p, q \in M$, podemos ligá-los por uma curva $\gamma : [a, b] \to M$, onde $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Pela fórmula (B.12) podemos medir o comprimento da curva γ que liga esses dois pontos. Sejam $C([a, b], M)$ o conjunto de todos o caminhos diferenciáveis por partes em M e $\mathscr{C}_{p,q} = \{\gamma \in C([a, b], M);\ \gamma(a) = p \text{ e } \gamma(b) = q\}$ o conjunto dos caminhos que ligam p e q. Então, definimos a **distância entre p e q relativamente à métrica** g como sendo o número

$$d_g(p, q) = \inf_{\gamma \in \mathscr{C}_{p,q}} L(\gamma) \tag{B.15}$$

Temos que d_g define uma distância na variedade M e, mais ainda, a topologia induzida por d_g é a mesma topologia de M induzida pelo seu atlas maximal. Não provaremos isso aqui. Notemos, no entanto, que em $\mathbb{R}^n$ a distância d_g coincide com a distância usual. De fato, a curva que tem o menor comprimento ligando os pontos p e q em $\mathbb{R}^n$ é o segmento de reta $[p, q] = \{tp + (1 - t)q;\ 0 \leq t \leq 1\}$. Pondo $\gamma(t) = tp + (1 - t)q$, temos que $\dot{\gamma}(t) = p - q$ e portanto

$$d_g(p, q) = \inf_{\gamma \in \mathscr{C}_{p,q}} L(\gamma) = \int_0^1 |p - q| dt = |p - q|.$$

Uma curva γ que minimiza a distância entre dois pontos p e q em uma variedade M é chamada de **geodésica**.

B.4.2 Vizinhança tubular

Dadas uma variedade riemanniana (M, g) de dimensão n e $S \subseteq M$ uma subvariedade de dimensão $k < n$, definimos o **espaço normal** a X no ponto $p \in X$ como sendo o espaço vetorial quociente

$$N_pS = T_pM/T_pS.$$

Dessa forma, o **fibrado normal** de S é o conjunto NS dado pela união disjunta dos espaços normais em todos os pontos de S:

$$NS = \coprod_{p \in S} N_pS.$$

O conjunto NS tem uma estrutura natural de fibrado vetorial de ordem $n - k$ sobre S.

Dizemos que uma vizinhança U_0 da seção zero de NS é **convexa** quando a interseção $U_0 \cap N_pS$ for convexa, para todo $p \in S$.

Seja $i_0 : S \to NS$ a inclusão que identifica S com a seção zero do fibrado normal.

Teorema B.7 (Vizinhança Tubular)**.** *Sejam M uma variedade de dimensão n, $S \subset M$ uma subvariedade de M de NS o seu fibrado normal. Então, existe uma vizinhança convexa U_0 de S em NS, uma vizinhança U de S em M e um difeomorfismo $\varphi : U_0 \to U$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[rr, "\varphi"] & & U \\ & S \arrow[ul, "i_0"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

*é comutativo. O aberto $U = \varphi(U_0)$ é chamado de **vizinhança tubular** de S em M.*

Apêndice C

Teoremas de transversalidade

Nesse apêndice, enunciaremos os teoremas de transversalidade usados no texto, principalmente no Capítulo 5, para a demonstração do Teorema da Densidade Geral. Para tanto, necessitamos de algumas definições sobre diferenciabilidade em variedades em espaços de Banach. Os detalhes e demonstrações dos resultados e noções aqui tratados podem ser encontrados em [2].

Definição C.1. Sejam $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ espaços de Banach, $U \subset \mathbf{E}$ um aberto e $f : U \to \mathbf{F}$ uma aplicação. Dizemos que f é **diferenciável (segundo Fréchet)** em $p \in U$ se existe uma única transformação linear limitada $T_p : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ tal que

$$\lim_{||h||_{\mathbf{E}} \to 0} \frac{||f(p+h) - f(p) - T_p \cdot h||_{\mathbf{F}}}{||h||_{\mathbf{E}}} = 0.$$

Nesse caso, escrevemos $T_p = df(p)$ e dizemos que $df(p)$ é a **derivada de Fréchet de f no ponto** p. Diremos que f é diferenciável se ela for diferenciável em todo ponto $p \in U$.

Considerando a derivada de f como uma aplicação $df : U \to L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, onde $L(\mathbf{E,F})$ é o espaço das aplicações lineares limitadas de $\mathbf{E}$ em $\mathbf{F}$, podemos questionar se df é contínua ou mesmo diferenciável. Se df é contínua, dizemos que f é de classe C^1; se df é diferenciável, então sua derivada $d(df) = d^2 f$ é uma aplicação de U em $L(\mathbf{E}, L(\mathbf{E}, \mathbf{F})) \cong L^2(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ e nesse caso, dizemos que f duas vezes diferenciável e que $d^2 f$ é a derivada de ordem 2 de f. Mais geralmente, temos a seguinte definição:

Definição C.2. Dizemos que uma aplicação $f : U \subset \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ é k **vezes diferenciável**, para $1 \leq k \ < \infty$, se existe a derivada $d^k f : U \to L^k(\mathbf{E}, \mathbf{F})$, onde $L^k(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ é o espaço das aplicações k-lineares $T : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$. Se $d^k f$ é contínua, então diremos que f é de **classe** C^k. Diremos que f é de classe C^∞ se f é classe C^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição C.3. Seja $\mathbf{E}$ um espaço de Banach. Uma **variedade de Banach** de classe C^k é um espaço topológico Hausdorff $\mathbf{M}$ com um atlas maximal $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in L}$ tal que

(i) $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi(U_\alpha)$ é bijetora, para todo $\alpha \in L$;

(ii) $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ é aberto em $\mathbf{E}$, para todo $\alpha \in L$ e

(iii) as aplicações de transição $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ são de classe C^k, para quaisquer $\alpha, \beta \in L$.

Definição C.4. Sejam $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ variedades de Banach e $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ uma aplicação. Diremos que f é **diferenciável** em $p \in \mathbf{M}$ se, dadas cartas locais $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ contendo p em $\mathbf{M}$ e (V_β, ψ_β) contendo $f(p)$ em $\mathbf{N}$, a aplicação $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\beta(V_\beta)$ é diferenciável.

Observemos nas definições acima que quando $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ tem dimensão finita as noções de derivada de Fréchet e variedade de Banach se reduzem às noções usuais de derivada e variedade diferenciável.

Definição C.5. Sejam $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ variedades de Banach, onde $\mathbf{N}$ tem dimensão finita, $V \subset \mathbf{N}$ uma subvariedade e $p \in \mathbf{M}$. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ é **transversal a** V **no ponto** p se $f(p) \notin V$ ou $f(p) \in V$ e

$$df(p) \cdot T_p\mathbf{M} + T_{f(p)}V = T_{f(p)}\mathbf{N}.$$

Diremos que f é transversal a V, e escreveremos $f \pitchfork V$, se ela for transversal a V em todos os pontos de $\mathbf{M}$.

Quando f é transversal a V resulta da Forma Local das Submersões que $f^{-1}(V)$ é uma subvariedade de $\mathbf{M}$ cuja codimensão é igual à codimensão de V em N.

O primeiro teorema de transversalidade que enunciaremos é o chamado Teorema de Transversalidade de Thom, o qual afirma que transversalidade é uma propriedade genérica, isto é, uma propriedade que vale para quase todas as aplicações.

Teorema C.6 (Teorema de Transversalidade de Thom)**.** *Sejam* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *variedades diferenciáveis e* $S \subset \mathbf{N}$ *uma subvariedade. Considere o conjunto*

$$T^r(\mathbf{M}, \mathbf{N}; S) = \{f \in C^r(\mathbf{M}, \mathbf{N});\ f \pitchfork S\}$$

de todas as aplicações $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *de classe* C^r *(*$1 \leq r \leq \infty$*) que são transversais a* S*. Então,*

(a) $T^r(\mathbf{M}, \mathbf{N}; S)$ *é denso em* $C^r(\mathbf{M}, \mathbf{N})$*;*

(b) *Se* S *é fechado em* $\mathbf{N}$*, então* $T^r(\mathbf{M}, \mathbf{N}; S)$ *é aberto e denso em* $C^r(\mathbf{M}, \mathbf{N})$*.*

Para os próximos teoremas de transversalidade precisaremos de algumas definições adicionais.

Sejam $\mathcal{A}$ um espaço topológico e $F : \mathcal{A} \to C^r(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ uma aplicação no conjunto das funções de classe C^r de $\mathbf{M}$ em $\mathbf{N}$, onde $\mathbf{M}$ é uma variedade de Banach e $\mathbf{N}$ é uma variedade de dimensão finita. Defina a **aplicação de avaliação** $\mathrm{ev}(F) : \mathcal{A} \times \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ por

$$\mathrm{ev}(F)(\alpha, p) = F(\alpha)(p),$$

onde $F(\alpha) \in C^r(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, e considere a aplicação $TF : \mathcal{A} \to C^{r-1}(T\mathbf{M}, T\mathbf{N})$ dada por $TF(\alpha)(p, v) = d(F(\alpha))(p) \cdot v$.

Definição C.7. Dizemos que F é uma **pseudo-representação de classe** C^1 se a aplicação $\mathrm{ev}(TF) : \mathcal{A} \times T\mathbf{M} \to T\mathbf{N}$ é contínua. Se $\mathcal{A}$ for uma variedade de Banach, então diremos que F é **representação de classe** C^r se $\mathrm{ev}(F) : \mathcal{A} \times \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ é de classe C^r.

De acordo com [33], definiremos uma noção de tranversalidade utilizando a aplicação de avaliação definida acima.

Definição C.8. Sejam $F : \mathcal{A} \to C^r(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ uma pseudo-representação de classe C^1, $K \subset \mathbf{M}$ um subconjunto não-vazio e $V \subset \mathbf{N}$ uma subvariedade. Dizemos que F é C^r **pseudotransversal** a V nos pontos de K se existe um subconjunto denso $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ tal que para cada $\alpha \in \mathcal{D}$ existe um aberto $B_\alpha \subset \mathbf{E}$, onde $\mathbf{E}$ é um espaço de Banach separável, uma aplicação contínua $\psi_\alpha : B_\alpha \to \mathcal{A}$ e $\beta \in B_\alpha$ tais que

(i) $\psi_\alpha(\beta) = \alpha$ e

(ii) a aplicação de avaliação $\mathrm{ev}(F \circ \psi_\alpha) : B_\alpha \times \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ é da classe C^r e é transversal a V nos pontos de $\{\beta\} \times K$.

Definição C.9. Seja $\mathcal{A}$ um espaço topológico. Um subconjunto $R \subset \mathcal{A}$ é dito **residual** se existir uma família enumerável $(R_\alpha)_{\alpha \in J}$ de subconjuntos abertos e densos em $\mathcal{A}$ tal que $\bigcap_{\alpha \in J} R_\alpha \subseteq R$. O espaço $\mathcal{A}$ é um **espaço de Baire** se todo suconjunto residual é denso em $\mathcal{A}$.

Pelo Teorema da Categoria de Baire (ver [28], p. 296), se $\mathcal{A}$ é uma variedade de Banach, então $\mathcal{A}$ é um espaço de Baire.

Definição C.10. Sejam $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ espaços de Banach e $A \in L(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ uma transformação linear. Dizemos que A é um **operador de Fredholm** se satisfaz as seguintes condições:

(i) $\ker(A)$, $\mathrm{Im}(A)$ e $\dfrac{\mathbf{F}}{\mathrm{Im}(A)}$ são subespaços fechados;

(ii) $\ker(A)$ tem dimensão finita;

(iii) $\mathrm{Im}(A)$ tem codimensão finita.

Nesse caso, definimos o **índice** de A como sendo o número

$$\mathrm{ind}_A = \dim(\ker(A)) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(A)).$$

Definição C.11. Sejam $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ variedades de Banach de classe C^k e $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ uma aplicação de classe C^k. Dizemos que f é uma **aplicação de Fredholm** se, e somente se, $df(p) : T_p\mathbf{M} \to T_{f(p)}\mathbf{N}$ é um operador de Fredholm, para todo $p \in \mathbf{M}$.

O próximo teorema é uma generalização do Teorema de Sard para variedades de Banach em dimensão infinita.

Teorema C.12 (Sard-Smale)**.** *Sejam* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *variedades de Banach de classe* C^k*, onde* $\mathbf{M}$ *é Lindelöf, e* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *uma aplicação de Fredholm de classe* C^k*. Suponha que* $k > \max\left\{0, \mathrm{ind}_{df(p)}\right\}$*, para todo* $p \in \mathbf{M}$*. Então, o conjunto* $\mathscr{R}_f$ *dos valores regulares de* f *é residual em* $\mathbf{N}$*.*

Teorema C.13 (Teorema de Transversalidade)**.** *Sejam* $\mathcal{A}$*,* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *variedades de Banach, onde* $\mathbf{M}$ *tem dimensão finita,* $\mathcal{A}$ *e* $\boldsymbol{M}$ *satisfazem o segundo axioma de enumerabilidade,* $F : \mathcal{A} \to C^r(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *uma representação de classe* C^r *e* $K \subset \mathbf{M}$ *e* $V \subset \mathbf{N}$ *subconjuntos não-vazios. Suponha que* $r \geq \max\{1, \dim \mathbf{M} - \mathrm{codim}\, V + 1\}$ *e que* F *é* C^r*-pseudotransversal a* V *nos pontos de* K *e considere o subconjunto*

$$\mathcal{R} = \{\alpha \in \mathcal{A};\ F(\alpha) \text{ é transversal a } V \text{ em } K\}.$$

Então,

(a) *se* K *é compacto e* V *é fechado,* $\mathcal{R}$ *é aberto em* $\mathcal{A}$*;*

(b) *se* $K = M$*, o subconjunto* $\mathcal{R}$ *é residual (e portanto, denso) em* $\mathcal{A}$*.*

Demonstração. Para o item (a), ver [2], p. 47, Teorema 18.2.

No item (b), a idéia da demonstração é observar que como F é C^r-pseudotransversal a V, temos que $\mathrm{ev}(F)$ é transversal a V e portanto, $\mathbf{B} = \mathrm{ev}(F)^{-1}(V)$ é uma subvariedade de $\mathcal{A} \times \mathbf{M}$ de classe C^k. Agora, seja $\pi : \mathcal{A} \times \mathbf{M} \to \mathcal{A}$ a projeção na primeira coordenada e considere a restrição $\rho = \pi|_{\mathbf{B}} : \mathbf{B} \to \mathcal{A}$. Temos que ρ é uma aplicação de Fredholm de classe C^k e como $\mathcal{A}$ e $\mathbf{M}$ são Lindelöf, temos que $\mathcal{A} \times \mathbf{M}$ é Lindelöf e portanto, $\mathbf{B}$ é Lindelöf. Assim, segue do Teorema de Sard-Smale que o conjunto $\mathscr{R}_\rho$ dos valores regulares de ρ é residual em $\mathcal{A}$.

Pelos Lemas 19.4 e 19.5 em [2] segue que $\mathcal{R} = \mathscr{R}_\rho$ e portanto, $\mathcal{R}$ é residual em $\mathcal{A}$.

Para os detalhes da demonstração, ver [2], p. 48.

□

Sejam $\mathbf{M}$ uma variedade de Banach de dimensão finita, isto é, uma variedade diferenciável, $g : \mathbf{M} \to T^2(T^*\mathbf{M})$ uma métrica riemanniana e $d : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ a distância em $\mathbf{M}$

induzida por g. Dado $p \in \mathbf{M}$ e $A \subset \mathbf{M}$ um subconjunto não-vazio, a distâcia de p até A é definida como sendo o número

$$d(p, A) = \inf_{q \in A} d(p, q).$$

Quando A é compacto e $p \notin A$, é um fato conhecido em topologia que existe $q_0 \in A$ tal que $d(p, A) = d(p, q_0)$. Assim, se $p \notin A$, então $d(p, A)$ é um número positivo não-nulo, diferente do que acontece em geral quando A é um subconjunto qualquer. Definiremos agora distância de Hausdorff entre subconjuntos compactos de $\mathbf{M}$.

Denote por $2_c^{\mathbf{M}}$ o conjunto de todos os subconjuntos compactos e não-vazios de $\mathbf{M}$.

Definição C.14. A **distância de Hausdorff** entre dois subconjuntos $A, B \in 2_c^{\mathbf{M}}$ é definida como sendo o número

$$d_{\mathbf{H}}(A, B) = \max \left\{ \sup_{p \in B} d(p, A),\ \sup_{q \in A} d(q, B) \right\}.$$

Com essa distância definida em $2_c^{\mathbf{M}}$ temos o seguinte resultado.

Proposição C.15. *O conjunto $2_c^{\mathbf{M}}$ com a métrica de Hausdorff definida acima é um espaço métrico. Mais ainda, se o espaço métrico $(\mathbf{M}, d)$ é completo, então $(2_c^{\mathbf{M}}, d_{\mathbf{H}})$ é completo.*

Assim, é possível falar em continuidade de aplicações cujo contradomínio é $2_c^{\mathbf{M}}$ com essa métrica.

Enunciaremos agora um resultado sobre a estabilidade de interseções trasversais na influência de perturbações.

Teorema C.16 (da Continuidade em $2_c^{\mathbf{M}}$)**.** *Seja $\mathcal{A}$ um espaço topológico, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ variedades de Banach de dimensão finita, $V \subset \mathbf{N}$ uma subvariedade fechada, $K \subset \mathbf{M}$ uma subvariedade compacta com bordo, $F : \mathcal{A} \to C^1(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ uma pseudorepresentação e $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $F(\alpha) : \operatorname{int}(K) \to \mathbf{N}$ e $\partial F(\alpha) : \partial K \to \mathbf{N}$ são transversais a V. Então, a aplicação $\zeta : \mathcal{A} \to 2_c^{\mathbf{M}}$ dada por*

$$\zeta(x) = F(x)^{-1}(V) \cap K,$$

é contínua em α.

Referências Bibliográficas

[1] ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E. *Foundations of Mechanics.* Segunda Edição. Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 1978.

[2] ______________; ROBBIN, J. *Transversal Mappings and Flows.* New York: W. A. Benjamin, Inc., 1967.

[3] ______________; Transversality in Manifolds of Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society.* Vol. 69, No. 4, p. 470-474, 1963.

[4] BOCHNAK, J.; COSTE, M.; ROY, M. *Real Algebraic Geometry.* Heindelberg: Springer-Verlag, 1998.

[5] CARMO, M. P. *Geometria riemanniana.* Projeto Euclides. Segunda Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

[6] COPPEL, W. A.; HOWE, A. Dynamical instability of linear canonical systems. *Journal of Australian Math. Soc.*, v. 7, p. 247-251, 1967.

[7] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias.* Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[8] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential topology.* Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, 1974.

[9] HAMILTON, R. S. The Inverse Function Theorem of Nash and Moser. *Bulletin of the American Mathematical Society*, volume 7, no. 1, p. 65-222, 1982.

[10] HIRSCH, M. W. *Differential topology.* Primeira Edição. New York: Springer-Verlag, 1976.

[11] ______________; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems and introduction to chaos.* Terceira Edição. Oxford: Academic Press, 2012.

[12] HOFER, H.; ZEHNDER, E. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics.* Birkhäuser Advanced Texts. Switzerland: Birkhäuser Verlag, 1994.

[13] HÖRMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis.* Segunda Edição. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.

[14] JOST, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* Universitext. Sexta Edição. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

[15] KOSINSKI, A. A. *Differential Manifolds.* Primeira Edição. New York: Dover Publications, 2007.

[16] LANG, S. *Introduction to differentiable manifolds.* Universitext. Segunda Edição. New York: Springer-Verlag, 2002.

[17] LAUB, J. A.; MEYER, K. Canonical forms for symplectic and hamiltonian matrices. *J. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 9, segunda edição, p. 213-238, 1974.

[18] LEE, John M. *Introduction to smooth manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. Segunda Edição. New York: Springer, 2013.

[19] LEE, Jeffrey M. *Manifolds and Differential Geometry.* Graduate Studies in Mathematics, v. 107. Primeira Edição. Rhode Island: AMS, 2009.

[20] LIMA, E. L. *Homologia básica.* Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[21] ______________. *Variedades Diferenciáveis.* Publicações Matemáticas. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[22] ______________. *Curso de Análise Vol. 2.* Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[23] MCDUFF, D.; SALAMON, D. *Introduction to symplectic topology.* Oxford Science Publications. Segunda Edição. New York: Oxford University Press Inc., 1998.

[24] ______________. *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology.* AMS Colloquium Publications, Volume 52. Rhode Island: AMS, 2004.

[25] MEYER, K. R. Generic Bifurcations of Periodic Points. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 149, no. 1, p. 95-107, 1970.

[26] MOSER, J. On the Volume Elements on a Manifold. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 120, no. 2, p. 286-294, 1965.

[27] ______________. New Aspects in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. XI, p. 81-114, 1958.

[28] MUNKRES, J. R. *Topology.* Segunda Edição. New Jersey: Prentice Hall, 2000.

[29] NETO, A. L. *Funções de uma variável complexa.* Projeto Euclides. Segunda Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[30] PALAIS, J.; DE MELO, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos.* Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1975.

[31] PICCIONE, P.; TAUSK, D. V. *A Student's Guide to Symplectic Spaces, Grassmanians and Maslov Index.* Publicações Matemáticas. Primeira Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[32] RIESZ, F.; SZ.-NAGI, B. *Functional Analysis.* New York: Dover Publications, 1990.

[33] ROBINSON, R. C. Generic Properties of Conservative Systems. *American Journal of Mathematics*, vol. 92, no. 3, p. 562-603, 1970.

[34] ______________. Generic Properties of Conservative Systems II. *American Journal of Mathematics*, vol. 92, no. 4, p. 897-906, 1970.

[35] ______________. *Lectures on Hamiltonian Systems.* Monografias de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1971.

[36] ______________. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics and chaos.* Boca Raton: CRC Press, 1995.

[37] SILVA, A. C. *Lectures on Symplectic Geometry.* Primeira Edição. Heindelberg: Springer, 2001.

[38] VINBERG. B. È. *A course in algebra.* Graduate Studies in Mathematics, v. 56. Primeira Edição. Rhode Island: AMS, 2003.

[39] WHITNEY, H. Elementary Structure of Real Algebraic Varieties. *Annals of Mathematics*, vol. 66, no. 3, p. 545-556, 1957.

[40] ZEHNDER, E. Homoclinic Points Near Elliptic Fixed Points. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. XXVI, p. 131-182, 1973.

Índice Remissivo