

Cassius Gomes de Oliveira

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA DIFUSÃO
ANISOTRÓPICA EM PROCESSAMENTO DE
IMAGENS: APLICAÇÃO A UMA EQUAÇÃO
DIFERENTE PARCIAL DE QUARTA ORDEM





1910001272



unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA DIFUSÃO
ANISOTRÓPICA EM PROCESSAMENTO DE
IMAGENS: APLICAÇÃO A UMA EQUAÇÃO
DIFERENCIAL PARCIAL DE QUARTA ORDEM**

Cassius Gomes de Oliveira

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 084

Rua Cristovão Colombo, 2265

15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil

Telefone: (017) 221-2444

Fax: (017) 221-2445



Análise do Comportamento da Difusão Anisotrópica em Processamento de Imagens: Aplicação a uma Equação Diferencial Parcial de Quarta Ordem

Cassius Gomes de Oliveira ¹

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José
do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática
Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Maurílio Boaventura



São José do Rio Preto

27 de Fevereiro de 2004

¹contato: ca_ol2@yahoo.com.br



7517.944
048a

10102051

Oliveira, Cassius Gomes.

Análise do Comportamento da Difusão Anisotrópica em
Processamento de Imagem: Aplicação a uma Equação Diferencial
Parcial de Quarta Ordem / Cassius Gomes de Oliveira – São José do Rio
Preto: [s.n.], 2004
126 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Maurílio Boaventura

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Equações diferenciais parciais. 2. Processamento de imagens -
Técnicas digitais. 3. Difusão anisotrópica. 4. Imagens digitais -
Eliminação de ruídos. 5. Imagens digitais - Segmentação. I.
Boaventura, Maurílio. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 519.63



Agradecimentos

À Deus.

Aos meus pais, Maria e Rafael.

À minha irmã Vanessa.

Aos professores do curso de graduação em Engenharia de Materiais, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos colegas de curso, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos amigos, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos familiares, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos colegas de curso, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos familiares, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos colegas de curso, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos familiares, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos colegas de curso, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

Aos familiares, especialmente ao Prof. Dr. Roberto de Jesus, pelo apoio e orientação durante a realização deste trabalho.

À Deus.

Aos meus pais, Maria e Rafael.

À minha irmã Vanessa.

Dedico

Agradecimentos

À Deus, por tudo.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e sempre me entenderam.

Em especial ao Prof. Dr. Maurílio Boaventura, pela orientação, confiança, amizade incentivo e paciência na elaboração deste trabalho, e todos os professores e funcionários do DCCE que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Aos Professores Doutores Alagacone Sri Ranga, Geraldo Nunes Silva, Sérgio Luís Lopes Verardi, Cleonice Fátima Bracciali e Celia Aparecida Zorzo Barcelos pela confiança e ajuda neste trabalho.

Aos meus amigos André Luiz Nogueira e Evanivaldo Castro Silva Júnior, cujos trabalhos contribuíram para a elaboração deste.

Aos amigos Roberto (Bob), Moisés, Pitangui, Daniel, Fernando, Thais, Flávia, Nilton, Oreste, Karina, André (BV), Cláudia, José Renato, Fábio pela força e união.

Aos meus amigos pós-graduandos do DCCE e do Departamento de Matemática do IBILCE.

Aos meus amigos pós-graduandos Junior, Edward, Clayton, Marcos, Flávio, Valeriano e outros estudando em outras universidades do país.

Ao programa PET (Programa Especial de Treinamento) e aos demais amigos do curso de graduação em matemática que sempre me apoiaram.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.



Resumo

Recentemente, You-Li You, Mostafa Kaveh, Allen Tannenbaum e Wenyan Xu estudaram o comportamento da difusão anisotrópica no modelo de Malik & Perona. Estes autores mostram que o processo de difusão pode ser bem posto ou mal posto dependendo do mínimo global de um funcional energia. Neste trabalho, analisamos o comportamento da difusão anisotrópica para processamento de imagens e fazemos uma aplicação desses estudos a uma equação diferencial parcial de quarta ordem apresentada por You & Kaveh. Apresentamos também algumas formas alternativas para o coeficiente de difusão desta equação diferencial parcial, visando melhorar os resultados. Além disso, mostramos alguns resultados obtidos quando utilizamos outros diferentes tipos de coeficientes de difusão.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Difusão Anisotrópica, Eliminação de ruídos, Reconstrução de Imagens, Segmentação.



Abstract

Recently, You-Li You, Mostafa Kaveh, Allen Tannenbaum e Wenyuan Xu studied the behavior of anisotropic diffusion model of Malik & Perona. These authors demonstrated that the anisotropic diffusion is well posed when there exists a unique global minimum for the energy functional and is ill posed when the energy functional has a infinite number of global minima. In this work we analyzed the behavior of anisotropic diffusion for image processing and we make an application of these studies in a fourth order partial differential equation proposed by You & Kaveh. We also presented some alternative forms for the diffusion coefficients in this partial differential equations and some results using other types of diffusion coefficients seeking to improve the results.

Keywords: Partial Differential Equation, Anisotropic Diffusion, Noise Removal, Image Restoration, Segmentation.



Sumário

Introdução	1
1 Análise do Comportamento da Difusão Anisotrópica em Processamento de Imagens	11
1.1 Conceitos Preliminares	12
1.2 A Difusão como um Processo de Energia Dissipativo	17
1.3 Imagens Suavizadas por Partes	23
1.4 A Difusão Anisotrópica Mal Posta	27
1.5 A Difusão Anisotrópica Bem Posta	32
1.6 Decomposição Ortogonal e Interpretação Geométrica da Difusão Anisotrópica	37
1.7 Exemplos Mal Postos e Bem Postos de Difusão Anisotrópica . . .	40
2 Equações Diferenciais Parciais de Quarta Ordem no Processamento de Imagens	49
2.1 A E.D.P. de Quarta Ordem Proposta por You & Kaveh	50
2.2 A E.D.P. de Quarta Ordem Modificada	58
2.2.1 A E. D. P. com o termo $c(\nabla u)$	58
2.2.2 A E. D. P. com o termo $c(\nabla(G_\sigma * u))$	59
3 Implementação Numérica	62
3.1 O Método das Diferenças Finitas	63



3.2	Definição de Malha	64
3.3	Implementação Numérica nos Pontos de Fronteira	67
3.4	Implementação Numérica das E. D. P.'s de Quarta Ordem	69
3.4.1	Implementação do Modelo de You & Kaveh	70
3.4.2	Implementação da E. D. P. com $c(\nabla u)$	72
3.4.3	Implementação da E. D. P. com $c(\nabla(G_\sigma * u))$	73
3.4.4	Processo Iterativo	79
3.4.5	Segmentação da Imagem	79
3.5	Algoritmo para Remoção de Manchas	80
4	Resultados Experimentais	84
5	Conclusões	110
	Referências Bibliográficas	115



Introdução

O uso de equações diferenciais parciais (E.D.P.) em processamento de imagens, tem crescido significativamente nos últimos anos. A idéia é modificar uma dada imagem com uma equação diferencial parcial e obter os resultados esperados como solução desta equação.

Quando nos referimos ao termo imagem, ou imagem monocromática, estamos falando de uma função $u(x, y, z)$ no caso tridimensional ou $u(x, y)$, no caso bidimensional, onde x , y e z referem-se às coordenadas espaciais do nível de cinza. Neste trabalho consideramos apenas o caso bidimensional.

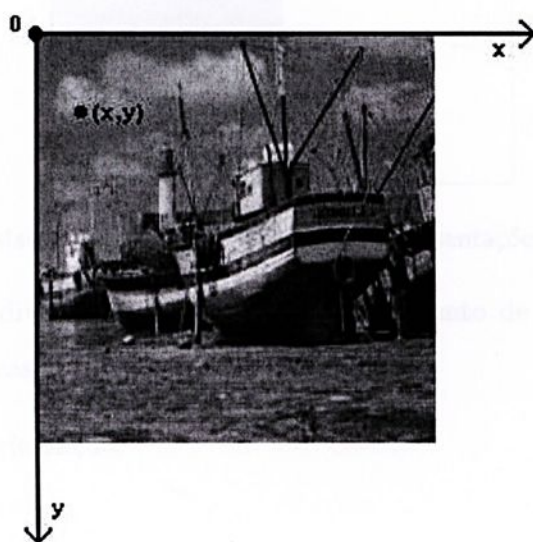


Figura I.1: Convenção empregada para a representação de uma imagem digital, mostrando o elemento (x, y) como um dos seus representantes.

Uma imagem digital do tipo $u(x, y)$ é toda aquela que resulta da discretização em coordenadas espaciais e em intensidade luminosa. Pode-se considerar uma imagem digital como uma matriz de pontos, denominados elementos da imagem, “*pixels*” ou *pels* (abreviações comuns de picture elements).

Embora as dimensões de uma imagem digital variem de acordo com a aplicação, torna-se mais conveniente representá-la sob a forma de uma matriz quadrada contendo elementos graduados em escala de cinza, com dimensões escalonadas em potências de 2, por exemplo, imagens 256×256 pixels, e 128 níveis de tonalidades de cinza. Neste trabalho, utilizamos em geral, imagens de dimensões 256×256 , com 256 níveis de tonalidades de cinza, onde a cor preta é representada pelo valor 0 (zero) e a cor branca por 255.

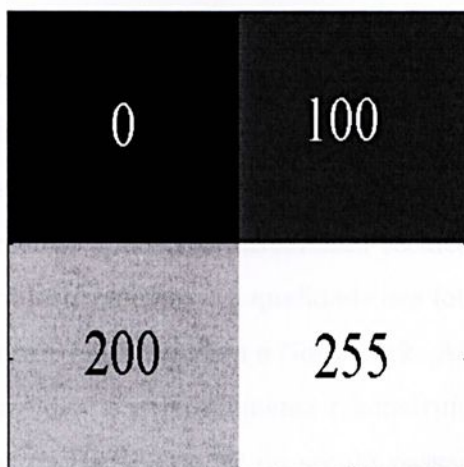


Figura I.2: Matriz 2×2 mostrando algumas representações de tons de cinza.

Podemos dividir os métodos de processamento de imagens digitais em quatro grandes áreas:

- ✓ melhoria da definição;
- ✓ restauração;
- ✓ codificação;
- ✓ reconhecimento automático de padrões.

A *melhoria da definição* diz respeito à identificação mais precisa dos objetos que compõem uma imagem, em relação à visão humana.

A *restauração* tem por objetivo reduzir, ou mesmo eliminar os efeitos degradantes que afetam o conteúdo informativo da imagem. Degradações típicas que ocorrem na prática incluem o borramento e o ruído. A restauração de imagens é o objetivo deste trabalho.

A *codificação* de uma imagem, tem por objetivo representá-la através do menor número de pontos possível, preservando seu conteúdo informativo e conferindo inteligibilidade aceitável para uma dada aplicação. Desta forma, pode-se utilizar a codificação para reduzir a banda passante no canal de comunicação quando a imagem é transmitida, o que implica também em menores espaços de armazenamento para uso futuro.

O *reconhecimento automático de padrões* consiste na identificação das representações simbólicas dos objetos que compõem a imagem. Dentre inúmeras aplicações, pode-se destacar a visão computacional e a robótica.

Uma das primeiras aplicações envolvendo técnicas de processamento de imagens, tinha como objetivo melhorar a qualidade das fotos transmitidas através do cabeamento submarino entre Londres e Nova York. As fotos eram codificadas antes de serem transmitidas, e posteriormente reconstruídas no receptor.

Desde meados da década de 60 do século passado, a área de processamento de imagens vem experimentando um vigoroso crescimento em aplicações diversas, como por exemplo, tomógrafos, aparelhos de ultrassom, "scanners", fotografias digitais, radares e às diversas aplicações no programa aeroespacial.

Outras áreas, como a astronomia, biologia, medicina nuclear, nanociência nanotecnologia, defesa e indústria, utilizam-se das técnicas de processamento de imagens como ferramentas indispensáveis para a melhoria de interpretação ou diagnóstico.

Os geradores de imagens dessas áreas possuem em comum limitações técnicas e ambientais que causam interferências indesejadas nas imagens, as quais



são denominadas ruídos. O termo ruído pode ser entendido como alterações indevidas nas escalas de tonalidades de cores que formam as imagens. Assim, por exemplo, quando um satélite fotografa uma superfície e envia os dados para um receptor na terra, há geração de ruídos não só por turbulências na atmosfera ou campos magnéticos, como também pela transmissão de dados via rádio.

A quantidade de ruído em uma imagem é medida pelo *SNR* (*Signal Noise to Ratio*) que é dado pela seguinte expressão:

$$SNR = \frac{\text{Variância da Imagem}}{\text{Variância do Ruído}} \text{ dB.}$$

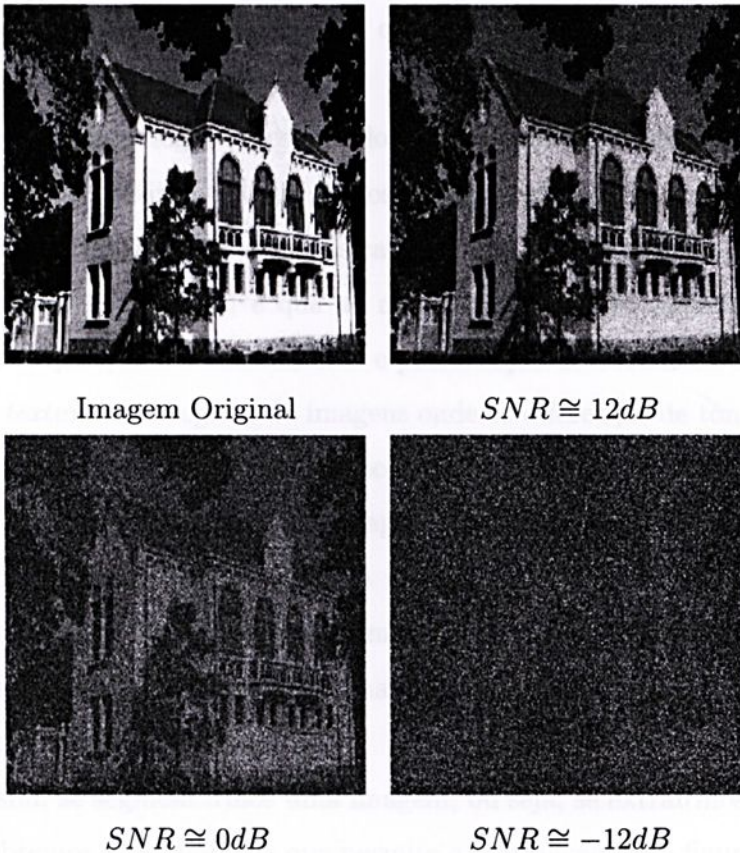


Figura I.3 Exemplo de Imagem com Ruído.

Ainda no contexto de ruído, podemos obter um ruído denominado *Gaussiano*, que tem como propriedade característica média igual a zero, ou seja, a soma das variações nos valores das tonalidades que forma o ruído é zero.

Nas últimas duas décadas, iniciou-se o desenvolvimento de teorias cujo objetivo era obter uma análise estrutural da imagem de um ponto de vista computacional, utilizando-se como ferramenta fundamentos essencialmente matemáticos.

Matematicamente, podemos considerar uma imagem como sendo uma função limitada $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 2$, para imagens bidimensionais, ou $n = 3$, para imagens tridimensionais. Para $n = 2$ o domínio Ω é em geral um retângulo. Neste trabalho, consideramos apenas imagens bidimensionais, sendo $u(x, y)$ a representação da imagem original. O objetivo é reconstruir, esta imagem, a partir de uma imagem inicial $I(x, y)$, onde, $I(x, y) = u(x, y) + r(x, y)$, $r(x, y)$ representando o ruído.

Dessa forma, alguns pesquisadores começaram a desenvolver modelos com a finalidade de retirar, ou pelo menos, minimizar o nível de ruído contido em uma imagem digitalizada. A idéia básica desses processos era desenvolver filtros que purificassem as imagens, e que ao mesmo tempo mantivessem suas características principais, tais como texturas e preservação de bordas ou contornos.

As *texturas* são regiões da imagens onde as diferenças de tonalidades são muito sutis, de forma a dificultar a detecção de contornos.

Os *contornos* ou *bordas* da imagem podem ser entendidos como sendo as regiões onde as tonalidades de cinza mudam bruscamente, fazendo uma demarcação visual que caracteriza as formas distintas da imagem. Matematicamente, entendemos os contornos da imagem como sendo as regiões onde $|\nabla u|$ assume valores grandes.

Assim, se segmentarmos uma imagem, ou seja, se extrairmos apenas seu contorno, obtemos uma moldura que permite a identificação da figura, como um molde. Podemos ver esse fato na figura I.4 a seguir,



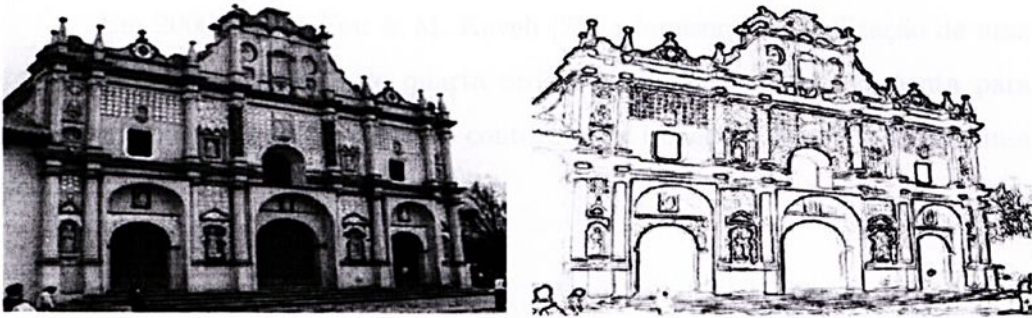


Figura I.4: Imagem e sua segmentação.

A medida que evoluímos no tempo, causamos mudanças na imagem inicial I que deve “teoricamente” convergir para a imagem original u . O conceito matemático fundamental que descreve mudanças instantâneas relativamente ao tempo é a derivada.

As equações que contém funções e suas derivadas são chamadas *equações diferenciais parciais* (E. D. P.), as quais são encontradas em muitas áreas da ciência. Estas equações constituem uma ferramenta muito importante na matemática, pois são usadas para modelar diversos problemas do cotidiano. O problema do processamento digital de imagens envolve a solução de equações diferenciais parciais, e têm despertado grande interesse na atualidade.

Diversos modelos matemáticos foram desenvolvidos baseados em E.D.P.’s para eliminação de ruído e segmentação de imagens. Um dos primeiros modelos utilizados foi o proposto por *Malik & Perona* [20], dado por,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}\left(g(x, y, t)\nabla u\right), \quad (1)$$

sendo g o coeficiente de difusão que deve agir mais intensamente nas regiões com poucas mudanças de intensidade (regiões homogêneas) e preservar os contornos.

Outros modelos conhecidos, baseados em E.D.P.’s, para o processamento digital de imagens, são os de *Alvarez, Lions, Morel e Coll* [1]; *Chen, Vemuri e*

Wang [8]; e de Barcelos, Boaventura e Silva Jr. [2], por exemplo, mostrados posteriormente neste trabalho.

Em 2000, Yu-Li You & M. Kaveh [25], propuseram a utilização de uma equação diferencial parcial de quarta ordem como uma nova ferramenta para remoção de ruídos e preservação de contornos da imagem. A partir do seguinte funcional,

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla^2 u|) dx dy, \quad (2)$$

sendo, ∇^2 o operador Laplaciano, Ω a região onde a imagem está definida e f uma função crescente satisfazendo, $f(\cdot) \geq 0$, ou seja, $f'(\cdot) > 0$. A função f está associada ao coeficiente de difusão:

$$c(s) = \frac{f'(s)}{s}. \quad (3)$$

Utilizando a equação de Euler-Lagrange no funcional $E(u)$ You & Kaveh propuseram para eliminar ruídos a seguinte equação diferencial de quarta ordem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 \left[f'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right] = -\nabla^2 \left[c(|\nabla^2 u|) \nabla^2 u \right], \quad (4)$$

sendo a imagem com ruído a condição inicial.

Os resultados obtidos com a utilização desta equação diferencial foram bastante satisfatórios, para imagens com baixos níveis de ruído.

Neste trabalho, propomos formas alternativas para a escolha de argumentos para o coeficiente de difusão resultando em novas equações diferenciais parciais apresentadas a seguir, baseadas na equação diferencial proposta por You & Kaveh. Estas equações diferenciais parciais são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 \left[c(|\nabla u|) \nabla^2 u \right] \quad (5)$$

e,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 \left[c(|\nabla(G_\sigma * u)|) \nabla^2 u \right], \quad (6)$$

ou seja, primeiramente, na equação (5), substituímos a norma do operador laplaciano aplicado a função intensidade de imagem, utilizado por You & Kaveh, $|\nabla^2 u|$, pela norma do gradiente da função intensidade de imagem, $|\nabla u|$.

Alternativamente, substituímos $|\nabla^2 u|$, pela norma do produto de convolução $G_\sigma * u$, obtendo dessa forma a expressão (6), sendo G_σ uma função Gaussiana, com σ representando o desvio padrão da imagem inicial com ruído.

A idéia principal, na equação (5), é uma suavização seletiva, ou seja, através do coeficiente de difusão $c(|\nabla u|)$, temos um processo de suavização mais intenso em regiões homogêneas e menos intenso em regiões com grandes mudanças de intensidade, ou seja, contornos.

Na equação (6), estamos avaliando o valor de $|\nabla u|$, através do cálculo do produto de convolução.

Além de implementar e analisar os resultados obtidos a partir dessa E.D.P. de quarta ordem, que numericamente utiliza o coeficiente de difusão dado por,

$$c(s) = \frac{1}{1 + ks^2}, \quad (7)$$

sendo k uma constante que está ligada a quantidade de detalhes que desejamos preservar na imagem, implementamos e analisamos os resultados obtidos, com a utilização de outros cinco coeficientes de difusão, nas expressões (4), (5) e (6) consideradas. Estes coeficientes de difusão são mostrados a seguir e discutidos e analisados no final do capítulo 1:

$$c(s) = \exp\left[-\left(\frac{s}{k}\right)^2\right], \quad c(s) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s \neq 0 \\ s, & s = 0, \end{cases}$$

$$c(s) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & s < T \\ \frac{1}{s}, & s \geq T \end{cases}, \quad c(s) = \begin{cases} \frac{p(T+\epsilon)^{p-1}}{T}, & s < T \\ \frac{p(s+\epsilon)^{p-1}}{s}, & s \geq T \end{cases},$$

$$c(s) = \begin{cases} \frac{1}{T} + \frac{p(T+\epsilon)^{p-1}}{T}, & s < T \\ \frac{1}{s} + \frac{p(s+\epsilon)^{p-1}}{s}, & s \geq T \end{cases}.$$

A origem e função das constantes k , T , p e ϵ também serão mostrados no final do capítulo 1.

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento da difusão anisotrópica para processamento de imagens e a aplicação deste estudo a uma equação diferencial parcial de quarta ordem proposta por You & Kaveh. Além disso, implementamos e analisamos de forma comparativa as E.D.P.'s de quarta ordem (4), (5) e (6), utilizadas para remoção de ruídos de imagens digitais, e também os resultados obtidos quando utilizamos outros tipos de coeficientes de difusão aplicados as três E.D.P.'s de quarta ordem consideradas.

Este trabalho, está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, introduzimos alguns conceitos referentes ao comportamento da difusão anisotrópica no processamento de imagens, onde, mostramos que a difusão anisotrópica é um processo de energia dissipativo e que existe uma relação entre o funcional energia $E(u)$ e a difusão anisotrópica. Além disso, neste capítulo, mostramos condições para a existência de pontos estacionários no funcional $E(u)$, e através dessas condições podemos identificar se o coeficiente de



difusão é bem ou mal posto. Ao final deste capítulo, mostramos alguns exemplos e respectivos resultados obtidos por estes coeficientes, quando implementamos a equação de difusão anisotrópica proposta por Malik & Perona [20].

No capítulo 2, mostramos como You & Kaveh, obtiveram a equação diferencial parcial de quarta ordem para restauração de imagens e propomos alternativamente a utilização das expressões (5) e (6), para o processamento digital de imagens.

No capítulo 3, apresentamos os métodos numéricos e os processos de discretização utilizados para o desenvolvimento dos programas computacionais utilizados para a obtenção dos resultados.

No capítulo 4, mostramos os resultados experimentais obtidos com a implementação numérica das E.D.P.'s (4), (5) e (6), e também os resultados obtidos com a utilização dos outros coeficientes de difusão mostrados anteriormente. Para analisarmos de forma comparativa os resultados, usamos cinco imagens teste e também fizemos alguns gráficos para melhor analisarmos os resultados obtidos com o uso de cada alternativa para o coeficiente de difusão.

Finalmente, no capítulo 5, tecemos algumas conclusões baseadas nos resultados obtidos por cada uma das três E.D.P.'s consideradas e também pelos resultados obtidos com a utilização dos outros coeficientes de difusão mostrados no final do capítulo 1. Encerramos o trabalho, fazendo algumas perspectivas e projetos futuros baseadas nas E.D.P.'s aqui apresentadas.



Capítulo 1

Análise do Comportamento da Difusão Anisotrópica em Processamento de Imagens

Neste capítulo, mostramos a análise feita por You & Kaveh a respeito do comportamento da difusão anisotrópica do modelo de Malik & Perona [20]. O objetivo é demonstrar que a difusão anisotrópica é bem posta, quando existe um único mínimo global no funcional energia $E(u)$, e que é mal posta, quando o funcional energia possui um número infinito de mínimos globais. Para fazer isto, You & Kaveh expressaram a equação de difusão anisotrópica a partir de um certo problema de otimização para desta forma, analisar seu comportamento baseados na forma de sua superfície de energia.

Primeiramente, mostramos alguns conceitos básicos referentes a difusão anisotrópica no modelo de Malik & Perona. Também será mostrado, que a difusão anisotrópica é processo de energia dissipativo e então, mostramos que existe uma relação entre o funcional energia $E(u)$ e a difusão anisotrópica. Na seqüência, esta relação será utilizada para analisarmos o comportamento da difusão.



No final do capítulo, mostramos alguns exemplos de coeficientes de difusão anisotrópica bem postos e outros mal postos, além dos resultados práticos obtidos através destes coeficientes.

1.1 Conceitos Preliminares

Definição 1.1 (Derivada Parcial [10]). *Seja u uma função, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. A derivada parcial de u , em relação, à variável x , que é a primeira variável, poderá ser denotada por,*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_x \quad \text{ou} \quad \partial_x u.$$

De maneira análoga, as derivadas parciais de segunda ordem em relação, às variáveis x e/ou y , poderão ser denotadas por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \text{e} \quad u_{xy}.$$

Definição 1.2 (Equação Diferencial Parcial [10]). *Uma equação diferencial parcial, é uma equação que envolve uma função incógnita de duas ou mais variáveis e suas derivadas. Logo, uma equação diferencial parcial de n variáveis independentes, $x_1, \dots, x_n$, é uma equação na forma:*

$$F\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \dots\right) = 0. \quad (1.1)$$

Definição 1.3 (Operador Gradiente [10]). *Definimos o operador gradiente, denotado por ∇ em $\mathbb{R}^n$, da seguinte forma:*

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \quad (1.2)$$

Definição 1.4 (Ordem de uma E.D.P. [10]). *A ordem de uma equação diferencial parcial é dada pela mais alta ordem da derivada que ocorre na equação.*



Definição 1.5 (Operador Laplaciano [10]). Utilizamos a seguinte notação, para o cálculo do Laplaciano de uma função u ,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \quad (1.3)$$

Definição 1.6 (Operador Divergente [2]). Utilizamos a seguinte notação para o cálculo do divergente de uma função u :

$$\operatorname{div}(u) = u_x + u_y.$$

Definição 1.7 (Ponto Estacionário [26]). Uma imagem $u \in I(\Omega)$, que denota o espaço imagem que é definido como sendo o conjunto de funções u suavizadas por partes em Ω com descontinuidades somente nos contornos, é um ponto estacionário do funcional energia $E(u)$, se

$$dE(u; h) = 0, \text{ para } h \text{ pequeno, } h \in I(\Omega), \quad (1.4)$$

ou equivalentemente, se

$$\nabla E(u) = 0, \quad (1.5)$$

sendo $dE(u; h)$, a variação de Gâteaux, de u na direção h . A definição da variação de Gâteaux, e sua utilização serão mostradas na próxima seção.

O leitor mais interessado pode encontrar mais detalhes a respeito da variação de Gâteaux em [23]. Um outro conceito importante para o desenvolvimento deste capítulo, é o conceito de convexidade.

Definição 1.8 (Conjunto Convexo [23]). Seja V , um subconjunto de um espaço vetorial U , $V \subseteq U$. Então, V é convexo se para todo $u \in V$,

$$u = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in V, \quad (1.6)$$

para todo $u_1, u_2 \in V$ e para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Definição 1.9 (Funcional Convexo [26]). *Seja $F(u) : V \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional real definido no subconjunto convexo V . Então, dizemos que $F(u)$ é convexo em V , se*

$$F(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq \lambda F(u_1) + (1 - \lambda)F(u_2), \quad (1.7)$$

para todo $u_1, u_2 \in V$ e $\lambda \in (0, 1)$. Se a igualdade é válida apenas para o caso em que $u_1 = u_2$, então $F(u)$ é dita ser estritamente convexa.

Definição 1.10 (Função Periódica [13]). *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T , se $f(x + T) = f(x)$ para todo x real.*

A difusão anisotrópica foi proposta primeiramente por Malik & Perona [20], como uma ferramenta para descrição de imagens multiescalas, segmentação, detecção de contornos de imagens. A idéia básica da difusão anisotrópica é obter a partir de uma imagem inicial $u_0(x, y)$, definida em um domínio convexo $\Omega \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, uma família de imagens suavizadas $u(x, y, t)$ obtidas a partir da solução da seguinte equação diferencial parcial [20]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} \left(c(|\nabla u|) \nabla u \right), \quad (1.8)$$

com condição inicial dada por:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y).$$

O coeficiente de difusão $c(\cdot)$ é uma função não-negativa cujo argumento é o módulo do gradiente local da imagem dado por: $|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. O coeficiente de difusão desejável deve ser de tal forma que (1.8) difunda mais em áreas homogêneas e menos em volta das regiões com grandes mudanças de intensidade (contornos). Pequenas variações na intensidade da imagem devem ser consideradas ruídos e não texturas, as quais também serão suavizadas e os contornos, desta forma, preservados. Dois coeficientes de difusão foram sugeridos por Malik & Perona:



$$c(s) = \exp \left[- \left(\frac{s}{k} \right)^2 \right] \quad (1.9)$$

e

$$c(s) = \frac{1}{1 + ks^2}, \quad (1.10)$$

sendo k uma constante escolhida de acordo com uma aplicação em particular.

You & Kaveh [26] mostraram que a difusão anisotrópica com coeficientes de difusão dados por (1.9) e (1.10) são mal postos no sentido de que imagens limitadas numa região Ω também tendem a divergir durante o processo de difusão. Na implementação prática no computador, o processo de difusão pode divergir dependendo do esquema de diferenças, do tamanho da malha utilizado [18].

Diversos argumentos sobre o fato da difusão anisotrópica ser mal posta são baseadas no trabalho de Hollig et al [15], onde é estabelecido que a difusão anisotrópica uni-dimensional (1-D) é bem posta se, e somente se,

$$f'(s) \geq 0, \quad (1.11)$$

sendo $f(s)$ a *função fluxo*, definida da seguinte forma:

$$f(s) = s c(s). \quad (1.12)$$

Obviamente, o comportamento da difusão anisotrópica bi-dimensional (2-D) é bem mais complexo que sua versão uni-dimensional. Através da análise da difusão anisotrópica 2-D, feita em [20] podemos desenvolver coeficientes de difusão mais eficientes. Alguns destes coeficientes, serão apresentados ao final deste capítulo.

O mal comportamento da difusão anisotrópica, pode ser reduzido através da introdução de um operador suavização no argumento do coeficiente de difusão $c(s)$. Alvarez, L., Lions, P. L., Morel, J.M. e Coll, T., em [1], consideraram por exemplo,



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} [c(|\nabla G(s) * u|) \nabla u], \quad (1.13)$$

sendo $G(s) * u$ a convolução da imagem no tempo t , com núcleo Gaussiano de escala s , que é dado a priori.

A propriedade seletiva da variável s é fundamental para o sucesso da difusão anisotrópica no sentido que o processo de difusão pode ser mal posto, para pequenos valores de s , enquanto que a imagem pode ser “suavizada” para grandes valores de s . Uma possível solução para evitarmos a geração de manchas causada pela preservação do ruído, é utilizarmos inicialmente grandes valores para s para removermos o ruído e logo em seguida reduzir o valor de s para que a imagem reconstruída não seja “suavizada” além do necessário [28]. A questão de selecionarmos um valor ótimo para s , ainda é um problema em aberto. A carga computacional envolvida na convolução $G(s) * u$ é um problema, pois, é necessário, que a cada instante de tempo, implementemos diretamente, ou calculemos uma difusão anisotrópica em separado. No capítulo 3, mostramos uma maneira de implementarmos numericamente o produto de convolução $G(s) * u$.

O produto de convolução é utilizado para se encontrar a distribuição da soma de duas ou mais variáveis calculada por integração e pode ser definido como:

Definição 1.11 (Iório [16]). *Seja, $f, g \in SC_{\text{per}}(2l)$, o espaço das funções seccionalmente periódicas de período $2l$, a convolução de f e g é a função $f * g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y)g(x - y)dy. \quad (1.14)$$

A definição de função seccionalmente contínua é dada a seguir:



Definição 1.12 (Função Seccionalmente Contínua [13]). Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se existir uma partição $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que f seja contínua em cada subintervalo aberto (x_{j-1}, x_j) e as possíveis descontinuidades devem ocorrer necessariamente em pontos de π são todas de primeira espécie ou seja, os limites a esquerda e a direita existem mas são diferentes.

Uma função seccionalmente periódica, é uma função seccionalmente contínua, mas, que se repete em um certo período T da reta.

Na seção a seguir, demonstramos que a difusão anisotrópica é um processo de energia dissipativo e seu comportamento depende da forma de sua superfície de energia, que é a superfície formada pelos valores dos “pixels” da imagem em cada ponto (x, y) .

1.2 A Difusão como um Processo de Energia Dissipativo

Considere, o seguinte funcional energia definido no espaço das imagens suavizadas, isto é, imagens na qual ∇u é finito em Ω , da seguinte forma [26]:

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla u|) d\Omega, \quad (1.15)$$

sendo $f(|\nabla u|) \geq 0$ uma função crescente de $|\nabla u|$, quando,

$$f'(|\nabla u|) > 0. \quad (1.16)$$

Também precisamos definir que $f'(|\nabla u|) = 0$ para o caso $|\nabla u| = 0$. Devido a não-negatividade de $f(|\nabla u|)$, o funcional energia é limitado inferiormente, ou seja,

$$E(u) \geq 0. \quad (1.17)$$

Sendo $|\nabla u| \geq 0$ e $f(|\nabla u|)$ uma função crescente de $|\nabla u|$, o mínimo global de $E(u)$ ocorre quando,

$$u(x, y) \equiv \text{constante, para todo } (x, y) \in \Omega. \quad (1.18)$$

Assim, este mínimo global inclui um número infinito de imagens constantes, todas com o mesmo valor do funcional $E(u)$. Observe, então, que este funcional energia é uma medida da suavidade da imagem (inicialmente com ruído) e desta forma, esta minimização é equivalente a suavização da imagem, ou seja, remoção de ruído.

You & Kaveh [26], minimizaram $E(u)$ considerando a primeira variação de Gâteaux de $E(u)$ em u na direção h , a qual é definida da seguinte forma:

Definição 1.13 (Variação de Gâteaux [23]). *Seja $N : D_N \subseteq U \rightarrow V$ um operador entre dois espaços vetoriais normados U e V . Seja D_N um subespaço de U , e seja $u, h \in D_N$. Como D_N é um espaço vetorial, temos que $u + \lambda h \in D_N$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $N(u + \lambda h) \in V$. Caso o limite,*

$$dN(u; h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{N(u + \lambda h) - N(u)}{\lambda}, \quad (1.19)$$

exista, então $dN(u; h) \in V$ é a chamada Variação de Gâteaux de N em u na direção h .

Observação: A variação de Gâteaux é uma generalização do conceito de derivada direcional. Além disso, a definição dada acima, coincide com a derivada ordinária

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} N(u + \lambda h) \right|_{\lambda=0}.$$

Em nosso caso, temos então,

$$dE(u; h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{E(u + \lambda h) - E(u)}{\lambda}. \quad (1.20)$$



Dessa forma, precisamos identificar as condições, sobre as quais:

$$dE(u; h) = 0, \quad \text{para } \lambda \text{ pequeno.} \quad (1.21)$$

Considere então o conjunto $\Omega_0 = \{(x, y) : |\nabla u(x, y)| = 0, (x, y) \in \Omega\}$ e, vamos calcular a variação de Gâteaux aplicada ao funcional dado pela expressão, (1.15), dado por:

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla u|) d\Omega. \quad (1.22)$$

Dessa forma, utilizando a observação dada anteriormente, temos,

$$\begin{aligned} dE(u; h) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} E(u + \lambda h) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_{\Omega} f(|\nabla(u + \lambda h)|) d\Omega \right] \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(|\nabla(u + \lambda h)|) d\Omega \end{aligned} \quad (1.23)$$

Vamos calcular a derivada parcial separadamente. Assim, utilizando a derivação composta, temos,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(f(|\nabla(u + \lambda h)|) \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(|\nabla(u + \lambda h)|) \frac{\partial}{\partial \lambda} (|\nabla(u + \lambda h)|) \quad (1.24)$$

Agora, note que, $|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ e assim,

$$|\nabla(u + \lambda h)| = \sqrt{(u + \lambda h)_x^2 + (u + \lambda h)_y^2}. \quad (1.25)$$

Como,

$$(u + \lambda h)_x^2 = u_x^2 + 2\lambda u_x h_x + \lambda^2 h_x^2$$

e,

$$(u + \lambda h)_y^2 = u_y^2 + 2\lambda u_y h_y + \lambda^2 h_y^2$$

temos então que,

$$|\nabla(u + \lambda h)| = \sqrt{u_x^2 + 2\lambda u_x h_x + \lambda^2 h_x^2 + u_y^2 + 2\lambda u_y h_y + \lambda^2 h_y^2}. \quad (1.26)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} |\nabla(u + \lambda h)| = \frac{1}{2} \frac{2u_x h_x + 2u_y h_y + 2\lambda h_x^2 + 2\lambda h_y^2}{\sqrt{u_x^2 + 2\lambda u_x h_x + \lambda^2 h_x^2 + u_y^2 + 2\lambda u_y h_y + \lambda^2 h_y^2}}. \quad (1.27)$$

Fazendo-se $\lambda = 0$, obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} |\nabla(u + \lambda h)| = \frac{u_x h_x + u_y h_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla h, \quad (1.28)$$

sendo $(\cdot)$ a representação do produto escalar.

Assim, a variação de Gâteaux do funcional $E(u)$, é dada por,

$$dE(u; h) = \int_{\Omega - \Omega_0} f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla h d\Omega. \quad (1.29)$$

sendo $\Omega - \Omega_0$ o conjunto os elementos de Ω não nulos. Como desejamos que $f'(|\nabla u|) = 0$, quando $|\nabla u| = 0$, podemos escrever,

$$dE(u; h) = f'(0) \int_{\Omega_0} |\nabla h| d\Omega + \int_{\Omega - \Omega_0} f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla h d\Omega. \quad (1.30)$$

Agora, vamos escrever a integral (1.30), como uma única integral sobre a região Ω . Para isto, escolhemos h de forma que,

$$\begin{cases} |\nabla h| \neq 0, & (x, y) \in \Omega_0 \\ |\nabla h| = 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.31)$$

temos que, o segundo termo de (1.30) é nulo, mas o primeiro termo não. Em geral para $dE(u; h) = 0$, devemos ter,

$$f'(0) = 0. \quad (1.32)$$

Se denotarmos $\vec{0} = [0, 0]^T$ e definirmos

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \Big|_{\nabla u = \vec{0}} = \vec{0}, \quad (1.33)$$

podemos então escrever o primeiro termo de (1.30), da seguinte forma,

$$\int_{\Omega_0} f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \nabla h \cdot d\Omega. \quad (1.34)$$

Então os dois termos de (1.30) podem ser agrupados em uma única integral sobre Ω , e assim, obtemos:

$$dE(u; h) = \int_{\Omega} f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \nabla h \cdot d\Omega. \quad (1.35)$$

Agora, utilizamos o Teorema de Green para obtermos a seguinte expressão,

$$dE(u; h) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] h d\Omega + \oint_{\partial\Omega} f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \vec{n} h d\partial\Omega, \quad (1.36)$$

sendo $\partial\Omega$ a fronteira da imagem de domínio Ω e $\vec{n}$ é o vetor ortonormal a $\partial\Omega$.

Se considerarmos condições de fronteiras simétricas para a imagem, temos:

$$\nabla u(x, y) \cdot \vec{n} \equiv 0 \quad \text{para } (x, y) \in \partial\Omega. \quad (1.37)$$

Dessa forma, o segundo termo da expressão (1.36) desaparece e a variação de Gâteaux pode ser expressa da seguinte forma:

$$dE(u; h) = \langle \nabla E(u), h \rangle, \quad (1.38)$$

sendo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o produto interno definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x, y) g(x, y) d\Omega \quad (1.39)$$

e

$$\nabla E(u) = -\operatorname{div} \left[f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right], \quad (1.40)$$

como sendo o gradiente de $E(u)$ no ponto u .

Dessa forma, You & Kaveh, minimizaram o funcional $E(u)$, movendo-se na direção negativa do gradiente, através da seguinte equação diferencial parcial parabólica:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla E(u) = \operatorname{div} \left[f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right]. \quad (1.41)$$

Obviamente, a expressão (1.41) é a mesma expressão da difusão anisotrópica (1.8) se considerarmos o coeficiente de difusão da forma:

$$c(|\nabla u|) = \frac{f'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}. \quad (1.42)$$

De fato, a expressão, (1.42) é um coeficiente de difusão, pois, esta expressão é não negativa, devido a expressão (1.16). Podemos observar que a função fluxo utilizada para o caso uni-dimensional da difusão (veja (1.12)) é dada por:

$$\phi(s) = s c(s) = f'(s). \quad (1.43)$$

Como o funcional energia é limitado inferiormente, (1.17), You & Kaveh em [26] provaram a estabilidade do sistema dada por (1.41) mostrando que o sistema dissipa energia com o tempo. A derivada temporal do funcional energia $E[u(t)]$ do sistema é dada por,

$$\frac{dE[u(t)]}{dt} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{E(u + \lambda h) - E(u)}{\lambda} \Big|_{h=-\nabla E(u)}, \quad (1.44)$$

que é a variação de Gâteaux (1.20) de $E(u)$ na direção $h = -\nabla E(u)$.

Conseqüentemente, por (1.38), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dE[u(t)]}{dt} &= \langle \nabla E(u), -\nabla E(u) \rangle \\ &= -\langle \nabla E(u), \nabla E(u) \rangle \leq 0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

o que nos mostra que a difusão anisotrópica é realmente um processo que dissipa energia com o tempo. Portanto, a difusão anisotrópica é um processo que visa minimizar o funcional $E(u)$ e chega a ser interrompida em pontos estacionários, ou seja, em pontos onde, $\nabla E(u) = 0$.

Sendo o funcional energia uma medida da quantidade de suavização da imagem, o processo de energia dissipativa da difusão anisotrópica (1.41) nos dá uma continuidade de imagens com graus crescentes de suavização. Assim, o comportamento da difusão anisotrópica é obviamente dependente da forma da superfície de energia. Se o mínimo global dado por (1.18) é o único mínimo da superfície de energia, o processo de difusão irá convergir para este único mínimo global. Desta forma, podemos considerar a difusão anisotrópica *bem posta*.

Por outro lado, posteriormente mostraremos que sob certas condições, o funcional energia terá um número infinito de mínimos globais, que são densos no espaço imagem e assim, temos uma difusão anisotrópica *mal posta*.

O argumento que o mínimo global dado por (1.18) é único, é fundamental para o uso da difusão anisotrópica como uma ferramenta para filtros de espaço de escala. Se existe um mínimo local numa superfície de energia, o processo de difusão pode ser interrompido em uma dessas superfícies e, então, a suavização da imagem (remoção de ruído) pode ficar em um nível maior que o do mínimo global. Assim, a suavização não será suficiente para a remoção de ruído.

1.3 Imagens Suavizadas por Partes

A derivação acima, foi baseada em um funcional energia $E(u)$, definido no espaço das imagens **suavizadas**. Entretanto, a maioria das imagens que estamos considerando, contém uma grande quantidade de mudanças de intensidade, ou seja, contornos. Neste caso, You & Kaveh em [26], modelaram a imagem utilizando uma **suavização por partes**. Estes autores fizeram, uma extensão dos



resultados mostrados anteriormente para este tipo de suavização.

Seja $I(\Omega)$ a denotação do espaço imagem, definido como o conjunto das funções suavizadas por partes na região Ω , com descontinuidades somente nos contornos da imagem. A principal dificuldade em estender a definição de $E(u)$ para este espaço imagem, é que o valor do gradiente $|\nabla u|$ tende ao infinito nos contornos, ou seja, nas regiões com grandes mudanças de intensidade. Se a integral (1.15) é entendida no sentido usual, estes saltos nos contornos, não irão contribuir para o valor do funcional energia. Um tratamento específico deste fato, esta sendo feito envolvendo a integral de Lebesgue-Stieltjes. Aqui, You & Kaveh utilizaram a função delta de Dirac [12], definida da seguinte forma:

Definição 1.14. *A função impulso unitário, ou função delta de Dirac é definida como tendo as seguintes propriedades:*

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{se } x = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (1.46)$$

Uma imagem $u(x, y) \in I(\Omega)$ pode ser escrita como,

$$u(x, y) = w(x, y) + s(x, y) \quad (1.47)$$

sendo $w(x, y)$ a parte suavizada de $u(x, y)$ e $s(x, y)$ representa o “salto” no contorno, que chamamos de “step images” e definimos da seguinte forma [26]:

Definição 1.15 (“Step Images” [26]). *Seja S um subconjunto de Ω . A função definida por:*

$$\chi_s(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in S \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.48)$$

é conhecida como *função característica* de S . Uma “step image” é uma combinação linear de um número finito de funções características. Especificamente, sejam Ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$, partições de Ω , então, a “step image” será dada por:



$$s(x, y) = \sum_{i=1}^n s_i \chi_{\Omega_i}(x, y) \quad (1.49)$$

sendo, s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, constantes e não necessariamente iguais a partição adjacente Ω_i . Por exemplo, considere a seguinte "step image":

$$s(x, y) = \begin{cases} s_1, & x_0 \leq x < x_1 \\ s_2, & x_1 \leq x < x_2, \\ s_3, & x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases} \quad (1.50)$$

sendo $s_1 \neq s_2$ e $s_2 \neq s_3$.

Assim, por (1.49), podemos reescrever a integral (1.15) como a soma de duas integrais:

$$E(u) = E(w) + E(s), \quad (1.51)$$

sendo $E(w)$ a integral usual com o integrando suavizado e $E(s)$ é a integral que tem a "step image" como seu integrando.

Supondo que $s(x, y)$ consiste de um salto no contorno ao longo de uma curva l (não necessariamente conexa ou fechada), com um salto $J(x, y)$, podemos fazer uma aproximação deste salto através de um contorno inclinado $v(x, y; \Delta)$, com um comprimento Δ , ilustrado na figura 1.1 a seguir.

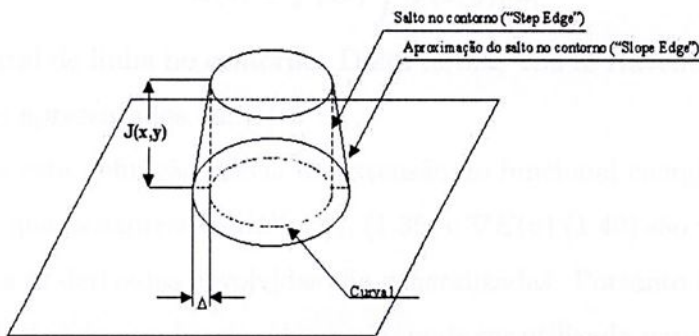


Figura 1.1: Interpretação da integral pela função impulso nos contornos da imagem.

Desta forma, You & Kaveh [26], calcularam o valor do gradiente nesta inclinação através da seguinte expressão:

$$|\nabla v(x, y; \Delta)| = \frac{|J(x, y)|}{\Delta}. \quad (1.52)$$

Esta, é uma função impulso, pois, quando, $\Delta \rightarrow 0$, temos, $|\nabla v(x, y; \Delta)| \rightarrow \infty$ e sua área tende para,

$$\frac{\Delta[|J(x, y)|]}{\Delta} = |J(x, y)|.$$

Integrando $E(v)$ na direção ortogonal a l e depois ao longo de l , temos,

$$E(v) = \int_l \Delta f \left[\frac{|J(x, y)|}{\Delta} \right] dl. \quad (1.53)$$

Como $v(x, y; \Delta) \rightarrow s(x, y)$ quando $\Delta \rightarrow 0$, temos:

$$\begin{aligned} E(s) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_l \Delta f \left[\frac{|J(x, y)|}{\Delta} \right] dl = \int_l \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f \left[\frac{|J(x, y)|}{\Delta} \right]}{\frac{1}{\Delta}} dl = \\ &= \begin{cases} 0, & f(\infty) < \infty; \\ f'(\infty) \int_l |J(x, y)| dl, & f(\infty) = \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Observe que $f'(\infty) = 0$, sempre que $f(\infty) < \infty$. Logo, a expressão (1.54), pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$E(s) = f'(\infty) \int_l |J(x, y)| dl, \quad (1.55)$$

que é a integral de linha no contorno. Desta forma, You & Kaveh, generalizaram os resultados apresentados em [1].

Com esta definição prévia da extensão do funcional energia $E(u)$, podemos mostrar que as expressões $dE(u; h)$, (1.35) e $\nabla E(u)$ (1.40) são válidas, exceto quando todas as derivadas envolvidas são generalizadas. Portanto a relação entre a difusão anisotrópica e o funcional energia, pode ser utilizada para fazermos uma análise do comportamento da difusão anisotrópica.

Como vimos anteriormente, existe uma forte relação entre a difusão anisotrópica e o funcional energia $E(u)$. Vamos então, identificar condições para



existência de pontos estacionários no funcional $E(u)$ (definição (1.7)) e, também, analisar a natureza destes pontos. Assim, temos condições suficientes para identificar se uma difusão anisotrópica é bem ou mal posta.

1.4 A Difusão Anisotrópica Mal Posta

Nesta seção, mostraremos que sob certas condições, o funcional energia $E(u)$ têm um número infinito de mínimos globais que são densos no espaço imagem.

Considere a “step image” mostrada anteriormente, (1.49), e denote

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1,2,\dots,n} \partial\Omega_i,$$

sendo $\partial\Omega_i$ a fronteira de Ω_i . Então o gradiente da imagem (1.49) pode ser obtido da seguinte forma:

$$|\nabla u(x, y)| = \begin{cases} \infty, & (x, y) \in \tilde{\Omega} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.56)$$

Por exemplo, no caso da expressão, (1.50), dada por,

$$s(x, y) = \begin{cases} s_1, & x_0 \leq x < x_1 \\ s_2, & x_1 \leq x < x_2, \\ s_3, & x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$$

com $s_1 \neq s_2$ e $s_2 \neq s_3$, temos

$$|\nabla u(x, y)| = (s_2 - s_1)\delta(x - x_1) + (s_3 - s_2)\delta(x - x_2) \quad (1.57)$$

sendo $\delta(x)$ a função impulso de Dirac.



Teorema 1.1 (You & Kaveh [26]). Cada uma das “step images” dadas por (1.49), densas no espaço imagem $I(\Omega)$, é um ponto estacionário de $E(u)$, definição (1.7) se, e somente se,

$$f'(\infty) = 0. \quad (1.58)$$

Demonstração. Como as “step images” são densas no espaço imagem $I(\Omega)$, cada sinal contínuo pode ser aproximado por uma sequência de sinais menores (“step signals”), ou seja, para cada sinal contínuo u , existe uma sequência desses sinais menores, $\{s_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, tais que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = u. \quad (1.59)$$

($\Leftarrow$) Sendo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} \left| f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right| \\ &= \lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} f'(|\nabla u|) \left| \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right| \\ &= f'(\infty) = 0, \end{aligned} \quad (1.60)$$

temos,

$$f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \tilde{\Omega}. \quad (1.61)$$

Pelas expressões, (1.32), dada por,

$$f'(0) = 0,$$

e (1.33),

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \Big|_{\nabla u = \vec{0}} = \vec{0},$$

segue que:



$$f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega - \tilde{\Omega}. \quad (1.62)$$

Combinando-se as expressões (1.61) e (1.62), obtemos,

$$f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \equiv 0, \quad \text{para } (x, y) \in \Omega. \quad (1.63)$$

Logo, pela expressão (1.41), dada por,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla E(u) = \operatorname{div} \left[f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right],$$

temos, $\nabla E(u) \equiv 0$. ✓

($\Rightarrow$) Considere a variação de Gâteaux (1.35) de $E(u)$, em uma "step image" s , na direção $h = s$, ou seja,

$$dE(u; h) = \int_{\Omega} f'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \nabla h d\Omega.$$

Como,

$$\nabla s = (s_x, s_y) \quad \text{e} \quad |\nabla s| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2},$$

temos,

$$\frac{\nabla s}{|\nabla s|} \cdot \nabla s = \frac{1}{|\nabla s|} ((s_x, s_y) \cdot (s_x, s_y)) = \frac{1}{|\nabla s|} |\nabla s|^2 = |\nabla s|,$$

sendo $(\cdot)$ a representação do produto escalar.

Dessa forma,

$$dE(s; s) = \int_{\Omega} f'(|\nabla s|) |\nabla s| d\Omega. \quad (1.64)$$

Como,

$$f'(|\nabla s|) |\nabla s| = 0 = f'(\infty) |\nabla s|$$

quando $|\nabla s| = 0$, a expressão (1.64), pode ser escrita da seguinte forma:

$$dE(s; s) = \int_{\Omega} f'(\infty) |\nabla s| d\Omega, \quad (1.65)$$

que, comparada com a expressão (1.55) nos dá:

$$dE(s; s) = f'(\infty) \int_l |J(x, y)| dl. \quad (1.66)$$

Para a “step image” (1.49) a integral na última equação é não nula, então $dE(s; s) = 0$ somente se $f'(\infty) = 0$, completando a demonstração. ✓

O teorema a seguir, ilustra a origem dos pontos estacionários.

Teorema 1.2 (You & Kaveh [26]). *Se a função $f(\cdot)$, de uma difusão anisotrópica, satisfaz $f'(\infty) = 0$, então:*

- (i) *cada uma das “step images” que são densas no espaço imagem, é um mínimo global de $E(u)$;*
- (ii) *o funcional $E(u)$ é descontínuo para toda imagem suavizada, exceto para a imagem constante (1.18).*

Demonstração:

(i) Para uma “step image” s , o valor de w na expressão (1.47), $(u(x, y) = w(x, y) + s(x, y))$ é uma imagem constante. A expressão, (1.55), nos diz que

$$E(s) = f'(\infty) \int_l |J(x, y)| dl.$$

Logo, por (1.49) e pela hipótese $f'(\infty) = 0$, temos que $E(s) = 0$. Portanto, por (1.51),

$$E(s) = E(w) = E(\text{imagem constante}) \quad (1.67)$$

que é o mesmo valor do mínimo global (1.18) de $E(u)$. Logo, cada uma das “step images” (1.47) é um mínimo global de $E(u)$. ✓

(ii) Da expressão (1.59), temos que um sinal contínuo u , pode ser aproximado por uma sequência de “step signals” s_n , $n = 1, 2, \dots$. Para uma imagem contínua u , é óbvio que $E(u) \neq 0$, exceto quando u é uma imagem constante (veja a expressão (1.18)). Por outro lado, as expressões (1.55),



$$E(s) = f'(\infty) \int_l |J(x, y)| dl,$$

e (1.58), $f'(\infty) = 0$, nos mostram que $E(s_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(s_n) = 0 \neq E(u). \quad (1.68)$$

Portanto $E(u)$, não é contínua em u , exceto para a imagem constante (1.18).✓

Para melhor ilustrarmos como a difusão anisotrópica é mal posta, comparamos nosso espaço imagem com a reta real, as imagens contínuas com os números racionais e as “step images” com os números irracionais.

Então, dos teoremas (1.1) e (1.2), o funcional energia, tem valores não nulos para todos os números racionais e valor nulo para todos os números irracionais. Uma vez que os números irracionais são densos na reta real, ou seja, existe um irracional entre quaisquer dois racionais, o funcional energia é muito irregular e, assim, não é possível saber em quais desses “números irracionais” a difusão anisotrópica irá atuar, como podemos ver na figura 1.2 a seguir.

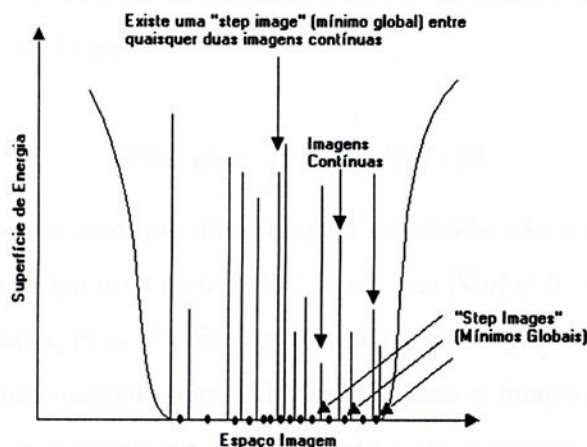


Figura 1.2: Esquema de alguns modelos de difusão anisotrópica mal postos.

A seguir, mostramos sob quais condições a difusão anisotrópica pode ser considerada bem posta.

1.5 A Difusão Anisotrópica Bem Posta

Uma difusão anisotrópica será considerada bem posta, se a imagem constante, dada por (1.18), é o único mínimo global do funcional energia $E(u)$, pois, dessa forma, o processo de difusão irá convergir para este mínimo global. A seguir, veremos dois teoremas, que nos fornecem condições necessárias para a existência de um único mínimo global.

Do teorema (1.1), as “step images”, dadas por (1.49) não são pontos estacionários de $E(u)$, se $f'(\infty) \neq 0$. Estendemos este resultado para o seguinte teorema:

Teorema 1.3 (Whitaker & Pizer [28]). *Se $f'(\infty) \neq 0$ então, apenas a imagem constante (1.18) é ponto estacionário de $E(u)$.*

Demonstração. O teorema (1.1), nos mostrou que as “step images”, (1.49), não são pontos estacionários do funcional $E(u)$. Assim, precisamos mostrar somente que as imagens suavizadas também não são.

Considere a variação de Gâteaux (1.33) de $E(u)$ em uma imagem suavizada u na direção $h = u$. Logo,

$$dE(u; u) = \int_{\Omega} f'(|\nabla u|) |\nabla u| d\Omega. \quad (1.69)$$

Assumindo o fato que uma imagem suavizada não é uma imagem constante, então existe uma área menor $\Omega' \subset \Omega$ em que $|\nabla u| \neq 0$. Então o integrando é positivo nesta área, pois, $f'(|\nabla u|) > 0$. Assim, não é possível que esta integral seja nula para uma imagem suavizada, exceto para a imagem constante (1.18). Portanto, todas as imagens em $I(\Omega)$, exceto para a imagem constante (1.18), não são pontos estacionários de $E(u)$, definição (1.7), encerrando desta forma a demonstração. ✓

Este teorema, estabelece, que se $f'(\infty) \neq 0$, a imagem constante (1.18) é



o único mínimo global de $E(u)$. Este fato, entretanto, não exclui a possibilidade que a superfície determinada pelo funcional $E(u)$ possa ser irregular, considerando a possibilidade do processo de difusão exibir um comportamento desconhecido até convergir para a imagem constante (1.18).

Em [26] You & Kaveh, apresentam o seguinte coeficiente de difusão,

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} + \frac{p(T + \epsilon)^{p-1}}{T}, & x < T \\ \frac{1}{x} + \frac{p(x + \epsilon)^{p-1}}{x}, & x \geq T \end{cases}, \quad (1.70)$$

com $\epsilon > 0$ e $0 < p < 1$, tem $f'(\infty) = 1 \neq 0$. Com a utilização deste coeficiente a imagem constante é o único mínimo global pelo último teorema. Mas o efeito equivalente a uma difusão anisotrópica mal posta, pode aparecer durante o processo de difusão, ainda que posteriormente este efeito desapareça, como o exigido pelo último teorema. Portanto, precisamos de condições fortes para fazer com que $f'(\infty) \neq 0$ faça a superfície de $E(u)$ ser suficientemente regular para evitar que o efeito de uma “step image” equivalente apareça durante o processo de difusão. O único modo de fazer isso é exigir que o funcional $E(u)$ seja convexo. Assim, estes autores apresentaram o seguinte teorema.

Teorema 1.4 (You & Kaveh [26]). *Se a função $f(\cdot)$ de uma difusão anisotrópica é convexa, então seu funcional energia $E(u)$ é convexo e a imagem constante (1.18), $(u(x, y) \equiv \text{constante})$, é seu único mínimo global.*

Demonstração. Sejam, $u_1, u_2 \in I(\Omega)$, com $u_1 \neq u_2$, então, para cada $\lambda \in (0, 1)$, temos a seguinte desigualdade, conhecida como desigualdade de Minkowski,

$$|\nabla[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2]| \leq \lambda |\nabla u_1| + (1 - \lambda) |\nabla u_2|. \quad (1.71)$$

Como $f'(|\nabla u|) > 0$, $f(\cdot)$ é estritamente crescente. Logo, por, (1.71), temos:

$$f\left(|\nabla[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2]|\right) \leq f\left(\lambda|\nabla u_1| + (1 - \lambda)|\nabla u_2|\right). \quad (1.72)$$

Sendo $f(\cdot)$, convexa, temos:

$$f\left(\lambda|\nabla u_1| + (1 - \lambda)|\nabla u_2|\right) \leq \lambda f(|\nabla u_1|) + (1 - \lambda)f(|\nabla u_2|). \quad (1.73)$$

Portanto, por (1.72) e (1.73),

$$f\left(\nabla[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2]\right) \leq \lambda f(|\nabla u_1|) + (1 - \lambda)f(|\nabla u_2|). \quad (1.74)$$

Integrando-se a expressão (1.74), obtemos,

$$\int_{\Omega} f\left(|\nabla[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2]|\right) d\Omega \leq \lambda \int_{\Omega} f(|\nabla u_1|) d\Omega + (1 - \lambda) \int_{\Omega} f(|\nabla u_2|) d\Omega, \quad (1.75)$$

ou seja, pela expressão (1.15), temos,

$$E(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq \lambda E(u_1) + (1 - \lambda)E(u_2), \quad (1.76)$$

e, portanto, o funcional $E(u)$ é convexo pela definição (1.9).✓

Para provarmos a unicidade do mínimo global, utilizamos o teorema (1.3) e o fato que $f'(\infty) \neq 0$ se $f(\cdot)$ é convexo. De [5], temos o seguinte teorema.

Teorema 1.5 (Bazaara & Shetty [5]). *A função $f(\cdot)$ é convexa, se e somente se,*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{para todo } x_0, x \geq 0. \quad (1.77)$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos $f(\cdot)$ convexa. Então, para todo λ com $0 < \lambda \leq 1$, temos,

$$f\left(\lambda x + (1 - \lambda)x_0\right) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) \leq \lambda f(x) + f(x_0) - \lambda f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) - f(x_0) \leq \lambda(f(x) - f(x_0))$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) - f(x_0)}{\lambda} \leq f(x) - f(x_0)$$

$$\frac{f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0)}{\lambda} \leq f(x) - f(x_0) \quad (1.78)$$

Fazendo $\lambda \rightarrow 0$ em (1.78), obtemos:

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \quad \checkmark$$

($\Leftarrow$) Agora, suponha por hipótese, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, para todo $x_0, x \geq 0$. Sejam, $x_1, x_2 \geq 0$ e, $0 \leq \lambda \leq 1$. Considerando $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ e $x = x_1$ ou $x = x_2$, temos:

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \quad (1.79)$$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0). \quad (1.80)$$

Multiplicando (1.79) por λ e (1.80) por $(1 - \lambda)$ e somando-se as duas expressões, obtemos:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq \lambda f(x_0) + \lambda f'(x_0)(x_1 - x_0) + (1 - \lambda)f(x_0) + (1 - \lambda)f'(x_0)(x_2 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(\lambda x_1 - \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_2 - (1 - \lambda)x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_0) \quad (1.81)$$

Como consideramos, $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, substituindo este valor na expressão, (1.81), obtemos:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + f'(x_0) \cdot 0$$

$$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_2),$$

completando a prova do teorema. ✓

Se considerarmos $x_0 = \infty$ e assumirmos que $f'(x_0) = f'(\infty) = 0$, a expressão (1.77) nos diz que:

$$f(x) \geq f(\infty) \text{ para todo } x \geq 0, \quad (1.82)$$

contradizendo com o fato de $f(\cdot)$ ser crescente. Portanto, devemos ter $f'(\infty) \neq 0$ e assim, pelo teorema (1.3), apenas a imagem constante (1.18) é ponto estacionário de $E(u)$, completando a prova do teorema (1.4). ✓

Podemos verificar que o teorema acima também é válido para “step images”.

De fato, suponhamos que $s_1, s_2 \in I(\Omega)$ com $s_1 \neq s_2$, sendo s_1 e s_2 duas “step images” com seus “step edges” ao longo das curvas l_1 e l_2 . Seja, $l = l_1 \cup l_2$ e, J_1 e J_2 respectivamente, os saltos de s_1 e s_2 . Então, pela expressão (1.55), dada por,

$$E(s) = f'(\infty) \int_l |J(x, y)| dl,$$

e utilizando-se a desigualdade de Minkowski, temos:

$$\begin{aligned} E(\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2) &= f'(\infty) \int_l |\lambda J_1 + (1 - \lambda)J_2| dl \\ &\leq \lambda f'(\infty) \int_l |J_1| dl + (1 - \lambda) f'(\infty) \int_l |J_2| dl \\ &= \lambda E(s_1) + (1 - \lambda) E(s_2) \end{aligned} \quad (1.83)$$

que é o mesmo quando (1.76) é dado pelas “step images”, quando sua integral é interpretada através da expressão (1.55). Temos, então, o seguinte corolário:

Corolário 1.1 (You & Kaveh [26]). Se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, então a imagem constante (1.18) é o único mínimo global de $E(u)$ e a difusão anisotrópica é bem posta.

Demonstração. A demonstração do resultado acima, é baseada também em outro resultado de [5], que estabelece que $f(\cdot)$ é convexa se e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Assim, como por hipótese, $f''(x) \geq 0$, segue que $f(\cdot)$ é convexa.

Sendo $f(\cdot)$ convexa, pelo teorema (1.4), o funcional energia $E(u)$ é convexo e a imagem constante (1.18) é seu único mínimo global, e também dessa forma, a difusão será bem posta. ✓

Anteriormente, discutimos o comportamento global da difusão anisotrópica. Na seção 1.6 a seguir, fazemos algumas considerações a respeito do comportamento local do processo de difusão.

1.6 Decomposição Ortogonal e Interpretação Geométrica da Difusão Anisotrópica

Em um ponto específico $(x, y) \in \Omega$ de uma imagem, o comportamento da difusão anisotrópica (1.41) depende é claro de $f'(|\nabla u(x, y)|)$ que, em geral, depende das características da função f no ponto (x, y) . Em nosso caso, essas características são melhor caracterizadas através da estrutura da matriz Hessiana de f , dada por:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(|\nabla u|)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(|\nabla u|)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(|\nabla u|)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(|\nabla u|)}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \quad (1.84)$$

Os autovalores da matriz (1.84) são dados por:



$$\lambda_1(|\nabla u|) = \frac{f'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \quad \text{e} \quad \lambda_2(|\nabla u|) = f''(|\nabla u|). \quad (1.85)$$

Por (1.42) temos $\lambda_1 = c(|\nabla u|)$. Dessa forma, a difusão anisotrópica mostrada em (1.41) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_1 D_o + \lambda_2 D_g \quad (1.86)$$

sendo,

$$D_o = \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2}, \quad (1.87)$$

e

$$D_g = \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2}. \quad (1.88)$$

As expressões (1.87) e (1.88) são as derivadas direcionais de segunda ordem de u nas direções ortogonal e paralela ao gradiente local, respectivamente. Como as duas derivadas direcionais estão em direções ortogonais, a equação (1.86) representa uma decomposição ortogonal da difusão anisotrópica, como podemos observar na figura 1.3, com pesos dados pelos autovalores da matriz (1.84).

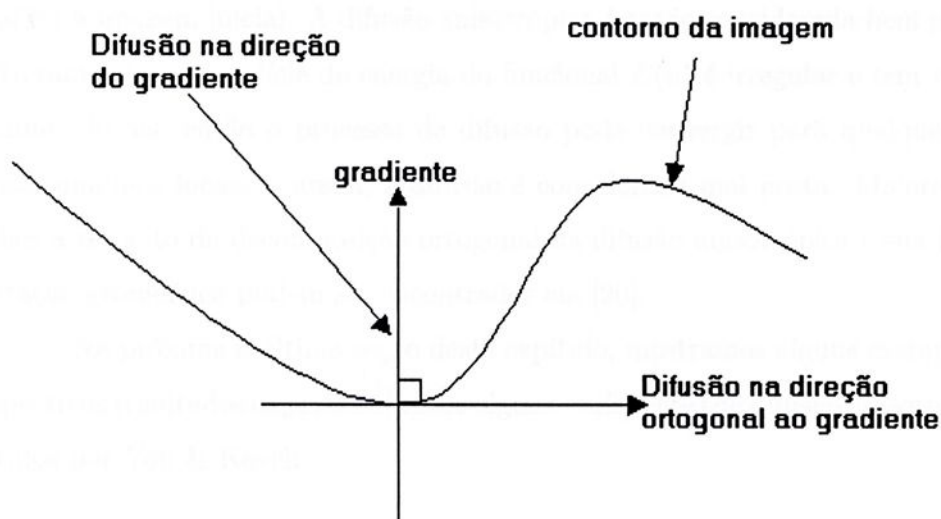


Figura 1.3: Decomposição Ortogonal da Difusão Anisotrópica.

Como o coeficiente de difusão é não-negativo, devido a (1.16), o primeiro termo da expressão (1.86) representa a difusão na direção ortogonal ao gradiente. Assim, temos uma preservação dos contornos uma vez que este também é ortogonal ao gradiente.

O segundo termo de (1.86) representa a difusão na direção do gradiente local. Este termo tem um comportamento suavizador se $\lambda_2(|\nabla u|) > 0$, caso contrário, ou seja, se $\lambda_2(|\nabla u|) < 0$, o ruído é preservado. Para preservarmos os contornos da imagem enquanto suavizamos regiões com pequenas variações de intensidade, devemos ter:

$$f''(x) \begin{cases} \geq 0, & x \leq T \\ < 0, & x > T \end{cases} \quad (1.89)$$

sendo T um parâmetro.

Considerando-se que a evolução temporal na expressão (1.41) pode ser interpretada como sendo um processo decrescente da superfície do funcional energia $E(u)$, seu comportamento depende da forma de sua superfície de energia e das condições iniciais onde inicia-se o processo. Se esta superfície tem um único mínimo global, então o processo de difusão irá convergir para este mínimo, seja qual for a imagem inicial. A difusão anisotrópica é então considerada bem posta. Entretanto, se a superfície de energia do funcional $E(u)$ é irregular e tem vários mínimos locais, então o processo de difusão pode convergir para qualquer um desses mínimos locais e, assim, a difusão é considerada mal posta. Maiores detalhes a respeito da decomposição ortogonal da difusão anisotrópica e sua interpretação geométrica podem ser encontrados em [20].

Na próxima e última seção deste capítulo, mostramos alguns exemplos e respectivos resultados experimentais de alguns coeficientes de difusão anisotrópica, obtidos por You & Kaveh.



1.7 Exemplos Mal Postos e Bem Postos de Difusão Anisotrópica

As técnicas numéricas utilizadas por You & Kaveh, na obtenção dos resultados mostrados nesta seção, foram baseados em leis de conservação hiperbólica e na teoria de soluções viscosas [19], [21], [29]. A equação de difusão anisotrópica,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(c(|\nabla u|) \nabla u \right),$$

proposta por Malik & Perona [20], foi discretizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{h} \left(\Delta_-^x \left\{ c \left[\sqrt{(\Delta_+^x u_{i,j}^n)^2 + m^2 (\Delta_+^y u_{i,j}^n, \Delta_-^y u_{i,j}^n)} \right] \Delta_+^x u_{i,j}^n \right\} \right. \\ \left. + \Delta_-^y \left\{ c \left[\sqrt{(\Delta_+^x u_{i,j}^n)^2 + m^2 (\Delta_+^y u_{i,j}^n, \Delta_-^y u_{i,j}^n)} \right] \Delta_+^y u_{i,j}^n \right\} \right) \end{aligned} \quad (1.90)$$

sendo Δt , o passo no tempo, h o tamanho do passo na malha espacial e,

$$\begin{aligned} \Delta_+^x u_{i,j} &= u_{i+1,j} - u_{i,j} \\ \Delta_-^x u_{i,j} &= u_{i,j} - u_{i-1,j} \\ \Delta_+^y u_{i,j} &= u_{i,j+1} - u_{i,j} \\ \Delta_-^y u_{i,j} &= u_{i,j} - u_{i,j-1} \end{aligned} \quad (1.91)$$

$$m(a, b) = \begin{cases} \min(a, b), & \text{se } a > 0 \text{ e } b > 0 \\ \max(a, b), & \text{se } a < 0 \text{ e } b < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.92)$$

Considerando-se os coeficientes de difusão dados pelas expressões (1.9) e (1.10) e, $f'(s) = s c(s)$, temos:

$$f'(s) = s \exp \left[- \left(\frac{s}{k} \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad f'(s) = \frac{s}{1 + ks^2}, \quad (1.93)$$

respectivamente.



Como as duas expressões em (1.93) satisfazem, $f'(\infty) = 0$, pelo teorema (1.2), ambas são consideradas mal postas.

No primeiro experimento feito por You & Kaveh, utilizou-se a imagem da “Lenna” com aproximadamente $SNR = 10dB$ de ruído Gaussiano, como podemos ver na figura 1.4 a seguir:

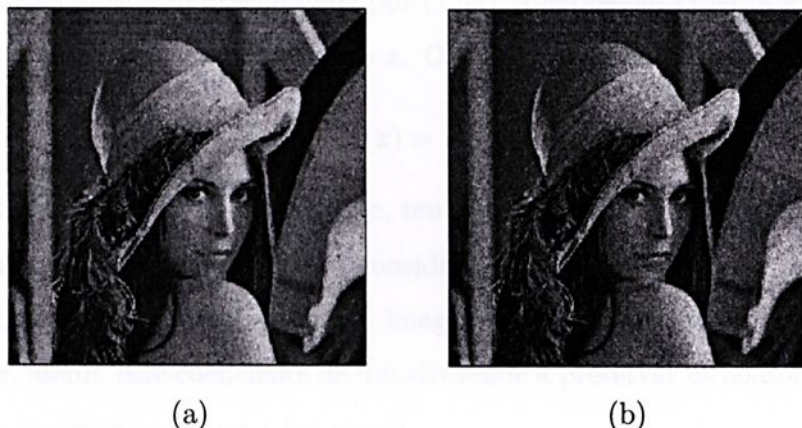


Figura 1.4 (a) e (b): Imagem Original e com ruído, $SNR \cong 10dB$, respectivamente.

Utilizando o coeficiente de difusão proposto por Malik & Perona:

$$c(s) = \exp \left[- \left(\frac{s}{k} \right)^2 \right]$$

para processar a imagem com ruído, figura 1.4(b), temos os seguintes resultados, utilizando-se a constante $k = 10.0$, que claramente nos mostra que este coeficiente de difusão é incapaz de remover completamente o ruído da imagem.





(c)

Figura 1.5: (a) Imagem Processada com 16; (b) com 128 e (c) com 4096 iterações, respectivamente.

Outro resultado interessante, mostrado por estes autores, é obtido se considerarmos que a linha de pesquisa da remoção de ruído, baseada na variação limitada pode ser colocada na categoria da difusão anisotrópica. O algoritmo original desta difusão, considera o seguinte problema de minimização [21]:

$$\min_u \int_{\Omega} |\nabla u| d\Omega, \quad (1.94)$$

sujeito a

$$|u - u_0| = \sigma^2 \quad (1.95)$$

sendo u_0 a imagem inicial com ruído e σ^2 a quantidade de ruído aplicado a imagem. Ignorando-se a limitação dada por (1.95), a expressão (1.94) é exatamente o funcional energia $E(u)$, com $f(x) = x$. O correspondente coeficiente de difusão é dado por:

$$c(x) = \frac{1}{x}. \quad (1.96)$$

Sendo, $f(x) = x$, obviamente, temos que $f'(x) = 1$ e $f''(x) = 0$, então, pelo teorema (1.4), esta difusão é considerada bem posta. Como $f''(x) = 0$, este coeficiente de difusão suaviza a imagem somente na direção ortogonal ao gradiente, assim, este coeficiente de difusão tende a preservar os contornos, como podemos observar na figura 1.6 a seguir,



Figura 1.6 (a) e (b): Imagem processada com 25 iterações utilizando o coeficiente de difusão (1.96) e respectiva segmentação.

Observe ainda que $f'(x) = 1$, contradizendo a condição necessária $f'(0) = 0$, que não foi considerada por [21]. Entretanto, na implementação prática no computador, para superar este problema, You & Kaveh incluíram apenas a condição “de não suavização”, quando $|\nabla u| = 0$, o que força $f'(0) = 0$ no algoritmo implementado.

Além disso, o algoritmo de base variacional acima, tende a produzir o reconhecimento de falsos contornos (“blocky effects”) nas áreas suavizadas. Este fato, pode ser atribuído a descontinuidade de $f'(x)$ no ponto $x = 0$ e na sobre-suavização de áreas já suavizadas por causa do coeficiente de difusão $c(x)$ da expressão (1.89), que torna-se muito grande quando x é muito pequeno, o que causa uma divisão por zero, durante o processo iterativo.

Em geral, para tratar deste problema, foi proposta a seguinte modificação no coeficiente de difusão (1.96):

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & x < T \\ \frac{1}{x}, & x \geq T \end{cases}, \quad (1.97)$$

sendo T , um parâmetro selecionado para uma aplicação em particular. Neste caso, You & Kaveh fixaram $T = 3.0$. Desta forma, $f(\cdot)$ fica sujeito a uma difusão

uniforme, onde o gradiente da imagem é pequeno para efetivamente suavizar áreas com ruído, enquanto “ignora” áreas de contorno. Podemos ver o resultado obtido com este coeficiente de difusão, na figura 1.7 a seguir.



Figura 1.7 (a) e (b): Imagem processada com 25 iterações utilizando o coeficiente de difusão (1.97) e respectiva segmentação.

Observe que a derivada de segunda ordem, $f''(x)$, é de tal forma que $c(\cdot)$ não é contínua em $x = T$. Para minimizar este problema, You & Kaveh [26] propuseram a seguinte expressão:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + b^2} - \sqrt{(x-a)^2 + b^2} - b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2a}, \quad (1.98)$$

onde a controla a aproximação $f'(x) \approx x$ e b controla a suavização da transição entre $f'(x) \approx x$ e $f'(x) \approx 1$. É claro que as medidas mostradas acima não nos dão uma solução completa para o problema do anulamento de $|\nabla u|$ e, assim, um estudo mais específico é necessário para solucionar este problema.

Uma extensão da difusão de base-variacional total foi proposta em [27], que pode ser generalizada na seguinte expressão:

$$f(x) = (x + \epsilon)^p, \quad \epsilon > 0 \quad \text{e} \quad 0 < p < 1. \quad (1.99)$$

Como $f''(x) = p(p-1)(x + \epsilon)^{p-2} < 0$, para $0 < p < 1$, este coeficiente de difusão, utiliza a difusão inversa para preservar os contornos da imagem. Este

coeficiente também é mal posto, pois satisfaz $f'(\infty) = 0$ e daí, utilizamos o teorema (1.2). De fato, observe que

$$f'(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x + \epsilon)^{p-1} = 0, \quad \text{para } 0 < p < 1. \quad (1.100)$$

Desta forma, teremos problemas associados as “step-images” durante o processo de difusão, principalmente, com o reconhecimento de muitos falsos contornos. Mas, estes falsos contornos desaparecem gradualmente, a medida que o processo de difusão evolui, nos dando então uma boa performance. Deste modo, podemos fazer a devida discretização do problema na sua representação digital e processamento.

Este coeficiente de difusão, como os outros mostrados anteriormente, tende a produzir os chamados “blocky effects”, reconhecimento de falsos contornos, em áreas suavizadas pois,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = p\epsilon^{p-1} \neq 0, \quad (1.101)$$

e assim, devemos redefinir a expressão $f'(0) = 0$, como é exigido pela expressão (1.32). Dessa forma, para minimizar este problema, You & Kaveh modificaram o coeficiente de difusão $c(\cdot)$ para a seguinte forma:

$$c(x) = \begin{cases} \frac{p(T + \epsilon)^{p-1}}{T}, & x < T \\ \frac{p(x + \epsilon)^{p-1}}{x}, & x \geq T, \end{cases} \quad (1.102)$$

que basicamente realiza uma difusão uniforme em toda a imagem evitando desta forma, os “blocky effects”. A implementação deste coeficiente de difusão, nos deu o seguinte resultado, com $T = 3$, $\epsilon = 1.0$ e $p = 0.5$:





Figura 1.8 (a) e (b): Imagem processada com 270 iterações utilizando o coeficiente de difusão (1.102) e respectiva segmentação.

Para encerrar, You & Kaveh apresentaram um exemplo não satisfazendo a condição $f'(\infty) = 0$. Seja,

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} + \frac{p(T + \epsilon)^{p-1}}{T}, & x < T \\ \frac{1}{x} + \frac{p(x + \epsilon)^{p-1}}{x}, & x \geq T, \end{cases} \quad (1.103)$$

com $\epsilon > 0$ e $0 < p < 1$.

Como fizeram anteriormente, You & Kaveh, verificaram que $f''(x) = p(p-1)(x + \epsilon) < 0$ para $0 < p < 1$ e $x \geq T$. Também mostraram que $f'(\infty) = 1$, e pelo teorema (1.1), as “step-images”, não são pontos estacionários, pois, $f'(\infty) = 1$. As simulações, mostram que os efeitos de escalonamento da imagem irão aparecer e depois desaparecer a medida que o processo de difusão evolui, satisfazendo desta forma o teorema (1.3). Utilizando os mesmos parâmetros para o coeficiente de difusão (1.102), ou seja, $T = 3.0$, $\epsilon = 1.0$ e $p = 0.5$, obtemos o resultado mostrado a seguir.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.9: (a) Imagem processada com 50 iterações utilizando o coeficiente de difusão (1.103) e respectiva segmentação (b); (c) Imagem processada com 100 iterações e respectiva segmentação (d).

O resultado mostrado pelo coeficiente de difusão (1.103), mostrou-se muito eficiente na remoção do ruído da imagem, porém, a medida que aumentamos o número de iterações, temos uma perda significativa dos contornos da imagem, como podemos ver na figura 2.8 (c) e (d), respectivamente. Consideramos que este coeficiente de difusão, foi o que apresentou o melhor resultado em comparação com os outros mostrados anteriormente, figuras 1.8 (a) e (b).

Assim, através dos resultados obtidos na prática, mesmo alguns coeficientes de difusão considerados bem postos, como por exemplo, o coeficiente

dado por (1.96), mostraram-se ineficientes na remoção do ruído da imagem. Dessa forma, através, das modificações propostas por You & Kaveh, foram obtidos coeficientes de difusão, mais eficientes, porém, mal postos, no sentido de que a medida que evoluímos na escala temporal, temos uma perda dos contornos originais da imagem.

No capítulo 2 a seguir, mostramos uma alternativa apresentada por You & Kaveh, para minimizar este problema da perda de contornos, utilizando uma equação diferencial parcial de quarta ordem. A partir dessa equação propomos alterações no coeficiente de difusão, as quais nos forneceram resultados bastante satisfatórios.



Capítulo 2

Equações Diferenciais Parciais de Quarta Ordem no Processamento de Imagens

Com os resultados obtidos pelos coeficientes de difusão, mostrados no final do último capítulo, nos deparamos com necessidades de propósitos contrários, isto é, queremos obter suavização e ao mesmo tempo manter os contornos originais da imagem. Entretanto, como vimos, um processo não implica o outro, pois, nas regiões das imagens onde o processo de difusão é muito intenso, é comum perdermos as características originais dos contornos. Podemos observar esse fato, nos resultados apresentados pelo coeficiente de difusão (1.103), onde é evidente que a medida que aumentamos o número de iterações, conseguimos uma boa suavização, porém, temos uma perda acentuada dos contornos originais da imagem.

No capítulo anterior, mostramos o estudo do comportamento do processo de difusão anisotrópica realizado por You & Kaveh cujo objetivo é justificar teoricamente quando o processo de difusão é bem ou mal posto. Neste



capítulo, aplicamos os conceitos e resultados apresentados no capítulo anterior a uma E.D.P. de quarta ordem, visando obter um processo de difusão bem posto para eliminação de ruídos em imagens. Além disso, propomos duas alternativas de escolha do argumento do coeficiente de difusão dessa E.D.P. de quarta ordem. As implementações numérica dessa E.D.P. é mostradas no capítulo 3 a seguir e os resultados experimentais obtidos são mostrados no capítulo 4.

2.1 A E.D.P. de Quarta Ordem Proposta por You & Kaveh

As equações diferenciais parciais de segunda ordem, são consideradas uma ferramenta muito útil no estudo da remoção de ruídos e espaço de escala de imagens. Diversos modelos matemáticos foram desenvolvidos baseados nessas E.D.P.'s de segunda ordem para eliminação de ruído e segmentação de imagens. Dentre estes, os mais conhecidos são:

- O modelo de *Malik e Perona* [20],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (c(|\nabla u|)\nabla u), \quad (2.1)$$

sendo que o coeficiente de difusão c , age como um detector automático de bordas.

- O modelo de *Alvarez, Lions, Morel e Coll* [1],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|G * \nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \quad \text{com } u(x, y, 0) = I(x, y), \quad (2.2)$$

onde o termo $g(|G * \nabla u|)$ é usado como um intensificador de contorno, pois, age como um controlador de velocidade da difusão, e G é uma função Gaussiana. O valor médio de ∇u numa vizinhança do ponto (x, y) é calculada pelo produto de convolução $G * \nabla u$. Se este valor for pequeno, então (x, y)



é considerado um ponto interior e a difusão nessa região será intensa. Por outro lado, se o valor médio for grande, então (x, y) é considerado um ponto de contorno e o processo de difusão será lento.

- O modelo de *Chen, Vemuri e Wang* [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\alpha(x) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - |\nabla u| \beta(u - I) \quad (2.3)$$

sendo I a imagem original com ruído. Também é ideal escolher $\alpha(x, y)$, como uma função diferenciável de forma a possuir valor zero nas regiões de contorno e valor 1 em regiões homogêneas. Uma boa escolha é $\alpha(x, y) = g(|\nabla(G * u)|)$.

- O modelo de *Barcelos, Boaventura e Silva Jr.* [2],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla G_\sigma * u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(1 - g)(u - I), \quad (2.4)$$

onde, $u(x, y, 0) = I(x, y)$ representa a imagem original com ruído, $g(|G * \nabla u|)$ é uma função monótona não crescente e novamente é usada como um intensificador de contornos, σ e λ são parâmetros.

No trabalho apresentado por You & Kaveh [25], é proposta a utilização de uma E.D.P. de quarta ordem, como uma nova ferramenta para evitarmos os efeitos da perda dos contornos originais da imagem, ou seja, obtermos uma boa relação entre a remoção de ruído e a preservação dos contornos da imagem.

Considere, primeiramente, o seguinte funcional definido no espaço das imagens contínuas definidas na região Ω .

$$E(u) = \int_{\Omega} f(|\nabla^2 u|) dx dy \quad (2.5)$$

onde ∇^2 denota o operador Laplaciano. Neste caso, You & Kaveh definiram que, $f(\cdot) \geq 0$, seja uma função crescente, assim,



$$f'(\cdot) > 0, \quad (2.6)$$

de forma que o funcional (2.5), seja, uma função crescente, com relação a suavização da imagem, determinada por $|\nabla^2 u|$. Conseqüentemente, quando minimizamos o funcional, estamos suavizando a imagem com ruído.

Esta minimização do funcional é uma forma especial de generalizar o problema variacional, tratado em [?], dado por,

$$E(u) = \int_{\Omega} F(x, y, u, D_1 u, D_2 u, \dots, D_i u, \dots) dx dy \quad (2.7)$$

sendo,

$$D_i u = \left[\frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \frac{\partial^i u}{\partial y^i} \right]^T, \quad (2.8)$$

sendo, Ω a região onde a imagem está definida.

Neste caso, a equação de Euler Lagrange equivalente é dada por,

$$\sum_i D_i^T \left(\frac{\partial F}{\partial D_i u} \right) = 0, \quad (2.9)$$

sendo, $D_i^T = -D_i$ para derivadas de ordem ímpar e $D_i^T = D_i$ para derivadas de ordem par.

Como, estamos trabalhando com imagens bidimensionais, temos,

$$F(u_{xx}, u_{yy}) = f(|\nabla^2 u|) = f(|u_{xx} + u_{yy}|). \quad (2.10)$$

Desta forma,

$$\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} = \frac{\partial F}{\partial u_{yy}} = f'(|\nabla^2 u|) \text{sign}(\nabla^2 u) \quad (2.11)$$

sendo, uma função definida da seguinte forma,



$$\text{sign}(s) = \begin{cases} -1, & \text{se, } s < 0; \\ 0, & \text{se, } s = 0; \\ 1, & \text{se, } s > 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

com,

$$f'(s) = \frac{\partial f}{\partial s}. \quad (2.13)$$

Neste caso, a equação de Euler, será dada por:

$$\nabla^2 \left[f'(|\nabla^2 u|) \text{sign}(\nabla^2 u) \right] = 0. \quad (2.14)$$

Agora, se definirmos,

$$\frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \Big|_{\nabla^2 u=0} = 0, \quad (2.15)$$

podemos escrever, (2.14), da seguinte forma,

$$\nabla^2 \left[f'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right] = 0. \quad (2.16)$$

Considerando o coeficiente de difusão, dado por

$$c(s) = \frac{f'(s)}{s} \Rightarrow f'(s) = s c(s), \quad (2.17)$$

podemos escrever a expressão (2.16), na forma,

$$\nabla^2 \left[|\nabla^2 u| c(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right] = \nabla^2 \left[c(|\nabla^2 u|) \nabla^2 u \right] = 0. \quad (2.18)$$

Como You & Kaveh estão minimizando o funcional $E(u)$, resolveram a expressão (2.18) na direção negativa do gradiente. Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 \left[f'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right] = -\nabla^2 \left[c(|\nabla^2 u|) \nabla^2 u \right], \quad (2.19)$$

sendo a imagem com ruído, a condição inicial. A solução da expressão (2.19) é obtida, quando fazemos $t \rightarrow \infty$, mas, a evolução no tempo pode ser interrompida



a qualquer momento para obtermos uma relação ótima entre a remoção do ruído e a preservação do contorno da imagem. Uma relação entre a equação de difusão de quarta ordem e suas propriedades é mostrada em [6].

Considerando a seguinte definição apresentada por You & Kaveh [25]:

Definição 2.1 (Imagem Plana [25]). *Uma imagem, cuja função intensidade satisfaz a equação de um plano é chamada imagem plana.*

You & Kaveh afirmaram então que o valor do operador Laplaciano aplicado a esta imagem é nulo, logo, esta imagem irá satisfazer a expressão (2.18). Portanto, pela definição (1.7), uma imagem plana é um ponto estacionário da equação de Euler (2.18), ou seja, $\nabla E(u) = 0$.

Também, mostraram que uma imagem plana é o mínimo global do funcional $E(u)$. De fato, utilizando a não negatividade de $f(|\nabla^2 u|)$, o funcional $E(u)$, será limitado inferiormente, ou seja,

$$E(u) \geq 0. \quad (2.20)$$

Desta forma, como $f(|\nabla^2 u|)$ é uma função crescente de $|\nabla^2 u|$, a função f , atingirá o mínimo global quando $|\nabla^2 u| = 0$. Desta forma, o mínimo global, do funcional $E(u)$, dado pela expressão (2.5), ocorre quando,

$$|\nabla^2 u| \equiv 0, \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega. \quad (2.21)$$

Assim, como uma imagem plana satisfaz a expressão (2.21), esta, é um mínimo global do funcional $E(u)$. You & Kaveh concluíram que somente imagens planas serão o mínimo global do funcional $E(u)$, expressão (2.5), se a função $f(\cdot)$ é convexa, ou seja, se

$$f''(s) \geq 0, \quad \text{para todo } s \geq 0, \quad (2.22)$$

pois o funcional $E(u)$, dado pela expressão (2.5) é convexo sob esta condição. Para provar a convexidade deste funcional, You & Kaveh, apresentaram o seguinte



teorema:

Teorema 2.1. *Se a função $f(\cdot)$ de uma difusão anisotrópica é convexa, então seu funcional energia $E(u)$ é convexo.*

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 duas imagens definidas sobre uma região Ω com $u_1 \neq u_2$. Então, para cada $\lambda \in (0, 1)$, temos a desigualdade de Minkowski [17] dada por:

$$|\nabla^2[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2]| \leq \lambda |\nabla^2 u_1| + (1 - \lambda) |\nabla^2 u_2|. \quad (2.23)$$

Sendo $f(\cdot)$ estritamente crescente por (2.6), ou seja, $f'(\cdot) > 0$, pela expressão (2.23) anterior, temos,

$$f(|\nabla^2[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2]|) \leq f(\lambda |\nabla^2 u_1| + (1 - \lambda) |\nabla^2 u_2|). \quad (2.24)$$

Utilizando a convexidade da função $f(\cdot)$, temos:

$$f(\lambda |\nabla^2 u_1| + (1 - \lambda) |\nabla^2 u_2|) \leq \lambda f(|\nabla^2 u_1|) + (1 - \lambda) f(|\nabla^2 u_2|) \quad (2.25)$$

Combinando as expressões (2.24) e (2.25), temos

$$f(|\nabla^2[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2]|) \leq \lambda f(|\nabla^2 u_1|) + (1 - \lambda) f(|\nabla^2 u_2|). \quad (2.26)$$

Integrando (2.26), obtemos,

$$\int_{\Omega} |\nabla^2[\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2]| d\Omega \leq \lambda \int_{\Omega} f(|\nabla^2 u_1|) d\Omega + (1 - \lambda) \int_{\Omega} f(|\nabla^2 u_2|) d\Omega. \quad (2.27)$$

Desta forma, por (2.5), obtemos:

$$E(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq E(u_1) + (1 - \lambda)E(u_2). \quad (2.28)$$

Portanto, o funcional $E(u)$, dada pela expressão (2.5) é convexo.



Desta forma, a medida que evoluímos o tempo t na expressão (2.19), estamos suavizando a imagem até que esta se torna totalmente plana. Desta forma, podemos evoluir além do necessário, e assim, perdemos os contornos originais da imagem.

Por outro lado, se a expressão (2.22) não é satisfeita, ou seja, $f''(s) < 0$ para algum ou para todo $s \geq 0$, o funcional $E(u)$ pode não ser convexo, e assim, pode existir outro mínimo local e/ou global. A seguir, mostraremos que imagens planas por partes são tais mínimos.

Sejam, $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$, partições da região Ω . Definimos uma imagem plana por partes, da seguinte forma:

$$s(x, y) = \sum_{i=1}^n s_i(x, y), \quad (2.29)$$

sendo,

$$s_i(x, y) = \begin{cases} \text{imagem plana,} & \text{se } (x, y) \in \Omega_i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.30)$$

Nesse caso, consideramos imagens planas na expressão (2.30), tais que a combinação dessas imagens, $s(x, y)$, seja contínua. Observe ainda que duas imagens adjacentes $s_i(x, y)$ e $s_j(x, y)$ devem estar em diferentes planos, pois, caso contrário, podemos combiná-las em uma única imagem.

Denotando-se $\partial\Omega_i$ como a fronteira da partição Ω_i , então, $\Omega_i - \partial\Omega_i$ será o interior de Ω_i . Desta forma,

$$\nabla s_i(x, y) = \text{constante}, \quad (x, y) \in (\Omega_i - \partial\Omega_i), \quad (2.31)$$

logo,

$$\nabla^2 s_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in (\Omega_i - \partial\Omega_i), \quad (2.32)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, ou seja,



$$\nabla^2 s(x, y) = 0, \quad (x, y) \in (\Omega - \partial\Omega), \quad (2.33)$$

sendo, $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n \partial\Omega_i$, a união das fronteiras de todas as partições.

Como consideramos, que quaisquer duas imagens s_i e s_j estão em planos diferentes, temos,

$$\nabla s_i \neq \nabla s_j, \quad (2.34)$$

para quaisquer duas partições adjacentes Ω_i e Ω_j , ou seja, o gradiente não é contínuo na fronteira $\partial\Omega$. Então,

$$\nabla^2 s(x, y) = \infty, \quad \text{para todo } (x, y) \in \partial\Omega. \quad (2.35)$$

Assim, se definirmos que,

$$f'(\infty) = 0, \quad (2.36)$$

temos,

$$f'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} = 0 \quad \text{para todo, } (x, y) \in \partial\Omega. \quad (2.37)$$

Portanto, uma imagem plana por partes, satisfaz a equação de Euler.

Como, $f'(\cdot) > 0$, a expressão (2.36), nos mostra que é impossível para a função $f(\cdot)$, satisfazer a condição $f''(\cdot) > 0$. Logo,

$$f''(s) < 0, \quad \text{para algum } s, \quad (2.38)$$

ou equivalentemente, $f(\cdot)$ não é convexa.

Podemos observar, então que as expressões (2.36) ou (2.38) são fundamentais para a convexidade do funcional $E(u)$ e, assim, tendo este funcional apenas um único mínimo global, o processo de difusão que será bem posto devido



a esta unicidade, a partir de qualquer imagem inicial com ruído, irá convergir para a imagem original a medida que evoluímos no tempo.

Na próxima seção, seguindo estes mesmos conceitos teóricos, propomos duas modificações na E. D. P. (2.19).

2.2 A E.D.P. de Quarta Ordem Modificada

A fim de diminuirmos a perda de contornos, e assim, obtermos resultados satisfatórios, propomos duas alterações na E. D. P. (2.19). Na primeira, substituímos o termo $c(|\nabla^2 u|)$, por $c(|\nabla u|)$ e, na segunda modificação, substituímos $c(|\nabla^2 u|)$ pelo cálculo da norma do gradiente do produto de convolução $|\nabla(G_\sigma * u)|$. A seguir, mostramos alguns detalhes a respeito de cada modificação.

2.2.1 A E. D. P. com o termo $c(|\nabla u|)$

Nesta seção, mostramos a primeira modificação proposta na E.D.P. de quarta ordem apresentada por You & Kaveh. Propomos, ao invés de calcularmos o valor do coeficiente de difusão na norma do Laplaciano da função intensidade de imagem, ou seja, $c(|\nabla^2 u|)$, substituímos este termo pela norma do gradiente da função intensidade de imagem $c(|\nabla u|)$.

Dessa forma, resolvemos numericamente a seguinte equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 \left[f'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right] = -\nabla^2 [c(|\nabla u|) \nabla^2 u], \quad (2.39)$$

sendo a imagem com ruído a condição inicial. Numericamente, calculamos o coeficiente de difusão $c(\cdot)$ da seguinte forma:

$$c(s) = \frac{1}{1 + ks^2}, \quad (2.40)$$

sendo k uma constante.



Propomos esta primeira modificação, a fim de explorarmos o caráter seletivo apresentado pelo coeficiente de difusão $c(\cdot)$ quando aplicado ao argumento $|\nabla u|$. O “ideal” é termos $c(\cdot)$ próximo de 1 nas regiões homogêneas (regiões com poucas mudanças de intensidade de cinza) e um valor próximo de 0 nas regiões com grandes mudanças de intensidade, ou seja, os contornos e assim, preservá-los. Este fato, não ocorre quando utilizamos o termo $|\nabla^2 u|$ o que tende a causar um maior “borramento” dos contornos da imagem recuperada.

Os resultados obtidos com esta modificação mostraram-se bastante satisfatórios, com uma boa preservação dos contornos da imagem. A seguir, mostramos a segunda modificação que fizemos na expressão (2.19).

2.2.2 A E. D. P. com o termo $c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$

Além da modificação sugerida anteriormente, propomos uma outra modificação na equação diferencial (2.19). Agora, substituímos $|\nabla^2 u|$ por $|\nabla(G_\sigma * u)|$, sendo G_σ uma função Gaussiana.

Dessa forma, calculamos a norma do gradiente do produto de convolução $|\nabla(G_\sigma * u)|$ e, em seguida, o coeficiente de difusão dado por (2.40). Neste caso, estamos resolvendo numericamente a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 \left[f'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right] = -\nabla^2 \left[c(|\nabla(G_\sigma * u)|) \nabla^2 u \right]. \quad (2.41)$$

sendo a imagem com ruído a condição inicial.

O termo $|\nabla(G_\sigma * u)|$, nos fornece uma média ponderada dos valores de $|\nabla u|$ para pontos próximos a u , isto é, os pontos $u_{i,j}$ circunvizinhos a u de forma a ponderar o valor de $|\nabla u|$.

Propomos a utilização deste termo, para evitarmos “picos” causados por ruído quando temos $|\nabla u|$. Se esse valor for relativamente grande (o que acontece



nas regiões de contorno) teremos que o comportamento de $|\nabla u|$ próximo a u é uniforme, identificando dessa forma uma região de contorno.

Os resultados obtidos com a aplicação da expressão acima, foram em geral melhores que os apresentados por You & Kaveh e, que os obtidos com a expressão (2.39), para imagens com um nível baixo de ruído, como poderemos observar no capítulo 4.

Para encerrar este capítulo, fazemos algumas considerações sobre a função Gaussiana, utilizada na expressão (2.41).

Definimos a função Gaussiana G_σ da seguinte forma:

Definição 2.2 (Teixeira [24]). *A função Gaussiana (ou função de distribuição normal) de variância σ^2 é a função dada por:*

$$G_\sigma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2 \frac{1}{2\sigma^2}}. \quad (2.42)$$

Podemos, considerar $2t = \sigma^2$, o que implica na função Gaussiana:

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2 \frac{1}{4t}}. \quad (2.43)$$

ou, como em nosso caso, considerando o caso bidimensional,

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}. \quad (2.44)$$

Esta modificação é justificada devido a relação entre o parâmetro de escala σ e o tempo de evolução t . Além disso, temos que:

- ✓ o parâmetro σ é conhecido como o desvio padrão de $G_\sigma(x)$;
- ✓ a função G_σ é par, ou seja, $G_\sigma(x) = G_\sigma(-x)$ e consequentemente sua média é $\mu = 0$;
- ✓ a função $G_\sigma(x)$ é normalizada, isto é, $\int_{-\infty}^{\infty} G_\sigma(x) dx = 1$.



Todos esses fatos, fazem de G_σ , conhecida em equações diferenciais parciais como núcleo de Poisson ou núcleo do calor, uma função propícia para se criar filtros de sinais. Assim, o filtro Gaussiano é obtido através do produto de convolução da função a ser filtrada u , com a função Gaussiana G_σ , denotado por $u * G_\sigma$. O produto de convolução é um operador linear invariante por translações que, no contexto do processamento de imagens, é utilizado para se encontrar uma média ponderada de valores em uma vizinhança de um ponto arbitrário.

Os filtros Gaussianos fornecem filtros passa-baixa que, como o próprio nome diz, permitem que apenas os sinais de baixa frequência sejam filtrados. Como os ruídos contidos nas imagens são caracterizados por interferências de alta frequência, os filtros Gaussianos são ferramentas eficazes na eliminação de ruídos, justificando os bons resultados obtidos. Maiores detalhes a respeito da função Gaussiana e suas propriedades, podem ser encontrados em [2].

A seguir, mostramos a forma como implementamos numericamente, os três modelos a serem comparados: o modelo proposto por You & Kaveh, o modelo com o coeficiente de difusão $c(|\nabla u|)$ e o modelo com o coeficiente de difusão $c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$.



Capítulo 3

Implementação Numérica

As equações diferenciais (2.19), (2.39) e (2.41), relacionadas ao modelo de You & Kaveh e as duas modificações propostas, respectivamente, mostradas no capítulo anterior, podem ser resolvidas numericamente, através de um processo iterativo. A busca de uma solução analítica para estas equações diferenciais, do ponto de vista prático, é inviável, restando, portanto, a busca de aproximações numéricas através de métodos apropriados para cada problema. Desta forma, obtemos um conjunto de solução discreto, ou seja, aproxima-se o valor da solução em pontos de um domínio discretizado.

Neste capítulo, abordamos a implementação numérica dessas três equações diferenciais parciais através da discretização do domínio da solução, no qual a equação diferencial esta definida. Obtemos soluções numéricas das equações de diferenças, as quais representam um estágio da evolução na escala temporal, isto é, a solução da E. D. P. no estágio n representa a evolução da E. D. P. no instante de tempo t_n . A solução numérica dessas equações geralmente é obtida através do método de diferenças finitas.



3.1 O Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas refere-se a discretização do domínio e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função. Na prática, substituímos as derivadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada quando o incremento tende a zero. Dizemos então, que o problema foi *discretizado*. Ao substituímos as derivadas, que aparecem na equação, por aproximações desse tipo, estamos desprezando pequenas partes da solução e obtemos uma aproximação para a equação original. Essa nova equação é chamada equação de diferenças.

A ferramenta matemática básica de aproximações para as derivadas é a *Série de Taylor*, que nos dá várias informações sobre a função numa vizinhança de um ponto x . Assim, para o caso unidimensional, isto é, funções de uma variável, temos as seguintes definições:

Definição 3.1 (Cunha [10]). *Seja $y(x)$ uma função que admite derivada até ordem 2. Então, a fórmula avançada para o cálculo de $y'(x)$ é dada por:*

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi) \quad (3.1)$$

sendo o erro cometido dado por $-\frac{h}{2}y''(\xi)$, com $x < \xi < x+h$.

Definição 3.2 (Cunha [10]). *Seja $y(x)$ uma função que admite derivada até ordem 2. Então, a fórmula atrasada para o cálculo de $y'(x)$ é dada por:*

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi) \quad (3.2)$$

sendo o erro cometido dado por $-\frac{h}{2}y''(\xi)$, com $x-h < \xi < x$.



Definição 3.3 (Cunha [10]). *Seja $y(x)$ uma função que admite derivada até ordem 3. Então a fórmula centrada para o cálculo de $y'(x)$ é dada por:*

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{3!} y'''(\xi) \quad (3.3)$$

onde o erro cometido é dado por, $-\frac{h^2}{3!} y'''(\xi)$, com $x-h < \xi < x+h$.

3.2 Definição de Malha

Na construção de soluções aproximadas para as equações diferenciais parciais por diferenças finitas, discretizamos o domínio no qual a equação diferencial esta definida. Para executar essa tarefa, introduzimos uma malha onde definimos a solução aproximada. Como mencionamos na introdução deste trabalho, utilizamos imagens representadas pela função $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 2$ ou $n = 3$.

Como estamos trabalhando com imagens bidimensionais, ou seja, $n = 2$, devemos discretizar o domínio da função intensidade de imagem $u(x, y)$, isto é, a região Ω , em uma malha bidimensional de pontos igualmente espaçados de passos h e k , associada a cada ponto (x_i, y_j) , dada por [10]:

$$(x_i, y_j) = (\underline{x} + ih, \underline{y} + jk), \quad i, j = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.4)$$

sendo, $(\underline{x}, \underline{y})$ um ponto de referência arbitrário, mas, fixo, do plano, e h, k , constantes positivas, chamadas passos na malha. Estamos considerando $h = k$, o que torna a malha regular em (x, y) , como podemos observar na figura 3.1 a seguir,



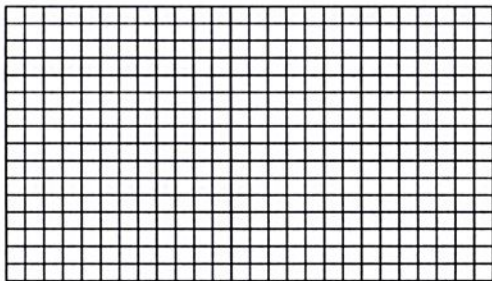


Figura 3.1: Malha regular de pontos resultantes da discretização de $\Omega \in \mathbb{R}^2$, com 17×27 pontos.

Como estamos trabalhando com imagens de dimensão $n \times m$, onde n representa o número de linhas e m o número de colunas, a região Ω deve ser discretizada de forma regular com pontos igualmente espaçados, isto é, de passo constante $h = k = 1$. Por uma questão de conveniência, a disposição dos eixos x e y , esta seguindo o esquema apresentado na figura I.1, mostrada na introdução deste trabalho.

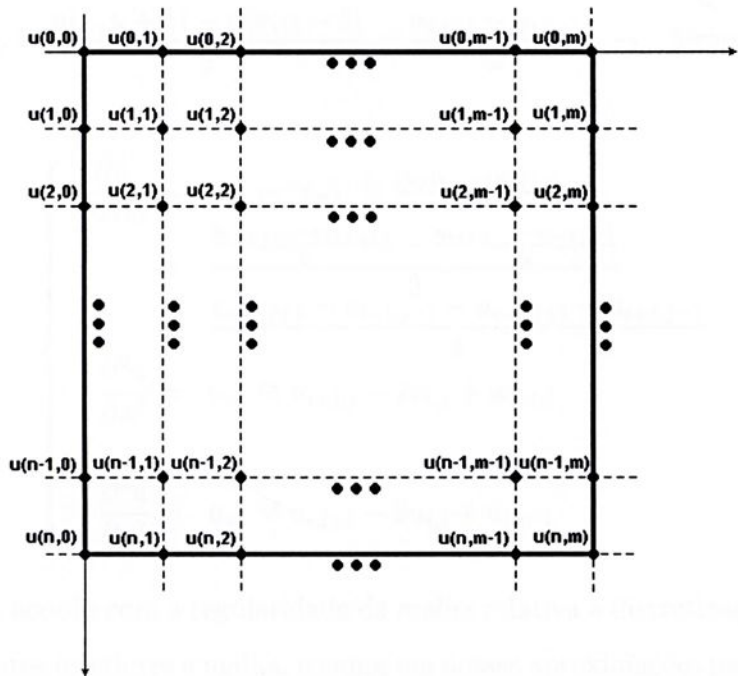


Figura 3.2: Malha regular de discretização, com n linhas e m colunas.

Generalizando as definições (3.1), (3.2) e (3.3) para o caso bidimensional, obtemos as seguintes equações de diferenças relativas às derivadas parciais da função $u(x, y)$, onde admitimos $h = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \cong u(x+1, y) - u(x, y) = u_{i+1,j} - u_{i,j} & \rightarrow \text{fórmula avançada} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \cong u(x, y) - u(x-1, y) = u_{i,j} - u_{i-1,j} & \rightarrow \text{fórmula atrasada} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \cong \frac{u(x+1, y) - u(x-1, y)}{2} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} & \rightarrow \text{fórmula centrada} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \cong u(x, y+1) - u(x, y) = u_{i,j+1} - u_{i,j} & \rightarrow \text{fórmula avançada} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \cong u(x, y) - u(x, y-1) = u_{i,j} - u_{i,j-1} & \rightarrow \text{fórmula atrasada} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \cong \frac{u(x, y+1) - u(x, y-1)}{2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} & \rightarrow \text{fórmula centrada} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy} = (u_x)_y \cong \frac{(u_x)_{j+1} - (u_x)_{j-1}}{2} \\ \cong \frac{\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2} - \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2}}{2} \\ = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}}{4} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} \cong u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} \cong u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

De acordo com a regularidade da malha relativa à discretização da região Ω , para pontos interiores a malha, usamos em nossas aproximações para a primeira derivada os operadores de diferenças centradas.



Na próxima seção, mostramos como aproximamos o valor dessas derivadas nos pontos de fronteira da imagem, ou seja, nos pontos localizados nas colunas 0 e m , e nas linhas 0 e n , do domínio de discretização considerado.

3.3 Implementação Numérica nos Pontos de Fronteira

A equação de diferenças no cálculo do Laplaciano por exemplo, utiliza os pontos “cardeais”, como podemos ver na figura 3.3.

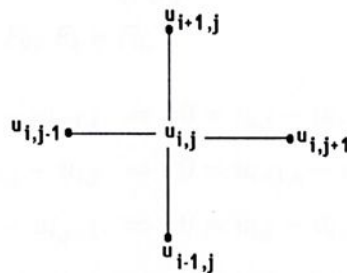


Figura 3.3: Esquema mostrando os pontos utilizados no cálculo do operador Laplaciano na malha de discretização, no ponto $u_{i,j}$.

Assim, quando calculamos o valor do Laplaciano nos pontos que estão na fronteira do domínio Ω , onde esta definida a imagem, introduzimos os chamados “pontos fantasmas”, ou seja, pontos fora do domínio Ω , e que são mostrados na figura 3.4 a seguir,

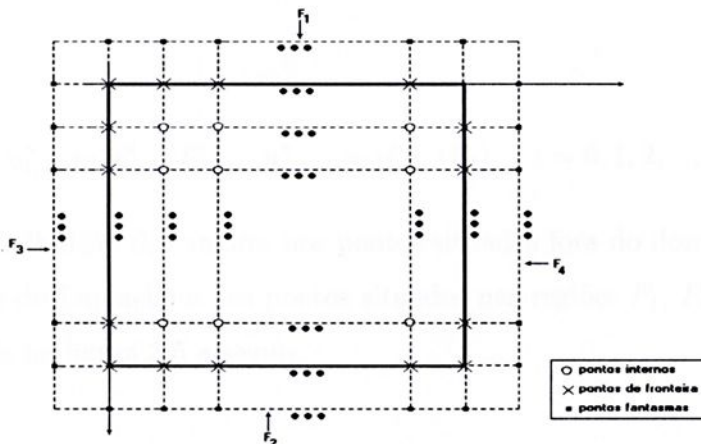


Figura 3.4: Malha de discretização de pontos da região Ω e detalhes destacando os pontos internos e de fronteira.

Para atribuímos valores a estes pontos fantasmas, utilizamos em nossas aproximações para as derivadas o operador de diferenças avançadas nas regiões F_2 e F_4 e o de diferenças atrasadas nas regiões F_1 e F_3 .

Então, considerando as condições de contorno de Neumann, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

temos para as regiões F_1 , F_2 , F_3 e F_4 ,

$$F_1 \Rightarrow u'_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j} \Rightarrow 0 = u_{i,j} - u_{i-1,j} \Rightarrow u_{i-1,j} = u_{i,j}$$

$$F_2 \Rightarrow u'_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j} \Rightarrow 0 = u_{i+1,j} - u_{i,j} \Rightarrow u_{i+1,j} = u_{i,j}$$

$$F_3 \Rightarrow u'_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j-1} \Rightarrow 0 = u_{i,j} - u_{i,j-1} \Rightarrow u_{i,j-1} = u_{i,j}$$

$$F_4 \Rightarrow u'_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j} \Rightarrow 0 = u_{i,j+1} - u_{i,j} \Rightarrow u_{i,j+1} = u_{i,j}$$

Assim, atribuímos valores aos pontos situados fora do domínio Ω , para o cálculo do Laplaciano da função intensidade de imagem u , da seguinte forma,

$$u_{-1,j}^n = u_{0,j}^n \quad (F_1), \quad u_{I+1,j}^n = u_{I,j}^n \quad (F_2), \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (3.9)$$

e,

$$u_{i,-1}^n = u_{i,0}^n \quad (F_3), \quad u_{i,J+1}^n = u_{i,J}^n \quad (F_4), \quad i = 0, 1, 2, \dots, I. \quad (3.10)$$

A atribuição dos valores nos pontos situados fora do domínio utilizados no o cálculo do Laplaciano nos pontos situados nas regiões F_1 , F_2 , F_3 e F_4 está representada na figura 3.5 a seguir,



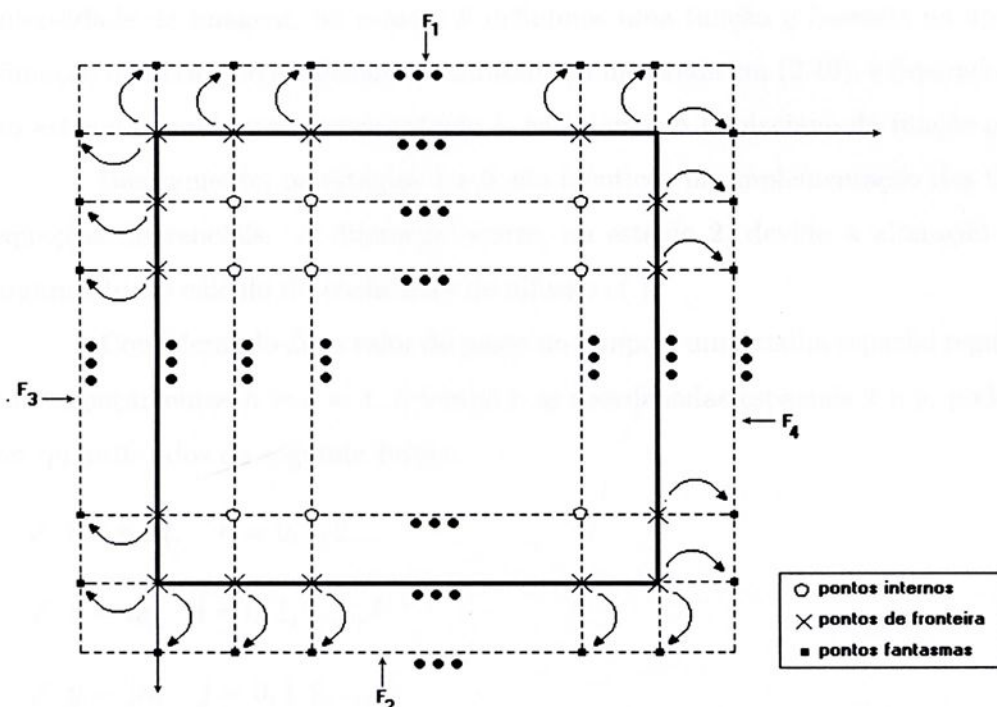


Figura 3.5: Utilização das condições de fronteira de Neumann no cálculo de $\nabla^2 u$.

Utilizando as fórmulas de diferenças para o cálculo das derivadas parciais, apresentamos na próxima seção, a implementação numérica das equações diferenciais parciais de quarta ordem, (2.19), (2.39) e (2.41), relacionadas ao modelo de You & Kaveh, e as duas modificações propostas, respectivamente. Neste trabalho, também apresentamos uma discretização do produto de convolução utilizado em uma das modificações propostas.

3.4 Implementação Numérica das E. D. P.'s de Quarta Ordem

A implementação numérica das equações diferenciais parciais de quarta ordem (2.19), (2.39) e (2.41), é bastante simples do ponto de vista computacional

e, foi dividida em três estágios. No *estágio 1* calculamos o Laplaciano da função intensidade de imagem, no *estágio 2* definimos uma função g baseada na aproximação numérica do coeficiente de difusão $c(\cdot)$ mostrada em (2.40), e finalmente, no *estágio 3*, analogamente ao estágio 1, calculamos o Laplaciano da função g .

Basicamente, os estágios 1 e 3 são idênticos na implementação das três equações diferenciais. A diferença ocorre, no estágio 2, devido a alteração do argumento no cálculo do coeficiente de difusão $c(\cdot)$.

Considerando Δt o valor do passo no tempo e uma malha espacial regular com espaçamentos $h = k = 1$, o tempo e as coordenadas espaciais x e y , podem ser quantificados da seguinte forma:

$$\checkmark \quad t = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\checkmark \quad x = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, I$$

$$\checkmark \quad y = jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J$$

sendo $Ih \times Jh$ o tamanho da região Ω , onde a imagem está definida.

Começamos, mostrando a implementação da equação diferencial parcial (2.19) proposta por You & Kaveh, e posteriormente, mostramos as implementações das equações diferenciais (2.39) e (2.41). A aplicação deste algoritmo nos pontos localizados nas fronteiras da imagem será mostrada posteriormente.

3.4.1 Implementação do Modelo de You & Kaveh

Estágio 1: Neste primeiro estágio, calcula-se o Laplaciano da função intensidade de imagem, ou seja, $\nabla^2 u$, da seguinte forma:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.11)$$

Logo, utilizando as expressões numéricas dadas por (3.7), temos,

$$\nabla^2 u_{i,j}^n = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1},$$



ou seja,

$$\nabla^2 u_{i,j}^n = u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n. \quad (3.12)$$

Estágio 2: Neste estágio está a principal diferença entre as implementações das três equações diferenciais. Definimos então, uma função g , da seguinte forma:

$$g(\nabla^2 u) = f'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} = c(|\nabla^2 u|) \nabla^2 u, \quad (3.13)$$

sendo,

$$g_{i,j}^n = g(\nabla^2 u_{i,j}^n), \quad (3.14)$$

onde, como já havíamos mostrado anteriormente, considerou-se numericamente, o seguinte coeficiente de difusão,

$$c(s) = \frac{1}{1 + ks^2}. \quad (3.15)$$

Desta forma, temos a função g do modelo proposto por You & Kaveh, dada por:

$$g_{i,j}^n = \frac{1}{1 + k(|\nabla^2 u_{i,j}^n|)^2} \nabla^2 u_{i,j}^n, \quad (3.16)$$

sendo k , uma constante arbitrária.

Estágio 3: Para encerrar, calculamos o Laplaciano da função g . Este cálculo é análogo ao cálculo do Laplaciano de u . Assim, temos,

$$\nabla^2 g_{i,j}^n = g_{i+1,j}^n + g_{i-1,j}^n + g_{i,j+1}^n + g_{i,j-1}^n - 4g_{i,j}^n. \quad (3.17)$$

3.4.2 Implementação da E. D. P. com $c(|\nabla u|)$

A implementação numérica da E. D. P., (2.39), dada por,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 \left[f'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right] = -\nabla^2 \left[c(|\nabla u|) \nabla^2 u \right],$$

é semelhante, à realizada para o modelo proposto por You & Kaveh. Os estágios 1 e 3, mostrados anteriormente, são os mesmos para esta implementação. A principal alteração ocorre no estágio 2, onde, consideramos a mesma aproximação numérica para o cálculo do coeficiente $c(\cdot)$, dada pela expressão (3.15), mas, agora, calculamos o coeficiente de difusão aplicado à norma do gradiente da função intensidade de imagem, ou seja, $c(|\nabla u|)$.

A norma do gradiente da função intensidade de imagem u , é dada por,

$$|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \quad (3.18)$$

A aproximação numérica das derivadas parciais u_x e u_y , é dada pelas expressões, (3.5) e (3.6), respectivamente. Logo, utilizando a fórmula centrada, temos:

$$|\nabla u_{i,j}^n| = \sqrt{\left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2} \right)^2}.$$

Assim, por (3.15), temos,

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + k (|\nabla u|)^2}. \quad (3.19)$$

Portanto, a função g obtida no **estágio 2** da implementação numérica da equação diferencial (2.39), é dada por,

$$g(|\nabla u_{i,j}^n|) = \frac{1}{1 + k (|\nabla u_{i,j}^n|)^2} \nabla^2 u_{i,j}^n, \quad (3.20)$$

sendo k , uma constante arbitrária.



3.4.3 Implementação da E. D. P. com $c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$

Para a implementação da equação diferencial parcial de quarta ordem (2.41), é necessária a implementação numérica da norma do gradiente do produto de convolução, $|\nabla(G_\sigma * u)|$.

Para implementações numéricas de convoluções, deve-se adaptar domínios à malha discretizada de pontos, principalmente, no que se refere a função u a qual deve convoluir com o núcleo Gaussiano. Uma maneira de realizar essas adaptações é criando extensões para a função u , isto é, gerando valores para $u(k, l)$ para pontos (k, l) fora do domínio discreto onde u está definida, o que torna possível a aplicação de um algoritmo numérico para o cálculo do produto de convolução, geralmente dado por um somatório.

Considerando $T \equiv u$, onde $T : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma representação de u em Ω , pode-se aproximar $G_\sigma * u$ por $G_\sigma * T$, usando extensões de T de u por espelhamento, por constante, por média ou por extensão periódica. Aqui, implementamos o produto de convolução usando extensão constante. Mais detalhes a respeito da implementação de produtos de convolução usando as demais extensões e a respeito da implementação feita neste trabalho, podem ser encontradas em [24] e [2].

A extensão do sinal $u(x, y) \in \Omega$ por $T(x, y)$ é obtida da seguinte forma:

$$T[k, l] = \begin{cases} u_{k,l} & \text{para } 0 \leq k \leq M-1, \quad 0 \leq l \leq N-1; \\ C (= 0), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.21)$$

sendo Ω uma malha discreta de $M \times N$ pontos.

Dessa forma, pode-se calcular o produto de convolução, $G_\sigma * u$, pela definição explícita de convolução, dada por:

$$(G_\sigma * u)[i, j] = \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} G_\sigma(s, t) T(i-s, j-t) \quad (3.22)$$

com $0 < m \leq M$, e $0 < n \leq N$.

Os valores inteiros m e n correspondem ao subdomínio discreto de pontos ou máscara, a qual é utilizada para calcular a convolução (Figura 3.6). Obviamente quanto maior a máscara utilizada nesse processo, maior é o custo computacional.

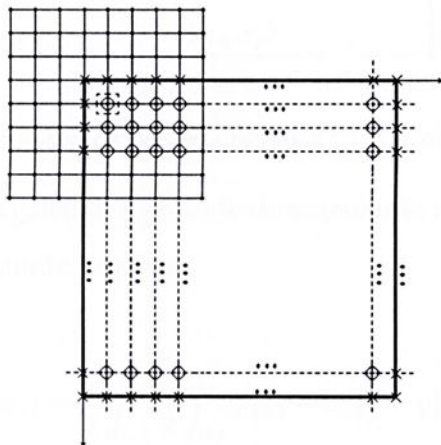


Figura 3.6: Núcleo de convolução com máscara centrada no ponto destacado.

Em [22], é proposta uma forma alternativa de implementar numericamente o produto de convolução, o qual proporcionou resultados satisfatórios, com um custo computacional reduzido, o que favorece o processamento digital de imagens.

No capítulo 1, definição (1.11), definimos a convolução das funções f e g , através do operador:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y)g(x - y)dy. \quad (3.23)$$

Na malha de pontos das nossas discretizações, temos $l = 1$, uma vez que nossa malha é definida sobre os números naturais com $h = \Delta x = \Delta y = 1$. Assim, devemos calcular a convolução das funções f e g , em uma vizinhança do ponto $u_{i,j}$. Vamos então considerar essa vizinhança como sendo a região dada pelo retângulo:

(x_{i+1}, y_{j-1})	(x_{i+1}, y_j)	(x_{i+1}, y_{j+1})
(x_i, y_{j-1})	(x_i, y_j)	(x_i, y_{j+1})
(x_{i-1}, y_{j-1})	(x_{i-1}, y_j)	(x_{i-1}, y_{j+1})

Figura 3.7: Conjunto de pontos utilizados na convolução $(f * g)(x_i, x_j)$.

Portanto, para calcular o produto de convolução relativo ao ponto (x_i, x_j) , devemos calcular a seguinte integral:

$$(f * g)(x_i, x_j) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x_i - x, y_j - y)g(x, y)dxdy. \quad (3.24)$$

Dessa forma, o cálculo do produto de convolução resume-se ao cálculo numérico de integrais. Utilizando-se então a regra de Simpson para o cálculo de integrais, isto é:

Definição 3.4 (Regra de Simpson). *Seja $f(x)$ uma função e tomemos no intervalo $[a, b]$, os pontos,*

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} \quad e \quad x_2 = b$$

sendo $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ valores conhecidos. Então a regra de Simpson para a aproximação da integral $\int_a^b f(x)dx$ é dada por:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\beta), \quad x_0 < \beta < x_2, \quad (3.25)$$

sendo $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ e, $-\left(\frac{h^5}{90}\right) f^{(4)}(\beta)$ é a expressão do erro cometido na aproximação.

Considere então na expressão (3.24),

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x_i - x, y_j - y)g(x, y)dx \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_1 dy. \quad (3.26)$$

Dessa forma, utilizando a regra de Simpson para calcular o valor dessas integrais, temos:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} [f(x_i - x_{i-1}, y_j - y)g(x_{i-1}, y) + 4f(x_i - x_i, y_j - y)g(x_i, y) \right. \\ &\quad \left. + f(x_i - x_{i+1}, y_j - y)g(x_{i+1}, y)] \right\} \\ &= \frac{1}{6} [f(1, y_j - y)g(x_{i-1}, y) + 4f(0, y_j - y)g(x_i, y) + f(-1, y_j - y)g(x_{i+1}, y)] \\ I_2 &= \frac{1}{12} \int_{-1}^1 [f(1, y_j - y)g(x_{i-1}, y) + 4f(0, y_j - y)g(x_i, y) \\ &\quad + f(-1, y_j - y)g(x_{i+1}, y)] dy \\ &= \frac{1}{12} \int_{-1}^1 f(1, y_j - y)g(x_{i-1}, y)dy + \frac{1}{12} \int_{-1}^1 4f(0, y_j - y)g(x_i, y)dy \\ &\quad + \frac{1}{12} \int_{-1}^1 f(-1, y_j - y)g(x_{i+1}, y)dy \end{aligned}$$

Aplicando novamente a Regra de Simpson a I_2 , temos:



$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{3} \left[f(1, y_j - y_{j-1})g(x_{i-1}, y_{j-1}) + 4f(1, y_j - y_j)g(x_{i-1}, y_j) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + f(1, y_j - y_{j+1})g(x_{i-1}, y_{j+1}) \right] \right. \\
 &\quad + \frac{4}{3} \left[f(0, y_j - y_{j-1})g(x_i, y_{j-1}) + 4f(0, y_j - y_j)g(x_i, y_j) \right. \\
 &\quad \left. + f(0, y_j - y_{j+1})g(x_i, y_{j+1}) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{3} \left[f(-1, y_j - y_{j-1})g(x_{i+1}, y_{j-1}) + 4f(-1, y_j - y_j)g(x_{i+1}, y_j) \right. \\
 &\quad \left. + f(-1, y_j - y_{j+1})g(x_{i+1}, y_{j+1}) \right\} \\
 &= \frac{1}{36} \left[f(1, 1)g(x_{i-1}, y_{j-1}) + 4f(0, 1)g(x_i, y_{j-1}) + f(-1, 1)g(x_{i+1}, y_{j-1}) \right. \\
 &\quad + 4f(1, 0)g(x_{i-1}, y_j) + 16f(0, 0)g(x_i, y_j) + 4f(-1, 0)g(x_{i+1}, y_j) \\
 &\quad \left. + f(1, -1)g(x_{i-1}, y_{j+1}) + 4f(0, -1)g(x_i, y_{j+1}) + f(-1, -1)g(x_{i+1}, y_{j+1}) \right]
 \end{aligned}$$

Portanto, uma expressão numérica para o cálculo de $G_\sigma * u$ é dada por:

$$(f * g)(x_i, y_j) = I_2. \quad (3.27)$$

Assim, considerando,

$$\begin{aligned}
 f(x_i, y_j) &= G_\sigma(x_i, y_j), \\
 g(x_i, y_j) &= u(x_i, y_j) = u_{i,j},
 \end{aligned} \quad (3.28)$$

temos,



$$\begin{aligned}
 (G_\sigma * u)(i, j) = & \frac{1}{36} \left(G_\sigma(1, 1)u_{i-1, j-1} + G_\sigma(-1, 1)u_{i+1, j-1} + G_\sigma(1, -1)u_{i-1, j+1} \right. \\
 & + G_\sigma(-1, -1)u_{i+1, j+1} + 16G_\sigma(0, 0)u_{i, j} + 4 \left[G_\sigma(0, 1)u_{i, j-1} \right. \\
 & \left. \left. + G_\sigma(1, 0)u_{i-1, j} + G_\sigma(-1, 0)u_{i+1, j} + G_\sigma(0, -1)u_{i, j+1} \right] \right). \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Dessa forma, utilizando $cv(x, y) = (G_\sigma * u)(x, y)$, dada pela expressão (3.29), e utilizando o operador de diferenças centradas para o cálculo das derivadas parciais de primeira ordem de $cv(x, y)$, temos:

$$\frac{\partial cv(x, y)}{\partial x} \cong \frac{cv(x+1, y) - cv(x-1, y)}{2} = d_1, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial cv(x, y)}{\partial y} \cong \frac{cv(x, y+1) - cv(x, y-1)}{2} = d_2. \quad (3.31)$$

Como $\nabla(G_\sigma * u) = \left(\frac{\partial cv}{\partial x}, \frac{\partial cv}{\partial y} \right)$, temos então que,

$$|\nabla(G_\sigma * u)| = \left[\left(\frac{\partial(G_\sigma * u)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(G_\sigma * u)}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow |\nabla(G_\sigma * u)|^2 = d_1^2 + d_2^2$$

Portanto, a função g obtida no **estágio 2** da implementação numérica da equação diferencial (2.41), é dada por,

$$g(|\nabla u_{i, j}^n|) = \frac{1}{1 + k(d_1^2 + d_2^2)} \nabla^2 u_{i, j}^n, \quad (3.33)$$

sendo k , uma constante arbitrária.

Nas seções anteriores, apresentamos as implementações numéricas de cada uma das funções g da equação diferencial parcial proposta por You & Kaveh,

e das duas modificações propostas no estágio 2. Devemos salientar que o processo evolutivo na escala temporal dessas equações diferenciais, baseia-se fundamentalmente em um processo iterativo utilizando o Laplaciano dessa função g .

3.4.4 Processo Iterativo

Seja $\nabla^2 g_{i,j}^n$, o Laplaciano da função $g(\cdot)$, mostrada no estágio 3 na seção 3.4.1, no tempo t_n , relativa a cada uma das três equações diferenciais de quarta ordem apresentadas. A solução dessas equações diferenciais de quarta ordem, deve ser encontrada para todos os pontos discretos da malha (x_i, x_j) no tempo t_n .

Dessa forma, utilizando o operador de diferenças avançadas no tempo, com:

$$u_t \cong \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad \text{e} \quad u_t = -\nabla^2 g_{i,j}^n, \quad (3.34)$$

obtemos,

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = -\nabla^2 g_{i,j}^n \Rightarrow u_{i,j}^{n+1} = -\Delta t \nabla^2 g_{i,j}^n + u_{i,j}^n. \quad (3.35)$$

Portanto, temos a seguinte expressão do processo iterativo para a evolução temporal das E.D.P.'s (2.19), (2.39) e (2.41).

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \nabla^2 g_{i,j}^n. \quad (3.36)$$

3.4.5 Segmentação da Imagem

Para obtermos a segmentação da imagem mostrada na seção a seguir e na apresentação dos resultados experimentais, utilizamos o seguinte algoritmo:



$$su_{i,j} = \frac{1}{1 + K_{seg}(|\nabla u_{i,j}|)^2},$$

sendo t uma constante e $su_{i,j}$ a imagem (matriz) que mostra a segmentação (contornos) da imagem representada pela matriz $u_{i,j}$. Ou seja, calculamos o gradiente de u em cada ponto $u_{i,j}$. Neste trabalho, utilizamos $K_{seg} = 0.001$.

Para encerrar este capítulo, apresentamos um algoritmo proposto por You & Kaveh, para a redução de manchas na imagem recuperada. Este algoritmo calcula uma média entre os pontos situados na vizinhança de $u_{i,j}$, e atua como um filtro mediano nesses pontos.

3.5 Algoritmo para Remoção de Manchas

A proposta da utilização das equações diferenciais de quarta ordem para remoção do ruído proposta por You & Kaveh e o modelo proposto utilizando o termo $c(|\nabla u|)$, tendem a criar durante o processamento de imagens, manchas claras e escuras isoladas que podem ser caracterizadas como “pixels”, cujos valores de intensidade são ambos muito grandes ou muito pequenos em relação aos outros “pixels” em sua vizinhança. Podemos ver um exemplo deste efeito nas figuras 3.8 e 3.9 a seguir, onde mostramos uma imagem recuperada após 1000 iterações.



Figura 3.8 (a) e (b): Imagem recuperada utilizando-se o algoritmo de remoção de manchas e sua respectiva segmentação.



Figura 3.9 (a) e (b): Imagem recuperada **sem** a utilização do algoritmo de remoção de manchas e respectiva segmentação.

Na figura 3.8, temos uma imagem recuperada e sua respectiva segmentação, onde aplicamos o algoritmo para remoção de manchas, uma única vez, utilizando a E. D. P. (2.19), proposta por You & Kaveh. Já na figura 3.9 (a) e (b), mostramos a mesma imagem recuperada, porém, sem a aplicação do algoritmo. Podemos observar claramente, a diferença de resultados, principalmente através das respectivas segmentações das imagens. O aparecimento dessas manchas pode ser explicado da seguinte forma: sendo o Laplaciano da função u de intensidade de imagem muito grande em volta dos “pixels” manchados e a função $f(\cdot)$, desenvolvida de tal forma para que esta decresça rapidamente com o objetivo de preservar o contorno, a função $g(\cdot)$ obtida no estágio 2, seção 3.3.1, terá valores muito pequenos em volta desses “pixels” manchados. Então, o lado direito das expressões (2.19) e (2.39), terá um valor pequeno. Consequentemente, essas manchas serão mantidas intactas, juntamente com os contornos.

Para diminuir o aparecimentos destas manchas isoladas, You & Kaveh, propuseram um algoritmo relativamente simples de ser aplicado.

Denotando-se a média e a variância de uma vizinhança de um pixel (i, j) , respectivamente como:

$$m = \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{4} \quad (3.37)$$

e,

$$\sigma^2 = \frac{u_{i,j-1}^2 + u_{i,j+1}^2 + u_{i-1,j}^2 + u_{i+1,j}^2}{4} - m^2 \quad (3.38)$$

Então, consideramos este pixel uma mancha se σ é pequeno e,

$$|u_{i,j} - m| \gg \sigma.$$

Assim, percorrendo todos os pontos de $u_{i,j}$, a proposta do algoritmo para tirar manchas é dada por:

$$u_{i,j} = \begin{cases} m, & \text{se } |u_{i,j} - m|^2 > k_m \sigma^2; \\ u_{i,j}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.39)$$

sendo k_m uma constante arbitrária. Neste trabalho, utilizamos $k_m = k$, sendo k a constante utilizada no coeficiente de difusão,

$$c(s) = \frac{1}{1 + ks^2}.$$

A aplicação deste algoritmo para remoção de manchas é feita posteriormente à aplicação do processo iterativo que utiliza a E.D.P. de quarta ordem, sendo que em alguns casos o aplicamos várias vezes a fim de melhorarmos ainda mais os resultados obtidos.

Os métodos numéricos utilizados para a resolução das equações diferenciais (2.19), (2.39) e (2.41), são bastante simples não somente do ponto de vista matemático, mas, principalmente, do computacional, e, visam sobretudo explorar o caráter explícito das equações, proporcionando dessa forma um baixo custo computacional.

Existem é claro, outros métodos com ordem de aproximação melhores, principalmente no que se refere as aproximações por diferenças finitas, ou mesmo algoritmos mais sofisticados para implementarmos o produto de convolução $G_\sigma * u$, porém para reduzirmos o tempo de processamento, optamos por não utilizá-los.



Note também que em uma imagem formada por uma malha de 256×256 pontos, calculamos o valor de $u(x, y)$ em 65536 elementos a cada iteração do processo, sendo em geral necessárias muitas iterações para obtermos resultados satisfatórios.

Dessa forma, como poderemos observar no próximo capítulo, através da utilização dessas técnicas nas equações diferenciais propostas alcançamos resultados satisfatórios.

Resultados Experimentais



Capítulo 4

Resultados Experimentais

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos com a aplicação da equação diferencial parcial de quarta ordem, proposta por You & Kaveh e, também os resultados obtidos com as equações (2.39) e (2.41), para a recuperação de algumas imagens teste. As imagens utilizadas, são sintéticas, médicas e do cotidiano, com diversos níveis de complexidade e de ruído. Nosso objetivo na apresentação destes resultados é apenas de ilustrar a viabilidade de utilização das duas novas alternativas propostas para o argumento do coeficiente de difusão utilizado por You & Kaveh, porém, em algumas imagens teste utilizadas, os resultados obtidos foram iguais ou superiores aos destes autores.

Do ponto de vista computacional, uma imagem nada mais é do que uma matriz de valores reais, onde cada valor corresponde a uma tonalidade de cor. Neste trabalho, consideramos imagens em tons de cinza, que variam de 0, cor preta, até 255, cor branca. Os valores compreendidos entre esses dois extremos representam as tonalidades de cinza.

As imagens utilizadas aqui, são representadas por matrizes de dimensões, 256×256 , onde cada elemento $u_{i,j}$ da matriz é um valor real, correspondente a uma tonalidade de cinza da imagem $u(x,y)$, no ponto, $x = ih$ e $y = jh$, ($h = 1$).

Inicialmente, mostramos alguns resultados obtidos utilizando o coefi-



ciente de difusão $c(\cdot)$, dado por:

$$c(s) = \frac{1}{1 + ks^2}.$$

sendo k uma constante cujo valor que deve ser escolhido para atuar como um limitante para o valor de $c(\cdot)$ de modo a torná-lo próximo de 1 nas regiões homogêneas e próximo de 0 nas regiões de contorno. Na prática, para valores de k relativamente grandes temos um menor nível de suavização e caso contrário, ou seja, para k pequeno temos um suavização mais intensa, como podemos observar através da própria expressão numérica do coeficiente de difusão mostrada anteriormente.

Ao final deste capítulo, mostramos alguns resultados obtidos a partir dessas três E.D.P.'s, quando substituímos o coeficiente de difusão mostrado acima pelos outros coeficientes apresentados no final do capítulo 1. Alguns resultados neste caso, também foram bastante satisfatórios.

Para facilitar a visualização e, melhor compreensão dos resultados, obtidos pelas três E. D. P.'s de quarta ordem consideradas, adotamos a seguinte notação:

$$YK - c(|\nabla^2 u|) : \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 [c(|\nabla^2 u|)\nabla^2 u]$$

$$YK - c(|\nabla u|) : \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 [c(|\nabla u|)\nabla^2 u]$$

$$YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|) : \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 [c(|\nabla(G_\sigma * u)|)\nabla^2 u]$$

Uma dificuldade encontrada neste trabalho e, comum na área de processamento de imagens, é a escolha de parâmetros adequados, para a obtenção de resultados satisfatórios para um modelo específico. Neste trabalho, os principais parâmetros utilizados, são o tempo de evolução t , o valor do passo Δt para atingirmos este tempo, e o valor da constante k , no coeficiente de difusão $c(\cdot)$, que esta diretamente relacionada à quantidade de detalhes que desejamos preservar



na imagem. Surge a necessidade de outros parâmetros, quando utilizamos outros diferentes coeficientes de difusão, como vimos ao final do capítulo 1. Para as três E.D.P.'s consideradas escolhemos os parâmetros que nos deram os melhores resultados práticos em cada imagem teste.

O valor do SNR de cada imagem teste utilizada é mostrada na respectiva legenda da figura. A implementação numérica deste trabalho foi realizada utilizando-se a linguagem de programação "FORTRAN 95 for Windows". A execução do programa feita em um computador Pentium III 800 MHz. Para a visualização dos resultados, introdução do ruído e geração dos gráficos apresentados utilizamos o "software" MatLab®.

Nosso primeiro exemplo trata de uma imagem da vida real com um alto nível de complexidade por possuir diversos detalhes. O nível de ruído aplicado a esta imagem, é aproximadamente, $SNR \cong 12$ dB. A seguir mostramos, na figura 4.1, a imagem original e a degradada pelo ruído.



Figura 4.1 (a) e (b): Imagem Original e com ruído, $SNR \cong 12$ dB, respectivamente.

Os resultados obtidos neste caso, foram os seguintes:





Figura 4.2 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$ e respectiva segmentação.



Figura 4.3 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$ e respectiva segmentação.



Figura 4.4 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$ e respectiva segmentação.

Na figura 4.2, mostramos o resultado obtido com o modelo $YK - c(|\nabla u|)$. Neste caso utilizamos os parâmetros: $t = 65$, $\Delta t = 0.1$, e constante $k_m = k = 1.1$. Assim, foram necessárias 650 iterações, para atingirmos o tempo t . O algoritmo para remoção de manchas foi aplicado 3 vezes com $k_m = k$, após processarmos esta imagem com este modelo. O resultado obtido na aplicação deste modelo foi bastante satisfatório. A segmentação da imagem recuperada, figura 4.2(b), mostra que tivemos uma ótima suavização, relacionada com uma boa preservação dos contornos. Fato já previsto, devido a quantidade de ruído aplicada a imagem original.

O melhor resultado obtido com o modelo proposto por You & Kaveh é mostrado na figura 4.3. Neste caso, utilizamos $t = 50$, $\Delta t = 0.1$, e, $k_m = k = 0.7$. Dessa forma, aplicamos 500, iterações para obtenção deste resultado e como no modelo anterior, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas 3 vezes. Como podemos observar, na figura 4.3(a), o resultado visual obtido também é satisfatório, porém, podemos perceber, através da segmentação, figura 4.3(b), uma menor suavização da imagem, se a compararmos com o resultado obtido pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$, figura 4.2, porém, aqui efetuamos um menor número de iterações. Em especial neste caso, um maior número de iterações, bem como, um menor valor da constante k produziram resultados pouco satisfatórios.

Na figura 4.4, mostramos o melhor resultado obtido com a aplicação do modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$. O resultado obtido com este modelo foi bastante satisfatório. Os parâmetros utilizados foram: $t = 170$, $\Delta t = 0.1$ e $k_m = k = 1 \times 10^{10}$ e aplicamos o algoritmo para remoção de manchas 2 vezes. Com este modelo foi necessária a utilização de um alto valor da constante k . Em todos os experimentos envolvendo o produto de convolução, tomamos o parâmetro σ , utilizado no cálculo da função Gaussiana G_σ , como sendo a intensidade do ruído calculada através do desvio padrão da imagem inicial. Neste caso, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas apenas uma vez. Na segmentação, figura 4.4(b), temos uma ótima preservação dos contornos apesar, de em pequenas áreas



das regiões homogêneas observarmos ainda a presença de algumas manchas bem claras. Através dos testes, foi possível remover totalmente estas manchas, porém, “escolhemos” preservar um pouco mais os contornos.

No próximo exemplo, tratamos uma imagem já mostrada neste trabalho ao final do capítulo 1. É uma imagem conhecida na área de processamento de imagens e com grande riqueza de detalhes. A seguir na figura 4.5(a), temos a imagem original e com ruído de aproximadamente 10 dB, figura 4.5(b).



Figura 4.5 (a) e (b): Imagem original e com ruído, $SNR \cong 10dB$, respectivamente.

Os resultados obtidos com a aplicação dos três modelos, são mostrados a seguir.



Figura 4.6 (a) e (b): Reconstrução utilizando $YK-c(|\nabla u|)$ e respectiva segmentação.



Figura 4.7 (a) e (b): Reconstrução utilizando $YK-c(|\nabla^2 u|)$ e respectiva segmentação.

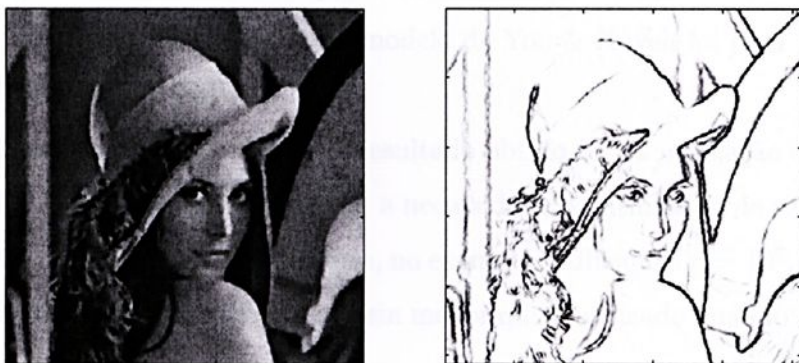


Figura 4.8 (a) e (b): Reconstrução utilizando $YK-c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$ e respectiva segmentação.

Na figura 4.6, mostramos o resultado obtido com o modelo $YK-c(|\nabla u|)$, conseguimos um bom resultado realizando 700 iterações com os parâmetros $t = 70$, $\Delta t = 0.1$ e $k_m = k = 1.8$. Neste caso, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas uma única vez após a imagem processada por este modelo. Na figura 4.7, mostramos o resultado obtido com o modelo proposto por You & Kaveh ($YK-c(|\nabla^2 u|)$), utilizamos os parâmetros $k_m = k = 1.5$, $\Delta t = 0.1$ e $t = 500$. Dessa forma, foram necessárias 5000 iterações para atingirmos o tempo t e, como no modelo $YK-c(|\nabla u|)$, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas uma única vez. Na figura 4.8, mostramos o resultado obtido com a utilização do produto de

convolução, obtivemos um bom resultado com $k_m = k = 10^9$, $\Delta t = 0.1$ e $t = 200$. Aplicamos o algoritmo para remoção de manchas uma vez. Neste caso, foram necessárias 2000 iterações. Como no exemplo anterior, tomamos o parâmetro σ , utilizado no cálculo da função Gaussiana G_σ , como sendo a intensidade do ruído calculada através do desvio padrão da imagem inicial.

Podemos observar que tanto na aplicação do modelo proposto por You & Kaveh, como a do modelo modificado $YK-c(|\nabla u|)$, nos dão resultados satisfatórios. Porém, apesar do resultado obtido por You & Kaveh, ter uma pequena vantagem no que diz respeito à preservação dos contornos, podemos observar claramente, que temos uma melhor suavização da imagem quando utilizamos $YK-c(|\nabla u|)$. Notamos também que a quantidade de iterações necessárias para obtermos resultados satisfatórios no modelo de You & Kaveh foi bem maior que o utilizado em $YK-c(|\nabla u|)$.

Consideramos que o melhor resultado obtido foi na utilização do modelo $YK-c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$. Neste caso, houve a necessidade da utilização de valores bem altos para o parâmetro k . Como vimos, no exemplo, utilizamos $k = 10^9$, apesar do número de iterações necessárias, ser bem menor que o utilizado quando aplicamos o modelo $YK-c(|\nabla^2 u|)$.

Nosso próximo exemplo, trata-se de uma imagem sintética, formada por quatro triângulos, porém, neste caso, temos uma grande quantidade de ruído, aproximadamente 0 dB.



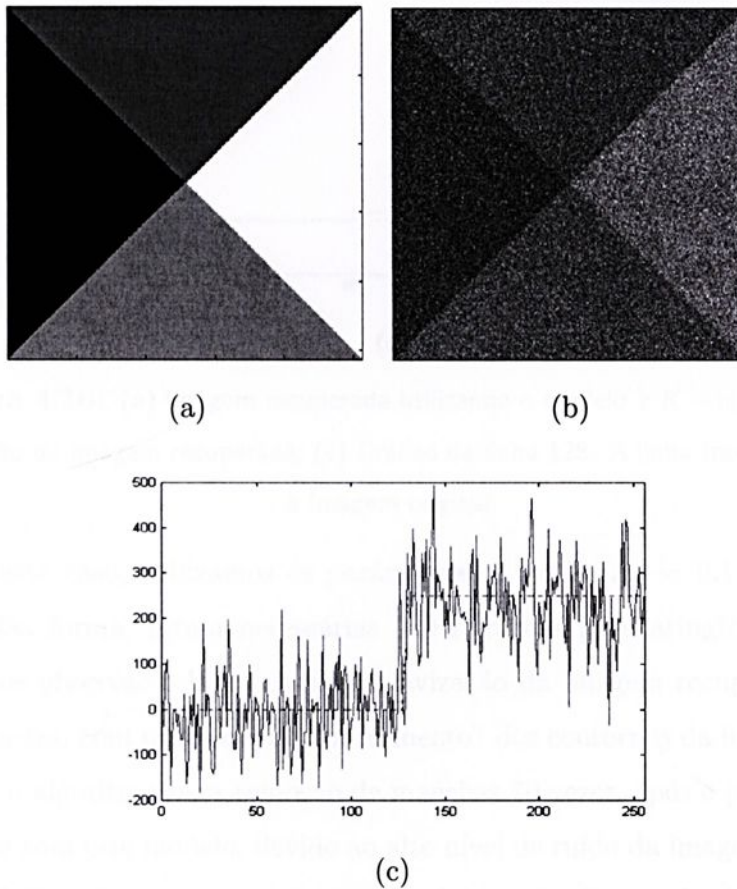
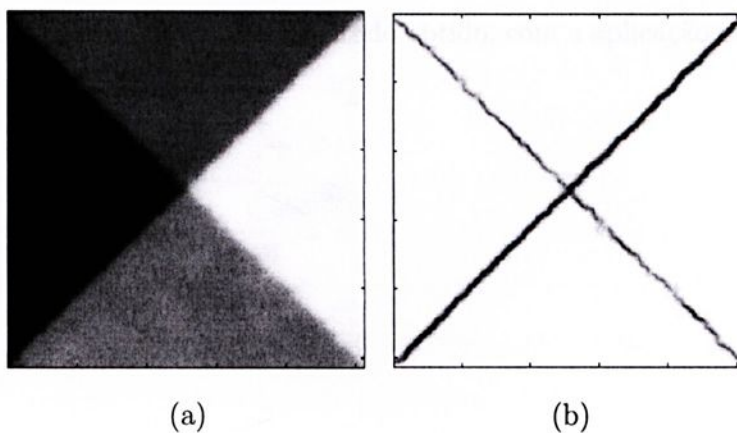


Figura 4.9: (a) Imagem original; (b) Imagem com ruído, $SNR \cong 0dB$, aproximadamente; (c) Gráfico da linha 128. A linha tracejada refere-se à imagem original.

Primeiramente, mostramos o resultado obtido com o modelo $YK - c(|\nabla u|)$.



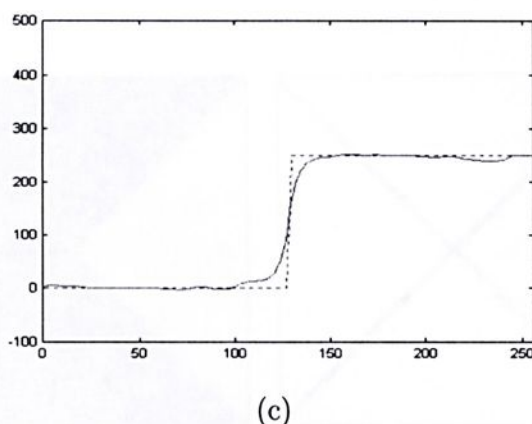


Figura 4.10: (a) Imagem recuperada utilizando o modelo $YK - c(|\nabla u|)$; (b) Segmentação da imagem recuperada; (c) Gráfico da linha 128. A linha tracejada refere-se à imagem original.

Neste caso, utilizamos os parâmetros: $t = 40$, $\Delta t = 0.1$ e $k_m = k = 0.07$. Dessa forma, foram necessárias 400 iterações para atingirmos o tempo t . Podemos observar o bom nível de suavização da imagem recuperada, figura 4.10(a), porém, com um pequeno “borramento” dos contornos da imagem. Aqui, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas 70 vezes, após o processamento da imagem com este modelo, devido ao alto nível de ruído da imagem inicial. Na figura 4.10(b), referente a segmentação, podemos observar mais claramente este efeito. Esse fato, já era esperado, face ao nível de ruído considerado. No gráfico referente à linha 128, figura 4.10(c), podemos observar, uma ótima aproximação da respectiva linha da imagem original.

A seguir, mostramos o resultado obtido, com a aplicação do modelo proposto por You & Kaveh.

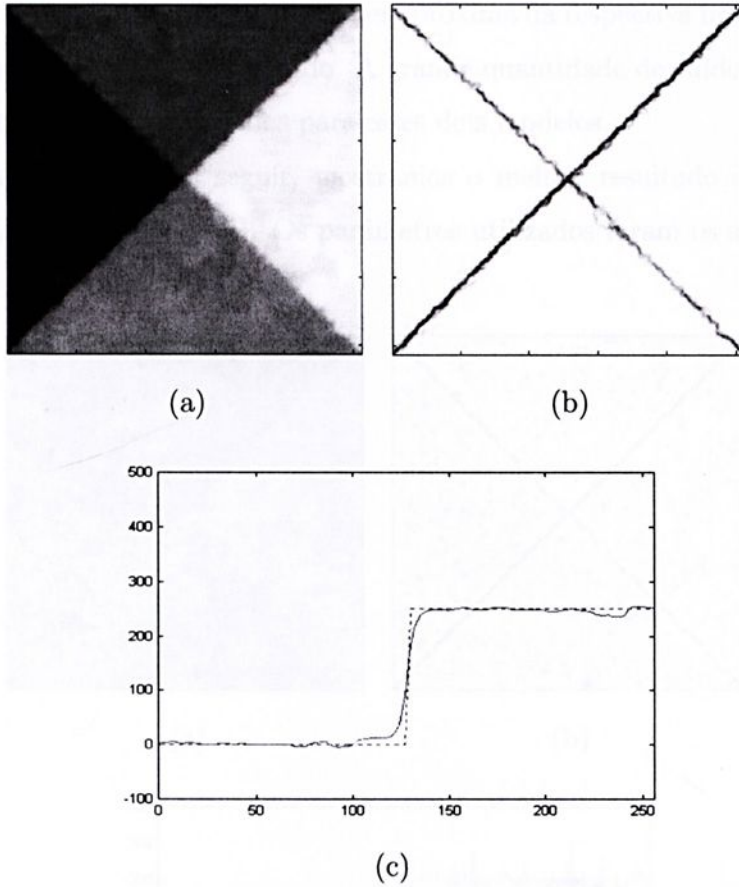


Figura 4.11: (a) Imagem recuperada utilizando o modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$; (b) Segmentação da imagem recuperada; (c) Gráfico da linha 128. A linha tracejada refere-se à imagem original.

Neste caso, também obtemos um resultado bastante satisfatório. Os parâmetros utilizados foram os seguintes: $t = 50$, $\Delta t = 0.1$, e $k_m = k = 0.2$. Podemos observar que o resultado obtido com este modelo é bem semelhante ao obtido pelo modelo anterior, porém, pode-se notar uma maior suavização das regiões homogêneas quando aplicamos o modelo $YK - c(|\nabla u|)$, mostrada na figura 4.10(a). Neste caso, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas 60 vezes. Aqui também obtemos um bom nível de suavização da imagem, figura 4.11(a), com um pequeno “borramento” dos contornos. O valor pequeno da constante k

contribui para esta maior suavização. Na figura 4.11(c), podemos observar que a linha 128 da imagem recuperada esta bem próxima da respectiva linha da imagem original representada pelo tracejado. A grande quantidade de ruído, 0 dB, causa esta “semelhança” de resultados para estes dois modelos.

Na figura 4.12 a seguir, mostramos o melhor resultado obtido com o modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$. Os parâmetros utilizados foram os seguintes: $t = 300$, $\Delta t = 0.1$ e $k_m = k = 1 \times 10^9$.

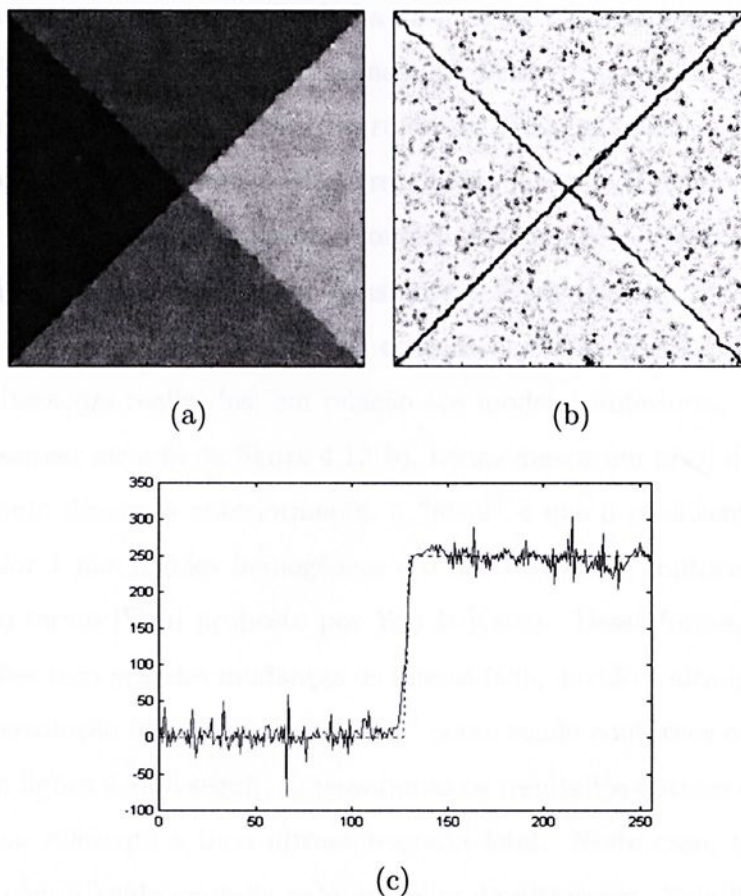


Figura 4.12: (a) Imagem recuperada utilizando o modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$; (b) Segmentação da imagem recuperada; (c) Gráfico da linha 128. A linha tracejada refere-se à imagem original.

Podemos observar na figura 4.12(a) que visualmente houve uma boa preservação dos contornos da imagem, porém, na figura 4.12(b) referente à segmentação, podemos observar que apesar dos contornos bem preservados, nas regiões homogêneas há ainda vários “pixels” manchados, o que nos mostra um nível de suavização menor se comparado com os resultados obtidos pelos modelos anteriores, mesmo com a realização de 3000 iterações para atingirmos o tempo t . Este fato, é mais evidente, quando plotamos a linha 128 da imagem recuperada e a comparamos com a respectiva linha da imagem original, mostrado na figura 4.12(c). Também neste caso, aplicamos 300 vezes o algoritmo para remoção de manchas devido ao alto nível de ruído da imagem inicial. Nos inúmeros testes realizados para a obtenção deste resultado, quantidade maiores de iterações causaram um significativa perda dos contornos da imagem. Também neste caso foi necessário um alto valor para a constante k . Pode-se notar que este modelo, apresenta uma ótima preservação dos contornos, considerando a grande quantidade de iterações realizadas, em relação aos modelos anteriores, porém, como pode-se observar através da figura 4.12(b), temos menor um nível de suavização.

Como dissemos anteriormente, o “ideal” é que o coeficiente de difusão assumia valor 1 nas regiões homogêneas e 0 nas regiões de contorno, o que não é o caso do termo $|\nabla^2 u|$ proposto por You & Kaveh. Dessa forma, como temos várias regiões com grandes mudanças de intensidade, devido a alta quantidade de ruído, a convolução identifica esses “picos” como sendo contornos e os preserva.

Na figura 4.13 a seguir, apresentamos os resultados obtidos em uma imagem médica, referente a uma ultrassonografia fetal. Neste caso, temos apenas a imagem com o ruído captada pelo aparelho de ultrassom. Pela figura 4.13(b) podemos observar que o nível de ruído é bastante significativo.



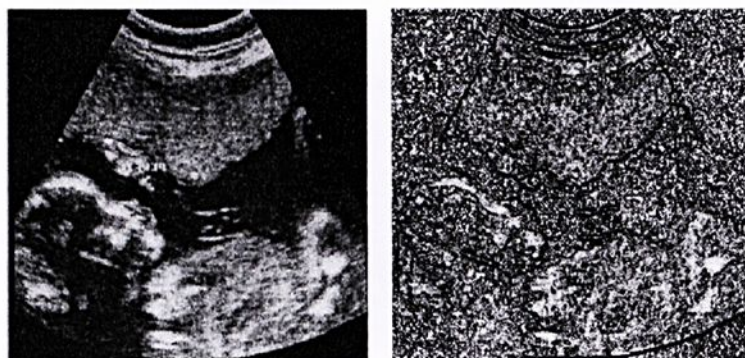


Figura 4.13 (a) e (b): Imagem original ruidosa, e respectiva segmentação.

A seguir, mostramos o melhor resultado obtido com a aplicação de cada uma das E.D.P.'s de quarta ordem.

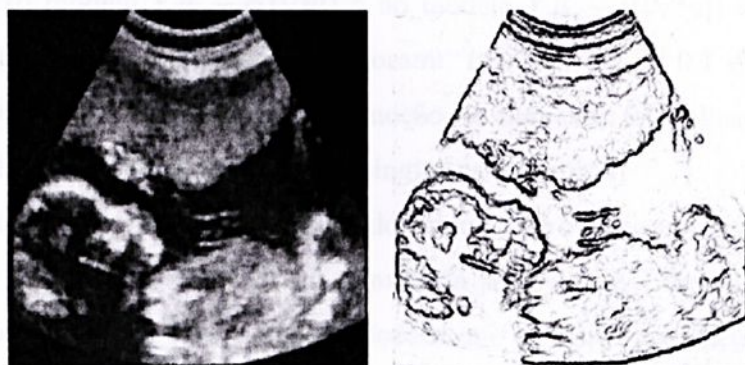


Figura 4.14 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$, e respectiva segmentação.

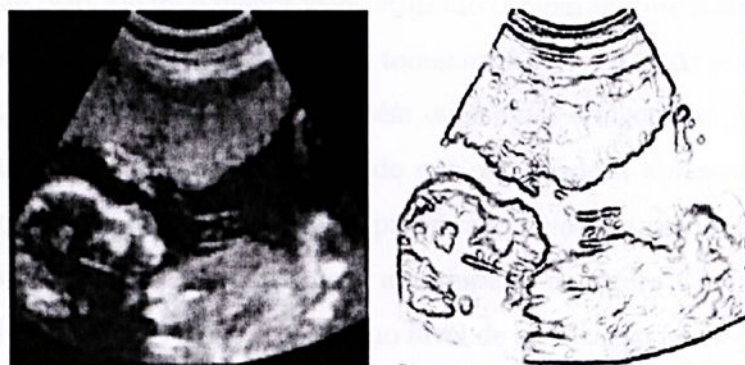


Figura 4.15 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$, proposto por You & Kaveh e respectiva segmentação.



Figura 4.16 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, e respectiva segmentação.

Neste exemplo, os três modelos apresentaram resultados bastante satisfatórios. No modelo $YK - c(|\nabla u|)$ e no modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$ utilizamos os mesmos parâmetros, que neste caso foram: $t = 15$, $\Delta t = 0.1$ e a constante $k = k_m = 0.7$. O algoritmo para remoção de manchas foi aplicado 3 vezes e foram necessárias 150 iterações para atingirmos o tempo t .

Consideramos o melhor resultado como sendo o obtido pelo modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$. Podemos observar através da segmentação, figura 4.16(a), que os contornos estão um pouco mais realçados que os contornos apresentados nas figuras 4.15(b) e 4.14(b) referentes aos outros modelos. Como aconteceu anteriormente, o valor da constante k é bastante alto em relação aos outros dois modelos, porém, neste caso, ele foi o menor valor utilizado comparando-se a aplicação deste modelo nas outras imagens teste. Aqui, tomamos $k = 1 \times 10^6$, $\Delta t = 0.1$, e $t = 70$. Assim, aplicamos, 700 iterações. Também, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas 50 vezes. O resultado obtido por este modelo, apresentou um nível de suavização um pouco menor que o apresentado pelos outros dois, como podemos observar, através da segmentação apresentada na figura 4.16. Neste caso, foi possível atingir praticamente o mesmo nível de suavização (remoção de ruído) apresentado pelos modelos $YK - c(|\nabla u|)$ e $YK - c(|\nabla^2 u|)$, porém, optamos, interromper um pouco antes o processo iterativo para dessa forma obtermos uma

melhor preservação dos contornos da imagem recuperada.

Para a obtenção de todos os resultados mostrados anteriormente, utilizamos o coeficiente de difusão dado por (1.10). A seguir, fazemos uma comparação entre os coeficientes de difusão, mostrados ao final do capítulo 1.

Resultados Obtidos com a Utilização de Outros Coeficientes de Difusão

Nesta seção, através de uma única imagem teste, fazemos uma comparação entre o coeficiente de difusão proposto por You & Kaveh, e os outros cinco coeficientes mostrados ao final do capítulo 1. Note que dessa forma, como estamos trabalhando com três E.D.P.'s para reconstrução de imagens, e seis coeficientes de difusão a serem comparados, temos dezoito diferentes esquemas computacionais para recuperação de imagens. A imagem utilizada, também é de dimensões 256×256 e, aplicamos um nível de ruído de aproximadamente 12 dB. A seguir, mostramos a imagem original e a com ruído.

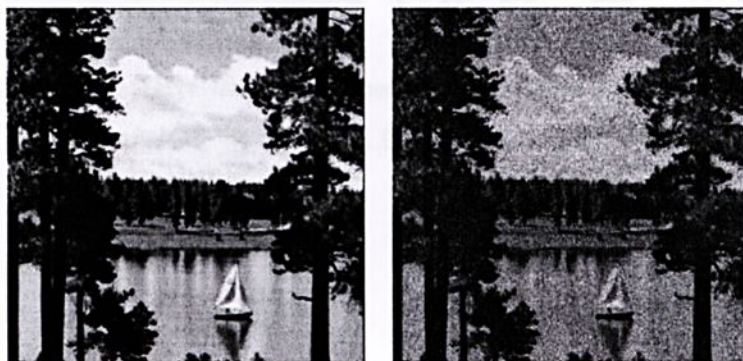


Figura 4.17 (a) e (b): Imagem original e com ruído, aproximadamente 12dB.

Primeiramente, apresentamos os melhores resultados obtidos, quando, utilizamos um dos coeficientes de difusão propostos por Malik & Perona [20] nas três E.D.P.'s consideradas, dado por (1.9):

$$c(s) = \exp \left[- \left(\frac{s}{k} \right)^2 \right].$$



Figura 4.18 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (1.9) e respectiva segmentação.



Figura 4.19 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (1.9) e respectiva segmentação.



Figura 4.20 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, utilizando o coeficiente de difusão (1.9) e respectiva segmentação.

Neste exemplo, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas 2 vezes em todos os modelos e os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. Neste caso, conseguimos resultados satisfatórios utilizando os mesmos parâmetros para os três modelos: $t = 5$, $\Delta t = 0.1$ e $k_m = k = 1 \times 10^{-4}$. Dessa forma, foram realizadas 50 iterações com cada modelo, e como podemos observar os resultados obtidos são bastante semelhantes. Pode-se notar contudo, que conseguimos uma boa preservação dos contornos da imagem, e detalhes como o “reflexo” do barco na água, estão bem preservados.

A seguir, mostramos os resultados obtidos, por cada modelo, quando utilizamos o coeficiente de difusão dado por:

$$c(s) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s \neq 0, \\ s, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1)$$

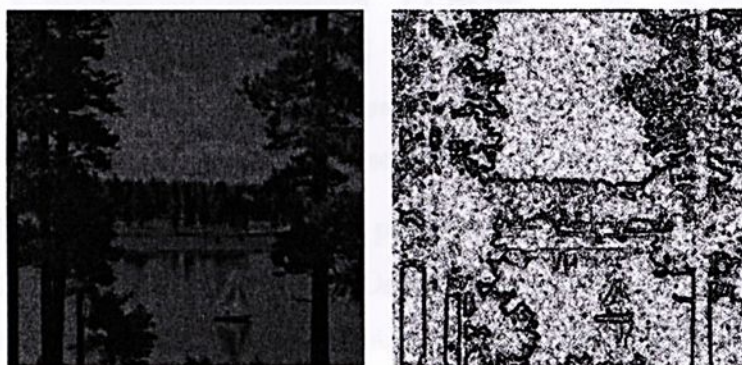


Figura 4.21 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.1) e segmentação da imagem recuperada.

No caso deste coeficiente, aplicamos o algoritmo para remoção de manchas 2 vezes, e utilizamos $k_m = 1.0$, nos três modelos considerados. Como podemos observar este coeficiente de difusão mostrou-se ineficiente. Este fato ocorre, pois, como a imagem teste possui vários contornos, ou seja, diversos pontos onde $|\nabla u|$ assume um valor grande computacionalmente (teoricamente $|\nabla u| \rightarrow \infty$), temos que o termo $\frac{1}{s}$ tende a zero. Dessa forma, não temos satisfeita a condição

ideal do coeficiente de difusão de possuir valor 1 na regiões homogêneas e valor 0 nas regiões dos contornos. Além disso, como o zero corresponde a cor preta a tendência é que a imagem fique cada vez mais “escurecida” a cada iteração. A figura 4.21 foi obtida com apenas uma iteração. maior número de iterações causou a perda total da imagem. Devemos destacar também, que este coeficiente de difusão depende somente dos valores de $u_{i,j}$ na imagem, e não do valor da constante k como nos coeficientes mostrados anteriormente.

A seguir, mostramos os resultados obtidos com o modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$.

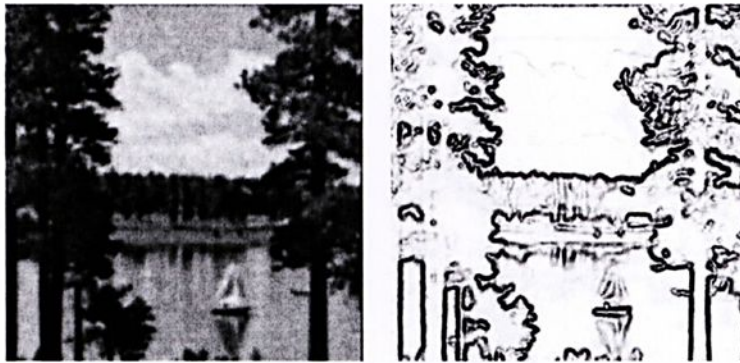


Figura 4.22 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.1) e segmentação da imagem recuperada.

Utilizando o modelo proposto por You & Kaveh, o resultado com o coeficiente (4.1) foi bastante satisfatório. Os parâmetros utilizados neste caso, foram $t = 10$, $\Delta t = 0.1$, e assim, foram necessárias 100 iterações. Neste caso, poderíamos até obter uma maior nível de suavização da imagem, porém, como já havia acontecido, a medida que aumentamos o número de iterações, há um “borramento” dos contornos da imagem.

O resultado obtido quando utilizamos o produto de convolução, ou seja, $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, foi totalmente insatisfatório e não é mostrado aqui. Apesar dos inúmeros testes, com diversas combinações dos parâmetros, tivemos a perda total da imagem. Fato semelhante ao que ocorreu quando utilizamos o modelo $YK - c(|\nabla u|)$. Aqui, como calculamos também o gradiente do produto de convolução $|\nabla(G_\sigma * u)|$, este assume valores altos em quase todos os pontos da

imagem, e dessa forma, o termo $\frac{1}{s}$ do coeficiente de difusão, nos dá valores bem próximos de zero, e assim, a imagem tende a se tornar escura.

Agora, mostramos os resultados obtidos quando utilizamos o coeficiente de difusão, dado por:

$$c(s) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & s < T \\ \frac{1}{s}, & s \geq T. \end{cases} \quad (4.2)$$



Figura 4.23 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.2) e respectiva segmentação.

Como o coeficiente anterior, este não depende da constante k , porém, agora, temos a adição do parâmetro T , que atua como um limitante para o valor de s fazendo com que $c(\cdot)$ tenha valor próximo de zero nas regiões onde s assume um valor alto (contornos da imagem) e valor próximo de 1 nas regiões homogêneas. Analogamente ao feito por You & Kaveh, fixamos o valor deste parâmetro em $T = 3.0$ e, aplicamos apenas 50 iterações com o modelo $YK - c(|\nabla u|)$. O algoritmo para remoção de manchas foi aplicado apenas 1 vez, $k_m = 1.0$, em todos os modelos considerados. Como podemos observar na figura 4.23, o resultado obtido é bastante satisfatório, com um bom nível de suavização e preservação dos contornos da imagem.

A seguir, mostramos o resultado obtido quando utilizamos este coeficiente de difusão, com o modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$.



Figura 4.24 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.2) e respectiva segmentação.

Neste caso, obtemos um bom resultado com 90 iterações, ou seja, $t = 9$ e $\Delta t = 0.1$ e, com o parâmetro fixo $T = 3.0$. O resultado obtido foi bastante satisfatório, porém, foi necessário um número maior de iterações. Se compararmos este resultado com o apresentado anteriormente, figura 4.23, temos um menor nível de suavização. A seguir, mostramos o resultado obtido com o modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$.



Figura 4.25 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.2) e respectiva segmentação.

O resultado obtido com este modelo, utilizando este coeficiente, também foi bastante satisfatório, e também nos mostra que o problema da divisão por

zero, que causou a perda total da imagem, quando utilizamos o coeficiente anterior, expressão (4.1), foi parcialmente solucionado. Outro fato importante, é que neste caso, aplicamos apenas 15 iterações, mostrando que este modelo, tem um alto grau de suavização a cada iteração aplicada. Seguindo a seqüência de coeficientes mostrada no capítulo 1, mostramos agora, os resultados obtidos quando utilizamos o coeficiente de difusão dado por:

$$c(s) = \begin{cases} \frac{p(T + \epsilon)^{p-1}}{T}, & s < T \\ \frac{p(s + \epsilon)^{p-1}}{s}, & s \geq T. \end{cases} \quad (4.3)$$

O objetivo deste coeficiente de difusão é evitar o reconhecimento de falsos contornos por parte do sistema computacional e assim, evitar a preservação do ruído.



Figura 4.26 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.3) e respectiva segmentação.

Neste exemplo, temos a inclusão de dois novos parâmetros, que tem como principal finalidade, uma suavização uniforme em toda imagem, evitando, o reconhecimento de falsos contornos por parte do modelo. Para fins de comparação, fixamos, como You & Kaveh, $p = 0.5$, $\epsilon = 1.0$ e $T = 3.0$. Podemos observar na figura 4.26, que o resultado obtido é bastante satisfatório, porém, aqui, o número de iterações foi de 300. O algoritmo para remoção de manchas, foi aplicado uma única vez, com $k_m = 1.0$, em todos os três modelos considerados.

A seguir, mostramos os resultados obtidos, com este coeficiente de difusão, quando utilizamos o modelo original proposto por You & Kaveh.



Figura 4.27 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.3) e respectiva segmentação.

Neste caso, com este coeficiente de difusão, notamos através dos testes, que o número de iterações necessárias foi bastante elevado. Mostramos aqui, o melhor resultado obtido, e para isso, foram necessárias 1500 iterações, com os parâmetros, $t = 150$, $\Delta t = 0.1$, e os demais parâmetros p , ϵ e T com os mesmos valores mostrados anteriormente. O resultado obtido, foi bastante satisfatório, e apesar do elevado número de iterações aplicados, tivemos uma ótima preservação dos contornos.

Utilizando o coeficiente de difusão (4.3), no modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, obtemos o seguinte resultado.



Figura 4.28 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.3) e respectiva segmentação.

O resultado obtido, foi amplamente satisfatório, principalmente, pelo reduzido número de iterações. Neste caso, 40 iterações foram aplicadas, com os parâmetros $t = 4.0$ e $\Delta t = 0.1$. Os valores dos demais, parâmetros, são os mesmos já mostrados anteriormente. Dessa forma, concluímos que para este coeficiente (4.3), este modelo apresentou os melhores resultados.

O último coeficiente de difusão mostrado no final do capítulo 1, é dado por:

$$c(s) = \begin{cases} \frac{1}{T} + \frac{p(T + \epsilon)^{p-1}}{T}, & s < T \\ \frac{1}{s} + \frac{p(s + \epsilon)^{p-1}}{s}, & s \geq T, \end{cases} \quad (4.4)$$

com $\epsilon > 0$ e $0 < p < 1$. Este coeficiente tenta unir o caráter seletivo proposto pelo coeficiente (4.2) com a difusão uniforme proposta pelo coeficiente (4.3), ambos propostos por You & Kaveh.



Figura 4.29 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.4) e respectiva segmentação.

Neste caso, com a inclusão dos termos $\frac{1}{T}$ e $\frac{1}{s}$, temos um alto grau de suavização por parte deste modelo. Dessa forma, tivemos um bom resultado com apenas 30 iterações, ou seja, utilizamos $t = 3$ e $\Delta t = 0.1$, com $p = 0.5$, $T = 3.0$ e $\epsilon = 1.0$, já fixados anteriormente. Também, neste caso, utilizamos o algoritmo para remoção de manchas uma única vez, com $k_m = 0.5$, nos três modelos considerados.

A seguir, na figura 4.30, mostramos os resultados obtidos, com a utilização do coeficiente de difusão (4.4), no modelo original proposto por You & Kaveh. Neste caso, foi necessário um maior número de iterações, 120, e o resultado obtido foi praticamente o mesmo apresentado pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$ que foi bastante satisfatório.



Figura 4.30 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla^2 u|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.4) e respectiva segmentação.

Agora, mostramos os resultados obtidos, com o coeficiente (4.4), utilizando o modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$.



Figura 4.31 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.4) e respectiva segmentação.

O resultado neste caso apresentou um maior “borramento” dos contornos da imagem, se a compararmos com o resultados obtidos com os modelos apresentados anteriormente. Com o aumento do grau de suavização a cada iteração, causado pela inclusão dos termos $\frac{1}{T}$ e $\frac{1}{s}$, e como este modelo também possui

um alto grau de suavização, devido ao baixo nível de ruído aplicado a esta imagem teste, com apenas 5 iterações conseguimos um resultado satisfatório. Por outro lado, a medida que aumentamos o número de iterações, fica evidente a suavização dos contornos e dessa forma, vamos aos poucos, perdendo completamente as características da imagem original, como podemos observar na figura 4.32, onde apenas para comparação, aplicamos 10 iterações, usando este modelo e o coeficiente de difusão (4.4).



Figura 4.32 (a) e (b): Imagem recuperada pelo modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, utilizando o coeficiente de difusão (4.4) e respectiva segmentação, com 10 iterações.

No capítulo 5 a seguir, fazemos algumas conclusões sobre cada um dos modelos apresentados principalmente do ponto de vista prático, e sobre todo o trabalho realizado. Também sugerimos futuros trabalhos a serem realizados a partir deste.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho inicialmente, destacamos a importância do processamento digital de imagens nas diversas áreas da ciência e tecnologia. Mostramos que o processamento digital de imagens está dividido em quatro grandes áreas se enquadrando este trabalho na área de restauração de imagens. Também, destacamos a importância das equações diferenciais parciais na restauração de imagens digitais, e esperamos no decorrer do texto, ter justificado a grande utilidade dessa importante ferramenta para modelagem de fenômenos físicos que dependem do tempo.

Em seguida, mostramos o estudo do comportamento do processo de difusão anisotrópica realizado por You & Kaveh [26], cujo objetivo é justificar teoricamente quando o processo de difusão utilizado para o processamento de imagens, é bom ou mal posto. Na prática estamos analisando se o processo de minimização do funcional $E(u)$ feito através da E.D.P. de quarta ordem irá convergir ou não para o mínimo global deste funcional e assim, quando avançamos um certo tempo t suavizamos a imagem ou seja, removendo o ruído, mantendo é claro, os contornos originais da imagem.

Além de mostrarmos como You & Kaveh construíram essa nova E. D. P. de quarta ordem como uma nova ferramenta para o processamento digital de



imagens, obtidas a partir da minimização do funcional energia $E(u)$, mostramos duas alternativas para o cálculo do coeficiente de difusão $c(\cdot)$. Na primeira substituímos a norma do operador Laplaciano $|\nabla^2 u|$, pela norma do operador gradiente da função intensidade de imagem $|\nabla u|$. Na segunda, substituímos $|\nabla^2 u|$ pela norma do gradiente do produto de convolução $|\nabla(G_\sigma * u)|$. Através dos resultados experimentais mostrados no capítulo anterior, mostramos a viabilidade da utilização destas E.D.P.'s para a restauração de imagens.

Para imagens com um nível baixo de ruído, os resultados obtidos com essas duas E.D.P.'s (2.39 e 2.41), foram bastante satisfatórios e, em geral apresentaram resultados iguais ou superiores aos obtidos com a E.D.P. utilizada por You & Kaveh. Notamos também que em geral o modelo $YK - c(|\nabla u|)$ exigiu um menor número de iterações se comparado com o modelo proposto por You & Kaveh e $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$. Nos resultados mostrados nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4, o modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$ apresentou o melhor resultado na recuperação de uma imagem bastante complexa degradada com aproximadamente 12 dB de ruído. O mesmo fato ocorre quando aumentamos um pouco mais a quantidade de ruído, aproximadamente 10 dB, como mostrado nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8.

Porém, quando aumentamos consideravelmente o nível de ruído, como o mostrado na figura 4.9, onde temos aproximadamente 0 dB de ruído, o modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, apesar de uma excelente preservação dos contornos se comparada com a dos outros dois modelos, não foi muito eficiente quanto a suavização da imagem nas regiões homogêneas, mesmo com a grande quantidade de iterações realizadas. Podemos observar mais claramente este fato, através do gráfico da linha 128, mostrado na figura 4.12(c). Já os modelos $YK - c(|\nabla u|)$ e $YK - c(|\nabla^2 u|)$ apresentaram resultados bastante semelhantes, apesar de no modelo proposto por You & Kaveh, podermos observar que houve uma menor suavização como o mostrado na figura 4.11(a), se comparado com o resultado obtido pelo modelo $YK - c(|\nabla u|)$, mostrado na figura 4.10(a). Também podemos observar, através do gráfico da linha 128, que apesar do alto nível de ruído, figura



4.9(c), houve uma boa aproximação da linha 128 da imagem original por parte desses dois modelos, figuras 4.10(c) e 4.11(c).

O baixo desempenho do modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$, quanto a suavização da imagem sintética mostrada na figura 4.9(a), ocorre é claro, devido ao alto nível de ruído aplicado a esta imagem e pela forma de atuação do termo $|\nabla(G_\sigma * u)|$ que como mostramos anteriormente aproxima o valor de $|\nabla u|$ num ponto (x, y) da imagem e dessa forma, como temos grandes variações de intensidade devido ao alto nível de ruído, esta aproximação acaba “identificando” estas altas variações como sendo contornos e dessa forma tende a preservá-los. Podemos observar através dos inúmeros testes realizados que os três modelos considerados não produziram resultados satisfatórios para elevados níveis de ruídos como -12 dB, por exemplo.

Outro resultado bastante interessante, foi a aplicação desses três modelos em uma imagem médica, no caso uma ultrassonografia fetal, mostrada na figura 4.13. No caso desta imagem, os três modelos apresentaram resultados bastante satisfatórios como podemos observar nas figuras 4.14, 4.15 e 4.16. Consideramos que o modelo $YK - c(|\nabla(G_\sigma * u)|)$ apresentou o melhor resultado devido há um maior realce dos contornos, mostrado na figura 4.16(b).

Também, mostramos e discutimos alguns resultados interessantes, quando utilizamos outros tipos de coeficientes de difusão mostrados na última seção do capítulo 1. Apesar de alguns destes coeficientes apresentarem resultados pouco satisfatórios, podemos destacar alguns coeficientes que não dependem da constante K , utilizado na comparação dos três modelos e que esta ligada ao nível de detalhes que desejamos preservar na imagem. Alguns coeficientes, como o da expressão (4.1), dependem apenas do valor da função intensidade de imagem u no ponto (x, y) . Já o coeficiente (4.2), utiliza uma outra constante T , como um limitante para o valor de u num ponto. Note que dependendo do valor de T , ($T = 1$ por exemplo), se o valor de $u(x, y)$ for muito grande ou seja, se estivermos em um ponto de contorno, $c(\cdot)$ terá um valor próximo de zero e dessa forma



a difusão será pouco intensa nessas regiões preservando os contornos. Por outro lado, se tivermos um valor pequeno de $u(x, y)$, a difusão será bastante intensa.

Além disso, You & Kaveh propuseram a utilização de coeficientes com outros parâmetros, p , T e ϵ , como podemos observar nas expressões (4.3) e (4.4). A utilização desses coeficientes produziu resultados bastante satisfatórios. Devemos destacar que a utilização destes coeficientes, gera uma grande quantidade de combinações para a obtenção de bons resultados pois, ainda não temos um algoritmo para otimizar a escolha destes parâmetros. Neste trabalho, utilizamos, os parâmetros que apresentaram os melhores resultados, como podemos observar nas figuras 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35.

Para encerrar este trabalho, gostaríamos de destacar a necessidade do prosseguimento dos estudos dessas equações diferenciais de quarta ordem no processamento digital de imagens. Fica evidente que ainda há muito a se fazer, principalmente quanto a criação ou utilização de algoritmos para seleção automática de parâmetros ótimos que devem ser escolhidos de acordo com o nível de ruído contido na imagem e a quantidade de detalhes a serem preservados. Existem na literatura diversos “otimizadores” para esses parâmetros, como por exemplo os mínimos quadrados [7], algoritmos genéticos [11], simulated annealing [4], etc..

Destacamos também que do ponto de vista computacional, as equações diferenciais parciais dadas pelas expressões, (2.19), (2.39) e (2.41), podem ser resolvidas numericamente por diversos métodos numéricos e aqui, os métodos numéricos utilizados foram bastante simples explorando-se a característica explícita das equações. Propomos, também, como trabalho futuro, um estudo direcionado ao uso de métodos numéricos mais precisos nas implementações numéricas desses modelos considerados aqui e, também, uma abordagem mais profunda quanto a estabilidade desses métodos.

Além disso, para reduzirmos o tempo de processamento computacional, e como já está sendo feito para as E.D.P.'s de segunda ordem por Barcelos, Boaventura e Silva Jr, propomos a paralelização desses códigos visto que este



tipo de problema é altamente paralelizável. Também, pode-se fazer um estudo a respeito de outros tipos de condições de contorno, para melhorarmos os resultados obtidos.

Esperamos com esse trabalho, ter contribuído no sentido de reunir conceitos e resultados sobre o comportamento do processo de difusão anisotrópica utilizada no processamento de imagens, e que este venha a se tornar uma referência para futuros trabalhos a serem desenvolvidos nesta linha de pesquisa.

Referências Bibliográficas

- [1] Alvarez, L., Lions, P. L., Morel, J.M. e Coll, T., *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Numer. Anal. **29**(3), pp. 845-866, 1992.
- [2] Barcelos, C.A.Z, Boaventura, M. e Silva Jr, *A Well Balanced Flow Equation for Noise Remove and Edge Detection*, IEEE Transactions on Image Processing, pp. 751-763, 2003.
- [3] Barcelos, C.A.Z. and Chen, Y., *Heat Flow and Related Minimization Problem in Image Restoration*, Comput. Math. Appl. **39**, pp. 81-97, 2000.
- [4] Bagirov, AM and Zhang, JP *Comparative analysis of the cutting angle and simulated annealing methods in global optimization*, 52 (4-5): 363-378 aug-oct 2003.
- [5] Bazaara, M. S. Shetty, M. C., *Nonlinear Programing: Theory and Algorithms*, New York, Wiley, 1979.
- [6] Bertozzi, A. L., *The Mathematics of Moving Contact Lines in Thin Liquid Films*, Notices AMS, vol. 45, pp. 689-697, June/July, 1998.
- [7] Campos, F. F., *Algoritmos Numéricos*, Editora LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- [8] Chen, Y., Vemuri, B.C. e Wang, *Image Denoising and Segmentation via Nonlinear Diffusion*, Computation Math. Appl. **39**(5/6), pp. 131-149, 2000.



- [9] Cidade, G., Neto, A. S., Roberty, N. C., *Restauração de Imagens com Aplicações em Biologia e Engenharia: Problemas Inversos em Nanociência e Nanotecnologia*, Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, São Carlos, 2003.
- [10] Cunha, M. C. C., *Métodos Numéricos*, 2ª Edição, Editora da UNICAMP, São Paulo, 2000.
- [11] Davis, L., *Handbook of genetic algorithms*, New York: Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [12] Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.
- [13] Figueiredo, D. G., *Análise I*, 2ª Edição, Rio de Janeiro, Editora LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1996.
- [14] Gonzalez, R. C. e Woods, R. E., *Processamento de Imagens Digitais*, Editora Edgar Blucher Ltda, São Paulo, 2000.
- [15] Hollig, K. and Nohel, J. A., *A Diffusion Equation with a Nonmonotone Constitutive Function*, in Proc. Syst. Nonlinear Partial Differen. Equation, J. Ball, Ed. Boston, D. Reidel, pp. 409-422, 1983.
- [16] Iório, V., *E. D. P. um Curso de Graduação*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1991.
- [17] Naylor, A. W. and Sell G. R., *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1982.
- [18] Nitzberg, M. and Shiota, T., *Nonlinear Image Smoothing with Edge and Corner Enhancement*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell, vol. 14, nº 8, pp. 826-833, Aug. 1992.



- [19] Osher J., Sethian, J. A., *Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*, J. Computation Physics, vol. 79, pp. 12-49, 1988.
- [20] Perona, P. and Malik, J., *Scale Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **12**, 7, pp. 629-639, 1990.
- [21] Rudin, L., Osher, S. e Fatemi, E., *Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms*, Physica D **60**, pp. 259-268, 1992.
- [22] Silva Jr., E. C. *Um Novo Modelo de Difusão Não Linear com Preservação de Bordas para Segmentação e Eliminação de Ruídos em Imagens e Análise Comparativa com Modelos Correlatos*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Ciências da Computação e Estatística - DCCE, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas IBILCE-UNESP, 2002.
- [23] Smith, P., *Convexity Methods in Variational Calculus*, Letchworth, England: Research Studies Press Ltd., 1985.
- [24] Teixeira, R., *Introdução aos Espaços de Escala*, 23^a Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [25] You, Y. L., Kaveh, M., *Fourth-Order Partial Differential Equations for Noise Removal*, IEEE Trans. Image Processing, vol. 9, pp. 1723-1730, oct. 2000.
- [26] You, Y. L., Kaveh, M., *Behavioral Analysis of Anisotropic Diffusion in Image Processing*, vol. 5, n^o 11, pp. 1539-1553, nov. 1996.
- [27] You, Y. L., Kaveh, M., Xu W., Tannenbaum A., *Analysis and design of Anisotropic Diffusion for Image Processing*, in Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing, vol. II, Austin, TX, Nov. 1994, pp. 497-501.



- [28] Whitaker, R. T., Pizer, S. M., *A Multi-Scale Approach to Nonuniform Diffusion*, CVGIP: Image Understanding, vol. 57, n^o 1, pp. 99-110, jan. 1993.
- [29] _____, *A Review of Recent Numerical Algorithms for Hypersurfaces Moving with Curvature Dependent Speed*, J. Differen. Geom., vol. 31, pp. 131-161, 1989.



