



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

*Campus* Rio Claro

**Bifurcações e leis de escala em mapeamentos  
discretos bidimensionais**

Pamella V. A. Ramos

Rio Claro (SP)

2016

Pamella V. A. Ramos

## **Bifurcações e leis de escala em mapeamentos discretos bidimensionais**

Trabalho de Conclusão de Curso – TCC – apresentado ao Instituto de  
Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista –  
Campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do  
grau de Licenciado em Física.

Orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

UNESP – Rio Claro

---

Profa. Dra. Ana Paula Mijolaro  
IFSP - Piracicaba

---

Prof. Dr. Edson José Vasques  
UNESP – Rio Claro

## Resumo

Estudamos neste trabalho algumas propriedades de escala para uma bifurcação de duplicação de período no modelo Fermi-Ulam. O sistema consiste de uma partícula clássica que se move confinada ao interior de duas paredes rígidas. Uma delas é fixa e a outra se move periodicamente no tempo. O modelo é descrito por um mapeamento discreto, bidimensional e não-linear nas variáveis velocidade da partícula e fase da parede no instante da colisão. Mostramos que na bifurcação de duplicação de período, a distância do ponto fixo é descrita por uma função homogênea e generalizada, conduzindo a uma lei de escala com três expoentes críticos. O formalismo utilizado foi aplicado pela primeira vez em bifurcações de mapeamentos discretos bidimensionais, sendo, portanto, uma contribuição original para a área.

## Abstract

Some scaling properties for a period doubling bifurcation observed in the Fermi-Ulam model are studied. The system consists of a classical particle confined to move inside of two rigid walls. One of them is fixed while the other one moves periodically in time. The model is described by a two-dimensional, nonlinear and discrete mapping for the variables velocity of the particle and phase of the moving wall at the instant of the collision. We shown that at a period doubling bifurcation, the distance from the fixed Point is described by a homogeneous and generalized function leading to a scaling law with three critical exponents. The formalism used in this work has been applied for the first time in two dimensional mappings, hence being an original contribution to the area.

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, por ter me dado à vida e a oportunidade de ter chegado até aqui.

Agradeço aos meus pais, Cláudio e Maria, além da minha tia Miralva, por se dedicarem plenamente a minha criação e por serem os principais responsáveis pelo que sou hoje. Por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em minhas decisões e conquistas. Agradeço à minha avó Maria, por sempre rezar por mim e estar ao meu lado. E por me fazer os melhores almoços. Agradeço pelo apoio emocional e financeiro de toda a minha família, as tias, Jandira, Amália, Mariza e Marilene, aos primos, Rhenan, Lucas, Jean e João Pedro, as primas, Tamires, Priscila, Elaine. Vocês foram de extrema importância para mim.

Agradeço aos meus padrinhos, Pedro e Lúcia, por sempre me guiarem para os bons caminhos e que nunca deixaram faltar nada para o meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Ao meu querido namorado, Matheus Luna, que nesses 6 anos, sempre esteve ao meu lado, me apoiando, ajudando, me dando forças e principalmente compreendendo meus dias de ausência. A Neusa e Edival, por sempre me incentivarem e me ajudarem em muitos momentos da graduação.

Aos meus amigos de graduação: Caroline, Marcelo, Rachel, Fábio, Renato, Luma e Nelson que na alegria e na tristeza sempre estivemos juntos. Desejo tudo de melhor e muito sucesso para vocês meus queridos amigos Físicos! Aos meus amigos de Rio Claro: Mariana, Thomás e Amanda, agradeço por nossa amizade de tantos anos e por torcerem sempre por mim.

A minha querida professora, Ana Paula, minha inspiração e que sempre esteve presente durante a minha graduação me ajudando em tudo em que precisava.

A meus professores de graduação, pela dedicação em ensinar, e por contribuírem de forma positiva para a minha formação. Aos Professores Marconato e Sandra, pelos 2 anos na construção de um grande projeto: o Show de Química. Ao Prof. Eugênio, que tive o prazer de trabalhar durante dois anos no PIBID, por compartilhar seus conhecimentos, por todos os dias que me mostrou que eu poderia ser uma professora melhor e principalmente pela nossa amizade, mesmo com tantos altos e baixos nesses três anos. Aos técnicos do Departamento André, Geraldo e Leandro, pelas infinitas ajudas e por sempre estarem disponível para qualquer problema.

Em especial, agradeço particularmente ao meu orientador Prof. Edson Denis Leonel, por ser uma pessoa admirável, por compartilhar seu conhecimento, pela amizade, pela paciência por todos esses anos e por tornar possível este trabalho.

# Sumário

## Lista de Figuras

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Capítulo 1 - Introdução .....</b>                                | <b>11</b> |
| 1.1 História.....                                                   | 11        |
| 1.2 Sistemas Dinâmicos .....                                        | 13        |
| 1.3 Caos.....                                                       | 16        |
| <b>Capítulo 2 – Modelo Fermi-Ulam (FUM) .....</b>                   | <b>20</b> |
| 2.1 Modelos Fermi-Ulam .....                                        | 20        |
| 2.2 Descrições do Mapeamento.....                                   | 21        |
| <b>Capítulo 3 – O mapeamento discreto e suas propriedades .....</b> | <b>26</b> |
| 3.1 Definições do problema e obtenção do mapeamento.....            | 26        |
| 3.2 Expoentes de Lyapunov .....                                     | 28        |
| 3.3 Pontos Fixos .....                                              | 32        |
| <b>Capítulo 4 – Hipótese de Escala .....</b>                        | <b>34</b> |
| 4.1 Hipóteses de Escala.....                                        | 34        |
| <b>Capítulo 5 – Conclusões e Perspectiva .....</b>                  | <b>39</b> |
| <b>Referências .....</b>                                            | <b>40</b> |

# Lista de Figuras

|       |                                                                                                                                                                            |    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.2.1 | Diagrama de fases para pêndulo simples.....                                                                                                                                | 15 |
| 1.3.1 | Oscilações do sistemas de Lorenz para dois valores muito próximos do valor inicial: $x(0)=5$ (linha vermelha contínua) e $x(0)=5,005$ (linha azul tracejada) .....         | 18 |
| 1.3.2 | O atrator de Lorenz. Solução caótica do sistema de Lorenz, projetada no plano $xz$ . Os parâmetros são os mesmos da Figura 1, com $x(0) = 5$ .....                         | 19 |
| 2.1.1 | Ilustração do modelo Fermi-Ulam.....                                                                                                                                       | 20 |
| 2.2.1 | Ilustração da posição de uma partícula medida por dois referenciais, o esquerdo inercial e o direito não inercial.....                                                     | 22 |
| 3.1.1 | Diagrama de órbita $Vx\epsilon$ , gerado a partir do mapa (3.1) para $\gamma=0.425$ . .....                                                                                | 26 |
| 3.1.2 | Diagrama de órbita $\Phi x\epsilon$ , gerado a partir do mapa (3.1) para $\gamma=0.425$ .....                                                                              | 27 |
| 3.2.1 | Triângulo retângulo para determinar a hipotenusa.....                                                                                                                      | 29 |
| 3.2.2 | Evolução temporal do expoente de Lyapunov positivos para dez diferentes condições iniciais evoluídas 109. Os parâmetros usados são $\gamma=0.425$ e $\epsilon=0.176$ ..... | 30 |
| 3.2.3 | Gráfico do expoente de Lyapunov em função do parâmetro de controle $\epsilon$ e a velocidade em função de $\epsilon$ .....                                                 | 31 |
| 4.1.1 | Gráfico de $Dx_n$ para $\gamma=0.425$ , $\epsilon=0.16359409950019$ para $10^9$ iteradas. ....                                                                             | 34 |
| 4.1.2 | Gráfico de $Dx_d$ para $\gamma=0.425$ , $\epsilon=0.16359409950019$ para $10^9$ iteradas.....                                                                              | 35 |
| 4.1.3 | Gráfico de $n_x \times D_0$ para $\gamma=0.425$ , $\epsilon=0.16359409950019$ . ....                                                                                       | 36 |
| 4.1.4 | Gráfico de <i>overlap</i> de três curvas em uma única curva universal a partir da reescala de eixos.....                                                                   | 38 |

# Capítulo 1

Neste capítulo faremos uma breve introdução histórica do desenvolvimento da teoria dos sistemas ditos dinâmicos até o que se define de sistemas caóticos.

## Introdução

### 1.1 História

No decorrer do desenvolvimento da ciência, o estudo e a compreensão dos sistemas dinâmicos sempre foi algo bem atrativo, pois eles permitem modelar matematicamente, sistemas naturais. Galileu<sup>[1]</sup> foi um físico extraordinário e muitas foram suas contribuições na ciência. Sua carreira fora marcada por desenvolver o primeiro telescópio para estudar os corpos celestes. Mas antes disso, Galileu havia introduzido o conceito de Dinâmica e desenvolveu experimentos envolvendo pêndulos, planos inclinados, projéteis e queda livre. No ano em que Galileu morreu, nasceu Isaac Newton<sup>[2]</sup>, que propôs as suas três leis do movimento a respeito dos efeitos de uma força sobre o movimento de um corpo (MONTEIRO, 2011). A partir delas tornou-se possível escrever conjuntos de equações. Admitia-se que os fenômenos descritos no mundo macroscópico poderiam ser previsíveis, por possuir caráter determinístico. Entende-se por macroscópico o que pode ser visto a olho nu e por determinístico, o que determina os resultados, exatamente, a partir das condições iniciais. Dessa forma, estipulando uma condição inicial e conhecendo as equações do movimento, era possível construir sua trajetória no tempo. Até meados do século XX, muitas propriedades dos sistemas dinâmicos, as quais serão utilizados neste trabalho, foram ignoradas ainda que estivessem contidas nas equações diferenciais conhecidas há três séculos. Isso se deve a dificuldade de um tratamento analítico das equações não lineares que descrevem propriedades caóticas (LIVORATTI, 2014). Como definição para

caos, mencionamos a perda de previsibilidade das condições iniciais, quando evoluídas no tempo.

Poincaré<sup>[3]</sup> *deu vida* às equações diferenciais não lineares. Ele percebeu que era possível a determinação qualitativa das soluções sem precisar resolvê-las explicitamente. Poincaré, através do problema de três corpos, foi o pioneiro na formulação da teoria do caos. Logo, ao invés de procurar as fórmulas, partiu para as formas geométricas e topológicas, na qual se tratavam de uma abordagem qualitativa do problema e fôra capaz de mostrar que a evolução temporal de tal sistema é frequentemente caótica. Isso implica que um conjunto de condições iniciais, sob efeito de uma perturbação suficientemente pequena, produziria grandes diferenças no fenômeno final. Com a mesma linha de raciocínio, outros trabalhos surgiram, como o de Birkhof<sup>[4]</sup> nos anos 20, que foi um marco inicial para os estudos de Bilhares, seguindo por trabalhos importantes de Kolmogorov<sup>[5]</sup> juntamente com Arnold<sup>[6]</sup> (seu orientado de doutorado) e Moser<sup>[7]</sup>, provaram que para certas condições iniciais, essas séries divergem; mas para algumas outras condições iniciais, elas convergem. Assim, num sistema com três ou mais corpos, o movimento pode ser regular ou caótico.

Há muitos anos tem-se observado um grande desenvolvimento nos estudos do caos determinístico, o que foi possível somente a partir das soluções numéricas de equações diferenciais não lineares obtidas em computadores, cuja invenção é relativamente recente. Além disso, com a introdução de novos conceitos no tratamento de sistemas dinâmicos conservativos e dissipativos.

A constatação pioneira de que movimentos intrinsecamente caóticos podem ocorrer em sistemas determinísticos dissipativos é devido a Lorenz<sup>[8]</sup>, cuja finalidade do seu trabalho era estudar meteorologia. Nos anos 70 e 80 surge uma série de trabalhos de Feigenbaum<sup>[9]</sup>, Kaplan<sup>[10]</sup>, Chirikov<sup>[11]</sup>, May<sup>[12]</sup>, Ott<sup>[13]</sup> e entre outros, forneceram e discutiram propriedades de dinâmicas caóticas. Esses estudos e inúmeros trabalhos posteriores descrevem a dinâmica temporal de sistemas físicos, analisando universalidade no comportamento dinâmico de tais sistemas e confirmando que estes apresentam características caóticas.

Nos dias atuais nota-se o desenvolvimento de diversos métodos analíticos e, principalmente, de métodos e comparações numéricas. A teoria tem-se expandido em outras áreas da ciência que particularmente foram consideradas à Física, Química, Biologia, Engenharia, Matemática e muitas outras áreas.

## 1.2 Sistemas Dinâmicos

Um *sistema* pode ser constituído por um conjunto de objetos agrupados por algumas interações ou interdependência, de tal maneira que as relações entre causa e efeito são notáveis. Um *sistema* é dito ser *dinâmico* quando grandezas e observáveis físicos definidos por ele variam com tempo. A variação das placas de um capacitor em um circuito elétrico, a atividade dos neurônios do córtex visual do sistema nervoso de um canguru, os gastos com vestuário e alteração dos gastos familiares, são descritos como exemplos de sistemas dinâmicos.

A determinação teórica da evolução temporal das grandezas de um sistema é de extrema importância na ciência, em pelo menos três principais situações: (i) O sistema não existe fisicamente, neste caso os resultados se tornam importantes na caracterização e desenvolvimento de um determinado método; (ii) O sistema existe fisicamente, portanto os resultados obtidos possuem interpretações imediatas para a explicação de um fenômeno natural; (iii) o teste experimental é caro ou apresenta grande perigo. Logo, o objetivo principal para o estudo de sistemas dinâmicos é a previsão do futuro (ou mesmo explicar o passado) de maneira científica. Porém, para tal determinação deve-se tomar conhecimento das regras que governam as possíveis mudanças que ocorrerão.

Podemos classificar os sistemas dinâmicos em sistemas lineares e não lineares. Os sistemas lineares são descritos por equações lineares que envolvem a álgebra entre variáveis de grau um. De modo geral, essas equações são descritas graficamente por retas, planos ou hipérboles. Sistema linear é um conjunto de equações lineares ou por equações lineares reduzidas.

Já os sistemas não lineares, não possuem retas, planos e hipérboles como representação gráfica, não existe uma regra para resolver tais sistemas, porém a análise gráfica no diagrama de fases (sinônimo de espaço fase, na qual é definido como um espaço formado pelas posições generalizadas e seus respectivos momentos conjugados), fornece informações sobre as características do sistema em questão.

Um exemplo de sistema dinâmico não linear é o pêndulo simples. Seja um sistema constituído por uma haste rígida, de comprimento  $l$ , e de massa desprezível. Uma de suas extremidades está fixa e a outra sustenta um corpo de massa  $m$ , sujeito a ação da força gravitacional  $g$ .

A equação de movimento é dada por:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 , \quad (1.1)$$

sendo  $-mgl\sin\theta$ , a componente restauradora que atua ao longo do movimento. O ângulo  $\theta$  corresponde ao deslocamento angular do pêndulo ao longo do eixo vertical em relação ao seu ponto de sustentação, que é paralelo a força gravitacional. A aceleração da massa  $m$  é dada pela segunda derivada do ângulo  $\theta$ .

Porém, não é possível obter uma solução para este tipo de equação diferencial se  $\theta$  é grande. Entretanto é possível determinar as características principais de suas soluções de modo qualitativo, a compreensão dos movimentos deste sistema dinâmico, utilizando de *diagrama de fases*.

Para cada valor diferente da constante  $K$ , uma constante que representa a energia total do sistema, onde cada condição inicial define as curvas possíveis no diagrama. Tem-se uma curva  $h(\theta, \varphi)$  diferente. E o conjunto delas forma a família de curvas denominada diagrama de fases. As coordenadas horizontal e vertical, representadas por  $(\theta, \dot{\theta})$  são denominadas de *estado do sistema*. O diagrama de fases mostra como esse estado evolui ao longo de um tempo. As curvas da Figura 1.2.1 são chamadas de trajetória de fase, representam as possíveis soluções de (1.1). As flechas indicam o sentido da evolução do tempo.

A equação (1.1) pode ser escrita como:

$$\dot{\theta} = \varphi = f(\theta, \varphi), \quad (1.2)$$

$$\dot{\varphi} = \left(-\frac{g}{l}\right) \text{sen}\theta = g(\theta, \varphi). \quad (1.3)$$

A construção da trajetória no espaço de fase é  $(\theta, \dot{\theta} = \varphi)$ , onde

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{f}{g} = \frac{\varphi}{-\left(\frac{g}{l}\right)\text{sen}\theta}. \quad (1.4)$$

Separando os termos e integrando-os, chegamos à seguinte equação

$$\varphi^2 - b\cos\theta = K, \quad (1.5)$$

onde K é uma constante e  $b=2g/l$ . A figura 1.2.1 mostra o diagrama de fases do pêndulo descrito pela equação (1.1)

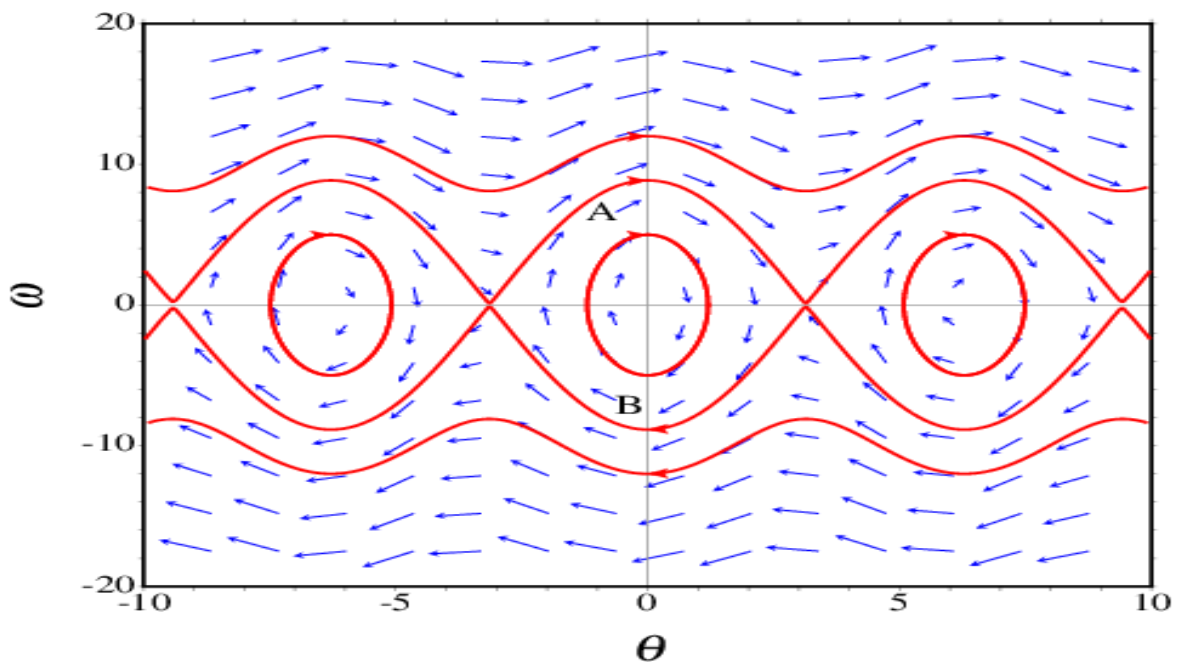


Figura 1.2.1 – Diagrama de fases para pêndulo simples [Fonte: [https://def.fe.up.pt/dinamica/sistemas\\_nao\\_lineares.html](https://def.fe.up.pt/dinamica/sistemas_nao_lineares.html)]

A origem corresponde à solução trivial  $\theta=0, \dot{\theta} = 0$ ; o pêndulo está parado na vertical, este ponto é dito como um ponto de equilíbrio estável ou ponto estacionário.

O ponto de intersecção das curvas em  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\theta = \pi$ , o pêndulo também está parado, porém acima do eixo fixo, logo é um ponto de equilíbrio instável.

Os círculos em torno do ponto de equilíbrio estável representam os possíveis movimentos periódicos. O ponto onde cada curva corta o eixo  $\theta$  identifica a amplitude de oscilação. Já as linhas onduladas acima e abaixo descrevem os movimentos do pêndulo que gira em torno do seu próprio eixo, logo elas estão acima ou abaixo, devido ao sinal sempre ser o mesmo. As curvas que passam pelos pontos instáveis são chamadas de *separatrizes*, como o nome já diz, elas separam duas regiões qualitativamente diferentes no espaço de fases: dentro o movimento é periódico e limitado e fora é ilimitado. No caso do pêndulo simples a energia total é conservada e o sistema é denominado *Hamiltoniano* ou *conservativo*.

A principal característica dos sistemas dinâmicos não-lineares é a perda de previsibilidades de condições iniciais, esta leva ao caos. Porém o pêndulo simples citado não é caótico.

## 1.3 Caos

A física clássica tinha como objetivo encontrar leis determinísticas e invariáveis que descrevessem a realidade. Com estas leis, a previsão do futuro de qualquer sistema real se torna possível. Para tal, basta avaliar as funções matemáticas a partir dos valores iniciais. Temos, então, os sistemas dinâmicos determinísticos, cuja característica principal é a previsibilidade. Para se obter o resultado desejado, bastaria ajustar o ponto de partida adequadamente, e depois, aguardar a evolução temporal do sistema.

Supõe-se que pequenas perturbações nas condições iniciais teriam grandes consequências no resultado final. O mesmo acontece quando fatores externos provocam pequenos desvios ao longo da trajetória. Essas são algumas justificativas para que os cientistas se esforcem em aproximar o comportamento à realidade.

Contudo, muitos sistemas dinâmicos são descritos por leis não lineares. A não linearidade pode tornar a evolução temporal destes sistemas nada trivial (VALERIO,

2014). Nestes casos, uma perturbação nas condições iniciais pode resultar uma notável diferença com o decorrer do tempo. Trajetórias muito próximas inicialmente uma das outras, divergem exponencialmente; que é denominada *sensibilidade as condições iniciais*, que caracteriza o caos em alguns sistemas não-lineares transformando-os em imprevisíveis.

Ruelle<sup>[15]</sup>, um dos principais fundadores da teoria caótica diz *"O que hoje chamamos de Caos é a evolução temporal com dependência às sensíveis condições iniciais"*. Ou seja, o que modela a teoria do caos são os sistemas dinâmicos não-lineares, sensíveis às condições iniciais.

O catalisador da teoria do caos foi Edward Lorenz<sup>[16]</sup>, com seu trabalho de meteorologia, do instituto de Massachusetts (MIT). No começo, ele desenvolveu um modelo que simulava no computador a evolução das condições climáticas, as quais dados os valores iniciais da velocidade dos ventos e da temperatura, o computador simulava uma previsão do tempo. *"Lorenz imaginava que pequenas modificações nas condições iniciais levariam a alterações pequenas na evolução do sistema. Mas para sua surpresa, que ao se fazer mudanças suficientemente pequenas nas condições iniciais poderiam ocasionar mudanças drásticas no futuro. Uma leve brisa em Nevada, a queda de um grau na temperatura em Massachusetts, o bater de asas de uma borboleta podiam causar um furacão na Flórida um mês depois"*.

O sistema de Lorenz é constituído por um sistema com três equações não-lineares e acopladas da seguinte forma:

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1.6)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (1.7)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad , \quad (1.8)$$

onde  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$  são parâmetros de controle. O parâmetro  $\sigma$  corresponde ao número de Prandtl e está associada com a difusividade de um fluido. Por outro lado, o parâmetro  $r$ , está associado a uma medida da diferença de temperatura entre dois extremos de um fluido. Finalmente o parâmetro  $b$  está associado à razão entre a altura e a largura do fluxo convectivo.

Lorenz fez todos os cálculos e deixou o computador imprimir os resultados, enquanto tomava café. Com resultado obtido ele determinou que os resultados fossem altamente confiáveis. Porém, revendo os valores ele notou que o computador reduzira, devido a limitação de memória, o número de 0,506127 para 0,506. Uma mudança aparentemente insignificante, mas ele decidiu em refazer os cálculos como todos os seis dígitos da fração. O computador devolveu uma previsão completamente diferente a original, como segue a figura 1.3.1.

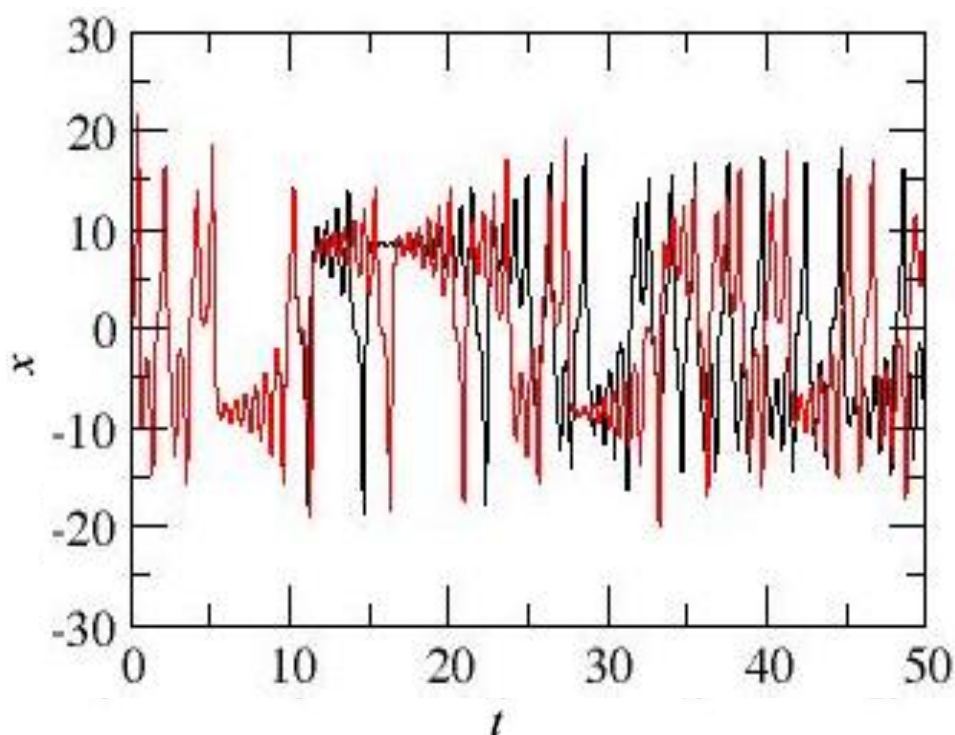


Figura 1.3.1: Oscilações do sistema de Lorenz para dois valores muito próximos do valor inicial.

Dois anos depois, Lorenz desenvolveu a tese básica de que *"situações iniciais ligeiramente diferentes podem se desenvolver em situações consideravelmente diferentes"* e passou a ser conhecido como o fundador do Caos. Em 1963, ninguém deu atenção na tese de Lorenz. Ela ficou guardada por 9 anos que fora reapresentada em um Encontro de ciências; o título de sua apresentação era *"Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?"*. Sua teoria tornou um clássico acadêmico, inspirou até mesmo um filme.

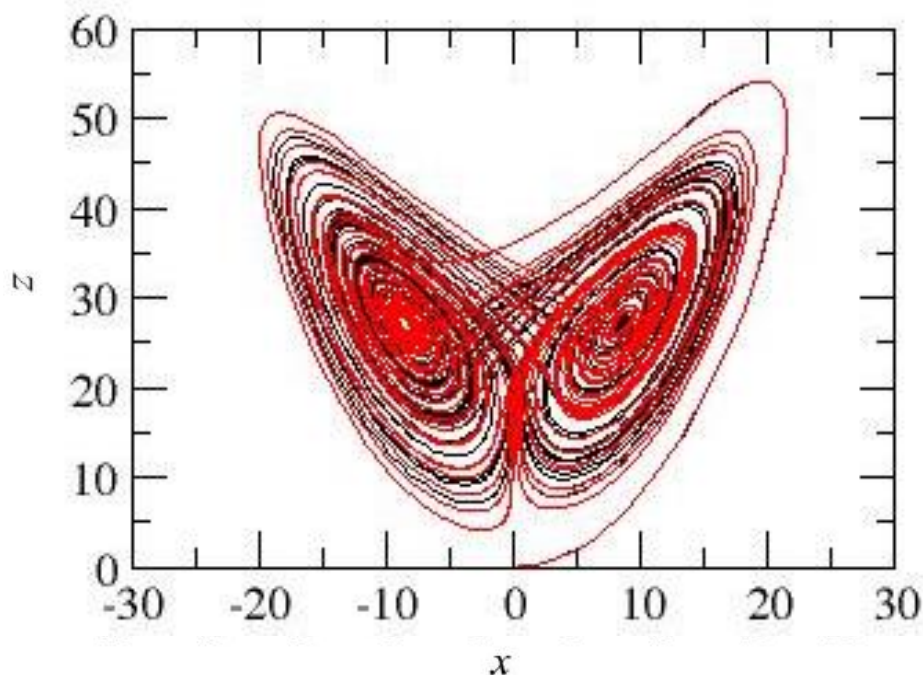


Figura 1.3.2 – O atrator de Lorenz. Solução caótica do sistema de Lorenz, projetada no plano xz.

É possível observar na Figura 1.3.2 ilustra o famoso “Atrator de Lorenz”, soluções das equações (1.6), (1.7) e (1.8). Atrator é uma região, ou subconjunto do espaço de fases de sistemas dissipativos para a qual tendem as trajetórias que partem de uma determinada região. É como se fosse um campo que exerce uma força atrativa em uma determinada região do espaço. Os atratores representam uma auto-organização do sistema.

Em um sistema linear, obtemos trajetórias que convergem para um ponto estável ou para um ciclo limite a uma variação periódica. “Lorenz, descobriu que, para alguns valores específicos dos parâmetros  $\sigma$ ,  $r$  e  $b$ , as trajetórias deste sistema nunca acabam num ponto fixo nem num ciclo limite estável e, contudo, nunca divergem para o infinito. Algo muito fora do que anteriormente se considerava usual.” (VALERIO, 2014).

## Capítulo 2

### Modelo Fermi- Ulam (FUM)

Discutiremos neste capítulo alguns aspectos do modelo de Fermi-Ulam. Obteremos o mapeamento discreto que descreve a dinâmica do modelo em sua versão completa e simplificada.

#### 2.1 Modelo Fermi-Ulam

O Modelo Fermi-Ulam consiste em uma caixa com duas paredes rígidas, onde existe uma partícula de massa unitária em seu interior sofrendo colisões com as fronteiras. A primeira parede é fixa, e a segunda move-se periodicamente no tempo, como mostra a Figura 2.1.1.

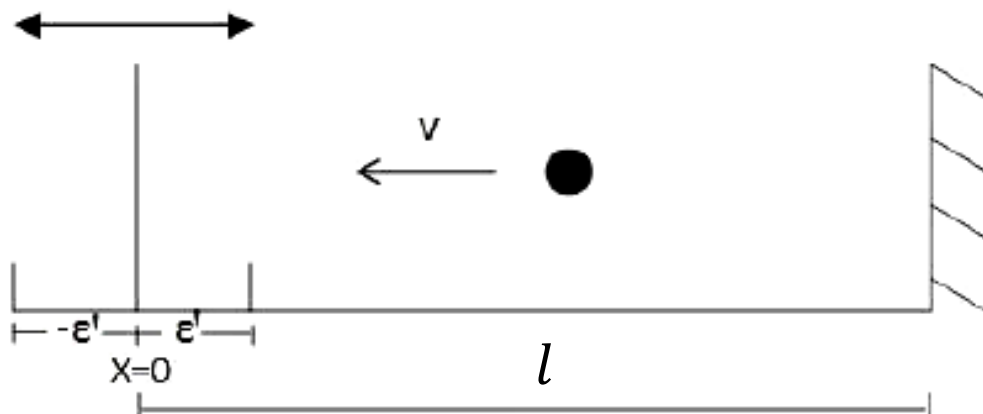


Figura 2.1.1 – Ilustração do modelo Fermi-Ulam

A parede fixa está em  $x= l$  com relação à parede móvel na posição de equilíbrio. A parede móvel oscila periodicamente no tempo e seu movimento obedece  $x_\omega = -\epsilon \cos \omega t$ , sendo  $\epsilon$  a amplitude de oscilação da parede em movimento e  $\omega$  é a

frequência de oscilação. Não há forças externas ou quaisquer campos, o que implica que a partícula viaja ao longo das paredes com velocidade constante.

A dinâmica do sistema é descrita por um mapeamento discreto não linear nas variáveis velocidade e tempo imediatamente após a colisão da partícula com a parede móvel. Há duas possibilidades de se escrever tal mapeamento. A primeira delas é a versão completa, na qual considera o movimento real da parede móvel. A segunda, uma versão simplificada, usada para acelerar as simulações numéricas, onde as duas paredes são consideradas fixas, porém, a partícula troca energia e momentum com uma delas, como se ela estivesse em movimento. Usaremos a versão simplificada neste trabalho para facilitar o tratamento analítico das propriedades caóticas da dinâmica do modelo de Fermi-Ulam ao longo do capítulo.

## 2.2 Descrição do Mapeamento

Um sistema dinâmico que evolui no tempo de uma forma discreta é denominado *mapa*. Os mapas são muito utilizados na caracterização de sistemas não-lineares e existem várias razões para seu estudo, principalmente seu comportamento dinâmico. No geral eles são mais simples para se fazer análise do que as equações diferenciais que lhes deram origem.

### Mudança de Referencial

Nos cálculos da velocidade após a colisão, seja a versão completa ou simplificada, é necessário fazer uma mudança de referencial inercial para referencial não inercial, afinal a colisão ocorre em um referencial que está acelerado (referencial de parede móvel). Vejamos a Figura 2.2.1

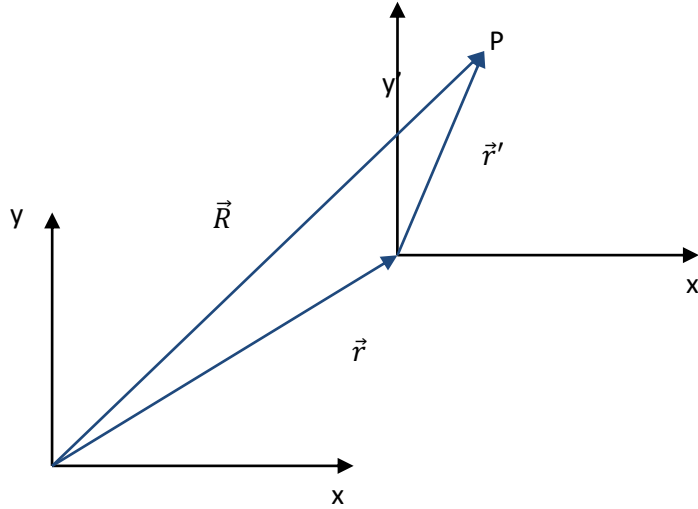


Figura 2.2.1 – Ilustração da posição de uma partícula medida por dois referenciais, o esquerdo inercial e o direito não inercial.

O referencial não inercial é representado pelos eixos  $(x', y')$  e o referencial inercial pelos eixos  $(x, y)$ . O ponto P representa a partícula, logo temos que:

$\vec{R}$ : Vetor posição da partícula no referencial inercial;

$\vec{r}$ : Posição da parede medida no referencial inercial;

$\vec{r}'$ : Posição da parede medida no referencial não- inercial.

Logo, a representação da relação vetorial da mudança do referencial é dada pela seguinte relação:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}' . \quad (2.1)$$

Como estamos interessados em obter a relação entre as velocidades, derivamos em relação ao tempo a equação (2.1) e obtemos  $\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}'$ . Como a dinâmica é unidimensional, podemos considerar  $\dot{x}_p = \dot{x}'_p + \dot{x}_w$ , onde a partícula e a parede móvel são representados pelos sub-índices  $p$  e  $w$  respectivamente. Assim, antes da colisão

temos  $(t_n)$  e  $v'_{pantes}(t_n) = v_p(t_n) + v_w(t_n)$ . Imediatamente após a colisão  $(t_{n+1})$ , temos que:

$$v'_{pdepois} = -v'_{pantes} . \quad (2.2)$$

Esta relação nos define a "lei de reflexão". Substituindo a expressão  $v'_{pantes}$  na equação (2.2), temos  $v'_{pdepois} = -(v_p(t_n) - v_w(t_{n+1}))$ . Retomando ao referencial inercial que podemos escrever a relação com o instante imediatamente após a colisão  $v_p(t_{n+1}) = v'_{pdepois}(t_{n+1}) + v_w(t_{n+1})$ , obtemos

$$v_{n+1} = -v_n + 2v_w(t_{n+1}) . \quad (2.3)$$

## Versão completa

O tempo gasto pela partícula para ir da colisão com a parede móvel, até a colisão com a parede fixa e colidir novamente com a parede móvel, é determinado como tempo de voo.

Definindo algumas variáveis adimensionais  $V_n = \frac{v_n}{wl'}$ ,  $\epsilon = \frac{\epsilon'}{l'}$ , medindo o tempo em função da fase da parede móvel  $\phi_n = wt_n$  e considerando as condições iniciais  $(V_n, \phi_n)$ , cuja posição inicial da partícula seja  $x_p = \epsilon \cos(\phi_n)$ , a evolução temporal da dinâmica é descrita por um mapeamento  $\tilde{T}$  que nos fornece o par recorrente  $(V_{n+1}, \phi_{n+1})$ , na  $(n+1)$ -ésima colisão com a parede móvel. Tal mapeamento é descrito por:

$$\tilde{T}: \begin{cases} V_{n+1} = YV_n^* - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n] \text{ mod } (2\pi) \end{cases} \quad (2.4)$$

Sendo  $V_n^*$  e  $\Delta T_n$  dependem do tipo de colisão que ocorre: (i) colisões múltiplas ou (ii) colisões simples. O caso (i) ocorre quando a partícula entra na zona de colisão,  $x \in [-\epsilon, +\epsilon]$ , colide com a parede móvel e antes mesmo de sair da zona de colisão sofre mais uma colisão, ou mesmo várias colisões dependendo dos valores de  $V_n$  e  $\phi_n$ . Neste caso  $V_n^* = -V_n$  e  $\Delta T_n = \phi_c$ . O valor de  $\phi_c$  é obtido numericamente da solução da equação  $G(\phi_c)=0$ , onde  $\phi_c = [0, 2\pi)$

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_c + \phi_n) - \epsilon \cos(\phi_c) - V_n \phi_c . \quad (2.5)$$

Entre duas colisões consecutivas, a partícula viaja com velocidade constante, isso por que entre essas colisões não há gradiente de potencial. Logo, a equação de movimento da partícula é dada por uma equação que é linear no tempo. A função  $G(\phi_c)$  é encontrada para a condição em que  $x_p(t) = x_w(t)$ . Caso a função  $G(\phi_c)$  não tenha raiz no intervalo que compreende  $\phi_c \in (0, 2\pi)$ , conclui-se que a partícula saiu da zona de colisão, e as colisões sucessivas não aconteceram.

Para o caso em que as colisões são simples,  $V_n^* = V_n$  e  $\Delta T_n = \phi_r + \phi_l + \phi_c$  e os termos se tornam  $\phi_r = (1 - \epsilon \cos(\phi_n))/V_n$  e  $\phi_l = (1 - \epsilon)/V_n$ . A equação de  $\phi_r$  representa o tempo que a partícula passa viajando para a direita, até encontrar a parede fixa. Então esta partícula sofre uma colisão completamente elástica e é refletida de volta com velocidade  $-V_n$ . Já a equação de  $\phi_l$  representa o tempo que a partícula leva até que entre na zona de colisão viajando para o lado esquerdo. E por fim,  $\phi_c$  que é numericamente obtido da solução da equação  $F(\phi_c) = 0$  com

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_r + \phi_l + \phi_c) \epsilon + V_n \phi_c \quad (2.6)$$

A equação (2.6) representa a condição em que a posição da partícula e a posição da parede móvel são as mesmas no instante do impacto. E para encontrar as raízes das equações (2.5) e (2.6), basta utilizar métodos numéricos.

## Versão simplificada

A versão simplificada do modelo Fermi-Ulam, torna-se simples por assumir que a parede móvel seja considerada fixa no instante da colisão. Entretanto, consideram-se as trocas de energia e momentum, entre a parede e a partícula, como se estivesse se movimentando normalmente. A simplificação se faz muito útil, quando os computadores tinham processadores inferiores para tal resolução. Sendo assim o mapeamento simplificado é dado por:

$$T_s = \begin{cases} V_{n+1} = |\gamma V_n - (1 + \gamma)\epsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = \left[ \phi_n + \frac{2}{V_n} \right] \bmod (2\pi) \end{cases} \quad (2.7)$$

A equação da velocidade está modulada, pois neste tipo de modelo a velocidade não pode ser negativa, que significaria que a partícula atravessou a parede. Esta versão possui a não-linearidade do sistema, e ainda permite que possamos chegar a resultados analíticos com maior facilidade, o que faremos mais adiante neste trabalho.

## Capítulo 3

### O Mapeamento discreto e suas propriedades

Levando em conta a evolução de sistemas dissipativos determinísticos cuja dinâmica é descrita por um fluxo contínuo que é gerado a partir de mapas discretos, descreveremos neste capítulo, algumas características e propriedades do mapa discreto do modelo.

#### 3.1 Definições do problema e obtenção do mapeamento

O mapa simplificado é escrito como

$$T_s = \begin{cases} V_{n+1} = |\gamma V_n - (1 + \gamma)\varepsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = \left[ \phi_n + \frac{2}{V_n} \right] \text{mod}(2\pi) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\gamma \in [0,1]$  fornece o coeficiente de restituição. Se  $\gamma = 1$  o sistema é não dissipativo ao que  $\gamma < 1$  conduz a existência de atratores no espaço de fases.

Este mapeamento nos leva ao seguinte diagrama de órbitas

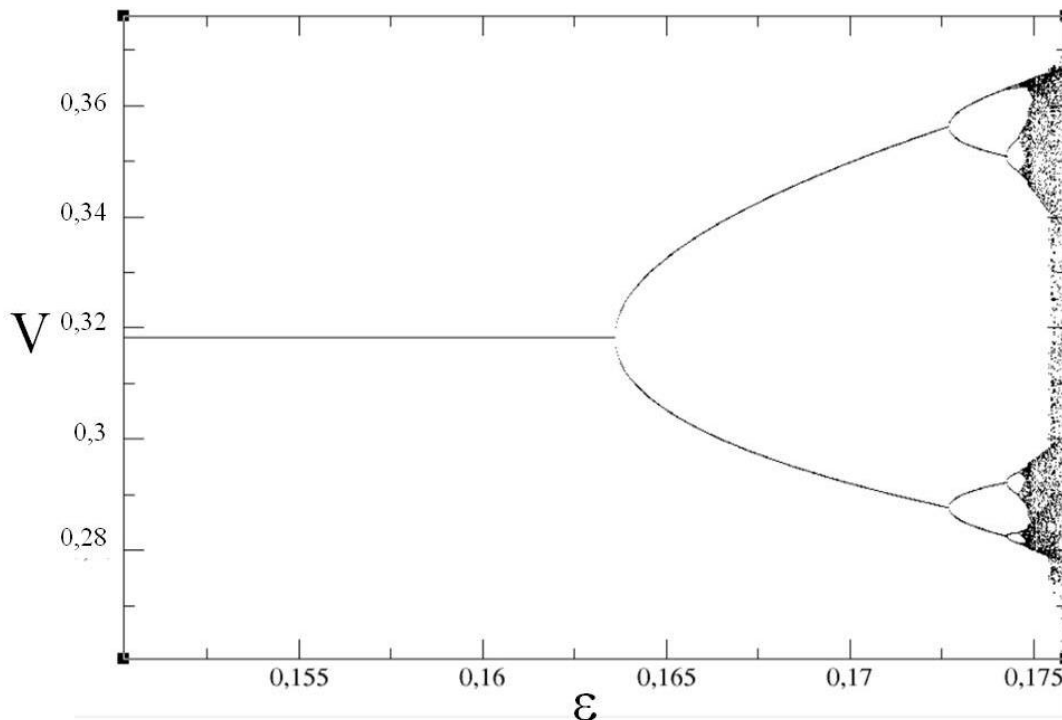


Figura 3.1.1 – Diagrama de órbita  $V \times \varepsilon$ , gerado a partir do mapa (3.1) para  $\gamma=0.425$ .

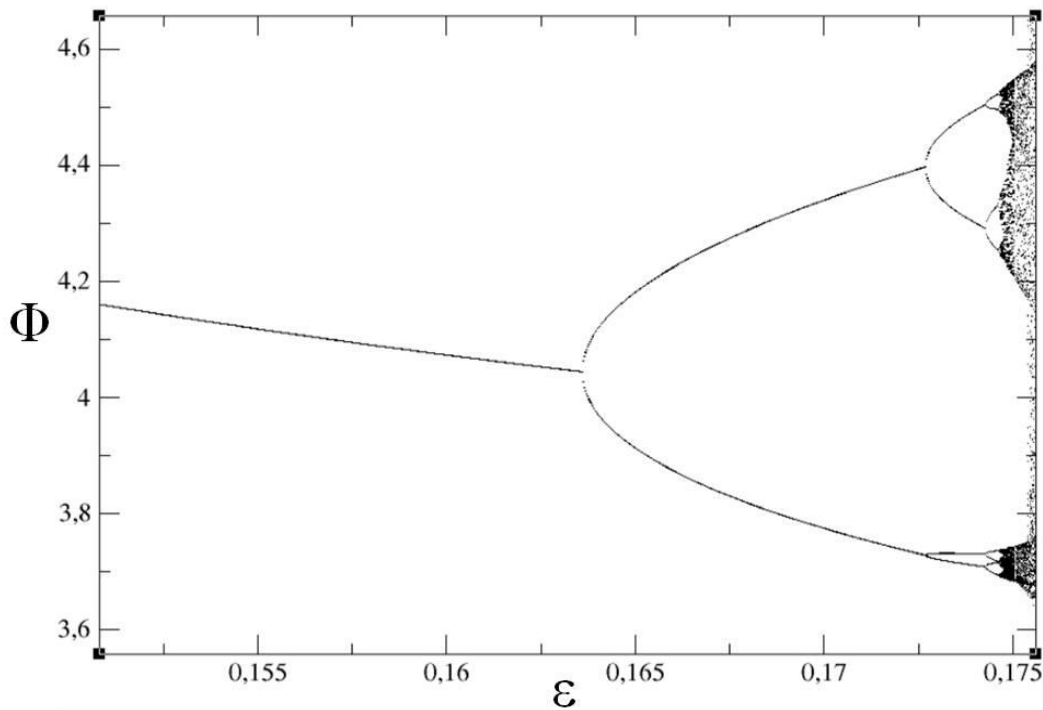


Figura 3.1.2 – Diagrama de órbita  $V \times \Phi$ , gerado a partir do mapa (3.1) para  $Y=0.425$ .

onde  $\varepsilon$  e  $Y$  são parâmetros de controle, que representam parâmetro dissipação e amplitude da oscilação da parede móvel, respectivamente. Neste mapa fixamos o valor de  $Y$  e variamos o valor  $\varepsilon$ . Se  $\varepsilon = 0$ , o sistema é dito integrável, se diferente de zero, o sistemas é dito não integrável. O módulo é necessário para que a velocidade da partícula não assuma valores negativos, ou seja, a partícula não atravessa as paredes.

É notável no diagrama da Figura 3.1.1, que demonstra uma linha fixa e contínua, até que o atrator perde estabilidade. Os parâmetros de controle e as condições iniciais do mapa, à medida que eles variam o diagrama de fase muda qualitativamente, novos pontos estacionários poderão surgir e outros desaparecer e outros ainda, que eram estáveis podem ser tornar instáveis ou vice-versa. E toda vez que há esta mudança qualitativa no diagrama de fase, têm-se bifurcações. Entende-se por bifurcações como perda de estabilidade estrutural de um ponto fixo.

## 3.2 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são utilizados como um indicador caótico. Eles indicam se uma órbita é sensível ou não as condições iniciais. Os cálculos foram feitos para um mapa bidimensional, objeto de estudo deste trabalho. Os expoentes de Lyapunov são dados por:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^n|, \quad \text{com } j=1,2.$$

o termo  $\Lambda_j^n$  representa os autovalores da matriz  $M = \prod_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i)$  e  $J_i$  é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada na órbita  $(V_i, \phi_i)$ .

O cálculo do expoente de Lyapunov utiliza-se do *Algoritmo de Triangularização*, proposto por Eckmann e Ruelle. O algoritmo descreve a matriz Jacobiana  $J$  a partir do produto de uma matriz ortogonal ( $O$ ) e uma matriz triangular  $T$ . Logo,  $J = O T$ . Uma matriz é dita ortogonal quando sua transposta é igual à sua inversa, ou seja,  $O^1 = O^T$ .

Usando estas definições, escrevemos a matriz  $M$  como

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1 = J_n J_{n-1} \dots J_2 O_1 O_1^{-1} J_1,$$

sendo  $T_1 = O_1^{-1} J_1$ . O produto de  $J_2 O_1$  define uma nova  $J_2'$ . Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos

$$M = J_n J_{n-1} \dots J_3 O_2 O_2^{-1} J_2' T_1.$$

O mesmo método pode ser utilizado para determinar os próximos termos. Usando este método, o procedimento do algoritmo resume-se em analisar os elementos da diagonal principal de  $T$ , ou seja,  $T_{11}$  e  $T_{22}$ . Para encontrá-los basta determinar as expressões de  $O_2^{-1} J_2' = T_2$ , a partir de

$$O_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$

A partir da Figura 3.2.1 e do teorema de Pitágoras, podemos obter relações trigonométricas para encontrar o valor da hipotenusa  $h$ .

Desenvolvendo o produto das matrizes, obtemos

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos \theta + j_{21} \sin \theta & j_{12} \cos \theta + j_{22} \sin \theta \\ -j_{11} \sin \theta + j_{21} \cos \theta & -j_{12} \sin \theta + j_{22} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo a igualdade de matrizes:

$$-j_{11} \sin \theta + j_{21} \cos \theta = 0,$$

$$-j_{11} \sin \theta = -j_{21} \cos \theta,$$

finalmente,

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{j_{21}}{j_{11}},$$

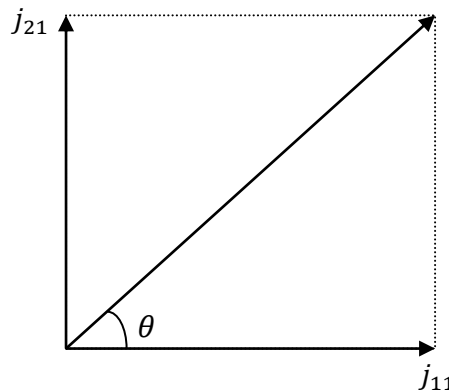


Figura 3.2.1- Triângulo retângulo para determinar a hipotenusa.

Logo, a hipotenusa  $h = \sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}$ .

A partir da figura 3.2.1, temos que

$$\sin \theta = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad \cos \theta = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}.$$

A partir dos valores encontrados, podemos reescrever os autovalores da matriz  $T$ , ou seja

$$T_{11} = j_{11} \cos \theta + j_{12} \sin \theta = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}},$$

$$T_{22} = j_{22} \cos \theta + j_{12} \sin \theta = \frac{j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21}}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}.$$

A partir dos autovalores  $T_{11}$  e  $T_{22}$  da matriz triangular superior, é possível encontrar numericamente os expoentes de Lyapunov para um atrator caótico presente no espaço de fase.

Os expoentes de Lyapunov em sistemas Hamiltonianos aparecem aos pares e com sinais contrários. Porém, em nossas simulações consideraremos apenas o expoente positivo.

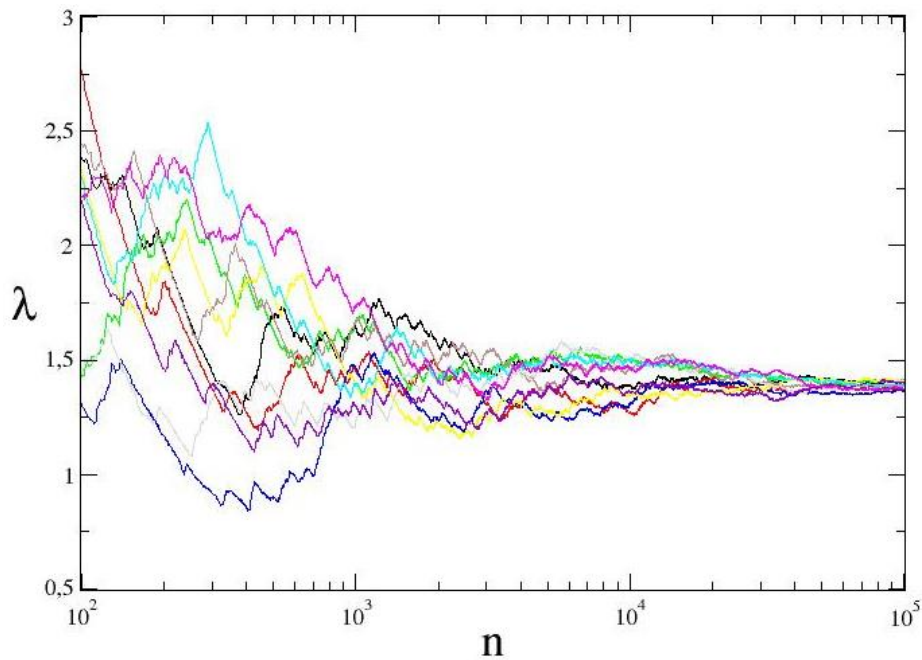


Figura 3.2.2 – Evolução temporal do expoente de Lyapunov positivos para dez diferentes condições iniciais evoluídas  $10^9$ . Os parâmetros usados são  $\gamma = 0.425$  e  $\varepsilon = 0.176$ .

Podemos ver que para diferentes condições iniciais, o expoente de Lyapunov converge para um valor constante para  $n$  suficientemente grande conforme mostrado na Figura 3.2.2. Com isso, podemos fazer a média dessas dez séries temporais e obter o expoente de Lyapunov médio  $\bar{\lambda}=1,38(6)$  positivo, que indica caos.

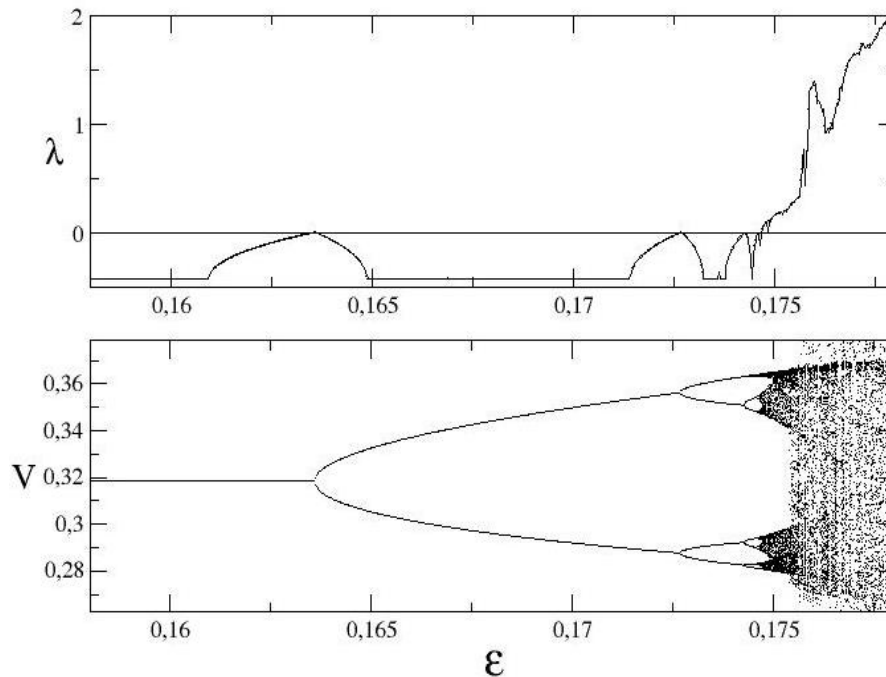


Figura 3.2.3 – Gráfico do expoente de Lyapunov em função do parâmetro de controle  $\varepsilon$  e a velocidade em função de  $\varepsilon$ .

Observa-se na Figura 3.2.3 que nos dois gráficos a bifurcação ocorre para o mesmo valor de  $\varepsilon$ , e onde ocorre a bifurcação o expoente de Lyapunov é zero. A partir de um determinado valor de  $\varepsilon$  o expoente passa a ser positivo, logo podemos concluir que há caos.

### 3.3 Pontos fixos

Os pontos fixos são definidos como a solução estacionária de um sistema. A partir das expressões do mapeamento, podemos obter os pontos fixos correspondentes. Eles são obtidos fazendo  $V_{n+1} = V_n = V$  e  $\phi_{n+1} = \phi_n = \phi + 2m\pi$ , com  $m = 1, 2, 3 \dots$ . Considerando a primeira equação do mapeamento (2.7), temos

$$V = \gamma V - 2\epsilon \sin \phi, \quad (3.2)$$

$$\sin \phi = \frac{V(\gamma-1)}{(1+\gamma)\epsilon}. \quad (3.3)$$

Para segunda equação:

$$\phi + 2m\pi = \phi + \frac{2}{V}, \quad (3.4)$$

$$V = \frac{1}{m\pi}. \quad (3.5)$$

Levando a equação (3.5) em (3.3)

$$\sin \phi = \frac{1}{m\pi} \frac{(\gamma-1)}{(1+\gamma)\epsilon} \quad (3.6)$$

Da relação de ângulos temos que  $\phi$ , possui duas possíveis expressões sendo elas

$$\phi_1 = \arcsin \left[ \frac{1}{m\pi} \frac{(\gamma-1)}{(1+\gamma)\epsilon} \right], \quad (3.7)$$

e

$$\phi_2 = \pi - \arcsin \left[ \frac{1}{m\pi} \frac{(\gamma-1)}{(1+\gamma)\epsilon} \right]. \quad (3.8)$$

Logo os pontos fixos são:  $PF1=(V, \phi_1)$  e  $PF2=(V, \phi_2)$ . Para determinar a estabilidade dos pontos fixos usamos o polinômio característico, escrito como

$$\lambda^2 - \lambda(j_{11} + j_{22}) + (j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}), \quad (3.8)$$

onde a solução desta equação nos fornece

$$\lambda_{1,2} = \frac{(j_{11}+j_{22}) \pm \sqrt{(j_{11}+j_{22})^2 - 4(j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21})}}{2} \quad (3.9)$$

Para o mapeamento simplificado (3.1), os elementos da Matriz Jacobiana são:

$$J_{11} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = \gamma + \frac{2(1+\gamma)\varepsilon}{V_n^2} \cos \phi_{n+1}, \quad (3.10)$$

$$J_{12} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -(1 + \gamma)\varepsilon \cos \phi_{n+1}, \quad (3.11)$$

$$J_{21} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = -\frac{2\varepsilon}{V_n^2}, \quad (3.12)$$

$$J_{22} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1. \quad (3.13)$$

Das soluções da equação (3.9) e considerando que em uma bifurcação de duplicação de período os autovalores da matriz Jacobiana avaliados no ponto fixo são  $\lambda_1=-1$  e  $|\lambda_2|<1$ , encontramos que uma bifurcação de duplicação de período ocorre em  $\varepsilon=0.1635940995001(9)$ . Esta bifurcação será considerada na próxima seção na investigação da análise de escala para a convergência ao ponto fixo.

## Capítulo 4

Discutiremos neste capítulo algumas propriedades de escala para o mapa de Fermi-Ulam simplificado com foco na bifurcação de duplicação de período.

### Hipóteses de Escala

A figura 4.1 mostra o comportamento de  $D$  vs.  $n$  para diferentes valores de parâmetros de controle. Onde  $D$  denota a distância euclidiana do ponto fixo.

A distância euclidiana é dada por

$$D = \sqrt{(V_0 - V^*) + (\phi_0 + \phi^*)} \quad (4.1)$$

Podemos notar que as curvas mostradas na figura 4.1.1 permanece ao longo de um platô para  $n$  pequeno e decaem em lei de potência para  $n$  suficientemente grande. A mudança de saturação para o decaimento é caracterizada por um número de iterações específico,  $n_x$ , denominado de *crossover*.

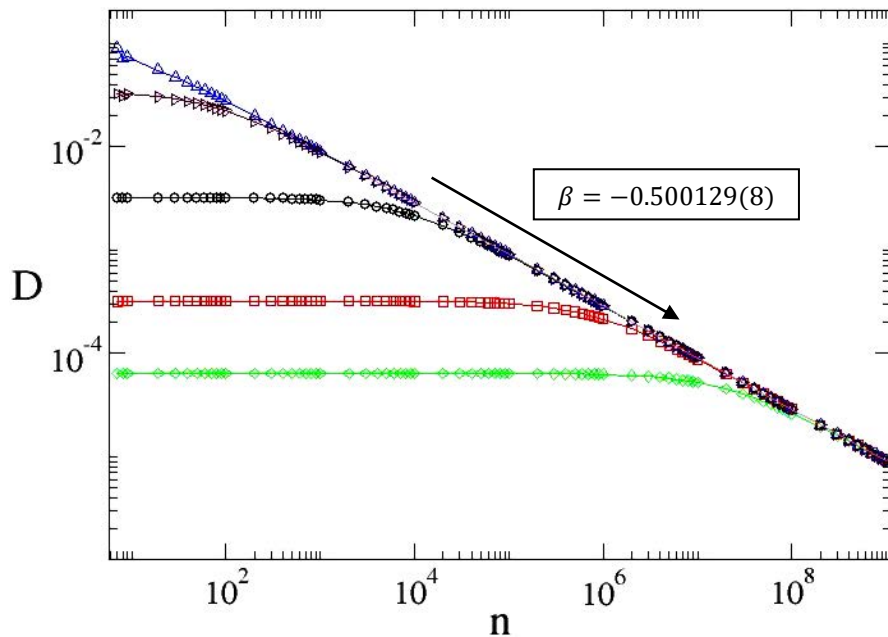


Figura 4.1.1- Gráfico de  $D$  vs.  $n$  para  $\gamma = 0,425$ ,  $\varepsilon = 0,16359409950019$  para  $10^9$  iteradas.

Com base nestas observações podemos propôr as seguintes hipóteses de escala:

- Hipótese I: Para  $n \ll n_x$ , o comportamento de  $D(n)$  pode ser descrito como:

$$D(n) \propto D_0^\alpha . \quad (4.2)$$

- Hipótese II: Para  $n \gg n_x$ , o comportamento de  $D(n)$  pode ser descrito como:

$$D(n) \propto n^\beta . \quad (4.3)$$

- Hipótese III: O número de iterações de crossover  $n_x$  é escrito como:

$$n_x \propto D_0^z , \quad (4.4)$$

onde  $z$  é o expoente de crossover.

Os valores numéricos de  $\alpha, \beta$  e  $z$  podem ser obtidos a partir de gráficos específicos. O coeficiente  $\beta$  é obtido apenas ajustando uma lei de potência na curva  $D$  vs.  $n$ , para  $n \gg n_x$ . O valor numérico obtido foi  $\beta = -0,500129(8) \cong -0,5$ . O expoente  $\alpha$  é obtido a partir do gráfico  $D \times d$ , onde  $d$  é a distância inicial fornecida para as condições iniciais, ou seja,  $(V, \phi) = (V^* + d, \phi^* + d)$ . Para  $n \ll n_x$ , o valor de  $\alpha = 1,02(2)$ , conforme mostrado na Figura 4.1.2.

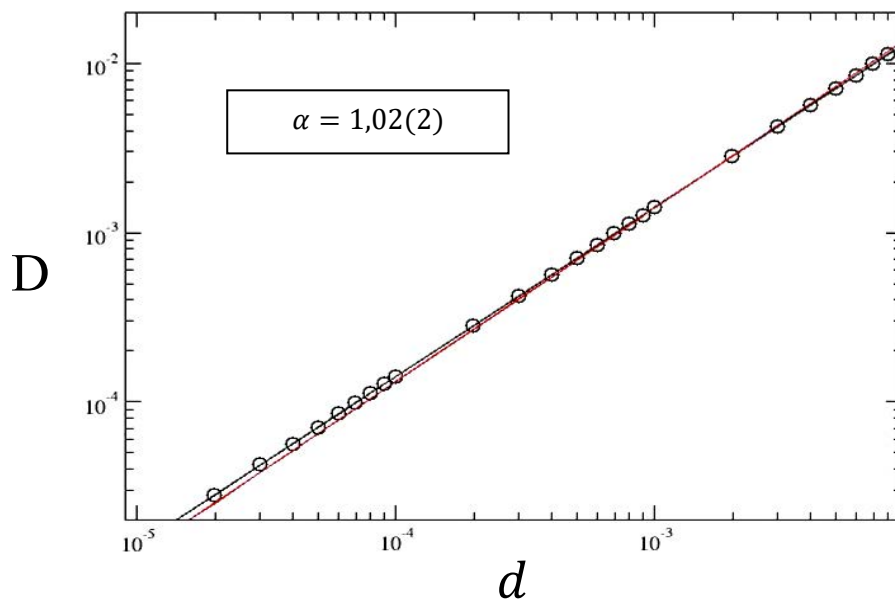


Figura 4.1.2- Gráfico de  $D$  vs  $d$  para  $\gamma = 0.425$ ,  $\varepsilon = 0,16359409950019$ .

O expoente  $z$  é obtido a partir do conhecimento de  $n_x$  vs.  $D_0$ , como é mostrado na Figura 4.1.3.

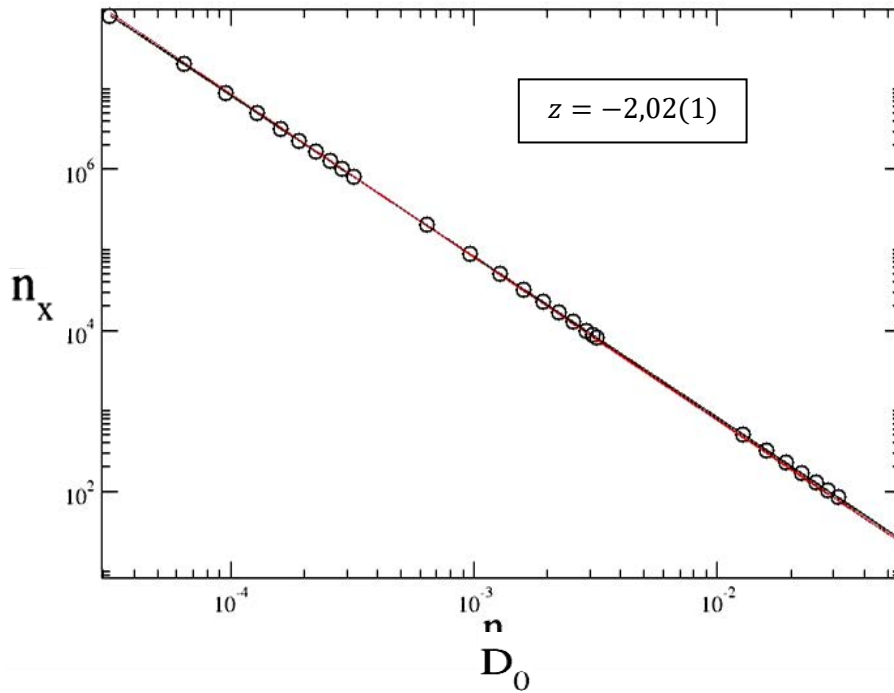


Figura 4.1.3- Gráfico de  $n_x$  vs.  $D_0$ , para  $\gamma = 0,425$ ,  $\varepsilon = 0,16359409950019$ .

Com as hipóteses de escala acima podemos supor que a distância ao ponto fixo  $D$  possa ser descrita por uma função homogênea generalizada do tipo

$$D(D_0, n) = LD(L^a D_0, L^b n) , \quad (4.5)$$

sendo  $L$  um fator de escala e  $a$  e  $b$  os expoentes característicos.

Considerando  $L^a D_0 = 1$  e isolando  $L$

$$L = (D_0)^{-\frac{1}{a}}. \quad (4.6)$$

Substituindo esse resultado na função homogênea, temos

$$D(D_0, n) = (D_0)^{-\frac{1}{a}} D(1, L^{-\frac{b}{a}} n) . \quad (4.7)$$

Se  $D\left(1, L^{-\frac{b}{a}} n\right) = \text{constante}$ , da primeira hipótese escala, temos

$$(4.8)$$

$$D(D_0, n) = (D_0)^{-\frac{1}{a}}. \quad (4.8)$$

Por tanto,

$$\alpha = -\frac{1}{a}. \quad (4.9)$$

Fazendo  $L^b n = 1$ , temos

$$L = (n)^{-\frac{1}{b}}, \quad (4.10)$$

Novamente, levando esse resultado na função homogênea temos

$$D(D_0, n) = (n)^{-\frac{1}{b}} D(D_0(n)^{-\frac{a}{b}}, 1). \quad (4.11)$$

Assumindo  $D(D_0(n)^{-\frac{a}{b}}, 1) = \text{constante}$ , da segunda hipótese escala, temos

$$D(D_0, n) = (n)^{-\frac{1}{b}}. \quad (4.12)$$

Portanto,

$$\beta = -\frac{1}{b}. \quad (4.13)$$

Comparando as equações (4.6) e (4.10) temos

$$(D_0)^{-\frac{1}{a}} = (n)^{-\frac{1}{b}}. \quad (4.14)$$

Isolando  $n$ , encontramos

$$n = D_0^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (4.15)$$

Porém, para esta hipótese, este  $n$  é o de *crossover*, ficando a equação desta maneira

$$n_x = D_0^{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (4.16)$$

Da terceira hipótese de escala, temos

$$z = \frac{\alpha}{\beta} \quad (4.17)$$

Esta expressão fornece uma lei de escala. O conhecimento de dois expoentes fornece o terceiro.

A partir das hipóteses de escala, podemos de forma apropriada, fazer sua reescala. Da hipótese I:  $D(n) \propto D_0^\alpha$ , temos

$$D \rightarrow \frac{D(n)}{D_0^\alpha}, \quad (4.18)$$

e, da hipótese III:  $n_x \propto D_0^z$ ,

$$n \rightarrow \frac{n}{D_0^z}. \quad (4.19)$$

Com as expressões de reescalas acima e os valores de  $\alpha$  e  $z$  encontrados nos gráficos de  $D$  vs  $d$  e  $n_x$  vs.  $D_0$ , reescalamos as curvas em uma única curva universal, como mostrado na Figura 4.1.1

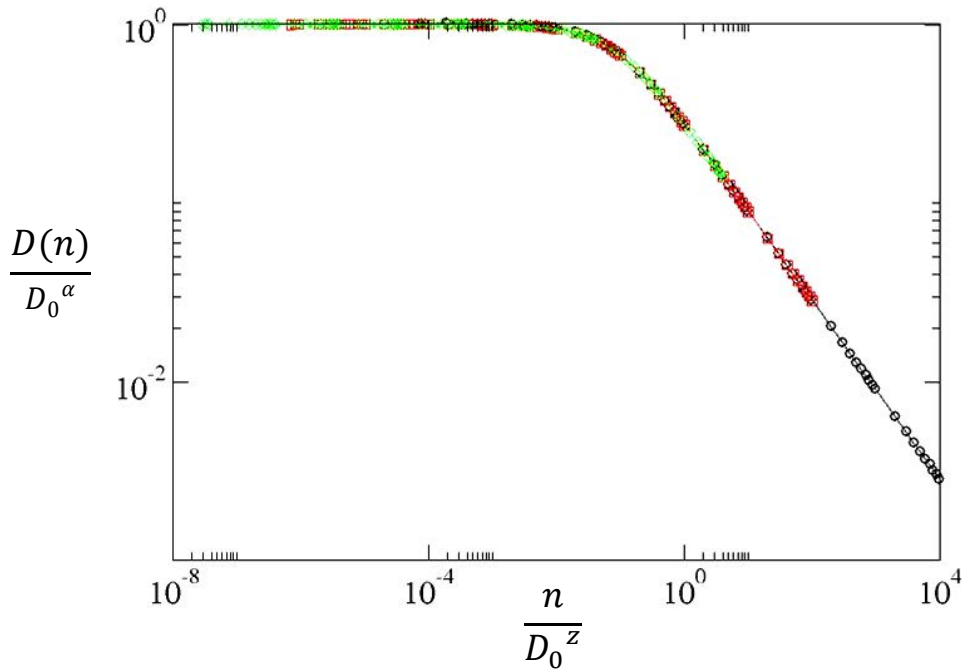


Figura 4.1.3- Gráfico de *overlap* de três curvas em uma única curva universal a partir das reescalas de eixos.

Neste capítulo determinamos as propriedades da distância euclidiana, propomos hipóteses para cada trecho do gráfico  $D \times n$ . Obtivemos os expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , a partir de uma função homogênea generalizada. Encontramos uma lei de escala, dada por  $z = \frac{\alpha}{\beta}$  com a qual podemos sobrepôr as curvas de  $D$  vs  $n$  em uma única curva universal. Lembrando que a reescala funciona para qualquer valor de  $D_0$ .

## Capítulo 5

### Conclusões e Perspectiva

Neste trabalho de conclusão de curso, estudamos algumas propriedades dinâmicas de um mapeamento com foco em uma bifurcação de duplicação de período.

Escolhemos o mapa simplificado Fermi-Ulam. Mostramos seus diagramas de órbitas, composto por diversas bifurcações e também caos.

Foram feitas análises fenomenológicas, propusemos hipóteses de escala e obtivemos os seus respectivos expoentes críticos nos gráficos estudados numericamente. A partir desses gráficos, obtivemos os expoentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $z$  que nos forneceram a lei de escala utilizada para a sobreposição das curvas do gráfico  $D$  vs  $n$  em uma única curva universal.

Com base neste trabalho pretende-se determinar analiticamente os expoentes críticos e assim compararmos com os valores numéricos. Acreditamos assim ser um novo método para mapeamentos bidimensionais. Com base nos resultados aqui demonstrados pretendemos escrever e submeter um artigo científico para uma revista internacional e também aplicar os métodos em outros modelos.

## Referências Bibliográficas

- [1] G. Galilei. *"O ensaiador"*, São Paulo, Ed. Nova Cultura, (2000)
- [2] I. Newton, " *Principia: princípios matemáticos da filosofia natural*", Tradução: Ricci, São Paulo, Editora USP, (1990)
- [3] J. H. Poincaré, "Les Methodes Nouvelles de La Méccanique Celest", Paris: Gauthier-Villars, (1899)
- [4] G. D. Birkhoff, " *Dynamical System*", Amer. Math. Soc. Colloquium Publ.9. Providence: American Mathematical Society, (1927).
- [5] A. N. Kolmogorov, " *Preservaion of conditionally periodic movements with small change in hamiltonian function*", Dokl. Akad. Nauk SSSR, v. 98, PP. 527, (1954).
- [6] V. I. Arnold, " *Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*", Uspehi Mat. Nauk (18), Issue. 6 v. 114, PP.91, (1963).
- [7] J. Moser, " *Stable na random motions in dynamical systems*", New York, Princeton University press, (1973).
- [8] E. N. Lorenz, " *Deterministic nonperiodic flow*", J. of Atmospheric Sciences, v.20, PP 130, (1963)
- [9] M. Feigenbaum, " *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*", J. od Stat. Phys., v. 19, PP.25, (1978).
- [10] J. L. Kaplan e J. A. Yorke, " *Pretubulence: A regime observed, in a fluid flow model of Lorenz*", Commu. Math. Phys., v. 67, PP.93, (1979).
- [11] B. V. Chirikov, " *Na Universal instability of many -dimensional oscilattor system*", Phys. Rep., v. 52, PP. 263, (1979).
- [12] R. M. May, " *Simple mathematical models with very complicated dynamics*", Nature, v. 261, PP.459, (1976).
- [13] E. Ott, " *Chaos in Dynamical System*", New York, Cambridge University Press,, (1993)
- [14] A.L.P. LIVORATI. *Influência do fenômeno de Stickiness em alguns sistemas dinâmicos clássicos*. 2014. 105 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Usp, São Paulo, 2014.

- [15] RUELLE, David. *Chaos Theory and Historical Probabilities*. Belgica. 2012. Disponível em: <<http://www.ihes.fr/~ruelle/PUBLICATIONS/130dragon.pdf>>. Acesso em: 14 out. 2016.
- [16] L. Edson, T. Rivania, R. Danilo, F. R. N, O. Juliano, "*Addendum to: Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scalling investigation*", *Phys, lett. A* 379 (2015)1246, *Physics Latters A*, (2015).
- [17] Leonel, E. D. "*Fundamentos da Física Estatística*", Edgard Blucher, 2015
- [18] PENALVA, Julia. *Expoentes de escala para mapeamentos discreto bidimensionais*. 2014. 45 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Física, Física, Unesp, Rio Claro, 2014.
- [19] VALÉRIO, Luís Renato. *Dinâmica não-linear e caos: O circuito de Chua*. 2014. 31 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Física, Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, 2014. Disponível em: <<http://www.unifal-mg.edu.br/fisica/files/file/TCCs/ValerioLR.pdf>>. Acesso em: 14 out. 2016.
- [20] T. Rivania, R. Danilo, G. Felipe, O. Juliano, L. Edson, "*Convergence towards asymptotic state in 1-D mappings: A scalling investigation*", *Physics Latters A*, (2015).