

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

INPE
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Guaratinguetá
1991



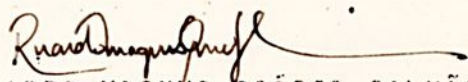
**INFLUÊNCIA DO EFEITO HALL
NA CONVECÇÃO EM PLASMAS**

CARLOS ALBERTO MOREIRA DOS SANTOS

CARLOS ALBERTO MOREIRA DOS SANTOS

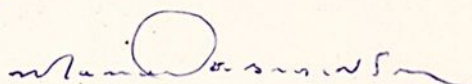
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE MESTRE EM FÍSICA

ESPECIALIDADE: FÍSICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM FÍSICA DE
PLASMAS E, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. RICARDO MAGNUS OSÓRIO GALVÃO

- Orientador -



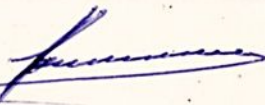
Prof. Dr. MANOEL FERREIRA BORGES NETO

- Coordenador -

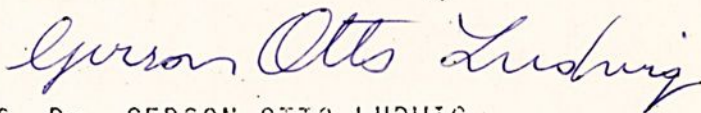
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. RICARDO MAGNUS OSÓRIO GALVÃO



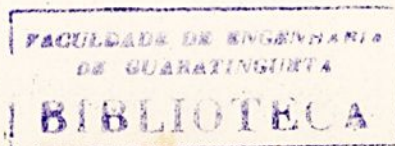
Prof. Dr. ASAHARU TOMIMURA



Prof. Dr. GERSON OTTO LUDWIG

T 533.9(043)

5237i



00206

206

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - FEG

E

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAS - INPE

TITULO

" INFLUÊNCIA DO EFEITO HALL NA CONVECÇÃO EM PLASMAS "

AUTOR: CARLOS ALBERTO MOREIRA DOS SANTOS

ORIENTADOR: Dr. RICARDO MAGNUS OSÓRIO GALVÃO

DEDICATÓRIA

" A meu pai, JAIR MOREIRA DOS SANTOS,
por incentivar a todo momento minha carreira acadêmica "

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. RICARDO M. O. GALVÃO por ter sido orientador deste trabalho e principalmente por se preocupar com a formação do pesquisador.

Ao Prof. Dr. MANUEL F. BORGES NETO, por ter realizado as reinvidicações feitas por mim e como consequência pude efetuar este trabalho no prazo de vinte meses.

A Prof^a. Dr^a. MARISA ANDREATTA, por imprimir um caráter progressista a este programa de pós-graduação.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho:



RESUMO

Neste trabalho é estudada a influência do efeito Hall na formação de células de convecção em colunas de plasma com simetria cilíndrica e corrente constante. É mostrado que o efeito Hall introduz frequências complexas no sistema e impede a formação de células de convecção em alguns casos.

A análise dos vários efeitos é efetuada de quatro maneiras separadamente, devido ao estudo simultâneo ou não do efeito Hall, da viscosidade e da resistividade. Outras três análises, incluindo somente a viscosidade e a resistividade, foram anteriormente consideradas por GOMBEROFF e são citadas aqui, pois serviram de suporte para a realização deste trabalho.

ABSTRACT

In this work the influence of the Hall effect is studied on the formation of the convection cells in columns of plasma with cylindrical symmetry and constant current. It is shown that the Hall effect introduces complex frequencies in the system and does not allow the formation of the convection cells in some cases.

The analysis of several effects is elaborated in four different ways, depending on the inclusion of the Hall effect simultaneously with viscosity and resistivity. Other three analysis, including only the viscosity and resistivity, which have been considered before by GOMBEROFF, are reproduced here, with the objective of making this work self-contained.

INDICE

	Pg
1 - INTRODUÇÃO	10
1.1 - HISTÓRICO	10
1.2 - VÓRTICES	12
1.3 - TIPOS DE ESTABILIDADE MARGINAL	15
1.4 - IMPORTANCIA DAS CÉLULAS DE CONVECÇÃO	17
2 - EQUAÇÕES BÁSICAS E ANÁLISE PERTURBATIVA	19
2.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS	19
2.2 - ANÁLISE PERTURBATIVA	21
2.3 - VETOR DESLOCAMENTO	33
3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO	40
3.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA SISTEMAS DE VISCOSIDADE NULA E NÃO NULA	40
3.2 - AUTO VALORES σ	42
3.2.1 - SISTEMAS DE VISCOSIDADE NÃO NULA	42
3.2.2 - SISTEMAS DE VISCOSIDADE NULA	43
3.3 - ANÁLISE PERTURBATIVA PARA SISTEMAS DE VISCOSIDADE NULA	45

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pg
4 - RELAÇÃO DE DISPERSÃO E ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO EFEITO HALL	49
4.1 - RELAÇÃO DE DISPERSÃO	49
4.2 - CONVECÇÃO DEVIDO AO EFEITO HALL	50
4.3 - CONVECÇÃO DEVIDO A VISCOSIDADE E AO EFEITO HALL ...	53
4.4 - CONVECÇÃO DEVIDO A RESISTIVIDADE E AO EFEITO HALL..	55
4.5 - INIBIÇÃO DA FORMAÇÃO DE CELULAS DE CONVECÇÃO DEVIDO A VISCOSIDADE, RESISTIVIDADE E EFEITO HALL	57
4.6 - TABELA DE RESULTADOS	59
5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	60
5.1 - CONCLUSÕES	60
5.2 - SUGESTÕES	61
6 - APENDICE	63
6.1 - LEI DE OHM E EQUAÇÕES BÁSICAS	63
6.2 - CAMPO MAGNÉTICO DO EQUILÍBRIO	65
6.3 - PRESSÃO DO EQUILÍBRIO	67
6.4 - FONTE DE CALOR S_0	68
6.5 - TRANSFORMADA ROTACIONAL	68
7 - BIBLIOGRAFIA	70

INDICE DE FIGURAS

	Pg
1 - Movimento de um fluido não ideal	12
2 - Inversão de velocidades	14
3 - Região de vórtices	15
4 - Solução da equação do auto valor σ	44
5 - Comportamento de ξ_r para $r \leq a$	48
6 - $\hat{\omega}$ versus $ m-nq $ para $\hat{\epsilon}_H = 0,2404$	52
7 - $\hat{\omega}$ versus $ m-nq $ para $\hat{\epsilon}_H = 0,25$ e $\hat{\mu} = 0,20$	54
8 - $\hat{\omega}$ versus $ m-nq $ para $\hat{\epsilon}_H = 0,25$ e $\hat{\eta} = 0,10$	56
9 - $\hat{\omega}$ versus $ m-nq $ para $\hat{\epsilon}_H = 0,25$, $\hat{\mu} = 0,15$ e $\hat{\eta} = 0,25$..	58
10 - Cilindro de confinamento do plasma	68
11 - Desenvolvimento da superfície cilíndrica.....	69

INDICE DE TABELAS

1 - Dependência de $\hat{\Omega}$ com os vários efeitos	36
2 - Auto valores σ para $\mu \neq 0$ com $ k a = 1,884$	44
3 - Modos que produzem células de convecção	59

SIMBOLOGIA

- a - Raio do cilindro
- k - Módulo do vetor de onda na direção z
- L - Comprimento do cilindro
- m - Número de modo poloidal
- n - Número de modo toroidal
- P - Pressão
- q - Transformada rotacional
- r - Raio interno do cilindro
- S_0 - Constante associada a geração de calor
- t - tempo
- ω - Taxa de crescimento de instabilidades
- $\rightarrow$
- B - Campo magnético
- $\rightarrow$
- E - Campo elétrico
- $\rightarrow$
- f_i - Grandezas físicas perturbadas
- $\rightarrow$
- K - Vetor de onda
- $\rightarrow$
- V - Velocidade
- $\hat{e}$ - Versores unitários
- $\hat{f}$ - Grandezas físicas normalizadas
- β - Constante associada a σ e k
- ϵ_H - Parâmetro associado ao efeito Hall
- k - Condutividade térmica
- μ - Viscosidade
- η - Resistividade
- ρ - Densidade
- σ - Auto valor da taxa de crescimento de instabilidades
- $\rightarrow$
- ξ - Vetor deslocamento

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - HISTÓRICO

Os modos denominados modos convectivos ou células de convecção são modos estacionários de frequência nula, envolvendo somente movimento de fluido e perturbações na direção perpendicular ao campo magnético externo em um plasma magnetizado.

Os primeiros estudos foram realizados por TIMOFEEV⁽¹⁾(1963) e SIMON⁽²⁾(1968), sendo que eles mostraram que modos convectivos podem ser produzidos em um plasma parcialmente ionizado. KADOMTSEV e POGUTSE⁽³⁾(1970) mostraram que modos de oscilação resistiva conduzem a células de convecção. OKUDA e DAWSON⁽⁴⁾(1973) demonstraram que convecção excitada termicamente é causada por modos semelhantes a instabilidades de deriva. Instabilidades resistivas associadas à convecção térmica foram propostas por ROBERTS e TAYLOR⁽⁵⁾(1965). WOBIG⁽⁶⁾(1972) e MASCHKE e PARIS⁽⁷⁾(1973) mostraram que sendo o plasma instável, a viscosidade e a resistividade conduzem a modos convectivos em configurações com $B_\theta/B_z \gg 1$, onde B_θ e B_z são, respectivamente os campos poloidal e longitudinal. DAGAZIAN e PARIS⁽⁸⁾(1977) demonstraram a existência de convecção devida a viscosidade e resistividade em um plasma instável, imerso em um campo magnético longitudinal.

Mais recentemente, na década de 1980, PALMA, HERNANDEZ e principalmente GOMBEROFF⁽⁹⁻¹⁰⁾ demonstraram em vários trabalhos a existência de modos convectivos devido a viscosidade e resistividade. Nesses trabalhos GOMBEROFF utiliza um modelo matemático considerando o plasma como um fluido incompressível contido em um cilindro; o objetivo final é encontrar a relação de dispersão para modos com simetria helicoidal do plasma e então demonstrar a existência de modos convectivos.

Nesta tese é feita inicialmente uma análise do trabalho de GOMBEROFF, derivando os resultados por ele obtidos de uma forma mais estruturada e compacta, além de discutir em detalhe as condições de contorno que não foram por ele apropriadamente analisadas.

Os trabalhos de GOMBEROFF podem ser divididos basicamente em três, a saber:

1) Formação de células de convecção devido a viscosidade e condutividade térmica em configuração com $B_\theta/B_z \gg 1$.

2) Formação de células de convecção devido a resistividade e condutividade térmica em configuração com $B_\theta/B_z \gg 1$ ou $B_\theta/B_z \ll 1$.

3) Formação de células de convecção devido a viscosidade, resistividade e condutividade térmica em configuração com $B_\theta/B_z \gg 1$.

Nesta tese, usaremos um modelo teórico generalizado que engloba todos os trabalhos de GOMBEROFF como casos particulares.

1.2 - VÓRTICES ⁽¹⁷⁾

Sabe-se que um fluido ideal pode escoar sobre uma superfície com velocidade não nula; entretanto quando tratamos de um fluido real, sua viscosidade desempenha um papel importante, pois oferece uma resistência ao movimento do fluido, impondo que a velocidade das partículas em contato com a superfície seja nula.

A experiência mostra que, para fluidos com viscosidade relativamente pequena, seu efeito é apreciável somente numa camada muito delgada do fluido junto à superfície, denominada "camada limite". Este conceito admite que a velocidade de escoamento $V_x(y)$ varia de um valor nulo junto à superfície $V_x(0)=0$ até um valor $V_x(\delta)=V$, onde δ é a espessura da camada limite e V a velocidade média do fluido. Pode-se mostrar que a espessura da camada limite $\delta(x)$ é proporcional a $x^{1/2}$ ⁽¹⁸⁾.

A figura a seguir esquematiza o efeito descrito acima para vários tempos, no estado estacionário.

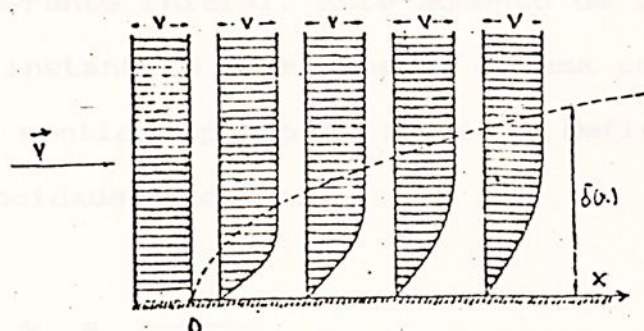


FIGURA 1 - Movimento de um fluido não ideal

A medida que o fluido se desloca ao longo da superfície, a camada limite vai se tornando mais espessa, devido a ação contínua da tensão de cisalhamento, que tende a retardar o movimento das partículas do fluido; isto implica numa alteração da distribuição de pressão do fluido.

Façamos, então, o uso da equação de NAVIER-STOKES:

$$\frac{dv_x}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}, \quad (1)$$

onde V_x é a velocidade do fluido na direção paralela à superfície, ρ e μ são a densidade e viscosidade do fluido. Nas vizinhanças de $y = 0$ e $x = 0$, para regime estacionário ($\partial/\partial t = 0$), temos,

$$\mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (2)$$

Com a diminuição da velocidade ao longo da superfície de contato, a pressão começa a crescer no sentido contrário ao da corrente inicial. Este aumento de pressão provoca em um determinado instante o aparecimento de uma corrente laminar que se desloca em sentido oposto ao inicial. Definindo γ como a curvatura na velocidade dada por

$$\gamma = \frac{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}}, \quad (3)$$

podemos ver que, quando

$$\gamma < 0 ; \partial P / \partial X < 0 \text{ então } V_x > 0 ,$$

$$\gamma = 0 ; \partial P / \partial X = 0 \text{ então } V_x = 0 ,$$

$$\gamma > 0 ; \partial P / \partial X > 0 \text{ então } V_x < 0 .$$

Estes resultados podem ser visualizados na figura abaixo.

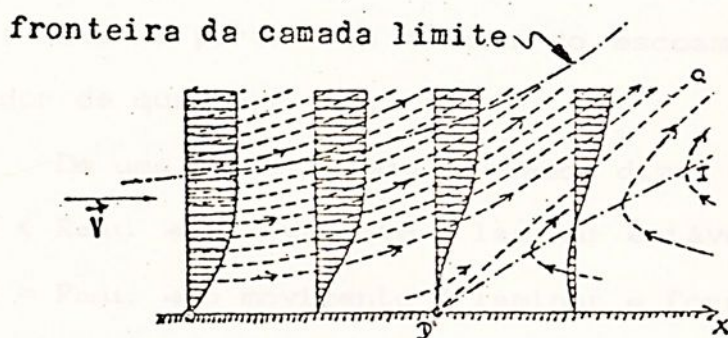


FIGURA 2-Inversão de velocidades

Devido ao gradiente adverso de pressões, a camada limite desloca-se, a partir do ponto D, denominado, ponto de separação. Na região à direita da linha DQ, da figura abaixo, podemos ver os vórtices.

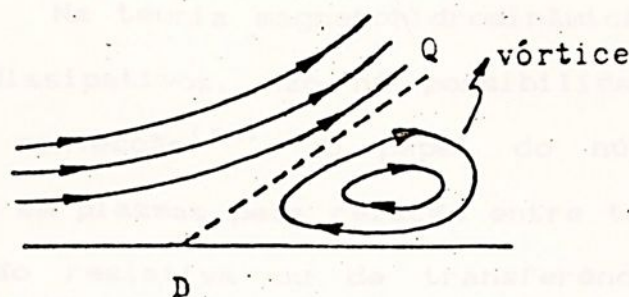


FIGURA 3-Região de vórtices

É muito importante notar que a localização do ponto de separação depende da curvatura do sólido, do número de REYNOLDS e do tempo medido a partir do início do escoamento e em geral ocorre ao redor de qualquer obstáculo.

De uma maneira geral podemos dizer que

Se $R < R_{crit.}$ → o movimento é laminar estável,

Se $R = R_{crit.}$ → o movimento é laminar e forma vórtices,

e Se $R > R_{crit.}$ → o movimento é instável e turbulento,

onde R é o número de REYNOLDS do movimento.

Este modelo simplificado permite destacar os dois mecanismos físicos essenciais para o surgimento de células de convecção, ou seja, mecanismo dissipativo e a condição de contorno. No modelo, o mecanismo dissipativo é a viscosidade do fluido. Em colunas de plasmas magnetizados, a dissipação pode ser introduzida pela viscosidade, pela resistividade e por outros efeitos não ideais, como será visto no próximo capítulo.

Na teoria magnetohidrodinâmica ideal, isto é, sem mecanismos dissipativos, não há possibilidade de surgimento de células de convecção⁽¹⁶⁾. O papel do número de REYNOLDS é representado em plasmas pela relação entre tempos característicos de dissipação resistiva ou de transferência de momentum por viscosidade e o tempo característico de ALFVEN.

1.3 - TIPOS DE ESTABILIDADE MARGINAL⁽¹⁹⁾

Considerando que as variáveis que descrevem um sistema são funções do tempo, como por exemplo: o campo de velocidades, o gradiente de pressão, o gradiente de temperatura, o campo magnético, etc, podemos então dizer que se um sistema é perturbado de uma situação de equilíbrio e retorna ao seu estado inicial, ele é estável. Caso contrário dizemos que o sistema é instável, em outras palavras, um sistema é considerado estável quando não existem perturbações que podem afastá-lo do estado de equilíbrio permanentemente.

Se todo estado inicial de um sistema é classificado como estável ou instável, então podemos separá-los através de um estado denominado de "estado de estabilidade marginal". No entanto os estados de estabilidade marginal podem ser de dois tipos. Estes

dois tipos de estabilidades dependem da evolução temporal da amplitude de uma pequena perturbação introduzida no sistema, que pode crescer ou ser amortecida aperiódicamente, ou se tornar uma oscilação bem definida.

No primeiro caso, a transição leva a um estado marginal que exibe um movimento estacionário padrão, onde prevalece a formação de células de convecção ou fluxo secundário. No outro caso, a transição gera um estado marginal que exibe um movimento oscilatório com uma frequência bem característica, denominado movimento de sobre estabilidade.

Estes dois tipos de transição podem ser descritos pela taxa de crescimento complexa de instabilidades,

$$\omega = \omega_r + i \omega_i. \quad (4)$$

O estado marginal é dado por $\hat{\omega}_r = \text{zero}$, além disso temos que se

- 1) $\omega_i = \text{zero}$, o movimento é convectivo,
- 2) $\omega_i \neq \text{zero}$, o movimento é de sobre-estabilidade.

Naturalmente, células de convecção num fluido são estruturas não-lineares. No entanto, lembrando que as instabilidades lineares helicoidais em magnetohidrodinâmica já apresentam deslocamentos convectivos, satisfazendo $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ em mais baixa ordem, a análise da transição marginal permite inferir o tipo de comportamento das estruturas não-lineares correspondentes.

Em geral, existe um largo espectro de modos que podem ser instáveis numa determinada configuração de equilíbrio magnetohidrodinâmico. A evolução destes modos pode levar a uma destruição da configuração de equilíbrio ou a uma saturação quasi-linear, em que a condição de estabilidade marginal seja atingida. Neste último caso, a transição para células de convecção pode ocorrer se a saturação não levar a estados de sobre estabilidade.

1.4 - IMPORTANCIA DAS CÉLULAS DE CONVECÇÃO

Um dos problemas básicos da física de plasmas é o transporte anômalo de partículas e energia em plasmas confinados magneticamente. O termo transporte anômalo significa que os coeficientes de difusão de partículas e energia são muito maiores que os calculados pela teoria clássica de transporte baseada em processos colisionais. Tradicionalmente, tem-se atribuído o transporte anômalo à turbulência provocada pela evolução não-linear de instabilidades que podem ser excitadas em plasmas com gradientes de temperatura e densidade. No entanto, vários autores já demonstraram que, sob condições especiais, existe a possibilidade de criação de grandes células de convecção em plasmas. Estas células aumentam substancialmente o transporte, de partículas e energia, por convecção, com relação ao produzido por processos difusivos.

2-EQUAÇÕES BÁSICAS E ANÁLISE PERTURBATIVA

2.1-EQUAÇÕES BÁSICAS

Neste trabalho usamos o modelo de um fluido para descrever o plasma. As equações básicas são:

Equação da quantidade de movimento,

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right] = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) \quad (5)$$

Equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (6)$$

Equação de transporte de energia,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P - \frac{2}{3} k \nabla^2 P - S_0 = -\gamma P \nabla \cdot \vec{V} + \frac{2}{3} \eta |\vec{J}|^2 \quad (7)$$

Lei de OHM generalizada,

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} + \frac{\epsilon_H}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} \quad (8)$$

Lei de FARADAY,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \nabla \times \vec{E} \quad (9)$$

Lei de AMPERE,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (10)$$

e

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (11)$$

onde μ é somente a viscosidade perpendicular dos íons,⁽²⁰⁾ k é a condutividade térmica, η é a resistividade e ϵ_H é um parâmetro associado ao efeito Hall (razão entre a massa e a carga dos íons).

A configuração do equilíbrio é dada por uma coluna cilíndrica de plasma com densidade de corrente e campo longitudinal B_o constantes. A equação de equilíbrio magnetohidrodinâmico fornece,

$$\vec{B}_o = B_l \left[\frac{r}{a} \right] \hat{e}_o + B_o \hat{e}_z \quad (12)$$

$$e \quad P_o = p_o - \frac{B_l^2}{\mu_o} \left[\frac{r}{a} \right]^2, \quad (13)$$

onde $\vec{B}_o$ e P_o são o campo magnético e a pressão do equilíbrio, a é o raio do cilindro e B_o , B_l e p_o são constantes.

Na equação (7) aparece S_o , que é uma constante que mede a quantidade de calor gerado por uma fonte para manter o perfil de pressão de equilíbrio. Impondo regime estacionário, obtemos,

$$S_o = \frac{8}{3} (k - \eta/\mu_o) \frac{B_l^2}{\mu_o a^2} \quad (14)$$

2.2- ANÁLISE PERTURBATIVA

Vamos agora discutir o movimento incompressível de um plasma, supondo sua densidade constante; para tanto usaremos a análise de linearização admitindo que todas as grandezas perturbadas são da forma

$$f_1(r, \theta, z, t) = f_1(r) \exp(i m \theta + i k z + \omega t) . \quad (15)$$

Combinando as equações (10) e (5), obtemos,

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right] = \frac{(\nabla \times \vec{B})}{\mu_0} \times \vec{B} - \nabla P - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) . \quad (16)$$

Usando a identidade vetorial

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

e fazendo $\vec{A} = \vec{B}$, temos,

$$\nabla(\vec{B} \cdot \vec{B}) = 2 \left[(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right]$$

e portanto,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{B} \cdot \vec{B}). \quad (17)$$

Substituindo a equação (17) em (16), obtemos,

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \right] = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{\nabla} (\vec{B} \cdot \vec{B})}{2 \mu_0} - \vec{\nabla} P - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}), \quad (18)$$

e então linearizando a equação acima com $\vec{V} = \vec{V}_1$, temos,

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 \right] - \vec{\nabla} \left[P_1 + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{B})_1}{\mu_0} \right] - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \quad (19)$$

Passemos a analisar cada termo desta equação separadamente. O termo do lado esquerdo fornece,

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{V}_1(r) \exp(i m \omega + i k z + \omega t) \right],$$

portanto,

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = \rho_0 \omega \vec{V}_1. \quad (20)$$

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 = \text{zero}$, podemos escrever $\vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \beta \vec{A}$,
 porém fazendo $\vec{A} = \vec{V}_1$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \beta \vec{V}_1, \quad (21)$$

onde β é uma constante a ser determinada. ⁽²¹⁻²²⁾

Com isso o último termo do lado direito fica

$$\mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}_1) = \mu \beta \vec{\nabla} \times \vec{V}_1,$$

que fornece,

$$\mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}_1) = \mu \beta^2 \vec{V}_1 \quad (22)$$

Para o segundo termo do lado direito, vamos definir
 a pressão total perturbada

$$P_1^* \equiv P_1 + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{B})_1}{\mu_0} \quad (23)$$

Finalmente, o primeiro termo do lado direito será
 determinado utilizando a relação vetorial,

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \vec{B} = & \hat{e}_r \left[A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{1}{r} A_\theta B_\theta \right] + \\
 & + \hat{e}_\theta \left[A_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} A_\theta B_r \right] + \\
 & + \hat{e}_z \left[A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] .
 \end{aligned} \quad (24)$$

Fazendo primeiramente $\vec{A} = \vec{B}_1$ e $\vec{B} = \vec{B}_\theta$, temos,

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{B}_\theta = - \frac{1}{r} B_\theta B_\theta \hat{e}_r + B_{r1} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \hat{e}_\theta ,$$

mas

$$B'_\theta = \frac{\partial B_\theta}{\partial r} = \frac{B_\theta}{r} = \frac{B_l}{a} = \text{CONST.} , \quad (25)$$

ou seja

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{B}_\theta = B'_\theta (B_{r1} \hat{e}_\theta - B_{\theta1} \hat{e}_r) , \quad (26)$$

porém,

$$B_{r_1} \hat{e}_\theta - B_{\theta_1} \hat{e}_r = \hat{e}_z \times B_1$$

e portanto,

$$(\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 = B'_0 (\hat{e}_z \times B_1) \quad (27)$$

Fazendo agora $\vec{A} = \vec{B}_0$ e $\vec{B} = B_1$, temos,

$$\begin{aligned} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = & \hat{e}_r \left[\frac{B_{\theta_0}}{r} \frac{\partial B_{r_1}}{\partial \theta} + B_{z_0} \frac{\partial B_{r_1}}{\partial z} - \frac{1}{r} B_{\theta_0} B_{\theta_1} \right] + \\ & + \hat{e}_\theta \left[\frac{B_{\theta_0}}{r} \frac{\partial B_{\theta_1}}{\partial \theta} + B_{z_0} \frac{\partial B_{\theta_1}}{\partial z} + \frac{1}{r} B_{\theta_0} B_{\theta_1} \right] + \\ & + \hat{e}_z \left[\frac{B_{\theta_0}}{r} \frac{\partial B_{z_1}}{\partial \theta} + B_{z_0} \frac{\partial B_{z_1}}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = i m f_1$$

e

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = i k f_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = & i B_0 \frac{m}{r} \left(B_{r_1} \hat{e}_r + B_{\theta_1} \hat{e}_\theta + B_{z_1} \hat{e}_z \right) + \\
 & + i k z \left(B_{r_1} \hat{e}_r + B_{\theta_1} \hat{e}_\theta + B_{z_1} \hat{e}_z \right) + \\
 & + \frac{B_\theta}{r} \left(B_{r_1} \hat{e}_\theta - B_{\theta_1} \hat{e}_r \right)
 \end{aligned}$$

Combinando os termos da equação acima, obtemos,

$$(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = i \left[B_0 \frac{m}{r} + B_z k \right] \vec{B}_1 + \frac{B_\theta}{r} (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) \quad (28)$$

Definindo o vetor de onda

$$\vec{K} = \frac{m}{r} \hat{e}_\theta + k \hat{e}_z$$

e usando a equação (25), nós obtemos,

$$(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = i (\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \vec{B}_1 + B_\theta (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) \quad (29)$$

oque nos fornece, finalmente, através da combinação das equações (27) e (29),

$$(\vec{B}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 = i (\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \vec{B}_1 + 2 B_0' (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) \quad (30)$$

Substituindo os resultados das equações (20), (22), (23) e (30), na equação (19), obtemos,

$$\rho_0 \omega \vec{V}_1 = -\nabla P_1^* + \frac{1}{\mu_0} \left[i (\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \vec{B}_1 + 2 B_0' (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) \right] - \mu \beta^2 \vec{V}_1 \quad (31)$$

Neste momento é necessário determinarmos a relação entre $\vec{B}_1$ e $\vec{V}_1$. Esta dependência pode ser obtida a partir da substituição das equações (8) e (10) em (9), ou seja,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left[\eta \frac{(\nabla \times \vec{B})}{\mu_0} + \frac{\epsilon_H}{\rho} \frac{(\nabla \times \vec{B})}{\mu_0} \times \vec{B} - \vec{V} \times \vec{B} \right] \quad (32)$$

Linearizando, obtemos,

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}_1) - \frac{\epsilon_H}{\mu_0 \rho_0} \nabla \times \left[(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right] + \nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) \quad (33)$$

Analisemos cada termo da equação acima separadamente. O termo do lado esquerdo é analogo ao dado pela equação (20), isto é:

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \omega \vec{B}_1 \quad (34)$$

O primeiro termo do lado direito pode ser escrito a partir da suposição⁽²⁴⁻²²⁾

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \beta^* \vec{B}_1 \quad (35)$$

pois $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0$, a partir da linearização da equação (11). Com isso, temos,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) = \beta^{*2} \vec{B}_1 \quad (36)$$

onde β^* também é uma constante a ser determinada.

O terceiro termo do lado direito pode ser calculado usando a identidade vetorial,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (37)$$

ou seja,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) = \vec{V}_1(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0) - \vec{B}_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1) + (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{B}_0$$

Porém, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0$ são iguais a zero e isto fornece,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) = (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_0 \quad (38)$$

Note ainda que os dois termos do lado direito da equação (38) são análogos às equações (28) e (27), respectivamente e portanto, temos,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) = \left[i(\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \vec{V}_1 + B'_0 (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) \right] - B'_0 (\hat{e}_z \times \vec{B}_1),$$

consequentemente obtemos,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) = i(\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \vec{V}_1 \quad (39)$$

Finalmente, falta o segundo termo do lado direito da equação (32). Usando a mesma identidade vetorial utilizada para obter a equação (17), obtemos,

$$\vec{\nabla} \times \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right] = \vec{\nabla} \times \left[(\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 \right] - \vec{\nabla} \times \nabla (\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_0) \quad (40)$$

mas, $\vec{\nabla} \times \nabla \Psi = 0$, portanto,

$$\vec{\nabla} \times \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right] = \vec{\nabla} \times \left[(\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 \right] \quad (41)$$

Substituindo o resultado (30) no lado direito da equação acima, obtemos,

$$\vec{\nabla}_x \left[(\vec{\nabla}_x \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\vec{\nabla}_x \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right] = \vec{\nabla}_x \left[i(\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \vec{B}_1 + 2B'_0 (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) \right] \quad (42)$$

Contudo é interessante notar que $(\vec{B}_0 \cdot \vec{K})$ e B'_0 não dependem das coordenadas r , ϕ e z , senão vejamos:

$$(\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) = \left[B_l \frac{r}{a} \hat{e}_\phi + B_0 \hat{e}_z \right] \cdot \left[\frac{m}{r} \hat{e}_\phi + k \hat{e}_z \right]$$

ou seja,

$$(\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) = B_l \frac{m}{a} + B_0 k, \quad (43)$$

e $B'_0 = B_l / a$, dada pela equação (25). Com isso podemos escrever,

$$\vec{\nabla}_x \left[(\vec{\nabla}_x \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\vec{\nabla}_x \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right] = i(\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) (\vec{\nabla}_x \vec{B}_1) + 2B'_0 \vec{\nabla}_x (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) \quad (44)$$

e da equação (35), temos,

$$i(\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) (\vec{\nabla}_x \vec{B}_1) = i(\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \beta^* \vec{B}_1 \quad (45)$$

O ultimo termo da equação (42) deve ser ainda um pouco mais trabalhado. A partir da equação (37), podemos escrever,

$$\vec{\nabla} \times (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) = (\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla}) \hat{e}_z - (\hat{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1,$$

onde foi usado $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = \vec{\nabla} \cdot \hat{e}_z = 0$. Os dois outros termos podem ser calculados utilizando a equação (24), que nos fornece,

$$(\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla}) \hat{e}_z = 0$$

e

$$(\hat{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 = \frac{\partial B_r}{\partial z} \hat{e}_r + \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \hat{e}_\phi + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{e}_z = i k \vec{B}_1.$$

Desta forma,

$$\vec{\nabla} \times (\hat{e}_z \times \vec{B}_1) = - i k \vec{B}_1. \quad (46)$$

Portanto, voltando com os resultados (45) e (46) na equação (42), temos,

$$\vec{\nabla} \times \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 \right] = i (\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \beta^* \vec{B}_1 - 2 i B_0' k \vec{B}_1. \quad (47)$$

Substituindo, finalmente, as equações (34), (36), (39) e (47) na equação (33), nós obtemos,

$$\omega \vec{B}_1 = - \frac{\eta}{\mu_o} \beta^{*2} \vec{B}_1 - i \frac{\epsilon_H}{\mu_o \rho_o} \left[(\vec{B}_o \cdot \vec{K}) \beta^* - 2B_o' k \right] \vec{B}_1 + i (\vec{B}_o \cdot \vec{K}) \vec{V}_1. \quad (48)$$

As equações (31) e (48) são as equações básicas para os campos lineares $\vec{V}_1$ e $\vec{B}_1$. Destas equações podemos determinar a relação de dispersão para a taxa de crescimento de instabilidades.

Isolando $\vec{B}_1$, na equação (48), temos,

$$\left\{ \omega + \frac{\eta}{\mu_o} \beta^{*2} + i \frac{\epsilon_H}{\mu_o \rho_o} \left[(\vec{B}_o \cdot \vec{K}) \beta^* - 2B_o' k \right] \right\} \vec{B}_1 = i (\vec{B}_o \cdot \vec{K}) \vec{V}_1. \quad (49)$$

Para simplificar a notação, vamos definir a grandeza

$$\Omega \equiv \omega + \frac{\eta}{\mu_o} \beta^{*2} + i \frac{\epsilon_H}{\mu_o \rho_o} \left[(\vec{B}_o \cdot \vec{K}) \beta^* - 2B_o' k \right]. \quad (50)$$

Aplicando o operador rotacional em ambos os lados da equação (49), podemos relacionar as constantes β e β^* , ou seja,

$$\Omega \vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = i (\vec{B}_o \cdot \vec{K}) \vec{\nabla} \times \vec{V}_1$$

e das equações (21) e (35), vemos que,

$$\Omega \beta^* \vec{B}_1 = i (\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \beta \vec{V}_1.$$

Dividindo, então, a equação acima pela equação (49), temos,

$$\beta^* = \beta \quad (51)$$

É importante notar que a equação (49) nos fornece a relação entre $\vec{B}_1$ e $\vec{V}_1$, incluindo o efeito Hall e a resistividade, sendo que o efeito da viscosidade aparecerá da substituição da equação (49) em (31).

Podemos reescrever a equação (49), usando a definição (50), como

$$\vec{B}_1 = i \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{K})}{\Omega} \vec{V}_1 \quad (52)$$

2.3 - VETOR DESLOCAMENTO

Substituindo a equação (52) em (31), temos,

$$\rho_o \omega \vec{V}_1 = -\nabla P_1^* + \frac{1}{\mu_o} \left\{ i (\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \left[\frac{i (\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \vec{V}_1}{\Omega} \right] + 2 \vec{B}_0' \left[\hat{e}_z \times \frac{i (\vec{B}_0 \cdot \vec{K}) \vec{V}_1}{\Omega} \right] \right\} - \mu \beta^2 \vec{V}_1.$$

ou seja,

$$\rho_o \omega \vec{V}_1 + \mu \beta^2 \vec{V}_1 + \frac{(\vec{B}_o \cdot \vec{K})^2}{\mu_o} \frac{\vec{V}_1}{\Omega} = - \vec{\nabla} P_1^* + 2i \frac{B_o'}{\mu_o} (\vec{B}_o \cdot \vec{K}) \left[\hat{e}_z \times \frac{\vec{V}_1}{\Omega} \right].$$

Multiplicando e dividindo os dois primeiros termos da equação acima por Ω e definindo $\vec{\xi} = \vec{V}_1/\Omega$, nós obtemos,

$$\left[\rho_o \omega \Omega + \mu \beta^2 \Omega + \frac{(\vec{B}_o \cdot \vec{K})^2}{\mu_o} \right] \vec{\xi} = - \vec{\nabla} P_1^* + 2i \frac{B_o'}{\mu_o} (\vec{B}_o \cdot \vec{K}) (\hat{e}_z \times \vec{\xi}). \quad (53)$$

Fazendo $n = -kL/2\pi$ e usando a definição da transformada rotacional, $q = 2\pi a B_o / L B_l = \text{const.}$, temos,

$$nq = -ka \frac{B_o}{B_l}, \quad (54)$$

com isso $(\vec{B}_o \cdot \vec{K})$ que aparece na equação (43), pode ser escrito como,

$$(\vec{B}_o \cdot \vec{K}) = \frac{B_l}{a} (m - nq). \quad (55)$$

Substituindo então as equações (25) e (55) em (53), obtemos,

$$\left[(\rho_o \omega + \mu \beta^2) \Omega + \frac{B_l^2}{\mu_o a^2} (m - nq)^2 \right] \vec{\xi} = - \vec{\nabla} P_1^* + 2i \frac{B_l^2}{\mu_o a^2} (m - nq) (\xi_r \hat{e}_o - \xi_o \hat{e}_r),$$

multiplicando ambos os lados por $\mu_0 a^2 / B_\ell^2$, definindo a pressão perturbada normalizada,

$$\hat{P}_1 \equiv \frac{\mu_0}{B_\ell^2} P_1^* \quad (56)$$

e trabalhando um pouco mais o primeiro termo do lado esquerdo, obtemos,

$$\left\{ (\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \left[\hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2 + i \hat{\varepsilon}_H a ((m-nq)\beta - 2k) + (m-nq)^2 \right] \right\} \vec{\xi} =$$

$$= -a^2 \vec{\nabla} \hat{P}_1 - 2i(m-nq)(\xi_\theta \hat{e}_r - \xi_r \hat{e}_\theta), \quad (57)$$

onde foram definidas as seguintes grandezas normalizadas,

$$\hat{\omega} \equiv \left[\frac{\mu_0 a^2 \rho_0}{B_\ell^2} \right]^{1/2} \omega, \quad \hat{\mu} \equiv \left[\frac{\mu_0}{a^2 \rho_0 B_\ell^2} \right]^{1/2} \mu, \quad \hat{\eta} \equiv \left[\frac{\rho_0}{a^2 B_\ell^2} \right]^{1/2} \eta$$

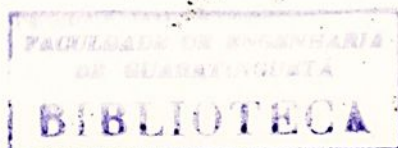
e

$$\hat{\varepsilon}_H \equiv \left[\frac{1}{\mu_0 \rho_0 a^2} \right]^{1/2} \varepsilon_H. \quad (58)$$

Substituindo as definições acima e as equações (25) e (55) em (50), temos,

$$\hat{\Omega} = \hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2 + i \hat{\varepsilon}_H a ((m-nq)\beta - 2k), \quad (59)$$

00206



para finalmente, obtermos,

$$\left[(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m-nq)^2 \right] \vec{\xi} = -a^2 \vec{\nabla} \hat{P}_1 - 2i(m-nq)(\xi_{\theta} \hat{e}_r - \xi_r \hat{e}_{\theta}). \quad (60)$$

Esta equação é a equação final de auto valor para o vetor deslocamento $\vec{\xi}$. O efeito dos diferentes mecanismos não ideais, viscosidade, resistividade e efeito Hall aparecem através do coeficiente de $\vec{\xi}$ na equação acima. Na tabela 1 apresentamos um resumo dos diferentes cenários possíveis.

EFEITOS	$\hat{\Omega}$
viscosidade	$\hat{\omega}$
resistividade	$\hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2$
viscosidade resistividade	$\hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2$
Hall	$\hat{\omega} + i \hat{\varepsilon}_H (m-nq) - 2k$
viscosidade Hall	$\hat{\omega} + i \hat{\varepsilon}_H (m-nq) - 2k$
resistividade Hall	$\hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2 + i \hat{\varepsilon}_H (m-nq) - 2k$
viscosidade resistividade Hall	$\hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2 + i \hat{\varepsilon}_H (m-nq) - 2k$

TABELA 1 - Dependência de $\hat{\Omega}$ com os efeitos não ideais

Façamos agora o desenvolvimento, para encontrarmos a equação para a pressão perturbada e as componentes ξ_r , ξ_θ e ξ_z do vetor deslocamento. Dividindo ambos os lados da equação (60) por a^2 e definindo

$$A \equiv \frac{1}{a^2} \left[(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m - nq)^2 \right] \quad (61)$$

e

$$B \equiv - \frac{2i}{a^2} (m - nq), \quad (62)$$

obtemos,

$$A \vec{\xi} + B (\hat{e}_z \times \vec{\xi}) = - \vec{\nabla} \hat{P}_1. \quad (63)$$

Calculando o divergente e o rotacional da equação acima, temos, respectivamente

$$B (\vec{\nabla} \times \vec{\xi}) \cdot \hat{e}_z = \nabla^2 \hat{P}_1 \quad (64)$$

e

$$A \vec{\nabla} \times \vec{\xi} + B \vec{\nabla} \times (\hat{e}_z \times \vec{\xi}) = - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \hat{P}_1 = 0 \quad (65)$$

Usando a equação (65) e a equação (46) por analogia, obtemos,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\xi} = i k \frac{B}{A} \vec{\xi}. \quad (66)$$

Substituindo a equação (66) em (64), podemos escrever,

$$\nabla^2 \hat{P}_1 = i k \frac{B^2}{A} (\vec{\xi} \cdot \hat{e}_z) \quad (67)$$

Fazendo a multiplicação escalar $(\cdot \hat{e}_z)$ em ambos os lados da equação (63), obtemos,

$$A (\vec{\xi} \cdot \hat{e}_z) = - \hat{e}_z \cdot \nabla \hat{P}_1 \quad (68)$$

O operador ∇ aplicado a uma grandeza física perturbada é simplesmente,

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{m}{r} \hat{e}_\phi + i k \hat{e}_z \quad (69)$$

e calculando $\nabla \hat{P}_1$ obtemos finalmente a equação para $\hat{P}_1$,

$$\nabla^2 \hat{P}_1 = \frac{B^2}{A^2} k^2 \hat{P}_1 \quad (70)$$

Definindo

$$\sigma^2 = - \frac{B^2}{A^2} = \left[\frac{2(m - nq)}{(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m - nq)^2} \right]^2 \quad (71)$$

a equação para $\hat{P}_1$ pode ser escrita como,

$$\nabla^2 \hat{P}_1 + \sigma^2 k^2 \hat{P}_1 = 0$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial^2 \hat{P}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial r} + \left[(\sigma^2 - 1) k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] \hat{P}_1 = 0 \quad (72)$$

Cuja solução desta equação é dada pela função de Bessel de ordem m ,

$$\hat{P}_1 = \alpha J_m \left[k (\sigma^2 - 1)^{1/2} r \right], \quad (73)$$

onde α é uma constante que depende das condições de contorno.

Desenvolvendo as componentes do vetor deslocamento da equação (60) em coordenadas cilíndricas, temos,

$$\left[(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m-nq)^2 \right] \xi_r = -a^2 \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial r} - 2i(m-nq) \xi_\phi, \quad (74)$$

$$\left[(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m-nq)^2 \right] \xi_\phi = -ia^2 \frac{m}{r} \hat{P}_1 + 2i(m-nq) \xi_r \quad (75)$$

$$\left[(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m-nq)^2 \right] \xi_z = -ia^2 k \hat{P}_1. \quad (76)$$

Resolvendo o sistema de equações acima, nós obtemos finalmente as componentes do vetor deslocamento

$$\xi_r = \frac{a^2}{\Lambda} \left[\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial r} + \frac{m}{r} \sigma \hat{P}_1 \right], \quad (77)$$

$$\xi_\phi = \frac{ia^2}{\Lambda} \left[\frac{m}{r} \hat{P}_1 + \sigma \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial r} \right] \quad (78)$$

$$\xi_z = \frac{ia^2 k}{\Lambda} (1 - \sigma^2) \hat{P}_1 \quad (79)$$

onde definimos

$$\Lambda \equiv \left[(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m-nq)^2 \right] (\sigma^2 - 1) \quad (80)$$

3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

3.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA SISTEMAS DE VISCOSIDADE NULA E NÃO NULA

Neste ponto é interessante efetuar uma análise mais detalhada das condições de contorno para os vários sistemas. Todos estes sistemas requerem como condição de contorno

$$\xi_r(r = a) = \text{zero}, \quad (81)$$

devido as paredes serem consideradas perfeitamente rígidas. Entretanto, os sistemas que tem a viscosidade como um efeito importante, além de satisfazer a condição de contorno acima, deverão satisfazer também a condição

$$\xi_\theta(r = a) \simeq \text{zero}. \quad (82)$$

Substituindo, então, as condições de contorno dadas acima nas equações (77) e (78) respectivamente, obtemos,

$$\left. \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial r} \right|_{r=a} + \frac{m}{r} \sigma \left. \hat{P}_1 \right|_{r=a} = 0 \quad (83)$$

$$e \quad \frac{m}{r} \hat{P}_1 \Big|_{r=a} + \sigma \frac{\partial \hat{P}_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (84)$$

A condição de contorno dada pela equação (83) é geral; no caso de sistemas com viscosidades podemos satisfazer simultaneamente as equações (83) e (84) somente impondo $|\sigma| = 1$. No entanto, a condição de contorno $\xi_0(r=a) = 0$ é muito restritiva; em casos reais com viscosidade, existirá uma camada limite entre o plasma e a parede. Neste caso nossa análise só é válida até a borda da camada em que ξ_0 é pequeno, mas não necessariamente nulo. Por isso vamos considerar que a condição de contorno só precisa ser aproximadamente satisfeita impondo $\sigma \simeq 1$. Retornando à condição de contorno geral e substituindo a equação (73) em (83), temos,

$$k(\sigma^2 - 1)^{1/2} a J'_m \left[k(\sigma^2 - 1)^{1/2} a \right] + m \sigma J_m \left[k(\sigma^2 - 1)^{1/2} a \right] = 0. \quad (85)$$

Usando as relações de recorrência da função de Bessel

$$x J'_m(x) = x J_{m-1}(x) - m J_m(x) \quad (86)$$

$$e \quad \frac{x}{2} \left[J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) \right] = m J_m(x) \quad (87)$$

com $x = k(\sigma^2 - 1)^{1/2} a$, obtemos,

$$J_{m-1} \left[k(\sigma^2 - 1)^{1/2} a \right] = \frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)} J_{m+1} \left[k(\sigma^2 - 1)^{1/2} a \right], \quad (88)$$

que fornece os auto valores σ para os vários sistemas. Passemos a analisar mais detalhadamente esta equação.

3.2 - AUTO VALORES σ

3.2.1 - SISTEMAS DE VISCOSIDADE NÃO NULA

Nos sistemas onde a viscosidade é um efeito importante, o limite $\sigma \gg 1$, deve ser admitido, então

$$J_{m-1} \left[k(\sigma^2 - 1)^{1/2} a \right] = 0, \quad (89)$$

cujos auto valores σ são dados aproximadamente por

$$\sigma = \left\{ 1 + \left[\frac{x_o}{k a} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (90)$$

entretanto como o limite deve ser satisfeito, temos que impor

$$|k| a \gg x_o$$

e como x_o é da ordem da unidade podemos escrever

$$|k| a \gg 1.$$

Lembrando que

$$nq = -kr \frac{B_z}{B_o}$$

e fazendo nq e kr da ordem da unidade e de ka , respectivamente, vemos que a configuração do campo magnético deve satisfazer $B_\theta/B_z \gg 1$. Isto mostra para quais sistemas, onde a viscosidade é um efeito importante, este modelo pode ser aplicado. Uma análise mais detalhada deste caso será feita na seção 3.3.

3.2.2 - SISTEMAS DE VISCOSIDADE NULA

Passemos a analisar os sistemas em que a viscosidade é nula. Necessitamos ainda encontrar os auto valores σ , entretanto, neste caso, vemos que a equação (88) não pode ser resolvida analiticamente. Vamos definir uma função $f_m(x)$ dada por

$$f_m(x) = \frac{\left\{ 1 - \left[1 + \frac{x^2}{k^2 a^2} \right]^{1/2} \right\}}{\left\{ 1 + \left[1 + \frac{x^2}{k^2 a^2} \right]^{1/2} \right\}} J_{m+1}(x) - J_{m-1}(x) \quad (91)$$

Portanto quando $f_m(x)$ for igual a zero, encontraremos os valores de x que produzirão os auto valores σ .

A solução da equação (91), para alguns valores de m , admitindo $|k|a = 1,884$, é mostrada na figura 4 e na tabela 2 seguir.

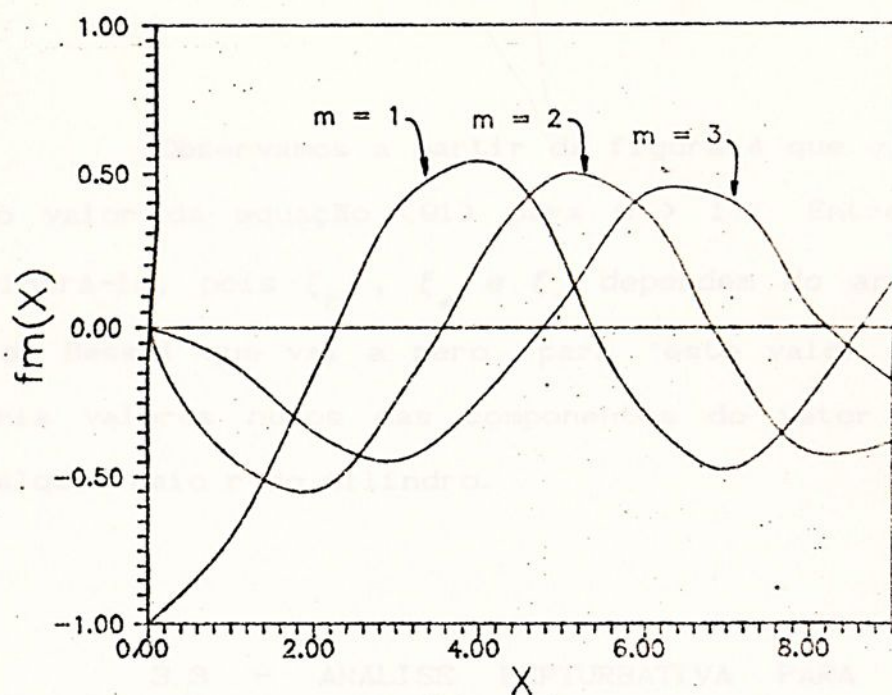


FIGURA 4 - Solução da equação (91)

m	X	σ
1	2,25	1,558
	5,95	9,011
	8,60	4,679
2	9,55	2,199
	6,80	3,745
	9,90	5,949
3	4,75	2,712
	8,20	4,466
	10,50	5,662

TABELA 2 - Auto valores σ para $\mu \neq 0$ com $|k|a = 1,884$

Observamos a partir da figura 4 que $\sigma = 1$ também é um auto valor da equação (91) para $m > 1$. Entretanto iremos desconsiderá-lo, pois ξ_r , ξ_θ e ξ_z dependem do argumento x da função de Bessel que vai a zero para este valor de σ , e isto forneceria valores nulos das componentes do vetor deslocamento para qualquer raio r do cilindro.

3.3 - ANÁLISE PERTURBATIVA PARA SISTEMAS DE VISCOSIDADE NÃO NULA

A função de Bessel e sua primeira derivada são escritas por:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{m+2n}}{2^{m+2n} n! \Gamma(m+n+1)} \quad (92)$$

e

$$J'_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (m+2n) x^{m+2n-1}}{2^{m+2n} n! \Gamma(m+n+1)} \quad (93)$$

onde $\Gamma(m+n+1)$ é função gama de $m+n+1$. Usando as equações (73), (77), (78) e mantendo somente os dois primeiros termos, podemos escrever,

$$\zeta_r = \frac{\alpha a^2 k^m}{\Lambda^* 2^m (m-1)!} (\sigma+1)^{m/2} (\sigma-1)^{(m-2)/2} r^{m-1} \quad (94)$$

$$e \quad \zeta_\phi = \frac{i \alpha a^2 k^m}{\Lambda^* 2^m (m-1)!} (\sigma+1)^{m/2} (\sigma-1)^{(m-2)/2} r^{m-1}, \quad (95)$$

onde,

$$\Lambda^* \equiv \frac{\Lambda}{(\sigma^2-1)} = (\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m-nq)^2, \quad (96)$$

a partir da definição (80). Como consequência destes resultados e a necessidade que $\sigma \simeq 1$ para sistemas com viscosidade não nula, temos que impôr que os modos poloidais sejam limitados por $m \geq 2$, para que as grandezas físicas não divirjam.

Façamos agora uma análise considerando outros termos do somatório. Então,

$$\zeta_r = \frac{\alpha a^2}{\Lambda^*} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{m+2n}}{2^{m+2n} n! \Gamma(m+n+1)} \left[m(\sigma+1) + 2n \right] \times \right. \\ \left. \times (\sigma^2-1)^{(m+2n-2)/2} r^{m+2n-1} \right\} \quad (97)$$

$$e \quad \zeta_\phi = \frac{i \alpha a^2}{\Lambda^*} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{m+2n}}{2^{m+2n} n! \Gamma(m+n+1)} \left[m(\sigma+1) + 2n \right] \times \right. \\ \left. \times (\sigma^2-1)^{(m+2n-2)/2} r^{m+2n-1} \right\}. \quad (98)$$

Usando as condições de contorno (81) e (82), podemos admitir que $\sigma = 1 + \delta$, onde $|\delta| \ll 1$, o que fornece:

$$\begin{aligned} & \frac{k^m}{2^m \Gamma(m+1)} \left[m(\sigma+1) \right] (\sigma^2-1)^{(m-2)/2} a^{m-1} - \frac{k^{m+2}}{2^{m+2} \Gamma(m+2)} \left[m(\sigma+1)+2\sigma \right] \times \\ & \quad \times (\sigma^2-1)^{m/2} a^{m+1} + \frac{k^{m+4}}{2^{m+4} \Gamma(m+3)} \left[m(\sigma+1)+4\sigma \right] \times \\ & \quad \times (\sigma^2-1)^{(m+2)/2} a^{m+3} + \dots + = 0 \quad (99) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por

$$\frac{2^m \Gamma(m+1)}{(\sigma^2-1)^{(m-2)/2} k^m a^{m-1}}$$

e isolando somente o termo linear de δ , obtemos,

$$\sigma \simeq 1 + \frac{2}{(k^2 a^2 / m - 1)} \quad (100)$$

onde $m \ll k^2 a^2$.

A auto função correspondente ao auto valor neste caso pode ser obtida usando as equações (97) e (100). Obtemos aproximadamente

$$\xi_r \simeq C \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\} \left(\frac{r}{a} \right)^{m-1} \quad (101)$$

onde C foi definido como

$$C \equiv \frac{\alpha k^{m+2} a^{m+3} m^2 (\sigma^2 - 1)^{(m-2)/2}}{2^{m-1} (k^2 a^2 - m) \lambda^* \Gamma(m+1)} \quad (102)$$

O diagrama a seguir mostra o comportamento da componente radial do vetor deslocamento no interior do cilindro para vários modos m .

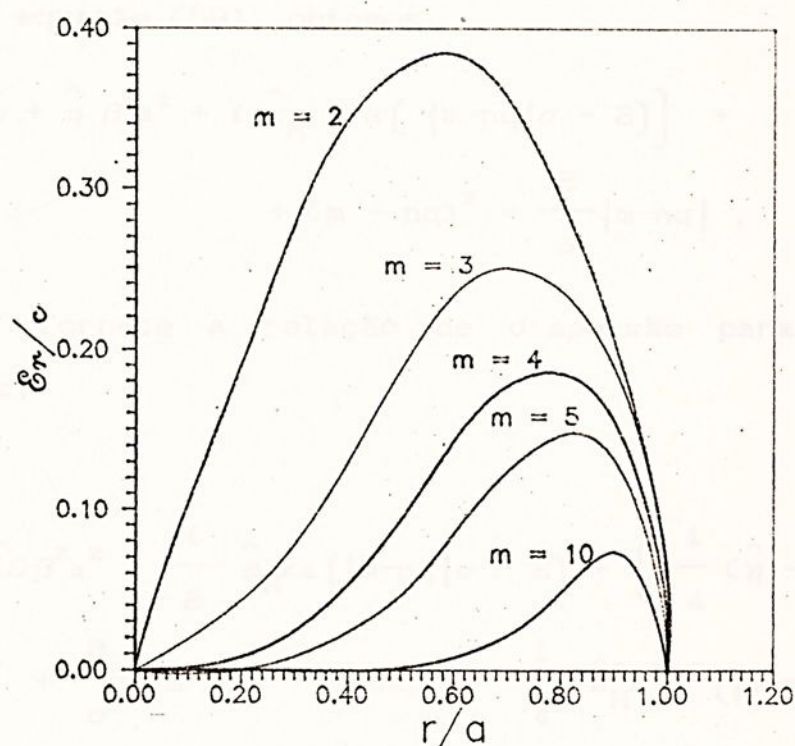


FIGURA 5 - Comportamento de ξ_r para $r \leq a$

4 - RELAÇÃO DE DISPERSÃO E ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO EFEITO HALL

4.1 - RELAÇÃO DE DISPERSÃO

Voltando à equação (71) e admitindo os valores de $\sigma > 0$, temos,

$$\sigma = \frac{2 |m - nq|}{(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \hat{\Omega} + (m - nq)^2} \quad (103)$$

Usando ainda a equação (59), obtemos,

$$(\hat{\omega} + \hat{\mu} \beta^2 a^2) \left[\hat{\omega} + \hat{\eta} \beta^2 a^2 + i \hat{\varepsilon}_H k a (|m - nq| \sigma - 2) \right] + (m - nq)^2 = \frac{2}{\sigma} |m - nq| \quad (104)$$

cujas soluções fornecem a relação de dispersão para os modos incompressíveis,

$$\begin{aligned} \hat{\omega} = & -\frac{1}{2} (\hat{\eta} + \hat{\mu}) \beta^2 a^2 - \frac{i}{2} \hat{\varepsilon}_H k a (|m - nq| \sigma - 2) + \left\{ \frac{1}{4} (\hat{\eta} - \hat{\mu})^2 \beta^4 a^4 + \right. \\ & + \frac{2}{\sigma} |m - nq| - (m - nq)^2 - \frac{1}{4} \hat{\varepsilon}_H^2 k^2 a^2 (|m - nq| \sigma - 2)^2 + \\ & \left. + \frac{i}{2} \hat{\varepsilon}_H (\hat{\eta} - \hat{\mu}) \beta^2 k a^3 (|m - nq| \sigma - 2) \right\}^{1/2} \quad (105) \end{aligned}$$

A solução negativa da raiz quadrada foi desprezada, pois estamos interessados nos processos de instabilidade marginal. É interessante perceber que a razão de crescimento $\hat{\omega}$ tornou-se explicitamente complexa devido a inclusão do efeito Hall. Como consequência da introdução do efeito Hall e portanto a generalização do modelo, podemos ver que a equação acima nos fornece uma relação de dispersão um pouco complicada. Entretanto, ela resgata todos os resultados obtidos por GOMBEROFF anteriormente quando fazemos o limite $\varepsilon_H \rightarrow$ zero. Como as soluções destes casos já foram efetuadas,⁽⁹⁻¹⁶⁾ apresentaremos a seguir as soluções dos outros casos.

4.2 - CONVECÇÃO DEVIDO AO EFEITO HALL

A partir da relação de dispersão (105), desprezando os efeitos da viscosidade e resistividade, podemos escrever,

$$\hat{\omega} = -\frac{i}{2} \hat{\varepsilon}_H k a (|m-nq|\sigma - 2) + \left[\frac{2}{\sigma} |m-nq| - (m-nq)^2 - \frac{1}{4} \hat{\varepsilon}_H^2 k^2 a^2 (|m-nq|\sigma - 2)^2 \right]^{1/2}. \quad (106)$$

00206

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA

Analisando esta equação em detalhe, verificamos que os modos que torna tanto a parte real quanto a parte imaginária da razão de crescimento $\hat{\omega}$ nula são dados por

$$(m - nq) = \pm 2/\sigma \quad (107)$$

Obviamente, como exposto no capítulo introdutório, estes modos produzem células de convecção ou movimento convectivo. Façamos agora uma análise de $\hat{\omega}$ versus $|m-nq|$, para um sistema constituído das seguintes grandezas físicas: $L = 1$ m, $a = 0,3$ m, que corresponde a $ka = 1.884$, $q = 5$, $N = 10^{-19} \text{ m}^{-3}$ e, $T = 350$ eV. Estes valores correspondem aproximadamente às condições verificadas num tokamak de pequeno porte. Considerando ainda o modo fundamental $m = 1$ e $\sigma = 1,558$, da tabela 2, obtemos das equações

$$\rho_o = N m_i, \quad \epsilon_H = \frac{m_i}{q_i}$$

e

$$\hat{\epsilon}_H = \left[\frac{1}{\mu_o a^2} \right]^{1/2} \epsilon_H$$

$$\rho_o = 1,673 \times 10^{-8} \text{ Kg/m}^3, \quad |k| = 6,28 \text{ m}^{-1} \text{ e } \hat{\epsilon}_H = 0,2404.$$

Substituindo estas grandezas na equação (106) obtemos o diagrama da taxa de crescimento complexa de instabilidades versus $|m-nq|$ dado a seguir.

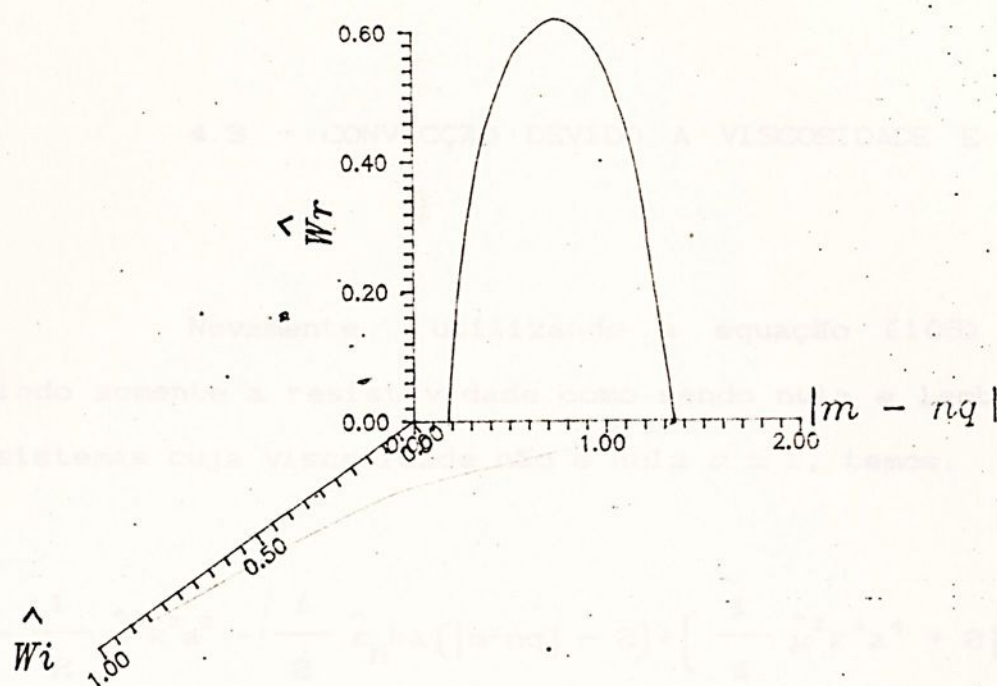


FIGURA 6 - $\hat{\omega}$ versus $|m-nq|$ para $\hat{\varepsilon}_H = 0,2404$

Vemos na figura 6 que $\hat{\omega}_r$ se anula nos pontos $|m-nq| = 0,142$ e $|m-nq| = 1,284$. Entretanto $\hat{\omega}_i$ se anula em $|m-nq| = 1,284$. Sendo assim, concluímos que os modos $|m-nq| = 1,284$ produzem células de convecção, ou seja, o efeito Hall é capaz de produzir modos convectivos isoladamente.

4.3 - CONVECÇÃO DEVIDO A VISCOSIDADE E O EFEITO

HALL

Novamente utilizando a equação (105), agora admitindo somente a resistividade como sendo nula e lembrando que para sistemas cuja viscosidade não é nula $\sigma \approx 1$, temos,

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{2} \hat{\mu} k^2 a^2 - \frac{i}{2} \hat{\epsilon}_H k a (|m-nq| - 2) + \left[\frac{1}{4} \hat{\mu}^2 k^4 a^4 + 2|m-nq| - (m-nq)^2 - \frac{1}{4} \hat{\epsilon}_H^2 k^2 a^2 (|m-nq| - 2)^2 - \frac{i}{2} \hat{\epsilon}_H \hat{\mu} k^3 a^3 (|m-nq| - 2) \right]^{1/2}, \quad (108)$$

que produzem modos convectivos somente quando

$$|m - nq| = 2 \quad (109)$$

No estudo efetuado por GOMBEROFF que corresponde a $\epsilon_H = 0$, ficou demonstrado que os modos $(m - nq) = \text{zero}$ produzem células de convecção quando somente a viscosidade é incluída. No entanto, vemos que a introdução do efeito Hall inibe completamente estes modos. Admitindo um sistema com os seguintes parâmetros físicos: $k = 6,28 \text{ m}^{-1}$, $a = 0,3 \text{ m}$, $\hat{\epsilon}_H = 0.25$ e $\hat{\mu} = 0.20$, podemos obter o diagrama a seguir.

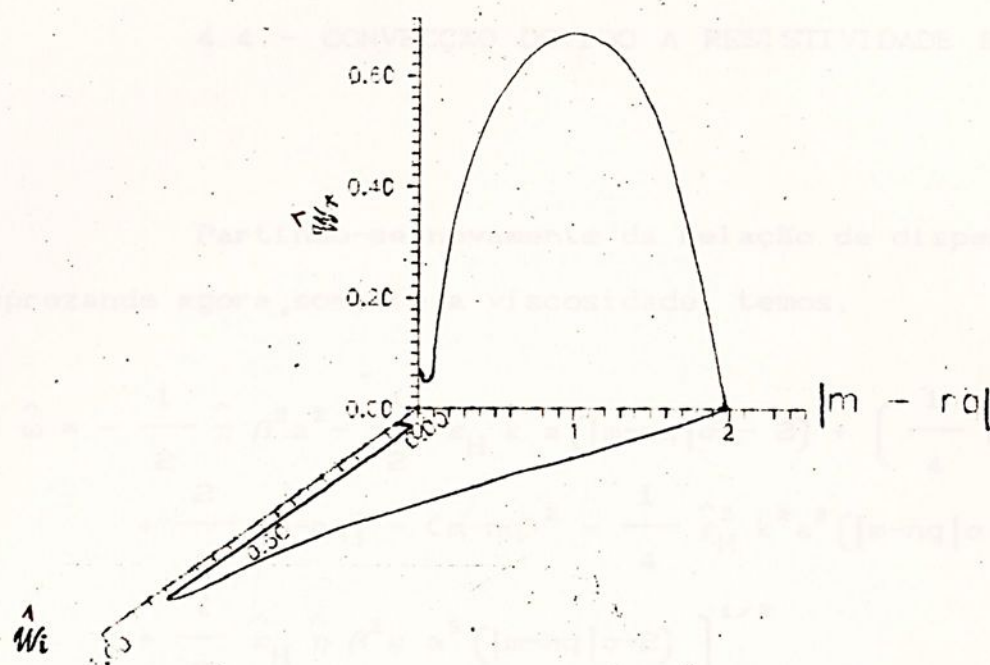


FIGURA 7 - $\hat{\omega}$ versus $|m-nq|$ para $\hat{\epsilon}_H=0,25$ e $\hat{\mu}=0,20$

Na figura 7, vemos que tanto $\hat{\omega}_r$ quanto $\hat{\omega}_i$ se anulam nos modos $|m-nq| = 2,0$ e além do mais estes modos são capazes de anula-los simultaneamente, portanto fornecendo movimento convectivo. Vemos ainda na figura que existe a proximidade entre os pontos do lado esquerdo da curva, levando-nos a pensar que exista uma relação entre os coeficientes da viscosidade e do efeito Hall capaz de anular simultaneamente os valores de $\hat{\omega}_r$ e $\hat{\omega}_i$, produzindo outros modos convectivos particulares.

4.4 - CONVECÇÃO DEVIDO A RESISTIVIDADE E O EFEITO

HALL

Partindo-se novamente da relação de dispersão (105) e desprezando agora, somente a viscosidade, temos,

$$\begin{aligned} \hat{\omega} = & -\frac{1}{2} \hat{\eta} \beta^2 a^2 - \frac{i}{2} \hat{\varepsilon}_H k a (|m-nq|\sigma - 2) + \left[\frac{1}{4} \hat{\eta}^2 \beta^4 a^4 + \right. \\ & + \frac{2}{\sigma} |m-nq| - (m-nq)^2 - \frac{1}{4} \hat{\varepsilon}_H^2 k^2 a^2 (|m-nq|\sigma - 2)^2 + \\ & \left. + \frac{i}{2} \hat{\varepsilon}_H \hat{\eta} \beta^2 k a^3 (|m-nq|\sigma - 2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (110)$$

os modos que fornecem movimento convectivo são analogos aos da seção 4.3, isto é

$$(m - nq) = \pm 2/\sigma, \quad (111)$$

sendo que os modos $(m-nq) = \text{zero}$ são também inibidos pelo efeito Hall de forma semelhante ao caso anterior.

Uma análise numérica, dos efeitos conjuntos Hall e resistivo pode ser efetuada admitindo as seguintes grandezas físicas, por exemplo, $k = 6,28 \text{ m}^{-1}$, $a = 0,3 \text{ m}$, $\sigma = 1,558$, $\hat{\varepsilon}_H = 0,24$ e $\hat{\eta} = 0,12$. O diagrama a seguir mostra a dependência de $\hat{\omega}_r$ e $\hat{\omega}_i$ com os modos $(m-nq)$ para sistemas constituídos dos efeito Hall e da resistividade, para as grandezas físicas dadas acima.

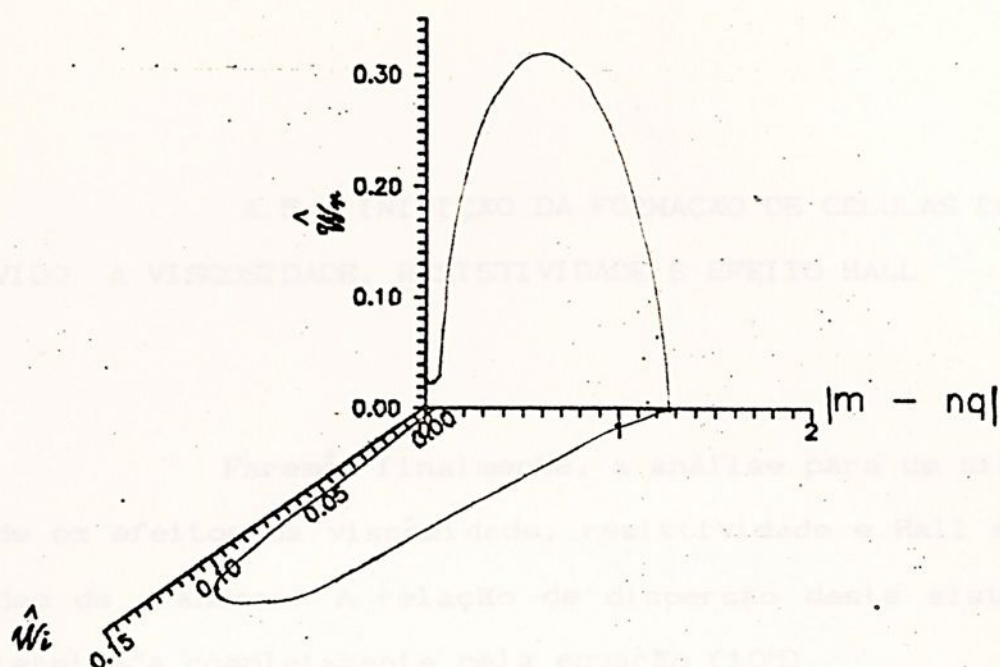


FIGURA 8 - $\hat{\omega}$ versus $|m-nq|$ para $\hat{\varepsilon}_H=0,25$ e $\hat{\eta}=0,10$.

De forma semelhante à figura anterior. ($\hat{\varepsilon}_H$ e $\hat{\mu}$), vemos na figura acima que os modos $|m-nq| = 1,284$ anulam $\hat{\omega}_r$ e $\hat{\omega}_i$, simultaneamente, ou seja, produz células de convecção. Novamente existe a proximidade dos outros modos que podem anular $\hat{\omega}_r$ e $\hat{\omega}_i$, entretanto estes outros modos devem depender de uma relação entre a resistividade e o efeito Hall, fornecendo modos particulares de movimento convectivo.

Finalmente, podemos concluir, analisando as equações (108) e (110) e as figuras 7 e 8, vemos que a viscosidade e a resistividade produzem influências semelhantes sobre os fenômenos de convecção.

4.5 - INIBIÇÃO DA FORMAÇÃO DE CÉLULAS DE CONVECÇÃO DEVIDO A VISCOSIDADE, RESISTIVIDADE E EFEITO HALL

Faremos finalmente, a análise para um sistema onde os efeitos da viscosidade, resistividade e Hall são da mesma ordem de grandeza. A relação de dispersão deste sistema é então determinada completamente pela equação (105).

Foi demonstrado anteriormente por GOMBEROFF que os efeitos da viscosidade e resistividade, quando analisados simultaneamente, eram capazes de produzir quatro modos convectivos, dados por

$$|m - nq| = 1 \pm (1 - \lambda^2)^{1/2}, \quad (112)$$

onde, $\lambda^2 = \hat{\mu} \hat{\eta} k^4 a^4$.

No entanto, podemos concluir a partir da nova relação de dispersão que a inclusão do efeito Hall inibe, sem excessão, todos os modos impedindo a formação de células de convecção. Estas conclusões podem ser confirmadas pelo diagrama a seguir, admitindo-se as seguintes grandezas físicas: $k = 6,28 \text{ m}^{-1}$, $a = 0,3 \text{ m}$, $\sigma = 1,558$, $\hat{\epsilon}_H = 0,25$, $\hat{\mu} = 0,15$ e $\hat{\eta} = 0,25$, por exemplo.

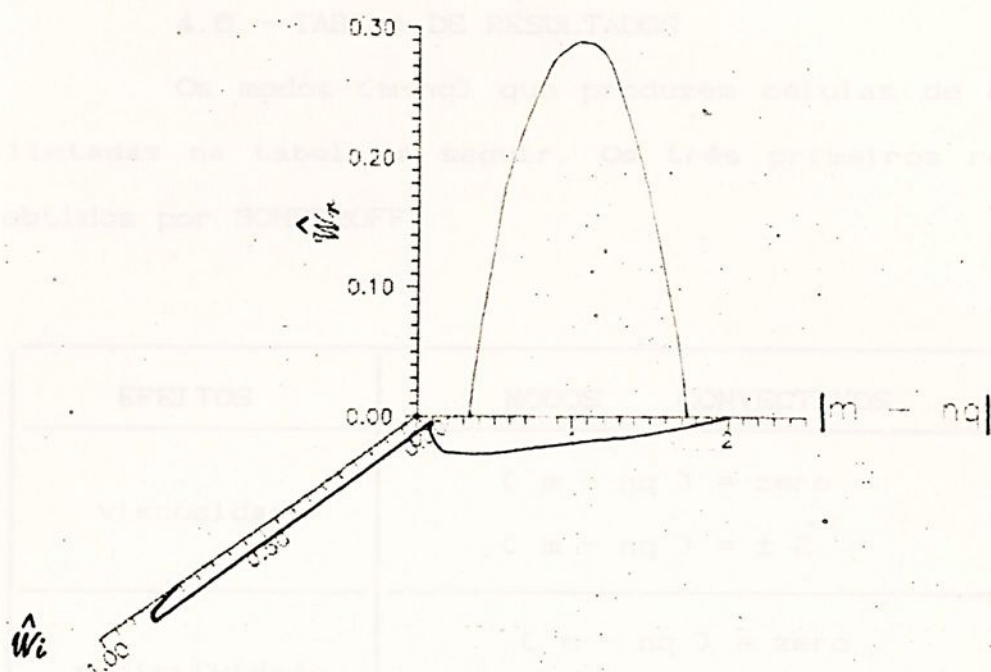


FIGURA 9 - $\hat{w}$ versus $|m-nq|$ para $\hat{\epsilon}_H=0,25$, $\hat{\mu}=0,15$ e $\hat{\eta}=0,25$.

Na figura acima vemos que existem dois modos que anulam $\hat{w}_r$ (0,35 e 1,70) e outro que anula $\hat{w}_i$ (2,0), no entanto não existem modos que os anulem simultaneamente e portanto concluímos que se o efeito Hall for incluído sobre os sistemas com viscosidade e resistividade, ele é capaz de inibir completamente a formação de células de convecção.

4.6 - TABELA DE RESULTADOS

Os modos $(m-nq)$ que produzem células de convecção estão listadas na tabela a seguir. Os três primeiros resultados foram obtidos por GOMBEROFF.

EFEITOS	MODOS CONVECTIVOS
viscosidade	$(m - nq) = \text{zero}$ $(m - nq) = \pm 2$
resistividade	$(m - nq) = \text{zero}$ $(m - nq) = \pm 2/\sigma$
viscosidade resistividade	$(m - nq) = \pm (1 \pm (1 - \lambda^2))^{1/2}$ onde $\lambda^2 \equiv \hat{\mu} \hat{\eta} k^4 a^4$
Hall	$(m - nq) = \pm 2/\sigma$
viscosidade Hall	$(m - nq) = \pm 2$
resistividade Hall	$(m - nq) = \pm 2/\sigma$
viscosidade resistividade Hall	Não há formação de modos convectivos

TABELA 3 - Modos $(m-nq)$ que produzem células de convecção.

5- CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 - CONCLUSÕES

O primeiro resultado que podemos concluir a partir deste trabalho é que a análise das condições de formação de células de convecção em colunas cilíndricas de plasma magnetizado pode ser feito de uma forma mais simples e compacta que a apresentada anteriormente na literatura.

Devido a inclusão do efeito Hall, em vários diferentes sistemas, pudemos verificar que a relação de dispersão do plasma tornou-se explicitamente complexa.

No capítulo 3, destinado a análise das condições de contorno, foi admitido que todos os sistemas tinham como condição principal $\xi_r = \text{zero}$ para $r = a$, porém nos sistemas em que a viscosidade era um efeito importante, tivemos que impôr ainda que $\xi_\theta = \text{zero}$ para $r = a$. Toda esta análise foi efetuada dando um caráter de conjunto aos vários sistemas estudados e dando portanto uma configuração de unidade a todo o trabalho. Pudemos ainda na análise das condições de contorno, inferir resultados importantes como o dos modos $m \geq 2$ e o comportamento do componente radial do vetor deslocamento em função do raio r do cilindro.

Na análise do capítulo 4, tivemos a oportunidade de concluir vários resultados. Primeiramente vimos que nos sistemas

onde o efeito Hall domina completamente, células de convecção podem ser produzidas independentemente da viscosidade e da resistividade, sendo que os modos que fornecem o movimento convectivo são dados por $|m - nq| = 2/\sigma$. O efeito Hall quando analisado somente com a viscosidade ou a resistividade, separadamente, inibe os modos $|m - nq| = \text{zero}$; entretanto os modos $|m - nq| = 2/\sigma$ ainda fornecem o movimento convectivo. GOMBEROFF demonstrou a existência de células de convecção, quando a viscosidade e a resistividade eram incluídas simultaneamente. No entanto, pudemos ver que com a inclusão do efeito Hall, todos os modos convectivos foram destruídos. Ainda na análise dos modos convectivos, efetuamos a elaboração de diagramas tridimensionais, relacionando ω_r , ω_i e $|m - nq|$, que nos forneceram uma visão global dos fenômenos devido aos efeitos não ideais.

5.2 - SUGESTÕES

É importante, de imediato enfatizar que há a possibilidade de formação de outros modos convectivos devido ao cancelamento dos vários efeitos. Esta análise pode ser efetuada resolvendo-se as equações da parte real e imaginária da relação de dispersão do plasma quando esta vai a zero, usando um diagrama tridimensional relacionando $\hat{\epsilon}_H$ e $|m - nq|$ com $\hat{\mu}$ ou $\hat{\eta}$, que

deveram gerar duas superfícies que se cruzam produzindo uma curva que fornecerá alguns novos modos convectivos particulares.

Como já foi várias vezes mencionado anteriormente, nós usamos aqui um modelo considerando o plasma como um fluido incompressível ; então é interessante sugerir que se efetue um novo modelo considerando o plasma como um fluido compressível, sendo que o referido modelo deverá incluir o termo devido ao gradiente de pressão na lei de OHM, além de suprimir as relações $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \beta \vec{V}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \beta \vec{B}$.

Aqui foi admitido ainda que o plasma toca as paredes do cilindro, no entanto, isto não ocorre na realidade. O que ocorre é que o plasma está confinado magneticamente, sendo que uma camada de gás separa o plasma das paredes do cilindro; com isso as condições de contorno devem novamente ser reavaliadas.

Finalmente, talvez fosse interessante fazer uma análise mais próxima da situação experimental, usando um plasma com gradiente de densidade e temperatura .

6 - APENDICE

6.1 - LEI DE OHM E EQUAÇÕES BÁSICAS

A lei de OHM generalizada, dada por SPITZER⁽²⁹⁾, pode ser escrita como ,

$$\frac{m_e}{n q^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \eta \vec{J} + \frac{1}{\rho q_i} \left[m_i \vec{\nabla} P_e - Z m_e \vec{\nabla} P_i - (m_i - Z m_e) \vec{J} \times \vec{B} \right], \quad (113)$$

levando em conta que $m_e \ll m_i$ e definindo $\epsilon_H \equiv m_i/q_i$, temos,

$$\frac{m_e}{n q^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \eta \vec{J} - \frac{\epsilon_H}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{\epsilon_H}{\rho} \vec{\nabla} P_e. \quad (114)$$

Na dinâmica do plasma o campo elétrico aparece através de seu rotacional; então ao calcularmos $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ da equação acima, o ultimo termo será escrito como,

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{\epsilon_H}{\rho} \vec{\nabla} P_e \right] = \epsilon_H \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P_e \right] = 0, \quad (115)$$

pois admitimos o plasma com densidade constante. Este resultado mostra que o ultimo termo da lei de OHM descrita pela equação (114) não é relevante para um plasma com $\rho = \text{constante}$, sendo assim desconsideraremos este termo.

Os termos $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$ e $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ que aparecem na lei de OHM e AMPERE, respectivamente, estão associados a correntes de deslocamento, que para velocidades de fase muito menores que a velocidade da luz, são desprezíveis.⁽²⁴⁾ Então as equações básicas que descrevem a dinâmica do plasma são:

Equação da quantidade de movimento,

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla P - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{V})$$

Equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Equação de transporte de energia,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla P - \frac{2}{3} k \nabla^2 P - S_0 = -\gamma P \nabla \cdot \vec{V} + \frac{2}{3} \eta |\vec{J}|^2$$

Lei de OHM generalizada,

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J} + \frac{\epsilon_H}{\rho} \vec{J} \times \vec{B}$$

Lei de FARADAY,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \nabla \times \vec{E}$$

Lei de AMPERE,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

e

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0.$$

6.2 CAMPO MAGNÉTICO DO EQUILÍBRIO⁽²⁵⁾

Suponhamos que as grandezas do equilíbrio não possuam gradientes longitudinais e azimutais, então da equação $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, temos,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_r) = 0, \quad (116)$$

portanto,

$$B_r = \frac{c}{r}, \quad (117)$$

porém o valor da constante c deve ser zero para que o campo magnético não seja singular em $r = 0$. Podemos dizer o mesmo para a densidade de corrente, após o uso da lei de AMPERE e da equação $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$. Usando a relação

$$\vec{\nabla} P_0 = \vec{J}_0 \times \vec{B}_0, \quad (118)$$

obtemos,

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} = J_{\theta} B_z - J_z B_{\theta}, \quad (119)$$

No entanto, as componentes do vetor densidade de corrente, podem ser escritas em termos das componentes do campo magnético através da lei de AMPERE.

$$J_{\theta} = - \frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} \quad (120)$$

e

$$J_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_{\theta}), \quad (121)$$

entretanto admitindo que o vetor densidade de corrente seja constante e dirigido ao longo do eixo longitudinal, vemos através da equação (120), que a componente B_z do campo magnético deve ser constante, então,

$$B_z = B_o = \text{const.} \quad (122)$$

A componente azimutal do campo magnético pode ser determinada se integramos a segunda equação de (121) com $J_z = \text{constante}$, portanto,

$$B_\phi = \frac{\mu_o J_z}{2} r \quad (123)$$

e definindo

$$\frac{B_\ell}{a} \equiv \frac{\mu_o J_z}{2} \quad (124)$$

obtemos,

$$B_\phi = B_\ell \frac{r}{a} \quad (125)$$

que fornece a configuração do campo magnético do equilíbrio,

$$\vec{B}_o = B_\ell \frac{r}{a} \hat{e}_\phi + B_o \hat{e}_z \quad (126)$$

6.3 - PRESSÃO DO EQUILÍBRIO

No equilíbrio a equação da quantidade de movimento e a lei de AMPERE são escritas como,

$$\vec{J}_0 \times \vec{B}_0 = \vec{\nabla} P_0 \quad (127)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J} \quad (128)$$

Usando a equação (126) e a relação vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ em coordenadas cilíndricas obtemos,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = 2 \frac{B_l}{a} \hat{e}_z, \quad (129)$$

que fornece,

$$\vec{\nabla} P_0 = - 2 \frac{B_l^2}{\mu_0 a^2} r \hat{e}_r \quad (130)$$

Se admitirmos que o plasma está submetido a uma pressão p_0 no centro do cilindro ($r = 0$) e integramos a equação acima, obteremos,

$$P_0 = p_0 - \frac{B_l^2}{\mu_0} \left[\frac{r}{a} \right]^2, \quad (131)$$

que é a pressão total do equilíbrio.

6.4 - FONTE DE CALOR S_0

Para manter o perfil de pressão do equilíbrio é necessário introduzir uma fonte de calor ao sistema. A quantidade de calor gerado por esta fonte é medida pela constante S_0 que aparece na equação de transporte de energia. Unindo as equações de transporte de energia e da quantidade de movimento no equilíbrio, nós obtemos,

$$-\frac{2}{3} k \nabla^2 P_0 - S_0 = \frac{2}{3} \eta \frac{|\vec{\nabla} \times \vec{B}_0|^2}{\mu_0^2}, \quad (132)$$

então, calculando $\nabla^2 P_0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0$ a partir dos apêndices 6.2 e 6.3, obtemos finalmente a quantidade de calor necessária para manter o perfil de pressão do equilíbrio.

$$S_0 = \frac{8}{3} \left[k - \eta/\mu_0 \right] \frac{B_t^2}{\mu_0 a^2} \quad (133)$$

6.5 - TRANSFORMADA ROTACIONAL

A figura a seguir representa um cilindro de comprimento L e raio a , que confina o plasma magneticamente.

linhas de força

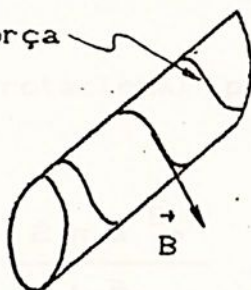


FIGURA 10 - Cilindro do confinamento do plasma

Fazendo um desenvolvimento da superfície cilíndrica de raio r , para corte imaginário longitudinal no cilindro, para um raio r qualquer, obtemos a figura a seguir,

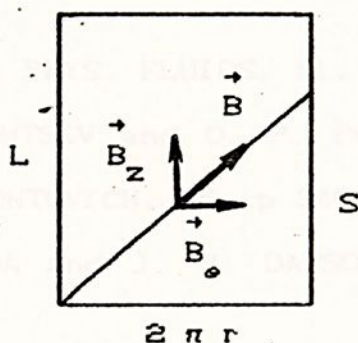


FIGURA 11 - Desenvolvimento da superfície cilíndrica.

Sendo S o comprimento longitudinal onde começa e termina uma linha de força, a figura 11 indica que

$$\frac{S}{2\pi r} = \frac{B_z}{B_\phi} \quad (134)$$

Definindo a transformada rotacional

$$q \equiv \frac{S}{L} \quad (135)$$

Obtemos a transformada rotacional para a nossa configuração de campo, como

$$q = \frac{2\pi a B_\phi}{L B_z} \quad (136)$$

7 - BIBLIOGRAFIA

- (1) A. V. TIMOFEEV, SOV. PHYS. TECH. PHYS. 8, 586 (1964).
- (2) A. SIMON, PHYS. FLUIDS. 11, 1186 (1968).
- (3) B. KADOMTSEV and O. P. POGUTSE, REVIEWS OF PLASMA PHYSICS, EDITED BY LEONTOVICH, 05, p 349 (1970).
- (4) H. OKUDA and J. M. DAWSON, PHYS. FLUIDS 16, 408 (1973).
- (5) H. ROBERTS and J. B. TAYLOR, PHYS. FLUIDS 8, 315 (1965).
- (6) H. WOBIG, PLASMA PHYS. 14, 403 (1972).
- (7) E. K. MASCHKE and R. B. PARIS, PROCEEDINGS OF THE SIXTH EUROPEAN CONFERENCE ON CONTROLLED FUSION AND PHYSICS, vol. 01, p 205 (1973).
- (8) R. Y. DAGAZIAN and R. B. PARIS, PHYS. FLUIDS 20, 917 (1977).
- (9) L. GOMBEROFF, PHYS. REV. A 28, 3125 (1983).
- (10) L. GOMBEROFF and G. PALMA, PHYS. FLUIDS 27, 2022 (1984).
- (11) L. GOMBEROFF and M. HERNANDEZ, PHYS. REV. A 27, 1224 (1983).
- (12) L. GOMBEROFF and M. HERNANDEZ, PHYS. FLUIDS 27, 392 (1984).

(13) L. GOMBEROFF, J. PLASMA PHYS. 31, 29 (1984).

(14) L. GOMBEROFF, J. PLASMA PHYS. 34, 299 (1985).

(15) L. GOMBEROFF, PHYS. FLUIDS B1, 2126 (1989).

(16) L. GOMBEROFF, CONVECTION IN PLASMAS, CONGRESS
- ARGENTINA 1990, p 187.

(17) M. S. D. CATTANI, ELEMENTOS DE MECANICA DOS
FLUIDOS, p 144 (1984).

(18) R. W. FOX e A. T. McDONALD, INTRODUÇÃO À MECANICA
DOS FLUIDOS, SEGUNDA EDIÇÃO, p 327, (1981).

(19) S. CHANDRASEKHAR, HYDRODINAMICS AND HYDROMAGNETIC
STABILITY (CLARENDON, OXFORD) (1961)

(20) S. I. BRAGINSKII, REVIEWS OF PLASMA PHYSICS, EDITED
BY LEONTOVICH, 01 ,p 205 (1965).

(21) V. D. SHAFRANOV, PLASMA PHYSICS AND PROBLEM OF
CONTROLLED THERMONUCLEAR RESEARCH (Pergamon, New York, 1958), Vol 2
p. 197.

(22) L. GOMBEROFF and E. K. MASCHKE, FIELD THEORY,
QUANTIZATION AND STATISTICAL PHYSICS, edited by E. TIRAPEQUI (D.
REIDEL, DORDRECHT, 1981), p. 123.

(23) L. SPITZER, PHYS. OF FULLY IONIZED GASES, 03,
SECOND EDITION, p 20 (1960).

(24) P. ROSENAU, J. A. TATARONIS and G. CONN, J. PLASMA
PHYSICS 21, 385 (1979).

(25) R. M. O. GALVÃO, física de plasma, editado por
ABRAHAM C. , L. CHIAN e M. F. REUSCH, UFF - RJ , Vol 1, G1 e H1
(1979).

