unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

ASSINTÓTICAS PARA POLINÔMIOS SIMILARES AOS ORTOGONAIS: CASO ILIMITADO

Fernando Akira Kurokawa

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 083

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445

Assintóticas para polinômios similares aos ortogonais: caso ilimitado

Fernando Akira Kurokawa

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Profa. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade

São José do Rio Preto
Fevereiro de 2004

Aos meus pais, Massuo e Tomoko
e aos meus irmãos, Fábio e Eduardo,
ofereço.

À minha namorada, Luciana,
dedico.

Agradecimentos

Primeiramente, devo agradecer a Deus por ter me dado a vida e oportunidade de poder conviver ao lado de pessoas maravilhosas.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e me incentivaram em tudo que decidi realizar e que enchem minha vida de muito amor, carinho e bons exemplos.

À minha namorada Luciana, querida companheira de todas as horas, a quem pude confiar todas as minhas preocupações, pelo carinho, atenção, paciência, compreensão e que foi a principal fonte de incentivo.

A todos os meus familiares por compreenderem a minha ausência constante. Em especial, à minha avó Yoshico e meus irmãos Fabio e Eduardo.

À Dona Amelia, ao Seu Geraldino e à Monisse, pelo carinho que sempre tiveram comigo.

Um agradecimento especial à Profa. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade que tornou possível a realização deste e de vários outros trabalhos, pela dedicação e paciência que sempre teve comigo desde a iniciação científica até o mestrado e, acima de tudo, pela amizade e companheirismo.

À Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pela orientação durante um ano da iniciação científica, pela disposição e paciência nos momentos em que precisei e pelo apoio constante.

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga pelo apoio, companheirismo e por ter contribuído em minha formação pessoal e acadêmica.

Ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto, pela atenção e preocupação que sempre teve comigo.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial aos funcionários do DCCE, Getúlio, Luiza, Olga e Sandra.

Aos meus amigos Massaki e Adriano que sempre me acompanharam nos momentos de alegria e dificuldades.

A todos os meus amigos de Pós-Graduação, em especial, Flávia, Cassius, Roberto, Daniel e Alessandro.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro.

“ Ensinar não é uma função vital,
porque não tem o fim em si mesma;
a função vital é aprender. ”
Aristóteles

Resumo

Dentre os polinômios que satisfazem a uma relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais, $Q_n(x)$, e os polinômios similares aos ortogonais, $B_n(z)$. Consideramos, aqui, polinômios $Q_n(x)$ e $B_n(z)$ satisfazendo relações de recorrência cujos coeficientes são ilimitados mas de variação regular e têm comportamentos diferentes para índices ímpares e pares. O principal objetivo deste trabalho é obter propriedades assintóticas relacionadas aos polinômios similares. O comportamento limite das sequências $\left\{B_n/B_{n-2}\right\}$, $\left\{B_{2n-1}/B_{2n}\right\}$, $\left\{B_{2n}/B_{2n+1}\right\}$ e $\left\{B_n'/(nB_n)\right\}$ é analisado, alguns casos especiais são discutidos e, também, aplicações dos resultados obtidos para algumas famílias dos polinômios $B_n(z)$ são dadas.

Palavras-chave: polinômios ortogonais, L-polinômios ortogonais, relação de recorrência de três termos.

Abstract

Orthogonal polynomials $Q_n(x)$ and the orthogonal L-polynomials $B_n(t)$ are polynomials that satisfy three term recurrence relation. We assume, here, that the coefficients of the recurrence relation of the polynomials $Q_n(x)$ and $B_n(z)$ are unbounded but vary regularly and have different behaviour for even and odd indices. The main purpose of this work is to obtain asymptotic properties related to the polynomials $B_n(z)$. The limiting behaviour of the sequences $\left\{B_n/B_{n-2}\right\}$, $\left\{B_{2n-1}/B_{2n}\right\}$, $\left\{B_{2n}/B_{2n+1}\right\}$ e $\left\{B'_n/(nB_n)\right\}$ was analyzed and some special cases were considered. We also applied the results to some families of polynomials $B_n(z)$.

Keywords: orthogonal polynomials, orthogonal L-polynomials, three term recurrence relation.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Entre os polinômios associados a uma relação de recorrência de três termos estão os polinômios ortogonais e os polinômios similares aos ortogonais ou, simplesmente, polinômios similares.

Primeiramente, faremos uma breve introdução sobre distribuição (ou medida) para que possamos definir polinômios ortogonais e similares.

Chamamos de ponto de aumento de uma função real ϕ, não-decrescente e definida em um intervalo (a,b), qualquer ponto $\xi \in (a,b)$ tal que ϕ não é constante em qualquer intervalo $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ com $\varepsilon > 0$. Se ξ é um ponto de aumento isolado, então existe $\varepsilon > 0$ tal que ϕ é constante nos intervalos $(\xi-\varepsilon, \xi)$ e $(\xi, \xi+\varepsilon)$.

Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente, com infinitos pontos de aumento em (a,b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e tal que as integrais

$$\mu_m = \int_a^b \tau^m d\phi(\tau), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

existem e são finitas. Nessas condições, $d\phi(\tau)$ é chamada distribuição (ou medida positiva) em (a,b). Se $d\phi(\tau) = w(\tau)d\tau$, $w(\tau)$ é chamada função peso em (a,b).

Agora, se as integrais (1.1) existem e são finitas para $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, então $d\phi(\tau)$ é chamada distribuição forte em (a,b). Nessas condições, se $d\phi(\tau) = w(\tau)d\tau$, $w(\tau)$ é chamada de função peso forte em (a,b). Quando $(a,b) \subseteq (0,\infty)$, dizemos que $d\phi(\tau)$ é uma distribuição forte de Stieljes em (a,b).

Os valores μ_m são chamados de momentos da distribuição $d\phi$. Se $d\phi(\tau)$ é interpretada como uma distribuição de massa sobre a reta real positiva, então os momentos μ_1 e μ_2 correspondem, respectivamente, aos primeiro e segundo momentos da distribuição de massa. Essa nomenclatura tem sua origem na Mecânica.

O número infinito de pontos de aumento garante que

$$\int_a^b [f(\tau)]^2 d\phi(\tau) > 0$$

para qualquer função contínua e não identicamente nula em (a,b).

Definimos o suporte de $d\phi$ ($supp$ $(d\phi)$) como sendo o conjunto dos pontos de aumento de ϕ, ou seja,

$$supp\ (d\phi) := \Big\{x \in \mathbb{R} : \phi(x+\varepsilon) - \phi(x-\varepsilon) > 0, \ \text{ para todo } \ \varepsilon > 0\Big\}.$$

Podemos agora, definir polinômios ortogonais e similares.

Seja $\mathbb{P}_n$ o espaço de todos os polinômios algébricos de grau menor ou igual a n.

Os polinômios $P_n(x) \in \mathbb{P}_n$, $n \geq 0$, pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma distribuição (medida positiva) $d\phi(x)$ sobre um intervalo real (a,b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, se satisfazem

$$(i) \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i}x^i \text{ é de grau exatamente } n, \ n \geq 0, \text{ isto é, } a_{n,n} \neq 0,$$

$$(ii) \quad \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } \ m \neq n, \\ \nu_n > 0, & \text{para } \ m = n. \end{cases}$$

Quando na forma mônica, isto é, $a_{n,n} = 1$, satisfazem a uma relação de recorrência de três termos do tipo

$$P_n(x) = (x - \hat{\xi}_{n-1})P_{n-1}(x) - \hat{\delta}_{n-1}P_{n-2}(x), \qquad n \geq 1, \tag{1.2}$$

com $P_{-1}(x) \equiv 0$, $P_0(x) \equiv 1$, $\hat{\xi}_{n-1} \in \mathbb{R}$ e $\hat{\delta}_{n-1} > 0$, $n \geq 1$.

Agora, dada uma distribuição forte de Stieltjes, $d\psi(t)$, dizemos que uma sequência de polinômios $\{B_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios similares se são definidos por

$$\begin{aligned} &(i) \quad B_n(z) \text{ é mônico de grau exatamente } n, \quad n \geq 0, \\ &(ii) \quad \int_a^b t^{-n+s}B_n(t)d\phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } \ 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{para } \ s = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Uma importante propriedade envolvendo os polinômios similares, é que eles também satisfazem a uma relação de recorrência de três termos da forma

$$B_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1}zB_{n-1}(z), \qquad n \geq 1, \tag{1.4}$$

onde $B_0(z) = 1$, $B_1(z) = z - \beta_1$, $\beta_n > 0$ e $\alpha_{n+1} > 0$, $n \geq 1$.

Sabe-se que os coeficientes que aparecem nas relações de recorrência dos polinômios ortogonais e similares, $\{\hat{\xi}_n, \hat{\delta}_n\}$ e $\{\beta_n, \alpha_n\}$ respectivamente, armazenam informações sobre as propriedades desses polinômios e as medidas $\phi(x)$ e $\psi(t)$ associadas. Uma aspecto importante está relacionado aos problemas em que esses coeficientes possuem propriedades assintóticas.

Dadas as relações de recorrência (1.2) e (1.4), os coeficientes $\{\hat{\xi}_n, \hat{\delta}_n\}$ e $\{\beta_n, \alpha_n\}$ podem ser limitados ou ilimitados. O caso que iremos abordar neste trabalho é quando os coeficientes da relação de recorrência são ilimitados de uma maneira especial, ou seja,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_{2n}/\lambda_{2n} = b_1, \qquad &&\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_{2n}^{1/2}/\lambda_{2n} = a_1, \\ &\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_{2n+1}/\lambda_{2n} = b_2, \qquad &&\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_{2n+1}^{1/2}/\lambda_{2n} = a_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

para os polinômios ortogonais mônicos e

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{2n}/\lambda_{2n} = \beta^{(0)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n}/\lambda_{2n} = \alpha^{(0)},$$
$$\lim_{n\to\infty} \beta_{2n+1}/\lambda_{2n} = \beta^{(1)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n+1}/\lambda_{2n} = \alpha^{(1)} \tag{1.6}$$

para os polinômios similares, onde $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de variação regular, que será definida no Capítulo 4 (Definição 4.1). Em [42] e [3] foram estudados os casos onde os coeficientes das relações de recorrência são limitados.

O objetivo deste trabalho é estudar as propriedades assintóticas dos polinômios similares quando os coeficientes das relações de recorrência satisfazem às condições (1.6).

Procuramos elaborar um trabalho contendo informações claras sobre o assunto, de forma a servir de referência aos que pretendem iniciar seus estudos nesta área.

Organizamos, então, esta dissertação da seguinte forma.

Capítulo 2 - *Resultados Preliminares* - Contém pré-requisitos matemáticos que necessitaremos no decorrer do trabalho. Dois resultados que serão de grande importância são o Teorema de Stieltjes-Vitali e o Teorema de Grommer-Hamburger.

Capítulo 3 - *Polinômios Ortogonais e Similares* - Fizemos um estudo sobre os polinômios ortogonais e similares: definições, propriedades e alguns resultados sobre seus zeros.

Capítulo 4 - *Polinômios Ortogonais: Propriedades Assintóticas* - Estudamos, neste capítulo, o comportamento assintótico das sequências $\left\{\dfrac{Q_{2k-1}}{Q_{2k}}\right\}$, $\left\{\dfrac{Q_{2k}}{Q_{2k+1}}\right\}$ e $\left\{\dfrac{Q_n'}{nQ_n}\right\}$ quando os coeficientes da relação de recorrência (1.2) satisfazem (1.5). Foram discutidas, também as funções distribuições, algumas aplicações em fórmulas de quadratura e alguns exemplos. A principal fonte de referência foi o artigo de Van Assche [43].

Capítulo 5 - *Polinômios Similares: Propriedades Assintóticas* - Apresentamos os resultados obtidos por nós para os polinômios similares, semelhante aos resultados do Capítulo 4, quando os coeficientes da relação de recorrência (1.4) satisfazem (1.6). Através da transformação obtida em Sri Ranga [33], fizemos um estudo das funções distribuições, fórmulas de quadratura e exemplos.

Capítulo 6 - *Considerações Finais* - Apresentamos as observações finais sobre o trabalho.

Finalmente, relacionamos, nas *Referências Bibliográficas*, os livros e artigos por nós consultados e/ou citados.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados importantes que serão utilizados nos estudos que faremos nos capítulos posteriores. Muitos resultados serão considerados sem demonstração, mas podem ser encontrados nos textos clássicos sobre o assunto.

2.1 Resultados Gerais

Sejam $\mathbb{C}$ o espaço linear dos números complexos, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ o conjunto das funções reais contínuas definidas na reta e que se anulam fora de um intervalo finito (o que varia com cada função) e $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ a função característica de um conjunto aberto $\mathcal{A}$, isto é,

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} := \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Diremos que a medida de um conjunto aberto $\mathcal{A}$ é dada por

$$m(\mathcal{A}) := sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)dx;\ f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ f \leq \mathcal{X}_{\mathcal{A}} \right\}$$

e que um conjunto $\mathcal{N}$ tem medida nula se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um aberto $\mathcal{A}_\varepsilon \supset \mathcal{N}$ tal que

$$m(\mathcal{A}_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Exemplos de conjuntos de medida nula são: qualquer conjunto enumerável, a união enumerável de conjuntos de medida nula.

Definição 2.1 (Espaço Topológico) *Um conjunto Ω é um espaço topológico se existir uma coleção $\{\mu_i\}$ de subconjuntos abertos em Ω tais que:*

(i) *a união de qualquer número de abertos for um aberto;*

(ii) *a intersecção de um número finito de abertos é um aberto.*

Com uma tal coleção $\{\mu_i\}$ satisfazendo (i) e (ii) determina-se, como consequência, que (*iii*) *existe um ponto s de particular interesse, chamado ponto de acumulação, significando que um subconjunto aberto A de* Ω *existe se, e somente se, existe uma sequência em* $A - \{s\}$ *que converge para s;*

(*iv*) *existe um subconjunto A de* Ω*, chamado de fechado, se, e somente se, toda sequência em A não converge jamais para um ponto em* $\Omega - A$.

Definição 2.2 (Lieb [22], p.04) *Seja* Σ *uma coleção de subconjuntos de* Ω*. Essa coleção é chamada sigma-álgebra se são satisfeitas as seguintes condições:*
(*i*) *se* $A \in \Sigma$*, então* $A^c \in \Sigma$*, onde* $A^c := \Omega \setminus A$ *é o complementar de A em* Ω *(geralmente,* $B \setminus A := B \cap A^c$*);*
(*ii*) *se* $A_1, A_2, \dots$ *é uma família enumerável de conjuntos em* Σ*, então sua união* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *também está em* Σ*;*
(*iii*) $\Omega \in \Sigma$.

$(i), (ii)$ *e* (iii) *implicam que* $\varnothing$ *está em* Σ *e que se* $A_1, A_2, \dots \in \Sigma$*, então* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Definição 2.3 (Lieb [22], p.12) *Suponha que* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é uma função real em* Ω*. Dada uma sigma-álgebra* Σ*, diremos que uma função f é mensurável (com respeito a* Σ*) se, para cada número t, o conjunto*

$$S_f(t) := \{x \in \Omega : f(x) > t\}$$

é mensurável, ou seja, $S_f(t) \in \Sigma$.

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *é complexa, diremos que f é mensurável se suas partes real e complexa forem mensuráveis.*

Definição 2.4 (Rudin [29], p.25) *Definimos* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *como sendo uma coleção de todas as funções mensuráveis complexas f em um conjunto E para as quais*

$$\int_E |f| \, d\mu < \infty.$$

Com essas definições podemos, então, enunciar o seguinte teorema.

2.1.1 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Teorema 2.1 (Rudin [29], p.27) *Suponha que* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de funções mensuráveis complexas em um conjunto E tal que* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *existe para todo* $x \in E$*. Se existe uma função* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *satisfazendo* $|f_n(x)| < g(x)$*,* $n = 1, 2, 3, \dots$*,* $x \in E$*, então* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \, d\mu = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

2.1.2 Convergência Uniforme

Definição 2.5 (Rudin [29], p.230) *Dizemos que uma sequência de funções* $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ *em* Ω *converge uniformemente para* f *num subconjunto compacto de* Ω *se, para um dado compacto* $\mathcal{K} \subset \Omega$ *e todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $N = N(\mathcal{K}, \varepsilon)$ *tal que, para* $j > N$*,*

$$|f_j(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall\, z \in \mathcal{K}.$$

Definição 2.6 (Churchill [11], p.40) *Uma função* f *de variável complexa* z *é analítica em um ponto* z_0 *se sua derivada* $f'(z)$ *existe não somente em* z_0*, mas em todo ponto* z *em alguma vizinhança de* z_0*. A função* f *é analítica em um domínio do plano* z *se é analítica em todo ponto desse domínio.*

Teorema 2.2 (Rudin [29], Teorema 10.28) *Seja* $\mathcal{H}(\Omega)$ *a classe de todas as funções analíticas em* Ω*. Suponha que* $f_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ *para* $j \geq 1$ *e* $f_j \to f$ *uniformemente em subconjuntos compactos de* Ω*. Então,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *e* $f_j' \to f'$ *uniformemente em todo subconjunto compacto de* Ω*.*

2.1.3 Segundo Teorema de Helly

Teorema 2.3 (Chihara [8], Teorema 2.3, p.54) *Seja* $\{\phi_n\}$ *uma sequência uniformemente limitada de funções não-decrescentes definidas em um intervalo compacto* $[a, b]$ *e que converge em* $[a, b]$ *para uma função limite* ϕ*. Então, para toda função real* f*, contínua em* $[a, b]$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f d\phi_n = \int_a^b f d\phi.$$

2.1.4 Integral de Riemann-Stieltjes

2.1.4.1 Integral de Riemann

Seja $[a, b]$ um intervalo finito e seja f uma função real, limitada, definida em $[a, b]$. Uma sequência de números reais τ_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, tal que

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_m = b,$$

é chamada partição de $[a, b]$ e será denotada por Δ. A norma da partição Δ é definida por

$$\| \Delta \| = \max_{1 \leq k \leq m} |\tau_k - \tau_{k-1}|.$$

Para cada partição Δ de $[a, b]$, consideremos

$$M_k = \sup f(\tau) \quad \text{e} \quad m_k = \inf f(\tau) \quad \text{para} \quad \tau_{k-1} \leq \tau \leq \tau_k,$$

e

$$U(\Delta, f) = \sum_{k=1}^{m} M_k(\tau_k - \tau_{k-1}) \quad \text{e} \quad u(\Delta, f) = \sum_{k=1}^{m} m_k(\tau_k - \tau_{k-1}).$$

Se

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} U(\Delta, f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} u(\Delta, f) = I,$$

então dizemos que f é integrável em $[a, b]$ no sentido de Riemann e I é o valor da integral de f no intervalo $[a, b]$. Denota-se por

$$\int_a^b f(\tau)d\tau = I.$$

2.1.4.2 Integral de Riemann-Stieltjes

Consideremos, agora, $[a, b]$ um intervalo finito, ϕ uma função real, não-decrescente e definida em $[a, b]$, f uma função definida em $[a, b]$ e Δ uma partição de $[a, b]$.

Definimos por $\mathcal{C}$ da partição Δ um conjunto de pontos τ'_k que satisfaz

$$\tau_{k-1} \leq \tau'_k \leq \tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Dada uma partição Δ de $[a, b]$ e um conjunto $\mathcal{C}$ de Δ, consideremos a soma

$$S(\Delta, \mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{m} f(\tau'_k)[\phi(\tau_k) - \phi(\tau_{k-1})].$$

Se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número s e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tais que, para toda partição Δ (com $\| \Delta \| < \delta$) e para toda escolha de $\mathcal{C}$,

$$|S(\Delta, \mathcal{C}) - s| < \varepsilon,$$

então s é chamado de integral de Stieltjes (ou integral de Riemann-Stieltjes) de f com respeito a ϕ no intervalo $[a, b]$ e é, geralmente, denotada por

$$\int_a^b f(\tau)d\phi(\tau).$$

Em outras palavras, se existe

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(\Delta, \mathcal{C}),$$

então este limite é chamado de integral de Stieltjes de f com respeito a ϕ em $[a, b]$.

Um exemplo interessante de integral de Stieltjes é quando se ϕ é uma função escada com saltos nos pontos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, dada por

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 0, & a \leq \tau \leq \xi_1, \\ \pi_1, & \xi_1 < \tau \leq \xi_2, \\ \pi_1 + \pi_2, & \xi_2 < \tau \leq \xi_3, \\ \cdots & \cdots \\ \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n, & \xi_n < \tau \leq b, \end{cases}$$

onde $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ são números positivos arbitrários. Somente os intervalos $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ que contém um ponto de salto podem contribuir para a soma $S(\Delta, \mathcal{C})$. Para $\| \Delta \| < \min(\xi_k - \xi_{k-1})$ a soma fica reduzida a

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)\pi_k,$$

onde $|\xi_k^* - \xi_k| \leq \| \Delta \|$. Se f for contínua, temos $f(\xi_k^*) \to f(\xi_k)$ quando $\| \Delta \| \to 0$ e, assim,

$$\int_a^b f(\tau)d\phi(\tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\pi_k.$$

2.1.5 Transformada de Stieltjes

Uma transformada importante na teoria de polinômios ortogonais e similares é a transformada de Stieltjes.

Definição 2.7 *Seja $F(x)$ uma função distribuição, isto é, uma função real, não-decrescente, com infinitos pontos de aumento satisfazendo $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$. A transformada de Stieltjes de $F(x)$ é definida por*

$$S(F(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(x)}{z - x}, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Essa função é analítica tanto no conjunto $\{z : Im(z) > 0\}$ quanto no conjunto $\{z : Im(z) < 0\}$ e determina a função $F(x)$ unicamente se $F(x)$ for normalizada de modo a ser contínua à direita.

2.1.6 Convergência Fraca

Definição 2.8 *Uma seqüência de funções distribuições $F_n(x)$ converge fracamente para uma função distribuição $F(x)$ ($F_n(x) \Rightarrow F(x)$) se, para toda função $f(x)$ contínua e limitada*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x). \tag{2.2}$$

Os teoremas a seguir serão muito importantes no estudo das propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais e similares.

2.1.7 Teorema de Stieltjes-Vitali

Teorema 2.4 *Seja $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de funções analíticas numa região aberta G do plano complexo. Se $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uniformemente limitada em G e converge num subconjunto E de G, onde E tem um ponto limite em G, então $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente em G.*

Vamos considerar o teorema de Stieltjes-Vitali sem demonstração. Para a demonstração do teorema, ver [18]. É importante observar que a forma inicial deste teorema foi provada por Stieltjes na mesma biografia clássica [37] onde ele resolveu o problema de momento e introduziu a integral de Stieltjes.

2.1.8 Teorema Fundamental de Grommer-Hamburger

Teorema 2.5 (Arnold [4], Apêndice) *Seja $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ um sequência que converge fracamente para F, isto é, para toda função contínua f com suporte compacto, $\int f dF_n \to \int f dF$, e seja $supp_n(F_n(\mathbb{R})) < \infty$. Então, a transformada de Stieltjes de F_n, $S(F_n(x); z)$, para $z \in \mathbb{C}$, converge uniformemente para a transformada de Stieltjes de F, $S(F(x); z)$, em conjuntos compactos do semi-plano superior. Reciprocamente, para uma sequência de distribuições $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ com $supp_n(F_n(\mathbb{R})) < \infty$, suponhamos que $\{S(F_n(x); z)\}_{n=0}^{\infty}$ converge em um conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}$ com ponto limite dentro do semi-plano superior. Então, existe uma distribuição finita F tal que $S(F_n(x); z)$ converge uniformemente para $S(F(x); z)$ com z em conjuntos compactos, do plano complexo e $F_n \Rightarrow F$ (fracamente).*

2.1.9 Interpolação de Lagrange

Sejam $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$ pontos distintos e $P_n(x)$ (de grau $\leq n$) o polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre $x_{n,i}$, isto é, $P_n(x_{n,i}) = f(x_{n,i}),\ i = 0, 1, \ldots, n$. Vamos escrever $P_n(x)$ como a seguinte combinação linear

$$P_n(x) = f(x_{n,0}) l_{n,0}(x) + f(x_{n,1}) l_{n,1}(x) + \ldots + f(x_{n,n}) l_{n,n}(x),$$

onde $l_{n,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, são polinômios de grau n.

Para que $P_n(x_{n,i}) = f(x_{n,i})$ podemos tomar

$$\begin{cases} l_{n,k}(x_{n,k}) = 1, & k = 0, 1, \ldots, n, \\ l_{n,k}(x_{n,i}) = 0, & i, k = 0, 1, \ldots, n,\ i \neq k. \end{cases}$$

Então, o polinômio $l_{n,k}(x)$ tem n raízes que são $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,k-1}, x_{n,k+1}, \ldots, x_{n,n}$. Logo,

$$l_{n,k}(x) = \alpha_{n,k}(x - x_{n,0}) \ldots (x - x_{n,k-1})(x - x_{n,k+1}) \ldots (x - x_{n,n}).$$

Como $l_{n,k}(x_{n,k}) = 1$, então

$$\alpha_{n,k} = \frac{1}{(x_{n,k} - x_{n,0}) \ldots (x_{n,k} - x_{n,k-1})(x_{n,k} - x_{n,k+1}) \ldots (x_{n,k} - x_{n,n})}.$$

Portanto, para $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$l_{n,k}(x) = \frac{(x - x_{n,0}) \ldots (x - x_{n,k-1})(x - x_{n,k+1}) \ldots (x - x_{n,n})}{(x_{n,k} - x_{n,0}) \ldots (x_{n,k} - x_{n,k-1})(x_{n,k} - x_{n,k+1}) \ldots (x_{n,k} - x_{n,n})}. \tag{2.3}$$

O polinômio $P_n(x)$ definido por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k}) l_{n,k}(x), \tag{2.4}$$

onde os $l_{n,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, são dados por (2.3), é chamado ***Polinômio de Interpolação de Lagrange***.

Podemos, ainda, escrever $l_{n,k}(x)$ da seguinte forma

$$l_{n,k}(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})},$$

onde $\pi(x) = (x - x_{n,0})(x - x_{n,1}) \cdots (x - x_{n,n})$ é o polinômio dos nós. Assim, (2.4) pode ser dado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,k})\pi'(x_{n,k})} f(x_{n,k}). \tag{2.5}$$

2.1.10 Sequências Encadeadas

Abordaremos, aqui, alguns conceitos básicos envolvendo sequências encadeadas, fazendo isso de forma breve. Para mais detalhes, veja [8].

Definição 2.9 *Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada uma sequência encadeada se existe uma sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que*

(i) $0 \leq g_0 < 1, \;\; 0 < g_n < 1, \;\; n \geq 1;$

(i) $a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \;\; n \geq 1.$

onde $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada de sequência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

Definição 2.10 *Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência de parâmetros mínima para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se $m_0 = 0$.*

Se a sequência de parâmetros mínima é a única sequência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ então dizemos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ determina seus parâmetros unicamente.

Definição 2.11 *Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$ é uma sequência de parâmetros máxima, se $M_k > g_k$ $(k \geq 0)$ para qualquer sequência de parâmetros $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Se $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $g_n \to g$, então, $a_n \to (1-g)g \leq 1/4$ $(n \to \infty)$. O teorema abaixo mostra que a recíproca é válida.

Teorema 2.6 *Seja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Então, $0 \leq a \leq 1/4$ e*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

Além disso, se $M_0 > 0$ (isto é, se $m_n \neq M_n$), então,

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

Capítulo 3

Polinômios Ortogonais e Similares

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre os polinômios ortogonais e similares aos ortogonais. Somente as definições e propriedades mais importantes para o desenvolvimento deste trabalho serão apresentadas.

3.1 Polinômios Ortogonais

No Capítulo 1, vimos que os polinômios ortogonais $P_n(x)$ são definidos por

$$\begin{aligned} &(i) \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i} x^i = a_{n,n} \prod_{i=1}^{n} (x - x_{n,k}) \text{ é de grau exatamente } n, \quad n \geq 0, \\ &(ii) \quad \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ \nu_n > 0, & \text{para } m = n. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se $a_{n,n} = 1$, os polinômios ortogonais são chamados de polinômios ortogonais mônicos, que iremos denotar por $Q_n(x)$. Quando $\nu_n = 1$, dizemos que eles são ortonormais e vamos denotá-los por $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a^*_{n,i} x^i = a^*_{n,n} \prod_{i=1}^{n} (x - x_{n,k})$.

Veremos, agora, algumas propriedades importantes dos polinômios ortogonais $P_n(x)$. Um estudo detalhado pode ser encontrado em [8] e [38].

Teorema 3.1 *Sejam $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$, pertencentes a uma sequência de polinômios ortogonais. Então, eles são linearmente independentes.*

Demonstração: Sejam c_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, constantes tais que

$$\sum_{j=0}^{m} c_j P_j(x) = 0.$$

Logo, para cada polinômio $P_k(x)$, $0 \leq k \leq m$, obtemos

$$\left\langle \sum_{j=0}^{m} c_j P_j, P_k \right\rangle = \langle 0, P_k \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \langle P_j, P_k \rangle = 0.$$

Por definição, $\langle P_j, P_k \rangle = 0$ para $j \neq k$ e $\langle P_k, P_k \rangle > 0$. Logo,

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \langle P_j, P_k \rangle = c_k \underbrace{\langle P_k, P_k \rangle}_{>0} = 0.$$

Portanto, $c_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$. ■

O teorema acima nos diz que os polinômios ortogonais $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n, $\mathbb{P}_n$. Como consequênica, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.1 *Sejam $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\tilde{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à distribuição $d\phi(x)$. Então,*

$$P_j(x) = c_j \tilde{P}_j(x) \qquad j = 0, 1, \ldots,$$

onde c_j é uma constante que depende apenas de j.

Teorema 3.2 *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios e $d\phi(x)$ uma distribuição em (a, b). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à distribuição $d\phi(x)$ em (a, b);

(b) $\langle P_n, \pi \rangle = 0$ para todo $\pi(x)$ de grau $\leq n - 1$;

(c) $\langle x^s, P_n \rangle = \int_a^b x^s P_n(x) d\phi(x) \begin{cases} = 0, & se \quad s < n, \\ \neq 0, & se \quad s = n. \end{cases}$

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Seja $\pi(x)$ um polinômio de grau $\leq n - 1$. Por definição

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n, \\ \nu_n > 0, & se \quad m = n. \end{cases}$$

Como $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, pelo Teorema 3.1, $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ formam uma base para $\mathbb{P}_{n-1}$. Assim,

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x)$$

e, então,

$$\langle P_n, \pi \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n, P_k \rangle = 0.$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Temos, por hipótese, que $\langle P_n, \pi \rangle = 0$ para todo $\pi(x)$ de grau $\leq n-1$. Assim, $\langle P_n, x^s \rangle = 0$ se $s < n$.

Consideremos, agora, $s = n$. Então, $\pi(x) = x^n \in \mathbb{P}_n$. Logo,

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j(x), \qquad \alpha_n = \frac{1}{a_{n,n}} \neq 0$$

e

$$\langle P_n, x^n \rangle = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle P_n, P_j \rangle = \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0.$$

$(c) \Rightarrow (a)$ (i) Consideremos $m < n$. Seja

$$P_m(x) = a_{m,0} + a_{m,1}x + \cdots + a_{m,m}x^m, \qquad a_{m,m} \neq 0.$$

Por hipótese,

$$\langle P_m, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} \left\langle x^k, P_n \right\rangle = 0.$$

Para $m > n$, a demonstração é análoga.

(ii) Seja $m = n$. Então,

$$\langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left\langle x^k, P_n \right\rangle = a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle > 0.$$

■

Teorema 3.3 (Relação de Recorrência de Três Termos) *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a,b) relativamente à distribuição $d\phi(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_n x - \xi_n)P_n(x) - \delta_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.2}$$

com $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = 1$, $\delta_n,\ \xi_{n-1},\ \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e

$$\gamma_n = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \xi_n = \gamma_n \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \delta_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

Demonstração: Temos que $P_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{n,i}x^i$. Como $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, então

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x).$$

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade anterior, encontramos que $b_{n+1} = \dfrac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}$.

Porém, do Teorema 3.2 (b)

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_j(x)d\phi(x) = 0, \quad \text{para} \quad j \leq n-2.$$

Mas, para $j \leq n-2$, de (3.1) temos que

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle = 0.$$

Logo, $b_j = 0$ para $j \leq n-2$. Assim,

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}} xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}} P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}} P_n(x),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_n x - \xi_n)P_n(x) - \delta_n P_{n-1}(x), \tag{3.3}$$

com

$$\gamma_n = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \xi_n = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad \text{e} \quad \delta_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Como

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}},$$

temos que

$$\gamma_n = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}.$$

De (3.3), calculando o produto interno $\langle P_{n+1}, P_n \rangle$, obtemos que

$$\xi_n = \gamma_n \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

De maneira análoga, chegamos que

$$\delta_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

■

Como consequência deste teorema, facilmente obtemos os dois resultados a seguir.

Corolário 3.2 *A sequência de polinômios ortonormais $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à seguinte relação de recorrência de três termos:*

$$xp_n(x) = \frac{a^*_{n,n}}{a^*_{n+1,n+1}} p_{n+1}(x) + \rho^*_n p_n(x) + \frac{a^*_{n-1,n-1}}{a^*_{n,n}} p_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.4}$$

com $p_{-1} = 0$, $p_0 = a^*_{0,0}$ e $\rho^*_n = \int_a^b tp_n^2(t)d\phi(t)$.

A relação (3.4) pode também ser dada como

$$p_{n+1}(x) = (\gamma_n^* x - \xi_n^*)p_n(x) - \delta_n^* p_{n-1}(x), \qquad n \geq 0, \tag{3.5}$$

onde

$$\gamma_n^* = \frac{a_{n+1,n+1}^*}{a_{n,n}^*}, \qquad \xi_n^* = \rho_n^* \gamma_n^* \qquad \text{e} \qquad \delta_n^* = \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*}.$$

Corolário 3.3 *A sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz à relação de recorrência de três termos:*

$$Q_{n+1}(x) = (x - \hat{\xi}_n)Q_n(x) - \hat{\delta}_n Q_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{3.6}$$

com $Q_{-1}(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$, $\hat{\xi}_n = \dfrac{\langle xQ_n, Q_n\rangle}{\langle Q_n, Q_n\rangle} > 0$ e $\hat{\delta}_n = \dfrac{\langle Q_n, Q_n\rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1}\rangle} > 0$.

Como podemos escrever $Q_n(x) = \dfrac{p_n(x)}{a_{n,n}^*}$, temos que

$$\hat{\xi}_n = \frac{\langle xQ_n, Q_n\rangle}{\langle Q_n, Q_n\rangle} = \langle xp_n, p_n\rangle = \rho_n^* \qquad \text{e} \qquad \hat{\delta}_n = \frac{\langle Q_n, Q_n\rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1}\rangle} = \frac{(a_{n-1,n-1}^*)^2}{(a_{n,n}^*)^2}. \tag{3.7}$$

Observe que a relação (3.6) pode ser escrita como

$$xQ_n(x) = \hat{\delta}_n Q_{n-1}(x) + \hat{\xi}_n Q_n(x) + Q_{n+1}(x).$$

Desta relação, mostra-se facilmente que os zeros de $Q_n(x)$ são os auto-valores da matriz de *Jacobi*

$$\begin{pmatrix} \hat{\xi}_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{\delta}_1 & \hat{\xi}_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\delta}_2 & \hat{\xi}_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\xi}_{m-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\delta}_{m-1} & \hat{\xi}_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Teorema 3.4 (Identidade de Christoffel-Darboux) *Seja $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então,*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \frac{1}{\gamma_n^*}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}. \tag{3.9}$$

Para os polinômios ortogonais mônicos $Q_n(x)$ $(n \geq 0)$ com $\hat{\delta}_0 \neq 0$, temos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{\hat{\delta}_0\hat{\delta}_1\cdots\hat{\delta}_k} = (\hat{\delta}_0\hat{\delta}_1\cdots\hat{\delta}_n)^{-1}\frac{Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+1}(y)}{x - y}. \tag{3.10}$$

Demonstração: Da relação de recorrência (3.5) temos que

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) &= (x-y)\gamma_n^* p_n(x)p_n(y) \\ &+ \big\{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)\big\}\delta_n^*. \end{aligned}$$

Mas,

$$\delta_n^* = \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*}\frac{\langle p_n, p_n\rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1}\rangle} = \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) &= \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*}\big\{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)\big\} \\ &+ (x-y)\gamma_n^* p_n(x)p_n(y). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y) &= \frac{\gamma_{n-1}^*}{\gamma_{n-2}^*}\big\{p_{n-1}(x)p_{n-2}(y) - p_{n-2}(x)p_{n-1}(y)\big\} \\ &+ (x-y)\gamma_{n-1}^* p_{n-1}(x)p_{n-1}(y). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) &= \frac{\gamma_n^*}{\gamma_0^*}\Big[p_1(x)p_0(y) - p_0(x)p_1(y) \\ &+ \gamma_0^*(x-y)\sum_{k=1}^{n} p_k(x)p_k(y)\Big]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Mas, $p_1(x) = a_{1,1}^* x + a_{1,0}^*$ e $p_0(x) = a_{0,0}^*$. Então,

$$p_0(y)p_1(x) - p_0(x)p_1(y) = a_{0,0}^* a_{1,1}^*(x-y).$$

Substituindo em (3.13), temos que

$$p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) = \frac{\gamma_n^*}{\gamma_0^*}\left[a_{0,0}^* a_{1,1}^* + \gamma_0^*\sum_{k=1}^{n} p_k(x)p_k(y)\right](x-y).$$

Como, $\gamma_0^* = \dfrac{a_{1,1}^*}{a_{0,0}^*}$ e $p_0(x) = p_0(y) = a_{0,0}^*$, chegamos ao resultado (3.9).
De maneira análoga, podemos demonstrar (3.10) usando a relação (3.6). ■

Se somarmos e subtrairmos $p_{n+1}(x)p_n(x)$ ao numerador da Identidade de Christoffel-Darboux (3.9), obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \frac{1}{\gamma_n^*}\frac{p_n(x)[p_{n+1}(x) - p_{n+1}(y)] - p_{n+1}(x)[p_n(x) - p_n(y)]}{x-y}.$$

Fazendo $y \to x$ em ambos os membros da igualdade acima, chegamos à seguinte identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \{p_k(x)\}^2 = \frac{1}{\gamma_n^*} \left[p_n(x)(p_{n+1}(x))' - p_{n+1}(x)(p_n(x))' \right] > 0, \quad \forall \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Dois resultados importantes sobre os zeros dos polinômios ortogonais são os seguintes.

Teorema 3.5 *Os zeros dos polinômios ortogonais $P_n(x)$, $n \geq 1$, associados à distribuição $d\phi(x)$ no intervalo (a, b) são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b).*

Demonstração: Suponhamos que $P_n(x)$ não tenha raízes em (a, b). Logo, $P_n(x) > 0$ ou $P_n(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Mas,

$$\int_a^b P_n(x) d\phi(x) = 0. \tag{3.15}$$

Sabemos que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b P_n(x) d\phi(x) > 0, \quad \text{se} \quad P_n(x) > 0, \\ \\ \displaystyle\int_a^b P_n(x) d\phi(x) < 0, \quad \text{se} \quad P_n(x) < 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Por (3.15) e (3.16), temos um absurdo. Assim, existe pelo menos uma raiz real de $P_n(x)$ em (a, b). Suponhamos que $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,r}$ $(r < n)$ são raízes de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a, b). Então,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r}) R(x),$$

onde $R(x)$ é um polinômio de grau $(n - r)$ que tem somente raízes complexas ou de multiplicidade par em (a, b). Logo, $R(x)$ não muda de sinal em (a, b).

Porém,

$$I = \int_a^b \underbrace{(x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r})}_{grau\ r<n} P_n(x) d\phi(x) = 0. \tag{3.17}$$

Mas,

$$I = \int_a^b (x - x_{n,1})^2 (x - x_{n,2})^2 \cdots (x - x_{n,r})^2 R(x) d\phi(x) \neq 0. \tag{3.18}$$

Assim, por (3.17) e (3.18), temos um absurdo. Logo, $P_n(x)$ tem $r \geq n$ raízes de multiplicidade ímpar em (a, b). Daí, $r = n$, pois $P_n(x)$ é um polinômio de grau n. Deste modo, $P_n(x)$ tem n raízes de multiplicidade ímpar em (a, b),

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})^{i_1} (x - x_{n,2})^{i_2} \cdots (x - x_{n,r})^{i_n}.$$

Como $i_1, i_2, \ldots, i_n$ são índices ímpares e $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = n$, temos que $i_1 = i_2 = \cdots = i_n = 1$. ∎

Sejam $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$.

Teorema 3.6 (Teorema da Separação dos Zeros) *Seja $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$ existe somente um zero de $P_n(x)$, ou seja,*

$$x_{n-1,i} < x_{n,i} < x_{n-1,i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que os polinômios $P_j(x)$ sejam ortonormais com $a_{j,j} > 0$. Tomemos $x_{n-1,k}$ e $x_{n-1,k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$, dois zeros consecutivos de $P_{n-1}(x)$. Substituindo esses zeros na equação (3.14) para $n-1$, obtemos

$$P_n(x_{n-1,k})P'_{n-1}(x_{n-1,k}) < 0 \quad \text{e} \quad P_n(x_{n-1,k+1})P'_{n-1}(x_{n-1,k+1}) < 0.$$

Como $P'_{n-1}(x_{n-1,k})$ e $P'_{n-1}(x_{n-1,k+1})$ têm sinais opostos, então $P_n(x_{n-1,k})$ e $P_n(x_{n-1,k+1})$ também têm sinais opostos. Logo, existe pelo menos um ponto em $(x_{n-1,k}, x_{n-1,k+1})$ onde $P_n(x)$ muda de sinal. Portanto, existe pelo menos um zero de $P_n(x)$ entre $x_{n-1,k}$ e $x_{n-,k+1}$.

Dois zeros de $P_n(x)$ estão em $(a, x_{n-1,1})$ e $(x_{n-1,n-1}, b)$, respectivamente. Como $a_{j,j} > 0$, $j = 0, 1, \ldots$, temos que $P_j(b) > 0$. Logo, $P'_{n-1}(x_{n-1,n-1}) > 0$. De (3.14), $P_n(x_{n-1,n-1}) < 0$. Portanto, $P_n(x)$ muda de sinal entre $x_{n-1,n-1}$ e b. De modo análogo, mostramos que existe uma raiz de $P_n(x)$ entre a e $x_{n-1,1}$. Basta lembrar que $sinal[P_j(a)] = (-1)^j$. Como $P_n(x)$ tem n zeros, o resultado está demonstrado. ■

Uma importante propriedade satisfeita pelos polinômios ortogonais simétricos é o seguinte resultado.

Teorema 3.7 *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma distribuição $d\phi(x)$ em um intervalo simétrico $(-b, b)$ com relação à origem. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $d\phi(x)$ é simétrica, isto é $d\phi(x) = -d\phi(-x)$;

(b) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $n \geq 0$;

(c) na fórmula de recorrência, $\xi_n = 0$, $n \geq 1$.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$ Temos, por hipótese, que $d\phi(x)$ é simétrica. Logo,

$$\int_{-b}^{b} P_n(-x)P_m(-x)d\phi(x) = \int_{-b}^{b} P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = 0, \quad m \neq n.$$

Assim, $\{P_n(-x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais em $(-b, b)$ com relação à distribuição $d\phi(x)$. Daí, pelo Corolário 3.1, temos que

$$P_n(-x) = c_n P_n(x), \text{ onde } c_n \text{ é uma constante.}$$

Comparando os coeficientes de maior grau, chegamos que $c_n = (-1)^n$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Da relação de recorrência (3.2), sabemos que

$$\xi_n = \gamma_n \frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle xP_n, P_n\rangle &= \int_{-b}^{b} x[P_n(x)]^2 d\phi(x) = \int_{b}^{0} (-x)[P_n(-x)]^2 d\phi(-x) + \int_0^b x[P_n(x)]^2 d\phi(x) \\ &= -\int_0^b x(-1)^{2n}[P_n(x)]^2 d\phi(x) + \int_0^b x[P_n(x)]^2 d\phi(x) = 0. \end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (a)$ Por hipótese, temos que $\xi_n = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \langle xP_n, P_n\rangle &= \int_{-b}^{b} x[P_n(x)]^2 d\phi(x) \\ &= \int_0^b x[P_n(x)]^2 d\phi(-x) + \int_0^b x[P_n(x)]^2 d\phi(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^b x[P_n(x)]^2 d\phi(x) = \int_0^b x[P_n(x)]^2 (-d\phi(-x)).$$

de onde segue o resultado. ■

Um famoso resultado da teoria dos polinômios ortogonais é devido a de J. Favard.

Teorema 3.8 (J. Favard, Chihara [8]) *Se um sistema de polinômios $\{\pi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz a uma relação de recorrência do tipo*

$$x\pi_n(x) = \frac{\tilde{a}_{n,n}}{\tilde{a}_{n+1,n+1}}\pi_{n+1}(x) + \tilde{\xi}_{n+1}\pi_n(x) + \frac{\tilde{a}_{n-1,n-1}}{\tilde{a}_{n,n}}\pi_{n-1}(x),$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, com $\pi_{-1}(x) = 0$, $\tilde{a}_{-1,-1} = 0$, $\pi_0(x) = \tilde{a}_{0,0}$, $\tilde{a}_{n,n} > 0$ e $\tilde{\xi}_{n+1} \in \mathbb{R}$, então $\{\pi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal com relação a alguma função distribuição ϕ (que pode ser unicamente determinada) e

$$\tilde{\xi}_{n+1} = \int_a^b t\pi_n^2(t) d\phi(t).$$

Definição 3.1 *A função de Christoffel λ_n correspondente a uma função distribuição ϕ é definida por*

$$\lambda_n(z) = \min_{\pi(x)\in\mathbb{P}_{n-1}} \int_a^b |\pi_{n-1}(t)|^2 d\phi(t),$$

com $\pi_{n-1}(z) = 1$ para $z \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Os números $\lambda_n(x_{n,k})$ são chamados números de Christoffel e são geralmente denotados por $\lambda_{n,k}$.

Teorema 3.9 (Fórmula de Quadratura de Gauss-Jacobi) *Se $x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n}$ denotam os zeros de $Q_n(x)$, então existem números reais $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \ldots, \lambda_{n,n}$ tais que*

$$\int_a^b \rho(x)d\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}\rho(x_{n,k})$$

sempre que $\rho(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$. A distribuição $d\phi(x)$ e o inteiro n determinam unicamente os números $\lambda_{n,k}$ que são denominados pesos da fórmula de Gauss ou números de Christoffel e $x_{n,k}$, os nós.

Demonstração: Sabemos que o polinômio interpolador de Lagrange, $L_{n-1}(x)$, de grau $n-1$, que coincide com $\rho(x)$ nos pontos $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, é dado por

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{n,k}) l_{n,k}(x), \tag{3.19}$$

onde

$$l_{n,k}(x) = \frac{Q_n(x)}{(x - x_{n,k})Q'_n(x_{n,k})}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Então,

$$\rho(x_{n,k}) - L_{n-1}(x_{n,k}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Logo, $Q(x) = \rho(x) - L_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau no máximo $2n-1$ que se anula em $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Assim,

$$Q(x) = R(x)P_n(x),$$

onde $R(x)$ é um polinômio de grau no máximo $n-1$. Portanto, como $R(x)$ é ortogonal a $P_n(x)$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x)d\phi(x) &= \int_a^b Q(x)d\phi(x) + \int_a^b L_{n-1}(x)d\phi(x) \\
&= \int_a^b R(t)P_n(x)d\phi(t) + \int_a^b L_{n-1}(x)d\phi(x) \\
&= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{n,k}) l_{n,k}(x)d\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{n,k}) \int_a^b l_{n,k}(x)d\phi(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{n,k})\lambda_{n,k}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

■

Temos, ainda, de (3.19), que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x)d\phi(x) &= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{Q_n(x)}{(x - x_{n,k})Q'_n(x_{n,k})}\rho(x_{n,k})\right] d\phi(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{Q'_n(x_{n,k})} \int_a^b \frac{Q_n(x)}{(x - x_{n,k})} d\phi(x)\rho(x_{n,k})\right].
\end{aligned}$$

Comparando essa equação com (3.20), obtemos que

$$\lambda_{n,k} = \frac{1}{Q'_n(x_{n,k})} \int_a^b \frac{Q_n(x)}{(x - x_{n,k})} d\phi(x), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.21}$$

Em Szegö [38] encontramos também que $\lambda_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, podem ser dados por

$$\lambda_{n,k} = \frac{a^*_{n,n}}{a^*_{n-1,n-1}} \frac{1}{p'_n(x_{n,k}) p_{n-1}(x_{n,k})}. \tag{3.22}$$

Esse resultado segue da quadratura de Gauss-Jacobi e da Identidade de Christoffel-Darboux.

Um resultado que será útil mais adiante é o seguinte teorema.

Teorema 3.10 *A seguinte decomposição em frações parciais é válida*

$$\frac{Q_n(x)}{Q_{n+1}(x)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\gamma_{n+1,k}}{(x - x_{n+1,k})} \tag{3.23}$$

onde $x_{n+1,k}$*,* $k = 1, 2, \ldots, n+1$*, são os zeros de* $Q_{n+1}(x)$ *e* $\gamma_{n+1,k} = \dfrac{Q_n(x_{n+1,k})}{Q'_{n+1}(x_{n+1,k})} > 0$.

Demonstração: Consideremos o polinômio interpolador de Lagrange de $Q_n(x)$ sobre os $n+1$ zeros $x_{n+1,1}, x_{n+1,2}, \ldots, x_{n+1,n+1}$ de $Q_{n+1}(x)$. Então,

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\pi(x)}{(x - x_{n+1,i})\pi'(x_{n+1,i})} Q_n(x_{n+1,i}),$$

onde

$$\pi(x) = (x - x_{n+1,1})(x - x_{n+1,2}) \cdots (x - x_{n+1,n+1}) \tag{3.24}$$

é o polinômio dos nós. Como $Q_{n+1}(x)$ é mônico, de (3.24) temos que $Q_{n+1}(x) = \pi(x)$.

Assim,

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{Q_{n+1}(x)}{(x - x_{n+1,k})Q'_{n+1}(x_{n+1,i})} Q_n(x_{n+1,i}),$$

de onde segue o resultado. ■

Como $Q'_n(x)$ é um polinômio de grau $n-1$, pelo polinômio de interpolação de Lagrange (2.5),

$$Q'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_n(x)}{(x - x_{n,k})Q'_n(x_{n,k})} Q'_n(x_{n,k})$$

de onde concluímos que

$$\frac{Q'_n(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_{n,k}}. \tag{3.25}$$

Como $Q_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, são mônicos, temos ainda que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{n-1}(x_{n,i})}{Q'_n(x_{n,i})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{n-1}(x_{n,i})}{a^*_{n-1,n-1}} \frac{a^*_{n,n}}{p'_n(x_{n,i})}. \tag{3.26}$$

De (3.22), sabemos que

$$\lambda_{n,i} = \frac{a^*_{n,n}}{a^*_{n-1,n-1}} \frac{1}{p'_n(x_{n,i})p_{n-1}(x_{n,i})}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Logo, de (3.26), chegamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{n,i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{n-1}(x_{n,i})}{Q'_n(x_{n,i})} = \sum_{i=1}^{n} p^2_{n-1}(x_{n,i})\lambda_{n,i} \\ &= \int_a^b p^2_{n-1}(x)d\phi(x) = \| p_{n-1}(x) \|^2 = 1. \end{aligned}$$

A seguinte definição será de grande importância neste trabalho.

Definição 3.2 (Núcleo de Dirichlet) *O núcleo de Dirichlet é definido por*

$$\mathcal{K}_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(t),$$

ou, pela soma de Christoffel-Darboux (3.9), *por*

$$\mathcal{K}_n(x, t) = \frac{a^*_{n-1,n-1}}{a^*_{n,n}} \frac{p_n(x)p_{n-1}(t) - p_{n-1}(x)p_n(t)}{x - t}. \tag{3.27}$$

3.1.1 Frações Contínuas e os Polinômios Ortogonais

Vamos considerar apenas o suficiente de frações contínuas para indicar sua relação com os polinômios ortogonais e obter certos resultados que utilizaremos nos capítulos posteriores. Um estudo detalhado sobre o assunto pode ser encontrado em [23, 41].

Sejam $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sequências arbitrárias de números complexos e

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0 \\ C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\ C_2 &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ C_n &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde C_n é chamado de n-ésimo convergente (ou aproximante) da fração contínua (infinita)

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n} + \ddots}}. \tag{3.29}$$

Uma outra forma de denotarmos a fração contínua (3.29) é

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_2}{b_2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \cdots \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{a_n}{b_n} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \cdots. \tag{3.30}$$

Definição 3.3 *A fração contínua* (3.30) *converge para um valor K (finito) se apenas um número finito de C_n não é definido e*

$$\lim_{n\to\infty} C_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua diverge.

Referindo-nos a (3.28), podemos escrever

$$C_n = \frac{A_n}{B_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\ A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2 \end{aligned}$$

e, em geral, A_n e B_n são polinômios em a_i, b_j.

Assim, podemos escrever

$$A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1}, \quad \text{onde} \quad A_{-1} = 1,$$

$$B_1 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1}, \quad \text{onde} \quad B_{-1} = 0.$$

Portanto, para algum $n \geq 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \qquad & A_{-1} &= 1, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \qquad & B_{-1} &= 0, \end{aligned} \tag{3.31}$$

conhecidas como Fórmulas de Wallis, onde A_n e B_n são chamados de n-ésimo numerador parcial e n-ésimo denominador parcial da fração contínua, respectivamente.

As fórmulas de Wallis (3.31) levam a uma conexão direta entre polinômios ortogonais e frações contínuas pois, se em (3.30) tomarmos

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \hat{\delta}_0 \neq 0, \quad a_{n+1} = -\hat{\delta}_n \quad \text{e} \quad b_n = x - \hat{\xi}_{n-1} \quad n \geq 1,$$

obteremos a fração contínua

$$\frac{\hat{\delta}_0}{x - \hat{\xi}_0} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{-\hat{\delta}_1}{x - \hat{\xi}_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \cdots \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{-\hat{\delta}_n}{x - \hat{\xi}_n} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \cdots \tag{3.32}$$

cujo n-ésimo denominador parcial, $B_n = Q_n(x)$, satisfaz à relação de recorrência (3.6).

Assim, pelo Teorema 3.8 (J. Favard), segue que os denominadores parciais de (3.6) formam uma sequência de polinômios ortogonais com relação a alguma distribuição ϕ se $\hat{\xi}_n$, $n = 0, 1, \ldots$, são reais e $\hat{\delta}_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$. A fração contínua (3.32) é chamada de *J-fração* ou fração contínua de *Jacobi*, devido à sua relação com as conhecidas matrizes de *Jacobi* (3.8).

Retornando às fórmulas de Wallis, note que os numeradores parciais, $A_n = A_n(x)$, satisfazem à relação de recorrência

$$A_n(x) = (x - \hat{\xi}_{n-1})A_{n-1}(x) - \hat{\delta}_{n-1}A_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

com $A_{-1}(x) = 1$, $A_0(x) = 0$, $A_1(x) = \hat{\delta}_0$.

Temos que $\hat{\delta}_0^{-1}A_n(x)$ é um polinômio mônico de grau $n-1$ que independe de $\hat{\delta}_0$. Assim,

$$Q_n^{(0)}(x) = \hat{\delta}_0^{-1}A_{n+1}(x), \quad n \geq 1,$$

é um polinômio mônico de grau n independente de $\hat{\delta}_0$ que satisfaz à fórmula de recorrência

$$Q_n^{(0)}(x) = (x - \hat{\xi}_n)Q_{n-1}^{(0)}(x) - \hat{\delta}_n Q_{n-2}^{(0)}(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

com $Q_{-1}^{(0)}(x) = 0$, $Q_0^{(0)}(x) = 1$.

Logo, $\{Q_n^{(0)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais se $\hat{\xi}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, são reais e $\hat{\delta}_n > 0$ para $n \geq 1$.

Definição 3.4 *Os polinômios $Q_n^{(0)}(x)$ são chamados de polinômios associados aos ortogonais e podem ser dados por*

$$\hat{\delta}_0 Q_n^{(0)}(x) = \int_a^b \frac{Q_n(t) - Q_n(x)}{t - x} d\phi(t), \quad n \geq 1.$$

Um outro resultado importante sobre a decomposição dos convergentes da *J-fração* (3.32) é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.11 **(Chihara [8], Teorema 4.3, p.88)** *Se $\hat{\xi}_n \in \mathbb{R}$ e $\hat{\delta}_n > 0$, $n \geq 1$, temos*

$$\frac{\hat{\delta}_0 Q_{n-1}^{(0)}(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}}{x - x_{n,k}} = \int_a^b \frac{1}{x - t} d\phi_n(t),$$

onde $\lambda_{n,k}$ são os coeficientes da fórmula de quadratura de Gauss correspondentes aos zeros $x_{n,k}$ e ϕ_n é a correspondente função distribuição com salto $\lambda_{n,k}$ no ponto $x_{n,k}$.

Demonstração: De (3.21), temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,k} &= \frac{1}{Q_n'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{Q_n(x)}{(x - x_{n,k})} d\phi(x) \\
&= \frac{1}{Q_n'(x_{n,k})} \int_a^b \frac{Q_n(x) - Q_n(x_{n,k})}{(x - x_{n,k})} d\phi(x) \\
&= \frac{\hat{\delta}_{(0)} Q_{n-1}^{(0)}(x_{n,k})}{Q_n'(x_{n,k})}, \quad k = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Mas, sabemos que o polinômio de interpolação de Lagrange de $Q_{n-1}^{(0)}(x)$ sobre os zeros $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, de $Q_n(x)$ é dado por

$$Q_{n-1}^{(0)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_n(x)}{(x - x_{n,k})Q'_n(x_{n,k})} Q_{n-1}^{(0)}(x_{n,k}).$$

Logo,

$$\frac{\hat{\delta}_0 Q_{n-1}^{(0)}(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{\delta}_0 Q_{n-1}^{(0)}(x_{n,k})}{(x - x_{n,k})Q'_n(x_{n,k})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}}{(x - x_{n,k})}. \tag{3.33}$$

Como

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 0, \quad \text{se } \; t \leq x_{n,1}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{s} \lambda_{n,k}, \quad \text{se } \; x_{n,s} < t \leq x_{n,s+1}, \;\; 1 \leq s \leq n-1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}, \quad \text{se } \; x_{n,n} < t, \end{cases}$$

obtemos, da definição de integral de Stieltjes e de (3.33), que

$$\int_a^b \frac{1}{x - t} d\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}}{x - x_{n,k}} = \frac{\hat{\delta}_0 Q_{n-1}^{(0)}(x)}{Q_n(x)}.$$

■

Sejam

$$\zeta_i = \lim_{n\to\infty} x_{n,i}, \qquad \eta_j = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-j+1},$$

$$\sigma = \lim_{i\to\infty} \zeta_i \qquad e \qquad \tau = \lim_{j\to\infty} \eta_j.$$

Definição 3.5 *O intervalo* $[\zeta_1, \eta_1]$ *é chamado de verdadeiro intervalo de ortogonalidade de* $Q_n(x)$.

Se o verdadeiro intervalo de ortogonalidade $[\zeta_1, \eta_1]$ é limitado, de $[12, II -$ Teorema 3.1] e do segundo Teorema de Helly 2.3, podemos concluir que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\hat{\delta}_0 Q_{n_k-1}^{(0)}(x)}{Q_{n_k}(x)} = \int_{\zeta_1}^{\eta_1} \frac{d\phi(x)}{z - x}, \quad \text{para} \quad z \notin [\zeta_1, \eta_1]. \tag{3.34}$$

Assim, segue que se $[\zeta_1, \eta_1]$ é limitado, existe uma subsequência de convergentes da *J-fração* (3.32) que converge para

$$FC(z) = \int_{\zeta_1}^{\eta_1} \frac{d\phi(x)}{z - x}, \quad \text{para} \quad z \notin [\zeta_1, \eta_1]. \tag{3.35}$$

Teorema 3.12 (Blumenthal generalizado, Chihara [8]) *Sejam os polinômios $Q_n(x)$ dados por* (3.6) *e suponhamos que* $\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_n = \hat{\xi}$ *e* $\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_n = \hat{\delta} > 0$, *onde* $\hat{\xi}$ *e* $\hat{\delta}$ *são finitos. Seja, ainda,* $X = \{x_{n,k} :\ 1 \le k \le n,\ n = 1, 2, \ldots\}$. *Então,* X *é denso no intervalo* $[\sigma, \tau]$, *onde*

$$\sigma = \hat{\xi} - 2\sqrt{\hat{\delta}} \quad e \quad \tau = \hat{\xi} + 2\sqrt{\hat{\delta}}.$$

Uma outra propriedade que faremos uso é a de limitantes para os zeros dos polinômios $Q_n(x)$.

3.1.2 Limitantes para os Zeros

Do núcleo de Dirichlet (3.27), podemos notar que

$$\mathcal{K}_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(t) = \frac{a^*_{n-1,n-1}}{a^*_{n,n}} \frac{p_n(x)p_{n-1}(t) - p_{n-1}(x)p_n(t)}{x-t}.$$

Assim, para $t = x_{n,k}$, temos

$$x\mathcal{K}_n^2(x, x_{n,k}) = x\frac{(a^*_{n-1,n-1})^2}{(a^*_{n,n})^2} \frac{p_n^2(x)p_{n-1}^2(x_{n,k})}{(x-x_{n,k})^2}.$$

Assim, pela fórmula de quadratura de Gauss-Jacobi,

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\mathcal{K}_n^2(x, x_{n,k})d\phi(x) &= \sum_{j=1}^{n} x_{n,j}\mathcal{K}_n^2(x_{n,j}, x_{n,k})\lambda_{n,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_{n,j}\frac{(a^*_{n-1,n-1})^2}{(a^*_{n,n})^2} \frac{p_n^2(x_{n,j})p_{n-1}^2(x_{n,k})}{(x_{n,j}-x_{n,k})^2}\lambda_{n,j} \\
&= \frac{(a^*_{n-1,n-1})^2}{(a^*_{n,n})^2} p_{n-1}^2(x_{n,k}) \sum_{j=1}^{n} x_{n,j} \frac{p_n^2(x_{n,j})}{(x_{n,j}-x_{n,k})^2}\lambda_{n,j} \\
&= \frac{(a^*_{n-1,n-1})^2}{(a^*_{n,n})^2} p_{n-1}^2(x_{n,k}) \left[p_n'(x_{n,k})\right]^2 x_{n,k}\lambda_{n,k} \overset{(3.22)}{=} \frac{x_{n,k}}{\lambda_{n,k}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$x_{n,k} = \lambda_{n,k} \int_a^b x\mathcal{K}_n^2(x, x_{n,k})d\phi(x).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
x_{n,k} &= \lambda_{n,k} \int_a^b x\mathcal{K}_n^2(x, x_{n,k})d\phi(x) = \lambda_{n,k} \int_a^b x \left[\sum_{j=0}^{n-1} p_j(x)p_j(x_{n,k})\right]^2 d\phi(x) \\
&= \lambda_{n,k} \int_a^b x \left[\sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x)p_j^2(x_{n,k})\right] d\phi(x) \\
&\quad +2\lambda_{n,k} \int_a^b x \left[\sum_{\substack{i=0 \\ j=i+1}}^{n-2} p_i(x)p_i(x_{n,k})p_j(x)p_j(x_{n,k})\right] d\phi(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_{n,k} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b x p_j^2(x) p_j^2(x_{n,k}) d\phi(x) \\
&\quad + 2\lambda_{n,k} \sum_{\substack{i=0 \\ j=i+1}}^{n-2} p_i(x_{n,k}) p_j(x_{n,k}) \int_a^b x p_i(x) p_j(x) d\phi(x) \\
&= \lambda_{n,k} \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j^* p_j^2(x_{n,k}) + 2\lambda_{n,k} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{j-1,j-1}^*}{a_{j,j}^*} p_{j-1}(x_{n,k}) p_j(x_{n,k})
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|x_{n,k}| &\leq \lambda_{n,k} \sum_{j=0}^{n-1} |\rho_j^*| p_j^2(x_{n,k}) + 2\lambda_{n,k} \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{a_{j-1,j-1}^*}{a_{j,j}^*} \right| |p_{j-1}(x_{n,k}) p_j(x_{n,k})| \\
&\leq \lambda_{n,k} \max_{0 \leq j \leq n-1} |\rho_j^*| \sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x_{n,k}) + 2\lambda_{n,k} \max_{1 \leq j \leq n-1} \left| \frac{a_{j-1,j-1}^*}{a_{j,j}^*} \right| \times \sum_{j=1}^{n-1} |p_{j-1}(x_{n,k}) p_j(x_{n,k})| \\
&\leq \max_{0 \leq j \leq n-1} |\rho_j^*| + 2\lambda_{n,k} \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{a_{j-1,j-1}^*}{a_{j,j}^*} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} p_i^2(x_{n,k})} \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x_{n,k})} \\
&= \max_{0 \leq j \leq n-1} |\rho_j^*| + 2 \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{a_{j-1,j-1}^*}{a_{j,j}^*}.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.7), chegamos que

$$
|x_{n,k}| \leq \max_{0 \leq j \leq n-1} |\hat{\xi}_j| + 2 \max_{1 \leq j \leq n-1} \hat{\delta}_j^{1/2}. \tag{3.36}
$$

Observe, então, que caso os coeficientes da relação de recorrência sejam limitados, $-A \leq x_{n,k} \leq A$, $k = 1, \ldots, n$, onde A é uma constante positiva.

3.1.3 Polinômios Ortogonais Clássicos

3.1.3.1 Polinômios de Jacobi - $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

São ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, α e β reais.

• Para $\alpha = \beta = 0$, temos os polinômios $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$, conhecidos como polinômios de Legendre, que são ortogonais em $[-1, 1]$ relativamente a função peso $w(x) = 1$ e satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$
P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \qquad n \geq 0,
$$

onde $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0(x) = x$.

• Para $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ ($\lambda \neq 1/2$), temos os polinômios ultrasféricos (ou Gegenbauer) $P_n^{(\lambda)}(x) = cteP_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x)$, que são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$.

A relação de recorrência para os polinômios de Gegenbauer é da forma

$$P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = \frac{2(n+\lambda)}{n+1} x P_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n+2\lambda-1}{n+1} P_{n-1}^{(\lambda)}(x), \qquad n \geq 0,$$

onde $P_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $P_0^{(\lambda)}(x) = 1$.

• Para $\alpha = \beta = -1/2$, obtemos os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie,

$$T_n(x) = cteP_n^{(-1/2,-1/2)}(x)$$

que são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ satisfazendo a seguinte relação de recorrência

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n \geq 1,$$

com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

• Para $\alpha = \beta = 1/2$, encontramos os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

$$U_n(x) = cteP_n^{(1/2,1/2)}(x),$$

que são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ com relação a função peso $w(x) = (1-x^2)^{1/2}$. A relação de recorrência é dada por

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \qquad n \geq 1,$$

onde $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$.

3.1.3.2 Polinômios de Laguerre - $L_n^{(\alpha)}(x)$

Os polinômios de Laguerre são ortogonais no intervalo $[0,\infty)$ com relação à função peso $w(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, $\alpha > -1$ e satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - (2n+\alpha+1))L_n^{(\alpha)}(x) - n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \qquad n \geq 0,$$

com $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$ e $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$.

3.1.3.3 Polinômios de Hermite - $H_n(x)$

Os polinômios de Hermite são ortogonais no intervalo $(-\infty,\infty)$ com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$, satisfazendo à relação de recorrência

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \qquad n \geq 0,$$

com $H_{-1}(x) = 0$ e $H_0(x) = 1$.

3.2 Polinômios Similares aos Ortogonais

Seja $\psi(t)$ uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a,b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Os pesquisadores Jones, Thron e Waadeland [20] introduziram o problema forte de momento que abriu caminho para o estudo de polinômios que apresentam propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais.

O problema forte de momento pode ser dada da seguinte forma:

" Dada uma sequência de números reais $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$, em que condições existe uma distribuição não negativa $d\psi(t)$ tal que

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ? \text{ "}$$

Jones, Thron e Waadeland resolveram este problema quando $d\psi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes, isto é, $(a,b) \subseteq (0,\infty)$.

Com o objetivo de estudar o problema forte de momentos para o caso em que $a = -\infty$ e $b = \infty$, conhecido como problema forte de momento de Hamburger, Sri Ranga, em [32], introduziu uma sequência de polinômios mônicos $B_n^{(k)}(z)$, similares aos ortogonais, definidos por

$$\int_a^b t^{k-n+s} B_n^{(k)}(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n^{(k)} > 0, & \text{se } \ s = n, \end{cases}$$

para $k \in \mathbb{Z}_+$ ou $k \in \mathbb{Z}_-$ e $n \geq 0$, onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $d\psi(t)$ é uma distribuição para a qual os momentos

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

existem e são finitos.

Em nosso trabalho, consideraremos apenas os polinômios $B_n^{(k)}(z)$ para $k = 0$ e intervalos (a,b) que estejam contidos do lado positivo do eixo real, isto é, $0 \leq a < b \leq \infty$. Daí, a distribuição $d\psi(t)$ é uma distribuição forte de Stieltjes. Vamos denotar tais polinômios por $B_n(z)$.

Portanto, os polinômios $B_n(z)$, $n \geq 0$, são dados por (1.3), isto é,

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ 0 \leq s \leq n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } \ s = n. \end{cases}$$

Esses polinômios estão estritamente ligados aos polinômios de Laurent ortogonais (ou L-polinômios ortogonais), $L_n(z)$, (veja [33]), da seguinte forma:

$$L_{2m}(z) = z^{-m} B_{2m}(z), \quad L_{2m+1}(z) = z^{-m-1} B_{2m+1}(z), \quad m \geq 0.$$

O seguinte resultado é primordial para demonstrarmos a existência dos polinômios $B_n(z)$.

Teorema 3.13 *Para as distribuições fortes de Stieltjes $d\psi(t)$, os determinantes de Hankel,*

$$\mathbf{H}_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n+1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix} \tag{3.37}$$

satisfazem $\mathbf{H}_n^{(m)} > 0$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 1$.

Demonstração: Sabemos que uma matriz $\mathcal{A}$ é positiva definida se $\langle \mathcal{A}x, x \rangle > 0$, para todo $x \not\equiv 0$. Além disso, $det(\mathcal{A}) > 0$.

Mostremos então que a matriz

$$\mathcal{H}_n^{(m)} = \begin{pmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{pmatrix}$$

é definida positiva.

Seja $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})^t \in \mathbb{R}^n,\ x \not\equiv 0$. Então,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{H}_n^{(m)} x, x \right\rangle &= x_0 \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+i} x_i + x_1 \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+1+i} x_i + \ldots + x_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+n-1+i} x_i \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+i+j} x_i x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b t^{m+i+j} x_i x_j \, d\psi(t) \\ &= \int_a^b t^m \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i \right) d\psi(t) = \int_a^b \underbrace{t^m}_{>0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right)^2}_{>0} \underbrace{d\psi(t)}_{>0} > 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{H}_n^{(m)}$ é definida positiva e, portanto, $\mathbf{H}_n^{(m)} = det(\mathcal{H}_n^{(m)}) > 0$. ■

3.2.1 Algumas Propriedades dos Polinômios Similares

Como nos polinômios ortogonais, os polinômios similares também satisfazem à uma relação de recorrência de três termos dada no seguinte teorema.

Teorema 3.14 *Sejam os polinômios similares $B_n(z) = \sum_{r=0}^{n} b_{n,r} z^r$, com $b_{n,n} = 1$, $n \geq 0$. Então, para $n \geq 1$,*

$$B_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1}) B_n(z) - \alpha_{n+1} z B_{n-1}(z), \tag{3.38}$$

onde $B_0(z) = 1$, $B_1(z) = z - \beta_1$ *e os coeficientes* α_{n+1} *e* β_{n+1} *satisfazem:*

$$\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \qquad \beta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}, \qquad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1}\frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} \quad n \geq 1,$$

com ρ_n *e* η_n, $n \geq 0$, *definidos por*

$$\rho_n = \frac{\mathbf{H}_{n+1}^{(-n)}}{\mathbf{H}_n^{(-n)}} > 0 \qquad e \qquad \eta_n = (-1)^{n+1}\frac{\mathbf{H}_{n+1}^{(-n-1)}}{\mathbf{H}_n^{(-n)}} \neq 0,$$

onde $\mathbf{H}_n^{(-n)}$, $\mathbf{H}_{n+1}^{(-n-1)}$ *e* $\mathbf{H}_{n+1}^{(-n)}$ *são os determinantes de Hankel definidos em* (3.37).

Demonstração: Seja $n \geq 1$ e consideremos o polinômio $B_{n+1}(z) - zB_n(z)$ de grau no máximo n. Então,

$$B_{n+1}(z) - zB_n(z) = c_1B_n(z) - c_2zB_{n-1}(z) + q_{n-1}(z).$$

Multiplicando-se ambos os membros da igualdade acima por z^{-n+s} e integrando-se em (a, b) com relação à distribuição $d\psi(z)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b z^{-n+s}[B_{n+1}(z) - zB_n(z)]d\psi(z) &= c_1\int_a^b z^{-n+s}B_n(z)d\psi(z) - c_2\int_a^b z^{-(n-1)+s}B_{n-1}(z)d\psi(z)\\ &+ \int_a^b z^{-n+s}q_{n-1}(z)d\psi(z).\end{aligned}$$

Daí, se $q_{n-1}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_iz^i$, então

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} a_i\int_a^b z^{-n+s+i}d\psi(z) &= \int_a^b z^{-n+s}[B_{n+1}(z) - zB_n(z)]d\psi(z) - c_1\int_a^b z^{-n+s}B_n(z)d\psi(z)\\ &+c_2\int_a^b z^{-(n-1)+s}B_{n-1}(z)d\psi(z).\end{aligned}$$

Fazendo $s = 0, 1, \ldots, n-1$, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1}\\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{-2} & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{n-3}\\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-2}\\ a_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ c_2\rho_{n-1} - \rho_n\end{pmatrix}.$$

Escolhendo c_2 de forma que $c_2\rho_{n-1} - \rho_n = 0$, isto é, $c_2 = \dfrac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$, chegamos ao sistema linear homogêneo dada por

$$\begin{pmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1}\\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{-2} & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{n-3}\\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-2}\\ a_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Portanto, a única solução do sistema acima é a solução trivial visto que $\mathbf{H}_n^{(-n)} \neq 0$. Logo,

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0.$$

Assim,

$$B_{n+1}(z) - zB_n(z) = c_1 B_n(z) - \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} z B_{n-1}(z).$$

Se chamarmos $\beta_{n+1} = -c_1$ e $\alpha_{n+1} = \dfrac{\rho_n}{\rho_{n-1}}$, chegamos à relação

$$B_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1} z B_{n-1}(z).$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por $z^{-(n+1)}$ e integrando em (a,b), obtemos que

$$\beta_{n+1} = -\alpha_{n+1}\frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}.$$

Assim,

$$B_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})B_n(z) - \alpha_{n+1} z B_{n-1}(z), \; n \geq 1,$$

onde

$$\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} > 0 \qquad \text{e} \qquad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1}\frac{\eta_{n-1}}{\eta_n} > 0.$$

■

Como consequência da relação de recorrência de três termos para $B_n(z)$, podemos estabelecer a seguinte relação

$$G_{n+1}(z) = B_n^2(z) + \alpha_{n+1}\beta_n B_{n-1}^2(z) + \alpha_{n+1}\alpha_n z^2 G_{n-1}(z), \qquad n \geq 1, \tag{3.39}$$

onde

$$G_n(z) = B_n^{'}(z)B_{n-1}(z) - B_{n-1}^{'}(z)B_n(z), \;\; n \geq 1,$$

com $G_0(z) = 0$ e $B_n^{'}(z)$ é a derivada de $B_n(z)$.

Definição 3.6 *Os polinômios $A_n(z)$, associados aos polinômios similares $B_n(z)$, serão definidos por*

$$A_n(z) = \int_a^b \frac{B_n(z) - B_n(t)}{z - t} d\psi(t).$$

Esses polinômios satisfazem à relação de recorrência

$$A_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})A_n(z) - \alpha_{n+1} z A_{n-1}(z), \qquad n \geq 1, \tag{3.40}$$

com $A_0(z) = 0$ e $A_1(z) = 1$. Para qualquer $n \geq 1$, A_n é um polinômio de grau $n-1$.

Teorema 3.15 *Os zeros do polinômio similar $B_n(z)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo $(a,b) \subseteq (0,\infty)$.*

Demonstração: Provemos que $B_n(z)$ possui pelo menos uma raiz em (a,b), $0 \leq a < b \leq \infty$. Suponhamos que $B_n(z)$ não tenha raízes em (a,b), então $B_n(z)$ não muda de sinal em (a,b) e, assim, $B_n(z) > 0$ ou $B_n(z) < 0$ em (a,b).

Como $z^{-n} > 0$ e $B_n(z)$ não muda de sinal em (a,b), temos que

$$\int_a^b z^{-n} B_n(z) d\psi(z) \neq 0. \tag{3.41}$$

Mas, pela definição de polinômios similares,

$$\int_a^b z^{-n} B_n(z) d\psi(z) = 0. \tag{3.42}$$

De (3.41) e (3.42), chegamos a um absurdo. Portanto, $B_n(z)$ tem pelo menos uma raiz de multiplicidade ímpar em (a,b). Vamos supor, agora, que $B_n(z)$ muda de sinal r vezes em (a,b), $r < n$. Sejam $z_{n,1}, z_{n,2} \ldots, z_{n,r}$ as raízes de multiplicidade ímpar de $B_n(z)$ em (a,b). Daí,

$$(z - z_{n,1})(z - z_{n,2}) \ldots (z - z_{n,r}) = \sum_{j=0}^{r} a_j z^j$$

é um polinômio mônico de grau r.

Consideremos o polinômio $B_n(z)\sum_{j=0}^{r} a_j z^j$. Multiplicando-o por z^{-n} e integrando-o obtemos

$$\sum_{j=0}^{r} a_j \int_a^b z^{-n+j} B_n(z) d\psi(z) = 0, \qquad \text{pois} \qquad j = 0, \ldots, r \text{ e } r < n. \tag{3.43}$$

O polinômio $B_n(z)\sum_{j=0}^{r} a_j z^j$ é um polinômio cujas raízes são de multiplicidade par ou complexas em (a,b). Assim, não muda de sinal em (a,b). Então,

$$\sum_{j=0}^{r} a_j \int_a^b z^{-n+j} B_n(z) d\psi(z) \neq 0. \tag{3.44}$$

De (3.43) e (3.44) temos um absurdo. Logo, $B_n(z)$ muda de sinal $r \geq n$ vezes em (a,b). Como $B_n(z)$ é um polinômio de grau n, $r = n$ e suas raízes são simples. Portanto, $B_n(z)$ tem todas as raízes simples e em (a,b). ∎

Temos, ainda, os seguintes resultados sobre os zeros dos polinômios similares

Teorema 3.16 *Se $z_{n,i}$ $i = 1, 2 \ldots, n$, é um zero do polinômio similar $B_n(z)$ para $n \geq 1$, então ele é diferente dos zeros de $B_{n-1}(z)$ e dos zeros de $A_n(z)$.*

Demonstração: Consideremos $z_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, os zeros de $B_n(z)$. Assim, pelas equações (3.38) e (3.40)

$$A_n(z_{n,i})B_{n-1}(z_{n,i}) = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \cdots \alpha_2 \mu_0 z_{n,i}^{n-1} \neq 0,$$

pois $z_{n,i} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $A_n(z_{n,i})B_{n-1}(z_{n,i}) \neq 0$, $z_{n,i}$ não é um zero do polinômio $B_{n-1}(z)$ e nem de $A_n(z)$. ■

Teorema 3.17 *Entre dois zeros consecutivos do polinômio $B_{n-1}(z)$ existe um zero de $B_n(z)$.*

Demonstração: Análoga à demonstração do Teorema 3.6, usando-se a equação (3.39).

Da mesma forma que em (3.23), podemos considerar

$$\frac{B_{n-1}(z)}{B_n(z)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\tau_{n,r}}{z - z_{n,r}}, \qquad n \geq 1, \tag{3.45}$$

onde

$$\tau_{n,r} = \frac{B_{n-1}(z_{n,r})}{B_n'(z_{n,r})} = \frac{B_{n-1}^2(z_{n,r})}{G_{n-1}(z_{n,r})} > 0, \quad 1 \leq r \leq n.$$

Além disso, temos que

$$\sum_{r=1}^{n} \tau_{n,r} = 1. \tag{3.46}$$

3.2.2 Limitantes para os Zeros

Em [32], Sri Ranga demonstrou que se $\beta_n = \beta$, $n \geq 1$, então $z_{n,r} = \dfrac{\beta^2}{z_{n,n+1-r}}$, $r = 1, 2, \ldots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, onde $\lfloor a \rfloor$ é a parte inteira do número real a. Além disso, se também tivermos $\alpha_2 = 2\alpha$ e $\alpha_{n+1} = \alpha$, $n \geq 1$, os zeros são dados explicitamente por

$$z_{n,r} = \frac{\beta^2}{z_{n,n+1-r}} \qquad \text{e} \qquad z_{n,n+1-r} = \beta + \alpha\nu_{n,r} + \sqrt{(\beta + \alpha\nu_{n,r})^2 - \beta^2},$$

para $r = 1, 2, \ldots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, onde $\nu_{n,r} = 1 + cos[\pi(2r-1)/n]$.

Dividindo-se ambos os membros da relação de recorrência (3.38) por $(z - \beta_{n+1})B_n(z)$, obtemos

$$\frac{B_{n+1}(z)}{(z - \beta_{n+1})B_n(z)} = 1 - \frac{\alpha_{n+1} z B_{n-1}(z)}{(z - \beta_{n+1})B_n(z)}.$$

Logo,

$$\frac{\alpha_{n+1} z B_{n-1}(z)}{(z - \beta_{n+1})B_n(z)} = 1 - \frac{B_{n+1}(z)}{(z - \beta_{n+1})B_n(z)} = m_n(z).$$

Assim,

$$1 - m_{n-1}(z) = 1 - \frac{\alpha_n z B_{n-2}(z)}{(z - \beta_n)B_{n-1}(z)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f_n(z) &= [1 - m_{n-1}(z)]\, m_n(z) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha_n z B_{n-2}(z)}{(z-\beta_n)B_{n-1}(z)}\right) \frac{\alpha_{n+1} z B_{n-1}(z)}{(z-\beta_{n+1})B_n(z)} \\ &= \frac{(z-\beta_n)B_{n-1}(z) - \alpha_n z B_{n-2}(z)}{(z-\beta_n)(z-\beta_{n+1})B_n(z)B_{n-1}(z)} \alpha_{n+1} z B_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Podemos observar que o numerador da fração acima é exatamente $B_n(z)$. Então, chegamos à seqüência

$$f_n(z) = \frac{\alpha_{n+1} z}{(z-\beta_n)(z-\beta_{n+1})} = [1 - m_{n-1}(z)] m_n(z), \qquad n \geq 1.$$

Usando esta sequência encadeada (veja Definição 2.9), em [35] Sri Ranga e Matioli mostraram que se

$$\hat{\beta}_N = \sup_{1 \leq n \leq N+1} \beta_n, \quad \check{\beta}_N = \inf_{1 \leq n \leq N+1} \beta_n \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}_N = \sup_{2 \leq n \leq N+1} \alpha_n$$

para qualquer $N \geq 1$, então todos os zeros dos polinômios $B_n(z)$, $1 \leq n \leq N+1$, pertencem ao intervalo $[\check{d}_{N,1}, \hat{d}_{N,1}]$, onde

$$\begin{aligned} \hat{d}_{N,1} &= \hat{\beta}_N + 2\hat{\alpha}_N + \sqrt{\left(\hat{\beta}_N + 2\hat{\alpha}_N\right)^2 - \check{\beta}_N^2}\ , \\ \check{d}_{N,1} &= \left\{\frac{1}{\check{\beta}_N} + \frac{2\hat{\alpha}_N}{\check{\beta}_N^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\check{\beta}_N} + \frac{2\hat{\alpha}_N}{\check{\beta}_N^2}\right)^2 - \frac{1}{\hat{\beta}_N^2}}\right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

As sequências $\{\hat{\beta}_N\}$ e $\{\hat{\alpha}_N\}$ são não-decrescentes, enquanto que a sequência $\{\check{\beta}_N\}$ é não-crescente. Sejam $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ e $\check{\beta}$ os respectivos limites dessas sequências. Logo, de (3.47),

$$\hat{d} = \hat{\beta} + 2\hat{\alpha} + \sqrt{\left(\hat{\beta} + 2\hat{\alpha}\right)^2 - \check{\beta}^2} \quad \text{e} \quad \check{d} = \left\{\frac{1}{\check{\beta}} + \frac{2\hat{\alpha}}{\check{\beta}^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\check{\beta}} + \frac{2\hat{\alpha}}{\check{\beta}^2}\right)^2 - \check{\beta}^2}\right\}^{-1}.$$

Então, todo os zeros de $B_n(z)$, $n \geq 1$, pertencem ao intervalo $[\check{d}, \hat{d}]$.

Retornando à relação de recorrência (3.38), a ocorrência das situações

$$\hat{\beta} < \infty \qquad \text{e} \qquad \hat{\alpha} < \infty \tag{3.48}$$

e/ou

$$0 < \check{\beta} \qquad \text{e} \qquad \hat{\alpha} < \infty, \tag{3.49}$$

é interessante. Quando (3.48) vale, temos que $\hat{\beta} < \hat{d} < \infty$ e, quando (3.49) vale, $0 < \check{d} < \check{\beta}$.

Capítulo 4

Polinômios Ortogonais: Propriedades Assintóticas

Neste capítulo estudaremos propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais cujos coeficientes da relação de recorrência são divergentes, porém de um modo particular.

Este estudo é baseado, principalmente, no artigo de Van Assche [43].

4.1 Introdução

Definição 4.1 *Uma função mensurável, não-decrescente, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, é de variação regular (no infinito) se, para algum α e todo $t > 0$,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(xt)}{f(x)} = t^\alpha$$

e α é coeficiente de variação regular.

Dentre os exemplos de funções de variação regular, podemos citar os monômios e os múltiplos de monômios.

Temos ainda que uma função de variação regular com expoente α pode se escrita como $x^\alpha G(x)$, onde $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de variação lenta, isto é, para todo $t > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(xt)}{G(x)} = 1.$$

Podemos citar como exemplos de funções de variação lenta $|log(x)|^a$ e $|log(log(x))|^b$.

Definição 4.2 *Se $f(x)$ é uma função de variação regular (com expoente α), $\lambda_n = f(n)$ é uma sequência de variação regular com expoente α.*

Suponhamos, então, que exista uma sequência de variação regular, $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$, com expoente $\alpha > 0$ tal que os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortogonais (3.6) satisfazem

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_{2n}/\lambda_{2n} = b_1, && \lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_{2n}^{1/2}/\lambda_{2n} = a_1, \\ &\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_{2n+1}/\lambda_{2n} = b_2, && \lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_{2n+1}^{1/2}/\lambda_{2n} = a_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.2 Resultados Preliminares

Os lemas dados a seguir são de primordial importância para a demonstração dos resultados de convergência que estudaremos neste e no próximo capítulo.

Lema 4.1 *Se* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *satisfaz à relação de recorrência*

$$u_{n+1} + b_n u_n + a_n u_{n-1} = 0, \qquad n \geq 0, \tag{4.2}$$

com $u_{-1} = 0$*, então*

$$\frac{u_k^2 - u_{k-1}u_{k+1}}{a_1 a_2 \cdots a_k} = u_0^2 + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{b_j - b_{j-1}}{a_1 a_2 \cdots a_j} u_j u_{j-1} + \frac{a_j - a_{j-1}}{a_1 a_2 \cdots a_j} u_j u_{j-2} \right).$$

Demonstração: Seja $D_k = u_k^2 - u_{k-1}u_{k+1}$. Da fórmula de recorrência (4.2) para u_{k+1}, temos

$$u_{k+1} = -b_k u_k - a_k u_{k-1}.$$

Multiplicando-se ambos os membros da relação acima por $-u_{k-1}$ e somando-se u_k^2, obtemos

$$\begin{aligned} D_k &= u_k^2 + b_k u_k u_{k-1} + a_k u_{k-1}^2 - a_k u_k u_{k-2} + a_k u_k u_{k-2} \\ &= a_k(u_{k-1}^2 - u_k u_{k-2}) + u_k(u_k + b_k u_{k-1} + a_k u_{k-2}) \\ &= a_k D_{k-1} + u_k(u_k + b_k u_{k-1} + a_k u_{k-2}). \end{aligned}$$

Usando novamente a relação (4.2) para u_k, temos

$$\begin{aligned} D_k &= a_k D_{k-1} + u_k\Big[(b_k - b_{k-1})u_{k-1} + (a_k - a_{k-1})u_{k-2}\Big] \\ &= a_k a_{k-1} D_{k-2} + a_k u_{k-1}\Big[(b_{k-1} - b_{k-2})u_{k-2} + (a_{k-1} - a_{k-2})u_{k-3}\Big] \\ &\quad + u_k\Big[(b_k - b_{k-1})u_{k-1} + (a_k - a_{k-1})u_{k-2}\Big]. \end{aligned}$$

Continuando da mesma forma, chegamos que

$$\begin{aligned} D_k &= a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 D_0 + a_k \cdots a_3 a_2\Big[(b_1 - b_0)u_0 u_1 + (a_1 - a_0)u_{-1}u_1\Big] \\ &\quad + a_k \cdots a_3\Big[(b_2 - b_1)u_1 u_2 + (a_2 - a_1)u_0 u_2\Big] + \ldots \\ &\quad + a_k\Big[(b_{k-1} - b_{k-2})u_{k-2}u_{k-1} + (a_{k-1} - a_{k-2})u_{k-3}u_{k-1}\Big] \\ &\quad + \Big[(b_k - b_{k-1})u_{k-1}u_k + (a_k - a_{k-1})u_k u_{k-2}\Big]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{D_k}{a_1 a_2 \cdots a_k} = u_0^2 + \sum_{j=1}^{k} \left\{ \Big[(b_j - b_{j-1})u_j u_{j-1} + (a_j - a_{j-1})u_j u_{j-2}\Big] \frac{a_{j+1} \cdots a_k}{a_1 a_2 \cdots a_k} \right\},$$

de onde segue o resultado. ∎

Lema 4.2 *Seja $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios. Então,*

$$\frac{R'_{2k}(x)}{R_{2k}(x)} = -\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{R_{2j-2}(x)}{R_{2j}(x)}\right)' \Big/ \left(\frac{R_{2j-2}(x)}{R_{2j}(x)}\right) \tag{4.3}$$

e

$$\frac{R'_{2k+1}(x)}{R_{2k+1}(x)} = -\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{R_{2j-1}(x)}{R_{2j+1}(x)}\right)' \Big/ \left(\frac{R_{2j-1}(x)}{R_{2j+1}(x)}\right), \tag{4.4}$$

onde $R_{-1}(x) = 0$.

Demonstração: Temos que

$$\frac{R'_{2k}(x)}{R_{2k}(x)} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{R'_{2j}(x)}{R_{2j}(x)} - \frac{R'_{2j-2}(x)}{R_{2j-2}(x)}\right). \tag{4.5}$$

Mas, observe que

$$-\left(\frac{R_{2j-2}(x)}{R_{2j}(x)}\right)' \Big/ \left(\frac{R_{2j-2}(x)}{R_{2j}(x)}\right) = \frac{R'_{2j}(x)}{R_{2j}(x)} - \frac{R'_{2j-2}(x)}{R_{2j-2}(x)}.$$

Logo, de (4.5) obtemos o resultado (4.3).

De modo análogo demonstramos (4.4). ■

Lema 4.3 *Suponhamos que o conjunto $\{\varepsilon_{n,j} : j \leq n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ forma uma matriz triangular limitada de números complexos tal que $\varepsilon_{n,j} \to 0$, quando $n \to \infty$, e $j/n \to t \in [0, 1]$. Então, para qualquer $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$,*

$$z^k \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_{n,j} z^{-j} \to 0,$$

quando $n \to \infty$ e $k/n \to t \in [0, 1]$.

Demonstração: Consideremos uma sequência $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que k_n/n tende para um número fixo $t \in [0, 1]$, quando n tende para o infinito. Observe que

$$z^{k_n} \sum_{j=0}^{k_n} \varepsilon_{n,j} z^{-j} = \sum_{i=0}^{k_n} \varepsilon_{n,k_n-i} z^i.$$

Para i fixo, por hipótese, temos que $\varepsilon_{n,k_n-i} \to 0$ quando $n \to \infty$ e, então,

$$|\varepsilon_{n,k_n-i} z^i| \leq M|z|^i,$$

onde M é uma constante positiva.

Assim,

$$\left| z^{k_n} \sum_{j=0}^{k_n} \varepsilon_{n,j} z^{-j} \right| \leq M \sum_{i=0}^{k_n} |z|^i.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 2.1), obtemos o resultado desejado. ■

4.3 Propriedades Assintóticas

Da fórmula de recorrência (3.6), obtemos

$$Q_{2n+1}(x) = (x - \hat{\xi}_{2n})Q_{2n}(x) - \hat{\delta}_{2n}Q_{2n-1}(x) \tag{4.6}$$

e

$$Q_{2n+2}(x) = (x - \hat{\xi}_{2n+1})Q_{2n+1}(x) - \hat{\delta}_{2n+1}Q_{2n}(x). \tag{4.7}$$

Resolvendo a segunda equação para $Q_{2n+1}(x)$, temos

$$Q_{2n+1}(x) = \frac{Q_{2n+2}(x) + \hat{\delta}_{2n+1}Q_{2n}(x)}{x - \hat{\xi}_{2n+1}}.$$

Substituindo esta expressão em (4.6), obtemos a seguinte fórmula de recorrência envolvendo somente os polinômios de grau par

$$\begin{aligned} Q_{2n+2}(x) &= \left[(x - \hat{\xi}_{2n})(x - \hat{\xi}_{2n+1}) - \hat{\delta}_{2n+1} - \hat{\delta}_{2n}\frac{x - \hat{\xi}_{2n+1}}{x - \hat{\xi}_{2n-1}}\right] Q_{2n}(x) \\ &\quad - \hat{\delta}_{2n}\hat{\delta}_{2n-1}\frac{x - \hat{\xi}_{2n+1}}{x - \hat{\xi}_{2n-1}}Q_{2n-2}(x). \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos a fórmula de recorrência que envolve apenas os polinômios de grau ímpar

$$\begin{aligned} Q_{2n+3}(x) &= \left[(x - \hat{\xi}_{2n+1})(x - \hat{\xi}_{2n+2}) - \hat{\delta}_{2n+2} - \hat{\delta}_{2n+1}\frac{x - \hat{\xi}_{2n+2}}{x - \hat{\xi}_{2n}}\right] Q_{2n+1}(x) \\ &\quad - \hat{\delta}_{2n+1}\hat{\delta}_{2n}\frac{x - \hat{\xi}_{2n+2}}{x - \hat{\xi}_{2n}}Q_{2n-1}(x). \end{aligned}$$

Logo, para $n \geq 1$, temos a seguinte relação de recorrência

$$Q_{n+2}(x) = b_n(x)Q_n(x) - a_n(x)Q_{n-2}(x), \tag{4.8}$$

onde

$$b_n(x) = (x - \hat{\xi}_n)(x - \hat{\xi}_{n+1}) - \hat{\delta}_{n+1} - \hat{\delta}_n\frac{x - \hat{\xi}_{n+1}}{x - \hat{\xi}_{n-1}}$$

e (4.9)

$$a_n(x) = \hat{\delta}_n\hat{\delta}_{n+1}\frac{x - \hat{\xi}_{n+1}}{x - \hat{\xi}_{n-1}}.$$

Teorema 4.1 *Suponhamos que os coeficientes da relação de recorrência* (3.6) *satisfaçam* (4.1), *onde* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de variação regular com expoente* $\alpha > 0$. *Seja* A *uma constante positiva tal que* $|x_{n,j}|/\lambda_n < A$ *para todo* n *(o que é possível por* (3.36)*). Então, para* $n \to \infty$ *e* $k/n \to t \in [0,1]$,

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{Q_k(\lambda_n z)}{Q_{k-2}(\lambda_n z)} \sim Q(z,t)$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$, *onde*

$$\begin{aligned} Q(z,t) \quad = \quad & \frac{1}{2}\Big\{ (z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - (a_1^2 + a_2^2)t^{2\alpha} \\ & + \sqrt{\left[(z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - (a_1^2 + a_2^2)t^{2\alpha}\right]^2 - 4a_1^2 a_2^2 t^{4\alpha}}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Demonstração: Seja $\{k_n\}$ uma sequência de inteiros tal que $k_n/n \to t$ quando $n \to \infty$. Primeiramente, vamos demonstrar que a razão $\lambda_{2n}^2 \dfrac{Q_{2k_n-2}(\lambda_{2n} z)}{Q_{2k_n}(\lambda_{2n} z)}$ converge para $1/Q(z,t)$ quando $z \in [A + d, \infty)$, com $d > 0$ suficientemente grande.

De (3.23), para $z \in [A + d, \infty)$, temos

$$\lambda_n \left| \frac{Q_{k-1}(\lambda_n z)}{Q_k(\lambda_n z)} \right| \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{\gamma_{k,j}}{z - x_{k,j}/\lambda_n} < \frac{1}{d}.$$

Consequentemente, como $z - x_{k,j}/\lambda_n > z - x_{n,n}/\lambda_n > d$ (se $k \leq n$),

$$\lambda_n^2 \left| \frac{Q_{k-2}(\lambda_n z)}{Q_k(\lambda_n z)} \right| < \frac{1}{d^2}. \tag{4.11}$$

Logo, de (4.11), para as sequências pares de $\{k_n\}$,

$$\lambda_{2n}^2 \left| \frac{Q_{2k_n-2}(\lambda_{2n} z)}{Q_{2k_n}(\lambda_{2n} z)} \right| < \frac{1}{d^2}.$$

Então, existe uma subsequência $\left\{\lambda_{2\hat{n}}^2 \dfrac{Q_{2k_{\hat{n}}-2}(\lambda_{2\hat{n}} z)}{Q_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}} z)}\right\}$ convergente. Mostremos que

$$\left\{\lambda_{2\hat{n}}^2 \frac{Q_{2k_{\hat{n}}-2}(\lambda_{2\hat{n}} z)}{Q_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}} z)}\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\lambda_{2\hat{n}}^2 \frac{Q_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}} z)}{Q_{2k_{\hat{n}}+2}(\lambda_{2\hat{n}} z)}\right\}$$

têm o mesmo limite.

Fazendo $u_k = Q_{2k}(\lambda_{2n}z)$, pelo Lema 4.1, por (4.8) e (4.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n}^2 \left| \frac{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right. & - \left. \frac{Q_{2k-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)} \right| \\
& \leq \lambda_{2n}^2 \left| \frac{a_2(\lambda_{2n}z)a_4(\lambda_{2n}z)\cdots a_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)Q_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right| \\
& \quad + \lambda_{2n}^2 \sum_{j=1}^{k} |a_{2j+2}(\lambda_{2n}z)\cdots a_{2k}(\lambda_{2n}z)| \\
& \quad \times \left\{ |b_{2j}(\lambda_{2n}z) - b_{2j-2}(\lambda_{2n}z)| \left| \frac{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)Q_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right| \right. \\
& \quad + \left. |a_{2j}(\lambda_{2n}z) - a_{2j-2}(\lambda_{2n}z)| \left| \frac{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)Q_{2j-4}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)Q_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right| \right\}. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Observe que $\dfrac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} = \dfrac{f(2k)}{f(2n)}$. Como $k/n \to t$ quando $n \to \infty$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2nk/n)}{f(2n)} = t^{\alpha}.$$

Logo, das condições (4.1), encontramos que

$$\frac{\hat{\delta}_{2k}^{1/2}}{\lambda_{2n}} = \frac{\hat{\delta}_{2k}^{1/2}}{\lambda_{2k}}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} \to a_1 t^{\alpha}, \qquad \frac{\hat{\delta}_{2k+1}^{1/2}}{\lambda_{2n}} = \frac{\hat{\delta}_{2k+1}^{1/2}}{\lambda_{2k}}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} \to a_2 t^{\alpha},$$

$$\frac{\hat{\xi}_{2k}}{\lambda_{2n}} = \frac{\hat{\xi}_{2k}}{\lambda_{2k}}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} \to b_1 t^{\alpha}, \qquad \frac{\hat{\xi}_{2k+1}}{\lambda_{2n}} = \frac{\hat{\xi}_{2k+1}}{\lambda_{2k}}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} \to b_2 t^{\alpha},$$

quando $n \to \infty$ e $k/n \to t$.

Isto significa que, para nossa sequência $\{k_n\}$, a matriz $\{a_{2j}(\lambda_{2n}z)/\lambda_{2n}^4;\ j \leq k_n, n = 1, 2, \ldots\}$ é limitada por uma constante C.

Agora, de (4.11), obtemos facilmente que, para $j \leq k$,

$$\left| \frac{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)} \right| = \prod_{i=j+1}^{k} \left| \frac{Q_{2i-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2i}(\lambda_{2n}z)} \right| < \left(\frac{1}{\lambda_{2n}d} \right)^{2k-2j}.$$

Portanto, (4.12) torna-se

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n}^2 \left| \frac{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} - \frac{Q_{2k-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)} \right| & \leq \left(\frac{1}{d^2} \right) \left(\frac{C}{d^4} \right)^k + \left(\frac{C}{d^4} \right)^k \sum_{j=1}^{k} \left\{ \frac{|b_{2j}(\lambda_{2n}z) - b_{2j-2}(\lambda_{2n}z)|}{\lambda_{2n}^2 d^4} \right. \\
& \quad + \left. \frac{|a_{2j}(\lambda_{2n}z) - a_{2j-2}(\lambda_{2n}z)|}{\lambda_{2n}^4 d^6} \right\} \left(\frac{C}{d^4} \right)^{-j}.
\end{aligned}$$

Mas, podemos escolher d suficientemente grande tal que $C < d^4$. Então, pelo Lema 4.3, segue que, para $n \to \infty$ e $k/n \to t$,

$$\left\{ \lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} - \lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)} \right\} \to 0.$$

Assim, como $\left\{\lambda_{2\hat{n}}^2 \frac{Q_{2k_{\hat{n}}-2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{Q_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}\right\}$ é uma subsequência que converge, então $\left\{\lambda_{2\hat{n}}^2 \frac{Q_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{Q_{2k_{\hat{n}}+2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}\right\}$ também converge e ambas têm o mesmo limite. Seja este limite $1/Q(z,t)$.

Pela fórmula de recorrência (4.8), temos que

$$\frac{1}{\lambda_{2\hat{n}}^2}\frac{Q_{2k_{\hat{n}}+2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{Q_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)} = \frac{b_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{\lambda_{2\hat{n}}^2} - \frac{a_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{\lambda_{2\hat{n}}^4}\frac{\lambda_{2\hat{n}}^2 Q_{2k_{\hat{n}}-2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{Q_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}.$$

onde

$$\frac{b_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{\lambda_{2\hat{n}}^2} = \left(z - \frac{\hat{\xi}_{2k_{\hat{n}}}}{\lambda_{2\hat{n}}}\right)\left(z - \frac{\hat{\xi}_{2k_{\hat{n}}+1}}{\lambda_{2\hat{n}}}\right) - \frac{\hat{\delta}_{2k_{\hat{n}}+1}}{\lambda_{2\hat{n}}^2} - \frac{\hat{\delta}_{2k_{\hat{n}}}}{\lambda_{2\hat{n}}^2}\frac{z - \hat{\xi}_{2k_{\hat{n}}+1}/\lambda_{2\hat{n}}}{z - \hat{\xi}_{2k_{\hat{n}}-1}/\lambda_{2\hat{n}}}$$

e

$$\frac{a_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{\lambda_{2\hat{n}}^4} = \frac{\hat{\delta}_{2k_{\hat{n}}}}{\lambda_{2\hat{n}}^2}\frac{\hat{\delta}_{2k_{\hat{n}}+1}}{\lambda_{2\hat{n}}^2}\frac{z - \hat{\xi}_{2k_{\hat{n}}+1}/\lambda_{2\hat{n}}}{z - \hat{\xi}_{2k_{\hat{n}}-1}/\lambda_{2\hat{n}}}.$$

Fazendo $\hat{n} \to \infty$, obtemos

$$Q(z,t) = b(z,t) - \frac{a(z,t)}{Q(z,t)},$$

com

$$b(z,t) = (z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - (a_1^2 + a_2^2)t^{2\alpha} \quad \text{e} \quad a(z,t) = a_1^2 a_2^2 t^{4\alpha}.$$

Segue, então, que

$$Q(z,t) = \frac{1}{2}\left\{b(z,t) \pm \sqrt{b^2(z,t) - 4a(z,t)}\right\}.$$

Como $Q(z,t)$ tende para o infinito quando z vai para o infinito, devemos escolher o sinal positivo. Toda subsequência de $\left\{\lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\}$ que converge tem, portanto, o mesmo limite, de onde o resultado segue para $z \in [A+d, \infty)$.

Mas, $\left\{\lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\}$ é um sequência de funções analíticas em $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$. Assim, se tomarmos um conjunto compacto $\mathcal{K}$ em $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$, a distância δ deste conjunto ao intervalo $[-A, A]$ é estritamente positiva. Portanto, para $z \in \mathcal{K}$, obtemos

$$\left\{\lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\} \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Além disso, sabemos que $\left\{\lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\}$ converge em todo subconjunto de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$ com um ponto de acumulação. Então, pelo Teorema 2.4 (Stieltjes-Vitali) , $\left\{\lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\}$ converge uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$.

Repetindo o mesmo argumento para a subsequência

$$\lambda_{2n}^2 \frac{Q_{2k_n-1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k_n+1}(\lambda_{2n}z)}$$

encontramos que esta sequência também converge para $1/Q(z,t)$, o que completa a demonstração. ■

Da fórmula de recorrência (3.6), obtemos que

$$\frac{1}{\lambda_{2n}^2}\frac{Q_{2k+1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k-1}(\lambda_{2n}z)} = \left(z - \frac{\hat{\xi}_{2k}}{\lambda_{2n}}\right)\frac{1}{\lambda_{2n}}\frac{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k-1}(\lambda_{2n}z)} - \frac{\hat{\delta}_{2k}}{\lambda_{2n}}$$

e

$$\frac{1}{\lambda_{2n}^2}\frac{Q_{2k+2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)} = \left(z - \frac{\hat{\xi}_{2k+1}}{\lambda_{2n}}\right)\frac{1}{\lambda_{2n}}\frac{Q_{2k+1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)} - \frac{\hat{\delta}_{2k+1}}{\lambda_{2n}}.$$

Fazendo $n \to \infty$, $k/n \to t \in [0,1]$ e usando o Teorema 4.1 chegamos ao seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Suponhamos que os coeficientes da relação de recorrência* (3.6) *satisfaçam* (4.1), *onde* λ_n *é uma sequência de variação regular com expoente* $\alpha > 0$. *Seja* A *uma constante positiva tal que* $|x_{n,j}|/\lambda_n < A$, $n = 1, 2, \ldots$. *Então, quando* $n \to \infty$ *e* $k/n \to t \in [0,1]$,

$$\frac{1}{\lambda_{2n}}\frac{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k-1}(\lambda_{2n}z)} \sim \frac{Q(z,t) + a_1^2 t^{2\alpha}}{z - b_1 t^{\alpha}}, \tag{4.13}$$

$$\frac{1}{\lambda_{2n}}\frac{Q_{2k+1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)} \sim \frac{Q(z,t) + a_2^2 t^{2\alpha}}{z - b_2 t^{\alpha}}, \tag{4.14}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$.

Teorema 4.3 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema* 4.1, *quando* $n \to \infty$ *temos que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\frac{(d/dz)Q_n(\lambda_n z)}{Q_n(\lambda_n z)} \quad &\to \quad \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\partial/\partial z)Q(z,t)}{Q(z,t)}dt \\ &= \int_0^1 \frac{z - (b_1+b_2)t^{\alpha}/2}{\sqrt{\left[(z-b_1t^{\alpha})(z-b_2t^{\alpha}) - (a_1^2+a_2^2)t^{2\alpha}\right]^2 - 4a_1^2a_2^2t^{4\alpha}}}dt \end{aligned} \tag{4.15}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$.

Demonstração: Como no Teorema 4.1, primeiramente mostremos o resultado para $z \in [A+d, \infty)$. Consideremos a função

$$g_n(t) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_{2\lfloor nt\rfloor}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2\lfloor nt\rfloor+2}(\lambda_{2n}z)}\right) \Big/ \left(\frac{Q_{2\lfloor nt\rfloor}(\lambda_{2nz})}{Q_{2\lfloor nt\rfloor+2}(\lambda_{2nz})}\right), \quad 0 \le t \le 1,$$

onde $\lfloor a \rfloor$ é a parte inteira do número real a. Assim, pelo Lema 4.2,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 g_n(t)dt &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{1/n} g_n(t)dt + \int_{1/n}^{2/n} g_n(t)dt + \cdots + \int_{(n-1)/n}^1 g_n(t)dt\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{1/n}\left[-\left(\frac{Q_0(\lambda_{2n}z)}{Q_2(\lambda_{2n}z)}\right)' \Big/ \left(\frac{Q_0(\lambda_{2n}z)}{Q_2(\lambda_{2n}z)}\right)\right]dt\right. \\ &\quad + \int_{1/n}^{2/n}\left[-\left(\frac{Q_2(\lambda_{2n}z)}{Q_4(\lambda_{2n}z)}\right)' \Big/ \left(\frac{Q_2(\lambda_{2n}z)}{Q_4(\lambda_{2n}z)}\right)\right]dt + \cdots \\ &\quad \left. + \int_{(n-1)/n}^1\left[-\left(\frac{Q_{2n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2n}(\lambda_{2n}z)}\right)' \Big/ \left(\frac{Q_{2n-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2n}(\lambda_{2n}z)}\right)\right]dt\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} -\left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right)' \Big/ \left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\frac{(d/dz)Q_{2n}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2n}(\lambda_{2n}z)}.
\end{aligned}
$$

Se fixarmos t, pelos teoremas 4.1 e da convergência uniforme de funções analíticas (e de suas derivadas) em conjuntos compactos, segue que

$$
g_n(t) \to -\frac{\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{Q(z,t)}\right)}{\dfrac{1}{Q(z,t)}} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial z}(Q(z,t))}{Q(z,t)}.
$$

Para $t \in [(j-1)/n, j/n)$, temos também

$$
\begin{aligned}
g_n(t) &= -\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right) \Big/ \left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right) \\
&= -\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}\right) \Big/ \left(\frac{Q_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}\right) \\
&\quad -\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right) \Big/ \left(\frac{Q_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right).
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade

$$
\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \max_{1\leq j\leq n} a_j \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad a_j, b_j > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,
$$

encontramos que

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_{k-1}(\lambda_n z)}{Q_k(\lambda_n z)}\right) \Big/ \left(\frac{Q_{k-1}(\lambda_n z)}{Q_k(\lambda_n z)}\right) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j})}{(z - x_{k,j}/\lambda_n)^2} \Big/ \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j})}{(z - x_{k,j}/\lambda_n)} \\
&\leq \max_{1\leq j\leq k} \frac{1}{z - x_{k,j}/\lambda_n} < \frac{1}{d}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\frac{1}{2} g_n(t) < \frac{1}{d}.
$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos, para $z \in [A + d, \infty)$, que

$$
\frac{1}{2n}\frac{(d/dz)Q_{2n}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2n}(\lambda_{2n}z)} = \frac{1}{2}\int_0^1 g_n(t)dt \to \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\partial/\partial z)Q(z,t)}{Q(z,t)}dt.
$$

Por um simples cálculo, chegamos que

$$
\frac{(\partial/\partial z)Q(z,t)}{Q(z,t)} = \frac{2[z - (b_1 + b_2)t^{\alpha}/2]}{\sqrt{\left[(z - b_1 t^{\alpha})(z - b_1 t^{\alpha}) - (a_1^2 + a_2^2)t^{2\alpha}\right]^2 - 4a_1^2 a_2^2 t^{4\alpha}}}.
$$

Disto, obtemos (4.15) para $z \in [A+d, \infty)$. O resultado geral segue do Teorema de Stieltjes-Vitali (Teorema 2.4).

O mesmo argumento pode ser usado para os índices ímpares. ■

4.3.1 Fórmulas de Quadratura Invariantes

Os Teoremas 4.2 e 4.3 podem ser usados para construir fórmulas de quadratura que usam os zeros dos polinômios ortogonais. Usaremos aqui o conceito de convergência fraca (Definição 2.8).

O Teorema 2.5 (Grommer-Hamburger) nos garante que para (2.2) ser válido basta mostrarmos que $S(F_n(x); z)$ converge para $S(F(x); z)$, uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Como nosso objetivo é obter fórmulas de quadratura, necessitaremos do uso das transformadas de Stieltjes das seguintes funções distribuições:

$$F(x; \delta, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{|t|}{\sqrt{\beta^2 - t^2}\sqrt{t^2 - \delta^2}} I_B(t) dt \tag{4.16}$$

e

$$G(x; \delta, \beta, \gamma) = \frac{2}{\pi} \frac{\left[\left(\delta^2 - \gamma^2\right)^{1/2} + \left(\beta^2 - \gamma^2\right)^{1/2}\right]^2}{\left(\beta^2 - \delta^2\right)^2} \times \int_{-\infty}^{x} \frac{\sqrt{\beta^2 - t^2}\sqrt{t^2 - \delta^2}}{|t - \gamma|} I_B(t) dt, \tag{4.17}$$

onde $|\gamma| \leq \delta < \beta$ e $I_B(t)$ é a função indicadora do conjunto $B = [-\beta, -\delta] \cup [\delta, \beta]$, isto é,

$$I_B(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ t \notin B, \\ 1, & \text{se } \ t \in B. \end{cases}$$

Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$dF(x; \delta, \beta) = \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{\sqrt{\beta^2 - x^2}\sqrt{x^2 - \delta^2}} dx$$

e

$$dG(x; \delta, \beta, \gamma) = \frac{2}{\pi} \frac{\left[\left(\delta^2 - \gamma^2\right)^{1/2} + \left(\beta^2 - \gamma^2\right)^{1/2}\right]^2}{\left(\beta^2 - \delta^2\right)^2} \frac{\sqrt{\beta^2 - x^2}\sqrt{x^2 - \delta^2}}{|x - \gamma|} dx,$$

para $x \in B$.

Lema 4.4 *Seja $z \in \mathbb{C} \setminus [-\beta, -\delta] \cup [\delta, \beta]$. Então,*

$$(i) \quad S(F(x; \delta, \beta); z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 - \delta^2}\sqrt{z^2 - \beta^2}}, \tag{4.18}$$

$$(ii) \quad S(G(x; \delta, \beta, \gamma); z) = \frac{2(z + \gamma)}{z^2 - \gamma^2 - \left[(\delta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2)\right]^{1/2} \sqrt{z^2 - \delta^2}\sqrt{z^2 - \beta^2}}. \tag{4.19}$$

As raízes quadradas $\sqrt{z^2 - \delta^2}$ e $\sqrt{z^2 - \beta^2}$ são escolhidas de modo que $\dfrac{z^2}{\left(\sqrt{z^2 - \delta^2}\sqrt{z^2 - \beta^2}\right)}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus [-\beta, -\delta] \cup [\delta, \beta]$ e tende para um quando z tende para o infinito.

Demonstração: Pela definição de transformada de Stieltjes, temos que

$$\begin{aligned} S(F(x;\delta,\beta);z) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\beta}^{-\delta} \frac{1}{z-x}\frac{|x|}{\sqrt{\beta^2-x^2}\sqrt{x^2-\delta^2}}dx \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\beta} \frac{1}{z-x}\frac{|x|}{\sqrt{\beta^2-x^2}\sqrt{x^2-\delta^2}}dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $x=-t$ na primeira integral e, em seguida, $t=x$, obtemos

$$\begin{aligned} S(F(x;\delta,\beta);z) &= \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\beta} \frac{1}{z+x}\frac{|x|}{\sqrt{\beta^2-x^2}\sqrt{x^2-\delta^2}}dx \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\beta} \frac{1}{z-x}\frac{|x|}{\sqrt{\beta^2-x^2}\sqrt{x^2-\delta^2}}dx. \end{aligned}$$

Agora, usando a mudança de variáveis $y=x^2$ e, em seguida, $y=\frac{(\beta^2-\delta^2)}{2}t+\frac{(\beta^2+\delta^2)}{2}$, chegamos que

$$S(F(x;\delta,\beta);z)=\frac{2z}{(\beta^2-\delta^2)\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\frac{2z^2-\beta^2-\delta^2}{\beta^2-\delta^2}-t}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

De (3.34) e (3.35) sabemos que

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{u-x}d\phi(x)=FC(u),$$

onde $FC(u)$ é o limite da fração contínua

$$\cfrac{\hat{\delta}_1}{u-\hat{\xi}_1-\cfrac{\hat{\delta}_2}{u-\hat{\xi}_2-\cfrac{\hat{\delta}_3}{u-\hat{\xi}_3-\ddots}}}$$

e $\hat{\delta}_i$, $\hat{\xi}_i$, $i=1,2,\ldots$, são os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios ortogonais com relação a $d\phi(x)$.

Mas, da fórmula de recorrência para os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie mônicos, sabemos que $\hat{\delta}_1=\pi$, $\hat{\delta}_2=1/2$, $\hat{\delta}_3=\hat{\delta}_4=\ldots=1/4$ e $\hat{\xi}_i=0$ para $i=1,2,\ldots$.

Assim, para $d\phi(x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $FC(u)=\dfrac{\pi}{u-\dfrac{1}{2L(u)}}$, onde $L(u)=u-\dfrac{1}{4L(u)}$.

Logo, $[L(u)]^2-uL(u)+1/4=0$. Daí,

$$L(u)=\frac{u\pm\sqrt{u^2-1}}{2} \qquad \text{e} \qquad FC(u)=\frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}},$$

pois $FC(u)\to 0$, quando $u\to\infty$.

Portanto, para $u = \dfrac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2}$,

$$FC(u) = \frac{\pi(\beta^2 - \delta^2)/2}{\sqrt{(u^2 - \beta^2)(u^2 - \delta^2)}}.$$

Daí, chegamos no resultado (i).

Para a distribuição $G(x; \delta, \beta, \gamma)$, consideremos dois casos:

(a) Seja $\gamma = 0$. De maneira análoga à feita para a distribuição $F(x; \delta; \beta)$,

$$S(G(x; \delta, \beta, 0); z) = \frac{1}{\pi} \frac{(\delta + \beta)^2}{(\beta^2 - \delta^2)} \frac{1}{z} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2} - t} \sqrt{1 - t^2} dt - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{\beta^2 + \delta^2}{\delta^2 - \beta^2} - t} \sqrt{1 - t^2} dt \right\}.$$

Como, neste caso, a função peso é a de Chebyshev de 2ª espécie, a fração contínua $FC(u)$ é dada por $FC(u) = \pi(u - \sqrt{u^2 - 1})$.

Logo, a primeira integral entre chaves é igual a

$$\pi \left[\frac{2z^2 - (\beta^2 + \delta^2) - 2\sqrt{z^2 - \beta^2}\sqrt{z^2 - \delta^2}}{\beta^2 - \delta^2} \right]$$

e, a segunda, igual a

$$-\pi \left[\frac{\beta^2 + \delta^2 - 2\delta\beta}{\beta^2 - \delta^2} \right].$$

Substituindo os resultados acima na transformada de Stieltjes da distribuição $G(x; \delta, \beta, 0)$ obtida anteriormente e multiplicando-a e dividindo-a por $z^2 - \delta\beta + \sqrt{z^2 - \beta^2}\sqrt{z^2 - \delta^2}$, chegamos ao resultado desejado para $\gamma = 0$.

(b) Para $\gamma \neq 0$, de maneira análoga à feita anteriormente, chegamos que

$$\begin{aligned} S(G(x; \delta, \beta, \gamma); z) \quad &= \quad \frac{1}{\pi} \frac{\left[\left(\delta^2 - \gamma^2\right)^{1/2} + \left(\beta^2 - \gamma^2\right)^{1/2} \right]^2}{\left(\beta^2 - \delta^2\right)^2} \frac{(z + \gamma)(\beta^2 - \delta^2)}{(z^2 - \gamma^2)} \\ &\times \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2} - t} \sqrt{1 - t^2} dt - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{\beta^2 + \delta^2 - 2\gamma^2}{\delta^2 - \beta^2} - t} \sqrt{1 - t^2} dt \right\}. \end{aligned}$$

Logo, por (3.34) e (3.35), o valor da primeira integral é

$$\pi(u - \sqrt{u^2 - 1}), \quad \text{com} \quad u = \frac{2z^2 - \beta^2 - \delta^2}{\beta^2 - \delta^2}$$

e, o da segunda, é

$$\pi(v - \sqrt{v^2 - 1}), \quad \text{com} \quad v = \frac{\beta^2 + \delta^2 - 2\gamma^2}{\delta^2 - \beta^2}.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
S(G(x;\delta,\beta,\gamma);z) &= \frac{1}{\pi}\frac{\left[\left(\delta^2-\gamma^2\right)^{1/2}+\left(\beta^2-\gamma^2\right)^{1/2}\right]^2}{\left(\beta^2-\delta^2\right)^2}\frac{(z+\gamma)(\beta^2-\delta^2)}{(z^2-\gamma^2)} \\
&\quad \times\pi\left[z^2-\gamma^2-\sqrt{\delta^2-\gamma^2}\sqrt{\beta^2-\gamma^2}-\sqrt{z^2-\beta^2}\sqrt{z^2-\delta^2}\right].
\end{aligned}
$$

Multiplicando-se e dividindo-se esta expressão por

$$
z^2-\gamma^2-\sqrt{\delta^2-\gamma^2}\sqrt{\beta^2-\gamma^2}+\sqrt{z^2-\beta^2}\sqrt{z^2-\delta^2},
$$

obtemos o resultado desejado. ■

Consideremos, agora,

$$
\begin{aligned}
b_{(1)} &= \min\{b_1,b_2\}, \qquad b_{(2)} = \max\{b_1,b_2\}, \\
a_{(1)} &= \min\{a_1,a_2\} \quad \text{e} \quad a_{(2)} = \max\{a_1,a_2\}.
\end{aligned}
$$

Teorema 4.4 *Sob as condições do Teorema* 4.1*, para toda função contínua* f*, quando* $n\to\infty$ *e* $k/n\to t\in[0,1]$*, temos que*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \sum_{j=1}^{2k}\lambda_{2k,j}p_{2k-1}^2(x_{2k,j})f(x_{2k,j}/\lambda_{2n}) \to \frac{a_{(1)}^2}{a_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dG\left(x-\frac{b_1+b_2}{2}t^\alpha;\delta t^\alpha,\beta t^\alpha,-\gamma t^\alpha\right) \\
&\qquad\qquad +\frac{a_1^2-a_{(1)}^2}{a_1^2}f(b_2t^\alpha), \\
&(ii) \quad \sum_{j=1}^{2k+1}\lambda_{2k+1,j}p_{2k}^2(x_{2k+1,j})f(x_{2k+1,j}/\lambda_{2n}) \to \frac{a_{(1)}^2}{a_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dG\left(x-\frac{b_1+b_2}{2}t^\alpha;\delta t^\alpha,\beta t^\alpha,\gamma t^\alpha\right) \\
&\qquad\qquad +\frac{a_2^2-a_{(1)}^2}{a_2^2}f(b_1t^\alpha), \\
&(iii) \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{n,j}/\lambda_n) \to \int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF\left(x-\frac{b_1+b_2}{2}t^\alpha;\delta t^\alpha,\beta t^\alpha\right)dt,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\delta^2=\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2+(a_1-a_2)^2, \quad \beta^2=\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2+(a_1+a_2)^2 \quad e \quad \gamma^2=\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2. \tag{4.20}
$$

Demonstração: Sabemos, de (3.23) e de $\lambda_{n,k}=\dfrac{a^*_{n,n}}{a^*_{n-1,n-1}}\dfrac{1}{p'_n(x_{n,k})p_{n-1}(x_{n,k})}$, que

$$
\lambda_n\frac{Q_{k-1}(\lambda_nz)}{Q_k(\lambda_nz)}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{k,j}p_{k-1}^2(x_{k,j})}{z-x_{k,j}/\lambda_n}.
$$

Seja $G_{n,k}(x)$ a função distribuição discreta

$$G_{n,k}(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j}) U(x - x_{k,j}/\lambda_n), \tag{4.21}$$

onde $U(x)$ é a função de Heaviside

$$U(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

A transformada de Stieltjes da função $G_{n,k}(x)$ é dada por

$$S(G_{n,k}(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dG_{n,k}(x)}{z - x} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j})}{z - x_{k,j}/\lambda_n} = \lambda_n \frac{Q_{k-1}(\lambda_n z)}{Q_k(\lambda_n z)}. \tag{4.23}$$

O comportamento assintótico dessa transformada é dada pelo Teorema 4.2. Pelo Teorema 2.5 (Grommer-Hamburger), seu limite deve ser a transformada de Stieltjes do limite fraco da função distribuição $G_{n,k}(x)$.

Para n par e k par, de (4.23) e pelo Teorema 4.2 temos que

$$S(G_{2n,2k}(x); z) = \lambda_{2n} \frac{Q_{2k-1}(\lambda_{2n} z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n} z)} \to \frac{z - b_1 t^\alpha}{Q(z,t) + a_1^2 t^{2\alpha}}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$, quando $n \to \infty$ e $k/n \to t \in [0, 1]$.

De (4.10),

$$\begin{aligned} A &= \frac{z - b_1 t^\alpha}{Q(z,t) + a_1^2 t^{2\alpha}} \\ &= 2(z - b_1 t^\alpha) \Big\{ (z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - (a_2^2 - a_1^2) t^{2\alpha} \\ &\quad + \sqrt{\left[(z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - (a_1^2 + a_2^2) t^{2\alpha}\right]^2 - 4 a_1^2 a_2^2 t^{4\alpha}} \Big\}^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando-se e dividindo-se o último membro da equação acima pelo conjugado do termo entre chaves, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \left[2(z - b_2 t^\alpha) a_1^2 t^{2\alpha}\right]^{-1} \Big\{ (z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) + (a_1^2 - a_2^2) t^{2\alpha} \\ &\quad - \sqrt{\left[(z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - (a_1^2 + a_2^2) t^{2\alpha}\right]^2 - 4 a_1^2 a_2^2 t^{4\alpha}} \Big\}. \end{aligned}$$

Agora, somando-se e subtraindo-se $|(a_1^2 - a_2^2) t^{2\alpha}|$ ao segundo membro e, em seguida, multiplicando-se e dividindo-se pelo conjugado do termo entre chaves, chegamos que

$$\begin{aligned} A &= \frac{|a_1^2 - a_2^2| - (a_2^2 - a_1^2)}{2(z - b_2 t^\alpha) a_1^2} + \frac{(a_1^2 + a_2^2) - |a_1^2 - a_2^2|}{2 a_1^2} \\ &\quad \times 2(z - b_1 t^\alpha) \Big\{ (z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - |a_1^2 - a_2^2| t^{2\alpha} \\ &\quad + \sqrt{\left[(z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - (a_1^2 + a_2^2) t^{2\alpha}\right]^2 - 4 a_1^2 a_2^2 t^{4\alpha}} \Big\}^{-1}. \end{aligned}$$

Note que

$$(z-b_1t^\alpha)(z-b_2t^\alpha)=(\hat{z}^2-\hat{\gamma}^2),$$

$$\sqrt{\left[(z-b_1t^\alpha)(z-b_2t^\alpha)-(a_1^2+a_2^2)t^{2\alpha}\right]^2-4a_1^2a_2^2t^{4\alpha}}=\sqrt{\hat{z}^2-\hat{\delta}^2}\sqrt{\hat{z}^2-\hat{\beta}^2}$$

e

$$\left|(a_1^2-a_2^2)t^{2\alpha}\right|=\left[(\hat{\delta}^2-\hat{\gamma}^2)(\hat{\beta}^2-\hat{\delta}^2)\right]^{1/2},$$

onde

$$\hat{z}=z-\frac{b_1+b_2}{2}t^\alpha,\quad \hat{\gamma}=\frac{b_1-b_2}{2}t^\alpha=\gamma t^\alpha,\quad \hat{\delta}^2=\left[\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2+(a_1-a_2)^2\right]t^{2\alpha}=\delta^2t^{2\alpha}$$

e

$$\hat{\beta}^2=\left[\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2+(a_1+a_2)^2\right]t^{2\alpha}=\beta^2t^{2\alpha}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} A &= \frac{|a_1^2-a_2^2|-(a_2^2-a_1^2)}{2(z-b_2t^\alpha)a_1^2}+\frac{(a_1^2+a_2^2)-|a_1^2-a_2^2|}{2a_1^2} \\ &\quad\times 2(\hat{z}+\hat{\gamma})\left\{(\hat{z}^2-\hat{\gamma}^2)-\left[(\hat{\delta}^2-\hat{\gamma}^2)(\hat{\beta}^2-\hat{\delta}^2)\right]^{1/2}+\sqrt{\hat{z}^2-\hat{\delta}^2}\sqrt{\hat{z}^2-\hat{\beta}^2}\right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Analisando os casos $a_1\geq a_2$ e $a_1<a_2$, obtemos

$$\frac{(a_1^2+a_2^2)-|a_1^2-a_2^2|}{2a_1^2}=\frac{a_{(1)}^2}{a_1^2}\quad\text{e}\quad\frac{|a_1^2-a_2^2|-(a_2^2-a_1^2)}{2(z-b_2t^\alpha)a_1^2}=\frac{a_1^2-a_{(1)}^2}{a_1^2}\frac{1}{z-b_2t^\alpha}.$$

Logo,

$$A=\frac{a_1^2-a_{(1)}^2}{a_1^2}\frac{1}{z-b_2t^\alpha}+\frac{a_{(1)}^2}{a_1^2}\frac{2(\hat{z}+\hat{\gamma})}{(\hat{z}^2-\hat{\gamma}^2)-\left[(\hat{\delta}^2-\hat{\gamma}^2)(\hat{\beta}^2-\hat{\delta}^2)\right]^{1/2}+\sqrt{\hat{z}^2-\hat{\delta}^2}\sqrt{\hat{z}^2-\hat{\beta}^2}}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2k}\frac{\lambda_{2k,j}p_{2k-1}(x_{2k,j})}{x-x_{2k,j}/\lambda_{2n}} &\to \frac{a_{(1)}^2}{a_1^2}S\left(G\left(x-\frac{b_1+b_2}{2}t^\alpha;\delta t^\alpha,\beta t^\alpha,-\gamma t^\alpha\right);z\right) \\ &\quad+\frac{a_1^2-a_{(1)}^2}{a_1^2}S(U(x-b_2t^\alpha);z), \end{aligned}$$

o que conclui parte do teorema.

Como convergência fraca é equivalente a (2.2), temos o resultado dado em (i).

Agora, para n par e k ímpar, de (4.23),

$$S(G_{2n,2k+1}(x);z)=\lambda_{2n}\frac{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k+1}(\lambda_{2n}z)}\to\frac{z-b_2t^\alpha}{Q(z,t)+a_2^2t^{2\alpha}}.$$

A demonstração é análoga a (i) substituindo-se (a_1, b_1) por (a_2, b_2).

Consideremos agora a função distribuição

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U(x - x_{n,j}/\lambda_{2n}), \tag{4.24}$$

onde $U(x)$ é a função de Heaviside (4.22).

De (3.25), temos que

$$S(F_n(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_n(x)}{z-x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(x - x_{n,j}/\lambda_n)} = \frac{1}{n}\frac{(d/dz)Q_n(\lambda_n z)}{Q_n(\lambda_n z)}.$$

O comportamento assintótico dessa transformada é dado pelo Teorema 4.3, isto é,

$$\begin{aligned} S(F_n(x); z) &\to \int_0^1 \frac{z - (b_1+b_2)/t^{\alpha}}{\sqrt{(z - b_1 t^{\alpha})(z - b_2 t^{\alpha}) - (a_1^2 + a_2^2)t^{2\alpha} - 4a_1^2 a_2^2 t^{4\alpha}}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\hat{z}}{\sqrt{\hat{z}^2 - \hat{\delta}^2}\sqrt{\hat{z}^2 - \hat{\beta}^2}} dt. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.4, obtemos que

$$\begin{aligned} S(F_n(x); z) &\to \int_0^1 S\left(F\left(x - \frac{b_1+b_2}{2}t^{\alpha}; \delta t^{\alpha}, \beta t^{\alpha}\right); z\right) dt \\ &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF\left(x - \frac{b_1+b_2}{2}t^{\alpha}; \delta t^{\alpha}, \beta t^{\alpha}\right) dt, \end{aligned}$$

o que demonstra (iii). ∎

4.3.2 Casos Especiais

Agora, consideremos alguns casos especiais dos teoremas anteriores desta seção.

Caso 1: O caso mais importante é quando $b_1 = b_2 = b$ e $a_1 = a_2 = a > 0$.

Neste caso, pelo Teorema 4.4,

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j}) f(x_{k,j}/\lambda_n) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG(x - bt^{\alpha}; 0, 2at^{\alpha}, 0) dt.$$

Fazendo $x = zt^{\alpha}$ e, em seguida, $z = x$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,j} p_{k-1}^2(x_{k,j}) f(x_{k,j}/\lambda_n) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(xt^{\alpha}) dG((x - b)t^{\alpha}; 0, 2at^{\alpha}, 0) dt.$$

Mas, de (4.17),

$$G((x-b)t^{\alpha};0,2at^{\alpha},0)=\frac{1}{2a^2\pi t^{2\alpha}}\int_{-\infty}^{(x-b)t^{\alpha}}\sqrt{4at^{2\alpha}-u^2}I_{[-2at^{\alpha},2at^{\alpha}]}(u)du.$$

Fazendo a mudança de variável $u=(z-b)t^{\alpha}$ e, em seguida, $u=z$, obtemos

$$G((x-b)t^{\alpha};0,2at^{\alpha},0)=\frac{1}{2a^2\pi}\int_{-\infty}^{x}\sqrt{4a^2-(u-b)^2}I_{[b-2a,b+2a]}(u)du.$$

Daí, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$dG((x-b)t^{\alpha};0,2at^{\alpha},0)=\frac{1}{2a^2\pi}\sqrt{4a^2-(x-b)^2}I_{[b-2a,b+2a]}(x)dx.$$

Portanto, o resultado do Teorema 4.4 torna-se

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\lambda_{k,j}p_{k-1}^2(x_{k,j})f(x_{k,j}/\lambda_n) &\rightarrow \frac{1}{2a^2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(xt^{\alpha})\sqrt{4a^2-(x-b)^2}I_{[b-2a,b+2a]}(x)dx\\ &= \frac{1}{2a^2\pi}\int_{b-2a}^{b+2a}f(xt^{\alpha})\sqrt{4a^2-(x-b)^2}dx.\end{aligned}$$

Agora, para (iii) temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{n,j}/\lambda_n)\rightarrow\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dF(x-bt^{\alpha};0,2at^{\alpha})dt.$$

Assim, fazendo as mesmas mudanças de variáveis anteriores, chegamos que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{n,j}/\lambda_n)\rightarrow\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_{b-2a}^{b+2a}f(xt^{\alpha})\frac{dx}{\sqrt{4a^2-(x-b)^2}}dt.$$

Se fizermos $f(x)=x^M$ nesta última expressão,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_{n,j}}{\lambda_n}\right)^M &\rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_{b-2a}^{b+2a}(xt^{\alpha})^M\frac{dx}{\sqrt{4a^2-(x-b)^2}}dt\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{M\alpha+1}\int_{b-2a}^{b+2a}\frac{x^Mdx}{\sqrt{4a^2-(x-b)^2}}dt,\end{aligned}$$

que é um resultado semelhante aos resultados de Nevai e Dehesa [27].

Caso 2: Outro importante caso a ser considerado é quando $a_1=0$ ou $a_2=0$.

Sabemos que

$$S(G_{2n,2k}(x);z)=\lambda_{2n}\frac{Q_{2k-1}(\lambda_{2n}z)}{Q_{2k}(\lambda_{2n}z)}\rightarrow\frac{z-b_1t^{\alpha}}{Q(z,t)+a_1^2t^{\alpha}}.$$

- Se $a_2 = 0$, então,

$$S(G_{2n,2k}(x); z) \to \frac{1}{z - b_2 t^\alpha} = S(U(x - b_2 t^\alpha); z).$$

- Se $a_1 = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
S(G_{2n,2k}(x); z) &\to \frac{z - b_1 t^\alpha}{(z - b_1 t^\alpha)(z - b_2 t^\alpha) - a_2^2 t^{2\alpha}} \\
&= \frac{z - b_1 t^\alpha}{\left[z - \frac{b_1 + b_2}{2} t^\alpha - \beta t^\alpha\right]\left[z - \frac{b_1 + b_2}{2} t^\alpha + \beta t^\alpha\right]} \\
&= \frac{1}{2\beta}\left\{\left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \beta\right) S\left(U\left(x - \left[\frac{b_1 + b_2}{2} + \beta\right] t^\alpha\right); z\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{b_1 - b_2}{2} + \beta\right) S\left(U\left(x - \left[\frac{b_1 + b_2}{2} - \beta\right] t^\alpha\right); z\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2\beta}\left\{(\beta - \gamma) S\left(U\left(x - \left[\frac{b_1 + b_2}{2} + \beta\right] t^\alpha\right); z\right)\right. \\
&\quad \left. + (\beta + \gamma) S\left(U\left(x - \left[\frac{b_1 + b_2}{2} - \beta\right] t^\alpha\right); z\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Neste caso, vemos facilmente que $\delta = \beta$ no Teorema 4.4.
De (4.19), temos que

$$\begin{aligned}
S(G(x; \beta t^\alpha, \beta t^\alpha, \gamma t^\alpha); z) &= \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{\beta + \gamma}{z - \beta t^\alpha} + \frac{\beta - \gamma}{z + \beta t^\alpha}\right\} \\
&= \frac{\beta + \gamma}{2\beta} S(U(x - \beta t^\alpha); z) + \frac{\beta - \gamma}{2\beta} S(U(x + \beta t^\alpha); z).
\end{aligned}$$

Daí,

$$G(x; \beta, \beta, \gamma) = \frac{\beta + \gamma}{2\beta} U(x - \beta) + \frac{\beta - \gamma}{2\beta} U(x + \beta).$$

Disto, o resultado do Teorema 4.4 pode, então, ser dado como

$$\sum_{j=1}^{2k} \lambda_{2k,j} p_{2k-1}^2(x_{2k,j}) f(x_{2k,j}/\lambda_{2n}) \to \begin{cases} f(b_2 t^\alpha), & \text{se } a_2 = 0, \\ \frac{1}{2\beta}\left\{\left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \beta\right) f\left(\left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \beta\right) t^\alpha\right)\right. & \\ \left. + \left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \beta\right) f\left(\left(\frac{b_1 + b_2}{2} - \beta\right) t^\alpha\right)\right\}, & \text{se } a_1 = 0. \end{cases}$$

De maneira análoga,

$$\sum_{j=1}^{2k+1} \lambda_{2k+1,j} p_{2k}^2(x_{2k+1,j}) f(x_{2k+1,j}/\lambda_{2n}) \to \begin{cases} f(b_1 t^\alpha), & \text{se } a_1 = 0, \\ \frac{1}{2\beta}\left\{\left(\frac{b_1 - b_2}{2} + \beta\right) f\left(\left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \beta\right) t^\alpha\right)\right. & \\ \left. + \left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \beta\right) f\left(\left(\frac{b_1 + b_2}{2} - \beta\right) t^\alpha\right)\right\}, & \text{se } a_2 = 0. \end{cases}$$

Já, de (4.15), temos que

$$S(F_n(x);z) \to \int_0^1 \frac{z-(b_1+b_2)t^\alpha/2}{\sqrt{\left[(z-b_1t^\alpha)(z-b_2t^\alpha)-(a_1^2+a_2^2)t^{2\alpha}\right]^2-4a_1^2a_2^2t^{4\alpha}}}dt.$$

Como $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
S(F_n(x);z) &\to \int_0^1 \frac{z-(b_1+b_2)t^\alpha/2}{(z-b_2t^\alpha)(z-b_1t^\alpha)-a_{(2)}^2t^{2\alpha}}dt \\
&= \int_0^1 \frac{z-(b_1+b_2)t^\alpha/2}{\left[z-\left(\frac{b_1+b_2}{2}+\beta\right)t^\alpha\right]\left[z-\left(\frac{b_1+b_2}{2}-\beta\right)t^\alpha\right]}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{z-\left(\frac{b_1+b_2}{2}+\beta\right)t^\alpha}+\frac{1}{z-\left(\frac{b_1+b_2}{2}-\beta\right)t^\alpha}\right]dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{S\left(U\left(x-\left[\frac{b_1+b_2}{2}+\beta\right]t^\alpha\right);z\right)\right. \\
&\quad \left.+\,S\left(U\left(x-\left[\frac{b_1+b_2}{2}-\beta\right]t^\alpha\right);z\right)\right\}dt. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(x_{n,j}/\lambda_n) \to \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{f\left(\left(\frac{b_1+b_2}{2}+\beta\right)t^\alpha\right)+f\left(\left(\frac{b_1+b_2}{2}-\beta\right)t^\alpha\right)\right\}dt,$$

onde f é uma função contínua, $n\to\infty$ e $k/n \to t$ e

$$\beta^2 = \left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2 + a_{(2)}^2.$$

Do Teorema 4.4, temos que

$$S(F_n(x);z) \to \int_0^1 S\left(F\left(x-\frac{b_1+b_2}{2}t^\alpha;\beta t^\alpha,\beta t^\alpha\right);z\right)dt.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
S\left(F\left(x-\frac{b_1+b_2}{2}t^\alpha;\beta t^\alpha,\beta t^\alpha\right);z\right) &= \frac{1}{2}\left\{S\left(U\left(x-\left(\frac{b_1+b_2}{2}+\beta\right)t^\alpha\right);z\right)\right. \\
&\quad \left.+\,S\left(U\left(x-\left(\frac{b_1+b_2}{2}-\beta\right)t^\alpha\right);z\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$F(x-(b_1+b_2)t^\alpha/2;\beta t^\alpha,\beta t^\alpha) = \frac{1}{2}U(x-(b_1+b_2)t^\alpha/2+\beta t^\alpha)+\frac{1}{2}U(x-(b_1+b_2)t^\alpha/2-\beta t^\alpha).$$

Portanto,

$$F(x,\beta,\beta) = \frac{1}{2}U(x+\beta)+\frac{1}{2}U(x-\beta).$$

4.3.3 Exemplos

Em [27], Nevai e Dehesa estudaram importantes famílias de polinômios ortogonais que satisfazem a uma relação de recorrência com coeficientes de variação regular tais como os polinômios de Laguerre, Hermite, Meixner (de primeira e de segunda espécies), Poisson-Charlier e Carlitz. Para todas essas famílias, podemos aplicar os resultados obtidos nesta seção.

Exemplo 4.1 Sabemos que os polinômios de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$, são ortogonais no intervalo $[0,\infty)$ com relação à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$ e satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x-(2n+\alpha+1))L_n^{(\alpha)}(x) - n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \qquad n \geq 0.$$

Assim,

$$\hat{\xi}_{2n} = 4n+\alpha+1, \qquad \hat{\delta}_{2n} = 2n(2n+\alpha),$$
$$\hat{\xi}_{2n+1} = 4n+\alpha+3, \qquad \hat{\delta}_{2n+1} = (2n+1)(2n+\alpha+1).$$

Podemos observar que os coeficientes são ilimitados, mas são de variação regular. Logo, escolhendo $\{\lambda_n\} = \{n\}$ $(\alpha = 1)$, obtemos que $b_1 = b_2 = 2$ e $a_1 = a_2 = 1$. Assim, estamos tratando do **Caso 1** da última seção.

Sejam $\{x_{n,j}\}_{j=1}^n$ os zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$. Então,

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,j} l_{k-1}^2(x_{k,j}) f(x_{k,j}/n) \to \frac{1}{2\pi}\int_0^4 f(xt)\sqrt{4-(x-2)^2}dx$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_{n,j}/n) \to \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^4 f(xt)\frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dt$$

onde $\{l_n(x)\}_{n=0}^\infty$ são os polinômios ortonormais e f é uma função contínua.

Agora, pelo Teorema 4.1, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\frac{L_k^{(\alpha)}(nz)}{L_{k-2}^{(\alpha)}(nz)} = \frac{1}{2}\left\{z^2 - 2zt + 2t^2 + |z-2t|\sqrt{z^2-2zt}\right\}$$

uniformemente para z em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$.

Exemplo 4.2 Os polinômios de Hermite, $H_n(x)$, são ortogonais em $(-\infty,\infty)$ com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$. Eles satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \qquad n \geq 0.$$

Logo,

$$\hat{\xi}_{2n} = \hat{\xi}_{2n+1} = 0, \qquad \hat{\delta}_{2n} = n \qquad \text{e} \qquad \hat{\delta}_{2n+1} = \frac{2n+1}{2}.$$

Escolhendo $\{\lambda_n\} = \{\sqrt{n}\}$ $(\alpha = 1/2)$, obtemos que $b_1 = b_2 = 0$ e $a_1 = a_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Novamente, estamos no **Caso 1**.

Pelo Teorema 4.1, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{H_k(\sqrt{n}z)}{H_{k-2}(\sqrt{n}z)} = \frac{1}{2}\left\{z^2 - t + |z|\sqrt{z^2-2t}\right\}$$

uniformemente para z em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus[-A,A]$.

Como estamos no Caso 1, considerando $\{x_{n,j}\}_{j=1}^{n}$ os zeros de $H_n(x)$, temos que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_{k,j} h_{k-1}^2(x_{k,j}) f(x_{k,j}/\sqrt{n}) \to \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x\sqrt{t})\sqrt{2-x^2}dx$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_{n,j}/\sqrt{n}) \to \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x\sqrt{t})\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}dt.$$

onde f é uma função contínua e $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são os polinômios ortonormais.

Exemplo 4.3 Veremos, agora, polinômios cujas relações de recorrência têm limites diferentes para índices ímpares e pares.

Stieltjes [37], Carlitz [6] e Al-Salam [2] estudaram dois sistemas de polinômios ortogonais $\{C_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{D_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ cujas fórmulas de recorrência satisfazem

$$C_{n+1}(x) = xC_n(x) - \hat{\delta}_n^{(C)} C_{n-1}(x) \tag{4.26}$$

e

$$D_{n+1}(x) = xD_n(x) - \hat{\delta}_n^{(D)} D_{n-1}(x), \tag{4.27}$$

com

$$\begin{array}{ll} \hat{\delta}_{2n}^{(C)} = (2n)^2\kappa^2, & \hat{\delta}_{2n}^{(D)} = (2n)^2, \\ \hat{\delta}_{2n+1}^{(C)} = (2n+1)^2, & \hat{\delta}_{2n+1}^{(D)} = (2n+1)^2\kappa^2, \end{array}$$

e k é um número real (ver [8], p.193). Esses polinômios estão relacionados a funções elípticas da seguinte maneira. Sejam

$$K(\kappa^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 sen^2(\theta)}} \qquad \text{e} \qquad q = e^{-\pi\frac{K(1-\kappa^2)}{K(\kappa^2)}}.$$

Se $0 < \kappa < 1$, então $0 < q < 1$ e as funções peso $w(x)$ para os polinômios $\{C_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{D_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são, respectivamente,

$$w^{(C)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{q^{(2j+1)/2}}{1+q^{2j+1}} U\left(x - \frac{2j+1}{2K(\kappa^2)}\pi\right)$$

e

$$w^{(D)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{q^j}{1+q^{2j}} U\left(x - \frac{j}{K(\kappa^2)}\pi\right),$$

onde $U(x)$ é a função definida em (4.22) (veja [8], p.194).

Temos que as condições (4.1) são válidas com $\{\lambda_n\} = \{n\}$. Para os polinômios definidos em (4.26), obtemos que

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\xi}_{2n}^{(C)}}{\lambda_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\xi}_{2n+1}^{(C)}}{\lambda_{2n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 = 0.$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\hat{\delta}_{2n}^{(C)}\right)^{1/2}}{\lambda_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(2n)^2\kappa^2\right]^{1/2}}{2n} = \kappa \quad \Rightarrow \quad a_1 = \kappa.$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\hat{\delta}_{2n+1}^{(C)}\right)^{1/2}}{\lambda_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{2n} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1.$

Para os polinômios dados por (4.27), temos que

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\xi}_{2n}^{(D)}}{\lambda_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{\xi}_{2n+1}^{(D)}}{\lambda_{2n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 = 0.$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\hat{\delta}_{2n}^{(D)}\right)^{1/2}}{\lambda_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)}{2n} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1.$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\hat{\delta}_{2n+1}^{(D)}\right)^{1/2}}{\lambda_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[(2n+1)^2\kappa^2\right]^{1/2}}{2n} = \kappa \quad \Rightarrow \quad a_2 = \kappa.$

Usando o Teorema 4.1 para esses resultados, com $\alpha = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{C_k(nz)}{C_{k-2}(nz)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{D_k(nz)}{D_{k-2}(nz)} \\ &= \frac{1}{2}\left\{ z^2 - (\kappa^2+1)t^2 + \sqrt{\left[z^2-(\kappa-1)^2t^2\right]\left[z^2-(\kappa+1)^2t^2\right]} \right\} \end{aligned}$$

uniformemente para z em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [-A, A]$.

Sejam $\{x_{n,j}^{(C)}\}_{j=1}^{n}$ e $\{x_{n,j}^{(D)}\}_{j=1}^{n}$ os zeros de $C_n(x)$ e $D_n(x)$, respectivamente. Então, pelo Teorema 4.4, temos que, para toda função contínua f e $0 < \kappa < 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{2k} \lambda_{2k,j}^{(C)} c_{2k-1}^2(x_{2k,j}^{(C)}) f(x_{2k,j}^{(C)}/2n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{2k+1} \lambda_{2k+1,j}^{(D)} d_{2k}^2(x_{2k+1,j}^{(D)}) f(x_{2k+1,j}^{(D)}/2n) \\ &= \frac{1}{\kappa^2\pi} \int_{1-\kappa}^{1+\kappa} \frac{f(tx)+f(-tx)}{2} \frac{\sqrt{(1+\kappa)^2-x^2}\sqrt{x^2-(1-\kappa)^2}}{x} dx \end{aligned}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2k+1}\lambda_{2k+1,j}^{(C)}c_{2k}^2(x_{2k+1,j}^{(C)})f(x_{2k+1,j}^{(C)}/2n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2k}\lambda_{2k,j}^{(D)}d_{2k-1}^2(x_{2k,j}^{(D)})f(x_{2k,j}^{(D)}/2n)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{1-\kappa}^{1+\kappa}\frac{f(tx)+f(-tx)}{2}\frac{\sqrt{(1+\kappa)^2-x^2}\sqrt{x^2-(1-\kappa)^2}}{x}dx + (1-\kappa^2)f(0)$$

onde o significado de $\lambda_{n,j}^{(C)}$ e $\lambda_{n,j}^{(D)}$ é óbvio e $\{c_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{d_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ são os polinômios ortonormais.

Ainda pelo Teorema 4.4, encontramos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{n,j}^{(C)}/n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{n,j}^{(D)}/n)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_{1-\kappa}^{1+\kappa}[f(tx)+f(-tx)]\frac{x}{\sqrt{(1+\kappa)^2-x^2}\sqrt{(x^2-(1-\kappa)^2}}dxdt.\end{aligned}$$

Capítulo 5

Polinômios Similares: Propriedades Assintóticas

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos por nós, semelhantes aos do Capítulo 4, para os polinômios similares aos ortogonais em que os coeficientes da relação de recorrência são divergentes.

5.1 Introdução

Faremos, aqui, uso da definição de função de variação regular (Definição 4.1). Vamos supor que existe uma sequência de variação regular $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ com expoente $\alpha > 0$, tal que os coeficientes da relação de recorrência (3.38) satisfazem

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \beta_{2n}/\lambda_{2n} = \beta^{(0)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n}/\lambda_{2n} = \alpha^{(0)}, \\ &\lim_{n\to\infty} \beta_{2n+1}/\lambda_{2n} = \beta^{(1)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n+1}/\lambda_{2n} = \alpha^{(1)}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Vamos utilizar, também, os Lemas 4.1, 4.2 e 4.3 que serão necessários para a demonstração dos Teoremas 5.3 e 5.5.

Supondo que (3.48) seja válido, faremos, então, um estudo sobre o caso ilimitado para os polinômios similares aos ortogonais.

5.2 Resultados Preliminares

No caso em que os coeficientes da relação de recorrência são limitados, Andrade, Sri Ranga e Van Assche (ver [3]) mostraram que, se (3.48) ocorre e

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \beta_{2n} = \tilde{\beta}^{(0)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n} = \tilde{\alpha}^{(0)}, \\ &\lim_{n\to\infty} \beta_{2n+1} = \tilde{\beta}^{(1)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n+1} = \tilde{\alpha}^{(1)}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

então os polinômios similares $B_n(z)$ satisfazem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n'(z)}{B_n(z)} = R(z) = \frac{1}{2z}\frac{z^2-\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}}{\sqrt{\left[z^2+(\tilde{\beta}^{(0)}+\tilde{\beta}^{(1)}+\tilde{\alpha}^{(0)}+\tilde{\alpha}^{(1)})z+\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}\right]^2-4\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)}z^2}}$$

$$= \frac{1}{2z}\frac{z^2-\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}}{\sqrt{z-a}\sqrt{z-\tilde{a}}\sqrt{z-b}\sqrt{z-\tilde{b}}}+\frac{1}{2z}, \tag{5.3}$$

onde $0\le a\le \tilde{a}\le \tilde{b}\le b$ e

$$\begin{aligned} a+b &= \tilde{\beta}^{(0)}+\tilde{\beta}^{(1)}+\tilde{\alpha}^{(0)}+\tilde{\alpha}^{(1)}+2\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)}} \\ \tilde{a}+\tilde{b} &= \tilde{\beta}^{(0)}+\tilde{\beta}^{(1)}+\tilde{\alpha}^{(0)}+\tilde{\alpha}^{(1)}-2\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)}} \\ ab=\tilde{a}\tilde{b} &= \tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}. \end{aligned}$$

De (3.45) e do Teorema 3.11, obtemos

$$\frac{B_n'(z)}{nB_n(z)} = \sum_{r=1}^{n}\frac{1/n}{z-z_{n,r}} = \int_{\check{d}}^{\hat{d}}\frac{1}{z-t}d\tilde{F}_n(t). \tag{5.4}$$

De (5.4) e do Teorema 2.5 (Grommer-Hamburger), segue que existe uma função não-decrescente $\tilde{F}$ em $\tilde{E}\subset[\check{d},\hat{d}]$, tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\check{d}}^{\hat{d}}\frac{1}{z-t}d\tilde{F}_n(t) = R(z) = \int_{\tilde{E}}\frac{1}{z-t}d\tilde{F}(t) \tag{5.5}$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus[\check{d},\hat{d}]$ e, como consequência, $\tilde{F}_n$ converge (fracamente) para $\tilde{F}$. Este resultado também significa que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(z_{n,j}) \to \int_{\tilde{E}}f(x)d\tilde{F}(x).$$

Antes de enunciar o primeiro teorema deste capítulo, necessitaremos da seguinte propriedade.

Propriedade 5.1 *Para qualquer $\lambda>0$, temos que*

(*i*) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{1}{z-x}\frac{dx}{\sqrt{\lambda^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-\lambda^2}}$,

(*ii*) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{dy}{\sqrt{\lambda^2-y^2}} = 1.$

Demonstração: (*i*) Fazendo a mudança de variáveis $x=\lambda y$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{1}{z-x}\frac{dx}{\sqrt{\lambda^2-x^2}} &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{z-\lambda y}\frac{\lambda dy}{\sqrt{\lambda^2-\lambda^2y^2}} \\ &\overset{\lambda\ge 0}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{z-\lambda y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{\lambda\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{z/\lambda-y}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

De (3.34) e (3.35) sabemos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{u-x} d\phi(x) = FC(u),$$

onde $FC(u)$ é o limite da fração contínua

$$\cfrac{\hat{\delta}_1}{u - \hat{\xi}_1 - \cfrac{\hat{\delta}_2}{u - \hat{\xi}_2 - \cfrac{\hat{\delta}_3}{u - \hat{\xi}_3 - \ddots}}}$$

e $\hat{\delta}_i$, $\hat{\xi}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, são os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios ortogonais com relação a $d\phi(x)$.

Mas, da fórmula de recorrência para os polinômios de Chebyshev de 1ª espécie mônicos, sabemos que $\hat{\delta}_1 = \pi$, $\hat{\delta}_2 = 1/2$, $\hat{\delta}_3 = \hat{\delta}_4 = \ldots = 1/4$ e $\hat{\xi}_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots$.

Assim, para $d\phi(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $FC(u) = \dfrac{\pi}{u - \dfrac{1}{2L(u)}}$, onde $L(u) = u - \dfrac{1}{4L(u)}$.

Logo, $[L(u)]^2 - uL(u) + 1/4 = 0$. Daí,

$$L(u) = \frac{u \pm \sqrt{u^2-1}}{2} \qquad \text{e} \qquad FC(u) = \frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}},$$

pois $FC(u) \to 0$, quando $u \to \infty$.

Portanto, para $u = \dfrac{z}{\lambda}$, $FC(u) = \dfrac{\lambda\pi}{\sqrt{z^2-\lambda^2}}$. Logo,

$$\frac{1}{\lambda\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{z/\lambda - y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\lambda\pi}{\sqrt{z^2-\lambda^2}}.$$

(ii) Temos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2/\lambda^2}} = I.$$

Assim, fazendo $x = \lambda y$, obtemos

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi} \Big[arcsen(y) \Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 1.$$

■

O seguinte teorema nos dá, explicitamente, a expressão para a função distribuição $\tilde{F}(t)$.

Teorema 5.1 *Suponhamos que* (3.48) *e* (5.2) *sejam válidos e que* $0 < \tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}$ *e* $0 < \tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)}$. *Então,*

$$\tilde{F}(t; d_1, d_2, \beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} \frac{|x-\beta|(x+\beta)/x}{\sqrt{d_2^2 x - (x-\beta)^2}\sqrt{(x-\beta)^2 - d_1^2 x}} I_{\tilde{E}}(x)dx,$$

onde $I_{\tilde{E}}(x) = U(x-a) - U(x-\tilde{a}) + U(x-\tilde{b}) - U(x-b)$ *é a função indicadora do conjunto* $\tilde{E} = [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$, $\beta = \sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}}$, $d_2^2 = (\sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\beta}^{(1)}})^2 + (\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}} + \sqrt{\tilde{\alpha}^{(1)}})^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$ *e* $d_1^2 = (\sqrt{\tilde{\beta}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\beta}^{(1)}})^2 + (\sqrt{\tilde{\alpha}^{(0)}} - \sqrt{\tilde{\alpha}^{(1)}})^2 = (\sqrt{\tilde{b}} - \sqrt{\tilde{a}})^2$.

Demonstração: Como $0 < \tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)} < \infty$ e $0 < \tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)} < \infty$, temos que

$$0 < a < \tilde{a} \leq \tilde{b} < b < \infty.$$

Consideremos

$$H(x) = x - (\tilde{\beta}^{(0)} + \tilde{\beta}^{(1)} + \tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)}) + \frac{\tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}}{x}.$$

Assim,

$$H^{'}(x) = 1 - \frac{\beta^{(0)}\beta^{(1)}}{x^2}.$$

Podemos, então, escrever

$$\tilde{F}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} \frac{|H^{'}(x)|}{\sqrt{4\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)} - \{H(x)\}^2}} I_{\tilde{E}}(x)dx.$$

Assim, basta mostrarmos que

$$\tilde{H}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{z-t}\frac{|H^{'}(t)|}{\sqrt{4\tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)} - \{H(t)\}^2}} dt = R(z).$$

Fazendo a substituição $y = H(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{2}{2z - \left[(u_1+y) - \sqrt{(u_1+y)^2 - 4u_2}\right]}\frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}} \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{2}{2z - \left[(u_1+y) + \sqrt{(u_1+y)^2 - 4u_2}\right]}\frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{2z - (y+u_1)}{z^2 - z(y+u_1) + u_2}\frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{1 - (y+u_1)/2z}{H(z) - y}\frac{dy}{\sqrt{4u_3 - y^2}},
\end{aligned}$$

onde $u_1 = \tilde{\beta}^{(0)} + \tilde{\beta}^{(1)} + \tilde{\alpha}^{(0)} + \tilde{\alpha}^{(1)}$, $u_2 = \tilde{\beta}^{(0)}\tilde{\beta}^{(1)}$ e $u_3 = \tilde{\alpha}^{(0)}\tilde{\alpha}^{(1)}$.

Somando-se e subtraindo-se $H(z)/2z$ no último termo da equação anterior para $R(z)$, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{1-[u_1+H(z)]/2z+[H(z)-y]/2z}{H(z)-y}\frac{dy}{\sqrt{4u_3-y^2}} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}} \frac{1}{H(z)-y}\frac{dy}{\sqrt{4u_3-y^2}} - \frac{u_1+H(z)}{2z}\frac{1}{\pi}\int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}}\frac{1}{H(z)-y}\frac{dy}{\sqrt{4u_3-y^2}} \\ &+\frac{1}{2z}\frac{1}{\pi}\int_{-2\sqrt{u_3}}^{2\sqrt{u_3}}\frac{dy}{\sqrt{4u_3-y^2}}.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{1}{z-y}\frac{dy}{\sqrt{\lambda^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-\lambda^2}} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{dy}{\sqrt{\lambda^2-y^2}} = 1,$$

para qualquer $\lambda > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) &= \frac{1}{\sqrt{[H(z)]^2-4u_3}} - \frac{u_1+H(z)}{2z}\frac{1}{\sqrt{[H(z)]^2-4u_3}} + \frac{1}{2z} \\ &= \frac{1}{2z}\frac{z-u_2/z}{\sqrt{[H(z)]^2-4u_3}} + \frac{1}{2z}.\end{aligned}$$

Substituindo-se, agora, a expressão para $H(z)$, chegamos que $\tilde{H}(z) = R(z)$, o que completa a demonstração. ∎

Teorema 5.2 *Sejam $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}$ tais que $0 < a < \tilde{a} \leq \tilde{b} < b < \infty$ e $ab = \tilde{a}\tilde{b} = \beta^2$. Então, para $d_2 = (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$, $d_1 = (\sqrt{\tilde{b}}-\sqrt{\tilde{a}})^2$, $d_0^2 \leq d_1^2$ e $\tilde{E} = [a,\tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$,*

$$D\int_{\tilde{E}}\frac{1}{z-t}V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\delta)dt = L(z;d_1,d_2,d_0,\beta,\delta),$$

onde

$$D = \frac{2}{\pi}\frac{\left[(d_2^2-d_0^2)^{1/2}+(d_1^2-d_0^2)^{1/2}\right]^2}{\left(d_2^2-d_1^2\right)^2},$$

$$V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\delta) = \frac{\sqrt{d_2^2t-(t-\beta)^2}\sqrt{(t-\beta)^2-d_1^2t}}{t[(t-\beta^2)^2-d_0^2t]}\frac{(t-\beta)(t-\delta)}{|t-\beta|},$$

e

$$\begin{aligned}&L(z;d_1,d_2,d_0,\beta,\delta) \\ &= \frac{2(z-\delta)}{(z-\beta)^2-d_0^2z-\left[(d_2^2-d_0^2)(d_1^2-d_0^2)\right]^{1/2}z+\sqrt{(z-\beta)^2-d_1^2z}\sqrt{(z-\beta)^2-d_2^2z}}.\end{aligned}$$

Demonstração: Sabemos, de (4.17), que

$$dG(x;\delta,\beta,\gamma) = \frac{2}{\pi}\frac{\left[\left(\delta^2-\gamma^2\right)^{1/2}+\left(\beta^2-\gamma^2\right)^{1/2}\right]^2}{\left(\beta^2-\delta^2\right)^2}\frac{\sqrt{\beta^2-x^2}\sqrt{x^2-\delta^2}}{|x-\gamma|}I_B(x)dx$$

e que sua transformada de Stieltjes é dada por

$$S(G(x;\delta.\beta,\gamma);z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-x}dG(x;\delta,\beta,\gamma).$$

Assim, para $|d_0| \leq d_1 < d_2$ e $E = [-d_2,-d_1]\cup[d_1,d_2]$, temos que

$$\begin{aligned} S(G(x;d_1,d_2,d_0);w) \quad + \quad & S(G(x;d_1,d_2,-d_0);w) = D\int_E \frac{1}{w-x}\frac{\sqrt{d_2^2-x^2}\sqrt{x^2-d_1^2}}{|x^2-d_0^2|}|x|dx \\ = \quad & \frac{2w}{w^2-d_0^2-\left[(d_1^2-d_0^2)(d_2^2-d_0^2)\right]^{1/2}+\sqrt{w^2-d_1^2}\sqrt{w^2-d_2^2}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Em [36], Sri Ranga, Andrade e Phillips mostraram que

$$\int_E \frac{1}{w-x}d\phi(x) = c\ 2\sqrt{z}\int_{\tilde{E}}\frac{1}{z-t}d\psi(t),$$

quando

$$d\psi(t) = c\frac{t}{t+\beta}d\phi(x(t)), \tag{5.7}$$

onde $d\phi(x)$ é uma distribuição simétrica clássica em E, $x(t) = (t-\beta)/\sqrt{t}$ e c é uma constante qualquer. Usando $x(t)$ em (5.7), obtemos que

$$d\psi(t) = \frac{1}{2}V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\beta)dt.$$

Portanto,

$$D\int_E\frac{1}{w-x}d\phi(x) = c\ \sqrt{z}D\int_{\tilde{E}}\frac{1}{z-t}V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\beta)dt.$$

Agora, aplicando-se a mudança de variáveis $w = (z-\beta)/\sqrt{z}$ em (5.6), obtemos que

$$D\int_E\frac{1}{z-x}d\phi(x) = \sqrt{z}\ L(z;d_1,d_2,d_0,\beta,\beta)$$

onde

$$d\phi(x) = \frac{\sqrt{d_2^2-x^2}\sqrt{x^2-d_1^2}}{|x^2-d_0^2|}|x|dx.$$

Assim,

$$D\int_{\tilde{E}}\frac{1}{z-t}V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\beta)dt = L(z;d_1,d_2,d_0,\beta,\beta).$$

Observe que

$$\begin{aligned} I \quad &= \quad \int_{\tilde{E}}\frac{1}{t-\beta}V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\beta)dt \\ &= \quad \int_a^{\tilde{a}}\frac{1}{t-\beta}V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\beta)dt + \int_{\tilde{b}}^{b}\frac{1}{t-\beta}V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\beta)dt. \end{aligned}$$

Fazendo $t = \beta^2/u$ e, em seguida, $u = t$ na primeira das duas integrais acima, teremos que

$$\begin{aligned} I &= -\int_b^{\tilde{b}} \frac{1}{\beta^2/t-\beta} V(\beta^2/t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) \frac{\beta^2}{t^2} dt + \int_{\tilde{b}}^b \frac{1}{t-\beta} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt \\ &= \int_{\tilde{b}}^b \frac{\beta}{\beta - t} V(\beta^2/t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt + \int_{\tilde{b}}^b \frac{1}{t-\beta} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt. \end{aligned}$$

Mas,

$$V(\beta^2/t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) = \frac{t}{\beta} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta).$$

Daí,

$$I = \int_{\tilde{b}}^b \frac{1}{\beta - t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt + \int_{\tilde{b}}^b \frac{1}{t-\beta} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} D \int_{\tilde{E}} \frac{1}{z-t} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t-\beta} dt &= \frac{D}{z-\beta} \int_{\tilde{E}} \frac{(z-t)+(t-\beta)}{z-t} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t-\beta} dt \\ &= \frac{D}{z-\beta} \left\{ \int_{\tilde{E}} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t-\beta} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tilde{E}} \frac{1}{z-t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt \right\} \\ &= \frac{D}{z-\beta} \int_{\tilde{E}} \frac{1}{z-t} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) dt \\ &= \frac{1}{z-\beta} L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta). \end{aligned}$$

Temos que

$$V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) = \frac{t-\delta}{t-\beta} V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta).$$

Então,

$$\begin{aligned} D \int_E \frac{1}{z-t} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta)}{t-\beta} dt &= D \int_E \frac{(t-\beta)+(\beta-\delta)}{z-t} \frac{V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta)}{t-\beta} dt \\ &= L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) + \frac{\beta-\delta}{z-\beta} L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) \\ &= \frac{z-\delta}{z-\beta} L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \beta) \\ &= L(z; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta). \end{aligned}$$

■

Note que a função $V(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta)$ é uma função peso em $\tilde{E}$ se, e somente se, $\tilde{a} \leq \delta \leq \tilde{b}$. Portanto, obtivemos duas funções distribuições

$$\tilde{F}(t; d_1, d_2, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \frac{|x-\beta|(x+\beta)/x}{\sqrt{d_2^2 x - (x-\beta)^2} \sqrt{(x-\beta)^2 - d_1^2 x}} I_{\tilde{E}}(x) dx \tag{5.8}$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{G}(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\delta) &= \frac{2}{\pi}\frac{\left[(d_2^2-d_0^2)^{1/2}+(d_1^2-d_0^2)^{1/2}\right]^2}{\left(d_2^2-d_1^2\right)^2} \\ &\quad \times\int_{-\infty}^{t}\frac{\sqrt{d_2^2u-(u-\beta)^2}\sqrt{(u-\beta)^2-d_1^2u}}{u[(u-\beta^2)^2-d_0^2u]}\frac{(u-\beta)(u-\delta)}{|u-\beta|}I_{\tilde{E}}(u)du \\ &= D\int_{-\infty}^{t}V(t;d_1,d_2,d_0,\beta,\delta)I_{\tilde{E}}(u)du, \qquad (5.9)\end{aligned}$$

onde d_0, d_1, d_2, β, δ e $\tilde{E}$ estão definidos no Teorema 5.1 e Teorema 5.2.

Observe que essas duas funções distribuições $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$, nada mais são do que as funções distribuições F e G que usamos no Capítulo 4, modificadas pela transformação $x(t)=(t-\beta)/\sqrt{t}$ (ver [33]).

5.3 Propriedades Assintóticas

De (3.38), temos que

$$B_{2n+1}(z)=(z-\beta_{2n+1})B_{2n}(z)-\alpha_{2n+1}zB_{2n-1}(z) \qquad (5.10)$$

e

$$B_{2n+2}(z)=(z-\beta_{2n+2})B_{2n+1}(z)-\alpha_{2n+2}zB_{2n}(z). \qquad (5.11)$$

Resolvendo a segunda equação para $B_{2n+1}(x)$, obtemos

$$B_{2n+1}(z)=\frac{B_{2n+2}(z)+\alpha_{2n+2}zB_{2n}(z)}{z-\beta_{2n+2}}.$$

Substituindo esta expressão em (5.10), temos a seguinte fórmula de recorrência envolvendo somente os polinômios de grau par

$$\begin{aligned}B_{2n+2}(z) &= \left[(z-\beta_{2n+1})(z-\beta_{2n+2})-\alpha_{2n+2}z-\alpha_{2n+1}z\frac{z-\beta_{2n+2}}{z-\beta_{2n}}\right]B_{2n}(z) \\ &\quad -\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}\frac{z-\beta_{2n+2}}{z-\beta_{2n}}z^2B_{2n-2}(z).\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos a fórmula de recorrência que envolve apenas os polinômios de grau ímpar

$$\begin{aligned}B_{2n+3}(z) &= \left[(z-\beta_{2n+2})(z-\beta_{2n+3})-\alpha_{2n+3}z-\alpha_{2n+2}\frac{z-\beta_{2n+3}}{z-\beta_{2n+1}}z\right]B_{2n+1}(z) \\ &\quad -\alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2}\frac{z-\beta_{2n+3}}{z-\beta_{2n+1}}z^2B_{2n-1}(z).\end{aligned}$$

Portanto,

$$B_{n+2}(z)=a_n(z)B_n(z)-b_n(z)B_{n-2}(z), \qquad n\geq 1, \qquad (5.12)$$

onde

$$a_n(z) = (z - \beta_{n+1})(z - \beta_{n+2}) - \alpha_{n+2}z - \alpha_{n+1}\frac{z - \beta_{n+2}}{z - \beta_n}z$$

e (5.13)

$$b_n(z) = \alpha_{n+1}\alpha_n \frac{z - \beta_{n+2}}{z - \beta_n} z^2.$$

Vamos estudar, agora, a convergência da razão $\dfrac{1}{\lambda_n^2}\dfrac{B_k(\lambda_n z)}{B_{k-2}(\lambda_n z)}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus [0, A]$, quando as condições (5.1) são satisfeitas.

Teorema 5.3 *Suponhamos que os coeficientes da relação de recorrência* (3.38) *satisfaçam* (5.1), *onde* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de variação regular com expoente* $\alpha > 0$. *Seja* A *uma constante positiva tal que* $0 < z_{n,j}/\lambda_n < A$ *para todo* n *(o que é possível devido a* (3.48)*). Então, para* $n \to \infty$ *e* $k/n \to t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{B_k(\lambda_n z)}{B_{k-2}(\lambda_n z)} \to R_1(z, t)$$

uniformemente para z *em subconjuntos compactos de* $\mathbb{C} \setminus [0, A]$, *onde*

$$\begin{aligned} R_1(z,t) \;&=\; \frac{1}{2}\Big\{ (z - \beta^{(0)}t^{\alpha})(z - \beta^{(1)}t^{\alpha}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})zt^{\alpha} \\ &\quad + \sqrt{\Big[(z - \beta^{(0)}t^{\alpha})(z - \beta^{(1)}t^{\alpha}) - (\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)})zt^{\alpha}\Big]^2 - 4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}z^2t^{2\alpha}}\Big\}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Demonstração: Seja $\{k_n\}$ uma sequência de inteiros tal que $k_n/n \to t$ quando $n \to \infty$. Primeiramente, vamos demonstrar que a razão $\lambda_{2n}^2 \dfrac{B_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}$ converge para $1/R_1(z,t)$ quando $z \in [A + d, \infty)$, com $d > 0$ suficientemente grande.

De (3.45) e (3.46), para $z \in [A + d, \infty)$ temos

$$\lambda_n \left|\frac{B_{k-1}(\lambda_n z)}{B_k(\lambda_n z)}\right| \le \sum_{j=1}^{k} \frac{\tau_{k,j}}{z - z_{k,j}/\lambda_n} < \frac{1}{d}$$

e

$$\lambda_n z \left|\frac{B_{k-1}(\lambda_n z)}{B_k(\lambda_n z)}\right| \le \sum_{j=1}^{k} \frac{\tau_{k,j}}{1 - \dfrac{z_{k,j}/\lambda_n}{z}} < \frac{A + d}{d}.$$

Consequentemente, como $z - z_{k,j}/\lambda_n > z - z_{n,n}/\lambda_n > d$ (se $k \le n$),

$$\lambda_n^2 \left|\frac{B_{k-2}(\lambda_n z)}{B_k(\lambda_n z)}\right| < \frac{1}{d^2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_n^2 z \left|\frac{B_{k-2}(\lambda_n z)}{B_k(\lambda_n z)}\right| < \frac{A + d}{d^2}. \tag{5.15}$$

Logo, de (5.15), para as sequências pares de $\{k_n\}$, obtemos

$$\lambda_{2n}^2 \left|\frac{B_{2k_n-2}(\lambda_{2n} z)}{B_{2k_n}(\lambda_{2n} z)}\right| < \frac{1}{d^2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_{2n}^2 \left|\frac{B_{2k_n-2}(\lambda_{2n} z)}{B_{2k_n}(\lambda_{2n} z)}\right| < \frac{A + d}{d^2}. \tag{5.16}$$

Então, existe uma subsequência $\left\{\lambda_{2\hat{n}}^2 \dfrac{B_{2k_{\hat{n}}-2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{B_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}\right\}$ convergente. Mostremos que

$$\left\{\lambda_{2\hat{n}}^2 \frac{B_{2k_{\hat{n}}-2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{B_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\lambda_{2\hat{n}}^2 \frac{B_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{B_{2k_{\hat{n}}+2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}\right\}$$

têm o mesmo limite.

Fazendo $u_k = B_{2k}(\lambda_{2n}z)$, pelo Lema 4.1, por (5.12) e (5.13), temos

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n}^2 \left| \frac{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right. & - \left. \frac{B_{2k-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)} \right| \\
& \leq \lambda_{2n}^2 \left| \frac{b_2(\lambda_{2n}z)b_4(\lambda_{2n}z)\cdots b_{2k}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right| \\
& \quad + \lambda_{2n}^2 \sum_{j=1}^{k} |b_{2j+2}(\lambda_{2n}z)\cdots b_{2k}(\lambda_{2n}z)| \\
& \quad \times \left\{ |a_{2j}(\lambda_{2n}z) - a_{2j-2}(\lambda_{2n}z)| \left| \frac{B_{2j}(\lambda_{2n}z)B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right| \right. \\
& \quad \left. + |b_{2j}(\lambda_{2n}z) - b_{2j-2}(\lambda_{2n}z)| \left| \frac{B_{2j}(\lambda_{2n}z)B_{2j-4}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right| \right\} \\
& = \lambda_{2n}^2 \left| \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{2n}z)\tilde{b}_4(\lambda_{2n}z)\cdots \tilde{b}_{2k}(\lambda_{2n}z)}{\lambda_{2n}^{2k}} \right| \frac{\left|\lambda_{2n}^2 z\right|^{2k}}{|B_{2k+2}(\lambda_{2nz})B_{2k}(\lambda_{2n}z)|} \\
& \quad + \lambda_{2n}^2 \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{\tilde{b}_{2j+2}(\lambda_{2n}z)\cdots \tilde{b}_{2k}(\lambda_{2n}z)}{\lambda_{2n}^{2(k-j)}} \right| \left|\lambda_{2n}^2 z\right|^{2(k-j)} \\
& \quad \times \left\{ |a_{2j}(\lambda_{2n}z) - a_{2j-2}(\lambda_{2n}z)| \left| \frac{B_{2j}(\lambda_{2n}z)B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right| \right. \\
& \quad \left. + |b_{2j}(\lambda_{2n}z) - b_{2j-2}(\lambda_{2n}z)| \left| \frac{B_{2j}(\lambda_{2n}z)B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} \right| \right\},
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde $\tilde{b}_{2j}(\lambda_{2n}z) = \dfrac{b_{2j}(\lambda_{2n}z)}{\lambda_{2n}^2 z^2}$.

Observe que $\dfrac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} = \dfrac{f(2k)}{f(2n)}$. Como $k/n \to t$ quando $n \to \infty$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2nk/n)}{f(2n)} = t^\alpha.$$

Assim, das condições (5.1), encontramos que

$$\frac{\alpha_{2k}}{\lambda_{2n}} = \frac{\alpha_{2k}}{\lambda_{2k}}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} \to \alpha^{(0)}t^\alpha, \qquad \frac{\alpha_{2k+1}}{\lambda_{2n}} = \frac{\alpha_{2k+1}}{\lambda_{2k}}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} \to a^{(1)}t^\alpha,$$

$$\frac{\beta_{2k}}{\lambda_{2n}} = \frac{\beta_{2k}}{\lambda_{2k}}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} \to \beta^{(0)}t^\alpha, \qquad \frac{\beta_{2k+1}}{\lambda_{2n}} = \frac{\beta_{2k+1}}{\lambda_{2k}}\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{2n}} \to \beta^{(1)}t^\alpha,$$

quando $n \to \infty$ e $k/n \to t$.

Isto significa que, para nossa sequência $\{k_n\}$, a matriz $\{\tilde{b}_{2j}(\lambda_{2n}z)/\lambda_{2n}^2;\ j \le k_n, n = 1, 2, \ldots\}$ é limitada por uma constante C.

Agora, de (5.16), obtemos facilmente que, para $j \le k$,

$$\left|\frac{B_{2j}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}\right| = \prod_{i=j+1}^{k}\left|\frac{B_{2i-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2i}(\lambda_{2n}z)}\right| < \left(\frac{1}{\lambda_{2n}d}\right)^{2k-2j}$$

e

$$\left|z^{(k-j)}\frac{B_{2j}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}\right| = \prod_{i=j+1}^{k}\left|z\frac{B_{2i-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2i}(\lambda_{2n}z)}\right| < \left(\frac{A+d}{\lambda_{2n}^2 d^2}\right)^{k-j}.$$

Portanto, (5.17) torna-se

$$\begin{aligned}\lambda_{2n}^2\left|\frac{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)}\right. &- \left.\frac{B_{2k-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}\right| \\ &\le \left(\frac{1}{d^2}\right)\left(\frac{C(A+d)^2}{d^4}\right)^k + \left(\frac{C(A+d)^2}{d^4}\right)^k\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{|a_{2j}(\lambda_{2n}z) - a_{2j-2}(\lambda_{2n}z)|}{\lambda_{2n}^2 d^4}\right. \\ &\quad + \left.\frac{|b_{2j}(\lambda_{2n}z) - b_{2j-2}(\lambda_{2n}z)|}{\lambda_{2n}^4 d^6}\right\}\left(\frac{C(A+d)^2}{d^4}\right)^{-j}.\end{aligned}$$

Agora, podemos escolher d suficientemente grande tal que $C(A+d)^2 < d^4$. Então, pelo Lema 4.3 segue que, para $n \to \infty$ e $k/n \to t$,

$$\left\{\lambda_{2n}^2\frac{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)} - \lambda_{2n}^2\frac{B_{2k-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}\right\} \to 0.$$

Assim, como $\left\{\lambda_{2\hat{n}}^2\frac{B_{2k_{\hat{n}}-2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{B_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}\right\}$ é uma subsequência convergente, então $\left\{\lambda_{2\hat{n}}^2\frac{B_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{B_{2k_{\hat{n}}+2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}\right\}$ também converge e ambas têm o mesmo limite. Seja $1/R_1(z,t)$ este limite.

Pela fórmula de recorrência (5.12), temos que

$$\frac{1}{\lambda_{2\hat{n}}^2}\frac{B_{2k_{\hat{n}}+2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{B_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)} = \frac{a_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{\lambda_{2\hat{n}}^2} - \frac{b_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{\lambda_{2\hat{n}}^4}\frac{\lambda_{2\hat{n}}^2 B_{2k_{\hat{n}}-2}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{B_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)},$$

onde

$$\frac{a_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{\lambda_{2\hat{n}}^2} = \left(z - \frac{\beta_{2k_{\hat{n}}+1}}{\lambda_{2\hat{n}}}\right)\left(z - \frac{\beta_{2k_{\hat{n}}+2}}{\lambda_{2\hat{n}}}\right) - \frac{\alpha_{2k_{\hat{n}}+2}}{\lambda_{2\hat{n}}}z - \frac{\alpha_{2k_{\hat{n}}+1}}{\lambda_{2\hat{n}}}\frac{z - \beta_{2k_{\hat{n}}+2}/\lambda_{2\hat{n}}}{z - \beta_{2k_{\hat{n}}}/\lambda_{2\hat{n}}}z$$

e

$$\frac{b_{2k_{\hat{n}}}(\lambda_{2\hat{n}}z)}{\lambda_{2\hat{n}}^4} = \frac{\alpha_{2k_{\hat{n}}}}{\lambda_{2\hat{n}}}\frac{\alpha_{2k_{\hat{n}}-1}}{\lambda_{2\hat{n}}}\frac{z - \beta_{2k_{\hat{n}}+2}/\lambda_{2\hat{n}}}{z - \beta_{2k_{\hat{n}}}/\lambda_{2\hat{n}}}z^2.$$

Fazendo $\hat{n} \to \infty$, obtemos

$$R_1(z,t) = a(z,t) - \frac{b(z,t)}{R_1(z,t)},$$

com
$$a(z,t) = (z-\beta^{(0)}t^{\alpha})(z-\beta^{(1)}t^{\alpha}) - (\alpha^{(0)}+\alpha^{(1)})t^{\alpha} \quad \text{e} \quad b(z,t) = \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}t^{2\alpha}z^2.$$

Daí, segue que
$$R_1(z,t) = \frac{1}{2}\left\{a(z,t) \pm \sqrt{a^2(z,t)-4b(z,t)}\right\}.$$

Como $R_1(z,t)$ tende para o infinito quando z vai para o infinito, devemos escolher o sinal positivo. Toda subsequência de $\left\{\lambda_{2n}^2 \dfrac{B_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\}$ que converge tem, portanto, o mesmo limite, de onde o resultado seque para $z \in [A+d,\infty)$.

Sabemos que $\left\{\lambda_{2n}^2 \dfrac{B_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\}$ é um sequência de funções analíticas em $\mathbb{C}\setminus[0,A]$. Assim, se tomarmos um conjunto compacto $\mathcal{K}$ em $\mathbb{C}\setminus[0,A]$, a distância δ deste conjunto ao intervalo $[0,A]$ é estritamente positiva. Portanto, para $z\in\mathcal{K}$, obtemos
$$\left\{\lambda_{2n}^2 \frac{B_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\} \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Além disso, a sequência $\left\{\lambda_{2n}^2 \dfrac{B_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\}$ converge em um subconjunto de $\mathbb{C}\setminus[0,A]$ com um ponto de acumulação. Então, pelo Teorema 2.4 (Stieltjes-Vitali), $\left\{\lambda_{2n}^2 \dfrac{B_{2k_n-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k_n}(\lambda_{2n}z)}\right\}$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus[0,A]$.

Repetindo o mesmo argumento para a subsequência
$$\lambda_{2n}^2 \frac{B_{2k_n-1}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k_n+1}(\lambda_{2n}z)},$$
encontramos que esta sequência também converge para $1/R_1(z,t)$, o que completa a demonstração.

■

Da fórmula de recorrência (3.38), obtemos que
$$\frac{1}{\lambda_{2n}^2}\frac{B_{2k+1}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k-1}(\lambda_{2n}z)} = \left(z-\frac{\beta_{2k+1}}{\lambda_{2n}}\right)\frac{1}{\lambda_{2n}}\frac{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k-1}(\lambda_{2n}z)} - \frac{\alpha_{2k+1}}{\lambda_{2n}}z$$
e
$$\frac{1}{\lambda_{2n}^2}\frac{B_{2k+2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)} = \left(z-\frac{\beta_{2k+2}}{\lambda_{2n}}\right)\frac{1}{\lambda_{2n}}\frac{B_{2k+1}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)} - \frac{\alpha_{2k+2}}{\lambda_{2n}}z.$$

Fazendo $n\to\infty$, $k/n\to t\in[0,1]$ e usando o Teorema 5.3, chegamos ao resultado abaixo.

Teorema 5.4 *Suponhamos que os coeficientes da relação de recorrência* (3.38) *satisfaçam* (5.1)*, onde λ_n é uma sequência de variação regular com expoente $\alpha>0$. Seja A uma constante positiva tal que $0<z_{n,j}/\lambda_n<A$, $n=1,2,\ldots$. Então, quando $n\to\infty$ e $k/n\to t\in[0,1]$,*
$$\lambda_{2n}\frac{B_{2k}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k+1}(\lambda_{2n}z)} \to R_2^{(0)}(z,t) = \frac{z-\beta^{(0)}t^{\alpha}}{R_1(z,t)+\alpha^{(0)}t^{\alpha}z}, \tag{5.18}$$

$$\lambda_{2n}\frac{B_{2k-1}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)} \to R_2^{(1)}(z,t) = \frac{z-\beta^{(1)}t^{\alpha}}{R_1(z,t)+\alpha^{(1)}t^{\alpha}z}, \tag{5.19}$$

uniformemente para z em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus[0,A]$.

Teorema 5.5 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 5.3, quando $n \to \infty$ temos que*

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\frac{(d/dz)B_n(\lambda_n z)}{B_n(\lambda_n z)} &\to R_3(z) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\partial/\partial z)R_1(z,t)}{R_1(z,t)}dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}\frac{z^2 - u_2 t^{2\alpha}}{\sqrt{\left[z^2 - u_1 t^{\alpha} + u_2 t^{2\alpha}\right]^2 - 4u_3 t^{2\alpha} z^2}}\right] dt \qquad (5.20)\end{aligned}$$

uniformemente para z em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus[0,A]$, onde $u_1 = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}$, $u_2 = \beta^{(0)}\beta^{(1)}$ e $u_3 = \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}$.

Demonstração: A demonstração é análoga à do Teorema 4.3. Como no Teorema 5.3, primeiramente vamos mostrar o resultado para $z \in [A+d, \infty)$. Consideremos a função

$$h_n(t) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{B_{2\lfloor nt\rfloor}(\lambda_{2n}z)}{B_{2\lfloor nt\rfloor+2}(\lambda_{2n}z)}\right)\Bigg/\left(\frac{B_{2\lfloor nt\rfloor}(\lambda_{2nz})}{B_{2\lfloor nt\rfloor+2}(\lambda_{2nz})}\right), \quad 0 \le t \le 1,$$

onde $\lfloor a\rfloor$ é a parte inteira do número real a. Assim, pelo Lema 4.2,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 h_n(t)dt &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{1/n} h_n(t)dt + \int_{1/n}^{2/n} h_n(t)dt + \cdots + \int_{(n-1)/n}^{1} h_n(t)dt\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{1/n}\left[-\left(\frac{B_0(\lambda_{2n}z)}{B_2(\lambda_{2n}z)}\right)'\Bigg/\left(\frac{B_0(\lambda_{2n}z)}{B_2(\lambda_{2n}z)}\right)\right]dt\right. \\ &\quad + \int_{1/n}^{2/n}\left[-\left(\frac{B_2(\lambda_{2n}z)}{B_4(\lambda_{2n}z)}\right)'\Bigg/\left(\frac{B_2(\lambda_{2n}z)}{B_4(\lambda_{2n}z)}\right)\right]dt + \cdots \\ &\quad \left. + \int_{(n-1)/n}^{1}\left[-\left(\frac{B_{2n-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2n}(\lambda_{2n}z)}\right)'\Bigg/\left(\frac{B_{2n-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2n}(\lambda_{2n}z)}\right)\right]dt\right\} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} -\left(\frac{B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right)'\Bigg/\left(\frac{B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\frac{(d/dz)B_{2n}(\lambda_{2n}z)}{B_{2n}(\lambda_{2n}z)}.\end{aligned}$$

Se fixarmos t, pelo Teorema 5.3,

$$h_n(t) \to -\frac{\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{R_1(z,t)}\right)}{\dfrac{1}{R_1(z,t)}} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial z}(R_1(z,t))}{R_1(z,t)},$$

que segue da convergência uniforme de funções analíticas e de suas derivadas em conjuntos compactos. Para $t \in [(j-1)/n, j/n)$, temos também que

$$h_n(t) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right)\Bigg/\left(\frac{B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{d}{dz}\left(\frac{B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}\right) \Big/ \left(\frac{B_{2j-2}(\lambda_{2n}z)}{B_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}\right) \\
&\quad -\frac{d}{dz}\left(\frac{B_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}{B_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right) \Big/ \left(\frac{B_{2j-1}(\lambda_{2n}z)}{B_{2j}(\lambda_{2n}z)}\right).
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \max_{1\leq j\leq n} a_j \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad a_j, b_j > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

encontramos que

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dz}\left(\frac{B_{k-1}(\lambda_n z)}{B_k(\lambda_n z)}\right) \Big/ \left(\frac{B_{k-1}(\lambda_n z)}{B_k(\lambda_n z)}\right) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\tau_{k,j}}{(z - z_{k,j}/\lambda_n)^2} \Big/ \sum_{j=1}^{k} \frac{\tau_{k,j}}{(z - z_{k,j}/\lambda_n)} \\
&\leq \max_{1\leq j\leq k} \frac{1}{z - z_{k,j}/\lambda_n} < \frac{1}{d}.
\end{aligned}
$$

Então, segue que

$$\frac{1}{2} h_n(t) < \frac{1}{d}.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos, para $z \in [A + d, \infty)$,

$$\frac{1}{2n} \frac{(d/dz)B_{2n}(\lambda_{2n}z)}{B_{2n}(\lambda_{2n}z)} = \frac{1}{2}\int_0^1 h_n(t)dt \to \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\partial/\partial z)R_1(z,t)}{R_1(z,t)}dt.$$

Observe que

$$2R_1(z,t) = z^2 - u_1 t^\alpha + u_2 t^{2\alpha} + \sqrt{\left[z^2 - u_1 t^\alpha z + u_2 t^{2\alpha}\right]^2 - 4u_3 t^{2\alpha} z^2} \tag{5.21}$$

e, então,

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial}{\partial z}(R_1(z,t)) &= 2z - u_1 t^\alpha + \frac{(2z - u_1 t^\alpha)(z^2 - u_1 t^\alpha z + u_2 t^{2\alpha}) - 4u_3 t^{2\alpha} z}{\sqrt{\left[z^2 - u_1 t^\alpha z + u_2 t^{2\alpha}\right]^2 - 4u_3 t^{2\alpha} z^2}} \\
&= \frac{(2z - u_1 t^\alpha)2R_1(z,t) - 4u_3 t^{2\alpha} z}{\sqrt{\left[z^2 - u_1 t^\alpha z + u_2 t^{2\alpha}\right]^2 - 4u_3 t^{2\alpha} z^2}} \\
&= \frac{2R_1(z,t)\left\{2z - u_1 t^\alpha - \dfrac{2u_3 t^{2\alpha} z}{R_1(z,t)}\right\}}{\sqrt{\left[z^2 - u_1 t^\alpha z + u_2 t^{2\alpha}\right]^2 - 4u_3 t^{2\alpha} z^2}}. \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

De (5.21) e (5.22), chegamos ao integrando de (5.20) para $z \in [A + d, \infty)$. O resultado geral segue do Teorema 2.4 (Stieltjes-Vitali).

O mesmo argumento pode ser usado para os índices ímpares. ∎

Observe que podemos escrever $R_3(z)$ da seguinte maneira

$$R_3(z) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2z} \frac{z^2 - \beta^{(0)}\beta^{(1)} t^{2\alpha}}{\sqrt{z - at^\alpha}\sqrt{z - \tilde{a}t^\alpha}\sqrt{z - bt^\alpha}\sqrt{z - \tilde{b}t^\alpha}} + \frac{1}{2z} \right] dt, \tag{5.23}$$

onde $0 \leq a \leq \tilde{a} \leq \tilde{b} \leq b$ e

$$\begin{aligned} a + b &= \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} + 2\sqrt{\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}}, \\ \tilde{a} + \tilde{b} &= \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} - 2\sqrt{\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}}, \\ ab &= \tilde{a}\tilde{b} = \beta^{(0)}\beta^{(1)}. \end{aligned}$$

5.3.1 Representação Integral

Consideremos as funções distribuições $\tilde{F}$ e $\tilde{G}$ dadas em (5.8) e (5.9), respectivamente, ou seja,

$$\tilde{F}(t; d_1, d_2, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t} \frac{|x - \beta|(x + \beta)/x}{\sqrt{d_2^2 x - (x - \beta)^2}\sqrt{(x - \beta)^2 - d_1^2 x}} I_{\tilde{E}}(x) dx \tag{5.24}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{G}(t; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) &= \frac{2}{\pi} \frac{\left[(d_2^2 - d_0^2)^{1/2} + (d_1^2 - d_0^2)^{1/2}\right]^2}{\left(d_2^2 - d_1^2\right)^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{t} \frac{\sqrt{d_2^2 u - (u - \beta)^2}\sqrt{(u - \beta)^2 - d_1^2 u}}{u[(u - \beta^2)^2 - d_0^2 u]} \frac{(u - \beta)(u - \delta)}{|u - \beta|} I_{\tilde{E}}(u) du \\ &= D \int_{-\infty}^{t} V(u; d_1, d_2, d_0, \beta, \delta) I_{\tilde{E}}(u) du, \end{aligned} \tag{5.25}$$

onde $I_{\tilde{E}}(x)$ é a função indicadora do conjunto $\tilde{E} = [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$.

Teorema 5.6 *Suponhamos que* (5.1) *seja válido,* $\hat{\beta} < \infty$ *e* $\hat{\alpha} < \infty$, *e* $0 < \beta^{(0)}\beta^{(1)}$ *e* $0 < \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}$. *Então,*

$$R_2^{(0)}(z, t) = \frac{1 - \alpha_{min}/\alpha^{(0)}}{z - \beta^{(1)} t^\alpha} + \frac{1}{2\pi\alpha^{(0)} t^\alpha} \int_{\tilde{E}} \frac{1}{z - x} V(x; \gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^\alpha, \beta^{(0)} t^\alpha) dx$$

e

$$R_2^{(1)}(z, t) = \frac{1 - \alpha_{min}/\alpha^{(1)}}{z - \beta^{(0)} t^\alpha} + \frac{1}{2\pi\alpha^{(1)} t^\alpha} \int_{\tilde{E}} \frac{1}{z - x} V(x; \gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^\alpha, \beta^{(1)} t^\alpha) dx,$$

onde $\tilde{E} = [a, \tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$, $\alpha_{min} = min\{\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}\}$, $\lambda^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2$, $\beta = \sqrt{\beta^{(0)}\beta^{(1)}}$,

$$\gamma_1^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2 + (\sqrt{\alpha^{(0)}} + \sqrt{\alpha^{(1)}})^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$$

e

$$\gamma_0^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2 + (\sqrt{\alpha^{(0)}} - \sqrt{\alpha^{(1)}})^2 = (\sqrt{\tilde{b}} - \sqrt{\tilde{a}})^2.$$

Demonstração: De (5.14) e do Teorema 5.4, temos que

$$R_2^{(0)}(z,t) = 2(z-\beta^{(0)}t^\alpha)\Big\{(z-\beta^{(0)}t^\alpha)(z-\beta^{(1)}t^\alpha)-(\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)})t^\alpha z + \sqrt{\left[(z-\beta^{(0)}t^\alpha)(z-\beta^{(1)}t^\alpha)-(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})t^\alpha z\right]^2-4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}t^{2\alpha}z^2}\Big\}^{-1}. \tag{5.26}$$

Multiplicando-se e dividindo-se o segundo membro da igualdade acima pelo conjugado do termo entre chaves, obtemos

$$R_2^{(0)}(z,t) = \left[2(z-\beta^{(1)}t^\alpha)\alpha^{(0)}t^\alpha z\right]^{-1}\Big\{(z-\beta^{(1)}t^\alpha)(z-\beta^{(1)}t^\alpha)-(\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)})t^\alpha z - \sqrt{\left[(z-\beta^{(0)}t^\alpha)(z-\beta^{(1)}t^\alpha)-(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})t^\alpha z\right]^2-4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}t^{2\alpha}z^2}\Big\}.$$

Somando-se e subtraindo-se $|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|zt^\alpha$ e, novamente, multiplicando-se e dividindo-se pelo conjugando do termo entre chaves, chegamos que

$$\begin{aligned} R_2^{(0)}(z,t) &= \frac{|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|-(\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)})}{2\alpha^{(0)}(z-\beta^{(1)}t^\alpha)} + \frac{(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})-|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|}{2\alpha^{(0)}} \\ &\times 2(z-\beta^{(0)}t^\alpha)\Big\{(z-\beta^{(0)}t^\alpha)(z-\beta^{(1)}t^\alpha)-|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|t^\alpha z \\ &+ \sqrt{\left[(z-\beta^{(0)}t^\alpha)(z-\beta^{(1)}t^\alpha)-(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})t^\alpha z\right]^2-4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}t^{2\alpha}z^2}\Big\}^{-1}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (z-\beta^{(0)}t^\alpha)(z-\beta^{(1)}t^\alpha) &= \left(z-\sqrt{\beta^{(0)}\beta^{(1)}}t^\alpha\right)^2-\left(\sqrt{\beta^{(0)}}-\sqrt{\beta^{(1)}}\right)^2 t^\alpha z \\ &= (z-\beta t^\alpha)^2-\lambda^2 t^\alpha z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|t^\alpha &= \left[\left(\sqrt{\alpha^{(0)}}+\sqrt{\alpha^{(1)}}\right)^2\left(\sqrt{\alpha^{(0)}}-\sqrt{\alpha^{(1)}}\right)^2\right]^{1/2} t^\alpha \\ &= \left[(\gamma_1^2-\lambda^2)(\gamma_0^2-\lambda^2)t^{2\alpha}\right]^{1/2} \\ &= \left[(\gamma_1^2 t^\alpha-\lambda^2 t^\alpha)(\gamma_0^2 t^\alpha-\lambda^2 t^\alpha)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left[(z-\beta^{(0)}t^\alpha)(z-\beta^{(1)}t^\alpha)-(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})t^\alpha z\right]^2-4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}t^{2\alpha}z^2} \\ &\qquad = \sqrt{(z-\beta t^\alpha)^2-\gamma_1^2 t^\alpha z}\sqrt{(z-\beta t^\alpha)^2-\gamma_0^2 t^\alpha z}. \end{aligned}$$

Podemos, então, escrever (5.26) como

$$\begin{aligned} R_2^{(0)}(z,t) &= \frac{|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|-(\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)})}{2\alpha^{(0)}(z-\beta^{(1)}t^\alpha)} + \frac{(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})-|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|}{2\alpha^{(0)}} \\ &\times 2(z-\beta^{(0)}t^\alpha)\Big\{(z-\beta t^\alpha)^2-\lambda^2 t^\alpha z-\left[(\gamma_1^2 t^\alpha-\lambda^2 t^\alpha)(\gamma_0^2 t^\alpha-\lambda^2 t^\alpha)\right]^{1/2} t^\alpha z \\ &+ \sqrt{(z-\beta t^\alpha)^2-\gamma_1^2 t^\alpha z}\sqrt{(z-\beta t^\alpha)^2-\gamma_0^2 t^\alpha z}\Big\}^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 5.2, obtemos

$$\begin{aligned} R_2^{(0)}(z,t) &= \frac{|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|-(\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)})}{2\alpha^{(0)}(z-\beta^{(1)}t^{\alpha})} + \frac{(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})-|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|}{2\alpha^{(0)}} \\ &\quad \times L(z;\gamma_0 t^{\alpha/2},\gamma_1 t^{\alpha/2},\lambda t^{\alpha/2},\beta t^{\alpha},\beta^{(0)}t^{\alpha}) \\ &= \frac{|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|-(\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)})}{2\alpha^{(0)}(z-\beta^{(1)}t^{\alpha})} + \frac{(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})-|\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}|}{2\alpha^{(0)}} \\ &\quad \times D\int_{\tilde{E}} \frac{1}{z-x} V(x;\gamma_0 t^{\alpha/2},\gamma_1 t^{\alpha/2},\lambda t^{\alpha/2},\beta t^{\alpha},\beta^{(0)}t^{\alpha})dx, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{\pi}\frac{\left[\left(\gamma_1^2 t^{\alpha}-\lambda^2 t^{\alpha}\right)^{1/2}+(\gamma_0^2 t^{\alpha}-\lambda^2 t^{\alpha})^{1/2}\right]^2}{\left(\gamma_1^2 t^{\alpha}-\gamma_0^2 t^{\alpha}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\left\{\left(\sqrt{\alpha^{(0)}}+\sqrt{\alpha^{(1)}}\right)+\left|\sqrt{\alpha^{(0)}}+\sqrt{\alpha^{(1)}}\ \right|\right\}^2}{16\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}t^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Analisando os casos $\alpha^{(1)} \geq \alpha^{(0)}$ e $\alpha^{(1)} < \alpha^{(0)}$, chegamos que

$$R_2^{(0)}(z,t) = \frac{1-\alpha_{min}/\alpha^{(0)}}{z-\beta^{(1)}t^{\alpha}} + \frac{1}{2\pi\alpha^{(0)}t^{\alpha}}\int_{\tilde{E}}\frac{1}{z-x}V(x;\gamma_0 t^{\alpha/2},\gamma_1 t^{\alpha/2},\lambda t^{\alpha/2},\beta t^{\alpha},\beta^{(0)}t^{\alpha})dx.$$

De maneira análoga, como

$$\begin{aligned} R_2^{(1)}(z,t) &= 2(z-\beta^{(1)}t^{\alpha})\Big\{(z-\beta^{(0)}t^{\alpha})(z-\beta^{(1)}t^{\alpha})-(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})t^{\alpha}z \\ &\quad + \sqrt{\left[(z-\beta^{(0)}t^{\alpha})(z-\beta^{(1)}t^{\alpha})-(\alpha^{(1)}+\alpha^{(0)})t^{\alpha}z\right]^2-4\alpha^{(0)}\alpha^{(1)}t^{2\alpha}z^2}+2\alpha^{(1)}t^{\alpha}z\Big\}^{-1}, \end{aligned}$$

o outro resultado do teorema é obtido substituindo-se $(\alpha^{(0)},\beta^{(0)})$ por $(\alpha^{(1)},\beta^{(1)})$. ∎

Teorema 5.7 *Sob as mesmas condições do Teorema* 5.3, *com* $0 < \beta^{(0)}\beta^{(1)}$ *e* $0 < \alpha^{(0)}\alpha^{(1)}$, *temos, para toda função contínua* f *em* $(0,\infty)$ *quando* $n\to\infty$ *e* $k/n \to t \in [0,1]$, *que*

$$(i) \qquad \sum_{j=1}^{2k}\tau_{2k,j}f(z_{2k,j}/\lambda_{2n}) \to \frac{\alpha_{min}}{\alpha^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\tilde{G}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2},\gamma_1 t^{\alpha/2},\lambda t^{\alpha/2},\beta t^{\alpha},\beta^{(1)}t^{\alpha}) + \frac{\alpha^{(1)}-\alpha_{min}}{\alpha^{(1)}}f(\beta^{(0)}t^{\alpha});$$

$$(ii) \qquad \sum_{j=1}^{2k+1}\tau_{2k+1,j}f(z_{2k+1,j}/\lambda_{2n}) \to \frac{\alpha_{min}}{\alpha^{(0)}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\tilde{G}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2},\gamma_1 t^{\alpha/2},\lambda t^{\alpha/2},\beta t^{\alpha},\beta^{(0)}t^{\alpha}); + \frac{\alpha^{(0)}-\alpha_{min}}{\alpha^{(0)}}f(\beta^{(1)}t^{\alpha})$$

$$(iii) \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(z_{n,j}/\lambda_n) \to \int_0^1\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\tilde{F}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2},\gamma_1 t^{\alpha/2},\beta t^{\alpha})dt,$$

onde $\lambda^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2$, $\beta = \sqrt{\beta^{(0)}\beta^{(1)}}$, $\gamma_1^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2 + (\sqrt{\alpha^{(0)}} + \sqrt{\alpha^{(1)}})^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$ *e* $\gamma_0^2 = (\sqrt{\beta^{(0)}} - \sqrt{\beta^{(1)}})^2 + (\sqrt{\alpha^{(0)}} - \sqrt{\alpha^{(1)}})^2 = (\sqrt{\tilde{b}} - \sqrt{\tilde{a}})^2$.

Demonstração: Sejam as funções distribuições discretas

$$\tilde{G}_{n,k}(x) = \sum_{j=1}^{k} \tau_{k,j} U(x - z_{k,j}/\lambda_n) \tag{5.27}$$

e

$$\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U(x - z_{n,j}/\lambda_n), \tag{5.28}$$

onde $U(x)$ é a função de Heaviside dada por (4.22).

Sabemos que

$$\lambda_n \frac{B_{k-1}(\lambda_n z)}{B_k(\lambda_n z)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\tau_{k,j}}{z - z_{k,j}/\lambda_n} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n}\frac{(d/dz)B_n(\lambda_n z)}{B_n(\lambda_n z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_{n,j}/\lambda_n}.$$

Assim, as transformadas de Stieltjes das funções distribuições $\tilde{G}_{n,k}(x)$ e $\tilde{F}_n(x)$ são dadas, respectivamente, por

$$S(\tilde{G}_{n,k}(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{G}_{n,k}(x)}{z - x} = \lambda_n \frac{B_{k-1}(\lambda_n z)}{B_k(\lambda_n z)} \tag{5.29}$$

e

$$S(\tilde{F}_n(x); z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{F}_n(x)}{z - x} = \frac{1}{n}\frac{(d/dz)B_n(\lambda_n z)}{B_n(\lambda_n z)}. \tag{5.30}$$

Para n par e k par, de (5.29) e (5.19), obtemos que

$$S(\tilde{G}_{2n,2k}(x); z) \to R_2^{(1)}(z,t) = \frac{z - \beta^{(1)}t^{\alpha}}{R_1(z,t) + \alpha^{(1)}t^{\alpha}}.$$

Do Teorema 5.6, sabemos que

$$\begin{aligned} R_2^{(1)}(z,t) \;&=\; \frac{|\alpha^{(0)} - \alpha^{(1)}| - (\alpha^{(0)} - \alpha^{(1)})}{2\alpha^{(1)}} \frac{1}{z - \beta^{(0)}t^{\alpha}} + \frac{(\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}) - |\alpha^{(0)} - \alpha^{(1)}|}{2\alpha^{(1)}} \\ &\times D \int_{\tilde{E}} \frac{1}{z - x} V(x; \gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}, \beta^{(1)}t^{\alpha}) dx. \end{aligned}$$

De (5.25), temos que

$$d\tilde{G}(x; \gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}, \beta^{(1)}t^{\alpha}) = DV(x; \gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}, \beta^{(1)}t^{\alpha}) I_{\tilde{E}}(x) dx.$$

Daí, podemos escrever

$$\begin{aligned} R_2^{(1)}(z,t) \;&=\; \frac{|\alpha^{(0)} - \alpha^{(1)}| - (\alpha^{(0)} - \alpha^{(1)})}{2\alpha^{(1)}} \frac{1}{z - \beta^{(0)}t^{\alpha}} + \frac{(\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}) - |\alpha^{(0)} - \alpha^{(1)}|}{2\alpha^{(1)}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - x} d\tilde{G}(x; \gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}, \beta^{(1)}t^{\alpha}). \end{aligned}$$

Analisando os casos $\alpha^{(1)} \geq \alpha^{(0)}$ e $\alpha^{(1)} < \alpha^{(0)}$, chegamos que

$$\begin{aligned} R_2^{(1)}(z,t) &= \frac{\alpha_{min}}{\alpha^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-x} d\tilde{G}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}, \beta^{(1)} t^{\alpha}) \\ &\quad + \frac{\alpha^{(1)} - \alpha_{min}}{\alpha^{(1)}} \frac{1}{z - \beta^{(0)} t^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.5 (Grommer-Hamburger),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2k} \tau_{2k,j} f(z_{2k,j}/\lambda_{2n}) &\rightarrow \frac{\alpha_{min}}{\alpha^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\tilde{G}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \lambda t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}, \beta^{(1)} t^{\alpha}) \\ &\quad + \frac{\alpha^{(1)} - \alpha_{min}}{\alpha^{(1)}} f(\beta^{(0)} t^{\alpha}). \end{aligned}$$

Para n par e k ímpar, a demonstração é análoga, substituindo-se $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$ por $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$.

Para demonstrar (iii), vamos mostrar que o integrando de (5.20) é a transformada de Stieltjes da função distribuição $\tilde{F}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha})$. De (5.24), temos que

$$\tilde{F}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{|u - \beta t^{\alpha}|(u + \beta t^{\alpha})/u}{\sqrt{\gamma_1^2 t^{\alpha} u - (u - \beta t^{\alpha})^2} \sqrt{(u - \beta t^{\alpha})^2 - \gamma_0^2 t^{\alpha} u}} I_{\tilde{E}}(u) du.$$

Mas, de (5.3) e (5.5),

$$S(\tilde{F}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}); z) = \frac{1}{2z} \frac{z^2 - u_2 t^{2\alpha}}{\sqrt{\left[z^2 - u_1 t^{\alpha} z + u_2 t^{2\alpha}\right]^2 - 4u_3 t^{2\alpha} z^2}} + \frac{1}{2z},$$

onde $u_1 = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}$, $u_2 = \beta^{(0)} \beta^{(1)}$ e $u_3 = \alpha^{(0)} \alpha^{(1)}$.

Assim, do Teorema 5.5,

$$S(\tilde{F}_n(x); z) \rightarrow \int_0^1 S(\tilde{F}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}); z) dt.$$

Portanto, pelo Teorema 2.5 (Grommer-Hamburger),

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(z_{n,j}/\lambda_n) \rightarrow \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\tilde{F}(x;\gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}) dt$$

para toda função contínua f em $(0, \infty)$. ∎

5.3.2 Casos Especiais

Como nos polinômios ortogonais, analisaremos alguns casos especiais dos teoremas anteriores deste capítulo. Note que, mesmo que os coeficientes β_n, α_n, $n \geq 1$, sejam positivos, qualquer um de seus limites, isto é, qualquer um dos valores $\beta^{(0)}$, $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ e $\alpha^{(1)}$ pode assumir o valor zero.

Caso 1: Primeiramente vamos considerar o caso

$$\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = \tilde{\alpha} > 0 \qquad \text{e} \qquad \beta^{(0)} = \beta^{(1)} = \tilde{\beta} > 0.$$

Então, $a = \tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha} - \sqrt{\left(\tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha}\right)^2 - \tilde{\beta}^2}$, $\quad b = \tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha} + \sqrt{\left(\tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha}\right)^2 - \tilde{\beta}^2}$ e $\tilde{a} = \tilde{b} = \tilde{\beta}$. Neste caso, pelo Teorema 5.7,

$$\sum_{j=1}^{k} \tau_{k,j} f(z_{k,j}/\lambda_n) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\tilde{G}(x; 0, 2\sqrt{\tilde{\alpha}} t^{\alpha/2}, 0, \tilde{\beta} t^{\alpha}, \tilde{\beta} t^{\alpha}).$$

Fazendo $x = zt^{\alpha}$ e, em seguida, $z = x$, chegamos que

$$\sum_{j=1}^{k} \tau_{k,j} f(z_{k,j}/\lambda_n) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(xt^{\alpha}) d\tilde{G}(x; 0, 2\sqrt{\tilde{\alpha}} t^{\alpha/2}, 0, \tilde{\beta} t^{\alpha}, \tilde{\beta} t^{\alpha}).$$

De (5.25),

$$\tilde{G}(xt^{\alpha}; 0, 2\sqrt{\tilde{\alpha}} t^{\alpha/2}, 0, \tilde{\beta} t^{\alpha}, \tilde{\beta} t^{\alpha}) = \frac{1}{2\pi\tilde{\alpha} t^{\alpha}} \int_{-\infty}^{xt^{\alpha}} \frac{\sqrt{4\tilde{\alpha} t^{\alpha} u - (u - \tilde{\beta} t^{\alpha})^2}}{u} I_{[a,b]}(u) du.$$

Daí, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que

$$d\tilde{G}(xt^{\alpha}; 0, 2\sqrt{\tilde{\alpha}} t^{\alpha/2}, 0, \tilde{\beta} t^{\alpha}, \tilde{\beta} t^{\alpha}) = \frac{1}{2\pi\tilde{\alpha}} \frac{\sqrt{4\tilde{\alpha} x - (x - \tilde{\beta})^2}}{x} I_{[a,b]}(xt^{\alpha}) dx.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{k} \tau_{k,j} f(z_{k,j}/\lambda_n) \to \frac{1}{2\pi\tilde{\alpha}} \int_{a}^{b} f(xt^{\alpha}) \frac{\sqrt{4\tilde{\alpha} x - (x - \tilde{\beta})^2}}{x} dx.$$

Por outro lado, usando o Teorema 5.4, obtemos que $R_2^{(0)}(z,t) = R_2^{(1)}(z,t) = R_2(z,t)$, onde

$$R_2(z,t) = \frac{2}{(z - \tilde{\beta} t^{\alpha}) + \sqrt{(z - \tilde{\beta} t^{\alpha})^2 - 4\tilde{\alpha} t^{\alpha} z}},$$

pois $(z - at^{\alpha})(z - bt^{\alpha}) = (z - \tilde{\beta} t^{\alpha})^2 - 4\tilde{\alpha} t^{\alpha} z$.

Portanto, podemos concluir que

$$R_2(z,t) = \frac{2}{(z - \tilde{\beta} t^{\alpha}) + \sqrt{(z - \tilde{\beta} t^{\alpha})^2 - 4\tilde{\alpha} t^{\alpha} z}} = \frac{1}{2\pi\tilde{\alpha}} \int_{a}^{b} f(xt^{\alpha}) \frac{\sqrt{4\tilde{\alpha} x - (x - \tilde{\beta})^2}}{x} dx.$$

Pelo Teorema 5.7 (iii), temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(z_{n,j}/\lambda_n) \to \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\tilde{F}(x;0,2\sqrt{\tilde{\alpha}}t^{\alpha},\tilde{\beta}t^{\alpha})dt.$$

Fazendo $x = zt^{\alpha}$ e, em seguida, $z = x$, obtemos

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(z_{n,j}/\lambda_n) \to \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(xt^{\alpha})d\tilde{F}(xt^{\alpha};0,2\sqrt{\tilde{\alpha}}t^{\alpha},\tilde{\beta}t^{\alpha})dt.$$

Mas, de (5.24),

$$\tilde{F}(xt^{\alpha};0,2\sqrt{\tilde{\alpha}}t^{\alpha},\tilde{\beta}t^{\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{xt^{\alpha}} \frac{1+\tilde{\beta}t^{\alpha}/u}{\sqrt{4\tilde{\alpha}ut^{\alpha}-(u-\tilde{\beta}t^{\alpha})^2}} I_{[a,b]}(u)du.$$

Logo,

$$\tilde{F}(xt^{\alpha};0,2\sqrt{\tilde{\alpha}}t^{\alpha},\tilde{\beta}t^{\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1+\tilde{\beta}/x}{\sqrt{4\tilde{\alpha}x-(x-\tilde{\beta})^2}} I_{[a,b]}(xt^{\alpha})dx.$$

Portanto,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(z_{n,j}/\lambda_n) \to \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(xt^{\alpha})\frac{1+\tilde{\beta}/x}{\sqrt{4\tilde{\alpha}x-(x-\tilde{\beta})^2}}dxdt.$$

Caso 2: Um importante caso a ser considerado é quando $\alpha^{(0)}$ ou $\alpha^{(1)}$ é igual a zero, ou seja, para s igual a 0 ou 1,

$$\alpha^{(s)} = 0, \qquad \alpha^{(1-s)} \geq 0, \qquad \beta^{(s)} > 0 \qquad \text{e} \qquad \beta^{(1-s)} > 0.$$

Sabemos que

$$S(G_{2n,2k}(x);z) = \lambda_{2n}\frac{B_{2k-1}(\lambda_{2n}z)}{B_{2k}(\lambda_{2n}z)} \to \frac{z-\beta^{(1)}t^{\alpha}}{R_1(z,t)+\alpha^{(1)}t^{\alpha}}.$$

- Se $\alpha^{(0)} = 0$, então,

$$S(G_{2n,2k}(x);z) \to \frac{1}{z-\beta^{(0)}t^{\alpha}} = S(U(x-\beta^{(0)}t^{\alpha});z).$$

- Se $\alpha^{(1)} = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
S(G_{2n,2k}(x);z) &\to \frac{(z-\beta^{(1)}t^{\alpha})}{(z-\beta^{(0)}t^{\alpha})(z-\beta^{(1)}t^{\alpha})-\alpha^{(0)}t^{\alpha}z} \\
&= \frac{(z-\beta^{(1)}t^{\alpha})}{(z-at^{\alpha})(z-bt^{\alpha})} \\
&= \frac{\beta^{(1)}-a}{b-a}\frac{1}{z-at^{\alpha}} + \frac{b-\beta^{(1)}}{b-a}\frac{1}{z-bt^{\alpha}} \\
&= \frac{\beta^{(1)}-a}{b-a}S(U(x-at^{\alpha});z) + \frac{b-\beta^{(1)}}{b-a}S(U(x-bt^{\alpha});z).
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^{2k} \tau_{2k,j} f(z_{2k,j}/\lambda_{2n}) \to \begin{cases} f(\beta^{(0)}t^{\alpha}), & \text{se } \alpha^{(0)} = 0, \\ \dfrac{1}{b-a}\Big\{(\beta^{(1)} - a)f(at^{\alpha}) + (b - \beta^{(1)})f(bt^{\alpha})\Big\}, & \text{se } \alpha^{(1)} = 0. \end{cases}$$

De maneira análoga, obtemos que

$$\sum_{j=1}^{2k+1} \tau_{2k+1,j} f(z_{2k+1,j}/\lambda_{2n}) \to \begin{cases} f(\beta^{(1)}t^{\alpha}), & \text{se } \alpha^{(1)} = 0, \\ \dfrac{1}{b-a}\Big\{(\beta^{(0)} - a)f(at^{\alpha}) + (b - \beta^{(0)})f(bt^{\alpha})\Big\}, & \text{se } \alpha^{(0)} = 0. \end{cases}$$

Como $\alpha^{(0)} = 0$ ou $\alpha^{(1)} = 0$, então $\tilde{a} = a$ e $\tilde{b} = b$. Com isto, podemos escrever

$$R_3(z,t) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2z}\frac{z^2 - abt^{2\alpha}}{(z - at^{\alpha})(z - bt^{\alpha})} + \frac{1}{2z}\right] dt.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} S(\tilde{F}_n(x); z) &\to \int_0^1 \left[\frac{1}{2z}\frac{z^2 - abt^{2\alpha}}{(z - at^{\alpha})(z - bt^{\alpha})} + \frac{1}{2z}\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1/2}{z - at^{\alpha}} + \frac{1/2}{z - bt^{\alpha}}\right] dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[S(U(x - at^{\alpha}); z) + S(U(x - bt^{\alpha}); z)\Big] dt. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(z_{n,j}/\lambda_n) \to \frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{f(at^{\alpha}) + f(bt^{\alpha})\Big\} dt,$$

onde f é uma função contínua em $(0,\infty)$, $n \to \infty$ e $k/n \to t \in [0,1]$ e

$$\tilde{F}(x; \gamma_0 t^{\alpha/2}, \gamma_1 t^{\alpha/2}, \beta t^{\alpha}) = \frac{1}{2}U(x - at^{\alpha}) + \frac{1}{2}U(x - bt^{\alpha}).$$

Caso 3: Outro caso a ser considerado é quando

$$\alpha^{(s)} \geq 0, \qquad \alpha^{(1-s)} \geq 0, \qquad \beta^{(s)} = 0 \qquad \text{e} \qquad \beta^{(1-s)} = \tilde{\beta} \geq 0, \quad s = 0, 1.$$

Neste caso, temos que $u_2 = \beta^{(0)}\beta^{(1)} = 0$. Assim,

$$\tilde{a} = a = 0, \quad \tilde{b} = \tilde{\beta} + (\sqrt{\alpha^{(0)}} - \sqrt{\alpha^{(1)}})^2 \quad \text{e} \quad b = \tilde{\beta} + (\sqrt{\alpha^{(0)}} + \sqrt{\alpha^{(1)}})^2.$$

Substituindo esses valores na equação (5.23), obtemos que

$$\begin{aligned} R_3(z) &= \frac{1}{2z} + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \int_{\tilde{b}t^{\alpha}}^{bt^{\alpha}} \frac{1}{z - x}\frac{1}{\sqrt{x - \tilde{b}t^{\alpha}}\sqrt{bt^{\alpha} - x}} dx dt \\ &= \frac{1}{2z} + \int_0^1 \left[\frac{1/2}{\sqrt{z - bt^{\alpha}}\sqrt{z - \tilde{b}t^{\alpha}}}\right] dt. \end{aligned}$$

Daí,

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{2}U(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \int_{-\infty}^{x} \frac{U(u-\tilde{b}t^{\alpha}) - U(u-bt^{\alpha})}{\sqrt{u-\tilde{b}t^{\alpha}}\sqrt{bt^{\alpha}-u}} dxdt.$$

Logo, para toda função contínua f em $(0,\infty)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(z_{n,j}/\lambda n) \to \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \int_{\tilde{b}}^{b} f(xt^{\alpha}) \frac{1}{\sqrt{x-\tilde{b}}\sqrt{b-x}} dxdt. \tag{5.31}$$

Note que se $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)}$ e $\tilde{\beta} = 0$, então $\tilde{b} = 0$.

Caso 4: Seja agora,

$$\alpha^{(s)} = 0, \qquad \alpha^{(1-s)} = \tilde{\alpha} \geq 0, \qquad \beta^{(s)} = 0 \qquad \text{e} \qquad \beta^{(1-s)} = \tilde{\beta} \geq 0, \quad s = 0, 1.$$

Segue que $\tilde{a} = a = 0$ e $\tilde{b} = b = \tilde{\beta} + \tilde{\alpha}$. Então, de (5.23)

$$R_3(z) = \frac{1}{2z} + \int_0^1 \frac{1/2}{z - bt^{\alpha}} dt.$$

Isto significa que

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{2}U(x) + \frac{1}{2}U(x - bt^{\alpha}).$$

Observe que se $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$, $b = \tilde{b} = 0$ e $\tilde{F}(x) = U(x)$.

5.3.3 Exemplos

No artigo [33], Sri Ranga mostrou que, a partir da transformação

$$t(x) = \left\{\sqrt{\rho x^2 + \beta} + \sqrt{\rho}x\right\}^2, \qquad x \in (-\infty, \infty), \tag{5.32}$$

conseguimos uma relação entre polinômios ortogonais e os L-polinômios ortogonais associados, onde $t(x)$ representa uma aplicação biunívoca entre $(-\infty,\infty)$ e $(0,\infty)$.

A inversa de $t(x)$ é dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\left(\sqrt{t} - \frac{\beta}{\sqrt{t}}\right). \tag{5.33}$$

Neste mesmo artigo demonstrou os seguintes teoremas.

Teorema 5.8 *Sejam $b > 0$ e $d > 0$ tais que $\sqrt{b} = \sqrt{\rho d^2 + \beta} + \sqrt{\rho}d$ e*

$$v(t) = At^{1/2}w(x(t)). \tag{5.34}$$

Então, $w(x)$ é uma função peso simétrica ($w(x) = w(-x)$) em $(-d,d)$ se, e somente se, $v(t)$ é uma função peso forte em $(\beta^2/b, b)$ tal que $\sqrt{t}v(t) = \sqrt{\beta^2/t}v(\beta^2/t)$, onde A é um número positivo.

Teorema 5.9 *Sejam $w(x)$ e $v(t)$ um par de funções peso dadas pelo Teorema 5.8, $Q_n(x)$ e $B_n(t)$ os polinômios ortogonais e similares associados a $w(x)$ e $v(t)$, respectivamete. Então, para $n \geq 0$,*

$$B_n(t) = (2\sqrt{\rho t})^n Q_n(x(t)) \tag{5.35}$$

e os coeficientes das correspondentes relações de recorrência satisfazem

$$\alpha_{n+1}^v = 4\rho\alpha_{n+1}^w. \tag{5.36}$$

Veremos, agora, alguns exemplos de polinômios que satisfazem à relação de recorrência (3.38) e cujos coeficientes satisfazem às condições (5.1).

Exemplo 5.1 Sabemos que os polinômios mônicos de Hermite $H_n(x)$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$ e satisfazem à relação de recorrência

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \qquad n \geq 0. \tag{5.37}$$

Pela transformação (5.33) e por (5.34), temos que os polinômios B_n^H, similares aos ortogonais $H_n(x)$, são definidos por

$$\int_0^\infty t^{-n+s} B_n^H(t) t^{-1/2} e^{-\frac{t+\beta^2/t}{4\rho}} dt = 0, \qquad 0 \leq s \leq n-1.$$

Agora, por (5.35), (5.36) e (5.37), os polinômios B_n^H satisfazem à relação

$$B_{n+1}^H(z) = (z-\beta)B_n^H(z) - 2\rho(n+1)zB_{n-1}^H(z), \qquad n \geq 0.$$

Desta relação, obtemos que

$$\alpha_{2n} = 2\rho(2n), \quad \alpha_{2n+1} = 2\rho(2n+1) \quad \text{e} \quad \beta_{2n} = \beta_{2n+1} = \beta.$$

Note que os coeficientes α_{2n} e α_{2n+1} são ilimitados, mas são de variação regular. Tomemos, então, a sequência de variação regular $\{\lambda_n\} = \{n\}$ $(\alpha = 1)$. Assim, das condições (5.1), teremos, para $\rho = \dfrac{1}{2}$, $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = 1$ e $\beta^{(0)} = \beta^{(1)} = 0$. Estamos, então, no **Caso 3** desta última seção.

Assim, pelo Teorema 5.3, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{B_k^H(nz)}{B_{k-2}^H(nz)} = \frac{1}{2}\left\{z^2 - 2tz + |z|\sqrt{z^2 - 4tz}\right\}$$

uniformemente para z em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, A]$ e, por (5.31), obtemos que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n f(z_{n,j}/n) \to \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \int_0^4 f(xt^\alpha)\frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} dx dt.$$

Exemplo 5.2 Consideremos agora, os polinômios definidos por

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_m^{(\lambda)}(x) G_n^{(\lambda)}(x) \frac{1}{cos(\pi\lambda) + cosh(\pi x)} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2\lambda(1-\lambda)_n(1+\lambda)_n(n!)^2}{sen[\pi\lambda(2n+1)]}, & m = n. \end{cases}$$

Veja Chihara [8], Cap.VI, p.193 para mais detalhes.

Esses polinômios satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = xG_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n^2(n^2-\lambda^2)}{4n^2-1} G_{n-1}^{(\lambda)}(x), \qquad -1 < \lambda < 1. \tag{5.38}$$

Pela transformação (5.33) e por (5.34), os polinômios B_n^G, similares aos ortogonais $G_n^{(\lambda)}$, são definidos por

$$\int_0^{\infty} t^{-n+s} B_n^G(t) \frac{t^{-1/2}}{cos(\pi\lambda) + cosh\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(\sqrt{t} - \beta/\sqrt{t})\right]} dt = 0, \qquad 0 \leq s \leq n-1.$$

Aqui, tomamos $\rho = \dfrac{1}{2}$.

De (5.35), (5.36) e (5.38), temos que B_n^G satisfaz à relação de recorrência (3.38) com

$$\beta_{n+1} = \beta > 0, \qquad \alpha_{n+1} = \frac{n^2\big(n^2-\lambda^2\big)}{4n^2-1}, \qquad n \geq 1.$$

Tomando uma sequência de variação regular $\{\lambda_n\} = n^2$ $(\alpha = 2)$, obtemos que $\alpha^{(0)} = \alpha^{(1)} = 1$ e $\beta^{(0)} = \beta^{(1)} = 0$.

Neste caso, pelo Teorema 5.3, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \frac{B_k^G(n^2z)}{B_{k-2}^G(n^2z)} = \frac{1}{2}\Big\{z^2 - 2t^2z + |z|\sqrt{z^2-4t^2z}\Big\}$$

uniformemente para z em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, A]$.

Observe que, novamente, estamos no **Caso 3**. Assim, temos que $\tilde{a} = a = 0$, $\tilde{b} = 0$ e $b = 4$. Logo,

$$R_3(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{4t^2} \frac{1}{z-x} \frac{1}{\sqrt{4t^2x - x^2}} dx dt.$$

Exemplo 5.3 Vamos considerar o sistema de polinômios ortogonais estudados por Stieltjes, Carlitz e Al-Salam. Vimos, na seção 4.3.3, que os polinômios $\{C_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{D_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisfazem

$$C_{n+1}(x) = xC_n(x) - \hat{\delta}_n^{(C)} C_{n-1}(x)$$

e

$$D_{n+1}(x) = xD_n(x) - \hat{\delta}_n^{(D)} D_{n-1}(x),$$

com

$$\begin{array}{ll} \hat{\delta}_{2n}^{(C)} = (2n)^2\kappa^2, & \hat{\delta}_{2n}^{(D)} = (2n)^2, \\ \hat{\delta}_{2n+1}^{(C)} = (2n+1)^2, & \hat{\delta}_{2n+1}^{(D)} = (2n+1)^2\kappa^2, \end{array}$$

onde κ é um número real.

De (5.35) e (5.36), obtemos dois sistemas de polinômios $\{B_n^C(z)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{B_n^D(z)\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem às seguintes relações de recorrência

$$B_{n+1}^C(z) = (z-\beta)B_n^C(z) - \alpha_n^{(C)} z B_{n-1}^C(z)$$

e

$$B_{n+1}^D(z) = (z-\beta)B_n^D(z) - \alpha_n^{(D)} z B_{n-1}^D(z),$$

onde $\alpha_n^{(C)} = \hat{\delta}_n^{(C)}$ e $\alpha_n^{(D)} = \hat{\delta}_n^{(D)}$ quando tomamos $\rho = \dfrac{1}{4}$.

Esses coeficientes são ilimitados, mas de variação regular. Escolhendo uma sequência de variação regular $\{\lambda_n\} = \{n^2\}$ $(\alpha = 2)$, obtemos

$$\alpha_C^{(0)} = \alpha_D^{(1)} = \kappa^2, \quad \alpha_C^{(1)} = \alpha_D^{(0)} = 1 \quad \text{e} \quad \beta_C^{(0)} = \beta_C^{(1)} = \beta_D^{(0)} = \beta_D^{(1)} = 0.$$

Estamos novamente no **Caso 3** para ambos os sistemas. Então, $\tilde{a} = a = 0$, $\tilde{b} = (1-\kappa)^2$ e $b = (1+\kappa)^2$.

Logo, pelos Teoremas 5.3 e 5.5, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \frac{B_k^C(n^2 z)}{B_{k-2}^C(n^2 z)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \frac{B_k^D(n^2 z)}{B_{k-2}^D(n^2 z)} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{ z^2 - (1+\kappa^2)t^2 z + \sqrt{z^2-(\kappa+1)^2t^2 z}\sqrt{z^2-(\kappa-1)^2t^2 z} \Big\} \end{aligned}$$

uniformemente para z em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, A]$ e

$$R_3^C(z) = R_3^D(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{(\kappa-1)^2t^2}^{(\kappa+1)^2t^2} \frac{1}{z-x} \frac{1}{\sqrt{x-(1-\kappa)^2t^2}\sqrt{(1+\kappa)^2t^2-x}} dx dt.$$

Capítulo 6

Considerações Finais

Vários trabalhos sobre propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais $Q_n(x)$ quando os coeficientes da correspondente relação de recorrência são limitados, ou seja,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_{2n} = \tilde{b}_1, \qquad &&\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_{2n} = \tilde{a}_1^2, \\ &\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_{2n+1} = \tilde{b}_2, \qquad &&\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_{2n+1} = \tilde{a}_2^2, \end{aligned} \tag{6.1}$$

foram publicados. Para citar alguns, Akhiezer [1], Chihara [7, 8], Nevai [24, 25, 26], Geronimo e Case [16], Geronimo e Van Assche [17, 42].

No caso em que os coeficientes da relação de recorrência são ilimitados, Chihara [10] fez um extenso uso de sequências encadeadas para dar condições a esses coeficientes sob as quais o conjunto dos zeros dos polinômios ortogonais tivesse um limitante superior (ou inferior).

Supondo que os coeficientes da relação de recorrência divergem, mas de forma que exista uma função crescente e positiva $\Psi(t)$ satisfazendo

$$\Psi(x+t)/\Psi(t) \to 1, \qquad x > 0 \ \text{ e } \ t \to \infty,$$

tal que $\hat{\xi}_n/\Psi(n)$ e $\hat{\delta}_n/\Psi(n)$ tenham limites finitos, Nevai e Dehesa [27] obtiveram assintóticos para

$$\sum_{k=1}^{n} x_{n,k}^M \Big/ \int_0^n \Psi(t)^M dt,$$

onde $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$ são os zeros de $Q_n(x)$ (ou $p_n(x)$) e M é um inteiro fixo positivo.

Em 1988, Van Assche [43] fez um estudo semelhante para o caso em que os coeficientes da relação de recorrência satisfazem

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_{2n}/\lambda_{2n} = b_1, \qquad &&\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_{2n}^{1/2}/\lambda_{2n} = a_1, \\ &\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_{2n+1}/\lambda_{2n} = b_2, \qquad &&\lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_{2n+1}^{1/2}/\lambda_{2n} = a_2, \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde λ_n é uma sequência de variação regular (Definição 4.1).

Para os polinômios similares aos ortogonais, em 1999, Andrade, Sri Ranga e Van Assche [3], fizeram o primeiro estudo sobre o comportamento assintótico desses polinômios quando os coeficientes da relação de recorrência são limitados, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{2n} = \tilde{\beta}^{(0)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n} = \tilde{\alpha}^{(0)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{2n+1} = \tilde{\beta}^{(1)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n+1} = \tilde{\alpha}^{(1)}.$$

Baseado no trabalho de Van Assche [42], fizemos um estudo semelhante para o caso dos polinômios similares aos ortogonais cujos coeficientes da respectiva relação de recorrência satisfazem

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{2n}/\lambda_{2n} = \beta^{(0)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n}/\lambda_{2n} = \alpha^{(0)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{2n+1}/\lambda_{2n} = \beta^{(1)}, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n+1}/\lambda_{2n} = \alpha^{(1)}$$

que, para nosso conhecimento, não há nenhum trabalho publicado sobre o assunto. Os resultados obtidos neste trabalho foram organizados em um artigo intitulado "*Asymptotics for polynomials satisfying a certain twin asymptotic periodic recurrence relation: unbounded cases*" que já foi submetido para publicação em uma revista de circulação internacional.

Em estudos futuros, um assunto interessante sobre as propriedades assintóticas desses polinômios, a ser abordado é quando os coeficientes da relação de recorrência são periódicos.

Referências Bibliográficas

[1] Akhiezer, N.I., Uber line Eigenschafet der "elliptishen" Polynome, *Comm. Soc. Math. Kharkov*, **4** (1934), 3-8.

[2] Al-Salam, W.A., Characterization of certain classes of orthogonal polynomials related to elliptic function, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **67** (1965), 75-94.

[3] Andrade, E.X.L., Sri Ranga, A. & Van Assche, W., Asymptotic for polynomials satisfying a certain twin asymptotic periodic recurrence relation, *Methods and Applications of Analysis*, **6** (1999), 535-548.

[4] Arnold, L., Deterministic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula I, *Linear Algebra Appl.*, **13** (1976), 185-199.

[5] Bingham, N.H., Goldie, C.M. and Teugels, J.L., *Regular Variation*, Cambridge Univ. Press, London/New York, 1987.

[6] Carlitz, L., Some orthogonal polynomials related to elliptic functions I, II, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 443-458; **28** (1961), 107-124.

[7] Chihara, T.S., Chain sequences and orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **104** (1962), 1-16.

[8] Chihara, T.S., *An Indroduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[9] Chihara, T.S., Orthogonal polynomials whose zeros are dense in intervals, *J. Math. Anal. Appl.*, **24** (1968), 362-371.

[10] Chihara, T.S., Spectral properties of orthogonal polynomials on unbounded sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **270** (1982), 623-639.

[11] Churchill, R.V., *Complex Variables and Aplications*, second edition, Kōyakusha Company ltda., Tokyo, 1960.

[12] Cooper S.C. & Gustafson, P.E., The strong Chebyshev distribution and orthogonal Laurent polynomials, *J. Approx. Theory*, **92** (1998), 361-378.

[13] Dombrowski, J., Spectral properties of real parts of weighted shift operators, *Indiana Univ. Math. J.*, **29** (1980), 249-259.

[14] Dombrowski, J. & Fricke, G.H., The absolute continuity of phase operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **213** (1975), 363-372.

[15] Dombrowski, J. & Nevai, P., Orthogonal polynomials, measures and recurrence relations, *SIAM J. Math. Anal.*, **17** (1986), 752-759.

[16] Geronimo, J.S. & Case, K.M., Scattering theory and polynomials orthogonal on the real line, *Trans. Math. Soc.*, **258** (1980), 467-494.

[17] Geronimo, J.S. & Van Assche, W., Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients, *J. Approx. Theory*, **46** (1986), 251-283.

[18] Hille, E., *Analytic Function Theory*, **2**, Blaisdell Publ. Co., Waltham, 1962.

[19] Ismail, M.E.H. & Li, X., Bounds on the extreme zeros of orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115** (1992), 131-140.

[20] Jones, W.B., Thron, W.J. & Waadeland, H., A strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **261** (1980), 503-528.

[21] Jones, W.B., Njåstad, O. & Thron, W.J., Orthogonal Laurent polynomials and strong Hamburger moment problem *J. Math. Anal. Appl.*, **98** (1984), 528-554.

[22] Lieb, E.H. & Loss, M., *Analysis*, Amer. Math. Soc., **14**, 1954.

[23] Lorentzen, L. and Waadeland, H., *Continued Fractions with Applications*, North-Holland, 1992.

[24] Nevai, P.G., *Orthogonal Polynomials*, Memoir of the A.M.S., Amer. Math. Soc., vol. **213**, 1979.

[25] Nevai, P.G., Distribution of zeros of orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **249** (1979), 341-361.

[26] Nevai, P.G., Orthogonal polynomials defined by a recurrence relation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **250** (1979), 369-384.

[27] Nevai, P.G. & Dehesa, J.S., On asymptotic average properties of zeros of orthogonal polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, **10** (1979), 1184-1192.

[28] Rakhmanov, E.A., On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real line, *Mat. Sb.*, **119** (1982), 163-203 [in Russian]; Math. USSR-Sb. **47** (1984), 155-193.

[29] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, second edition, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1978.

[30] Schohat, J. & Tamarkin, J., *The problem of moments*, Math. Sur., Amer. Math. Soc., vol. **1**, New York, 1943.

[31] Seneta, E., "Regularly Varying Functions", *Lecture Notes in Mathematics*, **508**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[32] Sri Ranga, A., Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision, *Numer. Math.*, **68** (1994), 283-294.

[33] Sri Ranga, A., Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 3135-3141.

[34] Sri Ranga, A. & Bracciali, C.F., A continued fraction associated with a special Stieltjes function, *Commun. Anal. Theory Continued Fractions*, **3** (1994), 60-64.

[35] Sri Ranga, A. & Matioli, L.C., Bounds for the exteme zeros of polynomials generated by a certain recurrence relation, *Rev. Mat. Estat.*, **14** (1996), 113-120.

[36] Sri Ranga, A. Andrade, E.X.L. & Phillips, G.M., Associated symmetric quadrature rules, *Applied Numerical Mathematics*, **21** (1996), 175-183.

[37] Stieltjes, T.J., Recherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **8** (1894), J1-J122; **9** (1895), A1-A47.

[38] Szegö, G., *Orthogonal Polynomials*, Coll. Pub., *Amer. Math. Soc.*, **23**, New York, 1939.

[39] Ullman, J.L., On orthogonal polynomials associated with an infinite interval, in "Approximation Theory III" (E.W. Cheney, Ed.), 889-895, *Academic Press*, New York, 1980.

[40] Ullman, J.L., Orthogonal polynomials associated with an infinite interval, *J. Michigan Math.*, **27** (1980), 353-363.

[41] Wall, H.S., *Analytic Theory of Continued Fractions*, Chelsea, Bronx, New York, 1973.

[42] Van Assche, W., Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula I, *J. Approx. Theory*, **44** (1985), 258-276.

[43] Van Assche, W., Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula II, *J. Approx. Theory*, **52** (1988), 322-338.