

Luciana Claudia de Paula Alonso

**Introdução ao Estudo de Singularidades de
Campos de Vetores Holomorfos em $\mathbb{C}^2, 0$**



1910000925



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

*Introdução ao estudo de singularidades de campos de vetores
holomorfos em $C^2,0$*

Luciana Claudia de Paula Alonso

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Canille Martins



925/00

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática – IBILCE – UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Ciências Matemáticas – Área de concentração: Matemática.

Março - 2000
São José do Rio Preto – S.P.

Agradecimentos

A todos que contribuíram de alguma forma na realização deste trabalho.

De modo especial agradeço:

- Ao Prof. Dr. Júlio C. Canille Martins, pela oportunidade do trabalho e boa orientação.
- À minha mãe Dalva, sem a qual eu certamente não teria chegado até aqui, pelas decisões que soube tomar nos piores momentos e por todo seu amor e confiança.
- Ao meu esposo Luciano por sempre me incentivar.
- À minha amada filha Natássia, agradeço por seu amor e dedico este trabalho.
- À CAPES pelo apoio financeiro.



Resumo

Este trabalho tem como objetivo descrever a dinâmica local das folheações de campos de vetores holomorfos de $\mathbb{C}^2$ próximos a um ponto singular.

Iniciamos com o estudo local da dinâmica de difeomorfismos no plano complexo, próximo ao ponto fixo 0. Depois os resultados são aplicados no estudo das singularidades de campos holomorfos de $\mathbb{C}^2, 0$ para a compreensão da dinâmica das soluções.



Índice

Introdução	4
1 Dinâmica local dos pontos fixos de difeomorfismos complexos ...	5
1.1 Introdução	5
1.2 Pontos fixos hiperbólicos	5
1.3 Pontos fixos neutros	13
2 Topologia das singularidades irredutíveis	
em campos de vetores de $\mathbb{C}^2$	23
2.1 Introdução	23
2.2 Singularidades no domínio de Poincaré	23
2.3 Singularidades no domínio de Siegel	33
Bibliografia	40



Introdução

As curvas integrais de um campo de vetores holomorfo $Z : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definem uma folheação holomorfa com singularidades nos pontos onde Z se anula. As folhas são definidas localmente pelas soluções da equação diferencial

$$\frac{dz}{dT} = Z(z)$$

parametrizadas por T complexo.

Nas vizinhanças de um ponto singular de Z , a folheação pode oferecer um comportamento topológico bastante complexo.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma análise desta situação em dimensão dois. Para este fim, utilizaremos a transformação de Poincaré ou aplicação primeiro retorno.

No primeiro capítulo faremos um estudo local dos pontos fixos de difeomorfismos complexos. Estudaremos os pontos fixos atratores, repulsores e neutros, veremos quando a aplicação é conjugada linearmente com sua derivada e faremos alguns exemplos.

No segundo capítulo estudaremos a dinâmica local das folheações de equações diferenciais associadas a campos de vetores complexos, usando a transformação de Poincaré que é um difeomorfismo, assim aplicando os fatos estudados no primeiro capítulo.



Capítulo 1

Dinâmica local dos pontos fixos de difeomorfismos complexos

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a dinâmica local de aplicações complexas próximas a um ponto fixo, e veremos quando é possível conjugá-la com uma aplicação mais simples (linear). Neste caso diremos que a aplicação é linearizável.

Por simplicidade de cálculos, nos concentraremos em aplicações polinomiais no plano complexo, mas a maioria dos resultados é válida para a classe das aplicações analíticas.

Existem basicamente dois tipos de pontos fixos, os pontos fixos hiperbólicos e os pontos fixos neutros, e é com eles que vamos trabalhar.

1.2 Pontos fixos hiperbólicos

Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica.

Definição 1.2.1 z_0 é um ponto fixo hiperbólico para f se $|f'(z_0)| \neq 1$. Existem pontos fixos hiperbólicos atratores, $|f'(z_0)| < 1$, e pontos fixos hiperbólicos repulsores, $|f'(z_0)| > 1$.

Vamos considerar sempre $|f'(z_0)| \neq 0$, pois estamos interessados no caso em que f seja localmente um difeomorfismo.



Proposição 1.2.1 *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Se f tem um ponto fixo em z_0 e*

- (1) $|f'(z_0)| < 1$, então $f^n(z) \rightarrow z_0$ em uma vizinhança de z_0 ;
 (2) $|f'(z_0)| > 1$, então existe uma vizinhança V de z_0 tal que se z está em V e $z \neq z_0$, então existe $k > 0$ tal que $f^k(z) \notin V$.

Demonstração:

(1) $|f'(z_0)| < 1$ então existe $\epsilon > 0$ tal que $|f'(z)| < c < 1$, para todo z em $B_\epsilon(z_0)$, pois f é analítica.

Dado z em $B_\epsilon(z_0)$, então o segmento $[z, z_0]$ está contido em $B_\epsilon(z_0)$, assim pela Desigualdade do Valor Médio, temos:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq c|z - z_0| \Rightarrow \\ |f(z) - z_0| &\leq c|z - z_0| < |z - z_0| < \epsilon \Rightarrow \\ |f(z) - z_0| &< \epsilon \Rightarrow f(z) \in B_\epsilon(z_0) \end{aligned}$$

logo, o segmento $[f(z), z_0]$ está contido em $B_\epsilon(z_0)$ e podemos aplicar a D.V.M. para $f(z)$.

Portanto

$$\begin{aligned} |f(f(z)) - f(z_0)| &\leq c|f(z) - z_0| \Rightarrow \\ |f^2(z) - z_0| &\leq c|f(z) - z_0| \leq \\ &\leq cc|z - z_0| = c^2|z - z_0| \\ &\vdots \end{aligned}$$

e continuando o raciocínio vem:

$$|f^n(z) - z_0| \leq c^n |z - z_0|.$$

Como $c < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ então

$$f^n(z) - z_0 \rightarrow 0 \Rightarrow f^n(z) \rightarrow z_0, \forall z \in B_\epsilon(z_0).$$

Neste caso dizemos que z_0 é um ponto fixo hiperbólico atrator.



(2) f é analítica e $|f'(z_0)| > 1$, logo $f'(z_0) \neq 0$, então existe uma vizinhança $W \subset U$ de z_0 onde $f|_W: W \rightarrow f(W)$ é um difeomorfismo e possui uma inversa $(f|_W)^{-1} = g: f(W) \rightarrow W$ que é analítica e $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$ onde $f(z) = w$.

Portanto $g(z_0) = f^{-1}(z_0) = z_0$ e $|g'(z_0)| = \frac{1}{|f'(z_0)|} < 1$.

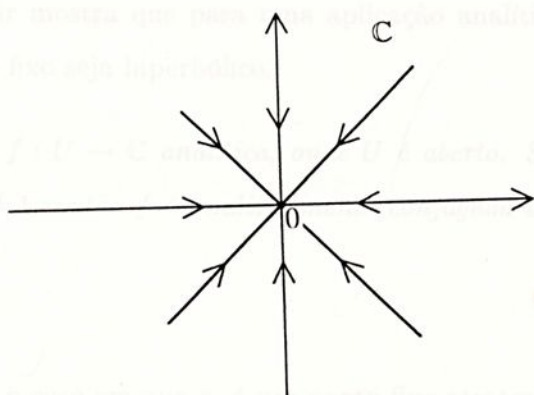
Da parte (1), existe uma vizinhança $V \subset f(W)$ de z_0 na qual z_0 é um atrator.

Olhando para a órbita de z em V vemos que $g^n(z) \rightarrow z_0$, ou seja, a órbita passada de z por f se aproxima de z_0 ($f^{-n}(z) \rightarrow z_0$). Assim a órbita positiva de z se afasta de z_0 .

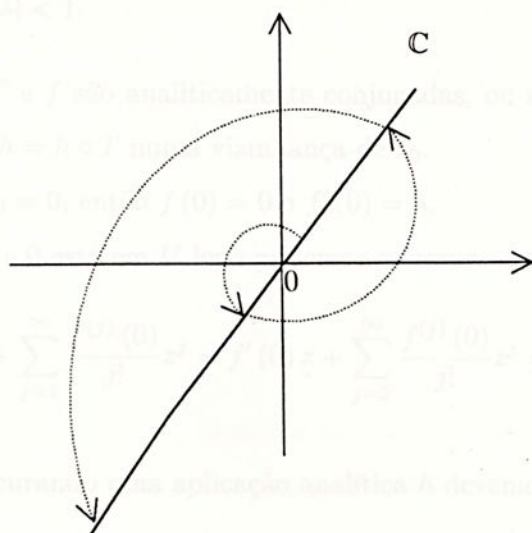
Neste caso dizemos que z_0 é um ponto fixo hiperbólico repulsor. ■

Exemplo 1.2.1 $f(z) = \frac{1}{2}z$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = \frac{1}{2}$ logo 0 é um ponto fixo hiperbólico atrator.

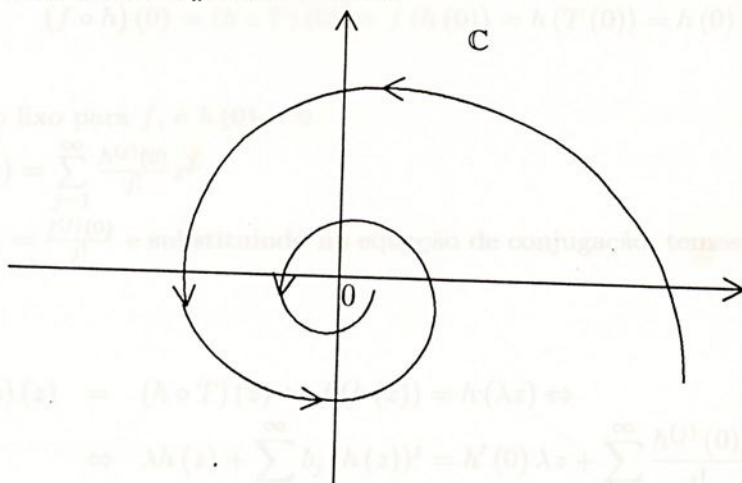
Toda semi reta com extremidade na origem de $\mathbb{C}$ é invariante por f e tem a seguinte dinâmica:



Exemplo 1.2.2 $f(z) = -2z$, $f(0) = 0$ e $f'(0) = -2$ logo 0 é um ponto fixo hiperbólico repulsor para f . Toda reta passando pela origem de $\mathbb{C}$ é invariante por f e tem a seguinte dinâmica:



Exemplo 1.2.3 $f(z) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}z = \frac{i}{2}z$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$ e $|f'(0)| = \frac{1}{2}$ logo 0 é um ponto fixo hiperbólico atrator com a seguinte dinâmica:



O teorema a seguir mostra que para uma aplicação analítica ser localmente linearizável, basta que o seu ponto fixo seja hiperbólico.

Teorema 1.2.1 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, onde U é aberto. Se z_0 é um ponto fixo para f e $f'(z_0) = \lambda$ com $|\lambda| \neq 1$, então f é analiticamente conjugada à $T(z) = \lambda z$, numa vizinhança de z_0 .

Demonstração:

Temos que considerar o caso em que z_0 é um ponto fixo atrator ou um ponto fixo repulsor, ou seja, quando $0 < |\lambda| < 1$ e quando $|\lambda| > 1$ respectivamente.

$$(1) f'(z_0) = \lambda, 0 < |\lambda| < 1.$$

Mostraremos que T e f são analiticamente conjugadas, ou seja, que existe uma aplicação analítica h tal que $f \circ h = h \circ T$ numa vizinhança de z_0 .

Suponhamos que $z_0 = 0$, então $f(0) = 0$ e $f'(0) = \lambda$.

f é analítica em U e 0 está em U logo podemos escrever

$$f(z) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j = f'(0)z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j = \lambda z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j.$$

Como estamos procurando uma aplicação analítica h devemos ter $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} z^j$.

Se $f \circ h = h \circ T$, então

$$(f \circ h)(0) = (h \circ T)(0) \Rightarrow f(h(0)) = h(T(0)) = h(0)$$

logo $h(0)$ é ponto fixo para f , e $h(0) = 0$.

Portanto $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} z^j$.

Colocamos $b_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$ e substituindo na equação de conjugação, temos:

$$\begin{aligned} (f \circ h)(z) &= (h \circ T)(z) \Leftrightarrow f(h(z)) = h(\lambda z) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda h(z) + \sum_{j=2}^{\infty} b_j (h(z))^j = h'(0) \lambda z + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} z^j \lambda^j \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda h'(0) = \lambda h'(0) \end{aligned}$$

assim $h'(0)$ pode ser escolhido arbitrariamente, (diferente de zero), então escolhemos $h'(0) = 1$ e colocamos $a_j = \frac{h^{(j)}(0)}{j!}$ daí $h(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ e temos:

$$\begin{aligned} \lambda h(z) + \sum_{j=2}^{\infty} b_j (h(z))^j &= \lambda z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j \lambda^j \Leftrightarrow \\ \sum_{j=2}^{\infty} (\lambda^j - \lambda) a_j z^j &= \sum_{j=2}^{\infty} b_j \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \right)^j. \end{aligned}$$

Comparando os termos de mesma potência, temos:

$$a_k = \frac{P_k(b_2, \dots, b_k, a_2, \dots, a_{k-1})}{\lambda^k - \lambda}$$

onde P_k é um polinômio.

Desta maneira determinamos os a'_k s se $\lambda^k - \lambda \neq 0$ e temos a solução formal $h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$.

(2) $f'(z_0) = \lambda, |\lambda| > 1$.

Da parte (2) da Proposição 1.2.1, podemos encontrar o difeomorfismo analítico g que é a inversa local de f , de modo que z_0 é um ponto fixo atrator para g e $|g'(z_0)| = \frac{1}{|f'(z_0)|} = \frac{1}{\lambda}$.



Utilizando o raciocínio acima, encontramos uma aplicação analítica h que conjuga g com S , ou seja, $g \circ h = h \circ S$ onde $S(z) = \frac{1}{\lambda}z$, então $(g \circ h)^{-1} = (h \circ S)^{-1}$ e $h^{-1} \circ g^{-1} = S^{-1} \circ h^{-1}$, daí $h^{-1} \circ f = T \circ h^{-1}$. ■

Para completar a prova devemos mostrar que a série $\sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ converge. Para tanto, precisamos de dois lemas:

Lema 1.2.1 *Seja $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$. Então $f(z)$ é linearmente conjugada à aplicação $\varphi(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j$, onde $|b_j| < 1$ para todo j .*

Demonstração:

Temos que encontrar uma aplicação linear $h(z)$ tal que $h \circ f = \varphi \circ h$.

A série $\sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ converge numa vizinhança de 0, logo existem $c > 0$ e $B > 0$ tais que $|a_j| \leq cB^j$ para todo $j \geq 2$, então existe $A > 0$ com $|a_j| < A^{j-1}$ para todo $j \geq 2$. De fato

$$|a_j| < A^{j-1} \Leftrightarrow cB^j \leq A^{j-1} \Leftrightarrow \frac{1}{A^{j-1}} \leq \frac{1}{cB^j} \Leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \left(\frac{1}{cB^j}\right)^{\frac{1}{j-1}}.$$

Como $\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{cB^j}\right)^{\frac{1}{j-1}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{j-1}} \left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{j}{j-1}} = \frac{1}{B} > 0$, então podemos encontrar $0 < \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ de modo que $|a_j| < A^{j-1}$.

Seja $\varphi(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j$ onde $b_j = \frac{a_j}{A^{j-1}}$ então $|b_j| = \left|\frac{a_j}{A^{j-1}}\right| < 1$ para todo j . Seja $h(z) = Az$, temos que

$$(h \circ f)(z) = Az + \sum_{j=2}^{\infty} a_j Az^j = (\varphi \circ h)(z).$$

■

Lema 1.2.2 *Suponhamos que $0 < |\lambda| < 1$. Existe $c > 0$ tal que $|\lambda^k - \lambda| > c$ para todo $k > 1$.*

Demonstração:

Se $0 < \lambda < 1$ então $\dots < \lambda^n < \dots < \lambda^3 < \lambda^2 < \lambda$, então escolhemos $c = \lambda - \lambda^2 - \epsilon$ pois $|\lambda^k - \lambda| = \lambda - \lambda^k = \lambda - \lambda^2 - \epsilon + \lambda^2 + \epsilon - \lambda^k = c + \lambda^2 + \epsilon - \lambda^k > c$.

Se $-1 < \lambda < 0$ então $\lambda < \lambda^3 < \dots < \lambda^{2n+1} < \dots < 0 < \dots < \lambda^{2n} < \dots < \lambda^4 < \lambda^2$ e escolhemos $c = |\lambda - \lambda^3| - \epsilon = \lambda^3 - \lambda - \epsilon$ pois $\lambda - \lambda^3 < \lambda^k - \lambda$ daí $\lambda - \lambda^3 - \epsilon < |\lambda^k - \lambda|$ e $|\lambda^k - \lambda| > c$. ■

Observemos que a série de potências $z(w) = w - \frac{1}{c} \sum_{j=2}^{\infty} w^j$ converge para todo $c \in \mathbb{R}^*$ se $|w| < 1$.

De fato, se tomarmos w em $\mathbb{C}$ com $|w| < 1$, então

$$z(w) = w - \frac{1}{c} \left(\sum_{j=0}^{\infty} w^j - 1 - w \right) = w - \frac{1}{c} \left(\frac{1}{1-w} - 1 - w \right) = w - \frac{1}{c} \frac{w^2}{1-w}.$$

Temos que $z'(w) = 1 - \frac{w}{c} \frac{w^2 - 2w + 2}{(1-w)^2}$, assim $z(0) = 0$ e $z'(0) = 1$, então pelo Teorema da Função Inversa, $z(w)$ tem uma inversa que está definida e é analítica numa vizinhança do zero. Seja $w(z)$ esta inversa, então $w(0) = z^{-1}(0) = 0$ e $w'(0) = \frac{1}{z'(0)} = 1$, logo podemos escrever w na forma $w(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j z^j$, onde a série $\sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j z^j$ converge.

Mostraremos que esta série majora a série dada por $h(z)$, desde que c seja escolhido pequeno o suficiente.

Voltando à primeira parte do Teorema 1.2.1, em que $f'(z_0) = \lambda$ com $0 < |\lambda| < 1$, e escolhendo c como no Lema 1.2.2, temos que $0 \leq |a_k| \leq \alpha_k$ para todo $k \geq 2$ onde os a'_k s e os α'_k s são os coeficientes das séries $h(z)$ e $w(z)$ respectivamente. De fato, sabemos que $w(z)$ verifica a equação:

$$\begin{aligned} z &= w(z) - \frac{1}{c} \sum_{j=2}^{\infty} (w(z))^j \Leftrightarrow c \left(z + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j z^j \right) - cz = \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} (w(z))^j \Leftrightarrow \sum_{j=2}^{\infty} c \alpha_j z^j = \sum_{j=2}^{\infty} (w(z))^j. \end{aligned}$$

Comparando esta equação com a do Teorema 1.2.1, vemos que elas têm a mesma forma, exceto que $\lambda^j - \lambda$ é substituído por c e b_j por 1. Assim encontrando a solução da mesma maneira, obtemos:

$$\alpha_k = \frac{P_k(1, \dots, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})}{c}.$$

Como P_k tem coeficientes inteiros positivos, por indução cada $\alpha_k \geq 0$ e

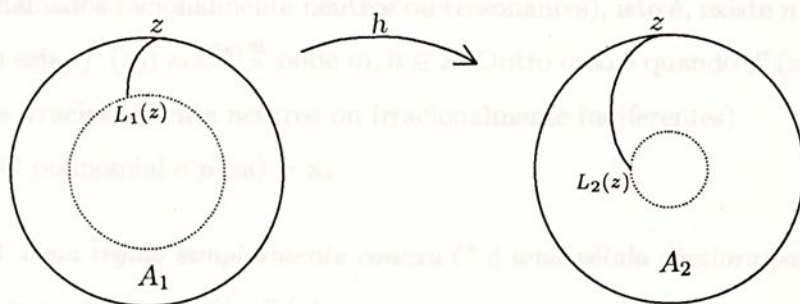
$$|a_k| = \frac{|P_k(b_2, \dots, b_k, a_2, \dots, a_{k-1})|}{|\lambda^k - \lambda|} < \frac{|P_k(b_2, \dots, b_k, a_2, \dots, a_{k-1})|}{c}$$



$$\leq \frac{1}{c} P_k(|b_2|, \dots, |b_k|, |a_2|, \dots, |a_{k-1}|) \leq \frac{1}{c} P_k(1, \dots, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \alpha_k.$$

Logo a série dada por $w(z)$ majora a série dada por $h(z)$, então esta série converge numa vizinhança do zero e o Teorema está provado.

Observação 1.2.1 Sejam $L_1, L_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ aplicações analíticas lineares tais que $L_1(z) = \lambda_1 z$, $L_2(z) = \lambda_2 z$ com $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, então L_1 e L_2 são topologicamente conjugadas. De fato, sejam $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\theta_1}$, $\lambda_2 = |\lambda_2| e^{i\theta_2}$. Para encontrarmos a conjugação, vamos usar a idéia de domínio fundamental. Tomamos z em $\mathbb{C}$ com $|z| = 1$, então $z = e^{i\theta}$, daí $L_1(z) = |\lambda_1| e^{i(\theta+\theta_1)}$ e $L_2(z) = |\lambda_2| e^{i(\theta+\theta_2)}$. O anel A_1 é um domínio fundamental para L_1 , pois dado z em $\mathbb{C}$ sua órbita por L_1 passa exatamente uma vez por A_1 , ou seja, se z não está em A_1 , existe um único inteiro n tal que $L_1^n(z)$ está em A_1 . Da mesma maneira, o anel A_2 é um domínio fundamental para L_2 . Desta forma podemos encontrar um homeomorfismo $h : A_1 \rightarrow A_2$ que leva cada arco de A_1 no respectivo em A_2 .



Agora estenderemos a aplicação para todo o plano. Tomamos z em $\mathbb{C}$ e aplicamos o seguinte procedimento:

1º passo: se z está em A_1 , aplicamos h .

2º passo: se z não está em A_1 , então olhamos para a n -ésima iterada de z de modo que $L_1^n(z)$ esteja em A_1 .

3º passo: aplicamos h em $L_1^n(z)$ daí $h(L_1^n(z))$ está em A_2 .

4º passo: olhamos para a n -ésima iterada passada de $h(L_1^n(z))$ por L_2 , ou seja, $L_2^{-n}(h(L_1^n(z)))$.

Assim definimos $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Observação 1.2.2 (Densidade) Seja $f(z) = \lambda z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ com $0 < |\lambda| < 1$ então existe $\varepsilon > 0$

tal que se $g(z) = \mu z + \sum_{j=2}^{\infty} b_j z^j$ com $|\mu - \lambda| < \varepsilon$, então f e g são localmente topologicamente conjugadas. De fato, tomemos ε de modo que $B_\varepsilon(\lambda) \subset D_1(0)$, então $|\mu| < 1$. Sabemos que f e g são localmente analiticamente conjugadas à $L(z) = \lambda z$ e $T(z) = \mu z$ respectivamente. Da observação anterior temos que L e T são topologicamente conjugadas, logo f e g são topologicamente conjugadas numa vizinhança do zero.

De modo análogo os resultados são válidos para pontos fixos repulsores.

1.3 Pontos fixos neutros

Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica.

Definição 1.3.1 z_0 é um ponto fixo neutro para f se $|f'(z_0)| = 1$.

Existem dois tipos de pontos fixos neutros. O primeiro é aquele onde $f'(z_0)$ é uma raiz da unidade (serão chamados racionalmente neutros ou ressonantes), isto é, existe n natural tal que $(f'(z_0))^n = 1$, ou seja, $f'(z_0) = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ onde $m, n \in \mathbb{Z}$. Outro caso é quando $f'(z_0) = e^{2\pi i \lambda}$ onde $\lambda \notin \mathbb{Q}$ (chamados irracionalmente neutros ou irracionalmente indiferentes).

Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomial e $p(z_0) = z_0$.

Definição 1.3.2 Uma região simplesmente conexa C é uma pétala atratora para z_0 se z_0 está no bordo de C e para cada z em C , $p^n(z) \rightarrow z_0$.

A definição é análoga para pétala repulsora.

Vamos estudar a dinâmica dos pontos fixos com $f(0) = 0$ e $f'(0) = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$. Iniciamos com o caso $f'(0) = 1$.

Proposição 1.3.1 Seja $p(z) = a_n z^n + \dots + a_3 z^3 + z^2 + z$. Existe $\mu > 0$ tal que:

- (1) todo ponto no interior da bola de raio μ centrado em $-\mu$ é atraído para 0;
- (2) todo ponto no interior da bola de raio μ centrado em μ é repelido de 0.

Demonstração:



Para entendermos melhor a dinâmica próxima do ponto fixo 0, vamos trocá-lo por ∞ , através da transformação de Möbius $h(w) = \frac{1}{w} = z$.

$$\overline{\mathbb{C}}_{\infty} \xrightarrow{h} \mathbb{C}_0 \xrightarrow{p} \mathbb{C}_0 \xrightarrow{h^{-1}} \overline{\mathbb{C}}_{\infty}$$

Temos

$$\begin{aligned} g(w) &= (h^{-1} \circ p \circ h)(w) = \frac{1}{p\left(\frac{1}{w}\right)} = \\ &= \frac{1}{a_n + a_{n-1}w + \dots + a_3w^{n-3} + w^{n-2} + w^{n-1}} = w - 1 + g_0(w) \end{aligned}$$

onde

$$g_0(w) = \frac{b_n + b_{n-1}w + \dots + b_3w^{n-3} + b_2w^{n-2}}{a_n + a_{n-1}w + \dots + a_3w^{n-3} + w^{n-2} + w^{n-1}}.$$

Notemos que $\lim_{|w| \rightarrow \infty} g_0(w) = 0$, logo próximo do ∞ , g é a translação de uma unidade para a esquerda e $g(\infty) = \infty$, assim quando 0 é um ponto fixo para f , ∞ é um “ponto” fixo para g .

Existe um $\delta > 0$ tal que se $|w| > \delta$, então g é a translação. Assim, dado $\eta > \delta$ e w em $\overline{\mathbb{C}}$ com $\text{Re}(w) < -\eta$, então $\text{Re}(g(w)) < -\eta$, de fato, como $\text{Re}(w) < -\eta$, então $|w| > \eta > \delta$, logo $g(w) = w - 1$ e $\text{Re}(g(w)) = \text{Re}(w) - 1 < -\eta - 1 < -\eta$. Portanto cada semi reta horizontal é invariante por g , daí o semi plano $\text{Re}(w) < -\eta$ também o é. No plano $\overline{\mathbb{C}}$ a reta $\text{Re}(w) = -\eta$ corresponde a uma circunferência de raio $\frac{1}{2\eta}$ e centro $-\frac{1}{2\eta}$ em $\mathbb{C}$. De fato, $\text{Re}(w) = -\eta \Rightarrow \text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = -\eta$, onde $z = z_1 + iz_2$, então $\frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2} = -\eta \Rightarrow z_1 = -\eta(z_1^2 + z_2^2) \Rightarrow \left(z_1 + \frac{1}{2\eta}\right)^2 + z_2^2 = \frac{1}{4\eta^2}$ que é a equação de uma circunferência de centro em $-\frac{1}{2\eta}$ e raio $\frac{1}{2\eta}$. Assim se $w = w_1 + iw_2$ e $\text{Re}(w) < -\eta$ temos que

$$\begin{aligned} w_1 &< -\eta \Rightarrow 4\eta^2 + 4\eta w_1 < 0 \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{(w_1^2 + w_2^2)(4\eta^2 + 4\eta w_1 + w_1^2 + w_2^2)}}{w_1^2 + w_2^2} < 1 \\ &\Rightarrow \left| \frac{2\eta w_1 + w_1^2 + w_2^2 - 2\eta w_2 i}{2\eta(w_1^2 + w_2^2)} \right| < \frac{1}{2\eta} \\ &\Rightarrow \left| h(w) - \left(-\frac{1}{2\eta}\right) \right| < \frac{1}{2\eta} \end{aligned}$$

$$F(w) = (h^{-1} \circ f \circ h)(w) = w \frac{1}{1 + \frac{1}{w}} =$$

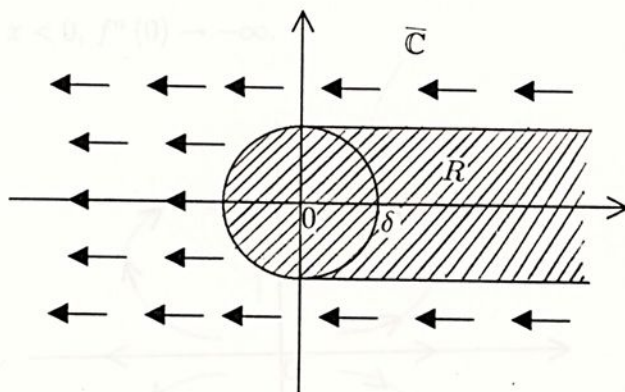
$$\text{Exemplo 1.3.2 } f(z) = z + z^2 = w \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{w^n} \right) = w - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{w^n}$$

para $|w| > \delta$, ou seja, para w próximo do ∞ .

Chamemos $F_0(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{w^n}$, logo $\lim_{|w| \rightarrow \infty} F_0(w) = 0$ assim próximo do ∞ , F é a translação de uma unidade à esquerda.

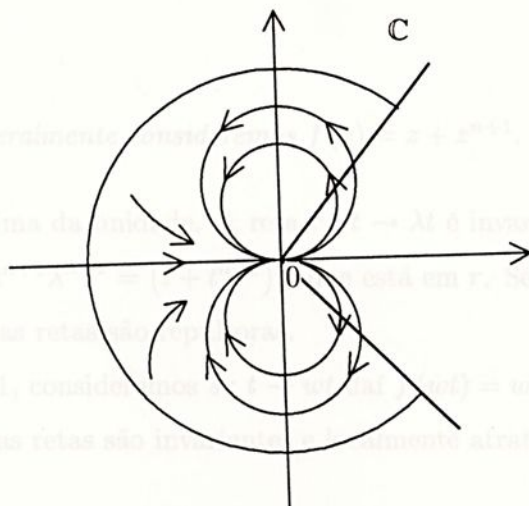
F e $T(w) = w - 1$ são analiticamente conjugadas na região atratora.

Em $\bar{\mathbb{C}}$, todas as retas horizontais são invariantes por F , exceto na região R indicada na figura:



Vamos trocar o "ponto" fixo ∞ de T por 0 .

$$\tilde{T}(z) = (h \circ T \circ h^{-1})(z) = \frac{z}{1-z}.$$



As retas invariantes por T no plano $\bar{\mathbb{C}}$, correspondem à bolas tangenciando o eixo real no ponto 0, que são invariantes para $\tilde{T}$. Este conjunto é uma pétala atratora para $f(z) = z + z^2$, pois f e $\tilde{T}$ são analiticamente conjugadas nesta região.

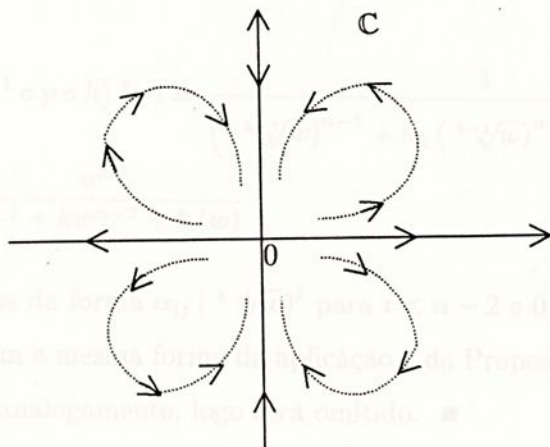
Exemplo 1.3.2 $f(z) = z + z^3$.

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, logo 0 é um ponto fixo racionalmente neutro.

Vamos procurar uma reta invariante. Consideremos a reta $r : t \rightarrow tu$ com $u = u_1 + iu_2 \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}$, $f(tu) = su$ se, e somente se, $u^2 = \frac{s-t}{t^3} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$.

Caso (1) se $u_1 = 0$ então $r =$ eixo imaginário. Dado $iy \in \mathbb{C}$ então $f(iy) = i(y - y^3)$ e analisando graficamente podemos ver que 0 é ponto fixo atrator.

Caso (2) se $u_2 = 0$ então $r =$ eixo real. Dado $x \in \mathbb{R}$ então $f(x) = x + x^3$, assim se $x > 0$ então $f^n(x) \rightarrow \infty$ e se $x < 0$, $f^n(x) \rightarrow -\infty$.



Exemplo 1.3.3 Mais geralmente consideremos $f(z) = z + z^{n+1}$.

Seja λ uma raiz n -ésima da unidade. A reta $r : t \rightarrow \lambda t$ é invariante por f , pois dado z em r , $z = t\lambda$ e $f(z) = t\lambda + t^{n+1}\lambda^{n+1} = (t + t^{n+1})\lambda$ que está em r . Se n é par, então $f^j(\lambda t) \rightarrow \infty$ para todo $t \neq 0$, logo estas retas são repulsoras.

Se w é uma raiz de -1 , consideremos $s : t \rightarrow wt$ daí $f(wt) = wt + w^{n+1}t^{n+1} = w(t - t^{n+1})$ que está em s , assim estas retas são invariantes e localmente atratoras.

Voltando ao exemplo anterior onde $f(z) = z + z^3 = z + z^{2+1}$ e $n = 2$. Se λ é uma raiz quadrada da unidade, então $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_1 = -1$. Se w é uma raiz quadrada de -1 , então $w_0 = i$ e $w_1 = -i$. Assim devemos ter que a reta $r : t \rightarrow t$ é repulsora e a reta $s : t \rightarrow it$ é localmente atratora, que confere com o que fizemos.

Corolário 1.3.1 *Seja $p(z) = z + a_k z^k + \dots + a_n z^n$. Então existem exatamente $k - 1$ pétalas atratoras e $k - 1$ pétalas repulsoras para p no ponto 0 .*

Demonstração:

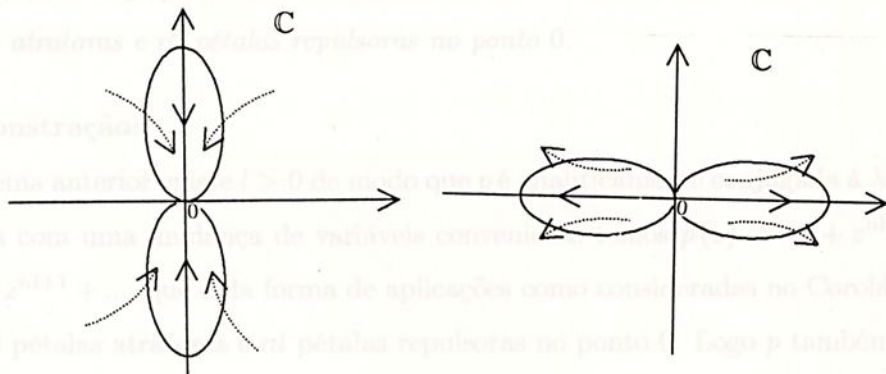
Seja $h(w) = \frac{1}{w^{k-1}}$. h não é mais uma conjugação pois a inversa de h não está bem definida. No entanto, no plano $\operatorname{Re}(w) < -\eta$ usado na demonstração da Proposição 1.3.1, podemos escolher um ramo analítico da inversa, isto é, uma $(k-1)$ -ésima raiz de z bem definida. Se fixarmos esta aplicação inversa, então fazemos:

$$\begin{aligned} g(w) &= (h^{-1} \circ p \circ h)(w) = \frac{1}{\left(({}^{k-1}\sqrt{w})^{n-1} + a_k ({}^{k-1}\sqrt{w})^{n-k} + \dots + a_n \right)^{k-1}} \\ &= \frac{w^n}{w^{n-1} + kw^{n-2} + k(w)} \end{aligned}$$

onde $k(w)$ envolve termos da forma $\alpha_{ij} ({}^{k-1}\sqrt{w})^j$ para $i < n - 2$ e $0 < j < k - 1$.

Notemos que $g(w)$ tem a mesma forma da aplicação g da Proposição 1.3.1, assim o restante da demonstração é feito analogamente, logo será omitido. ■

Exemplo 1.3.4 $f(z) = z + z^3 = z + z^{2+1}$



Estas são as pétalas atradoras e repulsoras para $f(z)$ respectivamente. Note que f tem exatamente duas pétalas atradoras e duas pétalas repulsoras.

Agora vamos estudar a dinâmica dos pontos fixos com $f(0) = 0$ e $f'(0) = e^{2\pi i \frac{m}{n}} \neq 1$.

Lema 1.3.1 *Seja $p(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k$, onde $\lambda = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$. Então para algum $l > 0$, existe uma vizinhança U de 0 onde p é analiticamente conjugada à $q(z) = \lambda z + b_{nl+1} z^{nl+1} + \dots$.*

Demonstração:

Primeiro vamos tentar eliminar o termo de segunda ordem em p . Seja $q_2(z) = \lambda z + b_3 z^3 + \dots$ e coloquemos $h(z) = z + Az^2$, onde queremos encontrar A de modo que $h \circ q_2 = p \circ h$. Temos que:

$$\begin{aligned}(h \circ q_2)(z) &= (p \circ h)(z) \Leftrightarrow h(\lambda z + b_3 z^3 + \dots) = p(z + Az^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda z + b_3 z^3 + \dots + A(\lambda z + b_3 z^3 + \dots)^2 = \\ &= \lambda(z + Az^2) + a_2(z^2 + 2Az^3 + A^2 z^4) + \dots + a_k(z + Az^2)^k\end{aligned}$$

Comparando os termos de potência dois, vem

$$A\lambda^2 = \lambda A + a_2 \Rightarrow A(\lambda^2 - \lambda) = a_2 \Rightarrow A = \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda}.$$

Podemos continuar eliminando sucessivamente os outros termos, determinado uma conjugação $h(z) = z + Az^\alpha$. ■

Teorema 1.3.1 *Seja $p(z) = \lambda z + \dots$, onde $\lambda = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$. Então existe um $l > 0$ tal que p admite nl pétalas atradoras e nl pétalas repulsoras no ponto 0.*

Demonstração:

Pelo lema anterior existe $l > 0$ de modo que p é analiticamente conjugada à $\lambda z + b_{nl+1} z^{nl+1} + \dots$ e agora com uma mudança de variáveis conveniente temos $p(z) = \lambda z + z^{nl+1} \dots$ e $p^n(z) = z + n\lambda^{n-1} z^{nl+1} + \dots$, que é da forma de aplicações como consideradas no Corolário 1.3.1, assim p^n tem nl pétalas atradoras e nl pétalas repulsoras no ponto 0. Logo p também as tem. ■

O teorema a seguir dá o comportamento de uma aplicação analítica próximo a um ponto fixo irracionalmente neutro, ou seja, quando $f'(0) = e^{2\pi i\alpha}$ com $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Teorema 1.3.2 (de linearização de Siegel) *Seja $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ e $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ onde α é irracional. Suponhamos que existam constantes positivas a e b tais que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{a}{q^b}$ (condição de Siegel) para todo $p, q \in \mathbb{Z}$. Então existe uma vizinhança U de 0 em que f é analiticamente conjugada à rotação irracional $\lambda \rightarrow \lambda z$.*

A região em que f é conjugada à rotação irracional é chamada de um disco de Siegel.

Saindo das condições de Siegel, pode ser impossível a linearização conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.5 *Seja $p(z) = \lambda z + \dots + z^d$ onde $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$.*

Suponhamos que α seja irracional e satisfaça $|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^{n-1}}$ para infinitos naturais. Afirmamos que p tem um ponto periódico em toda vizinhança de 0, logo existe uma acumulação de pontos periódicos no ponto fixo, daí p não pode ser conjugada à uma rotação irracional. De fato, notemos que $p^n(z) = \lambda^n z + \dots + z^{d^n}$ e $p^n(z) - z = z^{d^n} + \dots + \lambda^n z - z = z^{d^n} + \dots + (\lambda^n - 1)z$. Logo 0 é uma raiz da equação $p^n(z) - z = 0$. Sejam $\varsigma_1, \dots, \varsigma_{d^n-1}$ as outras raízes, então

$$\begin{aligned} p^n(z) - z &= z^{d^n} + \dots + (\lambda^n - 1)z = z(z - \varsigma_1) \dots (z - \varsigma_{d^n-1}), \forall z \Rightarrow \\ &\Rightarrow z^{d^n-1} + \dots + (\lambda^n - 1) = (z - \varsigma_1) \dots (z - \varsigma_{d^n-1}), \forall z. \end{aligned}$$

Se $z = 0$, temos $\lambda^n - 1 = (-\varsigma_1) \dots (-\varsigma_{d^n-1})$ e $|\lambda^n - 1| = |\varsigma_1| \dots |\varsigma_{d^n-1}|$. Pelo menos um dos ς_i 's deve satisfazer

$$|\varsigma_i| \leq |\varsigma_1| \dots |\varsigma_{d^n-1}| = |\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^{n-1}}$$

Assim quando n cresce, vemos que existem pontos periódicos arbitrariamente próximos de 0.

A demonstração está encerrada para um número irracional λ que satisfaça $|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^{n-1}}$ para infinitos naturais. Mas será que um tal número realmente existe?

Responderemos esta questão, usando frações contínuas. Cada número real x tem uma expansão de frações contínuas e a convergência destas são boas aproximações racionais para x .



Sejam $a_0, a_1, a_2, \dots$ uma sequência de inteiros positivos, definimos uma sequência de números racionais $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ onde

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_n}}}}$$

Esta sequência converge para um número irracional α . Denotamos $a_0 = [\alpha]$: maior inteiro de α e $r_0 = \alpha - [\alpha]$ assim $\alpha = a_0 + r_0$, $a_1 = \left[\frac{1}{r_0}\right]$ e $r_1 = \frac{1}{r_0} - \left[\frac{1}{r_0}\right]$ daí

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + r_1} = a_0 + \frac{1}{\left[\frac{1}{r_0}\right] + \frac{1}{r_0} - \left[\frac{1}{r_0}\right]} = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{r_0}} = a_0 + r_0 = \alpha$$

e continuando o raciocínio, temos a expansão de frações contínuas de α .

Temos que $\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$. Vamos construir um λ que satisfaça $|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^n-1}$ com $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$.

$$\begin{aligned} |\lambda^n - 1| &= |e^{2\pi i n \alpha} - 1| = \sqrt{(\cos(2\pi n \alpha) - 1)^2 + \sin^2(2\pi n \alpha)} = \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(2\pi n \alpha)} = \sqrt{4\sin^2(\pi n \alpha)} = \\ &= 2|\sin(\pi n \alpha)| = 2|\sin(\pi n \alpha + k\pi)| = 2|\sin \pi(n\alpha + k)| \end{aligned}$$

para todo k inteiro. Para cada n , podemos encontrar $k = k(n)$ com $|n\alpha + k(n)| \leq \frac{1}{2}$ daí

$$\begin{aligned} 2|n\alpha + k(n)| &\leq |\sin \pi(n\alpha + k(n))| \leq \pi |n\alpha + k(n)| \leq \frac{7}{2} |n\alpha + k(n)| \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2|n\alpha + k(n)| \leq \frac{|\lambda^n - 1|}{2} \leq \frac{7}{2} |n\alpha + k(n)| \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4|n\alpha + k(n)| \leq |\lambda^n - 1| \leq 7|n\alpha + k(n)|. \end{aligned}$$

Portanto se $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$ escolhemos os a'_n s de modo que $a_{n+1} > 7q_n^{(d^{q_n})-2}$ e sendo α o irracional cuja expansão de frações contínuas é determinada por a_n , daí temos:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> 7q_n^{(d^{q_n})-2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{7} > q_n^{(d^{q_n})-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{q_n}\right)^{d^{q_n}-2} > \frac{7}{a_{n+1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{q_n}\right)^{d^{q_n}-1} > \frac{7}{a_{n+1}q_n} > 7|\alpha q_n - p_n| \geq |\lambda^n - 1|. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo arbitrariamente $a_0 > 0$ podemos escolher o restante satisfazendo $a_{n+1} > 7q_n^{(d^{q_n})-2}$. Desta maneira construímos um conjunto denso de irracionais que satisfazem $|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^n-1}$ e, portanto, existem muitas rotações irracionais que deixam de originar discos de Siegel.

No capítulo seguinte vamos aplicar os fatos estudados para entendermos a dinâmica de folheações holomorfas por curvas, definidas por uma equação diferencial ordinária com o tempo complexo, numa vizinhança de uma singularidade isolada de $\mathbb{C}^2$.

Capítulo 2

Topologia das singularidades irredutíveis em campos de vetores de $\mathbb{C}^2$

2.1 Introdução

Neste capítulo, faremos um estudo sobre a dinâmica local das folheações de equações diferenciais associadas a campos de vetores complexos próximos a um ponto singular. Primeiramente estudaremos o campo linear e depois veremos quando um campo qualquer, sob certas condições, pode ser linearizável (conjugado a um campo linear).

Vamos estudar dois tipos de singularidades irredutíveis: as singularidades no domínio de Poincaré, e as singularidades no domínio de Siegel.

2.2 Singularidades no domínio de Poincaré

Seja $\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}) = Z(x, y)$ a equação diferencial associada ao campo de vetores $Z : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Dada uma aplicação analítica $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $z = \varphi(T)$ com $\varphi'(T) = Z(\varphi(T))$ para todo T então $\varphi(T)$ é uma solução, ou uma folha de $\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}) = Z(x, y)$.

Consideremos o campo vetorial $Z(x, y) = (\lambda x, \mu y)$ e sua equação diferencial associada



$(\dot{x}, \dot{y}) = (\lambda x, \mu y)$ então

$$\begin{cases} \frac{dx}{dT} = \dot{x} = \lambda x \\ \frac{dy}{dT} = \dot{y} = \mu y \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dT} = \lambda x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \lambda dT \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{1}{w} dw = \int_{T_0=0}^T \lambda ds \Rightarrow \ln \frac{x}{x_0} = \lambda T \Rightarrow x(T) = x_0 e^{\lambda T}.$$

Fazendo da mesma maneira

$$y(T) = y_0 e^{\mu T}$$

A folha passando por (x_0, y_0) pode ser parametrizada por $\varphi(T) = (x_0 e^{\lambda T}, y_0 e^{\mu T})$ pois $\varphi(0) = (x_0 e^0, y_0 e^0) = (x_0, y_0)$, $\varphi'(T) = (\lambda x_0 e^{\lambda T}, \mu y_0 e^{\mu T})$ e $Z(\varphi(T)) = Z(x_0 e^{\lambda T}, y_0 e^{\mu T}) = (\lambda x_0 e^{\lambda T}, \mu y_0 e^{\mu T}) = \varphi'(T)$.

Definição 2.2.1 $D_P = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 / \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \text{ e } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}_- \right\}$ é o domínio de Poincaré de $\mathbb{C}^2$.

Proposição 2.2.1 Seja $Z(x, y) = (\lambda x, \mu y)$ um campo de vetores que tem uma singularidade no domínio de Poincaré, então

- (1) As folhas de $(\dot{x}, \dot{y}) = Z(x, y)$ são transversais às esferas $S_R : |x|^2 + |y|^2 = R^2$;
- (2) Existe um fluxo real linear cujas trajetórias estão contidas nas folhas e para o qual $(0, 0)$ é um atrator.

Demonstração:

(1) Dado $R > 0$, seja $P = (p, q)$, $(p = p_1 + ip_2, q = q_1 + iq_2)$ um ponto da intersecção de $\varphi(T) = (pe^{\lambda T}, qe^{\mu T})$ com S_R . Vamos fazer a identificação de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{C}^2$ com $\mathbb{R}^4$ e desta maneira S_R é a imagem inversa do valor regular 0 pela função $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - R^2$. Seja $T_P S_R$ o plano tangente à S_R em P , então $\vec{n} = (p_1, q_1, p_2, q_2)$ é normal à $T_P S_R$. Agora mostraremos que a folha intercepta S_R transversalmente e, para tanto basta que o plano tangente à $\varphi(T)$ em P não seja paralelo a $T_P S_R$, ou seja, basta que os geradores de $T_P \varphi(T)$ não estejam em $T_P S_R$. Sabemos que $T_P \varphi(T)$ é gerado por $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, 0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0)$ onde $T = s + it$. Temos que $\varphi(s, t) = (pe^{\lambda s} e^{i\lambda t}, qe^{\mu s} e^{i\mu t})$ daí $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, 0) = (\lambda p, \mu q) = Z(p, q)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0) = (i\lambda p, i\mu q) = iZ(p, q)$ assim $T_P \varphi(T) = [(\lambda p, \mu q), (i\lambda p, i\mu q)]$. Desta maneira devemos mostrar que o produto interno de $Z(p, q)$ com $\vec{n}$ ou o produto interno de $iZ(p, q)$ com $\vec{n}$ é

diferente de zero. Temos que

$$\begin{aligned} Z(p, q) &= (\lambda p, \mu q) = (\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2 + i(\lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1), \mu_1 q_1 - \mu_2 q_2 + i(\mu_1 q_2 + \mu_2 q_1)) = \\ &= (\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2, \mu_1 q_1 - \mu_2 q_2, \lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1, \mu_1 q_2 + \mu_2 q_1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} iZ(p, q) &= (i\lambda p, i\mu q) = (-\lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1 + i(\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2), -\mu_1 q_2 - \mu_2 q_1 + i(\mu_1 q_1 - \mu_2 q_2)) = \\ &= (-\lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1, -\mu_1 q_2 - \mu_2 q_1, \lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2, \mu_1 q_1 - \mu_2 q_2). \end{aligned}$$

Suponhamos que $Z(p, q)$ e $iZ(p, q)$ estejam em $T_P S_R$ então

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, Z(p, q) \rangle &= p_1(\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2) + q_1(\mu_1 q_1 - \mu_2 q_2) + p_2(\lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_1) + q_2(\mu_1 q_2 + \mu_2 q_1) = \\ &= \lambda_1 p_1^2 + \lambda_1 p_2^2 + \mu_1 q_1^2 + \mu_1 q_2^2 = \lambda_1(p_1^2 + p_2^2) + \mu_1(q_1^2 + q_2^2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mu_1 = -\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} \lambda_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, iZ(p, q) \rangle &= p_1(-\lambda_1 p_2 - \lambda_2 p_1) + q_1(-\mu_1 q_2 - \mu_2 q_1) + p_2(\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2) + q_2(\mu_1 q_1 - \mu_2 q_2) = \\ &= -\lambda_2 p_1^2 - \lambda_2 p_2^2 - \mu_2 q_1^2 - \mu_2 q_2^2 = -\lambda_2(p_1^2 + p_2^2) - \mu_2(q_1^2 + q_2^2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mu_2 = -\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} \lambda_2 \end{aligned}$$

Vamos chamar $\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} = a$, então $\mu_1 = -a\lambda_1$ e $\mu_2 = -a\lambda_2$ e portanto $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{1}{a} \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\lambda_1 + i\lambda_2} = -\frac{1}{a} \in \mathbb{R}_-$ que é uma contradição pois (λ, μ) está no domínio de Poincaré.

(2) Seja $\varphi(T) = (x_0 e^{\lambda T}, y_0 e^{\mu T})$ a folha passando por (x_0, y_0) e dado α em $\mathbb{C}$ consideremos o fluxo real $\varphi_\alpha(t) = (x_0 e^{\lambda \alpha t}, y_0 e^{\mu \alpha t})$, ou seja o fluxo com o tempo variando na reta: $t\alpha$, $t \in \mathbb{R}$. Então

$$|\varphi_\alpha(t)|^2 = \left| (x_0 e^{\lambda \alpha t}, y_0 e^{\mu \alpha t}) \right|^2 = |x_0 e^{\lambda \alpha t}|^2 + |y_0 e^{\mu \alpha t}|^2 = |x_0|^2 e^{2t \operatorname{Re} \lambda \alpha} + |y_0|^2 e^{2t \operatorname{Re} \mu \alpha}$$

Afirmamos que dados dois números complexos, de modo que o par esteja no domínio de

Poincaré, podemos fazer uma rotação de tal forma que ambos fiquem com a parte real negativa. De fato, dados $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ em $\mathbb{C}$ com (z_1, z_2) em D_P , queremos encontrar $\alpha = e^{ix}$ tal que $\operatorname{Re} \alpha z_1 < 0$ e $\operatorname{Re} \alpha z_2 < 0$,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \operatorname{Re}(\alpha z_1) = \operatorname{Re}[r_1 e^{i(\theta_1+x)}] = \operatorname{Re}[r_1 \cos(\theta_1+x) + ir_1 \operatorname{sen}(\theta_1+x)] < 0 \\ \operatorname{Re}(\alpha z_2) = \operatorname{Re}[r_2 e^{i(\theta_2+x)}] = \operatorname{Re}[r_2 \cos(\theta_2+x) + ir_2 \operatorname{sen}(\theta_2+x)] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos(\theta_1+x) < 0 \\ \cos(\theta_2+x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \theta_1 < x < \frac{3\pi}{2} - \theta_1 \\ \frac{\pi}{2} - \theta_2 < x < \frac{3\pi}{2} - \theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \max\left\{\frac{\pi}{2} - \theta_1, \frac{\pi}{2} - \theta_2\right\} < x < \min\left\{\frac{3\pi}{2} - \theta_1, \frac{3\pi}{2} - \theta_2\right\} \end{aligned}$$

Com o raciocínio acima, escolhendo α_0 em $\mathbb{C}^*$ de modo que $\operatorname{Re} \lambda \alpha_0 < 0$ e $\operatorname{Re} \mu \alpha_0 < 0$ temos:

$$|\varphi_{\alpha_0}(t)|^2 = |x_0|^2 e^{2t \operatorname{Re} \lambda \alpha_0} + |y_0|^2 e^{2t \operatorname{Re} \mu \alpha_0} \leq |x_0|^2 e^{2\delta t} + |y_0|^2 e^{2\delta t} = e^{2\delta t} (|x_0|^2 + |y_0|^2)$$

onde $\max\{\operatorname{Re} \lambda \alpha_0, \operatorname{Re} \mu \alpha_0\} < \delta < 0$. Daí $\varphi_{\alpha_0}(t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$ e $(0, 0)$ é um atrator.

Exemplo 2.2.1 $\lambda = 1, \mu = i$.

$\lambda\mu = i \neq 0$ e $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{i} = -i \notin \mathbb{R}$ logo (λ, μ) pertence ao domínio de Poincaré.

Consideremos $Z(x, y) = (x, iy)$ e $(\dot{x}, \dot{y}) = (x, iy) = Z(x, y)$. A solução passando por $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ é $\varphi(T) = (x_0 e^T, y_0 e^{iT})$ pois $\varphi(0) = (x_0, y_0)$ e $\varphi'(T) = (x_0 e^T, iy_0 e^{iT})$ daí $Z(\varphi(T)) = Z(x_0 e^T, y_0 e^{iT}) = (x_0 e^T, iy_0 e^{iT}) = \varphi'(T)$.

Temos que $\lambda = e^{i0}$ e $\mu = e^{i\frac{\pi}{2}}$, logo procuramos um $\alpha_0 = e^{ix}$ de modo que

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{\pi}{2} - 0, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right\} < x < \min\left\{\frac{3\pi}{2} - 0, \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right\} & \Leftrightarrow \\ \max\left\{\frac{\pi}{2}, 0\right\} < x < \min\left\{\frac{3\pi}{2}, \pi\right\} & \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{aligned}$$

Tomemos $\alpha = e^{\frac{3\pi i}{4}}$ e considere o fluxo real $\varphi_\alpha(T) = (x_0 e^{\alpha t}, y_0 e^{i\alpha t})$. Então

$$|x_0 e^{\alpha t}| = |x_0| \left| e^{te^{\frac{3\pi i}{4}}} \right| = \left| e^{t \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)} \right| = e^{-t \frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow 0 \text{ se } t \rightarrow \infty.$$

Por outro lado

$$|y_0 e^{i\alpha t}| = |y_0| \left| e^{it e^{\frac{3\pi i}{4}}} \right| = \left| e^{t \left(-\sin \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4} \right)} \right| = e^{-t \frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow 0 \text{ se } t \rightarrow \infty.$$

Logo $(0,0)$ é um ponto atrator para o fluxo φ_α .

Para entendermos o comportamento das soluções, descreveremos suas intersecções com o toro sólido $T_1 : |x| = 1$. Para tanto usaremos a transformação de Poincaré. Seja Σ uma seção transversal do campo Z que passa pelo ponto $(1,0)$ de $\mathbb{C}^2$, dado p em Σ então π é o difeomorfismo que leva p no primeiro ponto onde $\varphi(\cdot, p)$ intersepta Σ .

Sabemos que o eixo de T_1 ($|x| = 1, y = 0$) é uma trajetória (fechada), ou seja, $(e^{it}, 0)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$, então vamos analisar as soluções do tipo $(e^{it}, y(t))$. Temos que $x(t) = e^{it}$ daí $x'(t) = ie^{it} dt$ logo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\mu y}{\lambda x} \Rightarrow \frac{dy}{ie^{it} dt} = \frac{\mu y}{\lambda e^{it}} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\mu}{\lambda} i dt \Rightarrow \\ \int_{y_0}^y \frac{1}{w} dw &= \int_0^t \frac{\mu}{\lambda} i ds \Rightarrow \ln \frac{y}{y_0} = \frac{\mu}{\lambda} i t \Rightarrow y(t) = y_0 e^{\frac{\mu}{\lambda} i t}. \end{aligned}$$

Definimos $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$; $\pi(y) = y e^{2\pi i \frac{\mu}{\lambda}}$ daí $\pi(0) = 0$ e $\pi'(0) = e^{2\pi i \frac{\mu}{\lambda}}$.

Vamos estudar os casos em que $|\pi'(0)| = 1$, $0 < |\pi'(0)| < 1$ e $|\pi'(0)| > 1$.

Caso (1) $|\pi'(0)| = 1$, temos que $y = 0$ é um ponto fixo neutro para π e

$$\begin{aligned} |\pi'(0)| &= 1 \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re}(2\pi i \frac{\mu}{\lambda})} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{\mu}{\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{\mu}{\lambda} i\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} / \frac{\mu}{\lambda} i = ai \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda} = a \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Agora estudaremos os casos em que 0 é racionalmente neutro e irracionalmente neutro.

(I) Se $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, então todo ponto de Σ é ponto periódico para π de período q , ou seja, temos trajetórias fechadas que se fecham para $t = 2\pi q$. De fato, dado y_0 em Σ , a folha

passando por $(1, y_0)$ é $\varphi(t) = (e^{it}, y_0 e^{\frac{2\pi i t}{q}})$ com

$$\varphi(0) = (1, y_0) \text{ e } \varphi(2\pi q) = (e^{2\pi q i}, y_0 e^{2\pi q \frac{2\pi i}{q}}) = (1, y_0 e^{2\pi p i}) = (1, y_0).$$

A este caso chamamos singularidade não simples.

(II) Se $\frac{\mu}{\lambda} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, então não existem pontos periódicos para π , ou seja, a órbita por π de qualquer y em Σ é densa em $|y| = R$, logo a trajetória por $(1, y)$ se acumula no toro real.

Caso (2) $0 < |\pi'(0)| < 1$, temos que $y = 0$ é um ponto fixo atrator para π e

$$|\pi'(0)| < 1 \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re}(2\pi i \frac{\mu}{\lambda})} < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{\mu}{\lambda}\right) < 0.$$

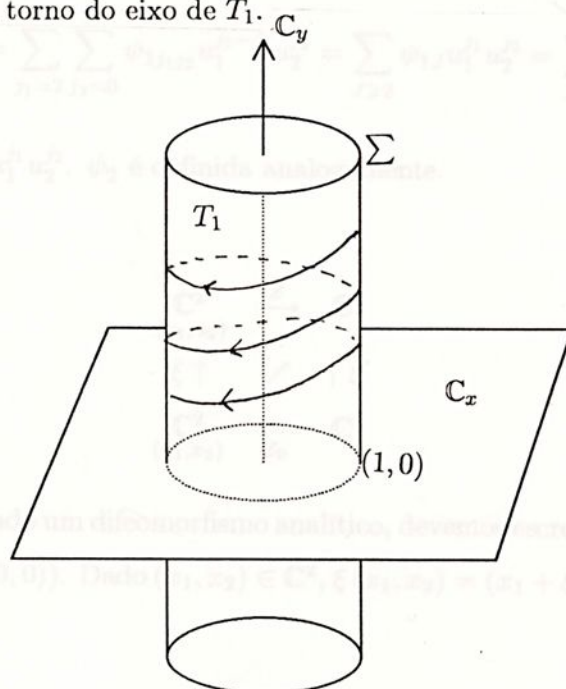
Seja $\frac{\mu}{\lambda} = a + bi$, então

$$\operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{\mu}{\lambda}\right) = \operatorname{Re} 2\pi i (a + bi) = \operatorname{Re} (-2\pi b + 2\pi ai) = -2\pi b$$

daí

$$\operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{\mu}{\lambda}\right) < 0 \Leftrightarrow -2\pi b < 0 \Leftrightarrow b > 0$$

logo $y = 0$ é atrator para π se, e somente se, $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} \frac{\mu}{\lambda} > 0$. Portanto temos trajetórias abertas que espiralam em torno do eixo de T_1 .



Caso (3) $|\pi'(0)| > 1$, temos que $y = 0$ é um ponto fixo repulsor para π e

$$|\pi'(0)| > 1 \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re}(2\pi i \frac{\mu}{\lambda})} > 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(2\pi i \frac{\mu}{\lambda}\right) > 0 \Leftrightarrow b < 0$$

então $y = 0$ é repulsor para π se, e somente se, $\frac{\mu}{\lambda} \notin \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} \frac{\mu}{\lambda} < 0$. Logo temos trajetórias abertas que espiralam se afastando do eixo de T_1 .

Teorema 2.2.1 (Poincaré) *Sejam Z um campo de vetores analítico definido num aberto de $\mathbb{C}^2$ contendo $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, sendo esta sua única singularidade e $Z_0(u_1, u_2) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2)$ sua parte linear. Se*

(1) Z_0 tem uma singularidade no domínio de Poincaré;

(2) Não existe n natural $n \geq 2$ tal que $\lambda_1 = n\lambda_2$ ou $\lambda_2 = n\lambda_1$.

Então podemos encontrar um único difeomorfismo analítico local ξ de $\mathbb{C}^2$ em $(0,0)$ de modo que $\xi'(0,0) = \operatorname{Id}$ e $Z \circ \xi = \xi' \circ Z_0$, ou seja $\xi^* Z = Z_0$.

Demonstração:

Z é analítico numa vizinhança de $(0,0)$, então podemos escrevê-lo da seguinte maneira: $Z(u_1, u_2) = Z_0(u_1, u_2) + (\psi_1(u_1, u_2), \psi_2(u_1, u_2))$ onde ψ_1 e ψ_2 são séries de potências convergentes numa vizinhança de $(0,0)$.

$$\psi_1(u_1, u_2) = \sum_{j_1=2}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{j_1} \psi_{1j_1j_2} u_1^{j_1-j_2} u_2^{j_2} = \sum_{J \geq 2} \psi_{1J} u_1^{j_1} u_2^{j_2} = \sum_{J \geq 2} \psi_{1J} u^J$$

onde $J = j_1 + j_2$ e $u^J = u_1^{j_1} u_2^{j_2}$. ψ_2 é definida analogamente.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{Z} & \mathbb{C}^2 \\ (u_1, u_2) & & \\ \xi \uparrow & \nearrow & \uparrow \xi' \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{Z_0} & \mathbb{C}^2 \\ (x_1, x_2) & & \end{array}$$

Como estamos procurando um difeomorfismo analítico, devemos escrever ξ na forma de séries de potências (em torno de $(0,0)$). Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, $\xi(x_1, x_2) = (x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2))$



onde

$$\xi_1(x_1, x_2) = \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{k_1} \xi_{1k_1k_2} x_1^{k_1-k_2} x_2^{k_2} = \sum_{K \geq 2} \xi_{1K} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \sum_{K \geq 2} \xi_{1K} x^K$$

onde $K = k_1 + k_2$ e $x^K = x_1^{k_1} x_2^{k_2}$. ξ_2 é definido analogamente.

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \sum_{K \geq 2} k_1 \xi_{1K} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \sum_{K \geq 2} k_2 \xi_{1K} x_1^{k_1} x_2^{k_2-1}.$$

Temos que

$$(u_1, u_2) = Z(u_1, u_2) = (\lambda_1 u_1 + \psi_1(u_1, u_2), \lambda_2 u_2 + \psi_2(u_1, u_2)) \Rightarrow \dot{u}_1 = \lambda_1 u_1 + \psi_1(u_1, u_2).$$

Por outro lado,

$$(u_1, u_2) = \xi(x_1, x_2) = (x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) \Rightarrow \dot{u}_1 = \dot{x}_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \dot{x}_2.$$

Assim devemos ter

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \psi_1(u_1, u_2) &= \dot{x}_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_1 \xi_1(x_1, x_2) + \psi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) = \\ &= \lambda_1 x_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \lambda_1 x_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \lambda_2 x_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 \sum_{K \geq 2} \xi_{1K} x^K + \psi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) = \\ &= \lambda_1 x_1 + \sum_{K \geq 2} k_1 \xi_{1K} x_1^{k_1-1} x_2^{k_2} + \lambda_2 x_2 + \sum_{K \geq 2} k_2 \xi_{1K} x_1^{k_1} x_2^{k_2-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{K \geq 2} \lambda_1 \xi_{1K} x^K + \psi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) = \\ &= \sum_{K \geq 2} \lambda_1 k_1 \xi_{1K} x^K + \sum_{K \geq 2} \lambda_2 k_2 \xi_{1K} x^K \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{K \geq 2} (\lambda_1 - k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2) \xi_{1K} x^K = \\ &= -\psi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{K \geq 2} (\lambda_1 - k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2) \xi_{1K} x^K = \end{aligned}$$

$$= - \sum_{J \geq 2} \psi_{1J} \left(x_1 + \sum_{K \geq 2} \xi_{1K} x^K \right)^{j_1} \left(x_2 + \sum_{K \geq 2} \xi_{2K} x^K \right)^{j_2}.$$

Notemos que $\lambda_1 - k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2 \neq 0$ para todo $k_1 \geq 2$ e todo $k_2 = 0, \dots, k_1$, pois caso contrário existiriam $\overset{\circ}{k}_1 \geq 2$ e $\overset{\circ}{k}_2 \geq 0$ tais que

$$\lambda_1 - \overset{\circ}{k}_1 \lambda_1 - \overset{\circ}{k}_2 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \left(1 - \overset{\circ}{k}_1 \right) - \overset{\circ}{k}_2 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{\overset{\circ}{k}_2}{1 - \overset{\circ}{k}_1} \lambda_2 \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\overset{\circ}{k}_2}{1 - \overset{\circ}{k}_1} \in \mathbb{R}_-$$

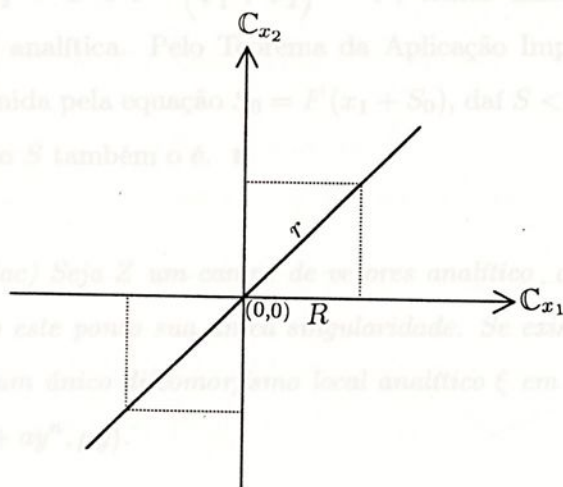
que contradiz a hipótese (1).

Da mesma maneira $\lambda_2 - k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2 \neq 0$ para todo $k_1 \geq 2$ e todo $k_2 = 0, \dots, k_1$.

Comparando os termos de mesma potência, encontramos os $\xi_{1Q's}$ e formalmente podemos encontrar ξ_1 que satisfaz a igualdade desejada. Fazemos analogamente para ξ_2 .

Mostraremos que as séries ξ_1 e ξ_2 convergem.

Sejam $A(x_1, x_2) = \sum_{J \geq 1} A_J x^J$, $B(x_1, x_2) = \sum_{J \geq 1} B_J x^J$ séries com coeficientes positivos. Dizemos que $A < B$ se $A_J < B_J$ para todo J . Se $C(x_1, x_2) = \sum_{J \geq 1} C_J x^J$ indiquemos por $\widehat{C}(x_1, x_2) = \sum_{J \geq 1} |C_J| x^J$, ou seja, a série obtida de $C(x_1, x_2)$ substituindo seus coeficientes por seus módulos, e denotamos $\widehat{\widehat{C}}$ a série $\widehat{C}(x_1, x_1)$. Agora suponhamos que $\widehat{\widehat{C}}$ convirja e $\widehat{\widehat{C}} = \widehat{C}(x_1, x_1) = \sum_{j_1=1}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{j_1} |C_{j_1 j_2}| x_1^{j_1-j_2} x_1^{j_2} = \sum_{J \geq 1} |C_J| x_1^J$, então existe $r = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{|C_J|}{|C_{J+1}|}$: raio de convergência de $\widehat{\widehat{C}}$. Daí existe $R > 0$, para o qual $\widehat{C}(x_1, x_2)$ converge se $|x_1| < R$ e $|x_2| < R$.



Se mostrarmos que a série $\widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2$ converge, então pelo raciocínio acima $\widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2$ também

converge, daí cada uma delas converge, logo as séries ξ_1 e ξ_2 convergem. Provemos então que $\widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2$ é convergente em $|x_1| < r$ para algum $r > 0$. De fato, existe $\delta > 0$ tal que $|\lambda_i - k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2| > \delta$, para todo $k_1 \geq 2$ e todo $k_2 = 0, \dots, k_1$. Como

$$\begin{aligned} \sum_{K \geq 2} (\lambda_1 - k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2) \xi_{1K} x^K &= - \sum_{J \geq 2} \psi_{1J} \left(x_1 + \sum_{K \geq 2} \xi_{1K} x^K \right)^{j_1-j_2} \left(x_2 + \sum_{K \geq 2} \xi_{2K} x^K \right)^{j_2} \Rightarrow \\ \delta \sum_{K \geq 2} |\xi_{1K}| x^K &< \sum_{J \geq 2} |\psi_{1J}| \left(x_1 + \sum_{K \geq 2} |\xi_{1K}| x^K \right)^{j_1-j_2} \left(x_2 + \sum_{K \geq 2} |\xi_{2K}| x^K \right)^{j_2} \Rightarrow \\ \delta \widehat{\widehat{\xi}}_1 &< \widehat{\psi}_1 \left(x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1, x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2 \right) \Rightarrow \\ \widehat{\widehat{\xi}}_1 &< \frac{1}{\delta} \widehat{\psi}_1 \left(x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1, x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2 \right) < \frac{1}{\delta} \widehat{\psi}_1 \left(x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2, x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2 \right). \end{aligned}$$

Fazendo analogamente para ξ_2 temos:

$$\widehat{\widehat{\xi}}_2 < \frac{1}{\delta} \widehat{\psi}_2 \left(x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1, x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2 \right) < \frac{1}{\delta} \widehat{\psi}_2 \left(x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2, x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2 \right).$$

Somando as desigualdades vem

$$\widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2 < \frac{1}{\delta} \left(\widehat{\psi}_1 + \widehat{\psi}_2 \right) \left(x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2, x_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2 \right).$$

Chamando $\widehat{\widehat{\xi}}_1 + \widehat{\widehat{\xi}}_2 = S$ e $\delta^{-1} \left(\widehat{\psi}_1 + \widehat{\psi}_2 \right) = F$, temos uma desigualdade do tipo $S < F(x_1 + S)$, onde F é analítica. Pelo Teorema da Aplicação Implícita, existe uma aplicação analítica S_0 que é definida pela equação $S_0 = F(x_1 + S_0)$, daí $S < S_0$ e como S_0 é convergente (pois é analítica) então S também o é. ■

Teorema 2.2.2 (Dulac) *Seja Z um campo de vetores analítico definido em um aberto de $\mathbb{C}^2$ contendo $(0,0)$, sendo este ponto sua única singularidade. Se existe um natural $n \geq 2$ tal que $\lambda = n\mu$, então existe um único difeomorfismo local analítico ξ em $(0,0)$ com $\xi'(0,0) = Id$, de modo que $\xi^*Z = (\lambda x + \alpha y^n, \mu y)$.*

A demonstração é análoga à feita anteriormente, logo será omitida.

Vamos agora descrever a folheação associada à $\xi^*Z = (\lambda x + ay^n, \mu y)$ com $a \neq 0$, considere-mos $a = 1$. Temos $\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x + y^n}$. Consideremos a trajetória fechada $x(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ então $dx = ie^{it}dt$, logo

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\mu y}{\lambda x + y^n} \Leftrightarrow \frac{dy}{ie^{it}dt} = \frac{\mu y}{\lambda e^{it} + y^n} \Leftrightarrow \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\mu ie^{it}y}{\lambda e^{it} + y^n} = \frac{\mu}{\lambda} iy \frac{1}{1 + \frac{y^n}{\lambda e^{it}}} = \\ &= \frac{\mu}{n\mu} iy \frac{1}{1 + \frac{y^n}{\lambda e^{it}}} = \frac{1}{n} iy \frac{1}{1 + \frac{y^n}{\lambda e^{it}}}\end{aligned}$$

Suponhamos que $\left| \frac{y^n}{\lambda e^{it}} \right| < 1$ daí $|y| < (|\lambda|)^{\frac{1}{n}}$ então

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{n} iy \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{y^n}{\lambda e^{it}} \right)^j = \frac{1}{n} iy \left(1 + \frac{y^n}{\lambda e^{it}} + \dots \right) = \frac{1}{n} iy + \frac{i}{\lambda n e^{it}} y^{n+1} + \dots$$

daí a solução será da forma $y(t) = e^{\frac{1}{n}it} y_0 + b(t) y_0^{n+1} + \dots$. Definimos $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $\pi(y) = e^{\frac{2\pi i}{n}} y + b(2\pi) y^{n+1} + \dots$ assim $\pi(0) = 0$ e $\pi'(y) = e^{\frac{2\pi i}{n}} + (n+1)b(2\pi) y^n + \dots$ logo $\pi'(0) = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Logo $y_0 = 0$ é ponto fixo racionalmente neutro, daí existem nl pétalas atratoras e nl pétalas repulsoras para π , para algum $l > 0$. Assim as folhas se acumulam em 0 em nl regiões e se afastam de 0 em nl regiões.

2.3 Singularidades no domínio de Siegel

Nesta seção faremos o estudo como na anterior, com a diferença que a singularidade agora não está no domínio de Poincaré, mas sim no domínio de Siegel.

Definição 2.3.1 $D_S = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 / \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \text{ e } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}_- \right\}$ é o domínio de Siegel.

Proposição 2.3.1 Seja $Z(x, y) = (\lambda x, \mu y)$ um campo de vetores de $\mathbb{C}^2$. Se $(\lambda, \mu) \in D_S$ então existe um fluxo real da solução de $(\dot{x}, \dot{y}) = Z(x, y)$ que é transversal aos toros.

Exemplo 2.3.1 $\lambda = 2i$ e $\mu = -i$

$\lambda\mu = 2 \neq 0$ e $\frac{\lambda}{\mu} = -2 \in \mathbb{R}_-$ logo (λ, μ) pertence ao domínio de Siegel. A solução de $(\dot{x}, \dot{y}) = (2ix, -iy)$ que passa por (x_0, y_0) é $\varphi(T) = (x_0 e^{2iT}, y_0 e^{-iT})$, pois $\varphi'(T) = (2ix_0 e^{2iT}, -iy_0 e^{-iT})$ e $Z(\varphi(T)) = Z(x_0 e^{2iT}, y_0 e^{-iT}) = (2ix_0 e^{2iT}, -iy_0 e^{-iT}) = \varphi'(T)$.

Vamos descrever as intersecções das folhas associadas a um campo linear, com singularidade no domínio de Siegel, com o toro $T_1 : |x| = 1$. Seja Σ a seção transversal, vamos analisar as soluções do tipo $(e^{it}, y(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Fazendo como na seção anterior, temos $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$, $\pi(y) = ye^{2\pi i \frac{\mu}{\lambda}}$ com $\pi(0) = 0$ e $\pi'(0) = e^{2\pi i \frac{\mu}{\lambda}}$.

Caso (1) $|\pi'(0)| = 1$, então $y = 0$ é ponto fixo neutro para π e neste caso já conhecemos o comportamento das folhas.

Caso (2) $|\pi'(0)| \neq 1$, aqui $y = 0$ seria um ponto fixo hiperbólico para π e saberíamos como as folhas se comportariam, mas isto não pode acontecer porque $\frac{\mu}{\lambda}$ não poderia ser real, daí seria contrariado o fato de (λ, μ) estar no domínio de Siegel.

Proposição 2.3.2 D_S é variedade real tridimensional, mais precisamente é um cone com vértice em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Demonstração:

Seja $A = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 / \operatorname{Im} \lambda_1 \overline{\lambda_2} = 0\}$. Mostremos que $D_S \subset A$. De fato, dado (λ_1, λ_2) em D_S com $\lambda_1 = a_1 + ib_1$ e $\lambda_2 = a_2 + ib_2$, então $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}_-$ se, e somente se $a_1 a_2 + b_1 b_2 \in \mathbb{R}_-$ e $b_1 a_2 - a_1 b_2 = 0 = \operatorname{Im} \lambda_1 \overline{\lambda_2}$.

A é um conjunto da forma $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / xw - yz = 0\}$ que nos permite definir a função $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z, w) = xw - yz$ daí $A = f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(0)$ é uma variedade se, e somente se, $\nabla f \neq 0$, ou seja, se $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w}\right) = (w, -z, -y, x) \neq (0, 0, 0, 0)$ e portanto A é uma variedade real tridimensional.

Temos que D_S é aberto em A pois $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$ e se (λ_1, λ_2) está em D_S , então $t(\lambda_1, \lambda_2)$ também está, e concluímos nossa prova. ■

Observação 2.3.1 Seja $B_r = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 / \lambda_2 = r\lambda_1 \text{ para } r < 0\}$, então $D_S \cap S_1 = \left(\bigcup_{r < 0} B_r\right) \cap S_1$, de fato

(C) Dado $(\lambda_1, \lambda_2) \in (D_S \cap S_1)$ então $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}_-$ e $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$ daí $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$,

$$\lambda_2 = r\lambda_1 \text{ e } |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1, \text{ logo } (\lambda_1, \lambda_2) \in \left[\left(\bigcup_{r < 0} B_r \right) \cap S_1 \right].$$

($\supset$) Dado $(\lambda_1, \lambda_2) \in \left[\left(\bigcup_{r < 0} B_r \right) \cap S_1 \right]$ então existe $r < 0$ tal que $\lambda_2 = r\lambda_1$ e $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$ daí $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{r\lambda_1} = \frac{1}{r} < 0$ e $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$, logo $(\lambda_1, \lambda_2) \in (D_S \cap S_1)$.

Definição 2.3.2 Dizemos que o par $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_S$ é ressonante se existem naturais m, n ambos diferentes de zero, tais que $m\lambda_1 + n\lambda_2 = 0$.

Observação 2.3.2 Dado (λ_1, λ_2) um par ressonante então existem naturais não nulos m, n tais que

$$m\lambda_1 + n\lambda_2 = 0 \Rightarrow km\lambda_1 + kn\lambda_2 = 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$(km + 1)\lambda_1 - \lambda_1 + kn\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 - (km + 1)\lambda_1 - kn\lambda_2 = 0$$

assim no processo de linearização de campos, o denominador $[\lambda_1 - (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)]^{-1}$ pode se tornar pequeno, não garantindo a linearização formal.

Definição 2.3.3 Dizemos que $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_S$ é do tipo $(\frac{1}{n}, \nu)$ ($\frac{1}{n} > 0, \nu > 0$) se para $j = 1, 2$ tem-se

$$|\lambda_j - (q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2)| \geq \frac{\frac{1}{n}}{(q_1 + q_2)^\nu}$$

para todo q_1, q_2 naturais com $q_1 + q_2 \geq 2$.

Teorema 2.3.1 (Siegel) Seja Z um campo de vetores analítico com parte linear $Z_0 = (\lambda x, \mu y)$. Se $(\lambda, \mu) \in D_S$ é do tipo $(\frac{1}{n}, \nu)$, então existe um único difeomorfismo local ξ de $\mathbb{C}^2$ em $(0, 0)$ de modo que $\xi^*Z = Z_0$.

Demonstração:

A idéia principal da prova é:

Como (λ, μ) é do tipo $(\frac{1}{n}, \nu)$, então podemos controlar a velocidade com que os $[\lambda_j - (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)]^{-1}$ tendem à zero. Logo o campo é linearizável. ■

Proposição 2.3.3 Sejam $L_n = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in D_S / (\lambda_1, \lambda_2) \text{ é do tipo } (\frac{1}{n}, \nu)\}$ e $R = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in D_S / (\lambda_1, \lambda_2) \notin L_n, \forall n, \nu > 0\}$. A medida de R em D_S é zero.

Demonstração:

Vamos fazer a prova para (λ_1, λ_2) no cone contido na bola de vértice $(0, 0)$ e cuja diretriz é uma δ -vizinhança compacta em $D_S \cap S_1$ de um dos círculos que formam este conjunto. Chamemos este cone de C_δ e escolhemos δ pequeno o suficiente de modo que seu volume seja limitado por $C_1\delta$, onde C_1 é uma constante positiva.

Temos que $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \dots$, pois se (λ_1, λ_2) está em L_n então $|\lambda_j - (q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2)| \geq \frac{1}{(q_1+q_2)^n} > \frac{1}{(q_1+q_2)^{n+1}}$ para todo q_1 e q_2 naturais tais que $q_1 + q_2 \geq 2$. Denotamos por R_δ o conjunto dos pares (λ_1, λ_2) que estão em R e em C_δ , assim mostrar que $\text{vol} R_\delta = 0$ é o mesmo que mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(C_\delta - L_n) = 0$. Fixado (q_1, q_2) em $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, definimos $S_{(q_1, q_2)} = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in (C_\delta - L_n) / |\lambda_j - (q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2)| < \frac{1}{(q_1+q_2)^n}, j = 1 \text{ ou } j = 2 \right\}$ então $C_\delta - L_n = \bigcup_{(q_1, q_2)} S_{(q_1, q_2)}$. Temos que $\lambda_1 - (q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2) = 0$ se, e somente se $\lambda_2 = \frac{1-q_1}{q_2}\lambda_1$, chamando $\alpha = \frac{1-q_1}{q_2}$ e $a = \frac{1}{(q_1+q_2)^n}$, então $S_{(q_1, q_2)}$ é uma vizinhança da reta $\lambda_2 = \alpha\lambda_1$.
 $\text{vol} S_{(q_1, q_2)} \leq \frac{C_1 \frac{1}{n}}{(q_1+q_2)^n}$, daí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(C_\delta - L_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{q_1+q_2=2}^{\infty} \frac{C_1 \frac{1}{n}}{(q_1+q_2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_1 \frac{1}{n}}{k^n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_1 \frac{1}{n}}{k^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3.2 *Seja $w_k = \min \{|\lambda_i - \sum m_j \lambda_j| \neq 0, 2 \leq \sum m_j \leq 2^{k+1}\}$. Então, se o campo Z é formalmente linearizável e se a série $\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \log w_k^{-1}$ converge, existe uma mudança de coordenadas local em $(0, 0)$ ξ , analítica, de modo que $\xi^* Z = Z_0$.*

Este resultado se aplica mesmo com ressonâncias.

Vamos estudar os casos em que não é possível a linearização de Z , sendo $Z_0 = (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$ sua parte linear, então temos uma ressonância $m\lambda_1 + n\lambda_2 = 0$ para $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Proposição 2.3.4 *Existe uma mudança de coordenadas local ξ em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ de modo que $\xi^* Z = (\lambda_1 x + x y a_1(x, y), \lambda_2 y + x y a_2(x, y))$, onde as funções a_1 e a_2 são analíticas e $a_1(0, 0) = a_2(0, 0) = 0$.*

Demonstração:

Seguindo o mesmo esquema da demonstração do Teorema de Poincaré, temos

$$Z(u_1, u_2) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2) + (\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, u_2)) \text{ onde } \varphi_j(u_1, u_2) = \sum_{j \geq 2} \varphi_{jK} u^K, j = 1, 2$$
$$\xi(x_1, x_2) = (x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) = (u_1, u_2) \text{ e } \xi_j(x_1, x_2) = \sum_{K \geq 2} \xi_{jK} x^K, j = 1, 2.$$

Precisamos encontrar ξ de modo que $\xi^* Z = (\lambda_1 x_1 + \psi_1(x_1, x_2), \lambda_2 x_2 + \psi_2(x_1, x_2))$ e assim $x_j = \lambda_j x_j + \psi_j(x_1, x_2)$ onde $\psi_j(x_1, x_2) = \sum_{K \geq 2} \psi_{jK} x^K$ é do tipo $x_1 x_2 a_j$ onde a_j é uma função analítica, este conjunto é um ideal de funções analíticas gerado por $x_1 x_2$ que denotaremos por $\langle x_1 x_2 \rangle$.

Fazendo os cálculos (apenas para $j = 1$) encontramos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \varphi_1(x_1, x_2) &= x_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} x_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 (x_1 + \xi_1(x_1, x_2)) + \varphi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) = \\ &= \lambda_1 x_1 + \psi_1(x_1, x_2) + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} (\lambda_1 x_1 + \psi_1(x_1, x_2)) + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} (\lambda_2 x_2 + \psi_2(x_1, x_2)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 \xi_1(x_1, x_2) + \varphi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) = \\ &= \psi_1(x_1, x_2) + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} (\lambda_1 x_1 + \psi_1(x_1, x_2)) + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} (\lambda_2 x_2 + \psi_2(x_1, x_2)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 \sum_{K \geq 2} \xi_{1K} x^K + \varphi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) = \\ &= \psi_1(x_1, x_2) + \lambda_1 x_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \psi_1(x_1, x_2) + \lambda_2 x_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \psi_2(x_1, x_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{K \geq 2} (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \xi_{1K} x^K - \sum_{K \geq 2} \lambda_1 \xi_{1K} x^K + \psi_1(x_1, x_2) = \\ &= \varphi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \psi_1(x_1, x_2) - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \psi_2(x_1, x_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{K \geq 2} (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 - \lambda_1) \xi_{1K} x^K + \sum_{K \geq 2} \psi_{1K} x^K = \\ &= \varphi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2)) - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \psi_1(x_1, x_2) - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \psi_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Calculamos ξ_j e ψ_j da seguinte maneira:

$$\psi_{jk} = 0 \text{ se } x^k \notin \langle x_1 x_2 \rangle$$

$$\xi_{1k} = 0 \text{ se } x^k \in \langle x_1 x_2 \rangle$$



Comparando os termos de mesma potência, encontramos a solução formal para ξ e ψ . Vamos mostrar que as séries ξ_1 e ξ_2 convergem. De fato se $x^k \in \langle x_1 x_2 \rangle$ então $\xi_{1k} = 0$, logo $\xi_1 = 0$; se $x^k \notin \langle x_1 x_2 \rangle$ então $\psi_{1k} = \psi_{2k} = 0$ e $\psi_1 = \psi_2 = 0$, daí temos a igualdade

$$\sum_{K \geq 2} (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 - \lambda_1) \xi_{1K} x^K = \varphi_1(x_1 + \xi_1(x_1, x_2), x_2 + \xi_2(x_1, x_2))$$

e fazendo como no Teorema de Poincaré, segue a convergência de ξ_1 e analogamente de ξ_2 . ■

Vemos que os eixos coordenados $y = 0$ e $x = 0$ são soluções da equação diferencial associada ao campo.

Como no caso linear, as folhas são transversais aos toros $T_R : |x| = R$, então vamos analisar suas intersecções com estes. Para simplificar, escolhemos $T_1 : |x| = 1$ e usamos a transformação de Poincaré (também chamada aplicação primeiro retorno, ou holonomia da solução $y = 0$ no ponto $(1, 0)$).

Consideremos $\xi^* Z = (\lambda x + xya(x, y), \mu y + xyb(x, y))$, onde a e b são analíticas e $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$, e a trajetória fechada $x(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ daí $dx = ie^{it} dt$, logo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\mu y + xyb}{\lambda x + xya} \Leftrightarrow \frac{dy}{ie^{it} dt} = \frac{\mu y + e^{it} yb}{\lambda e^{it} + e^{it} ya} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \mu i y \frac{1 + \frac{e^{it}}{\mu}}{\lambda + ya} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\mu i}{\lambda} y \frac{1 + \frac{e^{it}}{\mu}}{1 + ya} \end{aligned}$$

Daí $y(t)$ será da forma $y(t) = e^{\frac{\mu}{\lambda} it} y_0 + \dots$, então definimos $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $\pi(y) = e^{2\pi i \frac{\mu}{\lambda}} y + \dots$ e temos que $\pi(0) = 0$ e $\pi'(0) = e^{2\pi i \frac{\mu}{\lambda}}$. Portanto $y = 0$ é ponto fixo neutro para π .

Caso (1) $|\pi'(0)| = 1$, então $\frac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{R}$ (como na seção anterior).

(I) Se 0 é irracionalmente neutro, ou seja, se $\frac{\mu}{\lambda} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e

a) $\frac{\mu}{\lambda}$ satisfaz a condição de Siegel, isto é, se existem constantes positivas a e b tais que $\left| \frac{\mu}{\lambda} - \frac{p}{q} \right| > \frac{a}{q^b}$ para todo p e q em $\mathbb{Z}$, então π é linearizável, ou seja, π é analiticamente conjugada à rotação irracional $T(y) = e^{2\pi i \frac{\mu}{\lambda}} y$ numa vizinhança do zero, e chegamos num resultado conhecido;

b) Se $\frac{\mu}{\lambda}$ não satisfaz a condição de Siegel, então não sabemos se é possível a linearização de π .

(II) Se 0 é racionalmente neutro, isto é, se $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ então temos o caso das pétalas.

Caso(2) $|\pi'(0)| \neq 1$. Como vimos no estudo do caso linear, $y = 0$ não pode ser um ponto fixo hiperbólico.

Sempre escolhemos nossa secção transversal passando no ponto $(1, 0)$ no plano $y = 0$ (ou $\mathbb{C}_x$), mas poderíamos ter escolhido um outro ponto p .

Veremos agora que quando duas holonomias associadas a campos distintos estão relacionadas, suas respectivas folheações também estão.

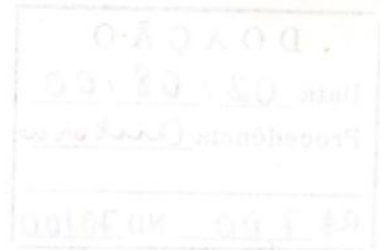
Proposição 2.3.5 *Sejam $Z_1(x, y) = (\lambda_1 x + xy a_1(x, y), \mu_1 x + xy a_2(x, y))$ e $Z_2(x, y) = (\lambda_2 x + xy b_1(x, y), \mu_2 x + xy b_2(x, y))$ campos de vetores analíticos definidos numa vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, com $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2) \in D_S$ e $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \alpha$. Indiquemos por π_1 e π_2 as holonomias respectivas no ponto $(1, 0)$ de Z_1 e Z_2 . Se existe um difeomorfismo local $\hat{\xi}$ de $\mathbb{C}$ em $0 \in \mathbb{C}$ de modo que $\pi_2 \circ \hat{\xi} = \hat{\xi} \circ \pi_1$ então existe um difeomorfismo local ξ de $\mathbb{C}^2$ em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ que transforma a folheação associada à Z_1 naquela associada à Z_2 .*

Demonstração:

(Diremos que ξ é uma equivalência analítica entre as folheações, e que $\hat{\xi}$ é uma conjugação analítica entre as holonomias)

Seja Σ uma secção transversal, então dado y_0 em Σ temos que $(\pi_2 \circ \hat{\xi})(y_0) = (\hat{\xi} \circ \pi_1)(y_0)$. Sejam $(e^{it}, y^{(1)}(t, (1, y_0)))$ e $(e^{it}, y^{(2)}(t, (1, y_0)))$, $t \in \mathbb{R}$ as trajetórias em T_1 de Z_1 e Z_2 respectivamente, com condições iniciais $(1, y_0)$, então definimos $\xi(e^{it}, y^{(1)}(t, (1, y_0))) = (e^{it}, y^{(1)}(t, (1, \hat{\xi}(y_0))))$

■



Bibliografia

- [1] Beardon, A.F., *Iteration of rational functions* - Springer - Verlag, 1991 - Graduate Texts in Mathematics.
- [2] Camacho, C. e Sad, P., *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, 16º Colóquio brasileiro de matemática, 1987.
- [3] Conway, J.B., *Functions of one complex variable*- Springer - Verlag, 1978 - Graduate Texts in Mathematics.
- [4] Devaney, R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems* - Second Edition - Addison - Wesley Publishing Company, 1988.
- [5] Lins Neto, A., *Funções de uma variável complexa* - Projeto Euclides, 1993.
- [6] Oliva, W.M., *Equações diferenciais ordinárias*, 8º Colóquio brasileiro de matemática, 1971.



