

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

GRAZIELE BALTAR FERREIRA ANTONIO

Perturbação secular aplicada ao sistema J1407b

Guaratinguetá

2019

Graziele Baltar Ferreira Antonio

Perturbação secular aplicada ao sistema J1407b

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Silvia Giuliatti Winter

Guaratinguetá

2019

A635p	Antonio, Grazielle Baltar Ferreira Perturbação secular aplicada ao sistema J1407b / Grazielle Baltar Ferreira Antonio – Guaratinguetá, 2020. 44 f.: il. Bibliografia: f. 44 Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2020. Orientadora: Prof^a Dr^a Silvia Giuliatti Winter 1. Exoplanetas. 2. Satélites. 3. Sistema de anéis. I. Título. CDU 629.783
-------	--

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

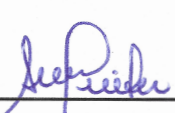
GRAZIELE BALTAR FERREIRA ANTONIO

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA "

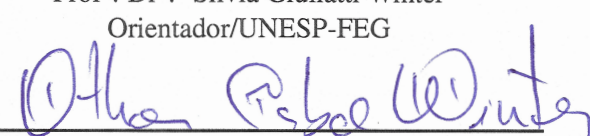
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Prof. Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

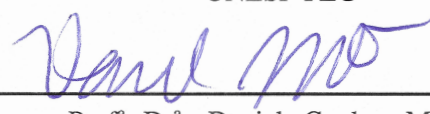
BANCA EXAMINADORA:



Prof.ª Dr.ª. Silvia Guliatti Winter
Orientador/UNESP-FEG



Prof. Dr. Othon Cabo Winter
UNESP-FEG



Prof.ª Dr.ª. Daniela Cardozo Mourão
Membro Externo
Dezembro , 2019

DADOS CURRICULARES

GRAZIELE BALTAR FERREIRA ANTONIO

NASCIMENTO 05/04/1993 - São José dos Campos / SP

FILIAÇÃO Flávio Conceição Antonio
Sandra Baltar Ferreira Antonio

2013 / 2019 Bacharel em Física
Unesp (Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho")
Campus de Guaratinguetá

2009 Técnico em Administração
CEPHAS (Centro de Educação Profissional
Hélio Augusto de Souza)

2008 / 2010 Ensino Médio
Colégio Iguatemy

2001 / 2007 Ensino Fundamental
Instituição de Ensino

É chegado ao fim um ciclo de muitas risadas, choro, felicidade e frustrações. Sendo assim, dedico este trabalho a todos que fizeram parte desta etapa da minha vida. Dedico este trabalho em primeiro lugar a Deus, que meu deu saúde e forças para superar todos os momentos difíceis a que eu me deparei ao longo da minha graduação, aos meus pais por serem essenciais nessa caminhada, e aos meus familiares e amigos, por todo apoio e incentivo rumo à vitória de mais um sonho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha família e meus amigos; a minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Silvia Giuliatti Winter que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível; aos meus pais Flávio e Sandra, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivaram meus estudos; às funcionárias da Biblioteca do Campus de Guaratinguetá pela dedicação, presteza e principalmente pela vontade de ajudar; aos funcionários da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá pela dedicação e alegria no atendimento; ao Projeto Temático da Fapesp (Processo Número 2016/24561-0).

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”
Arthur Schopenhauer

RESUMO

Novas descobertas de sistemas de anéis ao redor dos exoplanetas têm potencializado os estudos sobre a dinâmica de exoanéis em torno deles. Dessa forma, apresenta-se J1407b, um exoplaneta gigante gasoso, com massa 20 vezes maior que a de Júpiter, que possui um sistema de anéis estendido de 0,6 u.a. e é aproximadamente 200 vezes maior que o sistema de anéis de Saturno. Nesse projeto foi estudada a perturbação que o anel massivo pode afetar pequenos hipotéticos satélites próximos. Esse estudo foi realizado através da perturbação secular. Os resultados mostraram que como o anel é massivo ele causa grandes variações (de ordem 2 e 3) na excentricidade dos satélites.

PALAVRAS-CHAVE: exoplanetas. anéis. luas. perturbação solar.

ABSTRACT

New discoveries of ring systems around exoplanets have enhanced studies on the dynamics of exorings around them. J1407b is a gaseous giant exoplanet, with mass 20 times greater than that of Jupiter, which has an extended ring system from 0.6 AU and is approximately 200 times larger than Saturn's ring system. In this work is analysed, through the secular theory, the perturbations caused by the massive ring in the orbital eccentricities of hypothetical small satellites. Our results showed that the small satellites have their eccentricities increased (up to orders 2 and 3) due to the massive ring.

KEYWORDS: exoplanets. rings. moons. solar disturbance.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Representação polar do sistema de J1407b.	13
Figura 2	Representação de J1407b vistos a olho nu se colocado ao redor de Saturno. . .	14
Figura 3	Representação dos anéis de J1407b eclipsando a estrela J1407.	15
Figura 4	Gráfico da variação da intensidade do brilho da estrela J1407 e a representação do sistema de anéis de J1407b.	15
Figura 5	Elementos Orbitais	19
Figura 6	Gráfico do Caso 1	34
Figura 7	Gráfico do Caso 2	35
Figura 8	Gráfico do Caso 3	35
Figura 9	Gráfico do Caso 4	36
Figura 10	Gráfico do Caso 5	36
Figura 11	Gráfico do Caso 6	37
Figura 12	Gráfico do Caso 7	37
Figura 13	Gráfico do Caso 8	38
Figura 14	Gráfico do Caso 9	38
Figura 15	Gráfico do Caso 10	38
Figura 16	Gráfico do Caso 11	39
Figura 17	Gráfico do Caso 12	39
Figura 18	Gráfico do Caso 13	40
Figura 19	Gráfico do Caso 14	40
Figura 20	Gráfico do Caso 15	41
Figura 21	Gráfico do Caso 16	41
Figura 22	Gráfico do Caso 17	42
Figura 23	Gráfico do Caso 18	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cônicas	18
Tabela 2 – Dados do Caso 1	34
Tabela 3 – Dados do Caso 2	35
Tabela 4 – Dados do Caso 3	35
Tabela 5 – Dados do Caso 4	35
Tabela 6 – Dados do Caso 5	36
Tabela 7 – Dados do Caso 6	36
Tabela 8 – Dados do Caso 7	36
Tabela 9 – Dados do Caso 8	37
Tabela 10 – Dados do Caso 9	37
Tabela 11 – Dados do Caso 10	37
Tabela 12 – Dados do Caso 11	39
Tabela 13 – Dados do Caso 12	39
Tabela 14 – Dados do Caso 13	39
Tabela 15 – Dados do Caso 14	40
Tabela 16 – Dados do Caso 15	40
Tabela 17 – Dados do Caso 16	40
Tabela 18 – Dados do Caso 17	41
Tabela 19 – Dados do Caso 18	41

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
u.a.	Unidade Astronômica

LISTA DE SÍMBOLOS

ω	Letra Grega Ômega Minúscula
Ω	Letra Grega Ômega Maiúscula
∂	Derivada Parcial
α	Letra Grega Alfa Minúscula
μ	Letra Grega Mi Minúscula
ψ	Letra Grega Psi Minúscula
π	Letra Grega Pi Minúscula
ξ	Letra Grega Csi Minúscula
η	Letra Grega Eta Minúscula
ς	Letra Grega Sigma Minúscula
θ	Letra Grega Teta Minúscula
μ	Letra Grega Mi Minúscula
∇	Operador Matemático Nabla

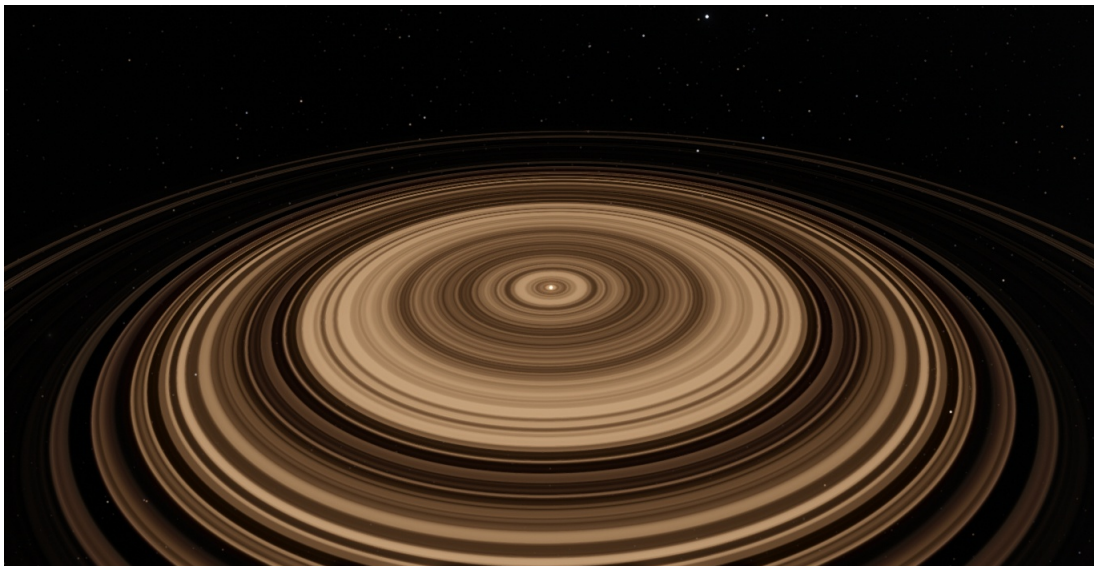
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	INTRODUÇÃO TEÓRICA	16
2.1	PROBLEMA DE 2 CORPOS	16
2.2	PROBLEMA DE 3 CORPOS	20
2.3	FUNÇÃO PERTURBADORA	21
3	PERTURBAÇÃO SECULAR	24
4	APLICAÇÃO	29
5	DISCUSSÃO	43
6	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

Exoplanetas são planetas que orbitam uma estrela que não é o Sol, ou seja, fazem parte de um sistema planetário diferente. Atualmente sabemos que existem cerca de 4109 exoplanetas em 3059 sistemas descobertos. O estudo desses corpos é recente e a partir de telescópios foram observadas mudanças de luminosidade na estrela, resultado da passagem de um objeto em frente à estrela, o exoplaneta. O exoplaneta que iremos abordar nesses estudos é o J1407b, que orbita a estrela J1407, uma jovem anã laranja localizada na constelação de Centauro. J1407b é um gigante gasoso que se encontra a 420 anos luz de distância e seu sistema de anéis é 200 vezes maior e mais massivo que o de Saturno, conhecido por seus anéis (Figura 1)(TODAY, 2015).

Figura 1 – Representação polar do sistema de J1407b.



Fonte: FANDOM (2019).

Em 2012 os astrônomos Eric Mamajek, da Universidade de Rochester, nos Estados Unidos, e Matthew Kenworthy, do Observatório de Leiden, na Holanda, encontraram esse sistema de anéis fora do sistema solar, o sistema de anéis do 1SWASP J1407b. Os pesquisadores analisaram um banco de dados de milhões de estrelas obtidas por telescópios ao redor do mundo e investigaram as curvas de luz da estrela 1SWASP J1407 obtidas em 2007 pelo projeto SuperWASP, um programa internacional coordenado pelo Reino Unido, com o objetivo de detectar e caracterizar planetas extrassolares (APRENDIZES, 2015). Em 2012, eles se intrigaram com um conjunto de eclipses, ocultações, produzido por um disco circumplanetário, com variação de brilho na luz da estrela, filtrada pelo sistema de anéis (ON—LINE, 2015). Mais recentemente, os astrônomos utilizaram o método da espectroscopia Doppler para obter a massa do objeto presente no centro desse disco. Com base nesses estudos, descobriram que J1407b tem massa aproximada de 20 vezes a massa de Júpiter, movendo-se em uma órbita que possui semi-eixo maior de $3,9(\pm 1,7)$ u.a. Recentemente, Kenworthy e Mamajek estudaram o complexo sistema de anéis de J1407b, que tem 120 milhões de quilômetros de diâmetro e massa aproximadamente igual à

massa da Terra (ASTROPT, 2015). Kenworthy conta que em seus estudos através das curvas de luz observadas, puderam criar um modelo detalhado baseado nas variações do brilho da luz filtrada através dos anéis. Se trocar os anéis de Saturno pelos anéis de J1407b, esses seriam visíveis a olho nu, com um tamanho muito maior que o da Lua cheia (Figura 2).

Figura 2 – Representação de J1407b vistos a olho nu se colocado ao redor de Saturno.



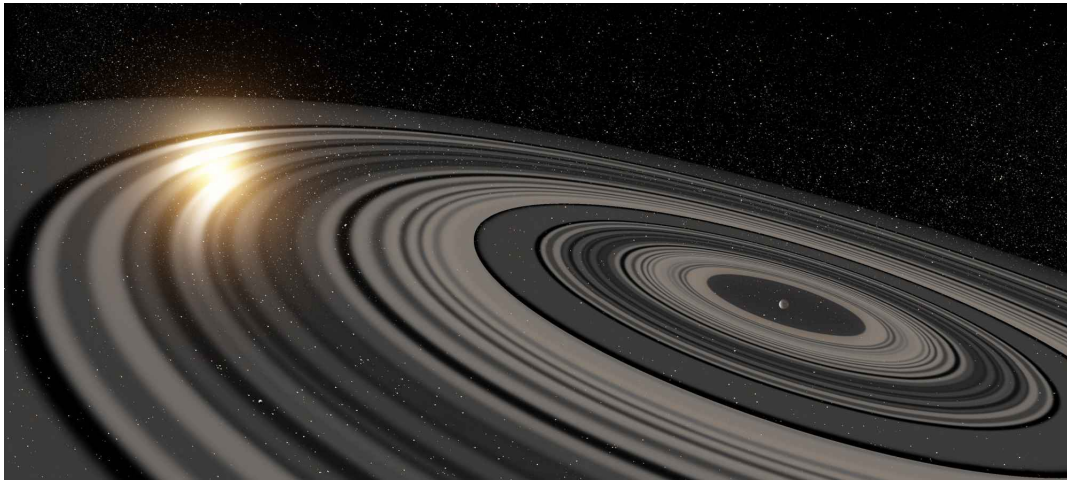
Fonte: Astronomia On-line (2019).

Esse sistema deve conter mais de 30 anéis com ao menos uma falha. Os pesquisadores esperam que esses anéis se tornem mais finos em alguns milhões de anos, com vazios e capazes de desaparecer gradualmente com o surgimento de novas exoluas e satélites, formados por esses materiais. De acordo com Mamajek, se pegássemos as quatro luas Galileanas de Júpiter e transformássemos em poeira e gelo, e em seguida espalhássemos esse material em suas órbitas, esse anel seria grandemente opaco, a ponto de um observador distante, observar um eclipse (Figura 3). Ele conta também que no caso da estrela J1407 os anéis bloqueariam 95% da luz da estrela, o que promoveria uma grande quantidade de material para a formação de satélites (Figura 4). Kenworthy ainda adiciona que os eclipses no sistema J1407 permitirão o estudo das propriedades físicas e químicas desses anéis formados por discos circumplanetários.

Mamajek diz também que a comunidade científica tem teorizado por décadas que planetas como Júpiter e Saturno, tiveram, como estágio inicial, discos ao seu redor que levaram à formação de satélites. Essa é a primeira ideia concreta que se tem sobre a formação de satélites na escala de milhões de quilômetros ao redor de um objeto estelar.

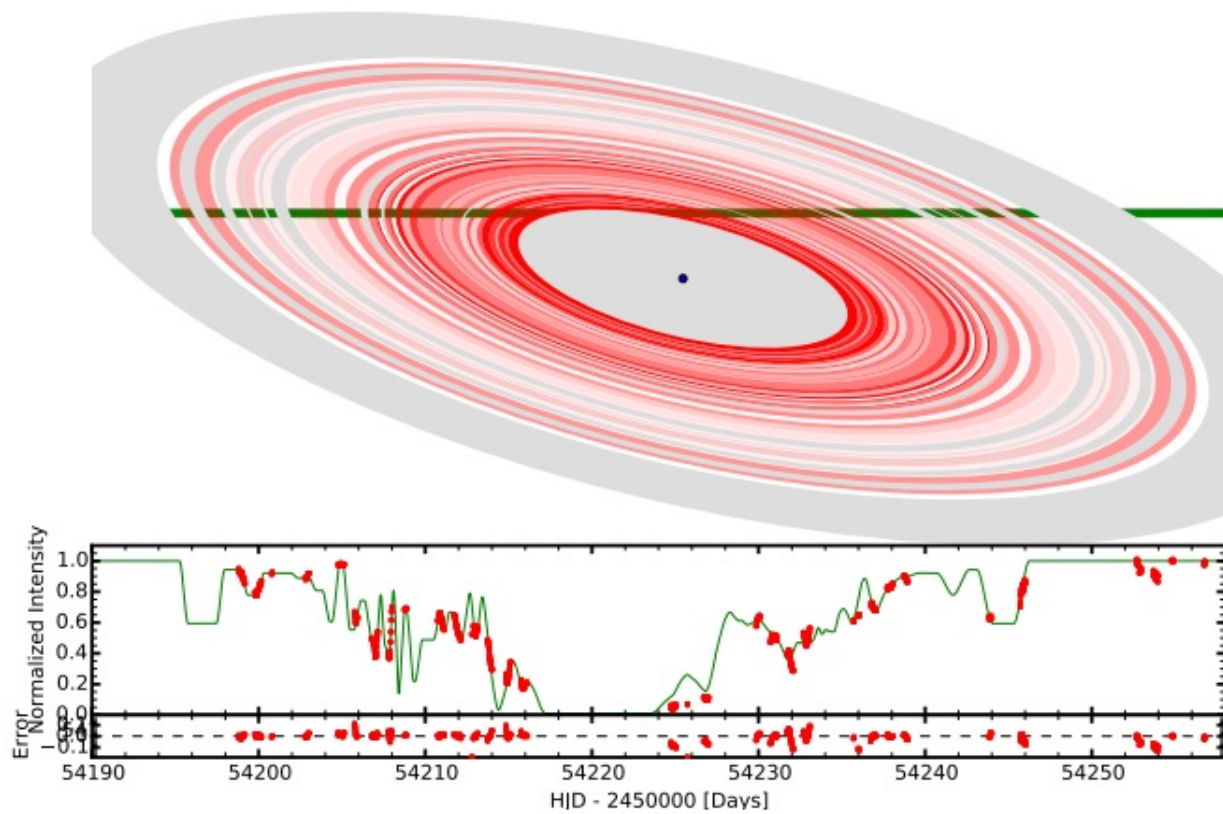
Nesse trabalho iremos estudar o efeito que esse sistema de anéis poderia causar em um satélite próximo. Esse estudo será realizado através de perturbação secular. No próximo capítulo (cap. 2) será apresentada uma breve revisão do problema de 2 e 3 corpos. No capítulo 3 será estudada a perturbação secular e sua aplicação será apresentada no capítulo 4. A discussão será feita no capítulo 5.

Figura 3 – Representação dos anéis de J1407b eclipsando a estrela J1407.



Fonte: Astronomia On-line (2019).

Figura 4 – Gráfico da variação da intensidade do brilho da estrela J1407 e a representação do sistema de anéis de J1407b.



Fonte: Astronomia On-line (2019).

2 INTRODUÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão apresentados alguns tópicos de Mecânica Celeste, importantes para o entendimento do projeto.

2.1 PROBLEMA DE 2 CORPOS

O problema de 2-corpos foi desenvolvido por Isaac Newton para descrever a interação entre dois corpos celestes de massas pontuais se movendo sob a ação da força gravitacional (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Para esse estudo, consideramos duas massa, m_a e m_b , com coordenadas cartesianas $(\xi_a, \eta_a, \varsigma_a)$ e $(\xi_b, \eta_b, \varsigma_b)$ com origem O . Tem-se a distância ao quadrado entre as massas dada por:

$$r^2 = (\xi_a - \xi_b)^2 + (\eta_a - \eta_b)^2 + (\varsigma_a - \varsigma_b)^2 \quad (1)$$

Além disso, temos que as forças atuando em cada massa, a partir da segunda lei de Newton são:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{a\xi} &= Gm_a m_b \frac{\vec{\xi}_b - \vec{\xi}_a}{r^3} \\ \vec{F}_{a\eta} &= Gm_a m_b \frac{\vec{\eta}_b - \vec{\eta}_a}{r^3} \\ \vec{F}_{a\varsigma} &= Gm_a m_b \frac{\vec{\varsigma}_b - \vec{\varsigma}_a}{r^3} \end{aligned} \quad (2)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{\vec{\xi}}_a &= Gm_a m_b \frac{\vec{\xi}_b - \vec{\xi}_a}{r^3} \\ m_a \ddot{\vec{\eta}}_a &= Gm_a m_b \frac{\vec{\eta}_b - \vec{\eta}_a}{r^3} \\ m_a \ddot{\vec{\varsigma}}_a &= Gm_a m_b \frac{\vec{\varsigma}_b - \vec{\varsigma}_a}{r^3} \end{aligned} \quad (3)$$

onde G é a constante gravitacional. Analogamente para m_b .

Com isso temos seis equações diferenciais de segunda ordem e como consequência, precisamos de doze constantes de integração para obter a resolução do problema.

Considerando $\vec{F}_a = -\vec{F}_b$, temos que:

$$\left. \begin{aligned} m_a \ddot{\vec{\xi}}_a + m_b \ddot{\vec{\xi}}_b &= \vec{0} \\ m_a \ddot{\vec{\eta}}_a + m_b \ddot{\vec{\eta}}_b &= \vec{0} \\ m_a \ddot{\vec{\zeta}}_a + m_b \ddot{\vec{\zeta}}_b &= \vec{0} \end{aligned} \right\} m_a \ddot{\vec{r}}_a + m_b \ddot{\vec{r}}_b = \vec{0} \quad (4)$$

onde $\vec{r}_a$ e $\vec{r}_b$ são vetores posição em relação à origem.

Integrando duas vezes as equações anteriores obtém-se:

$$\begin{aligned} m_a \dot{\vec{r}}_a + m_b \dot{\vec{r}}_b &= \vec{a} \\ m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b &= \vec{a}t + \vec{b} \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são constantes.

O vetor posição do centro de massa é da forma:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b}{m_a + m_b} \\ \vec{R} &= \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_a + m_b} \\ \dot{\vec{R}} &= \frac{\vec{a}}{m_a + m_b} \end{aligned} \quad (6)$$

Esse vetor possui movimento uniforme com velocidade constante.

Considerando o movimento relativo de m_b em relação à m_a , temos:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0} \quad (7)$$

sendo $\vec{r} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$ o vetor posição relativo.

Obtemos a equação escalar substituindo $\vec{r}$ para a equação da posição:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (8)$$

Para determinar $r = f(\theta)$ substituímos $\mu = \frac{1}{r}$, $h = r^2\dot{\theta}$, tomamos a diferencial de r em relação

ao tempo e obtemos a solução geral:

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2 u}{dt^2} \dot{\theta} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad (9)$$

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2} + K \cos(\theta - \varpi)$$

onde K é a amplitude e ϖ é a fase.

E substituindo $u = \frac{1}{r}$, temos:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (10)$$

onde $p = \frac{h^2}{\mu}$ e $\frac{(h^2 K)}{\mu} = e$, e é a excentricidade e p é o semilatus rectum.

A equação acima é a equação geral de uma cônica em coordenadas polares e também a solução do problema de dois corpos.

A quatro cônicas possíveis são:

Tabela 1 – Cônicas

Cônica	Excentricidade	Semi-eixo maior
Círculo	$e = 0$	$p = a$
Elipse	$0 < e < 1$	$p = a(1 - e^2)$
Parábola	$e = 1$	$p = 2a$
Hipérbole	$e > 1$	$p = a(e^2 - 1)$

Fonte: Solar System Dynamics (2019).

Devemos considerar enfaticamente as órbitas elípticas, pois a maioria dos corpos do Sistema Solar e vários satélites artificiais possuem excentricidade muito menor que 1.

Portanto:

$$p = a(1 - e^2)$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \varpi)} \quad (11)$$

sendo b o semi eixo menor da elipse e θ é a longitude verdadeira (ângulo medido em relação ao referencial).

Temos r máximo quando $\theta = \varpi + \pi$ e mínimo quando $\theta = \varpi$, ϖ é a longitude do pericentro. Esses

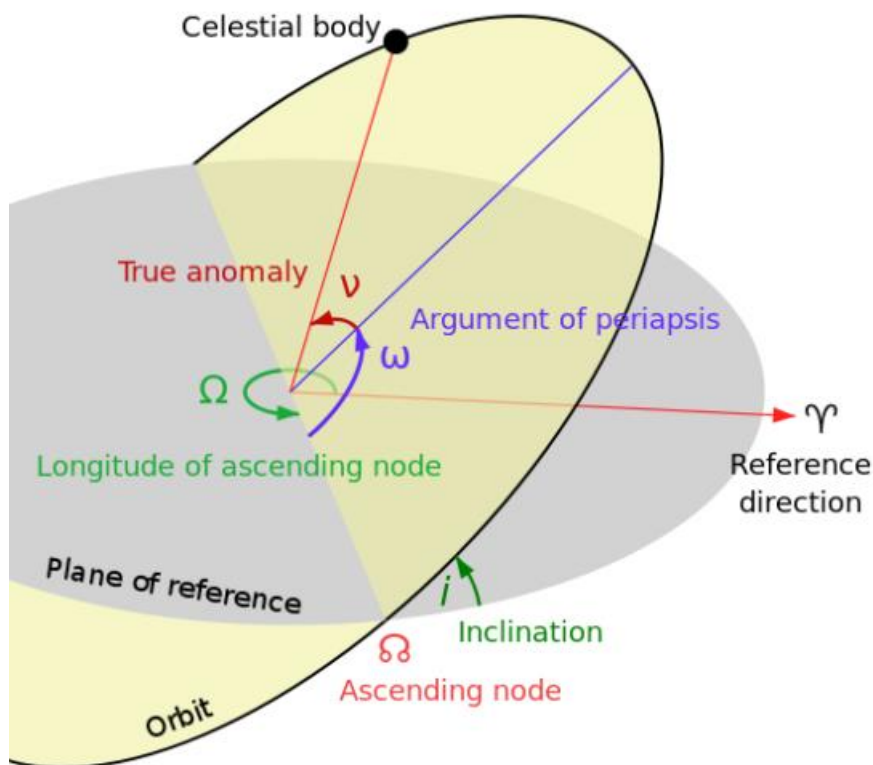
pontos são chamados de apocentro A e pericentro P , respectivamente. Tem-se também $\nu = \theta - \varpi$, onde ν é a anomalia verdadeira. Podemos então escrever:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (12)$$

Os seis elementos que definem a órbita de um corpo no espaço são:

- a : semi-eixo maior.
- e : excentricidade.
- I : inclinação da órbita.
- ω : argumento do pericentro.
- Ω : longitude do nodo ascendente.
- M : anomalia média.

Figura 5 – Elementos Orbitais



Fonte: BRAMON (Brazilian Meteor Observation Network - 2019).

2.2 PROBLEMA DE 3 CORPOS

O problema circular restrito de três corpos descreve o movimento de uma partícula m , de massa desprezível, orbitando ao redor de um corpo principal m_1 e perturbada por um corpo de massa m_2 . Esse problema não possui solução analítica.

É um problema circular porque a órbita de m_2 é circular e restrito pois a partícula não perturba o movimento dos dois corpos primários.

Para as equações do movimento vamos considerar as coordenadas (ξ, η) no centro de massa e (ξ_1, η_1) e (ξ_2, η_2) as coordenadas para as massas m_1 e m_2 , respectivamente. Vamos assumir que $a = 1$ e que a unidade de massa vale $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$. Utilizando a 3ª lei de Kepler, $n^2 a^3 = \mu$ para $n = 1$ e $m_1 > m_2$:

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ \mu_1 &= 1 - \bar{\mu} \\ \mu_2 &= \bar{\mu} \\ \mu_1 + \mu_2 &= 1\end{aligned}\tag{13}$$

As equações do movimento da partículas sob o efeito de m_1 e m_2 são:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ \ddot{\eta} &= \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\ r_1^2 &= (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 \\ r_2^2 &= (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2\end{aligned}\tag{14}$$

Como as massas principais estão se movendo em órbitas circulares ao redor do centro de massa, a distância entre elas é constante e essas massas movem com velocidade angular também constante. Portanto, pode se considerar o movimento da partícula em um sistema de referência girante, onde as massas principais estão fixas, no eixo x.

Considerando um referencial girante (x, y) onde as coordenadas das massas m_1 e m_2 são $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$ e $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$, temos que:

$$\begin{aligned}r_1^2 &= (x + \mu_2)^2 + y^2 \\ r_2^2 &= (x - \mu_1)^2 + y^2\end{aligned}\tag{15}$$

E pela matriz rotação:

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos nt - y \sin nt \\ \eta &= x \sin nt + y \cos nt\end{aligned}\tag{16}$$

Tomando a diferencial segunda de cada componente:

$$\begin{aligned}(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin nt = \\ \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos nt + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \sin nt\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos nt = \\ \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin nt - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \cos nt\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y\end{aligned}\tag{19}$$

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

onde

$$U = \frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\tag{20}$$

2.3 FUNÇÃO PERTURBADORA

Para analisar a função perturbadora consideramos vetores com origem em O para os 3 corpos m_c , m_i e m_j e $\vec{R}_C$, $\vec{R}_i$, $\vec{R}_j$, respectivamente. Sendo também $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_j$ os vetores posição das massas m_i e m_j

relativas a massa m_c , onde:

$$\begin{aligned}
 |\vec{r}_i| &= r_i = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^{\frac{1}{2}} \\
 |\vec{r}_j| &= r_j = (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{\frac{1}{2}} \\
 |\vec{r}_j - \vec{r}_i| &= [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Através das leis de Newton do movimento e da gravitação, podemos obter as equações de movimento para as três massas em um referencial inercial:

$$\begin{aligned}
 m_c \ddot{\vec{R}}_c &= Gm_c m_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + Gm_c m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \\
 m_i \ddot{\vec{R}}_i &= Gm_i m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - Gm_i m_c \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \\
 m_j \ddot{\vec{R}}_j &= Gm_j m_i \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - Gm_j m_c \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}
 \end{aligned} \tag{22}$$

As acelerações são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\vec{r}}_i &= \ddot{\vec{R}}_i - \ddot{\vec{R}}_c \\
 \ddot{\vec{r}}_j &= \ddot{\vec{R}}_j - \ddot{\vec{R}}_c
 \end{aligned} \tag{23}$$

Substituindo as expressões para $\ddot{\vec{R}}_c$, $\ddot{\vec{R}}_i$ e $\ddot{\vec{R}}_j$, temos:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\vec{r}}_i + G(m_c + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} &= Gm_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \\
 \ddot{\vec{r}}_j + G(m_c + m_j) \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} &= Gm_i \left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right)
 \end{aligned} \tag{24}$$

Essas acelerações podem ser escritas pelo gradiente das funções escalares:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\vec{r}}_i &= \nabla_i (U_i + R_i) = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) (U_i + R_i) \\
 \ddot{\vec{r}}_j &= \nabla_j (U_j + R_j) = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y_j} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) (U_j + R_j)
 \end{aligned} \tag{25}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 U_i &= G \frac{(m_c + m_i)}{r_i} \\
 U_j &= G \frac{(m_c + m_j)}{r_j}
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

U_i e U_j são partes do potencial total para os dois corpos.

O termo R será a função perturbadora, que descreve a perturbação de m_j em $m_i(R_i)$:

$$R_i = \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} - Gm_j \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3}
 \tag{27}$$

A função perturbadora de m_i em m_j é dada por (R_j)

$$R_j = \frac{Gm_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - Gm_i \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_i^3}
 \tag{28}$$

Vários trabalhos realizaram diferentes desenvolvimentos da função perturbadora em termos dos elementos orbitais. Utilizaremos o desenvolvimento apresentado em (MURRAY; DERMOTT, 1999).

3 PERTURBAÇÃO SECULAR

A perturbação secular é utilizada para encontrar possíveis soluções analíticas para uma determinada forma particular do problema de N-corpos, como por exemplo, sua aplicação para corpos do sistema solar. Podemos fazer essa análise considerando uma função perturbadora para um sistema com N massas orbitando um corpo central (MURRAY; DERMOTT, 1999).

Para dois planetas, consideramos o movimento de dois corpos, nesse caso, de massas m_1 e m_2 , que se movem sob efeitos gravitacionais mútuos, ao redor de um corpo central m_c , onde $m_1 \ll m_c$ e $m_2 \ll m_c$. Suas respectivas funções perturbadoras são R_1 e R_2 que descrevem a perturbação na órbita de m_1 e m_2 respectivamente (MURRAY; DERMOTT, 1999).

As perturbações seculares são obtidas isolando os termos em suas respectivas funções perturbadoras, que são independentes das longitudes médias (Ω). Levando em consideração a segunda ordem para a excentricidade e inclinação e primeira ordem para as massas, temos os termos da expansão da função perturbadora, que não contém as longitudes médias (parte secular):

$$\begin{aligned}
 R^{\text{sec}} = & \frac{1}{8} \cdot [2\alpha_{12} \cdot D + \alpha_{12}^2 \cdot D^2] \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(0)} \cdot (e_1^2 + e_2^2) - \frac{1}{2} \cdot \alpha_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(0)} \cdot (s_1^2 + s_2^2) \\
 & + \frac{1}{4} [2 - 2\alpha_{12} \cdot D + \alpha_{12}^2 \cdot D^2] \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(1)} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \\
 & + \alpha_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2)
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde, 1 e 2 se referem aos corpos interno e externo, D e D^2 são as derivadas 1ª e 2ª do coeficiente de Laplace b , s_1 e s_2 são relações do seno da inclinação e $\alpha_{12} = \frac{a_1}{a_2}$; $a_1 < a_2$. Os termos indiretos tem a longitude média, ou seja, nunca irão contribuir com termos puramente seculares. Para calcular as funções para m_1 e m_2 de R^{sec} , levamos em conta que R_1 irá surgir da perturbação externa de m_2 , enquanto R_2 vem de uma perturbação interna de m_1 :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{G \cdot m_2}{a_1} \cdot R^{\text{sec}} = \frac{G \cdot m_2}{a_1} \cdot \alpha_{12} \cdot R^{\text{sec}} \\
 R_2 &= \frac{G \cdot m_1}{a_1} \cdot \alpha_{12} \cdot R^{\text{sec}} = \frac{G \cdot m_1}{a_2} \cdot R^{\text{sec}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Utilizando as relações entre os coeficientes de Laplace e suas respectivas derivadas:

$$2\alpha \cdot \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} + \alpha^2 \cdot \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = \alpha \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \quad (3)$$

$$2 \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - 2\alpha \cdot \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} - \alpha^2 \cdot \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = -\alpha \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$$

E as aproximações:

$$\begin{aligned} G \cdot M &\approx n_1^2 \cdot a_1^3 \\ G \cdot M &\approx n_2^2 \cdot a_2^3 \end{aligned} \quad (4)$$

Podemos escrever:

$$\begin{aligned} R_1 = n_1^2 \cdot a_1^3 \cdot \frac{m_2}{m_c + m_1} &\left[\frac{1}{8} \alpha_{12}^2 \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cdot e_1^2 - \frac{1}{8} \alpha_{12}^2 \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cdot e_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cdot I_1^2 \right. \\ &\left. - \frac{1}{4} \alpha_{12}^2 \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(2)} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \frac{1}{4} \alpha_{12}^2 \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} R_2 = n_2^2 \cdot a_2^3 \cdot \frac{m_1}{m_c + m_2} &\left[\frac{1}{8} \alpha_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cdot e_2^2 - \frac{1}{8} \alpha_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cdot e_1^2 \cdot I_2^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{4} \alpha_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(2)} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \frac{1}{4} \alpha_{12}^2 \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

onde I_1 e I_2 são muito pequenos e podemos fazer as aproximações:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin \frac{1}{2} I_1 \approx \frac{1}{2} I_1 \\ s_2 &= \sin \frac{1}{2} I_2 \approx \frac{1}{2} I_2 \end{aligned} \quad (7)$$

As equações que representam a função perturbadora para R_1 e R_2 podem ser combinadas resul-

tando:

$$R_j = n_j a_j^2 \left[\frac{1}{2} A_{jj} \cdot e_j^2 + A_{jk} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \frac{1}{2} B_{jj} \cdot I_j^2 + B_{jk} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right] \quad (8)$$

onde $j = 1, 2; k = 2, 1 (j \neq k); e$

$$\begin{aligned} A_{jj} &= +n_j \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{m_k}{m_c + m_j} \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12}) \\ A_{jk} &= -n_j \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{m_k}{m_c + m_j} \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12}) \\ B_{jj} &= -n_j \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{m_k}{m_c + m_j} \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12}) \\ B_{jk} &= +n_j \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{m_k}{m_c + m_j} \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12}) \end{aligned} \quad (9)$$

onde $\bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12}$, se $j = A$ e $\bar{\alpha}_{12} = 1$ se $j = B$ (um perturbador externo).

Da definição dos coeficientes de Laplace, temos:

$$\begin{aligned} b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cdot \cos \psi + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \\ b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cdot \cos \psi + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (10)$$

Todas as quantidades são frequências que podem ser pensadas como elementos constantes de duas matrizes A e B :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Os elementos dessas matrizes são funções apenas das massas e do semi-eixo maior dos dois corpos. Utilizando os termos de menores ordens em e e I podemos derivar uma aproximação para as equações

de Lagrange, que dá a derivada dos elementos orbitais em relação ao tempo:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_j &= -\frac{1}{n_j \cdot a_j^2 \cdot e_j} \frac{\partial R_j}{\partial \varpi_j} \\
 \dot{I}_j &= -\frac{1}{n_j \cdot a_j^2 \cdot I_j} \frac{\partial R_j}{\partial \Omega_j} \\
 \dot{\varpi}_j &= \frac{1}{n_j \cdot a_j^2 \cdot e_j} \frac{\partial R_j}{\partial e_j} \\
 \dot{\Omega}_j &= \frac{1}{n_j \cdot a_j^2 \cdot I_j} \frac{\partial R_j}{\partial I_j}
 \end{aligned} \tag{12}$$

De acordo com as equações acima, é conveniente definir as componentes vertical e horizontal dos “vetores” excentricidade e inclinação:

$$\begin{aligned}
 h_j &= e_j \cdot \text{sen} \varpi_j \\
 k_j &= e_j \cdot \cos \varpi_j \\
 p_j &= I_j \cdot \text{sen} \Omega_j \\
 q_j &= I_j \cdot \cos \Omega_j
 \end{aligned} \tag{13}$$

A vantagem dessas variáveis é evitar as singularidades inerentes das equações encontradas no processo para e e I pequenos. A parte secular geral da função perturbadora agora pode ser escrita da seguinte maneira:

$$R_j = n_j a_j^2 \left[\frac{1}{2} A_{jj} \cdot (h_j^2 + k_j^2) + A_{jk} \cdot (h_j \cdot h_k + k_j \cdot k_k) + \frac{1}{2} B_{jj} \cdot (p_j^2 + q_j^2) + B_{jk} \cdot (p_j \cdot p_k + q_j \cdot q_k) \right] \tag{14}$$

sendo h_j, k_j, p_j e q_j função de duas variáveis, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dR_j}{dt} &= \frac{\partial R_j}{\partial e_j} \cdot \frac{\partial e_j}{\partial t} + \frac{\partial R_j}{\partial \varpi_j} \cdot \frac{\partial \varpi_j}{\partial t} \\
 \frac{dk_j}{dt} &= \frac{\partial R_j}{\partial e_j} \cdot \frac{\partial e_j}{\partial t} + \frac{\partial R_j}{\partial \varpi_j} \cdot \frac{\partial \varpi_j}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_j}{dt} &= \frac{\partial p_j}{\partial I_j} \cdot \frac{\partial I_j}{\partial t} + \frac{\partial p_j}{\partial \Omega_j} \cdot \frac{\partial \Omega_j}{\partial t} \\ \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial q_j}{\partial I_j} \cdot \frac{\partial I_j}{\partial t} + \frac{\partial q_j}{\partial \Omega_j} \cdot \frac{\partial \Omega_j}{\partial t}\end{aligned}\tag{16}$$

onde suas derivadas parciais são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_j}{\partial e_j} &= \frac{h_j}{e_j}; \quad \frac{\partial k_j}{\partial e_j} = \frac{k_j}{e_j} \\ \frac{\partial h_j}{\partial \varpi_j} &= k_j; \quad \frac{\partial k_j}{\partial \varpi_j} = -h_j\end{aligned}\tag{17}$$

e:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_j}{\partial I_j} &= \frac{p_j}{I_j}; \quad \frac{\partial q_j}{\partial I_j} = \frac{q_j}{I_j} \\ \frac{\partial p_j}{\partial \Omega_j} &= q_j; \quad \frac{\partial q_j}{\partial \Omega_j} = -p_j\end{aligned}\tag{18}$$

As equações perturbadoras podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\dot{h}_j &= \frac{1}{n_j \cdot a_j^2} \cdot \frac{\partial R_j}{\partial k_j} \\ \dot{k}_j &= -\frac{1}{n_j \cdot a_j^2} \cdot \frac{\partial R_j}{\partial h_j}\end{aligned}\tag{19}$$

As equações de baixa ordem para h_j e k_j , tem as seguintes soluções:

$$\begin{aligned}h_j &= \sum_{i=1}^3 e_{ji} \cdot \sin(g_i t + \beta_i) \\ k_j &= \sum_{i=1}^3 e_{ji} \cdot \cos(g_i t + \beta_i)\end{aligned}\tag{20}$$

onde as frequências g_i ($i = 1, 2, 3$) são autovalores da matriz A e e_{ij} são as componentes correspondentes aos autovetores. As fases β_i e as amplitudes dos auto vetores são determinadas pelas condições iniciais.

4 APLICAÇÃO

As perturbações seculares serão usadas para determinar a variação na excentricidade de hipotéticos pequenos satélites durante um determinado período de tempo. A parte secular da função perturbadora será:

$$R_j = n_j \cdot a_j \left(\frac{1}{2} A_{jj} \cdot e_j^2 + \sum_{k=1, k \neq j}^n A_{jk} \cdot e_j \cdot e_k \cdot \cos(\varpi_j - \varpi_k) \right) \quad (1)$$

onde:

$$\begin{aligned} A_{jj} &= n_j \cdot \frac{1}{4} m'_k \sum_{k=1, k \neq j}^n \alpha_{jk} \cdot \bar{\alpha}_{jk} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{jk}) \\ A_{jk} &= -\frac{1}{4} m'_k \cdot n_j \cdot \alpha_{jk} \cdot \bar{\alpha}_{jk} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{jk}) \quad (j \neq k) \\ \alpha_{jk} &= \begin{cases} \frac{a_k}{a_j}, & \text{se } k < j \\ \frac{a_j}{a_k}, & \text{se } k > j \end{cases} \\ \bar{\alpha}_{jk} &= \begin{cases} 1, & \text{se } k < j \\ \alpha_{jk}, & \text{se } k > j \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

A_{jj} e A_{jk} são as frequências que podem ser pensadas como os elementos da matriz generalizada:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Na expressão m'_k temos a massa do corpo dividido pela massa do planeta. E $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{jk})$ e $b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{jk})$ são os coeficientes de Lagrange.

Sendo as excentricidades dos corpos pequenas, é conveniente definir as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} h_j &= e_j \cdot \sin \varpi_j \\ k_j &= e_j \cdot \cos \varpi_j \end{aligned} \quad (4)$$

Em termos dessas variáveis, as equações perturbadoras para h e k , de ordem mais baixa são dadas

por:

$$\begin{aligned} \dot{h}_j &= \frac{1}{n_j \cdot a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial k_j} \\ \dot{k}_j &= -\frac{1}{n_j \cdot a_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial h_j} \end{aligned} \quad (5)$$

As equações para h_j e k_j podem ser lidas como:

$$\begin{aligned} h_j &= \sum_{i=1}^3 e_{ji} \cdot \sin(g_i t + \beta_i) \\ k_j &= \sum_{i=1}^3 e_{ji} \cdot \cos(g_i t + \beta_i) \end{aligned} \quad (6)$$

onde as frequências g_i ($i = 1, 2, 3$) são autovalores da matriz A e e_{ij} são as componentes correspondentes aos autovetores. As fases β_i e as amplitudes dos autovetores são determinadas pelas condições iniciais.

Aplicando a função perturbadora para o sistema de J1407b, considerando planeta – anel – satélite hipotético e seus respectivos parâmetros calculados (SUTTON, 2019):

$$\begin{array}{ll} m'_1 = 0,0038836 & m'_2 = 0,000252381 \\ a_1 = 7,48 \cdot 10^8 \text{ km} & a_2 = 9,42 \cdot 10^8 \text{ km} \\ n_1 = 0.0000173557^\circ \text{y}^{-1} & n_2 = 0.0000122805^\circ \text{y}^{-1} \\ e_1 = 0,6 & e_2 = 10^{-5} \\ \omega_1 = 0^\circ & \omega_2 = 0^\circ \\ I_1 = 0 & I_2 = 0 \end{array}$$

A parte secular das funções perturbadoras para o anel (1) e o satélite, serão:

$$\begin{aligned} R_1 &= n_1 \cdot a_1 \left(\frac{1}{2} A_{11} \cdot e_1^2 + \sum_{k=1, k \neq j}^n A_{12} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \right) \\ R_1 &= n_1 \cdot a_1 \left(\frac{1}{2} A_{11} \cdot e_1^2 + A_{12} \cdot e_1 \cdot e_2 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= n_2 \cdot a_2 \left(\frac{1}{2} A_{22} \cdot e_2^2 + \sum_{k=1, k \neq j}^n A_{21} \cdot e_2 \cdot e_1 \cdot \cos(\varpi_2 - \varpi_1) \right) \\ R_2 &= n_2 \cdot a_2 \left(\frac{1}{2} A_{22} \cdot e_2^2 + A_{21} \cdot e_2 \cdot e_1 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_{11} = n_1 \cdot \frac{1}{4} m'_k \sum_{k=1, k \neq j}^n \alpha_{12} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12})$$

$$A_{11} = n_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{m_1}{m_c} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{12})$$

(9)

$$A_{22} = n_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot m'_k \sum_{k=1, k \neq j}^n \alpha_{21} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{21})$$

$$A_{22} = n_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{m_2}{m_c} \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{21})$$

$$A_{12} = -\frac{1}{4} \cdot m'_k \cdot n_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{12}) \quad (j \neq k)$$

$$A_{12} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{m_1}{m_c} \cdot n_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{12})$$

(10)

$$A_{21} = -\frac{1}{4} \cdot m'_k \cdot n_2 \cdot \alpha_{21} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{21}) \quad (j \neq k)$$

$$A_{21} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{m_2}{m_c} \cdot n_2 \cdot \alpha_{21} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{21})$$

Considerando:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{a_1}{a_2} \\ \bar{\alpha}_{12} &= \alpha_{12} \end{aligned} \quad (11)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{21} &= \alpha_{12} \\ \bar{\alpha}_{21} &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

A_{jj} e A_{jk} são as frequências:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Na expressão m'_k temos a massa do corpo dividido pela massa do planeta. E $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{jk})$ e $b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{jk})$ são os coeficientes de Lagrange.

Podemos escrever os autovalores da matriz A como:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - g & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - g \end{vmatrix}$$

$$g^2 - (A_{11} + A_{22}) \cdot g + (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}) = 0 \quad (14)$$

Para o cálculo dos autovetores $\bar{e}_{11}$, $\bar{e}_{21}$, $\bar{e}_{22}$ e $\bar{e}_{12}$ temos que satisfazer as seguintes equações:

$$\begin{cases} A_{11} \cdot \bar{e}_{11} + A_{12} \cdot \bar{e}_{21} = g_1 \cdot \bar{e}_{11} \\ A_{21} \cdot \bar{e}_{11} + A_{22} \cdot \bar{e}_{21} = g_1 \cdot \bar{e}_{21} \end{cases} \quad (15)$$

e

$$\begin{cases} A_{11} \cdot \bar{e}_{22} + A_{12} \cdot \bar{e}_{12} = g_2 \cdot \bar{e}_{22} \\ A_{21} \cdot \bar{e}_{22} + A_{22} \cdot \bar{e}_{12} = g_2 \cdot \bar{e}_{12} \end{cases} \quad (16)$$

Dessa forma, podemos encontrar os valores de S_1 e S_2 , que são constantes de cada autovetor. Essas constantes são encontradas a partir das condições iniciais do problema.

Sendo as excentricidades dos três corpos pequenas, para $t = 0$ é conveniente definir as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} h_1 &= e_1 \cdot \sin \varpi_1 \\ k_1 &= e_1 \cdot \cos \varpi_1 \\ h_2 &= e_2 \cdot \sin \varpi_2 \\ k_2 &= e_2 \cdot \cos \varpi_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Temos então, uma solução geral:

$$\begin{cases} h_1 = S_1 \cdot \bar{e}_{11} \cdot \sin \beta_1 + S_2 \cdot \bar{e}_{12} \cdot \sin \beta_2 \\ h_2 = S_1 \cdot \bar{e}_{21} \cdot \sin \beta_1 + S_2 \cdot \bar{e}_{22} \cdot \sin \beta_2 \\ k_1 = S_1 \cdot \bar{e}_{11} \cdot \cos \beta_1 + S_2 \cdot \bar{e}_{12} \cdot \cos \beta_2 \\ k_2 = S_1 \cdot \bar{e}_{21} \cdot \cos \beta_1 + S_2 \cdot \bar{e}_{22} \cdot \cos \beta_2 \end{cases} \quad (18)$$

Assim, podemos encontrar os valores de β_1 e β_2 .

E para obter os autovalores:

$$\begin{cases} e_{11} = S_1 \cdot \bar{e}_{11} \\ e_{21} = S_1 \cdot \bar{e}_{21} \\ e_{22} = S_2 \cdot \bar{e}_{22} \\ e_{12} = S_2 \cdot \bar{e}_{12} \end{cases} \quad (19)$$

As equações para h_j e k_j podem ser lidas como:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sum_{i=1}^3 e_{1i} \cdot \sin(g_i t + \beta_i) \\ h_1 &= e_{11} \cdot \sin(g_1 t + \beta_1) + e_{12} \cdot \sin(g_2 t + \beta_2) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \sum_{i=1}^3 e_{1i} \cdot \cos(g_i t + \beta_i) \\ k_1 &= e_{11} \cdot \cos(g_1 t + \beta_1) + e_{12} \cdot \cos(g_2 t + \beta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 &= \sum_{i=1}^3 e_{2i} \cdot \sin(g_i t + \beta_i) \\ h_2 &= e_{21} \cdot \sin(g_1 t + \beta_1) + e_{22} \cdot \sin(g_2 t + \beta_2) \\ k_2 &= \sum_{i=1}^3 e_{2i} \cdot \cos(g_i t + \beta_i) \\ k_2 &= e_{21} \cdot \cos(g_1 t + \beta_1) + e_{22} \cdot \cos(g_2 t + \beta_2) \end{aligned} \quad (21)$$

onde as frequências $g_i (i = 1, 2, 3)$ são autovalores da matriz A e e_{ij} são as componentes correspondentes aos autovetores. As fases β_i e as amplitudes dos autovetores são determinadas pelas condições

iniciais.

Dessas soluções obtemos as excentricidades utilizando a relação:

$$e_1 = \sqrt{h_1^2 + k_1^2} \quad (22)$$

e

$$e_2 = \sqrt{h_2^2 + k_2^2} \quad (23)$$

Através do programa de perturbação secular na linguagem C (MADEIRA, 2019), foi possível encontrar diretamente as equações das excentricidades para diversos casos. E utilizando essas equações encontramos seus respectivos gráficos utilizando o software Mathematica (WOLFRAM, 2019).

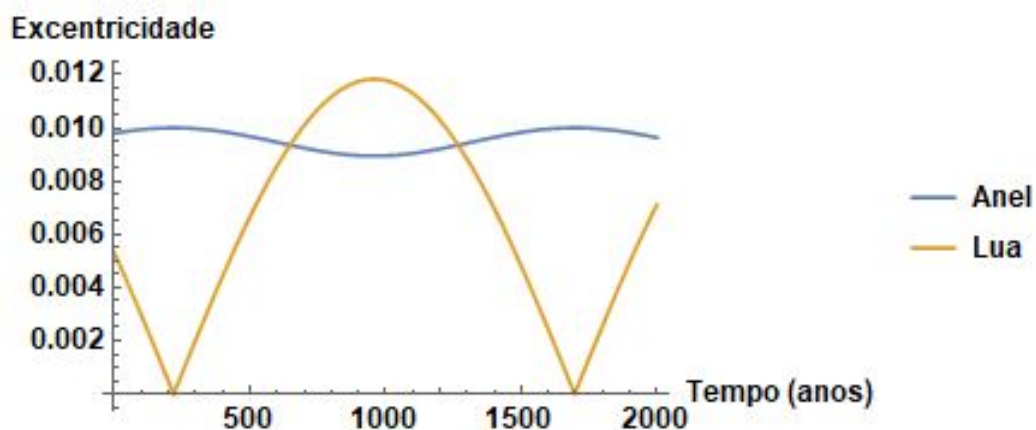
Analizando os gráficos gerados, para diversos casos, alterando os valores de massa, excentricidade e semi-eixo maior para o anel e para a lua, teremos:

Tabela 2 – Dados do Caso 1

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,4 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 0,8 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 6 – Gráfico do Caso 1



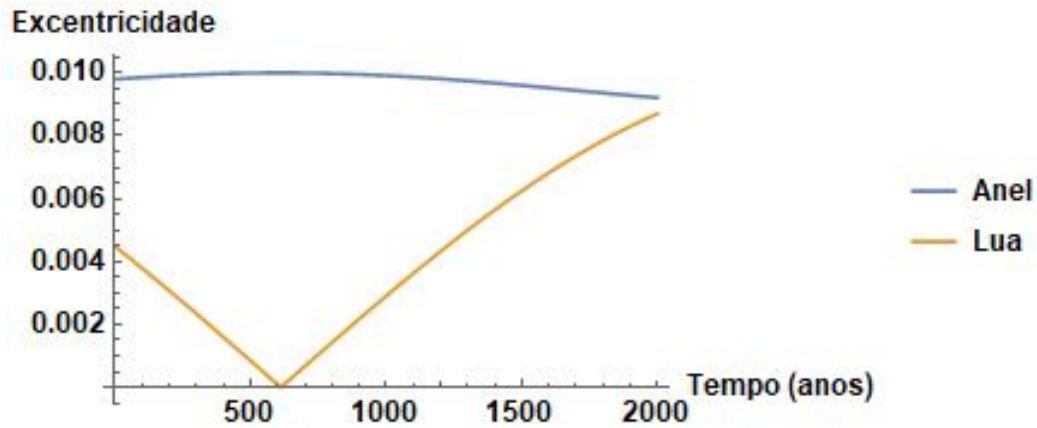
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 3 – Dados do Caso 2

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,4 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 7 – Gráfico do Caso 2



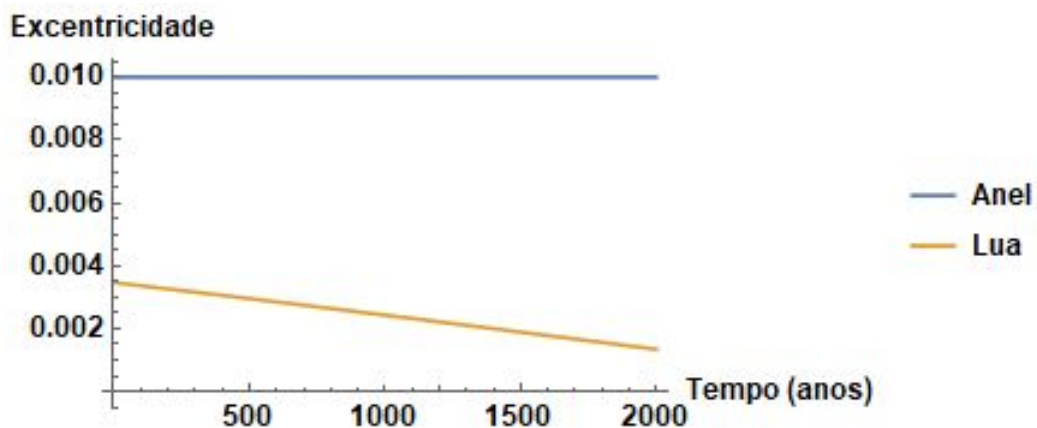
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 4 – Dados do Caso 3

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,4 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1,5 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 8 – Gráfico do Caso 3



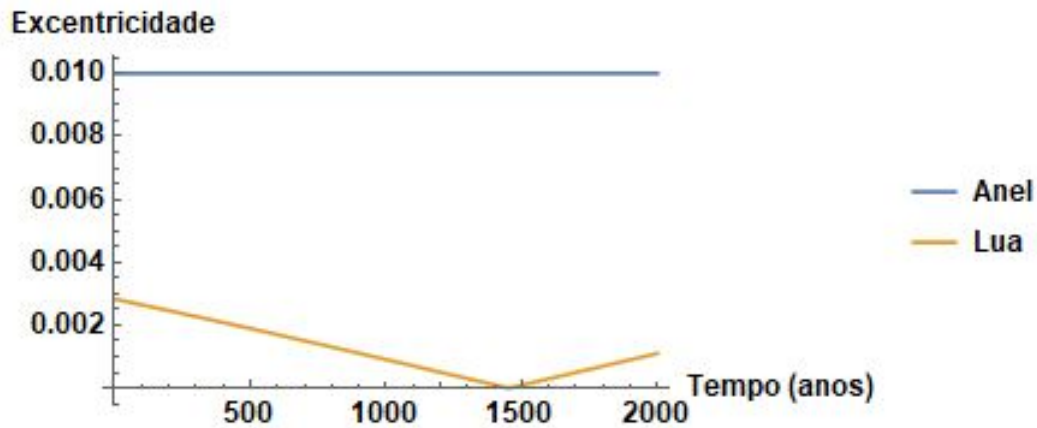
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 5 – Dados do Caso 4

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,2 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 0,8 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 9 – Gráfico do Caso 4



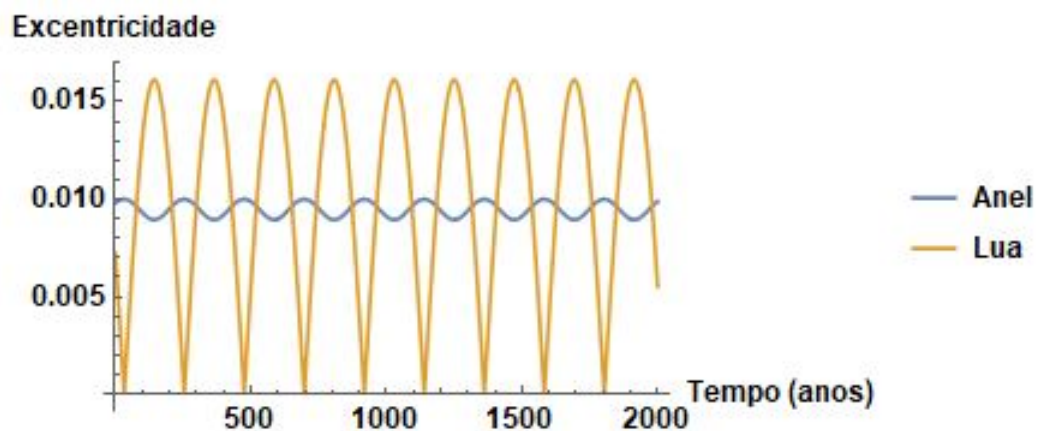
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 6 – Dados do Caso 5

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,6 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 0,8 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 10 – Gráfico do Caso 5



Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 7 – Dados do Caso 6

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,6 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

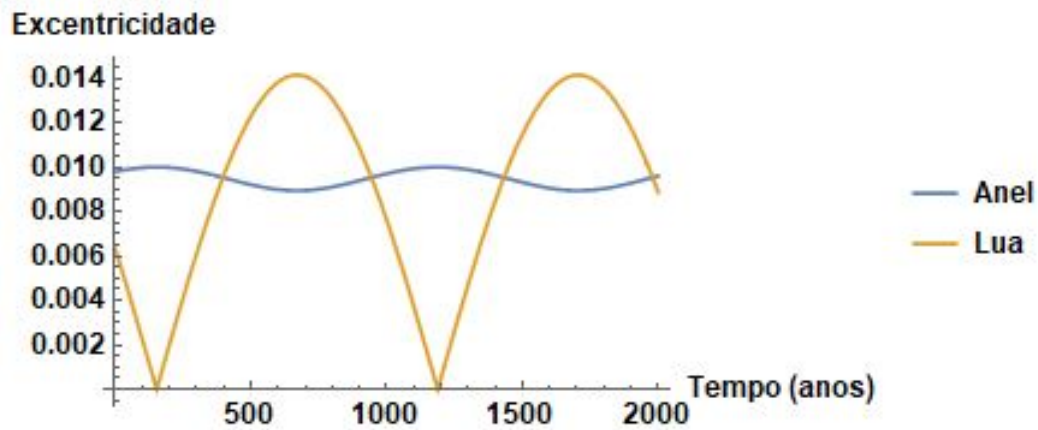
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 8 – Dados do Caso 7

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,6 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1,5 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

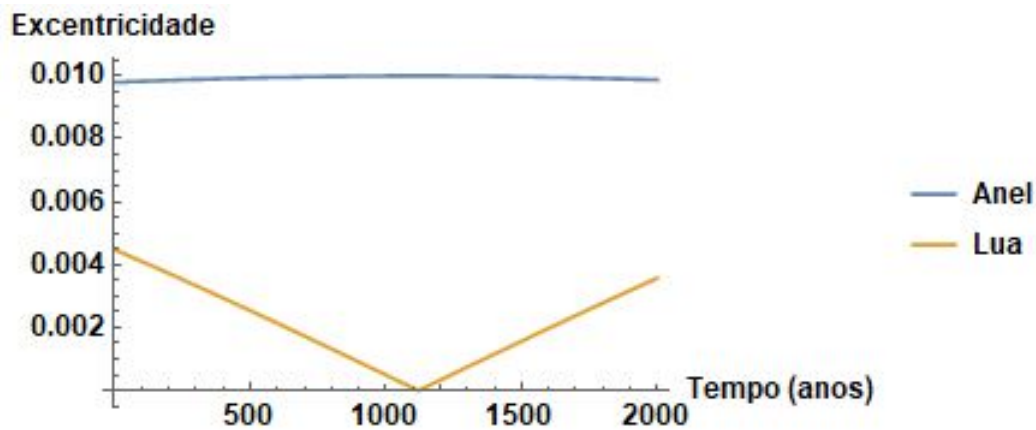
Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 11 – Gráfico do Caso 6



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 12 – Gráfico do Caso 7



Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 9 – Dados do Caso 8

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,2 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 10 – Dados do Caso 9

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,2 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1,5 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-5}$

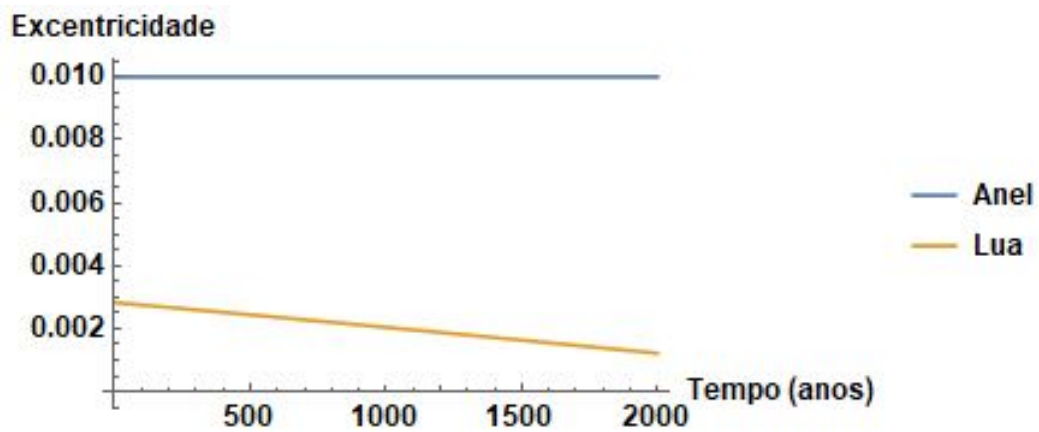
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 11 – Dados do Caso 10

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,2 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 0,8 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

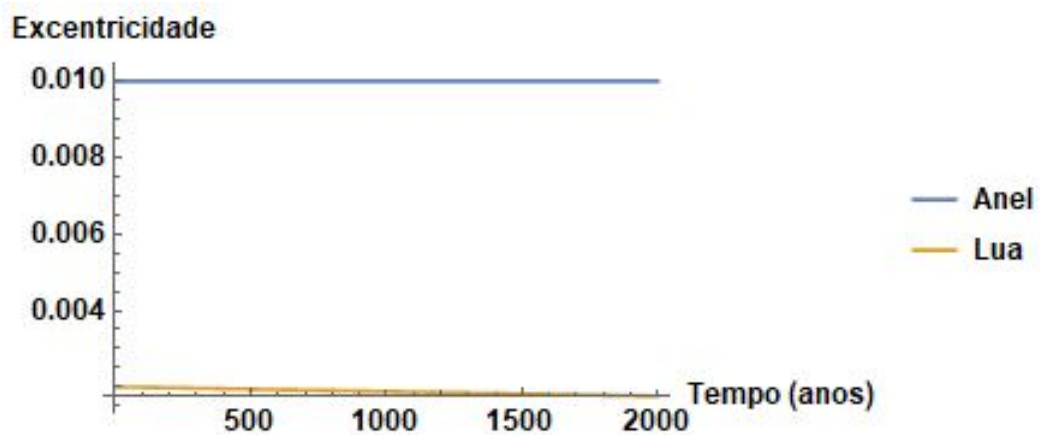
Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 13 – Gráfico do Caso 8



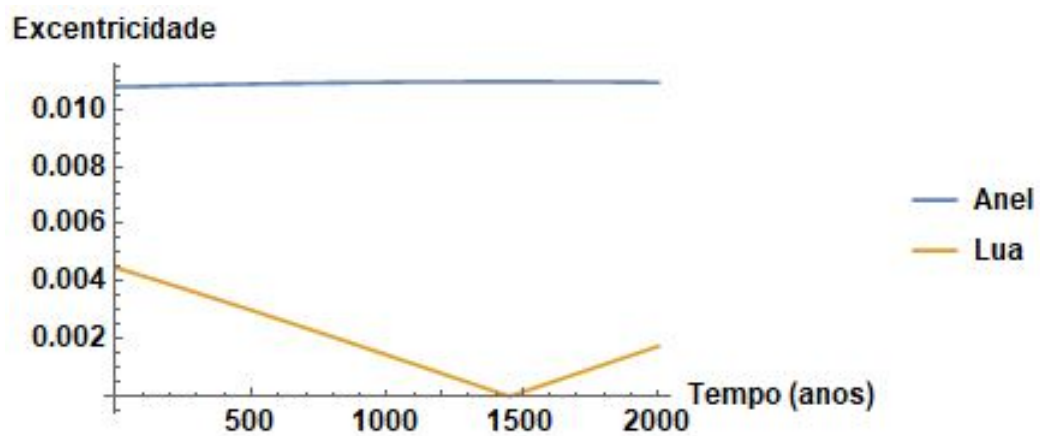
Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 14 – Gráfico do Caso 9



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 15 – Gráfico do Caso 10



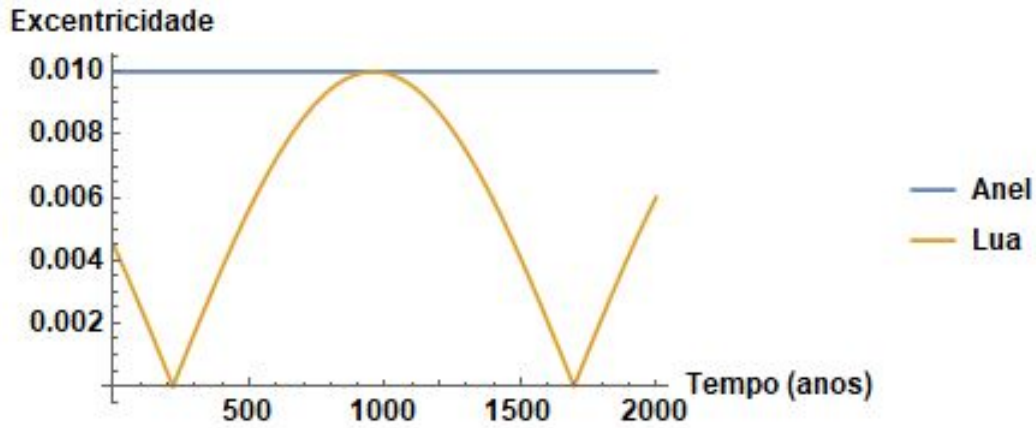
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 12 – Dados do Caso 11

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,4 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 0,8 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 16 – Gráfico do Caso 11



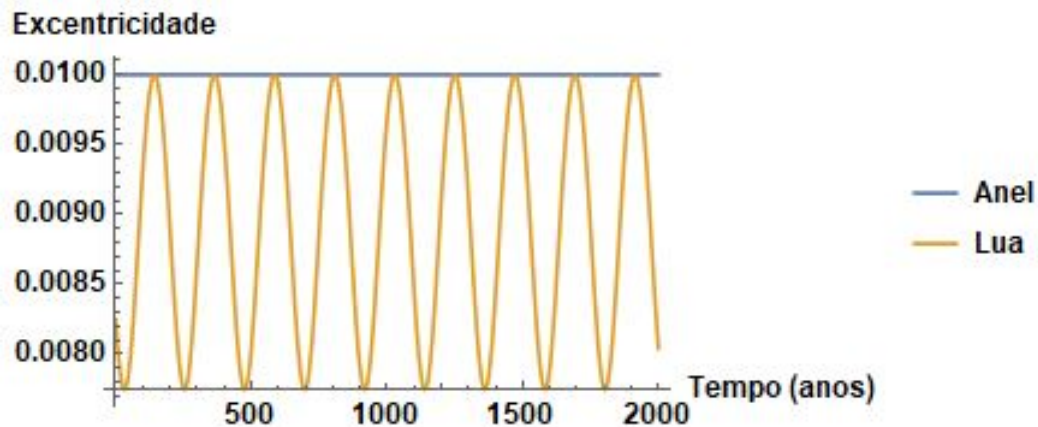
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 13 – Dados do Caso 12

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,6 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 0,8 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{25} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 17 – Gráfico do Caso 12



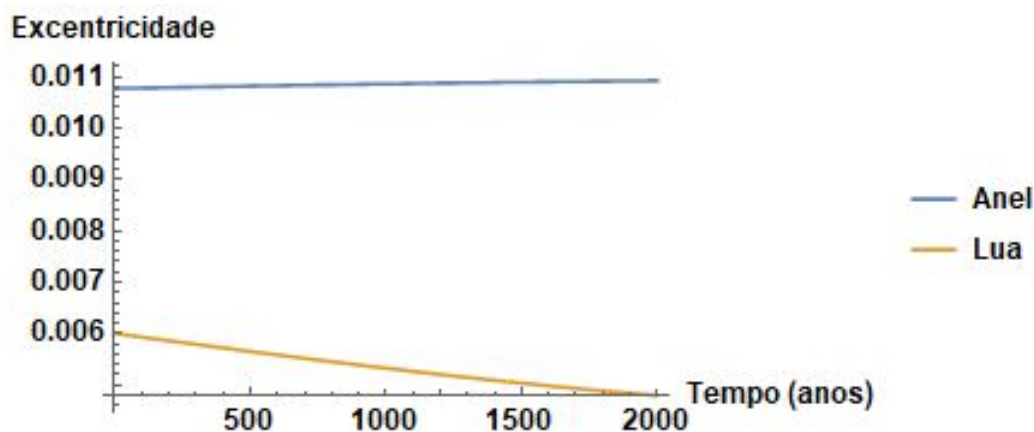
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 14 – Dados do Caso 13

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,2 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 18 – Gráfico do Caso 13



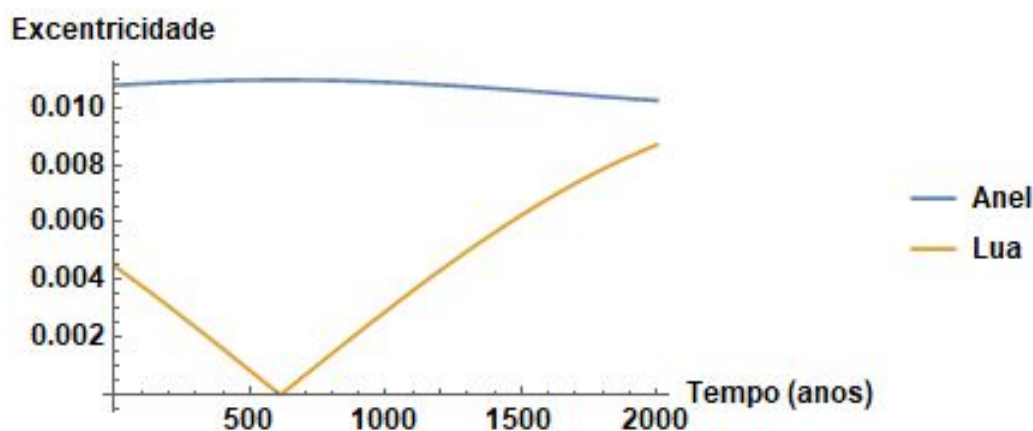
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 15 – Dados do Caso 14

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,4 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 19 – Gráfico do Caso 14



Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 16 – Dados do Caso 15

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,6 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

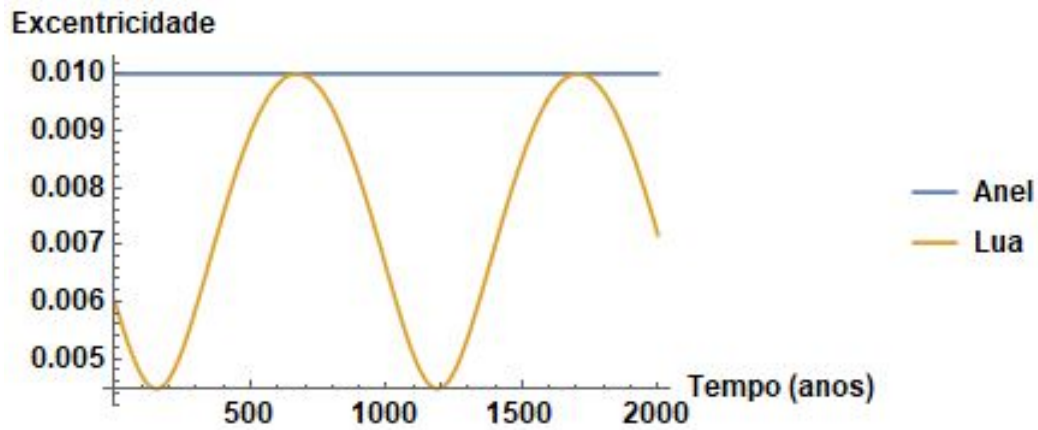
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 17 – Dados do Caso 16

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,2 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1,5 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

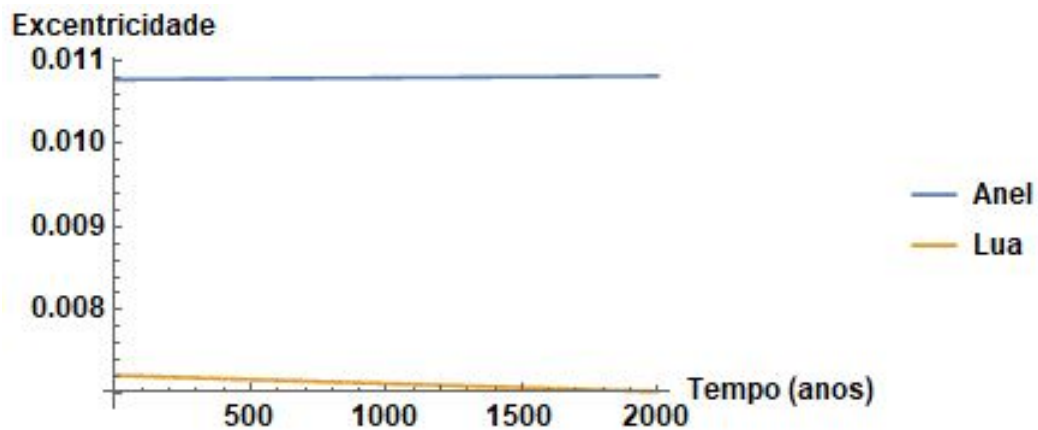
Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 20 – Gráfico do Caso 15



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 21 – Gráfico do Caso 16



Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 18 – Dados do Caso 17

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,4 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1,5 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

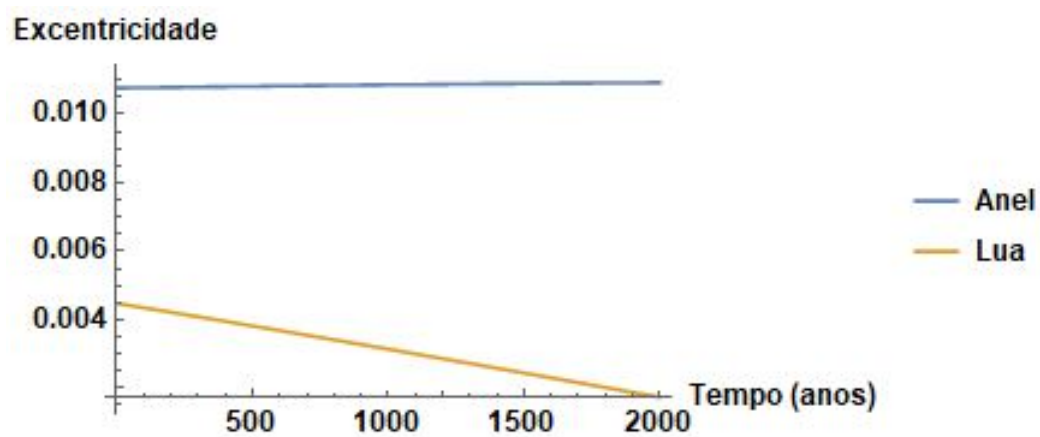
Fonte: Autoria própria (2019).

Tabela 19 – Dados do Caso 18

Corpo	Semi-eixo maior	Massa	Excentricidade
Anel	$a_A = 0,6 \text{ UA}$	$m_A = 7,34 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$e_A = 10^{-3}$
Lua	$a_L = 1,5 \text{ UA}$	$m_L = 4,77 \cdot 10^{23} \text{ kg}$	$e_L = 10^{-3}$

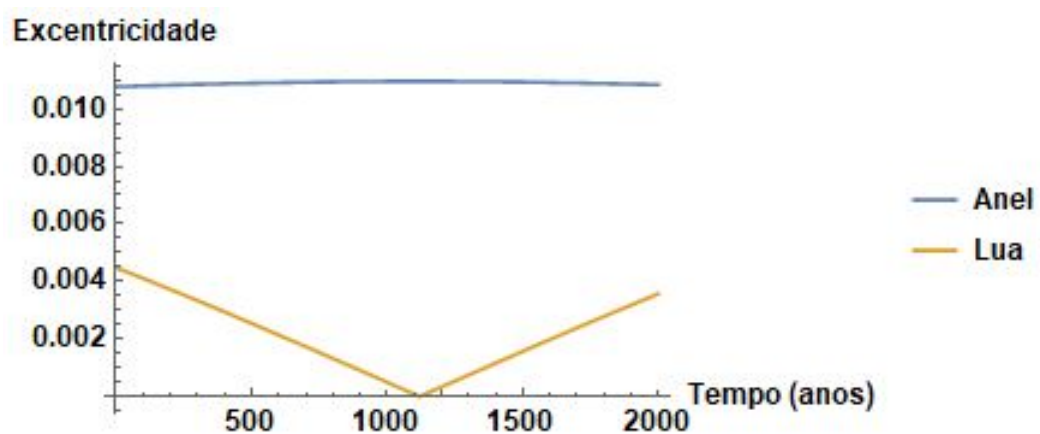
Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 22 – Gráfico do Caso 17



Fonte: Autoria própria (2019).

Figura 23 – Gráfico do Caso 18



Fonte: Autoria própria (2019).

5 DISCUSSÃO

Apresentamos a discussão dos resultados para cada caso.

Casos 1 e 6: A perturbação sofrida pela lua faz com que a excentricidade da partícula seja igual a um. Já a perturbação no anel é quase imperceptível. A diferença entre os dois casos foi a mudança do semi-eixo maior tanto para a lua quanto para o anel.

Caso 5: Assim como nos casos anteriores, a perturbação sofrida pela lua é muito maior que a sofrida pelo anel. Em comparação com o caso 1, houve mudança no semi-eixo maior do anel, e em comparação com o caso 6, a alteração foi no semi-eixo maior da lua.

Casos 2 e 14: Nesses casos obtivemos perturbação em ambos os corpos, porém a perturbação sofrida pela lua foi maior, quase não havendo perturbação no anel. O que difere os dois casos é o valor da excentricidade da lua, de ordem 10^{-2} .

Casos 3, 8, 13 e 17: A lua sofre pequena perturbação considerando o tempo de 2000 anos e o anel quase não sofre perturbação. O que difere os casos 3 e 17 e, 8 e 13, mantendo seus semi-eixos iguais, é o valor da excentricidade da lua, na ordem de 10^{-2} .

Casos 4, 7, 10 e 18: Assim como nos casos anteriores 2 e 14, a perturbação da lua é maior que a do anel. Porém, nesses casos, considerando o tempo de 2000 anos, as perturbações são ainda menores, sendo a do anel, quase imperceptível. A diferença entre os casos 4 e 10 e, 7 e 18, considerando seus semi-eixos iguais, é o valor da excentricidade da lua, de ordem 10^{-2} .

Casos 9 e 16: Considerando o tempo proposto, a perturbação tanto na lua quanto no anel é imperceptível. O que difere os dois casos é a mudança da excentricidade da lua, na ordem de 10^{-2} .

Casos 11, 12 e 15: Nesses casos, claramente a perturbação na lua é maior, sendo quase não observada a perturbação no anel. A diferença entre os três casos são os valores dos semi-eixos maiores dos dois corpos.

6 CONCLUSÃO

O sistema de anéis do exoplaneta J1407b, um gigante gasoso massivo pode afetar pequenos satélites que se encontram ao seu redor. Através da perturbação secular estuda o efeito no valor da excentricidade de um satélite hipotético causado pelo massivo exo anel de J1407b. Devido a sua grande massa o satélite teve sua excentricidade aumentada em várias ordens de grandeza.

REFERÊNCIAS

- ALGARVE, C. C. V. do. **Sistema gigante de anéis em torno de J1407b muito maior e maciço que o de Saturno**. 2015. Disponível em: <http://www.ccvalg.pt/astrologia/noticias/2015/01/27_j1407b.htm.> Acesso em: 23 out. 2019.
- APRENDIZES, O. U. E. **SuperWASP revela um sistema de anéis gigantes em J1407B - 200 vezes maior que os anéis de Saturno**. 2015. Disponível em: <<https://eternosaprendizes.com/2015/01/27/superwasp-revela-um-sistema-de-aneis-gigantes-em-j1407b-200-vezes-maior-que-os-aneis-de-saturno/>.> Acesso em: 13 out. 2019.
- ASTROPT. **Exoplaneta J1407b tem sistema de anéis 200 vezes maior que o de Saturno**. 2015. Disponível em: <<http://www.astropt.org/2015/01/29/exoplaneta-j1407b-tem-sistema-de-aneis-200-vezes-maior-que-o-de-saturno/>.> Acesso em: 13 out. 2019.
- MADEIRA, G. **Programa computacional em linguagem C para cálculo da perturbação secular**. Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá: Unesp - SP, 2019.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. Cambridge - UK: Cambridge University Press, 1999. Acesso em: 13 out. 2019.
- SPACE, T. **Exoplaneta ao redor da estrela J1407 possui um sistema de anéis 200 vezes maior que o de Saturno**. 2015. Disponível em: <<https://spacetoday.com.br/exoplaneta-ao-redor-da-estrela-j1407-possui-um-sistema-de-aneis-200-vezes-maior-do-que-o-de-saturno/>.> Acesso em: 13 out. 2019.
- SUTTON, P. J. Mean motion resonances with nearby moons: an unlikely origin for the gaps observed in the ring around the exoplanet j1407b. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, n. MNRAS 486, p. 1681–1689, 2019. Acesso em: 02 dez. 2019.
- WOLFRAM. **Wolfram Mathematica 11**. 2019. Disponível em: <<https://www.wolfram.com/mathematica/>.> Acesso em: 02 dez. 2019.