UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

CONVERSÃO PARAMÉTRICA ASCENDENTE EM UM SISTEMA DE CAVIDADES ÓPTICAS CRUZADAS

Renata Ariadne Furtado da Rosa

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro (Orientador)

Prof. Dr. Daniel Zini Rossatto (Coorientador)

Rio Claro (SP)

2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

RENATA ARIADNE FURTADO DA ROSA

CONVERSÃO PARAMÉTRICA ASCENDENTE EM UM SISTEMA DE CAVIDADES ÓPTICAS CRUZADAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2026

R788c

Rosa, Renata Ariadne Furtado

Conversão paramétrica ascendente em um sistema de cavidades ópticas cruzadas / Renata Ariadne Furtado Rosa. -- Rio Claro, 2026

51 f. : il., tabs., mapas

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Luiz Antonio Barreiro

Coorientador: Daniel Zini Rossatto

1. Ótica quântica. 2. Eletrodinâmica quântica de cavidades. 3. Cavidades ópticas cruzadas. 4. Conversão paramétrica. 5. Hamiltoniano de Jaynes-Cummings de dois fótons. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

RENATA ARIADNE FURTADO DA ROSA

CONVERSÃO PARAMÉTRICA ASCENDENTE EM UM SISTEMA DE CAVIDADES ÓPTICAS CRUZADAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

Prof. Dr. Danizel Zini Rossatto

Prof. Dr. Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Rio Claro, 20 de outubro de 2026.

gov.br Documento assinado digitalmente
RENATA ARIADNE FURTADO DA ROSA
Data: 08/11/2026 12:36:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Assinatura da aluna

unesp Assinado de forma digital por Luiz Antonio Barreiro:11555927866
Dados: 2026.11.08 12:27:56 -03'00'

Assinatura do orientador

gov.br Documento assinado digitalmente
DANIEL ZINI ROSSATTO
Data: 09/11/2026 13:38:37-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Assinatura do coorientador

Dedico este trabalho à minha família, pelo apoio incondicional
e ao meu gato Washington Gmail, pela companhia
nos dias bons e ruins.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Renato e Alessandra, e a toda a minha família, minha mais sincera gratidão. Sem o amor, os sacrifícios e o apoio incondicional de vocês, nenhuma dessas conquistas seria possível.

Agradeço ao meu namorado, Enzzo, por todo o carinho e incentivo nos últimos anos, e também por tornar meus dias mais coloridos.

Agradeço a minhas amigas e amigos que, longe ou perto, moram no meu coração e fazem meus dias mais felizes e engraçados.

Gostaria de agradecer também ao Daniel e a Tânia, meus orientadores de iniciação científica, por me acompanharem no mundo da pesquisa e me guiarem com tanta paciência e sabedoria ao longo dessa trajetória.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Pró-Reitoria de Pesquisa (PROPe) por acreditarem e viabilizarem as minhas pesquisas ao longo da graduação (proposta 24579- 5/2025 - ICSB).

"Na busca pelo conhecimento, todos os dias algo é adicionado. Na busca pelo Tao, todos os dias algo é deixado para trás."

(Lǎozǐ- Dàodé jīng)

Resumo

O controle e a manipulação da informação quântica são essenciais para o desenvolvimento de redes de computação e comunicação quânticas. Nesse contexto, sistemas de eletrodinâmica quântica de cavidades, compostos por emissores quânticos acoplados a modos ópticos confinados, constituem plataformas promissoras para dispositivos fotônicos quânticos. Recentemente, investigou-se teoricamente a conversão paramétrica descendente em sistemas de cavidades cruzadas. Este trabalho investigou teoricamente, no mesmo sistema, o processo inverso: a conversão paramétrica ascendente. O objetivo foi analisar a dinâmica temporal do sistema e os efeitos da dissipação sobre a conversão determinística de um estado incidente com dois fótons no modo a em um único fóton de maior energia no modo b. Identificamos uma largura temporal ótima do pulso incidente, além de verificarmos um ganho de eficiência à quebra de simetria nas taxas de dissipação das cavidades e no acoplamento atômico. Nossos resultados ajudam a estabelecer métricas teóricas que orientam o desenvolvimento e a identificação de configurações otimizadas para a implementação de novas tecnologias quânticas.

Palavras-chave: Óptica quântica; Cavidades ópticas cruzadas; Conversão paramétrica.

Abstract

The control and manipulation of quantum information are essential for the development of quantum computing and communication networks. In this context, cavity quantum electrodynamics systems, composed of quantum emitters coupled to confined optical modes, constitute promising platforms for quantum photonic devices. Recently, parametric down-conversion in cross-cavity systems has been theoretically investigated. This work theoretically investigated, in the same system, the inverse process: parametric up-conversion. The objective was to analyze the temporal dynamics of the system and the effects of dissipation on the deterministic conversion of a two-photon incident state in mode a into a single, higher-energy photon in mode b. We identified an optimal temporal width for the incident pulse and verified an efficiency gain upon breaking the symmetry in the cavity dissipation rates and atomic coupling. Our results help establish theoretical metrics that guide the development and identification of optimized configurations for the implementation of new quantum technologies.

Keywords: Quantum optics; Crossed optical cavities; Parametric conversion.

Title in English: Parametric up-conversion process in a cross-cavity system

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CQED	–	*Cavity Quantum Electrodynamics* (Eletrodinâmica Quântica de Cavidades)
FWHM	–	*Full Width at Half Maximum* (Largura total à meia altura)
JC	–	Jaynes-Cummings
RK4	–	Método de integração numérica de Runge-Kutta de 4ª ordem
RK45	–	Método de integração de Runge-Kutta de passo adaptativo (Dormand-Prince)
RWA	–	*Rotating-Wave Approximation* (Aproximação de Onda Girante)

LISTA DE SÍMBOLOS

$\hat{a}, \hat{a}^\dagger$	–	Operadores bosônicos de aniquilação e criação (cavidade a)
$\hat{b}, \hat{b}^\dagger$	–	Operadores bosônicos de aniquilação e criação (cavidade b)
σ_+, σ_-	–	Operadores de transição atômica de subida e descida
σ_z	–	Operador de inversão populacional atômica
κ_a, κ_b	–	Taxas de dissipação radiativa (vazamento) das cavidades a e b
Γ	–	Taxa de emissão espontânea atômica para o espaço livre
g_a, g_b	–	Constantes de acoplamento efetivo entre o átomo e as cavidades
ω_c, ω_0	–	Frequências angulares da cavidade e da transição atômica
Δ	–	Dessintonia entre as frequências do átomo e do campo ($\omega_0 - \omega_c$)
Ω	–	Frequência de Rabi do sistema cruzado
H_S	–	Hamiltoniano efetivo do sistema isolado
$\mathcal{L}_S$	–	Superoperador de Liouville da evolução global
$\mathcal{D}[\rho]$	–	Superoperador dissipativo de Lindblad
ρ	–	Matriz densidade (operador estatístico do estado quântico)

Lista de Figuras

1.1 Representação esquemática do sistema atômico de dois níveis. 17

2.1 Esquema do sistema de cavidades cruzadas. 32

3.1 Dinâmica temporal de conversão base para o arranjo em estado não calibrado. 40
3.2 Número total de fótons obtido pela integração temporal dos fluxos de saída associados aos fótons refletidos (cavidade a) e emitidos (cavidade b), em função da largura do pacote incidente. 41
3.3 Diagrama de transições entre os estados quânticos do sistema de cavidades cruzadas. 42
3.4 Mapeamento da eficiência de conversão. 43
3.5 Rastreamento da emissão de alta frequência em resposta à quebra paramétrica do hamiltoniano. 45
3.6 Mapeamento paramétrico avaliando a eficiência de conversão em resposta à otimização simultânea dos espelhos e do acoplamento atômico (para o tempo de pulso ótimo fixado). 46
3.7 Perfil evolutivo do sistema operando na parametrização otimizada integral. 47

Sumário

1 INTRODUÇÃO E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 13
1.1 INTRODUÇÃO 13
1.2 ELETRODINÂMICA QUÂNTICA 14
1.2.1 Quantização do Campo Eletromagnético 15
1.2.2 A Álgebra do Átomo de Dois Níveis 16
1.3 A INTERAÇÃO ÁTOMO-CAMPO 18
1.3.1 O Acoplamento Dipolar e a Representação de Interação 18
1.3.2 O Modelo de Jaynes-Cummings 19
1.3.3 Origem da Interação de Dois Fótons 21
1.3.4 O Hamiltoniano Efetivo de Dois Fótons 21
1.3.5 A Interação Efetiva de Dois Fótons 22
1.4 TEORIA DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS 22
1.4.1 O Hamiltoniano do Reservatório e a Dinâmica Aberta 23
1.4.2 As Aproximações de Born e Markov e a Equação de Lindblad . . 23
1.4.3 Equações Mestras para Estados de Fock Incidentes 26
1.4.4 A Equação Quântica de Langevin e o Formalismo de Input-Output 28
1.4.5 O Hamiltoniano Completo no Referencial de Interação 30

2 METODOLOGIA 31
2.1 O MODELO FÍSICO E A ANÁLISE DO REGIME SIMÉTRICO 31
2.1.1 O Hamiltoniano e o Subespaço Relevante de Excitação 31
2.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA DINÂMICA DE ESPALHAMENTO 33
2.2.1 Limitações da Abordagem Analítica 33
2.2.2 Construção Matricial dos Canais Dissipativos 35
2.2.3 Integração Numérica Adaptativa 37

3 RESULTADOS 39
3.1 O PROTOCOLO DE OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA 39
3.1.1 Dinâmica Base e Otimização Temporal do Pulso 39
3.1.2 Assimetria nas Taxas de Dissipação das Cavidades 41
3.1.3 Quebra de Simetria do Acoplamento Atômico 44
3.1.4 Dinâmica Populacional Otimizada e Eficiência de Conversão 46

4 CONCLUSÕES **48**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **49**

1 INTRODUÇÃO E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 INTRODUÇÃO

O estudo da interação entre luz confinada e matéria, em regimes onde os efeitos quânticos se tornam relevantes, é descrito pela Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED - *Cavity Quantum Electrodynamics*). Ao confinar fótons em ressonadores ópticos, torna-se possível acoplar o campo eletromagnético a emissores de dois níveis em regimes de forte acoplamento, dando acesso a fenômenos não clássicos da luz [1, 2]. O aprofundamento no estudo e no controle dessas interações viabiliza aplicações em redes quânticas, aprimora protocolos de processamento de informação e fundamenta o desenvolvimento de dispositivos fotônicos [1, 3].

Embora a conversão paramétrica em meios não lineares, como cristais ópticos, seja uma técnica estabelecida, sua eficiência depende das características do processo e das condições experimentais. Em particular, conversões envolvendo fótons individuais podem apresentar probabilidades muito reduzidas. Por exemplo, em um experimento de mistura de frequências em um guia de onda não linear, a eficiência global de conversão no regime de fóton único foi estimada em aproximadamente $(1{,}5 \times 10^{-6}\%)$ [4], enquanto outro estudo, baseado em processos não lineares quadráticos em cascata, reportou uma eficiência de cerca de (0,55%) em uma condição experimental de baixa potência de bombeamento [5]. Esses resultados ilustram que, embora a conversão de frequência possa alcançar eficiências elevadas em configurações adequadamente projetadas, determinadas implementações apresentam limitações significativas.

Nesse contexto, torna-se relevante investigar sistemas quânticos alternativos nos quais a conversão de frequência possa ser estudada a partir do controle da interação entre luz e matéria. Em um sistema de cavidades ópticas acopladas a um átomo, a dinâmica da conversão pode ser investigada em função dos parâmetros de interação e das perdas do sistema, permitindo identificar condições que favoreçam a transferência de energia entre os modos ópticos.

Trabalhos recentes na literatura, como as pesquisas conduzidas por Solak *et al.* [3] e Oi [6], abordaram a modelagem da conversão paramétrica descendente (*parametric down-conversion*) em sistemas de cavidades cruzadas. Nesses arranjos, um fóton incidente de maior energia interage com o sistema e gera um par de fótons de menor energia, dividindo a excitação original.

Este trabalho propôs-se a investigar teoricamente o processo inverso no mesmo sistema físico: a conversão paramétrica ascendente (*parametric up-conversion*). O sistema considerado consiste em duas cavidades ópticas ortogonais (denominadas a e b) que interceptam um único átomo de dois níveis em seu centro geométrico, configuração relacionada aos arranjos de cavidades cruzadas estudados na literatura [3]. A interação do átomo com

a cavidade b é descrita pelo modelo usual de Jaynes-Cummings (JC) [1, 7], enquanto o acoplamento com a cavidade a é não linear, do tipo JC de dois fótons [2, 8]. A dinâmica de interesse ocorre quando um pacote de onda contendo dois fótons incide na cavidade a, situação que pode ser descrita no formalismo de estados de Fock de modo contínuo e de pacotes de onda multifóton [9]. Através da absorção simultânea mediada pelo átomo, a energia é convertida, resultando na emissão de um único fóton de maior frequência direcionado para a cavidade b.

Para a descrição teórica dessa dinâmica, o planejamento original baseava-se em uma formulação analítica utilizando as equações de Heisenberg–Langevin e o formalismo de *input–output*, ferramentas usuais para tratar a resposta de sistemas quânticos abertos acoplados a campos incidentes [1, 3, 9]. A estratégia exigia a aplicação da aproximação de Holstein–Primakoff, assumindo o átomo predominantemente no estado fundamental (regime de baixa excitação), procedimento que lineariza as equações de movimento em determinados regimes [3]. Contudo, a presença do termo não linear de acoplamento de dois fótons com a cavidade a tornou o sistema insolúvel por essa via, inviabilizando a obtenção de uma solução analítica fechada. Para contornar essa limitação matemática e obter a dinâmica temporal do sistema aberto, adotou-se uma abordagem numérica fundamentada no formalismo de equações mestras hierárquicas para estados de Fock incidentes, estratégia empregada para modelar a excitação de sistemas com pacotes de onda multifotônicos [9]. A implementação numérica em Python soluciona esse arranjo integrando o conjunto acoplado de operadores densidade, combinando a injeção do pulso temporal com a dinâmica dissipativa regida pela equação de Lindblad.

O objetivo principal deste trabalho foi analisar a evolução temporal do sistema e encontrar condições paramétricas que maximizem a probabilidade de conversão do pulso. Para isso, investigou-se o efeito da variação da largura temporal do pulso incidente e a introdução de assimetrias estruturais nas taxas de dissipação e no acoplamento das cavidades.

1.2 ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

A formulação teórica da interação luz-matéria no interior de ressonadores ópticos exige o tratamento quantizado de ambos os subsistemas. O formalismo matemático fundamenta-se na descrição isolada do campo eletromagnético confinado e do emissor atômico, onde o campo é quantizado em termos de operadores bosônicos, associando os modos normais da cavidade a osciladores harmônicos quânticos, e o sistema material, por sua vez, é reduzido a um modelo de dois níveis, descrito por uma álgebra de operadores análoga à do spin-1/2 [1, 7].

1.2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

A quantização do campo eletromagnético no interior de uma cavidade é realizada mediante a substituição das amplitudes clássicas dos modos normais por operadores mecânico-quânticos. Classicamente, a energia de um modo eletromagnético isolado de frequência angular ω é matematicamente equivalente à de um oscilador harmônico. Nesse formalismo, as amplitudes dos campos elétrico e magnético descrevem, respectivamente, coordenadas generalizadas análogas à posição q e ao momento p de um sistema mecânico [10].

Na transição para a mecânica quântica, essas variáveis canônicas conjugadas são substituídas por operadores hermitianos $\hat{q}$ e $\hat{p}$, que obedecem à relação de comutação fundamental $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Para simplificar a diagonalização do hamiltoniano e a descrição dos autoestados de energia, introduzem-se os operadores não hermitianos de aniquilação, $\hat{a}$, e de criação, $\hat{a}^\dagger$. Esses operadores são definidos a partir de combinações lineares complexas das quadraturas do campo (assumindo a analogia com um oscilador de massa unitária) [7]

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\hat{q} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}}\hat{p}, \tag{1.1}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\hat{q} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}}\hat{p}. \tag{1.2}$$

Como consequência direta dessa definição e do comutador fundamental entre $\hat{q}$ e $\hat{p}$, os novos operadores satisfazem a relação de comutação bosônica canônica

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \tag{1.3}$$

Fisicamente, a aplicação desses operadores sobre o estado do sistema corresponde, respectivamente, à destruição e à criação de um *quantum* de energia (um fóton) no modo considerado. Substituindo as coordenadas generalizadas por $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, o hamiltoniano que descreve a evolução livre desse modo assume a forma diagonal [11].

$$H_F = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \tag{1.4}$$

onde o termo constante $\frac{1}{2}\hbar\omega$ representa a energia de ponto zero, associada às flutuações eletromagnéticas do vácuo quântico.

A representação natural para descrever o estado do campo quantizado é a base de Fock, também denominada base de número. Essa base é constituída pelos autoestados $|n\rangle$ do operador número hermitiano $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, o qual contabiliza a quantidade exata de fótons no ressonador. O estado de energia mínima do campo é o estado de vácuo, $|0\rangle$, formalmente definido pela condição $\hat{a}|0\rangle = 0$. A partir do vácuo, qualquer estado contendo n fótons é construído pela aplicação sucessiva do operador de criação [11].

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{1.5}$$

As ações dos operadores de campo sobre um estado de Fock genérico contendo n fótons são definidas pelas seguintes operações algébricas

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \tag{1.6}$$
$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \tag{1.7}$$
$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \tag{1.8}$$

No contexto de múltiplas cavidades, cada ressonador independente possui seu próprio conjunto de operadores e sua respectiva frequência, operando em espaços de Hilbert independentes. Para sistemas de cavidades cruzadas, essa descrição é estendida a dois modos intracavitários, denotados por a e b, acoplados ao mesmo emissor atômico [3].

1.2.2 A Álgebra do Átomo de Dois Níveis

O sistema é modelado assumindo que o campo eletromagnético interage de forma quase ressonante com apenas dois níveis de energia bem definidos. Define-se um estado fundamental $|g\rangle$ e um estado excitado $|e\rangle$, separados por uma diferença de energia igual a $\hbar\omega_0$.

A dinâmica das transições entre esses níveis é formalizada por operadores construídos a partir da álgebra análoga à do spin-1/2, operando em um espaço de Hilbert bidimensional. Definem-se os operadores de transição atômica de subida, σ_+, e de descida, σ_-,

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \tag{1.9}$$
$$\sigma_- = |g\rangle\langle e|. \tag{1.10}$$

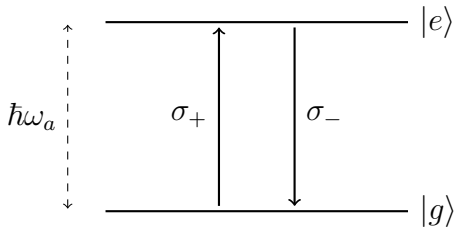
Fisicamente, conforme ilustrado na Figura 1.1, a aplicação do operador σ_+ representa a excitação do átomo para o estado superior, enquanto o operador σ_- descreve o decaimento para o estado fundamental. A inversão populacional do sistema é quantificada pelo operador diagonal σ_z, dado por

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|. \tag{1.11}$$

Na representação matricial, adotando a base canônica ordenada $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, os autoestados atômicos assumem a forma de vetores coluna ortonormais

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Figura 1.1: Representação esquemática do sistema atômico de dois níveis.



Fonte: Autora (2026).
Nota: A transição do nível inferior $|g\rangle$ para o estado excitado $|e\rangle$ é regida pelo operador de subida σ_+, enquanto o decaimento inverso é descrito pelo operador de descida σ_-. A separação energética entre os níveis corresponde a $\hbar\omega_a$.

Nesta base, os operadores atômicos são identificados com as matrizes de Pauli 2×2. Os operadores de coerência hermitianos σ_x e σ_y, juntamente com o operador de inversão σ_z, são explicitamente representados por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Consequentemente, os operadores de transição não hermitianos tomam a forma estritamente não diagonal

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Ao estabelecer a origem da escala de energia no ponto médio entre os estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$, o hamiltoniano que descreve a evolução livre do átomo isolado assume a forma diagonal

$$H_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z. \tag{1.15}$$

Além da energia própria, a interação do átomo com campos eletromagnéticos externos é descrita, na aproximação de dipolo, através do seu momento de dipolo elétrico. Assumindo que os estados atômicos possuem paridades bem definidas (elementos de matriz diagonais nulos) e que o elemento de transição de dipolo μ é puramente real, o operador momento de dipolo elétrico $\hat{\mu}$ do átomo é definido em termos das coerências do sistema

$$\hat{\mu} = \mu(\sigma_+ + \sigma_-) = \mu\sigma_x. \tag{1.16}$$

Decorrente diretamente da ortonormalidade da base atômica (onde $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$), esses operadores obedecem a relações de comutação e anticomutação específicas, fundamentais

para a estruturação algébrica do hamiltoniano de acoplamento

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z, \tag{1.17}$$

$$[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm, \tag{1.18}$$

$$\{\sigma_+, \sigma_-\} = \mathbb{I}, \tag{1.19}$$

onde $\mathbb{I}$ representa a matriz identidade 2×2 no subespaço atômico.

1.3 A INTERAÇÃO ÁTOMO-CAMPO

Esta seção dedica-se a construir o formalismo matemático que descreve a troca de energia entre o emissor atômico e os modos quantizados das cavidades. A partir da interação dipolar básica, desenvolve-se o modelo linear de Jaynes-Cummings e, subsequentemente, generaliza-se o tratamento para incluir o acoplamento não linear de dois fótons característico do sistema de cavidades cruzadas abordado neste trabalho [1, 2, 7].

1.3.1 O Acoplamento Dipolar e a Representação de Interação

Na representação de Schrödinger, a interação dipolar elétrica entre o átomo de dois níveis e um modo genérico do campo eletromagnético é governada pelo hamiltoniano $H_I = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0)$, onde $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0)$ representa o operador campo elétrico avaliado na posição $\mathbf{r}_0$ do centro de massa atômico. Essa forma constitui o ponto de partida usual para a descrição da interação entre um sistema de dois níveis e um modo quantizado da cavidade [11, 12].

A partir do operador momento de dipolo estabelecido na Equação 1.16, adota-se a forma vetorial $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_{eg}(\sigma_+ + \sigma_-)$. Analogamente, o operador campo elétrico quantizado é expresso em termos dos operadores bosônicos da cavidade como $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0) = \boldsymbol{\epsilon}\mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$. Definindo a constante de acoplamento com o vácuo como $g = -(\boldsymbol{\mu}_{eg} \cdot \boldsymbol{\epsilon})\mathcal{E}_0/\hbar$, a expansão algébrica do produto escalar resulta no hamiltoniano independente do tempo:

$$H_I = \hbar g \left(\sigma_+ + \sigma_-\right)\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right). \tag{1.20}$$

A estrutura desse hamiltoniano contém simultaneamente os termos de troca de excitação e os termos contragirantes, sendo a forma completa associada ao modelo de Rabi antes da aplicação da aproximação de onda girante [13].

Para justificar matematicamente a eliminação de termos na interação, é necessário isolar a dinâmica gerada exclusivamente pelo acoplamento. Para isso, transita-se para a representação de interação (formalismo de Dirac). Nessa representação, particiona-se o hamiltoniano em uma componente livre, $H_0 = \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z$, e uma componente de interação, H_I. O formalismo estabelece que os operadores evoluem sob a ação exclusiva de H_0, enquanto a dependência temporal associada à interação é transferida para o hamil-

toniano de interação. Essa representação é particularmente conveniente para distinguir os termos ressonantes dos termos contragirantes [14].

A transformação unitária de um operador O para a representação de interação é definida por $O(t) = e^{iH_0 t/\hbar} O e^{-iH_0 t/\hbar}$. Como os operadores atômicos atuam no subespaço interno do átomo e os operadores do campo atuam no espaço de Fock, eles comutam entre si. Consequentemente, para o hamiltoniano livre adotado, a evolução unitária pode ser fatorizada como $e^{\pm iH_0 t/\hbar} = e^{\pm i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t} e^{\pm i\omega_0 \sigma_z t/2}$.

A aplicação dessa transformação aos operadores de aniquilação e de transição atômica exige a utilização das relações de comutação aliadas ao lema de Baker-Campbell-Hausdorff. Para os operadores do modo bosônico, a transformação resulta em

$$\hat{a}(t) = e^{i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{-i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\omega_c t}, \tag{1.21}$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a}^\dagger e^{i\omega_c t}. \tag{1.22}$$

De forma análoga, utilizando a álgebra do subespaço de spin para os operadores atômicos, obtém-se

$$\sigma_+(t) = e^{i\omega_0 \sigma_z t/2} \sigma_+ e^{-i\omega_0 \sigma_z t/2} = \sigma_+ e^{i\omega_0 t}, \tag{1.23}$$

$$\sigma_-(t) = e^{i\omega_0 \sigma_z t/2} \sigma_- e^{-i\omega_0 \sigma_z t/2} = \sigma_- e^{-i\omega_0 t}. \tag{1.24}$$

Ao substituir as formas dependentes do tempo (Equações 1.21 a 1.24) no hamiltoniano de interação $H_I(t)$, a comutação entre operadores de subsistemas distintos permite agrupar as exponenciais complexas de acordo com as frequências naturais de cada subsistema. O hamiltoniano de interação na representação de Dirac assume, portanto, a forma explícita

$$H_I(t) = \hbar g \left(\sigma_+ \hat{a} e^{i(\omega_0 - \omega_c)t} + \sigma_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_0 + \omega_c)t} + \sigma_- \hat{a} e^{-i(\omega_0 + \omega_c)t} + \sigma_- \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega_c)t} \right). \tag{1.25}$$

1.3.2 O Modelo de Jaynes-Cummings

A Equação 1.25 revela a coexistência de duas escalas temporais distintas na dinâmica de interação entre o átomo e o campo. Os termos $\sigma_+ \hat{a}^\dagger$ e $\sigma_- \hat{a}$, denominados termos contragirantes, evoluem segundo fatores exponenciais proporcionais a $e^{\pm i(\omega_0 + \omega_c)t}$. Como a soma das frequências naturais do átomo e da cavidade é tipicamente muito superior à constante de acoplamento do sistema, isto é,

$$g \ll \omega_0, \omega_c, \tag{1.26}$$

esses processos apresentam oscilações extremamente rápidas quando comparadas à escala temporal característica da troca de energia entre os subsistemas. Consequentemente, sua contribuição média para a dinâmica torna-se desprezível ao longo dos tempos de interesse experimental, podendo ser eliminada sem alterar significativamente a evolução efetiva do

sistema. Essa simplificação constitui a Aproximação de Onda Girante (*Rotating-Wave Approximation* – RWA) [1, 7].

Em contraposição, os operadores $\sigma_+\hat{a}$ e $\sigma_-\hat{a}^\dagger$ evoluem segundo fatores exponenciais dependentes da dessintonia

$$\Delta = \omega_0 - \omega_c. \tag{1.27}$$

Na condição de ressonância ou quase-ressonância ($\Delta \approx 0$), esses termos apresentam oscilações lentas quando comparadas às dos termos contragirantes, dominando a dinâmica efetiva do sistema. Fisicamente, eles descrevem processos de troca coerente de excitação entre o átomo e o campo.

A separação das escalas temporais observada na representação de interação fundamenta o truncamento do hamiltoniano original. Retornando à representação de Schrödinger e preservando apenas os termos ressonantes, obtém-se o hamiltoniano de interação do modelo de Jaynes-Cummings,

$$H_I^{JC} = \hbar g \left(\sigma_+\hat{a} + \sigma_-\hat{a}^\dagger\right). \tag{1.28}$$

A estrutura desse hamiltoniano restringe a dinâmica a pares específicos de estados do espaço de Hilbert composto. Considerando a base produto $|i, n\rangle$, onde $i \in \{g, e\}$ representa o estado atômico e n corresponde ao número de fótons presentes na cavidade, o operador $\sigma_+\hat{a}$ acopla os estados $|g, n\rangle$ e $|e, n-1\rangle$, descrevendo a absorção de um fóton pelo átomo. De forma análoga, o operador $\sigma_-\hat{a}^\dagger$ conecta os estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$, representando a criação de um fóton na cavidade associada à deexcitação atômica.

Uma consequência importante dessa estrutura é a conservação do número total de excitações do sistema, definido pelo operador

$$N = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \sigma_+\sigma_-. \tag{1.29}$$

De fato, verifica-se que

$$[H_{JC}, N] = 0, \tag{1.30}$$

indicando que a dinâmica permanece confinada a subespaços de excitação fixa. Essa propriedade constitui uma das principais características do modelo de Jaynes-Cummings e será particularmente relevante para a construção do hamiltoniano efetivo de dois fótons discutido na próxima subseção.

Somando-se o termo de interação às contribuições de evolução livre do átomo e do campo, obtém-se o hamiltoniano completo de Jaynes-Cummings para o sistema fechado

$$H_{JC} = \hbar\omega_c\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar g\left(\sigma_+\hat{a} + \sigma_-\hat{a}^\dagger\right). \tag{1.31}$$

Proposto originalmente por Jaynes e Cummings em 1963, esse hamiltoniano tornou-se um dos modelos fundamentais da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades por fornecer

uma descrição simples e quantitativamente precisa da troca coerente de excitações entre um sistema atômico de dois níveis e um único modo quantizado do campo eletromagnético [7].

1.3.3 Origem da Interação de Dois Fótons

O modelo de Jaynes-Cummings descreve a troca coerente de uma única excitação entre um átomo de dois níveis e um modo quantizado do campo. Entretanto, diversos sistemas de CQED apresentam processos não lineares nos quais a excitação atômica ocorre mediante a absorção simultânea de dois fótons. Esses fenômenos não podem ser descritos pelo hamiltoniano linear de Jaynes-Cummings e exigem a consideração de níveis atômicos adicionais.

A realização física mais simples desse mecanismo envolve um sistema de três níveis composto por um estado fundamental $|g\rangle$, um estado intermediário $|i\rangle$ e um estado excitado $|e\rangle$. O campo eletromagnético acopla apenas as transições adjacentes $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, com constantes de acoplamento g_1 e g_2, respectivamente. O hamiltoniano de interação pode então ser escrito como

$$H_I = \hbar g_1 \left(|i\rangle\langle g| \, \hat{a} + |g\rangle\langle i| \, \hat{a}^\dagger \right) + \hbar g_2 \left(|e\rangle\langle i| \, \hat{a} + |i\rangle\langle e| \, \hat{a}^\dagger \right). \tag{1.32}$$

Supondo que o estado intermediário esteja fortemente dessintonizado em relação ao campo, isto é,

$$|\Delta_i| \gg g_1, g_2, \tag{1.33}$$

a população de $|i\rangle$ permanece desprezível durante toda a evolução temporal. Nessa situação, o estado intermediário atua apenas como um estado virtual de passagem, não sendo efetivamente ocupado pelo sistema.

1.3.4 O Hamiltoniano Efetivo de Dois Fótons

A eliminação adiabática desse grau de liberdade intermediário pode ser realizada por meio da teoria de perturbação de segunda ordem ou por uma transformação de Schrieffer–Wolff. Como resultado, obtém-se uma descrição efetiva envolvendo apenas os subespaços dos estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$. Os dois processos lineares sucessivos são condensados em uma única interação não linear, cuja intensidade é proporcional ao produto dos acoplamentos originais dividido pela dessintonia do estado intermediário,

$$g_a \propto \frac{g_1 g_2}{\Delta_i}. \tag{1.34}$$

A dinâmica resultante descreve a absorção ou emissão simultânea de pares de fótons sem a necessidade de rastrear explicitamente a evolução do estado intermediário. O

hamiltoniano efetivo correspondente assume a forma

$$H_{2f} = \hbar g_a \left(\sigma_+ \hat{a}^2 + \sigma_- (\hat{a}^\dagger)^2\right), \tag{1.35}$$

onde os operadores σ_+ e σ_- atuam no subespaço efetivo formado pelos estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$. Diferentemente do modelo de Jaynes-Cummings convencional, a dinâmica de interação restringe-se à absorção e emissão acoplada em pares de fótons, o que confere ao sistema uma evolução temporal não linear.

É interessante mencionar que esse tipo de interação pode ser construída nativamente, em vez de perturbativamente, em sistemas de eletrodinâmica quântica de circuitos supercondutores [2, 13, 15]

1.3.5 A Interação Efetiva de Dois Fótons

No sistema de cavidades cruzadas abordado neste trabalho, o hamiltoniano H_{2f} modela o acoplamento do átomo com o modo da cavidade a. A topologia algébrica de H_{2f} impõe a ocorrência exclusiva de saltos quânticos pareados no espaço de Fock. A avaliação dos elementos de matriz revela que a magnitude dessa interação possui uma dependência não linear severa com o número de fótons incidentes.

A atuação do operador sobre um estado produto genérico $|g, n\rangle$ demonstra que a excitação atômica e a aniquilação fotônica ocorrem com uma amplitude de transição dada por

$$\sigma_+ \hat{a}^2 |g, n\rangle = \sqrt{n(n-1)}|e, n-2\rangle. \tag{1.36}$$

Inversamente, a emissão pareada acopla os estados com uma amplitude associada à criação fotônica

$$\sigma_- (\hat{a}^\dagger)^2 |e, n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2)}|g, n+2\rangle. \tag{1.37}$$

A presença dos fatores $\sqrt{n(n-1)}$ mostra que o acoplamento é nulo para o vácuo ($n = 0$) e para o estado de um fóton ($n = 1$). O processo de conversão ascendente, portanto, só é desencadeado quando há superposição com estados contendo dois ou mais fótons na cavidade a. Esta não linearidade impede a linearização das equações de movimento de Heisenberg via métodos convencionais, como a aproximação de Holstein-Primakoff, motivando o tratamento numérico via equações mestras para estados de Fock incidentes no desenvolvimento deste estudo.

1.4 TEORIA DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS

A dinâmica hamiltoniana descrita nas seções anteriores assume o confinamento ideal do campo e do átomo, criando uma evolução puramente unitária e reversível. Contudo, ressonadores ópticos reais apresentam espelhos com transmitância finita, e emissores atômicos estão sujeitos ao decaimento espontâneo para modos do espaço livre. A modelagem

de experimentos de CQED exige a transição para a formulação de sistemas abertos, na qual o sistema de interesse interage continuamente com um ambiente externo, resultando em dissipação de energia e decoerência.

1.4.1 O Hamiltoniano do Reservatório e a Dinâmica Aberta

A abordagem canônica para a dissipação quântica particiona o universo em dois subsistemas acoplados: o sistema principal S (as cavidades cruzadas e o átomo) e o reservatório ambiental R (o contínuo de modos eletromagnéticos externos). A evolução global é ditada pelo hamiltoniano total $H_{total} = H_S + H_R + H_{S-R}$, onde H_S governa a dinâmica fechada, H_R descreve o contínuo de modos eletromagnéticos do ambiente e H_{S-R} quantifica a interação de fronteira [16].

O ambiente óptico é modelado como um reservatório bosônico infinito, composto por um contínuo de osciladores harmônicos independentes com frequências ω_k e operadores de criação e aniquilação $\hat{b}_k^\dagger$ e $\hat{b}_k$. O hamiltoniano livre do reservatório assume a forma diagonal

$$H_R = \sum_k \hbar\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k. \tag{1.38}$$

A perda de fótons através dos espelhos da cavidade c (onde $c \in \{a, b\}$) ocorre via acoplamento linear entre o modo interno e o contínuo externo. Na aproximação de onda girante, o hamiltoniano de interação H_{S-R} descreve a conservação local de excitações na interface

$$H_{S-R} = i\hbar \sum_k \kappa_k \left(\hat{c}^\dagger \hat{b}_k - \hat{c}\, \hat{b}_k^\dagger \right), \tag{1.39}$$

onde κ_k representa a constante de acoplamento específica para o modo k do reservatório. A evolução temporal do estado global do universo é descrita pela matriz densidade total $\rho_{total}(t)$, governada pela Equação de von Neumann

$$\frac{d}{dt}\rho_{total}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_{total}, \rho_{total}(t)]. \tag{1.40}$$

Como os graus de liberdade do ambiente não são monitorados experimentalmente, a descrição foca na dinâmica do subsistema S. A matriz densidade reduzida do sistema é obtida pela operação de traço parcial sobre os estados do reservatório: $\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_R\{\rho_{total}(t)\}$. O formalismo de sistemas abertos busca derivar uma equação de movimento fechada para $\rho_S(t)$ que incorpore a dissipação gerada pelo termo de interação, eliminando a dependência explícita das variáveis do ambiente.

1.4.2 As Aproximações de Born e Markov e a Equação de Lindblad

A dinâmica da dissipação é obtida partindo da equação de von Neumann na representação de interação, referencial no qual os operadores absorvem a evolução livre do sistema

isolado. A equação governada pelo hamiltoniano de acoplamento $\tilde{H}_{S-R}(t)$ é dada por

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_{total}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H}_{S-R}(t), \tilde{\rho}_{total}(t)]. \tag{1.41}$$

Ao integrar esta equação diferencial desde o instante $t_0 = 0$ até um instante t, o resultado é

$$\tilde{\rho}_{total}(t) = \tilde{\rho}_{total}(0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'[\tilde{H}_{S-R}(t'), \tilde{\rho}_{total}(t')]. \tag{1.42}$$

Para isolar a dinâmica do subsistema, basta substituir esta expressão de volta na equação de von Neumann diferencial e aplicar o operador de traço parcial sobre o espaço de Hilbert do reservatório (Tr_R). Assumindo que no instante $t = 0$ o sistema e o ambiente estão descorrelacionados, de forma que o traço do termo linear se anula, a equação se reduz a

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t dt' \mathrm{Tr}_R\left\{\left[\tilde{H}_{S-R}(t), \left[\tilde{H}_{S-R}(t'), \tilde{\rho}_{total}(t')\right]\right]\right\}. \tag{1.43}$$

A Equação 1.43 é integro-diferencial. A presença do termo $\tilde{\rho}_{total}(t')$ no interior da integral no tempo dt' indica que a variação de $\tilde{\rho}_S$ depende do histórico contínuo da evolução conjunta do universo.

Para resolver o traço espacial na integral, o hamiltoniano de interação é expresso como um produto tensorial de operadores do sistema e do reservatório: $\tilde{H}_{S-R}(t) = \hbar\sum_j \tilde{S}_j(t) \otimes \tilde{R}_j(t)$. Ao substituir esta definição e expandir linearmente o duplo comutador, a Equação 1.43 resulta exatamente na soma de quatro termos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = -\sum_{i,j}\int_0^t dt' \mathrm{Tr}_R\Big\{ & \tilde{S}_i(t)\tilde{S}_j(t')\tilde{R}_i(t)\tilde{R}_j(t')\tilde{\rho}_{total}(t') \\ & -\tilde{S}_i(t)\tilde{\rho}_{total}(t')\tilde{S}_j(t')\tilde{R}_i(t)\tilde{R}_j(t') \\ & -\tilde{S}_j(t')\tilde{\rho}_{total}(t')\tilde{S}_i(t)\tilde{R}_j(t')\tilde{R}_i(t) \\ & +\tilde{\rho}_{total}(t')\tilde{S}_j(t')\tilde{S}_i(t)\tilde{R}_j(t')\tilde{R}_i(t)\Big\}.\end{aligned} \tag{1.44}$$

A insolubilidade analítica da Equação 1.44 reside no fato de que o operador de traço parcial, Tr_R, não pode atuar isoladamente sobre os operadores de reservatório $\tilde{R}_i(t)\tilde{R}_j(t')$. Como a matriz global $\tilde{\rho}_{total}(t')$ codifica o emaranhamento entre as cavidades e o espaço livre, os subespaços S e R são algebricamente inseparáveis dentro do traço. É neste ponto que a introdução da **Aproximação de Born** (limite de acoplamento fraco) se torna matematicamente necessária. A premissa é que, por possuir infinitos graus de liberdade, a emissão ou absorção de um fóton pelo sistema não perturba o reservatório do seu estado de equilíbrio termodinâmico, ρ_R. Essa hipótese permite fatorizar a matriz global para todos os instantes passados t', substituindo $\tilde{\rho}_{total}(t')$ por $\tilde{\rho}_S(t') \otimes \rho_R$.

A fatoração quebra o emaranhamento no integrando. Consequentemente, o traço sobre o reservatório pode ser fatorado e atuará exclusivamente sobre a matriz ρ_R, o que define o

valor esperado para os operadores de campo, $\mathrm{Tr}_R\{\tilde{R}_i(t)\tilde{R}_j(t')\rho_R\} = \langle\tilde{R}_i(t)\tilde{R}_j(t')\rangle_R$. Esse valor esperado corresponde à função de correlação temporal do reservatório eletromagnético, denotada por $C_{ij}(t,t')$.

Para uma cavidade acoplada aos modos eletromagnéticos externos, os graus de liberdade do ambiente são os osciladores harmônicos do espaço livre, $\hat{b}_k$. A função de correlação associada à aniquilação e criação de fótons pelo ambiente depende apenas da diferença temporal $\tau = t - t'$, assumindo a forma de um somatório sobre todos os modos k

$$C(\tau) = \sum_k |\kappa_k|^2 e^{-i\omega_k\tau}, \tag{1.45}$$

onde κ_k são as constantes de acoplamento do ressonador com cada modo. Ao substituir as funções de correlação de volta na Equação 1.44, a evolução temporal de $\tilde{\rho}_S(t)$ torna-se proporcional à integral no tempo do produto entre a matriz do sistema passado e $C(\tau)$.

A estrutura temporal do decaimento é determinada pelo comportamento de $C(\tau)$. No limite do contínuo, o somatório sobre os modos k é convertido em uma integral sobre as frequências ω, ponderada pela densidade de estados do espaço livre, $D(\omega)$,

$$C(\tau) = \int_0^\infty d\omega D(\omega)|\kappa(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau}. \tag{1.46}$$

Na aproximação de óptica quântica de Weisskopf-Wigner, o produto $D(\omega)|\kappa(\omega)|^2$ é considerado aproximadamente constante (um espectro plano de frequências) na vizinhança de um modo de interesse da cavidade. Matematicamente, a transformada de Fourier de uma constante resulta em uma função delta de Dirac. Portanto, $C(\tau) \propto \delta(\tau)$.

O resultado $C(\tau) \propto \delta(t - t')$ demonstra que o tempo característico para o reservatório perder a correlação com flutuações passadas (τ_R) tende a zero. O reservatório não retém memória da excitação. Em contrapartida, as variáveis do sistema evoluem em uma escala de tempo τ_S ditada pelas frequências naturais ω_c e taxas de dissipação macroscópicas κ, implicando a condição $\tau_R \ll \tau_S$.

Essa diferença estrita de escalas e o limite da função delta fundamentam a **Aproximação de Markov**. Como a função de correlação $C(t - t')$ é não nula apenas para $t' \to t$, a matriz densidade do sistema $\tilde{\rho}_S(t')$ se comporta como uma constante durante a integração e pode ser extraída da integral sob o valor presente $\tilde{\rho}_S(t)$. Além disso, como $C(\tau)$ se anula para tempos maiores que τ_R, a extensão do limite de integração superior de t para o infinito ($t \to \infty$) não altera a área sob a curva, mas assegura que as taxas de decaimento resultantes sejam constantes temporais (limite estritamente Markoviano).

Ao avaliar a integral temporal com a função delta e retornar à representação de Schrödinger mediante a transformação unitária $\rho_S(t) = e^{-iH_0t/\hbar}\tilde{\rho}_S(t)e^{iH_0t/\hbar}$, as contribuições não unitárias se agrupam algebricamente. O resultado é a equação de evolução com

derivadas estritamente locais, conhecida como Equação Mestra de Lindblad

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho_S(t)] + \sum_n \left(C_n \rho_S(t) C_n^\dagger - \frac{1}{2}\{C_n^\dagger C_n, \rho_S(t)\} \right). \tag{1.47}$$

Nesta formulação, o acoplamento irrestrito com o vácuo eletromagnético é condensado nos operadores de salto de dissipação $C_n = \sqrt{\kappa_c}\hat{c}$, nos quais κ_c representa a taxa de decaimento constante do respectivo modo intracavitário.

No sistema de cavidades cruzadas considerado neste trabalho, a interação com o ambiente é descrita por três canais dissipativos independentes: o vazamento de fótons da cavidade a, associada à entrada do pulso incidente; o vazamento de fótons da cavidade b, associado à saída da radiação convertida; e a emissão espontânea do átomo para os modos do campo que não estão confinados nas cavidades. Em termos dos operadores de colapso, esses processos são representados por

$$L_a = \sqrt{2\kappa_a}\hat{a}, \qquad L_b = \sqrt{2\kappa_b}\hat{b}, \qquad L_\Gamma = \sqrt{2\Gamma}\sigma_-, \tag{1.48}$$

em que κ_a e κ_b são os parâmetros de decaimento associados às cavidades a e b, respectivamente, e Γ é o parâmetro associado à emissão espontânea do átomo. Os operadores $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são os operadores de aniquilação dos respectivos modos ópticos, enquanto σ_- é o operador de rebaixamento atômico.

Substituindo esses operadores na equação mestra, obtém-se o gerador da evolução da matriz densidade reduzida do sistema, que será denotado por $\mathcal{L}$ para manter a notação adotada no formalismo hierárquico. Sua expressão explícita é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\varrho = &-i[\tilde{H}_S, \varrho] + \left(L_a \varrho L_a^\dagger - \frac{1}{2}\{L_a^\dagger L_a, \varrho\} \right) \\ &+ \left(L_b \varrho L_b^\dagger - \frac{1}{2}\{L_b^\dagger L_b, \varrho\} \right) + \left(L_\Gamma \varrho L_\Gamma^\dagger - \frac{1}{2}\{L_\Gamma^\dagger L_\Gamma, \varrho\} \right),\end{aligned} \tag{1.49}$$

em que $\tilde{H}_S$ é o Hamiltoniano do sistema no referencial adotado, e $\{A, B\} = AB + BA$ denota o anticomutador entre os operadores A e B. Cada termo dissipativo descreve a contribuição de um canal de perda para a evolução do sistema. A soma desses termos permite incorporar, em uma única equação, os efeitos dos vazamentos das cavidades e da emissão espontânea atômica, preservando a normalização da matriz densidade reduzida e a interpretação probabilística do estado quântico.

1.4.3 Equações Mestras para Estados de Fock Incidentes

A dinâmica de conversão baseia-se na injeção de um pacote de onda fotônico de largura espectral finita, preparado em um estado de Fock de dois fótons, na cavidade de entrada. Devido a essa característica quântica discreta, a excitação do sistema não pode ser modelada pela inserção direta de um termo de força motriz no hamiltoniano padrão

de Lindblad, uma vez que essa aproximação descreve apenas a interação com campos clássicos contínuos.

Para contornar essa limitação e incorporar a injeção do pulso, adota-se o formalismo de equações mestras para estados de Fock, desenvolvido por Baragiola *et al.* (2012) [9]. Esse método permite mapear o espalhamento do pacote de onda e preservar a dinâmica Markoviana das perdas radiativas das cavidades. A abordagem expande a matriz densidade em um conjunto acoplado de operadores, configurados para rastrear a absorção sucessiva dos fótons incidentes.

Para um pacote contendo N fótons, o estado do sistema e do campo é descrito por matrizes generalizadas $\varrho_{m,n;p,q}(t)$, em que os índices indicam a quantidade de fótons extraídos nas respectivas portas. O termo físico principal, que descreve o estado do sistema reduzido, corresponde à matriz de ordem máxima, enquanto as demais matrizes codificam as correlações necessárias para reproduzir a evolução transiente.

Embora o formalismo suporte múltiplos modos incidentes, a geometria do conversor paramétrico permite reduções analíticas. Como a injeção ocorre exclusivamente no espelho de entrada da cavidade a, a porta correspondente ao modo b não recebe excitação externa. Consequentemente, a função de envoltória incidente no modo secundário é nula em todo o processo, o que restringe os índices de correlação referentes a essa porta a zero ($p = 0$ e $q = 0$).

Aplicando essas condições físicas à formulação geral, a dinâmica é descrita por uma relação recursiva dependente apenas da modulação da envoltória temporal $\xi(t)$ do pulso na cavidade a. A evolução de um nível da hierarquia é acoplada às matrizes de excitação de ordem inferior, assumindo a forma

$$\begin{aligned}\dot{\varrho}_{m,n;0,0}(t) = \mathcal{L}\varrho_{m,n;0,0}(t) + \sqrt{m}\xi(t)[L_a, \varrho_{m-1,n;0,0}(t)] \\ + \sqrt{n}\xi^*(t)[\varrho_{m,n-1;0,0}(t), L_a^\dagger],\end{aligned} \tag{1.50}$$

onde $\mathcal{L}\varrho_{m,n;0,0}(t)$ representa a atuação do superoperador de Lindblad definido na Equação 1.49, e os índices m e n variam de 0 até N.

Uma característica conveniente para a modelagem computacional do problema é o truncamento das equações. Como o arranjo é excitado por um pacote de dois fótons ($N = 2$), os índices matriciais não progridem indefinidamente. A evolução restringe-se a um conjunto finito de 9 matrizes acopladas (para $0 \leq m, n \leq 2$).

Para inicializar a integração desse sistema, define-se o estado em $t = 0$, instante anterior à interação com o pacote temporal. O componente principal da hierarquia recebe a configuração física isolada no instante inicial (ρ_{sys}), enquanto as matrizes de correlações cruzadas partem de valores nulos:

$$\begin{aligned}\varrho_{m,n;p,q}(0) &= \rho_{\text{sys}}, \quad \text{se } m = n \text{ e } p = q, \\ \varrho_{m,n;p,q}(0) &= 0, \quad \text{se } m \neq n \text{ ou } p \neq q.\end{aligned} \tag{1.51}$$

O conjunto de matrizes é então vetorizado e integrado numericamente no domínio do tempo. Essa etapa possibilita acompanhar quantitativamente a absorção, a conversão e a emissão dos fótons ao longo da dinâmica do arranjo.

1.4.4 A Equação Quântica de Langevin e o Formalismo de Input-Output

A evolução da matriz densidade, seja pela formulação de Lindblad padrão ou pelas equações mestras para estados de Fock incidentes, fornece a dinâmica dos graus de liberdade internos do sistema. No entanto, o acesso experimental e o cálculo da eficiência de processos como a conversão paramétrica dependem da detecção do campo eletromagnético externo propagante. A ponte matemática que relaciona a dinâmica dos operadores intracavitários aos campos assintóticos de entrada e saída é estruturada pela teoria de Input-Output, formulada por Collett e Gardiner (1984) [17, 18].

O modelo de Collett-Gardiner parte da equação de movimento de Heisenberg geral, $\frac{d}{dt}\hat{O} = \frac{i}{\hbar}[H_{total}, \hat{O}]$, aplicada ao espaço de Hilbert global. Neste formalismo, o espaço livre externo que envolve a cavidade é modelado como um reservatório eletromagnético contínuo. Fisicamente, isso significa que o campo fora do ressonador é decomposto em infinitos modos independentes (ondas planas), onde cada modo oscila com uma frequência ω específica e carrega uma energia $\hbar\omega$. A soma contínua da energia de todos esses osciladores constitui o hamiltoniano do reservatório, $H_R = \int d\omega\, \hbar\omega\, \hat{b}^\dagger(\omega)\hat{b}(\omega)$, onde $\hat{b}(\omega)$ aniquila um fóton externo no modo de frequência ω.

A interação entre o modo interno da cavidade $\hat{a}$ e o contínuo externo, assumindo um acoplamento constante κ em torno da frequência de ressonância (aproximação de Weisskopf-Wigner), é regida por

$$H_{int} = i\hbar\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \int d\omega \left[\hat{a}^\dagger \hat{b}(\omega) - \hat{b}^\dagger(\omega)\hat{a}\right]. \tag{1.52}$$

Ao aplicar a equação de Heisenberg para um modo arbitrário do reservatório, derivando em relação ao hamiltoniano total ($H_S + H_R + H_{int}$), a evolução temporal resulta na equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\hat{b}(\omega) = -i\omega\hat{b}(\omega) + \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\hat{a}(t). \tag{1.53}$$

A Equação 1.53 é uma equação diferencial linear não homogênea de primeira ordem. A sua solução analítica exata requer a multiplicação de ambos os lados por um fator integrante $e^{i\omega t}$, o que agrupa os termos da derivada na forma $\frac{d}{dt}\left(\hat{b}(\omega,t)e^{i\omega t}\right) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\hat{a}(t)e^{i\omega t}$. Ao integrar essa expressão desde um instante passado distante $t_0 \to -\infty$ (antes do pacote de onda interagir com a cavidade) até um instante presente t, e isolar $\hat{b}(\omega, t)$, o resultado expressa o operador externo em função do histórico do operador do sistema

$$\hat{b}(\omega,t) = e^{-i\omega(t-t_0)}\hat{b}(\omega,t_0) + \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\int_{t_0}^{t} dt' e^{-i\omega(t-t')}\hat{a}(t'). \tag{1.54}$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 1.54 carrega a evolução livre do campo incidente original. Para isolar essa contribuição, Collett e Gardiner definem o operador de entrada de campo, $\hat{a}_{in}(t)$, como a transformada de Fourier dos modos iniciais do contínuo

$$\hat{a}_{in}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}(\omega, t_0). \tag{1.55}$$

O operador $\hat{a}_{in}(t)$ encapsula tanto as flutuações quânticas do vácuo eletromagnético quanto o pacote de onda fotônico enviado em direção ao ressonador. Para encontrar a evolução do modo interno $\hat{a}$, a Equação 1.54 é substituída de volta na equação de Heisenberg intracavitária. A integral no tempo sobre o contínuo de frequências ω gera uma função delta de Dirac, $\int d\omega e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t')$. A avaliação temporal dessa função delta sobre $\hat{a}(t')$ resulta diretamente no termo de dissipação macroscópica $\frac{\kappa}{2}\hat{a}(t)$. O agrupamento algébrico final fornece a Equação Quântica de Langevin

$$\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \hat{a}(t)] - \frac{\kappa}{2}\hat{a}(t) + \sqrt{\kappa}\hat{a}_{in}(t), \tag{1.56}$$

o que demonstra matematicamente que a dinâmica intracavitária sofre a ação simultânea de dois fatores associados ao ambiente externo: o decaimento exponencial causado pelo vazamento irreversível de fótons (termo $-\kappa/2$) e a injeção do sinal acoplado pelo espelho (termo $\sqrt{\kappa}\hat{a}_{in}$).

Para modelar o campo espalhado em direção ao detector, o mesmo procedimento de fator integrante utilizado na Equação 1.53 é realizado em sentido reverso, integrando desde o tempo presente t até um instante futuro $t_1 \to \infty$ (após a interação). Essa integração define o operador de saída $\hat{a}_{out}(t)$, o qual representa o estado assintótico final do campo

$$\hat{a}_{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega(t-t_1)} \hat{b}(\omega, t_1). \tag{1.57}$$

A relação estrita entre a radiação injetada, a dinâmica do sistema interno e a radiação espalhada é extraída ao subtrair a solução algébrica integrada do passado (t_0) da solução integrada do futuro (t_1). Essa operação cancela a dependência temporal explícita dos operadores do contínuo e estabelece a condição de fronteira exata do formalismo de Input-Output

$$\hat{a}_{out}(t) + \hat{a}_{in}(t) = \sqrt{\kappa}\hat{a}(t), \tag{1.58}$$

Essa relação consolida a conexão entre a dinâmica intracavitária e o campo óptico observado externamente. De acordo com o formalismo de entrada e saída, o campo que emerge da cavidade e chega ao detector ($\hat{a}_{\text{out}}$) resulta da interferência entre o campo incidente, refletido elasticamente pelo espelho de entrada ($\hat{a}_{\text{in}}$), e a contribuição proveniente do campo intracavitário que escapa através do mesmo acoplador, proporcional a $\sqrt{\kappa}\hat{a}$. Essa condição de contorno estabelece, portanto, a correspondência entre as populações e correlações calculadas numericamente para o campo intracavitário e as grandezas ópticas

efetivamente observáveis na saída do dispositivo, permitindo determinar a eficiência de conversão a partir do campo de saída.

1.4.5 O Hamiltoniano Completo no Referencial de Interação

Ao longo das seções anteriores, foram desenvolvidos os elementos teóricos necessários para a descrição completa de sistemas quânticos abertos e da eletrodinâmica de cavidades. Para consolidar o modelo físico que será objeto de integração numérica no presente trabalho, é então necessário agrupar essas interações em um único hamiltoniano global que reflita o regime de simulação.

O sistema consiste em dois modos do campo eletromagnético (cavidades cruzadas a e b) interagindo com um único átomo de dois níveis. Para maximizar a eficiência da conversão paramétrica ascendente, o sistema opera sob uma condição de ressonância de dois fótons, na qual a frequência da transição atômica (ω_0) e a frequência do ressonador de saída equivalem ao dobro da frequência do ressonador de entrada ($2\omega_a = \omega_b = \omega_0$).

Adotando a representação de interação em relação ao hamiltoniano livre $\hat{H}_0$ e assumindo a condição de ressonância, os termos de evolução livre são eliminados e o hamiltoniano efetivo do sistema assume a forma

$$\tilde{H}_S = \hbar g_a \left(\sigma_+ \hat{a}^2 + \sigma_- (\hat{a}^\dagger)^2\right) + \hbar g_b \left(\sigma_+ \hat{b} + \sigma_- \hat{b}^\dagger\right). \tag{1.59}$$

O primeiro termo, modulado pela constante de acoplamento g_a, codifica a absorção não linear do par de fótons do modo incidente. O segundo termo, associado à constante g_b, descreve a interação linear de dipolo com a cavidade de saída, regida pelo modelo padrão de Jaynes-Cummings. Os acoplamentos g_a e g_b são mantidos algebricamente distintos para viabilizar a posterior investigação de regimes assimétricos.

O hamiltoniano da Equação 1.59 constitui o núcleo do modelo físico investigado neste trabalho e dita a parcela de evolução coerente (unitária) do sistema isolado. A descrição completa do espalhamento físico requer, contudo, a incorporação dos processos dissipativos associados às taxas de decaimento das cavidades e do acoplamento ao pacote de onda propagante externo. A presença da interação de dois fótons, em conjunto com a injeção do pulso temporal via formalismo de Input-Output, cria um cenário de espalhamento cuja complexidade motiva o uso de métodos numéricos. A formulação matemática e a implementação computacional desta dinâmica serão desenvolvidas no Capítulo 2.

2 METODOLOGIA

2.1 O MODELO FÍSICO E A ANÁLISE DO REGIME SIMÉTRICO

O sistema investigado neste trabalho é composto por duas cavidades ópticas ortogonais, caracterizadas pelos modos bosônicos fundamentais a e b. Ambos os ressonadores interagem com um único átomo de dois níveis posicionado na interseção dos eixos ópticos. O objetivo desse arranjo é realizar deterministicamente a conversão paramétrica ascendente, extraindo a energia de fótons de baixa frequência injetados na cavidade a para emitir um único fóton de alta energia pela cavidade b.

Essa transição exige uma configuração paramétrica estrita baseada no modelo Jaynes-Cummings de dois fótons. O sistema opera sob a ressonância exata $2\omega_a = \omega_b = \omega_0$. Um fóton solitário do modo a carrega energia $\hbar\omega_a$, exatamente a metade do necessário para excitar o átomo ($\hbar\omega_0$). Esse forte descompasso energético impõe um bloqueio físico: o átomo não consegue absorver excitações individuais de baixa frequência. A transição de dipolo ocorre mediante a absorção simultânea de um par de fótons do modo a, o que garante a não linearidade fundamental do processo.

A Figura 2.1 ilustra o diagrama esquemático do sistema e as taxas de acoplamento e dissipação envolvidas.

2.1.1 O Hamiltoniano e o Subespaço Relevante de Excitação

A interação coerente do arranjo é governada pelo hamiltoniano efetivo

$$\tilde{H}_S = \hbar g_a \sigma_+ \hat{a}^2 + \hbar g_a \sigma_- (\hat{a}^\dagger)^2 + \hbar g_b \sigma_+ \hat{b} + \hbar g_b \sigma_- \hat{b}^\dagger. \tag{2.1}$$

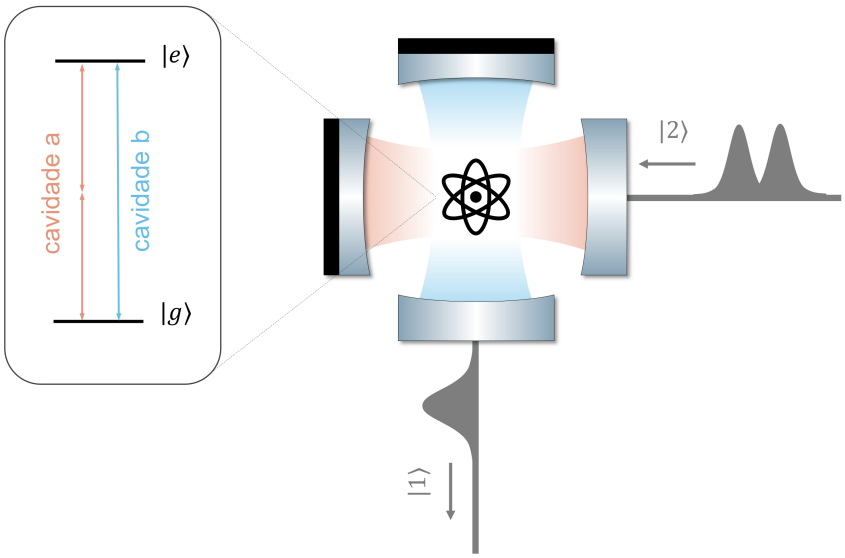
A dinâmica inicia com o sistema no estado fundamental atômico, a cavidade b no vácuo e exatamente dois fótons injetados no modo a. O vetor de estado inicial é $|1\rangle = |g, 2_a, 0_b\rangle$. A aplicação do operador $\tilde{H}_S$ diretamente sobre o estado $|1\rangle$ revela o caminho de evolução do sistema

$$\tilde{H}_S|1\rangle = \hbar g_a \sigma_+ \hat{a}^2|1\rangle + \hbar g_a \sigma_- (\hat{a}^\dagger)^2|1\rangle + \hbar g_b \sigma_+ \hat{b}|1\rangle + \hbar g_b \sigma_- \hat{b}^\dagger|1\rangle. \tag{2.2}$$

Três dos quatro termos resultam matematicamente em zero. O operador $\sigma_-|g\rangle = 0$ anula a segunda e a quarta parcelas, pois o átomo não possui um estado de energia inferior ao fundamental. O operador $\hat{b}|0_b\rangle = 0$ anula a terceira parcela, devido à ausência de fótons na cavidade b. Apenas o primeiro termo sobrevive

$$\tilde{H}_S|1\rangle = \hbar g_a (\sigma_+|g\rangle) \otimes (\hat{a}^2|2_a\rangle) \otimes (|0_b\rangle). \tag{2.3}$$

Figura 2.1: Esquema do sistema de cavidades cruzadas.



Fonte: Autora (2026).
Nota: O detalhe à esquerda mostra os níveis de energia do átomo ($|g\rangle$ e $|e\rangle$), indicando a ressonância de dois fótons para a cavidade a (setas vermelhas) e de um fóton para a cavidade b (seta azul). Um pulso contendo dois fótons (estado $|2\rangle$) entra na cavidade a. Após a interação com o átomo central, o sistema emite um único fóton (estado $|1\rangle$) que sai pela cavidade b.

A regra de aniquilação bosônica ($\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$) fornece $\hat{a}^2|2_a\rangle = \sqrt{2}|0_a\rangle$. O resultado da aplicação é a transição para o estado intermediário

$$\tilde{H}_S|1\rangle = \sqrt{2}\hbar g_a|e, 0_a, 0_b\rangle \equiv \sqrt{2}\hbar g_a|2\rangle. \tag{2.4}$$

Para extrair o elemento da matriz de interação, multiplicamos a Equação 2.4 pelo *bra* $\langle 2|$

$$\langle 2|\tilde{H}_S|1\rangle = \sqrt{2}\hbar g_a\langle e|e\rangle\langle 0_a|0_a\rangle\langle 0_b|0_b\rangle = \sqrt{2}\hbar g_a. \tag{2.5}$$

A partir do estado $|2\rangle = |e, 0_a, 0_b\rangle$, a aplicação de $\tilde{H}_S$ aciona o termo de decaimento $\hbar g_b\sigma_-\hat{b}^\dagger$, que devolve o átomo ao estado $|g\rangle$ e cria um fóton na cavidade b, gerando o estado final $|3\rangle = |g, 0_a, 1_b\rangle$. O elemento de matriz correspondente a esse acoplamento é

$$\langle 3|\tilde{H}_S|2\rangle = \hbar g_b\langle g|\sigma_-|e\rangle\langle 1_b|\hat{b}^\dagger|0_b\rangle = \hbar g_b. \tag{2.6}$$

Uma transição direta do estado $|1\rangle$ para o $|3\rangle$, sem a mediação do átomo, requer um elemento cruzado não nulo. Multiplicando a Equação 2.4 diretamente pelo *bra* $\langle 3|$, a

ortogonalidade atômica zera o produto

$$\langle 3|\tilde{H}_S|1\rangle = \sqrt{2}\hbar g_a \underbrace{\langle g|e\rangle}_{0} \underbrace{\langle 0_a|0_a\rangle}_{1} \underbrace{\langle 1_b|0_b\rangle}_{0} = 0. \tag{2.7}$$

A expressão $\langle 3|\tilde{H}_S|1\rangle = 0$ prova que o campo eletromagnético da cavidade a não interage diretamente com o campo da cavidade b. A transferência de energia percorre obrigatoriamente a sequência $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$.

Como a energia total fornecida pelo pulso limitou-se a duas excitações em ω_a, o sistema não dispõe de energia para alcançar estados de Fock superiores (como $|g, 3_a, 0_b\rangle$ ou $|e, 0_a, 2_b\rangle$). O princípio da conservação de energia impede a criação espontânea de fótons e barra o acesso a dimensões maiores do espaço de Hilbert. A dinâmica coerente gerada pelo hamiltoniano do sistema fechado (H_S) permanece confinada ao subespaço $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$, resultando na matriz de interação

$$H_{sub} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}g_a & 0 \\ \sqrt{2}g_a & 0 & g_b \\ 0 & g_b & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

A estrutura matricial da Equação (2.8) evidencia a ausência de um termo de acoplamento direto entre os estados $|1\rangle$ e $|3\rangle$, de modo que a transferência de excitação entre os modos fotônicos é mediada pelos canais de interação envolvendo o átomo. Entretanto, isso não implica que a conversão exija necessariamente uma população significativa do estado excitado atômico. Dependendo dos parâmetros do sistema, efeitos de interferência quântica e processos virtuais podem desempenhar um papel relevante na dinâmica de conversão.

A obtenção de uma solução analítica fechada para esse regime é dificultada pela combinação da não linearidade do acoplamento de dois fótons ($\hat{a}^2\sigma_+$) com a necessidade de incorporar, em uma mesma descrição, a dinâmica coerente, a dissipação e o pacote de onda incidente. Por essa razão, a caracterização da eficiência de conversão é realizada por meio da integração numérica do sistema aberto, conforme descrito na próxima seção.

2.2 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA DINÂMICA DE ESPALHAMENTO

2.2.1 Limitações da Abordagem Analítica

A obtenção de uma matriz de transferência analítica capaz de mapear o campo de entrada no campo de saída no domínio da frequência requer a resolução das equações de movimento do sistema. A evolução temporal dos operadores de aniquilação, acoplados aos reservatórios externos e sujeitos à dissipação, obedece à Equação Quântica de Heisenberg-Langevin. Para o modo da cavidade a e para o operador de descida atômico σ_-, as

equações assumem a forma

$$\dot{\hat{a}} = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}_S, \hat{a}] - \frac{\kappa_a}{2}\hat{a} + \sqrt{\kappa_a}\hat{a}_{in}, \tag{2.9}$$

$$\dot{\sigma}_- = \frac{i}{\hbar}[\tilde{H}_S, \sigma_-] - \frac{\Gamma}{2}\sigma_- + \sqrt{\Gamma}\hat{\sigma}_{in}, \tag{2.10}$$

onde κ_a e Γ representam as taxas de decaimento, e $\hat{a}_{in}$ e $\hat{\sigma}_{in}$ representam os operadores de ruído e entrada correspondentes.

A barreira analítica surge imediatamente ao calcular os comutadores com o hamiltoniano $\tilde{H}_S$ (Equação 2.1). Para o modo fotônico a, a relação de comutação bosônica resulta em

$$[\tilde{H}_S, \hat{a}] = \hbar g_a \sigma_- [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] = -2\hbar g_a \sigma_- \hat{a}^\dagger. \tag{2.11}$$

Consequentemente, a derivada temporal de $\hat{a}$ passa a depender da evolução conjunta do produto não linear $\sigma_-\hat{a}^\dagger$.

Para resolver essa dependência, exige-se a equação diferencial do operador atômico. O cálculo do comutador para σ_- gera

$$[\tilde{H}_S, \sigma_-] = \hbar g_a [\sigma_+, \sigma_-]\hat{a}^2 + \hbar g_b [\sigma_+, \sigma_-]\hat{b} = \hbar g_a \sigma_z \hat{a}^2 + \hbar g_b \sigma_z \hat{b}. \tag{2.12}$$

A presença dos produtos $\sigma_-\hat{a}^\dagger$ e $\sigma_z\hat{a}^2$ cria um sistema acoplado estritamente não linear. A formulação de derivadas para esses novos termos gera momentos de ordem superior (como $\sigma_z\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}$), ramificando a álgebra em uma hierarquia infinita de equações diferenciais que inviabiliza o fechamento analítico direto.

Para sistemas governados por interações lineares de Jaynes-Cummings, a literatura padrão contorna a hierarquia infinita aplicando a transformação de Holstein-Primakoff. O método mapeia a álgebra de matrizes de Pauli em operadores bosônicos $(\hat{c}, \hat{c}^\dagger)$ impondo o limite de baixa excitação. Sob a premissa de que o átomo raramente deixa o estado fundamental, a inversão populacional é fixada em $\langle\sigma_z\rangle \approx -1$, o que lineariza os comutadores e permite as substituições diretas $\sigma_- \to \hat{c}$ e $\sigma_+ \to \hat{c}^\dagger$.

A aplicação dessa restrição ao sistema de cavidades cruzadas converte as taxas de evolução puramente internas nas equações efetivas

$$\dot{\hat{a}}_{int} = 2ig_a\hat{c}\hat{a}^\dagger, \tag{2.13}$$

$$\dot{\hat{c}}_{int} = -ig_a\hat{a}^2 - ig_b\hat{b}. \tag{2.14}$$

A demonstração algébrica revela a limitação do método para este modelo físico. O problema fundamental reside na persistência da não linearidade: mesmo após a aplicação da aproximação de Holstein-Primakoff ($\sigma_- \to \hat{c}$), o termo $\hat{a}^2$ e o termo de acoplamento $\hat{c}\hat{a}^\dagger$ permanecem não lineares, impedindo o fechamento analítico das equações de movimento.

Além da dificuldade algébrica, a aproximação também se mostra fisicamente inade-

quada para o regime considerado. O mecanismo de conversão paramétrica ascendente envolve a participação do estado atômico excitado $|2\rangle$ como estado intermediário do processo de conversão. Fixar $\langle\sigma_z\rangle \approx -1$ equivale a assumir que o átomo permanece predominantemente em seu estado fundamental durante a dinâmica, desprezando sua participação na absorção do pulso fotônico e, consequentemente, a física central do espalhamento paramétrico.

A falha do mapeamento linear de Holstein-Primakoff inviabiliza o uso direto das relações de *Input-Output* para a obtenção de uma solução fechada. Em sistemas puramente lineares, o formalismo de *Input-Output* acoplado à transformada de Fourier permite extrair uma função algébrica que relaciona imediatamente o campo de saída ao campo de entrada. Contudo, as equações de *Input-Output* atuam estritamente como condições de contorno de interface, exigindo o conhecimento prévio da dinâmica do operador interno da cavidade para prever o fluxo externo. Para calcular o campo fotônico emitido, é necessário resolver primeiro a evolução da luz confinada.

Sem uma função analítica que descreva a evolução desse campo interno devido à não linearidade do acoplamento atômico, o algoritmo computacional não pode aplicar o formalismo de *Input-Output* diretamente. Essa limitação fundamental impõe a necessidade metodológica da integração numérica temporal. O computador deve resolver as equações diferenciais da matriz densidade $\rho(t)$ a cada instante, mapeando a evolução do sistema isoladamente no domínio do tempo. Somente após integrar toda a dinâmica não linear e extrair numericamente a população fotônica intracavidade, caracterizada por $\langle\hat{b}^\dagger(t)\hat{b}(t)\rangle$, é que as condições de contorno de *Input-Output* podem ser aplicadas no estágio final. A aplicação dessas relações matemáticas converte a dinâmica populacional interna na taxa do fluxo fotônico irradiado para o ambiente externo.

2.2.2 Construção Matricial dos Canais Dissipativos

A transição do modelo teórico desenvolvido na Seção 1.4.3 para sua implementação computacional requer a construção explícita do superoperador de Liouville do sistema, $\mathcal{L}_S$. Esse operador governa a evolução temporal do estado do sistema no espaço de Liouville e reúne as contribuições coerente e dissipativa da dinâmica. Enquanto a primeira é determinada pelo hamiltoniano do sistema, a segunda descreve os processos irreversíveis associados ao acoplamento com os modos externos e é incorporada por meio do formalismo de Lindblad. Para os três canais dissipativos considerados neste trabalho, o superoperador dissipativo é escrito como

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_{j=1}^{3} \left(\hat{C}_j \rho \hat{C}_j^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{C}_j^\dagger \hat{C}_j, \rho\} \right). \tag{2.15}$$

A aplicação desse formalismo requer, então, a definição dos operadores de colapso ($\hat{C}_j$), responsáveis por caracterizar os diferentes canais de dissipação e suas respectivas

taxas no sistema de cavidades cruzadas:

- Vazamento da Cavidade a ($\hat{C}_1 = \sqrt{\kappa_a}\hat{a}$): modela a perda dos fótons injetados de baixa frequência devido à refletividade imperfeita dos espelhos. Representa a energia que escapa do ressonador horizontal antes que a absorção simultânea de dois fótons consiga excitar o átomo central. A constante κ_a caracteriza a taxa de decaimento associada a esse canal;

- Emissão da Cavidade b ($\hat{C}_2 = \sqrt{\kappa_b}\hat{b}$): modela a extração radiativa do fóton de alta energia. Ao contrário de uma perda parasitária, a constante κ_b caracteriza a taxa de saída associada ao canal útil de conversão. A maximização da população processada por este canal constitui o objetivo central da otimização paramétrica;

- Emissão Espontânea Atômica ($\hat{C}_3 = \sqrt{\Gamma}\sigma_-$): representa o decaimento espontâneo do átomo excitado, associado à emissão de um fóton para modos do espaço livre não confinados pelas cavidades. Essa radiação escapa do volume modal das cavidades e constitui uma perda para a conversão global.

Para incorporar esses processos dissipativos à dinâmica do sistema, os operadores de salto são substituídos na equação mestra de Lindblad, resultando no operador dissipativo completo

$$\begin{aligned}\mathcal{D}[\rho] = \kappa_a &\left(\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho\}\right) \\ &+ \kappa_b \left(\hat{b}\rho\hat{b}^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{b}^\dagger\hat{b}, \rho\}\right) \\ &+ \Gamma \left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\}\right).\end{aligned} \tag{2.16}$$

A soma do hamiltoniano de acoplamento não linear com a dissipação exata (Equação 2.16) compõe o superoperador efetivo $\mathcal{L}_S \cdot = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \cdot\,] + \mathcal{D}[\,\cdot\,]$. No formalismo para estados de Fock incidentes, a matriz resultante desse superoperador atua sobre a matriz física principal e compõe o termo de evolução primário para todo o conjunto acoplado de operadores densidade no sistema diferencial.

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}_S\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho(t)] + \mathcal{D}[\rho(t)]. \tag{2.17}$$

Em sistemas governados por equações diferenciais ordinárias lineares, a obtenção de uma matriz de evolução temporal contínua e analítica exige o cálculo da matriz exponencial $\rho(t) = e^{\mathcal{L}_S t}\rho(0)$. A álgebra linear determina que extrair a forma fechada dessa exponencial requer a diagonalização de $\mathcal{L}_S$, um processo que obriga o cálculo dos autovalores e a inversão direta da matriz de autovetores associada. Contudo, conforme provado na subseção referente à falha do método de Holstein-Primakoff, a não linearidade do termo

atômico de dois fótons ($\hat{a}^2\sigma_+$) impede o fechamento do sistema de comutadores. Quando o modelo transpõe esse acoplamento infinito para a representação matricial, gera-se uma matriz $\mathcal{L}_S$ densa e de dimensionalidade intratável.

A obtenção de uma solução analítica fechada para esse sistema de equações torna-se impraticável devido à combinação de dois fatores centrais: a elevada dimensionalidade do espaço de Hilbert efetivo e a presença do acoplamento não linear de dois fótons descrito pelo termo de interação $\hat{a}^2\sigma_+$. Embora o sistema apresente simetrias úteis para a interpretação física de sua dinâmica, elas não são suficientes para reduzir a matriz de Liouville a uma forma analiticamente solucionável. Consequentemente, a evolução temporal é obtida por meio de métodos numéricos, nos quais as equações diferenciais acopladas são integradas diretamente no domínio do tempo para reconstruir o processo completo de absorção, conversão e emissão dos fótons.

2.2.3 Integração Numérica Adaptativa

A obtenção da dinâmica populacional exige a transição do formalismo algébrico contínuo para um ambiente de cálculo discreto. O algoritmo numérico soluciona o sistema de equações diferenciais avaliando a função do lado direito da Equação 2.17. Definindo esse conjunto acoplado de operadores e dissipadores como a função geradora $\mathcal{F}(t, \rho)$, o estado futuro do sistema é extrapolado de forma iterativa.

O fluxo de processamento e integração matemática obedece à seguinte sequência física:

- *Condição Inicial e Injeção do Pulso:* a rotina tem início no tempo $t = 0$, estabelecendo o sistema no estado fundamental puramente atômico e as cavidades no vácuo de fótons, $\rho(0) = |g, 0_a, 0_b\rangle\langle g, 0_a, 0_b|$. O algoritmo introduz o pacote de onda fotônico acoplando uma função de condução temporal à matriz de transição da cavidade a;

- *A Falha do Método de Euler:* métodos de integração primários, como o método de Euler explícito, promovem o avanço temporal utilizando uma expansão de Taylor de primeira ordem: $\rho(t + \Delta t) \approx \rho(t) + \Delta t \cdot \mathcal{F}(t, \rho)$. Por computar a derivada unicamente no limite inferior do intervalo temporal, o algoritmo de Euler embute um erro de truncamento fixo de ordem $O(\Delta t^2)$. Em sistemas de óptica quântica que intercalam oscilações rápidas (acoplamento de dois fótons) e dinâmicas transientes exponenciais (dissipadores locais e absorção do pacote de onda), esse erro linear propaga divergências severas, violando instantaneamente a conservação da probabilidade ($\mathrm{Tr}\{\rho\} \neq 1$). A exigência de estabilidade física descarta abordagens de passo simples;

- *Avaliação Algébrica de Runge-Kutta (RK4):* para garantir a exatidão, o código emprega a família de integração Runge-Kutta. Em vez de assumir uma taxa de

variação linear, o método amostra o comportamento da equação diferencial computando quatro matrizes de inclinação intermediárias (k_m) ao longo do intervalo de tempo avaliado

$$k_1 = \mathcal{F}(t_i, \rho_i) \quad \text{(derivada no limite inicial)} \tag{2.18}$$

$$k_2 = \mathcal{F}\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \rho_i + \frac{\Delta t}{2} k_1\right) \quad \text{(primeira estimativa central)} \tag{2.19}$$

$$k_3 = \mathcal{F}\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, \rho_i + \frac{\Delta t}{2} k_2\right) \quad \text{(refinamento no ponto médio)} \tag{2.20}$$

$$k_4 = \mathcal{F}\left(t_i + \Delta t, \rho_i + \Delta t k_3\right) \quad \text{(previsão no limite final)} \tag{2.21}$$

A rotina consolida o estado do sistema no instante futuro através de uma média ponderada exata dessas matrizes, ditada por

$$\rho(t_{i+1}) = \rho(t_i) + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \tag{2.22}$$

- *Passo Adaptativo (Dormand-Prince - RK45):* o algoritmo aprimora a integração acoplando um cálculo simultâneo de quinta ordem aos coeficientes k_m. A subtração entre as matrizes resultantes das fórmulas de 4ª e 5ª ordem fornece a magnitude exata do erro numérico local. Caso o erro estatístico exceda a tolerância predefinida (fenômeno comum durante as transições populacionais abruptas do pulso incidente), o algoritmo rejeita o avanço temporal, comprime automaticamente a malha Δt e executa o cálculo novamente. Essa adaptação suprime o erro cumulativo e assegura a positividade física da matriz densidade durante toda a simulação sem desperdiçar carga de processamento em regiões de evolução lenta;

- *Extração de Observáveis Físicos:* o encerramento do arranjo de integração devolve um vetor contendo a matriz densidade física contínua $\rho(t)$. O algoritmo extrai a população fotônica intracavidade em qualquer instante aplicando diretamente o traço sobre a matriz simulada, produzindo o valor numérico $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle(t) = \mathrm{Tr}\{\hat{b}^\dagger \hat{b} \rho(t)\}$.

O perfil temporal gerado por essa dinâmica numérica viabiliza a aplicação final da teoria de *Input-Output*. O cálculo da população fotônica retida na cavidade b fornece o observável exato para quantificar a taxa do fluxo de energia emitido pelo modo de alta frequência. Essa dinâmica de emissão determina a eficiência do processo de conversão paramétrica ascendente e estabelece as métricas centrais para a análise de desempenho do arranjo físico.

3 RESULTADOS

3.1 O PROTOCOLO DE OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA

O desenvolvimento analítico da falha da aproximação linear e a consolidação do ambiente de integração numérica permitem, nesta etapa, mapear a física do espalhamento quântico não linear. O arranjo cruzado de cavidades busca maximizar a taxa de conversão ascendente, extraindo a maior quantidade possível de energia na cavidade de alta frequência (b).

Para rastrear o ponto de máxima eficiência no espaço de fase sem incorrer em ambiguidades paramétricas, a rotina computacional foi executada uma cadeia de otimização sequencial. O protocolo numérico estabelece a taxa de dissipação da cavidade de entrada (κ_a) como a unidade fundamental de frequência do sistema e opera a varredura em três estágios estritos de isolamento:

1. *Varredura de Injeção:* O algoritmo mapeia a largura do pulso (ν) sob condições estruturais simétricas para encontrar o ponto de ressonância temporal que evita a reflexão imediata do pacote de onda.

2. *Varredura de Dissipação:* Travando o pulso em sua duração ótima, o código varre o espaço de relaxação cruzada (κ_b/κ_a) para descobrir o limite de forte dissipação que contorna a reabsorção atômica.

3. *Varredura de Acoplamento:* Munido do pulso e do espelho otimizados, a rotina finaliza rastreando a razão de interação atômica (g_b/g_a).

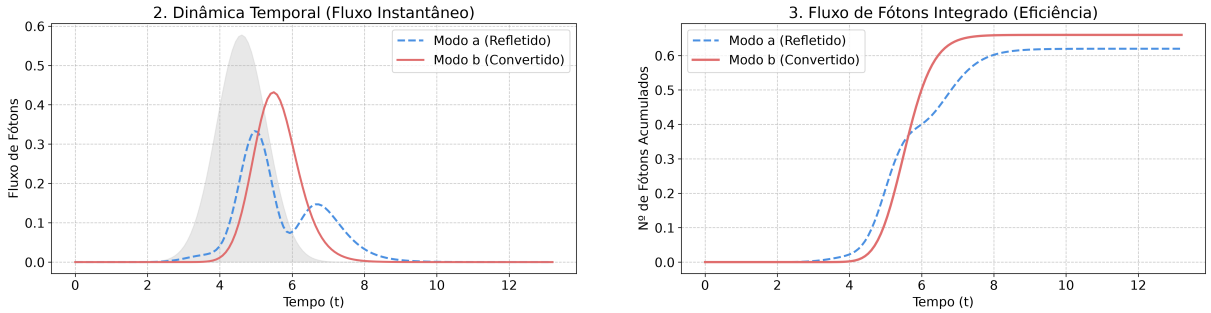
3.1.1 Dinâmica Base e Otimização Temporal do Pulso

A investigação do regime de conversão tem início com o mapeamento da dinâmica base do sistema acoplado ao vácuo. A dinâmica não otimizada do sistema, simulada sob um pulso de injeção arbitrário e simetria estrutural, é apresentada na Figura 3.1. Os resultados ilustram o escoamento ineficiente, onde grande parte da energia é refletida ou retransmitida no canal de injeção.

O pacote de onda incidente, responsável por injetar o par de fótons no arranjo, possui um perfil de absorção gaussiano. A teoria de excitação contínua determina que o espectro de frequência desse pulso carrega uma largura de banda ν estritamente dependente de sua duração temporal efetiva, τ_p.

O acoplamento eficiente dessa energia para o volume modal da cavidade a exige a otimização direta dessa largura de pulso. A física de cavidades abertas impõe duas restrições antagônicas extremas:

Figura 3.1: Dinâmica temporal de conversão base para o arranjo em estado não calibrado.



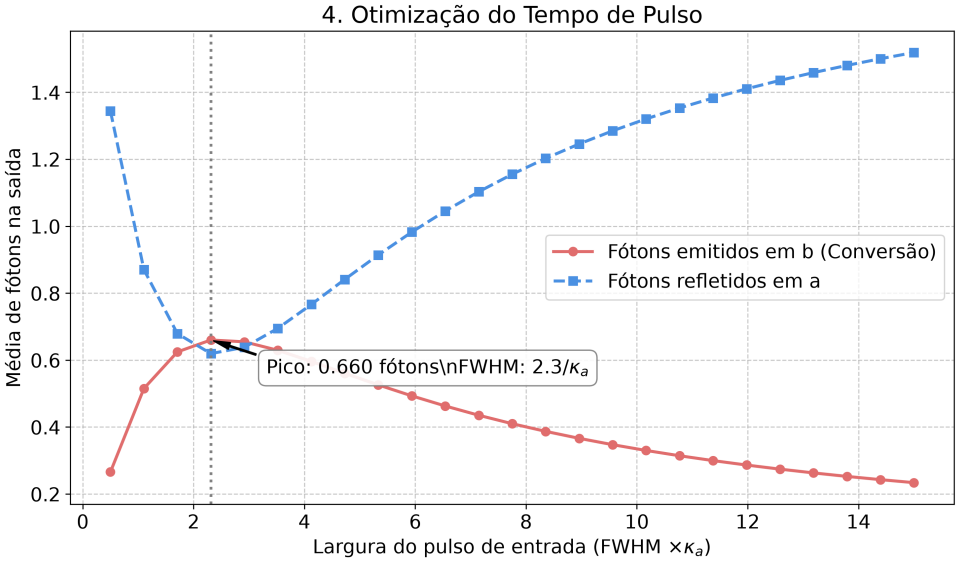
Fonte: Autora (2026).
Nota: A ausência de otimização induz reflexão acentuada na cavidade de entrada (modo a), limitando a fração de energia processada e consolidando o comportamento subótimo inicial do conversor.

- *Regime Ultracurto (Reflexão Antecipada):* pulsos com duração temporal excessivamente curta carregam uma banda espectral muito mais larga do que a ressonância da cavidade. Essa incompatibilidade de impedância espectral provoca a reflexão majoritária do pacote de onda diretamente no espelho de entrada. A luz não penetra o ressonador e a conversão sequer tem início;

- *Regime de Pulsos Longos:* Quando a duração temporal do pacote incidente torna-se muito superior aos tempos característicos do sistema, a distribuição temporal dos dois fótons torna-se mais diluída. Como a interação não linear responsável pela conversão é governada pelo termo $\hat{a}^2\sigma_+$, sua ativação depende da ocupação do estado de dois fótons do modo a. A diluição temporal do pacote incidente reduz a probabilidade de ocupação desse estado na cavidade. Consequentemente, a probabilidade de ativação do termo de interação efetiva $\hat{a}^2\sigma_+$ é reduzida, diminuindo a eficiência da conversão paramétrica. Adicionalmente, a dinâmica mais lenta aumenta a exposição do sistema aos mecanismos dissipativos, que podem contribuir para perdas adicionais e reduzir ainda mais a eficiência da conversão;

A competição entre a reflexão do campo incidente na entrada da cavidade e a dinâmica de interação do sistema determina uma faixa de durações do pulso mais favorável para a conversão. Para quantificar esse comportamento, o código de integração adaptativa calculou o fluxo de fótons integrado e a energia total emitida pela cavidade b em função da largura do pulso incidente, conforme mostrado na Figura 3.2. Observa-se um máximo global de eficiência para uma duração intermediária do pulso. Nesse regime, a distribuição temporal do campo incidente proporciona condições mais favoráveis à interação com o sistema, enquanto pulsos excessivamente curtos ou longos apresentam menor eficiência de conversão.

Figura 3.2: Número total de fótons obtido pela integração temporal dos fluxos de saída associados aos fótons refletidos (cavidade a) e emitidos (cavidade b), em função da largura do pacote incidente.



Fonte: Autora (2026).
Nota: O máximo de eficiência ocorre para uma duração intermediária do pulso, entre os regimes de pulsos ultracurtos, nos quais predomina a reflexão na entrada, e de pulsos longos, nos quais a distribuição temporal do campo incidente reduz a probabilidade de ocupação simultânea do estado de dois fótons na cavidade.

Contudo, a otimização temporal do pacote de onda, por si só, pode não ser suficiente para maximizar a conversão no sistema. Uma vez estabelecida a largura ótima para o pulso incidente, a eficiência de conversão pode também depender do balanço entre os parâmetros que caracterizam a dinâmica do sistema aberto. Por essa razão, investigou-se a influência das taxas de dissipação e dos acoplamentos internos, variando-se as razões entre esses parâmetros com o intuito de identificar condições que favoreçam as transições que conduzem à emissão do fóton pela cavidade b.

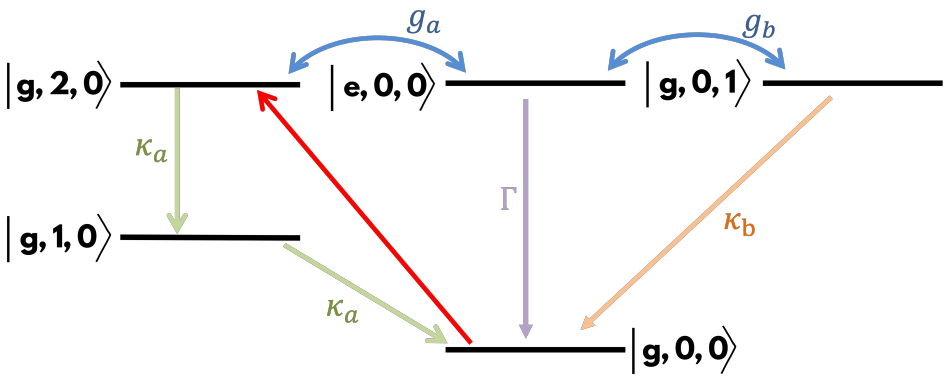
3.1.2 Assimetria nas Taxas de Dissipação das Cavidades

A dinâmica do espalhamento demonstra que injetar o pacote fotônico com a largura ótima maximiza a interação com o sistema, mas não assegura a extração eficiente do fóton convertido. Para que o arranjo opere como um conversor direcional efetivo, o fluxo de energia deve seguir um caminho radiativo irreversível do modo de baixa frequência (a) para o modo de alta frequência (b). A imposição dessa direcionalidade exige uma assimetria nas taxas de decaimento das cavidades, tratada nesta seção, bem como uma assimetria no acoplamento entre o átomo e cada cavidade, que será abordada a seguir. Esse fato estabelecerá uma hierarquia entre os valores dos parâmetros do sistema.

A necessidade dessa assimetria torna-se clara ao rastrear as transições nos níveis de energia do arranjo, como pode ser visto no diagrama 3.3. O processo inicia-se com o

átomo no nível inferior e os ressonadores desocupados, configuração denotada pelo estado $|g, 0, 0\rangle$. Com a incidência do pulso, o sistema alcança o estado de dois fótons no modo de entrada, $|g, 2, 0\rangle$. A partir desse ponto, a evolução pode seguir dois caminhos: a energia pode escapar pela cavidade a de acordo com a taxa κ_a, decaindo para $|g, 1, 0\rangle$ e posteriormente para $|g, 0, 0\rangle$, ou o átomo pode absorver os fótons por meio do acoplamento g_a, transitando para o estado atômico excitado $|e, 0, 0\rangle$.

Figura 3.3: Diagrama de transições entre os estados quânticos do sistema de cavidades cruzadas.



Fonte: Autora (2026).
Nota: O processo tem início no nível inferior $|g, 0, 0\rangle$, evoluindo para $|g, 2, 0\rangle$ após a incidência do pacote fotônico. As interações coerentes, regidas pelos acoplamentos g_a e g_b, promovem a alternância da excitação entre os subsistemas, conectando os estados $|e, 0, 0\rangle$ e $|g, 0, 1\rangle$. Os canais dissipativos irreversíveis estão representados pelas taxas de decaimento radiativo das cavidades (κ_a e κ_b) e pela emissão espontânea do átomo (Γ).

Alcançado o estado $|e, 0, 0\rangle$, configuram-se novas rotas de decaimento. O emissor central pode emitir espontaneamente à taxa Γ de volta ao estado inicial $|g, 0, 0\rangle$, ou acoplar-se à cavidade ortogonal via g_b, gerando o estado do fóton convertido, $|g, 0, 1\rangle$. Sendo os acoplamentos g_a e g_b interações coerentes, a excitação tenderá a alternar entre os subsistemas (oscilações de Rabi) caso as perdas radiativas não prevaleçam. Para extrair a radiação convertida antes que a reversibilidade coerente devolva a energia para a porta de entrada, o decaimento pela cavidade de saída (κ_b), que encerra o ciclo retornando a $|g, 0, 0\rangle$, requer precedência numérica sobre os demais canais.

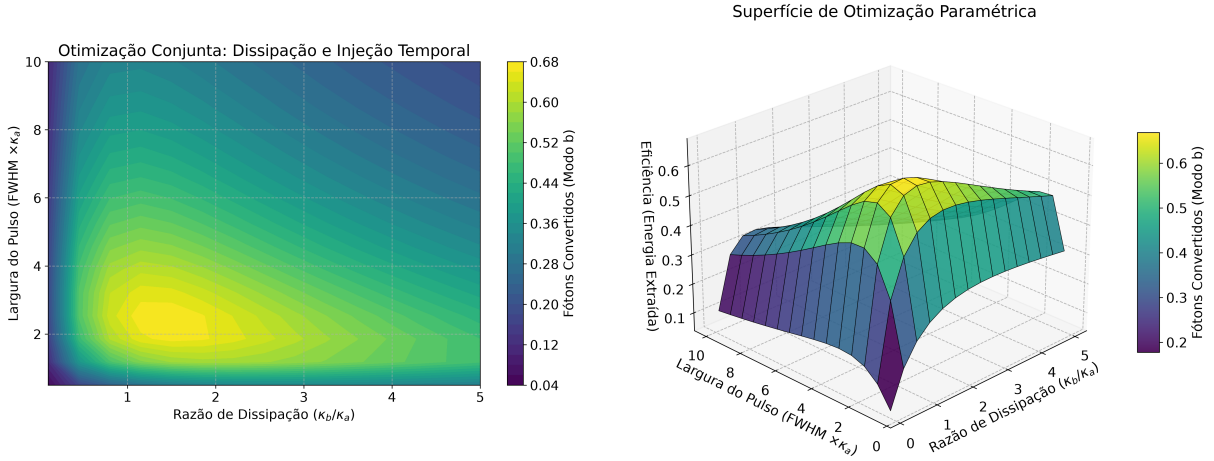
Assim, a física do processo paramétrico de dois fótons impõe condições operacionais opostas para os ressonadores. A cavidade de entrada (a) necessita acumular o pacote incidente e reter o par de fótons tempo suficiente para que a absorção atômica conjunta ocorra. Consequentemente, a taxa de interação átomo-campo neste modo deve suplantar

o vazamento externo, forçando o espelho de injeção a operar no regime de acoplamento forte ($g_a > \kappa_a$). Sem esse bloqueio temporal, a luz escapa de volta para o ambiente livre antes de excitar o emissor central.

Em contrapartida, a mecânica da cavidade de saída (b) obedece a uma lógica invertida. Uma vez que o átomo efetua a transição ascendente e emite o fóton de alta energia, o ressonador não pode manter a partícula confinada. A retenção do fóton induz inevitavelmente a sua reabsorção pelo átomo, acionando a conversão descendente e aprisionando o sistema em ciclos improdutivos de Rabi. Para abortar essa reversibilidade e vencer a emissão espontânea (Γ), a taxa de extração do espelho de saída precisa dominar o acoplamento atômico nesse mesmo modo. A cavidade b deve operar no limite de forte dissipação (*bad cavity limit*), garantindo a condição matemática $\kappa_b > g_b$.

O alinhamento simultâneo dessas duas exigências físicas consolida a hierarquia que rege o dispositivo: $\kappa_b > g_b > g_a > \kappa_a$ [19]. A imposição direta dessa desigualdade quebra a simetria de escape do hamiltoniano. A energia depositada lentamente em a sofre a transição de frequência e encontra um espelho altamente transparente em b, escapando de forma quase instantânea para o canal de *Input-Output* [20].

Figura 3.4: Mapeamento da eficiência de conversão.



Fonte: Autora (2026).
Nota: A topografia da superfície evidencia uma combinação ótima que requer o alinhamento simultâneo entre a taxa de extração dominante na porta b e o tempo característico do pulso incidente.

Para visualizar a viabilidade de controle paramétrico sob esse regime assimétrico, a rotina de integração gerou um mapeamento completo do espaço de parâmetro avaliando a eficiência do perfil de emissão. A Figura 3.4 apresenta a projeção da energia extraída através de um mapa de densidade de curvas de nível e de uma superfície tridimensional, exibindo a magnitude do espalhamento em função da razão de vazamento estrutural κ_b/κ_a e da largura do pulso. A análise desses mapas revela um máximo de eficiência correspondente a $0,676$ fótons extraídos (aproximadamente $67,6\%$ de conversão), atingido no ponto em que a razão de dissipação é $\kappa_b/\kappa_a = 1,50$ e a duração ótima do pulso é $\text{FWHM} = 2,54/\kappa_a$.

3.1.3 Quebra de Simetria do Acoplamento Atômico

A imposição da hierarquia $\kappa_b > g_b > g_a > \kappa_a$ induz a extração do fóton pela cavidade b, forçando o escoamento direcional. Esse arranjo contorna a reabsorção atômica, mas a maximização da eficiência de conversão demanda o balanceamento das taxas de interação interna para impedir retransmissões pela cavidade de entrada. O regime de excitação ideal opera através de um ciclo de oscilação de Rabi acoplado: o átomo absorve dois fótons da cavidade a (transição do estado $|2, 0, g\rangle$ para $|0, 0, e\rangle$) e, subsequentemente, decai emitindo um único fóton na cavidade b (transição $|0, 0, e\rangle$ para $|0, 1, g\rangle$) [21]. A avaliação algébrica desse ciclo revela uma assimetria fundamental embutida nos elementos de matriz do hamiltoniano de Jaynes-Cummings não linear.

O hamiltoniano de interação estabelece que o átomo se acopla ao campo da cavidade a através do termo $g_a\sigma_+\hat{a}^2$. O operador de aniquilação duplo ($\hat{a}^2$) atua sobre o estado inicial contendo dois fótons ($|2\rangle_a$) para transferir a energia para o emissor. Pela álgebra dos operadores bosônicos, a aplicação sucessiva da aniquilação produz a transformação $\hat{a}^2|2\rangle = \hat{a}(\sqrt{2}|1\rangle) = \sqrt{2}|0\rangle$. O cálculo do elemento de matriz para essa dinâmica de absorção fornece o escalar de transição $\langle 0|\hat{a}^2|2\rangle = \sqrt{2}$. O produto numérico desse escalar pela constante de acoplamento original do termo (g_a) impõe que a taxa efetiva de interação no canal de entrada atinja a magnitude exata de $\sqrt{2}g_a$. Em contrapartida, a criação isolada do fóton no modo de alta frequência ($|0\rangle_b \to |1\rangle_b$) governada pelo termo $g_b\sigma_-\hat{b}^\dagger$ acarreta um elemento de matriz unitário ($\langle 1|\hat{b}^\dagger|0\rangle = 1$), gerando uma taxa de emissão efetiva igual ao próprio g_b.

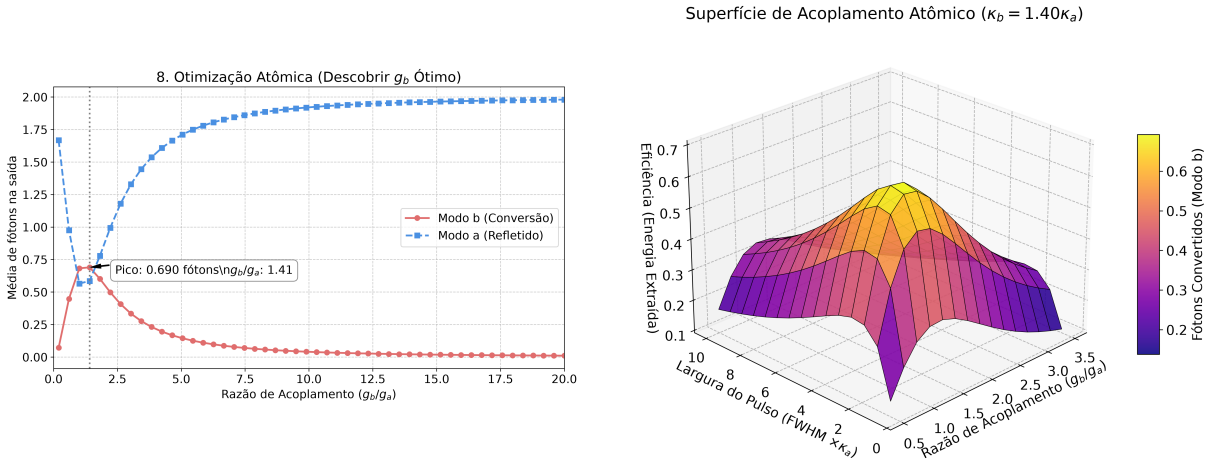
A imposição de uma condição simétrica nos acoplamentos ($g_a = g_b$) desequilibra as frequências de Rabi do sistema ($\sqrt{2}g_a \neq g_b$). Essa diferença de taxas impede que as duas metades do ciclo de conversão evoluam de forma sincronizada. No contexto do formalismo de *Input-Output*, a extração da energia pela porta b requer que a reflexão do pulso incidente na porta a seja nula. Esse cancelamento ocorre exclusivamente por interferência destrutiva: a função de onda do campo eletromagnético intracavidade precisa adquirir um deslocamento de fase de π para anular a amplitude do campo que atinge o espelho externo. Matematicamente, a evolução coerente deve transitar o estado $|2, 0\rangle$ para o seu exato oposto, $-|2, 0\rangle$.

A assimetria nas velocidades de transição ($\sqrt{2}g_a \neq g_b$) bloqueia essa inversão. Como a etapa de absorção opera a uma taxa superior à etapa de emissão, a oscilação de Rabi perde a sua regularidade periódica. Esse descompasso evolutivo gera retenção de população no estado atômico intermediário. Com a probabilidade distribuída de forma assimétrica, o vetor de estado não consegue completar o semiciclo com magnitude total, o que impede a função de onda de alcançar a amplitude negativa unitária (-1) de forma exata. A falha em atingir a fase de π inviabiliza a interferência destrutiva, permitindo que uma parcela da energia injetada escape de volta para o vácuo através do espelho de injeção a.

Para restaurar a interferência destrutiva e garantir o roteamento determinístico da luz

para o canal útil, o modelo exige a quebra da simetria paramétrica de acoplamento. O balanço demanda a calibração $g_b = \sqrt{2}g_a$. Sob essa restrição, o sistema adquire taxas efetivas idênticas. Esse ajuste equaliza as velocidades de oscilação, viabiliza a evolução coerente até a inversão completa de fase e conduz o dispositivo ao seu limite de eficiência teórica [22].

Figura 3.5: Rastreamento da emissão de alta frequência em resposta à quebra paramétrica do hamiltoniano.



Fonte: Autora (2026).
Nota: A varredura plana (esquerda) e o mapeamento tridimensional (direita) provam que a eficiência atinge seu limite estritamente no cume topográfico onde $g_b = \sqrt{2}g_a$, confirmando a restauração do balanço de Rabi e o deslocamento de fase de π exigido pela interferência destrutiva.

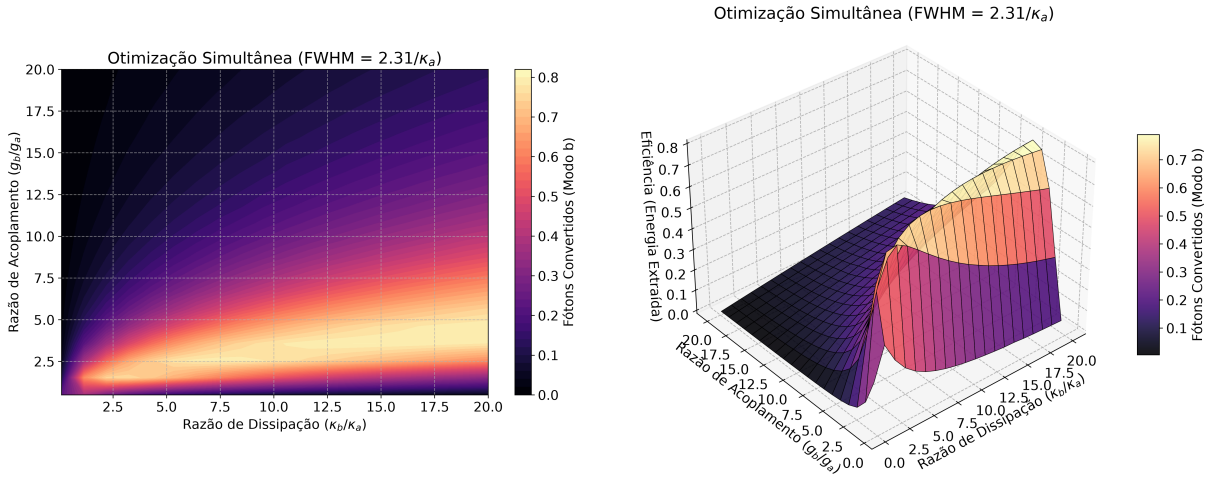
Embora a avaliação algébrica isolada do sistema fechado sugira a condição estrita $g_b = \sqrt{2}g_a$ para o balanço das frequências de Rabi, o acoplamento ao contínuo externo e a presença de taxas assimétricas de decaimento modificam o balanço efetivo da evolução coerente. A forte dissipação altera o tempo de vida do estado intermediário atômico, modificando a dinâmica efetiva que determina a condição ótima de conversão.

Para investigar quantitativamente essa interdependência, realizou-se um mapeamento simultâneo do espaço de parâmetros. Mantendo o pacote de onda incidente travado em sua duração temporal ótima (FWHM fixo), o algoritmo varreu simultaneamente a razão de dissipação (κ_b/κ_a) e a razão de acoplamento (g_b/g_a), extraindo a energia convertida para um amplo espectro.

Os diagramas paramétricos gerados por esse rastreamento simultâneo (Figura 3.6) revelam a interdependência estrutural do sistema. Os resultados mostram que a razão de acoplamento que maximiza a eficiência não é uma constante universal do modelo, mas depende da razão entre as taxas dissipativas das cavidades. À medida que κ_b/κ_a aumenta, a região de máxima eficiência desloca-se para valores mais elevados de g_b/g_a, evidenciando a forte interdependência entre os processos coerentes e dissipativos que governam a conversão ascendente. A análise explícita deste espaço de parâmetros revela que a conversão

atinge seu limite máximo de $0,800$ fótons extraídos ($80,0\%$ de eficiência) quando o arranjo atinge o balanço estrutural coordenado por $\kappa_b/\kappa_a = 13,72$ e $g_b/g_a = 3,58$.

Figura 3.6: Mapeamento paramétrico avaliando a eficiência de conversão em resposta à otimização simultânea dos espelhos e do acoplamento atômico (para o tempo de pulso ótimo fixado).



Fonte: Autora (2026).
Nota: A crista topográfica evidencia que a região de máxima eficiência desloca-se ao longo do plano de parâmetros à medida que a assimetria dissipativa κ_b/κ_a aumenta.

3.1.4 Dinâmica Populacional Otimizada e Eficiência de Conversão

A calibração temporal do pacote incidente, aliada à configuração da hierarquia de parâmetros ($\kappa_b > g_b > g_a > \kappa_a$) e ao balanceamento otimizado de acoplamento ($g_b = 3,58g_a$), encerra a etapa de otimização do protocolo paramétrico. A integração numérica desse conjunto coordenado de parâmetros delineia a dinâmica temporal ótima do arranjo cruzado.

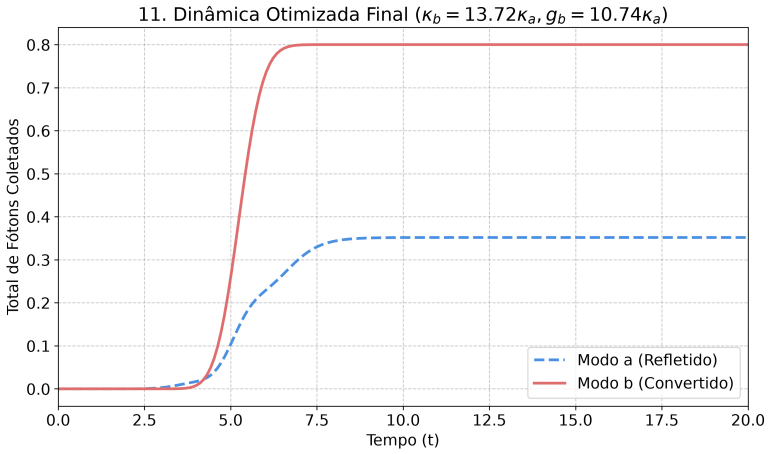
Para quantificar o desempenho definitivo da arquitetura, a rotina de processamento efetuou a integração temporal do fluxo de fótons no espelho de saída, determinando a energia líquida emitida no canal de alta frequência. Esse cálculo estabelece o valor da eficiência total de conversão ascendente do sistema. A Tabela 3.1 compila o conjunto paramétrico correspondente ao máximo global de eficiência obtido a partir do mapeamento numérico simultâneo.

Tabela 3.1: Conjunto de parâmetros estruturais e temporais que maximizam a eficiência radiativa do processo de conversão ascendente.

Parâmetro Físico	**Valor Otimizado / Relação**
Duração do Pulso (FWHM)	$2,31/\kappa_a$
Dissipação da Cavidade a (κ_a)	$1,0$ (Unidade de Referência)
Dissipação da Cavidade b (κ_b)	$13,72\kappa_a$
Acoplamento Atômico a (g_a)	$3,0\kappa_a$
Acoplamento Atômico b (g_b)	$3,58g_a \approx 10,74\kappa_a$
Eficiência de Conversão (Canal b)	$80,0\%$

A Figura 3.7 apresenta a evolução temporal da dinâmica do sistema utilizando os parâmetros otimizados. O perfil atesta a supressão das oscilações de Rabi reversas e demonstra a extração rápida e direcional da excitação para a porta b, convalidando fisicamente o balanço estrutural estabelecido no modelo.

Figura 3.7: Perfil evolutivo do sistema operando na parametrização otimizada integral.



Fonte: Autora (2026).
Nota: O balanço entre a assimetria de perdas radiativas e o acoplamento atômico suprime as oscilações reversas, ejetando o fluxo de energia massivamente pelo canal de alta frequência.

Além do ganho de eficiência evidenciado pelo fluxo integrado de energia, a avaliação da estatística do campo radiado atesta o regime de operação do dispositivo. O cálculo do grau de coerência de segunda ordem em atraso zero, $g^{(2)}(0)$, permite distinguir o regime de emissão do fóton de alta frequência. A simulação da matriz otimizada gera um valor de $g^{(2)}(0) \approx 0$. Essa nulidade numérica comprova o antibunching e a ausência estrita de emissão multifotônica no canal b. O resultado garante que a conversão espacial opera restrita a processos de espalhamento individuais isolados, consolidando o arranjo de cavidades cruzadas como uma fonte determinística de fótons únicos de frequência transladada.

4 CONCLUSÕES

O presente trabalho investigou a dinâmica de conversão paramétrica ascendente de dois fótons em um sistema de cavidades cruzadas acopladas a um átomo de dois níveis. Por meio de uma abordagem sistemática que integrou a teoria de sistemas quânticos abertos, o formalismo de equações mestras para estados de Fock incidentes e a teoria de Input-Output de Collett-Gardiner, foi possível modelar o espalhamento transiente e quantificar a eficiência de conversão do dispositivo.

Inicialmente, a análise formal demonstrou que a não linearidade inerente ao termo de interação de dois fótons ($\hat{a}^2\sigma_+$) não é eliminada por aproximações de linearização convencionais, como a de Holstein-Primakoff. Essa limitação analítica exigiu o desenvolvimento de uma abordagem numérica baseada na integração temporal vetorizada da dinâmica no espaço de Liouville, incorporando de forma consistente os processos dissipativos por meio do formalismo de Lindblad e preservando o traço da matriz densidade ao longo da evolução.

A análise paramétrica revelou que a otimização simultânea permite superar as limitações das varreduras isoladas, identificando quantitativamente a região de operação associada à máxima eficiência observada. O processo atingiu uma conversão de $80,0\%$ na condição de forte assimetria controlada, dada por $g_b = 3,58g_a$ e $\kappa_b = 13,72\kappa_a$. Os resultados demonstraram que, embora a eficiência do sistema seja inerentemente limitada pela competição entre o canal de saída útil e as perdas dissipativas, o ajuste adequado e coordenado dos acoplamentos assimétricos permite elevar substancialmente o desempenho do arranjo em relação à configuração simétrica de referência.

Como perspectivas para investigações futuras, destacam-se extensões naturais do modelo desenvolvido, tais como a introdução de múltiplos átomos no ressonador, a avaliação de diferentes perfis temporais para o pacote de onda incidente, a otimização simultânea de taxas de perda e acoplamento e a investigação de processos de conversão ascendente de ordens superiores.

Dessa forma, este trabalho contribui para a compreensão dos mecanismos fundamentais da conversão paramétrica ascendente em sistemas de cavidades acopladas, estabelecendo um referencial teórico e numérico para a investigação de processos de conversão paramétrica e a engenharia de interações não lineares em sistemas de cavidades quânticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] REISERER, A.; REMPE, G. Cavity-based quantum networks with single atoms and optical photons. *Rev. Mod. Phys.*, v. 87, p. 1379–1418, 2015.

[2] FELICETTI, S. et al. Two-photon quantum Rabi model with superconducting circuits. *Phys. Rev. A*, v. 97, p. 013851, 2018.

[3] SOLAK, L. O. R.; ROSSATTO, D. Z.; VILLAS-BOAS, C. J. Universal quantum computation using atoms in cross-cavity systems. *Phys. Rev. A*, v. 109, p. 062620, 2024.

[4] GUERREIRO, T. et al. Interaction of independent single photons based on integrated nonlinear optics. *Nature Communications*, v. 4, n. 2324, p. 1–6, 2013.

[5] XIANG, T. et al. Single-photon frequency conversion via cascaded quadratic nonlinear processes. *Physical Review A*, v. 97, n. 6, p. 063810, 6 2018.

[6] OI, A. Y. *Conversor de luz coerente em luz comprimida*. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física)) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2024.

[7] JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, v. 51, p. 89–109, 1963.

[8] SOLAK, L. O. R. et al. Quantum resonator as a directional quantum emitter. *Adv Quantum Tech*, v. 9, p. e00710, 2026.

[9] BARAGIOLA, B. Q. et al. N-photon wave packets interacting with an arbitrary quantum system. *Phys. Rev. A*, v. 86, p. 013811, 2012.

[10] WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum Optics*. 1. ed. Berlin: Springer, 1994.

[11] GERRY, C.; KNIGHT, P. L. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[12] SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[13] FELICETTI, S.; HWANG, M.-J.; BOITé, A. L. Ultrastrong-coupling regime of nondipolar light-matter interactions. *Phys. Rev. A*, v. 98, p. 053859, 2018.

[14] CONG, L. et al. Selective interactions in the quantum Rabi model. *Phys. Rev. A*, v. 101, p. 032350, 2020.

[15] BERTET, P. et al. Dephasing of a flux-qubit coupled to a harmonic oscillator. *arXiv preprint cond-mat/0507290*, 2005.

[16] BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[17] GARDINER, C.; ZOLLER, P. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. 3. ed. Berlin: Springer, 2004.

[18] COLLETT, M. J.; GARDINER, C. W. Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification. *Physical Review A*, v. 30, n. 3, p. 1386–1391, 1984.

[19] RASPUTNYI, A. V.; KOPYLOV, D. A. Quantum spatial dynamics of high-gain parametric down-conversion accompanied by cascaded up-conversion. *Physical Review A*, v. 104, p. 013702, 2021.

[20] ROY, A. et al. Non-equilibrium spectral phase transitions in coupled nonlinear optical resonators. *Nature Physics*, v. 19, 2023.

[21] WU, H.; YANG, Z.-B.; ZHENG, S.-B. Two-photon absorption and emission by rydberg atoms in coupled cavities. *Physical Review A*, v. 88, p. 043816, 2013.

[22] SANTOS, L. F.; SANTOS, F. G.; DOLGALEVA, K. Degenerate optical parametric oscillation in coupled cavities. In: *Optica Publishing Group*. Washington, D.C.: Optica Publishing Group, 2024.