

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Débora da Silva Soares

**Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de
Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do
software?**

Tese de Doutorado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho,
como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Doutora em Educação
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo de Carvalho
Borba

Rio Claro - SP

2012

510.07 Soares, Débora da Silva
S676a Uma abordagem pedagógica baseada na análise de
modelos para alunos de biologia: qual o papel do software? /
Débora da Silva Soares. - Rio Claro : [s.n.], 2012
341 f. : il., figs., tabs., quadros

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Marcelo de Carvalho Borba

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino de cálculo. 3.
Equações diferenciais ordinárias. 4. Tecnologias digitais. 5.
Análise de modelos. 6. Modelagem matemática. I. Título.

Débora da Silva Soares

**Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de
Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do
software?**

Tese de Doutorado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho,
como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Doutora em Educação
Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba

Prof.^a Dr.^a Carina Alves

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Prof.^a Dr.^a Lourdes Maria Werle de Almeida

Prof. Dr. Otávio Jacobini

Rio Claro, 6 de dezembro de 2012.

Resultado: APROVADA

*Ao meu marido, Níccholas, que
vivenciou comigo estes quatro anos sempre
me apoiando, amando e me incentivando a sonhar.*

*Aos meus pais Zilá e Eloadir,
e à minha irmã Paula,
que sempre foram e sempre serão
meu porto seguro.*

Agradecimentos

Quando optamos por trilhar um caminho em busca da realização de um sonho, sabemos que nem sempre a caminhada será fácil. As pedras aparecerão pelo caminho, mas com perseverança e dedicação conseguimos ultrapassá-las e alcançarmos o nosso destino. Neste trajeto, aqueles que nos cercam e nos acompanham na caminhada são fundamentais para que tenhamos força, coragem e ousadia para superar os desafios que se apresentam. E, portanto, o momento em que alcançamos nosso objetivo também é um momento para refletir e agradecer a todos os amigos que fizeram parte da nossa conquista.

É com este espírito que inicio agradecendo a Deus, por esta vida – e por ter a oportunidade sonhar; pela saúde – que me permitiu realizar este sonho; pela coragem e pela perseverança – que desenvolvi ao longo do caminho; pela família e amigos – que foram fundamentais para manter o amor e a vontade em meu coração. Agradeço também aos amigos espirituais, que acompanharam todo este processo e me em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, muito obrigada por ter me recebido de braços abertos no grupo de pesquisa e ter me proporcionado diversas oportunidades de crescimento e aprendizagem. Obrigada por às vezes ser mais do que um professor orientador e ser um amigo. Obrigada pelas oportunidades que me ofereceu de desenvolver dois estágios sanduíches, com os quais muito aprendi em todos os aspectos da minha vida. Aproveito para agradecer ao Prof. Dr. George Gadanidis e à Prof.^a Dr.^a Gabriele Kaiser que me receberam em seus países, suas universidades e seus grupos de pesquisa durante os estágios.

Aos professores João Frederico Meyer, Otávio Jacobini, Carina Alves e Lourdes Werle de Almeida, por aceitarem fazer parte da comissão examinadora deste trabalho. Eu vos agradeço por toda a dedicação na leitura e elaboração de críticas e sugestões sobre a pesquisa, que me convidaram a refletir sobre minhas ideias e a desenvolver um trabalho melhor.

Aos colegas do grupo GPIMEM, muito obrigada pela companhia durante estes quatro anos, pelo apoio e incentivo. Obrigada pelas críticas, sugestões e discussões desenvolvidas com relação às minhas produções acadêmicas. Obrigada pelas oportunidades de aprendizado que me proporcionaram em diferentes momentos de convivência. Ana Paula Malheiros, Vinícius Machacheski, Ricardo Scucuglia, Rúbia Amaral, Rejane Faria, Silvana Santos, Felipe Heitmann, Maria Teresa Zampieri, Tiago Giorgetti, Fernando Trevisani, Aparecida Chiari, Nilton Domingues, Sueli Javaroni, Marcus Maltempi, Silvia Aimi, Daise Lago, Fabian

Posada, Mirela Siqueira, Lucas Mazzi e Luana Oliveira: minha vida foi muito mais alegre e meu trabalho mais bem desenvolvido por causa de vocês!

Agradeço em especial à mais que amiga Daise Lago, que muitas vezes compartilhou meus momentos de insegurança e dúvida, e que em outras muitas vezes me acolheu como filha. Obrigada pelos conselhos, pelas leituras e sugestões nos meus trabalhos, pelas palavras de incentivo e pela confiança.

A todos os colegas, professores e funcionários da PPGEM, muito obrigada por compartilharem comigo parte de suas vidas, de seus sonhos e de suas ideias. A convivência com vocês muito me ensinou em termos acadêmicos e pessoais. Foram momentos muito importantes para mim, por meio dos quais pudemos desenvolver laços de coleguismo, mas também laços de amizade que, tenho certeza, irão perdurar por nossas vidas. Em especial agradeço à Ana Paula Baumann, Juliana Viol, Marinéia Silva, por serem companhias especiais em vários momentos ao longo desses anos.

Aos alunos das turmas da disciplina Matemática Aplicada, do curso de Biologia, muito obrigada por me receberem em seu grupo e por permitirem que desenvolvesse as atividades planejadas como base para esta pesquisa. Obrigada por serem compreensivos, pacientes e, mesmo frente às várias dificuldades, terem sido persistentes para me acompanhar nesse caminho de aprendizagem, descoberta e crescimento.

Ao meu professor de flauta, Cirillo, e às minhas professoras de sapateado, Aline e Patrícia, que me proporcionaram um aprendizado ímpar sobre a arte, muito obrigada. O estudo da música e da dança me oportunizou momentos de descontração, mas também de evolução pessoal, que foram fundamentais para a manutenção da minha saúde mental e física, e para a inspiração no desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu marido, Nícholas, muito obrigada por ter embarcado nesta caminhada comigo e por ter me acompanhado durante estes quatro anos na cidade que me acolheu para a realização deste sonho. Muito obrigada por todas às vezes que me apoiou, aconselhou e auxiliou na realização da minha pesquisa. Muito obrigada por me ensinar a ser paciente, por me ensinar a andar com minhas próprias pernas (principalmente no exterior), e por me apoiar virtualmente quando estivemos distantes. Obrigada por ser meu amigo, meu guia turístico e planejar viagens e momentos de descontração. Obrigada pela sua fidelidade e carinho.

Aos meus pais, Zilá e Eloadir, muito obrigada por estarem sempre presentes mesmo que estivéssemos fisicamente distantes. Obrigada por escutarem minhas dificuldades e por me aconselharem a não desistir e a seguir em frente, e por acompanharem a realização deste sonho deste o início do seu planejamento. Agradeço também à minha irmã, Paula, que sempre

estive na torcida por mim e, apesar da distância, nunca deixou de me acompanhar. Obrigada por serem meu porto seguro.

Aos meus sogros, Rosa e Ribas, e aos meus cunhados, Penélope e Ricardo, muito obrigada pelos conselhos, pelo apoio e pelo auxílio em vários momentos. Aos meus familiares, muito obrigada pela compreensão com relação à distância e por me desejarem seus votos de sucesso e alegria. Aos meus amigos, muito obrigada por manterem o contato e compartilharem comigo as suas conquistas e por vibrarem com as minhas.

O sonho, que está materializado no presente texto, não foi, de fato, conquistado individualmente. Cada um de vocês possui uma parcela de contribuição ímpar neste processo e, por tudo isso, eu só tenho a agradecer...

Resumo

O objetivo desta pesquisa é investigar qual o(s) papel(éis) de um software no desenvolvimento de uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos. Esta abordagem foi elaborada para alunos do curso de Biologia da Unesp, campus de Rio Claro, SP, que fazem a disciplina Matemática Aplicada. A ementa da disciplina inclui o estudo de funções, noções de limite, derivada e integral, e suas aplicações, configurando-se como uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I com carga horária reduzida. O termo Análise de Modelos é utilizado para caracterizar a ideia central da abordagem pedagógica, a saber, propor aos alunos a análise de um modelo matemático para um fenômeno de sua área de interesse desde o primeiro dia do semestre letivo. Esta análise tem como foco o entendimento das equações do modelo e o estudo do comportamento de suas soluções, assim como a influência dos parâmetros do modelo neste comportamento. Além disso, esta análise é proposta de modo que possa ser relacionada com alguns dos conteúdos previstos na ementa da disciplina, em particular funções e derivada. O fenômeno biológico proposto para estudo foi o da transmissão da malária e o modelo matemático analisado foi o modelo de Ross-Macdonald. O objetivo desta pesquisa está relacionado com o construto teórico seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), que delega um papel central às mídias nos processos de produção de conhecimento. Partindo deste pressuposto, quer-se identificar estes papéis e refletir sobre os mesmos com relação à abordagem pedagógica estruturada. Os dados desta pesquisa foram construídos por meio da aplicação da abordagem pedagógica a duas turmas regulares da disciplina, seguindo uma metodologia qualitativa. A partir da análise dos dados foi possível identificar três papéis para o software: fornecer resultados sobre o fenômeno biológico; contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos; mediar o estabelecimento de relações entre Matemática e Biologia. Mais ainda, a inter-relação entre esses três papéis constitui um papel central do software: permitir que os alunos tenham acesso a um modelo matemático razoavelmente acurado para um fenômeno biológico e, por meio de sua análise, discutir alguns aspectos dos conceitos matemáticos relacionados ao modelo, fomentando reflexões matemáticas, biológicas e interdisciplinares entre os alunos.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo. Equações Diferenciais Ordinárias. Tecnologias Digitais. Análise de Modelos. Modelagem Matemática.

Abstract

The aim of this research is to investigate the role of a software program in the development of a teaching approach based on Model Analysis. This teaching approach was developed for Biological Sciences students at the State University of São Paulo, Rio Claro, SP, enrolled in the Applied Mathematics course. The syllabus of this course includes the study of functions, notions of limits, derivatives and integrals, and their applications, comparable to a Differential and Integral Calculus I course, however with a reduced workload. The term Model Analysis is used to characterize the central idea of the teaching approach, which is to propose to the students the analysis of a mathematical model for a phenomenon in the area of their interest since the first day of class. This analysis focuses on students' comprehension of the model's equations and the study of the behavior of the solutions it provides, as well as the influence of the parameters in this behavior. Furthermore, this analysis is proposed in a way that it can be related to some of the subjects in the syllabus of the discipline, in particular functions and derivatives. The biological phenomenon studied was the transmission of malaria, and the mathematical model analyzed was the Ross-Macdonald model. The aim of this research is related to the theoretical construct humans-with-media (BORBA; VILLARREAL, 2005), which emphasizes a central role of media in the processes of knowledge production. Under this assumption, my objective was to identify these roles and reflect about them in relation to the teaching approach. The data for the research was collected during the application of the teaching approach in two regular classes of the course, using a qualitative methodology. From the data analysis, it was possible to identify three roles of the software: to provide results about the biological phenomenon; to contribute to the comprehension of mathematical concepts; and to mediate the establishment of relations between Mathematics and Biology. Furthermore, the interrelation between these three roles constitutes a central role of the software: to allow the students to have access to a reasonable accurate model for a biological phenomenon and, through its analysis, to discuss some aspects of mathematical concepts related to the model, instigating mathematical, biological and interdisciplinary reflections among the students.

Key-words: Teaching of Calculus. Ordinary Differential Equations. Digital Technologies. Model Analysis. Mathematical Modelling.

Lista de Figuras

Figura 1 - Ciclo de Vida do Plasmodium Vivax.	38
Figura 2 - Fluxograma representativo da dinâmica de transmissão da malária segundo o modelo de Ross-Macdonald. Adaptado de Basañez e Rodríguez (2004).....	40
Figura 3 - Representação da estrutura de dupla hélice do DNA.	45
Figura 4 - Vários pontos (X,Y) associados aos respectivos vetores-direção $(f_1(X,Y), f_2(X,Y))$ calculados pelo sistema (2.9) cujos valores estão na Tabela 1.	62
Figura 5 - Campo de direções e algumas trajetórias do sistema (2.9).	63
Figura 6 - Gráfico da X nullcline para o sistema (2.9).	65
Figura 7 - Gráfico da Y nullcline para o sistema (2.9).....	66
Figura 8 - Gráficos das X e Y nullclines para o sistema (2.9) com seus pontos de intersecção.	67
Figura 9 - Nullclines acompanhadas dos vetores diretores.	69
Figura 10 - Vetores diretores ao longo do eixo Y	70
Figura 11 - Vetores diretores ao longo do eixo X	70
Figura 12 - Plano de Parâmetros $\beta\gamma$ mostrando o comportamento das trajetórias de sistemas lineares de acordo com o ponto de equilíbrio. Edelstein-Keshet (2005, p.190).	72
Figura 13 - Plano de fase do sistema (2.9) com algumas trajetórias (em roxo) e as nullclines (curvas rosa e azul).	74
Figura 14 - Tela do Modellus com o modelo de Ross-Macdonald.	94
Figura 15 - Esquema representando as etapas de um processo de Modelagem.	106
Figura 16 - Esquema não-linear das etapas envolvidas em um processo de Modelagem.	107
Figura 17 - Esquema de modelagem proposto por Blum e Leiß (2007). Extraído de Blum (2011).	107
Figura 18 - Gráfico da função $y=x^2.e^x$ proposto para investigação. Adaptado de Borba e Villarreal (2005).	121
Figura 19 - Gráficos de $X(t)$ (vermelho) e $Y(t)$ (roxo) plotados simultaneamente.	137
Figura 20 - Gráficos de $X(t)$ para três casos distintos.	139
Figura 21 - Gráficos de $X(t)$. Gráfico verde: $a=0.6$; gráfico laranja: $a=0.29$	141
Figura 22 - Gráfico de $X(t)$ (roxo) com reta secante (vermelha) passando pelos pontos	143
Figura 23 - Gráfico de $X(t)$ com opção "Tangentes" ativada.	143
Figura 24 - Gráficos de $X(t)$ e $Y(t)$ com modificação no parâmetro M	144

Figura 25 - Exemplo de solução no plano de fase XxY .	145
Figura 26 - Reta Tangente acompanhando a construção do gráfico.	163
Figura 27 - Gráficos de $X(t)$ para três casos distintos.	182
Figura 28 - Trajetória do retrato de fase XxY para $c=0.01$.	186
Figura 29 - Trajetória do retrato de fase $XxY - c=0.01$.	188
Figura 30 - Trajetória do retrato de fase $XxY - c=0.1$.	188
Figura 31 - Trajetória do retrato de fase $XxY - c=0.9$.	189
Figura 32 - Gráficos de $X(t)$ (vermelho) e de $Y(t)$ (roxo) plotados simultaneamente.	190
Figura 33 - Tabela e gráfico da função $X(t)$ para três casos distintos:	192
Figura 34 - Gráficos de $X(t)$ (roxo) e $Y(t)$ (vermelho) plotados simultaneamente.	195
Figura 35 - Gráfico e tabela da função $X(t)$ em dois casos distintos:	200
Figura 36 - Gráfico gerado com o recurso de animação do Modellus.	200
Figura 37 - Gráfico de $X(t)$ com a opção “Tangentes” ativada	209
Figura 38 - Gráficos de $X(t)$ para t máximo igual a 40.	211
Figura 39 - Tabela e retrato de fase XxY para $c=0.01$ e t máximo igual a 100.	213
Figura 40 - Sequência de imagens mostrando o uso do zoom para analisar o gráfico XxY próximo da origem.	214
Figura 41 - Retrato de fase XxY para $c=0.1$ com valor máximo de t igual a 150.	215
Figura 42 - Gráficos de $X(t)$ (roxo) e $Y(t)$ (verde).	220
Figura 43 - Gráfico de $X(t)$ para o caso 1 com opção "Tangentes" ativada.	221

Lista de Quadros

Quadro 1 – Hipóteses do Modelo Ross-Macdonald.....	38
Quadro 2 - <i>Design Research</i> : Um experimento de ensino em três camadas.....	102
Quadro 3 - Primeiras questões da Atividade 3.	130

Lista de Tabelas

Tabela 1: Cálculo de $f_1(X,Y)$ e $f_2(X,Y)$ a partir de valores arbitrários para X e Y . Tabela elaborada no <i>Excel</i>	62

Sumário

Introdução	18
Capítulo 1 – Sobre Modelos Matemáticos na Educação Matemática e a Abordagem Pedagógica.....	24
1.1 Pesquisas em Educação Matemática envolvendo modelos matemáticos	26
1.1.1 Pesquisas sobre Modelagem e Tecnologias	26
1.1.2 Pesquisas sobre Modelagem e Ensino Superior	29
1.1.3 Pesquisas sobre Modelagem, Tecnologias e Ensino Superior	34
1.2 O fenômeno biológico e seu modelo matemático: alicerçando a abordagem pedagógica	36
1.2.1 Transmissão da malária	36
1.2.2 Um modelo matemático para a transmissão da malária	38
1.3 A abordagem pedagógica.....	42
1.4 Minha pesquisa em meio às demais.....	46
Capítulo 2 – Sobre Sistemas Dinâmicos	49
2.1 Sistemas dinâmicos, equações diferenciais ordinárias e pesquisas sobre seu ensino	49
2.2 Análise qualitativa de um sistema dinâmico.....	57
2.3 Sistemas de equações diferenciais ordinárias	58
2.4 Retomando a abordagem pedagógica... ..	74
2.5 Síntese das ideias	77
Capítulo 3 - Metodologia de Pesquisa e Procedimentos Metodológicos	79
3.1 Sobre a perspectiva metodológica assumida.....	79
3.2 Procedimentos metodológicos de pesquisa.....	82
3.2.1 Momentos de construção dos dados.....	82
3.2.2 Projeto piloto	85
3.2.3 Momento 1 de construção dos dados – Turma de 2010.....	86
3.2.4 Momento 2 de construção dos dados – Turma de 2011	88
3.2.5 Natureza das atividades propostas.....	89

3.2.6 Natureza do software <i>Modellus</i>	92
3.2.7 Fontes de dados	95
3.2.8 Análise dos dados.....	98
3.3 A proposta como parte do desenvolvimento da pesquisa	100
Capítulo 4 – Fundamentação Teórica.....	104
4.1 Modelagem Matemática, Aplicações.....	104
4.2 Análise de Modelos.....	113
4.3 Visão epistemológica sobre as tecnologias.....	117
4.4 Tecnologias e Análise de Modelos: como se relacionam?	123
4.5 Retomando mais uma vez a abordagem pedagógica	125
Capítulo 5 – Modificações nas Atividades; Apresentação e Análise dos Dados	127
Parte 1: Considerações sobre a Abordagem Pedagógica	128
5.1 Dificuldades.....	128
5.1.1 Atividades.....	128
5.1.2 A abordagem pedagógica no dia-a-dia.....	130
5.1.3 Construção dos dados em uma turma regular	133
5.2 Mudanças na abordagem pedagógica de 2010 para 2011.....	135
5.2.1 Atividade 1	135
5.2.2 Atividade 2	136
5.2.3 Atividade 3	137
5.2.4 Atividade 4.....	138
5.2.5 Atividades 5 e 6.....	139
5.2.6 Atividade 7	142
5.2.7 Atividade 8	143
5.2.9 Atividade 9	144
5.2.10 Atividade 10	144
Parte 2: Apresentação e Análise dos Dados	146
5.3 Apresentação e Análise dos Dados Provenientes das Entrevistas	147

5.3.1 Tema 1: O software como um fornecedor de resultados sobre o fenômeno biológico	147
5.3.2 Tema 2: O software contribuindo para a compreensão de conceitos matemáticos	159
5.3.3 Tema 3: O software como um meio para relacionar Matemática e Biologia.....	166
5.3.4 Síntese das ideias.....	175
5.4 Análise dos Vídeos	176
5.4.1 Tema 1: O software como um fornecedor de resultados sobre o fenômeno biológico	176
5.4.2 Tema 2: O software contribuindo para a compreensão de conceitos matemáticos	196
5.4.3 Tema 3: O software como um meio para relacionar Matemática e Biologia.....	216
5.5 Tecendo reflexões... ..	223
5.5.1 Uma metáfora para o software	223
5.5.2 Refletindo sobre a situação imaginada.....	228
5.5.3 Análise de Modelos e Tecnologias.....	234
5.5.4 Mais mudanças.....	237
5.6 Considerações sobre os papéis do software	238
Considerações Finais	244
Referências Bibliográficas	247
Apêndice 1: Atividades Aplicadas em 2010.....	257
Atividade 1 – O Fenômeno Biológico	258
Atividade 2 – Modelo Matemático para o Fenômeno	259
Atividade 3 – Primeira análise do modelo usando o Modellus	264
Atividade 4 – Analisando parâmetros.....	270
Atividade 5 – Variação das populações ao longo do tempo (Parte 1)	274
Atividade 6 – Variação das Populações ao longo do tempo (Parte 2)	276
Atividade 7 – Derivada e Reta Tangente	278
Atividade 8 – Crescimento/Decrescimento, Máximos e Mínimos	280
Atividade 9 – Analisando uma modificação do modelo	282

Atividade 10 – Definindo Sistemas Dinâmicos (Plano de Aula).....	284
Apêndice 2: Atividades Aplicadas em 2011.....	292
Atividade 1 – O Fenômeno Biológico	293
Atividade 2 – Modelo Matemático para o Fenômeno	294
Atividade 3 – Primeira análise do modelo usando o Modellus	299
Atividade 4 – Analisando parâmetros.....	304
Atividade 5 –Taxa de Variação Instantânea e Derivada no Modelo da Malária	308
Atividade 6 – Derivada e Reta Tangente	314
Atividade 7 – Crescimento/Decrescimento, Máximos e Mínimos	315
Atividade 8 – Modificando o Modelo Inicial	317
Atividade 9 - Analisando um Plano de Fase	318
Apêndice 3: Sugestões de Modificações nas Atividades de 2011	320
Atividade 4 – Analisando parâmetros.....	321
Atividade 5 – Taxa de Variação Instantânea e Derivada no Modelo da Malária	324
Atividade 6 – Derivada e Reta Tangente	329
Atividade 7 – Crescimento/Decrescimento, Máximos e Mínimos	334
Apêndice 4: Compartilhando Experiências dos Estágios Sanduíches	336
A3.1. London, Canadá	337
A3.2 Hamburgo, Alemanha	339
A3.3 Um momento para agradecer... ..	341

Introdução

Há um bom tempo a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) é alvo de pesquisas na área de Educação Matemática. Isso se dá, em grande parte, devido à importância que recebe por parte das instituições e de professores com relação à formação dos alunos (FRANCHI, 1995). De fato, esta disciplina está presente nas grades curriculares de vários cursos de graduação (HOWSON *et al.*, 1988; BIEMBENGUT & HEIN, 1995).

Apesar de a grande maioria destes cursos não ser de Matemática, os professores que lecionam as disciplinas de Matemática para estes alunos são do Departamento de Matemática. Na verdade, um grande número de matemáticos está envolvido nesta tarefa o que, segundo Howson *et al.* (1988) é uma das razões para que disciplinas deste tipo, as quais denominam-se, de modo geral, como *disciplinas de Matemática em serviço*, sejam foco de pesquisa e discussão. Um exemplo deste tipo de disciplina, é a Matemática Aplicada ministrada aos alunos do curso de Ciências Biológicas da Unesp, campus de Rio Claro, SP. Ela é ministrada desde 1993 pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba¹, que está vinculado ao Departamento de Matemática da universidade, além de fazer parte do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, caracterizando-se, portanto, como uma disciplina de Matemática em serviço. É este o contexto desta pesquisa.

Uma abordagem pedagógica elaborada para Matemática Aplicada serve como pano de fundo para o desenvolvimento desta pesquisa. A ideia central da abordagem é propor a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico desde o primeiro dia do semestre letivo. O foco desta análise é o entendimento das equações do modelo, o estudo do comportamento de suas soluções e a influência dos parâmetros neste comportamento. Um conjunto de atividades foi elaborado para guiar o trabalho dos alunos, de modo que a análise do modelo fosse relacionada com alguns dos conceitos previstos na ementa da disciplina.

Como o leitor irá compreender ao longo deste texto, foi necessário que os alunos trabalhassem com um software, o *Modellus*, para realizar a análise do modelo matemático. A tecnologia foi utilizada para que os alunos tivessem acesso às soluções do modelo matemático proposto e na verdade é ela o foco de investigação da pesquisa. Baseando-me no construto teórico seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), entendo que as tecnologias, em particular softwares computacionais, possuem um papel central no processo de produção do conhecimento. Neste sentido, o objetivo desta pesquisa é identificar e analisar

¹ Professor orientador desta pesquisa.

este papel. Deste modo, a pergunta que orienta o estudo está assim formulada: *Qual o papel de um software no desenvolvimento de uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos²?*

Esta pergunta se torna relevante na medida em que, pressupondo um papel ativo do software no processo de produção de conhecimentos dos alunos, as possibilidades e restrições que proporciona ao trabalho necessitam ser discutidas para que modificações na proposta possam ser realizadas com o intuito de aprimorá-la. Em um âmbito mais amplo, contribui para um enriquecimento das discussões realizadas na área com relação ao papel da tecnologia nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Além disso, esta pesquisa incita discussões importantes sobre o trabalho com modelos matemáticos em sala de aula, contribui para a reflexão sobre o software como mais do que um auxiliar na sala de aula, e ainda traz um produto: uma abordagem de trabalho diferenciada para alunos de cursos que não a Matemática e que fazem CDI I, no caso desta pesquisa, a disciplina Matemática Aplicada. E por que o foco nesta disciplina?

Com o passar dos anos a presença da Matemática nos cursos universitários sofreu uma expansão: se em 1911 praticamente apenas as Engenharias possuíam disciplinas de Matemática, no final da década de 1980 e início da década de 1990 muitos outros cursos já haviam incorporado a Matemática em seus currículos, como a Medicina, a Arquitetura, a Administração, etc. (HOWSON et al., 1988). Hoje em dia encontramos áreas interdisciplinares bem fundamentadas, como a Biomatemática e a Geoestatística.

A incorporação da Matemática ao currículo de outros cursos justifica-se pelo entendimento de que existem abordagens matemáticas potencialmente úteis para a análise e o entendimento de situações de diferentes áreas científicas. Entretanto, esta relevância nem sempre está em evidência nas disciplinas e diversos desafios se apresentam no ensino de disciplinas de Matemática em serviço (HOWSON et al., 1988).

Um primeiro desafio diz respeito à importância dada a este tipo de disciplina. Segundo Simons (1988), a maioria dos estudantes universitários que cursam disciplinas de Matemática não é do curso de Matemática. Apesar disso, o ensino destas disciplinas às vezes é visto pelos docentes como de importância secundária em muitas universidades. Alguns professores não gostam de lecionar em disciplinas em serviço, e isso ainda se agrava pela variedade de níveis

² Análise de Modelos é um termo que estou propondo nesta tese para caracterizar de modo geral propostas que possuem uma ideia central semelhante a que desenvolvi. No Capítulo 4 desta tese faço uma argumentação sobre a necessidade deste termo assim como explico o meu entendimento sobre ele.

de conhecimento matemático entre os alunos e com a qual o professor precisa lidar (SIMONS, 1988).

Simons (1988) ainda aponta para o desinteresse dos alunos e a pouca importância que dão às disciplinas de Matemática. Em geral, os alunos questionam a importância de aprender certos conteúdos, uma vez que não têm ideia do papel da Matemática em sua área de estudo. Por outro lado, segundo Baldino (1995) a preocupação do professor matemático, em geral, é o significado dos resultados matemáticos, seu encadeamento lógico. As aplicações são apenas casos particulares dos teoremas. Deste modo professor e alunos dão um sentido diferente ao conhecimento que permeia as aulas de Matemática.

Outra dificuldade apresentada pela literatura é que estes professores, conforme destaca Simons (1988), em geral não sabem como a Matemática é utilizada na área científica para a qual ministram cursos. Por outro lado, os professores da área não têm muito conhecimento dos conteúdos de Matemática em si e se queixam que os alunos passam pelos cursos de Matemática e não conseguem utilizar esse conhecimento para resolver problemas de sua área (SEIGEL, 1988). Ou seja, parece que a presença da Matemática nos currículos não atende ao próprio argumento que a justifica.

É importante salientar que, apesar de estas dificuldades estarem apresentadas na literatura, não seria prudente generalizá-las. Observações deste tipo em geral estão vinculadas ao contexto onde são realizadas; isto é, as estruturas social, cultural e histórica do contexto e das pessoas a ele relacionadas exercem influência sobre a constituição destas características. Assim, é prudente levar em consideração que nem todos os professores do Departamento de Matemática consideram estas disciplinas em segundo plano, ou não têm conhecimento sobre como a Matemática é utilizada em outras áreas científicas, assim como não são todos os professores das áreas específicas que não têm muito conhecimento da Matemática em si.

Dentre as disciplinas de Matemática, o CDI I é a que mais aparece nas grades curriculares dos vários cursos de graduação, apresentando uma ementa que, em geral, aborda os conteúdos de funções, limites, derivadas e integrais. A ênfase dada a cada um deles varia de acordo com sua relevância para cada um dos cursos (HOWSON *et al.*, 1988; BIEMBENGUT & HEIN, 1995). Por exemplo, a disciplina Matemática Aplicada pode ser considerada uma disciplina de CDI I, porém com carga horária semestral reduzida. Além disso, nem todos os conteúdos de uma ementa regular de Cálculo são abordados de forma aprofundada. A ênfase recai nos conceitos de funções e noções de limite, derivada e integral. As aplicações também estão previstas na ementa como algo importante.

Esta presença abrangente do CDI em diferentes cursos deve-se ao entendimento de que seus conteúdos são importantes para os alunos como base teórica e, além disso, são utilizados muitas vezes para representar e analisar fenômenos de outras áreas (FRANCHI, 1995). Os resultados do estudo realizado por Sofronas *et. al.* (2011) apontam na mesma direção ao elencar como um dos quatro principais objetivos da aprendizagem de Cálculo o desenvolvimento da habilidade de utilizar suas ideias na resolução de problemas e modelagem de fenômenos da vida real, entre outros.

Uma situação de contradição que se particulariza para a disciplina de CDI é a seguinte: apesar da relevância sinalizada anteriormente, muitas vezes a visão dos alunos com relação à disciplina é de medo, insegurança e dúvida. Isto se reflete nos altos índices de desistência e repetência registrados na disciplina nas universidades (FRANCHI, 1995; BIEMBENGUT & HEIN, 1995).

A disciplina de CDI I, portanto, é uma disciplina básica, presente em vários cursos com diferentes níveis de abordagem. Para alguns cursos, inclusive, a exemplo do curso de Biologia em questão, é a única disciplina de Matemática obrigatória prevista no currículo. Sendo assim, ela constitui-se como o único momento em que os alunos teriam a oportunidade de estudar a Matemática de forma relacionada à sua área de interesse, o que em geral não ocorre como mostram as pesquisas supracitadas. Proporcionar esta oportunidade de reflexão foi um dos motivadores para a elaboração da abordagem pedagógica e do desenvolvimento desta pesquisa. Acredito que as disciplinas básicas de Matemática são como um portal de entrada dos estudantes do Ensino Superior para o conhecimento matemático e, por esta razão, deveriam mostrar-se útil para sua área de interesse de forma a despertar a curiosidade e o desejo de se aprofundar nestes conhecimentos. Por esta razão a escolha da Matemática Aplicada como foco de pesquisa.

Com relação à pergunta diretriz, tendo em vista a presença forte das tecnologias em nossas vidas e a consolidação do uso das tecnologias como uma tendência em Educação Matemática, considero importante estudos com foco nas mesmas para que tenhamos um melhor entendimento sobre como elas interferem nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. No caso desta pesquisa, optei por analisar as tecnologias em conjunto com a Análise de Modelos, uma vez que acredito que ambas as abordagens em conjunto possuem o potencial de satisfazer a motivação desta pesquisa. De fato, a abordagem pedagógica procura enfatizar como a Matemática pode ser útil para a Biologia, utilizando os conteúdos da disciplina para analisar um modelo matemático para a transmissão da malária, que é um fenômeno biológico com o qual os alunos poderão vir a trabalhar em seu futuro profissional.

Apresentar a utilidade da Matemática para uma determinada área científica não é uma tarefa trivial, pois muitas vezes as aplicações existentes envolvem conceitos matemáticos muito avançados para os estudantes. Com a presença das tecnologias, entretanto, alguns obstáculos podem ser superados. De fato, vários dos autores do ICMI Studies (1988) discutem sobre o uso de tecnologias no trabalho com disciplinas de Matemática em serviço (HOWSON et al., 1988; SIMONS, 1988; CLEMENTS, 1988; MURAKAMI, 1988; ROUBINE, 1988).

Em um âmbito mais geral, várias pesquisas foram realizadas evidenciando as possibilidades oferecidas pelas tecnologias no ensino e aprendizagem de Matemática, inclusive com sugestões de atividades que melhor exploravam os potenciais oferecidos (HOYLES; LAGRANGE, 2010; BARBOSA, 2009; JAVARONI, 2007; OLIMPIO JUNIOR, 2006; SCUCUGLIA, 2006; BENEDETTI, 2003; SCHEFFER, 2001; VILLARREAL, 1999; DRIJVERS; DOORMAN, 1996; BORBA; CONFREY, 1996;). Entretanto, ponderações também foram feitas sobre suas limitações e também sobre a importância do que é proposto aos alunos e sobre o papel do professor. Neste sentido considero importante e necessário o estudo das tecnologias em diferentes cenários e contextos educacionais. Esta pesquisa contribui para esta discussão.

Com o objetivo de apresentar os frutos deste trabalho de pesquisa, organizei o texto em seis capítulos. No primeiro capítulo, apresento uma revisão de literatura considerando os temas abordados neste estudo, a ideia central da abordagem pedagógica, assim como o fenômeno biológico trabalhado pelos alunos e um de seus modelos matemáticos, o modelo de Ross-Macdonald. No segundo capítulo, apresento uma discussão sobre o que são sistemas dinâmicos e pesquisas em Educação Matemática relacionadas a este tema. Utilizo estas pesquisas para embasar e justificar algumas das ideias da abordagem pedagógica, e ainda desenvolvo uma análise qualitativa do modelo de Ross-Macdonald para um determinado conjunto de parâmetros, com o intuito de ilustrar as técnicas desenvolvidas pelos matemáticos para lidar com sistemas deste tipo.

O terceiro capítulo traz a discussão metodológica da tese, onde apresento e justifico a opção metodológica, descrevo o contexto e indico os procedimentos metodológicos. No quarto capítulo elaboro uma fundamentação teórica para a abordagem pedagógica e a pesquisa, caracterizando a perspectiva de Análise de Modelos e discutindo mais profundamente a visão de conhecimento que permeia o estudo. No quinto capítulo apresento as modificações sofridas pela abordagem pedagógica e algumas dificuldades para a elaboração e aplicação das mesmas. Também apresento os temas emergentes da análise dos dados e discuto as ideias que permeiam cada um deles, de modo a caracterizar cada um dos

papéis do software no desenvolvimento da abordagem pedagógica. Além disso, elaboro uma tessitura destas ideias por meio do estabelecimento de relações entre elas. Finalmente no sexto capítulo teço as considerações finais, apontando para outros estudos que podem derivar deste. Para finalizar o texto, apresento as referências bibliográficas utilizadas até o momento.

Nos apêndices, o leitor encontrará ainda uma versão na íntegra das atividades aplicadas aos alunos em 2010 e em 2011; sugestões de mudanças para algumas destas atividades; e um relato sobre minha experiência em dois estágios “sanduíches” que tive a oportunidade de realizar durante o curso de doutoramento. Desejo ao leitor que este texto possa suscitar-lhe reflexões enriquecedoras sobre os temas abordados.

Capítulo 1 – Sobre Modelos Matemáticos na Educação Matemática e a Abordagem Pedagógica

Meu primeiro contato com o conteúdo de sistemas dinâmicos, durante o curso de Mestrado em Matemática Pura³, despertou-me para uma beleza da Matemática que até então desconhecia. Situações de diferentes áreas científicas podem ser representadas matematicamente por equações diferenciais ordinárias (EDO), ou sistemas delas, e serem analisadas de um modo totalmente novo para mim: a partir da própria equação, através de métodos qualitativos.

A aprendizagem destes métodos despertou meu interesse para o estudo de sistemas dinâmicos e me propus a elaborar uma dissertação de mestrado em Matemática Pura sobre um problema aplicado. O problema com o qual trabalhei estava relacionado com a descrição da relação entre salinidade e temperatura da corrente marítima do Atlântico Norte. No meu estudo, fiz uma análise das soluções de um sistema dinâmico que descrevia o fenômeno, utilizando as técnicas de análise qualitativa da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias e suas fundamentações (SOARES, 2008).

Os estudos do mestrado geraram uma vontade de ter tido contato com este tipo de análise qualitativa mais cedo na minha formação, quando do estudo de EDO durante o curso de graduação. Este desejo me impeliu a pensar em uma proposta de trabalho para a disciplina de EDO enfatizando a abordagem qualitativa para o estudo das equações. Quando do ingresso no doutorado tive contato com trabalhos na mesma direção e então me propus a analisar mais profundamente minha abordagem pedagógica.

Tomando conhecimento da disciplina Matemática Aplicada do curso de Ciências Biológicas vislumbrei uma ideia um tanto desafiadora: e se propusesse um trabalho com modelos matemáticos para fenômenos biológicos para que os alunos dessa disciplina analisassem de um modo qualitativo? Após estudar melhor esta proposta pude organizar de forma mais efetiva o trabalho: iniciar a disciplina com um fenômeno biológico modelado matematicamente por EDO e desenvolver a disciplina com base no estudo desse modelo. Esta, definitivamente, parecia uma ideia interessante!

Como será visto no decorrer deste texto, a proposta só foi possível de ser colocada em prática devido ao uso de um software que permitiu aos alunos acessar informações sobre o

³ Realizado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) de 2006 a 2008.

modelo matemático a ser estudado. Antes de fornecer mais detalhes sobre esta questão, entretanto, permita-me o leitor esclarecer alguns detalhes sobre a disciplina.

A disciplina Matemática Aplicada é a única disciplina obrigatória de Matemática, além de Estatística, do curso de graduação em Ciências Biológicas da Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro, SP. Ela é ministrada desde 1993 pelo professor orientador desta pesquisa, e configura-se desde então como um cenário para a realização de pesquisas com diferentes focos de estudo.

Por exemplo, Malheiros (2004) realizou um estudo longitudinal sobre a produção matemática dos alunos na elaboração de projetos de modelagem. Diniz (2007) analisou o papel das tecnologias na elaboração de projetos de modelagem pelos alunos em uma das turmas da disciplina. Hermínio (2009) estudou como os alunos escolhem o tema de seus projetos de modelagem e quais os aspectos envolvidos nessa escolha.

Matemática Aplicada é uma disciplina com carga horária semanal de 4 horas, totalizando 60 horas semestrais, e faz parte do currículo do curso integral e do curso noturno. Entretanto, sua disposição ao longo dos cursos é diferente: para alunos do curso integral a disciplina é ministrada no segundo semestre do primeiro ano; já para os alunos do curso noturno ela é oferecida no primeiro semestre do terceiro ano. A súmula curricular da disciplina inclui o estudo de funções, noções de limites, derivadas e integrais, e suas aplicações, podendo ser vista como uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I com uma carga horária reduzida.

São duas as principais abordagens de ensino e aprendizagem utilizadas pelo professor ao longo destes anos: o experimental-com-tecnologias e a modelagem. Na primeira abordagem, os alunos desenvolvem atividades investigativas relacionadas aos conteúdos da disciplina com o uso de software. Já a modelagem prevê a realização de um trabalho pelos alunos, em grupos, sobre algum tema de seu interesse, que pode ou não estar relacionado com a Matemática. Quando alguma intersecção com a Matemática é percebida pelo professor, ele incentiva os alunos a aprofundarem essa interação⁴.

Nesta pesquisa, estou propondo uma abordagem de trabalho com os alunos da disciplina relacionada com modelos matemáticos e o uso de tecnologias digitais, mas com *outro enfoque*, como explicitado acima. A seguir, apresento as ideias principais desta abordagem, justificando escolhas e detalhando aspectos relevantes. Primeiramente, porém,

⁴ Mais detalhes sobre estas abordagens podem ser encontradas em trabalhos como Borba e Villarreal (2005).

apresentarei uma breve revisão de literatura sobre pesquisas envolvendo modelos matemáticos desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática.

1.1 Pesquisas em Educação Matemática envolvendo modelos matemáticos

O trabalho com modelos matemáticos em sala de aula como uma estratégia de ensino não é algo novo. Desde a década de 1980, trabalhos iniciados por matemáticos como Rodney Bassanezi sugeriram o processo de modelagem matemática como uma maneira de trabalhar a Matemática em sala de aula de forma mais criativa e conectada com diferentes situações que permeiam a vida das pessoas e também outras áreas científicas, como a Química e a Física. Hoje a Modelagem é amplamente reconhecida como uma tendência em Educação Matemática, apresentando diferentes vertentes, e é foco de desenvolvimento de várias pesquisas na área que investigam diversos aspectos relacionados.

A partir de um levantamento feito nas seguintes obras: Edição Especial sobre Modelagem da revista ZDM (2006); *Modelling and Applications in Mathematics Education* (BLUM et al., 2007); e *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling – ICTMA 14* (KAISER et al., 2011), elaborei uma breve revisão de literatura sobre pesquisas em Modelagem na Educação Matemática. O objetivo desta revisão é localizar a presente pesquisa em um conjunto mais amplo de estudos já realizados. Portanto, selecionei pesquisas envolvendo os seguintes temas: Modelagem e tecnologias; Modelagem e ensino superior; Modelagem, tecnologias e ensino superior, que são os temas presentes na pesquisa que apresento nesta tese.

1.1.1 Pesquisas sobre Modelagem e Tecnologias

Com o objetivo de discutir o uso de tecnologias na aprendizagem de Matemática por meio da Modelagem, Pead et al. (2007) apresentaram sugestões de formas de utilizar a tecnologia tanto no nível médio como no nível superior. Com relação às tecnologias no nível médio, os autores citaram uma série de softwares (planilhas eletrônicas, applets, objetos de aprendizagem, micromundos, softwares de geometria dinâmica), e apresentaram sugestões de tipos de atividades para cada software.

Já com relação às tecnologias no ensino superior, os autores apresentaram o projeto MICA (*Mathematics Integrated with Computers and Applications*), desenvolvido na Universidade Brock. Este projeto iniciou com alunos de cursos onde a Matemática é uma disciplina em serviço e que assistiam Cálculo Diferencial e Integral, e mais tarde foi expandido para os alunos de Matemática. Segundo os autores, o uso de computadores permite

que os estudantes tenham acesso a diversos exemplos e aplicações que não podem ser analisados apenas com lápis e papel, e com cálculos manuais. Ou seja, as atividades no computador expandem o espectro de exemplos que podem ser apresentados aos alunos e permitem que eles sejam explorados.

Mantendo o foco nas tecnologias, Hußmann (2007) analisou até que ponto os computadores auxiliam na formação independente de conceitos por parte dos alunos e ampliam o valor educacional da Matemática. Para isso, o autor desenvolveu uma abordagem pedagógica voltada para um curso de Cálculo Integral. O foco central do curso foi o trabalho com problemas abertos, complexos e relacionados com a realidade. Não existiu uma ordem pré-determinada para a aula; ela foi construída conforme os alunos trabalhavam em grupos nos problemas propostos pelo professor. Os alunos trabalhavam de forma a desenvolver sua independência, inclusive propondo exemplos e exercícios, com a orientação do professor. No desenvolvimento dos trabalhos, o computador sempre foi permitido.

O autor apresenta no artigo dois exemplos de problemas e descreve em linhas gerais as abordagens utilizadas pelos estudantes. A partir da análise destes exemplos, o autor conclui que são duas as tarefas do computador que suportam a formação independente de conceitos matemáticos: a *função de construção*, que seria contribuir para que o aluno construa ideias; e a *função de estimulação*, que seria responsável por iniciar um processo de mudança no conceito que está sendo trabalhado pelo aluno, isto é, por meio do feedback fornecido pelo software o aluno sente a necessidade de questionar e revisar as ideias que desenvolvera até o momento sobre o conceito em questão, provavelmente ampliando-o ou modificando-o.

Tendo em vista que a Modelagem e as tecnologias ainda não são amplamente utilizadas em sala de aula nos diferentes níveis educacionais, Geiger (2011) desenvolveu uma pesquisa com professores australianos com o objetivo de analisar possibilidades e restrições para a adoção de sistemas algébricos computacionais (CAS) por parte deles como forma de enriquecer as experiências dos estudantes com Modelagem Matemática. Seis professores provenientes de duas jurisdições diferentes da Austrália participaram da pesquisa, porém apenas dois são reportados no artigo. Em ambas as jurisdições, os currículos oficiais enfatizam o trabalho com Modelagem e tecnologias.

Os dois professores escolhidos como foco de discussão do artigo possuíam perfis diferenciados: o primeiro possuía 15 anos de profissão, mas tinha pouca experiência em Modelagem, aplicações e tecnologia; o segundo era bastante experiente com CAS. Os alunos do primeiro professor tinham alguma experiência com planilhas eletrônicas; os alunos do

segundo usavam calculadoras gráficas obrigatoriamente desde o nono ano; todos os alunos tiveram primeiro contato com CAS no projeto.

Em termos metodológicos, o autor caracterizou a pesquisa como um estudo de caso. O projeto consistiu em uma fase inicial onde os professores receberam instruções sobre o uso de uma tecnologia portátil CAS (TI-Nspire) e examinaram tarefas preparadas antecipadamente para o uso do CAS com Modelagem. Cada professor teve uma ou duas aulas vídeo-gravadas e observadas pelos pesquisadores, seguidas de entrevista semi-estruturada com eles e com três ou quatro alunos apontados por eles. No final do projeto uma videoconferência foi estabelecida para discussões sobre o projeto.

A partir da análise dos dados construídos, o autor percebeu que a visão sobre Modelagem e tecnologias no ensino de Matemática era bastante diferente de um professor para o outro: enquanto o primeiro professor acreditava que os alunos primeiramente precisavam aprender Matemática para depois modelar e usar tecnologia, e que o CAS não era para todos os alunos, o segundo professor acreditava que o CAS permitia que todos os alunos desenvolvessem a Modelagem, mesmo aqueles que tinham dificuldades com manipulação algébrica ou algorítmica.

O autor concluiu que, apesar de em ambas as jurisdições os padrões curriculares enfatizarem a Modelagem e a tecnologia, as visões dos professores sobre estes recursos são mais influentes em como a tecnologia e a Modelagem são utilizadas por eles em sala de aula. Nesse sentido, o autor argumenta que o papel da tecnologia, em particular do CAS, na Modelagem é situacional. O autor não teve intenção de generalizar a partir do estudo de caso, porém acredita que o estudo traz contribuições para a compreensão das possibilidades e restrições que podem ser encontradas quando da tentativa de implementar iniciativas voltadas para o incentivo do trabalho com Modelagem e tecnologias.

Em uma direção semelhante, Greefrath et al. (2011) teve como objetivo discutir algumas especificidades sobre Modelagem e tecnologia. Os autores apresentaram um exemplo de situação de Modelagem sobre a quantidade de álcool no corpo de uma pessoa ao longo do tempo. Por meio deste exemplo os autores discutiram uma primeira possível função atribuída à tecnologia: a de validação do modelo. Após encontrar um modelo linear para o problema, é possível traçar o gráfico da solução com o software e comparar com os dados originais, deduzindo sua inadequabilidade. Um modelo semi-linear discreto e uma representação numérica do mesmo também são apresentados. Os autores sugeriram que neste caso a tecnologia exerceu um papel em múltiplas camadas, incluindo validação, interpretação e experimentação.

Os autores questionam se a tecnologia apenas auxilia a lidar com fórmulas complexas ou se ela também pode auxiliar na compreensão do problema. Eles apresentam então dois exemplos. O primeiro exemplo sugere a construção de um cano de resíduos entre duas cidades seguindo certas condições. Os autores exemplificam com essa situação que um software de geometria dinâmica pode ser utilizado para compreender a situação problema e um CAS para determinar a solução do problema. O segundo exemplo propõe a identificação da forma de um tanque de combustível para o qual os dados fornecidos se enquadram. Com esse exemplo os autores ilustram que a tecnologia pode ser usada para validação. Por meio de uma discussão sobre as duas situações, os autores concluem que a tecnologia não é apenas um apêndice à Modelagem, mas influencia cada etapa do ciclo.

1.1.2 Pesquisas sobre Modelagem e Ensino Superior

Iversen e Larson (2006) utilizam a metodologia de pesquisa qualitativa baseada em várias camadas para investigar a relação entre os desempenhos de estudantes em testes tradicionais e tarefas onde utilizam seus conhecimentos de Matemática aplicada a outras áreas do conhecimento. Baseando-se em Niss, os autores ressaltam que "[...] muitos dos modos e instrumentos de avaliação que são utilizados atualmente em educação matemática não proporcionam um insight apropriado sobre as habilidades dos estudantes - o que eles sabem, compreendem e são capazes de alcançar⁵" (p.282). Eles afirmam que os testes padronizados tendem a enfatizar um pequeno conjunto de ideias, compreensões e habilidades que estão presentes em tarefas de caráter mais aberto e, além disso, muitas vezes enfatizam o que não é importante.

Para alcançar seu objetivo, os autores desenvolveram o estudo com 200 alunos do primeiro ano de um curso da Faculdade de Ciência e Engenharia da Universidade do Sul da Dinamarca. O experimento foi aplicado na primeira aula da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, onde os alunos fizeram um pré-teste e, após, trabalharam em grupos na resolução de atividades de modelagem. Mais tarde, no final da disciplina, os alunos fizeram uma prova, cujos resultados foram incorporados ao estudo.

O pré-teste foi elaborado de modo a ter 11 problemas considerados típicos nos exames escritos oficiais do Ministério da Educação Dinamarquês. O teste foi realizado individualmente, sem consulta e sem o auxílio de calculadoras. A atividade de modelagem foi elaborada especialmente para o estudo e teve como contexto os lançamentos de pênaltis no

⁵ [...] many of the assessment modes and instruments that are currently used in mathematics education do not provide proper insight into students' abilities – what they know, understand and are able to achieve.

jogo de handball. Os dados fornecidos para os alunos foram tanto quantitativos como qualitativos.

A partir da análise do trabalho desenvolvido pelos alunos, os autores dividiram os estudantes em dois grupos: alto e baixo desempenho na atividade de modelagem. Os alunos de alto desempenho consideraram possíveis relações entre os dados de forma apropriada, utilizaram vários tipos de representações (gráficos, diagramas, tabelas, etc.) para desenvolver seus modelos, utilizaram algum tipo de notação matemática. Os alunos de baixo desempenho basearam-se na intuição para analisar os dados, não utilizaram nenhuma representação para pensar seus modelos ou utilizaram alguma representação com pouco poder de descrição e explicação, não utilizaram notação matemática.

Os pesquisadores analisaram o desempenho dos alunos no pré-teste e na atividade de modelagem tanto do ponto de vista individual quanto em grupo. Do ponto de vista individual não foi encontrada nenhuma correlação entre o desempenho no pré-teste e na atividade de modelagem, corroborando com a afirmação de Lesh e outros autores de que alunos que têm bom desempenho nos testes padronizados podem ter baixo desempenho em atividades abertas como as de modelagem, e vice-versa. A análise dos pós-testes também não mostrou correlação com o desempenho na atividade de modelagem, de modo que os autores concluíram que nem o pré-teste nem o pós-teste fizeram um bom trabalho em revelar quais estudantes se saíram bem na atividade de modelagem.

Uma análise qualitativa do trabalho dos grupos revelou que: i) os grupos que tiveram um baixo desempenho nos testes e um bom desempenho na atividade de modelagem utilizaram matemática simples de uma forma sofisticada, em geral dando conta de todos os dados fornecidos; ii) por outro lado, os grupos que tiveram um bom desempenho nos testes e um baixo desempenho na atividade de modelagem ignoraram dados sem justificativa; utilizaram poucos dados nos modelos elaborados; muitas vezes tentaram adequar os dados a modelos pré-fabricados como função linear; em geral, os grupos simplificaram a situação demasiadamente e não validaram seus modelos.

Os autores sumarizam uma explicação sobre a discrepância entre os testes padronizados e as atividades de modelagem da seguinte forma: "Atividades de modelagem Modeling Eliciting Activities (e talvez a maioria da Modelagem neste nível de educação) frequentemente envolvem pensamento Complexo usando Matemática Simples, enquanto testes padronizados (como os considerados aqui) frequentemente envolvem pensamento

Simples usando Matemática Complexa⁶" (IVERSEN; LARSON, 2006, p.290, tradução nossa). Os autores comentam ainda que, olhando de modo geral para os alunos de tiveram um bom desempenho na atividade de modelagem, eles perceberam que em geral eles usam seus processos de raciocínio para interpretar, organizar e administrar o seu pensamento – ao invés de apenas focar nas ferramentas matemáticas envolvidas.

Também com o intuito de compreender as habilidades em Modelagem com relação a outros aspectos do pensamento matemático, Dan e Xie (2011) investigaram as habilidades em Modelagem Matemática dos estudantes de universidades chinesas; identificaram qual a relação entre estas habilidades e a criatividade; e identificaram qual a relação entre estas habilidades e o seu conhecimento em Matemática. Para isso, eles desenvolveram um estudo experimental com 33 estudantes de engenharia (da automação). Os pesquisadores aplicaram um teste de múltipla escolha com 22 questões, que os alunos puderam resolver individualmente em 40 minutos, sem interrupções do professor. Eles também aplicaram um teste de criatividade (Teste de Raciocínio Criativo de Torrance) e consideraram o Teste em Cursos Básicos de Matemática feito pelos alunos ao final do semestre nos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear.

A análise dos resultados mostrou uma correlação entre as habilidades em Modelagem e criatividade: alunos com habilidades “fortes” em Modelagem apresentaram “alto” nível de pensamento criativo, e alunos com habilidades “fracas” em Modelagem apresentaram “baixo” nível de pensamento criativo. Por outro lado, os autores não encontraram nenhuma correlação significativa entre as habilidades em Modelagem e os conhecimentos básicos de Matemática. Entretanto alguns padrões foram identificados: alunos com baixo resultado no teste de conhecimentos não possuem habilidades “fortes” em Modelagem; estudantes com resultado muito bom no teste de conhecimentos poderiam não ter habilidades “fortes” em Modelagem; e alunos com habilidades “fortes” em Modelagem poderiam se sair mal no teste de conhecimentos. Duas possíveis razões para esta situação são elencadas: a primeira seria o tipo de questões propostas no teste de conhecimentos, que não exigem conhecimento e habilidades matemáticas avançadas, de modo que o conhecimento dos alunos não é realmente refletido no teste; a segunda seria que o fato de o aluno conseguir uma boa pontuação no teste de conhecimentos não garante que ele compreende bem a Matemática básica.

⁶ Modeling Eliciting Activities (and perhaps most modeling at this educational level) often involve Complex thinking using Simple Mathematics, whereas standardized test (as the ones considered here) often involves Simple thinking using Complex Mathematics.

Com um foco mais voltado para a sugestão de trabalhos em sala de aula, Deprez (2011) apresenta uma sequência didática em que uma das aplicações para matrizes, autovalores e autovetores é discutida. A evolução de uma população foi modelada com a matriz de Leslie e sua evolução a longo prazo foi estudada por meio dos autovalores e autovetores. A sequência usou a aplicação para introduzir os conceitos matemáticos de autovalor e autovetor. O autor também apresentou três aplicações da sequência didática.

A sequência didática foi composta de três fases. Na primeira fase os alunos trabalharam com um conjunto de dados reais sobre a população belga, respondendo certo número de questões propostas. Esta fase teve como objetivo auxiliar os alunos a se tornarem conscientes das simplificações feitas quando da construção do modelo matemático. Em uma segunda fase, o professor fez algumas simplificações nos dados para que a matriz que fosse gerada pudesse ser trabalhada em uma calculadora gráfica. Os novos dados gerados pelas simplificações foram novamente alvo do trabalho dos alunos, que fizeram projeções para o futuro em períodos de 20 anos. Em seguida o professor introduziu o modelo matemático: a matriz de Leslie. Ele discutiu com os alunos o fato de os resultados fornecidos não serem realistas, mas serem dados que fazem sentido e ajudam a entender a situação real, entre outros fatores a importância da migração. Na terceira fase, os alunos analisaram gráficos e tabelas fornecidos para eles com resultados do modelo. Eles observaram o comportamento dos gráficos e obtiveram conclusões sobre a taxa de crescimento e a importância relativa de cada grupo etário em períodos de 20 anos por meio das tabelas. Os conceitos de autovalor e autovetor foram introduzidos a partir da determinação matemática do fator de crescimento e a distribuição de idades para períodos longos de tempo.

A partir da análise dos dados construídos o autor observa que: a sequência didática mostrou que é possível introduzir os conceitos de autovetor e autovalor de forma natural; a experiência com alunos da graduação em economia aplicada mostrou por meio de questionário que os alunos acharam o trabalho com a sequência didática mais difícil do que o restante da disciplina, porém não tão difícil, e os auxiliou a terem mais consciência da utilidade da Matemática. Além disso, os alunos acharam que mais atividades deste tipo deveriam ser utilizadas.

Em um contexto diferente da sala de aula, Klymchuk et al. (2011) investigam os possíveis padrões nas respostas de estudantes e professores (*lecturers*) para uma mesma tarefa de modelagem, identificando similaridades e diferenças nas respostas dos dois grupos. A tarefa proposta tinha como objetivo analisar três modelos matemáticos para uma mesma situação e explicar as diferenças entre as previsões feitas por cada modelo. Os alunos

participantes eram do primeiro ano de graduação em engenharia de uma universidade alemã e do segundo e terceiro anos de graduação em matemática aplicada de uma universidade da Nova Zelândia. Já os professores eram de diferentes países.

Três modelos populacionais (linear, exponencial, logístico) foram utilizados para prever a quantidade de pessoas infectadas pela gripe em uma determinada data. Um questionário foi proposto com questões a respeito de: razões para a diferença nas previsões, fonte para tomar esta decisão, o que poderiam tornar as previsões mais acuradas e a intenção de estudar mais sobre o fenômeno e a matemática envolvida.

A partir da análise das respostas ao questionário, os pesquisadores observaram que: os alunos não tinham muita experiência com Modelagem exceto para resolver problemas aplicados; os alunos utilizaram bem mais o senso comum para dar suas respostas do que os professores. O estudo indicou também que, apesar da pouca experiência com Modelagem, os alunos utilizaram o seu senso comum de forma efetiva para avaliar algumas questões de previsão relacionadas ao modelo matemático. Ambos, professores e alunos, preferiram a inclusão de novos parâmetros como método para melhorar a acuidade do modelo.

Também em um contexto diferenciado, Alpers (2011) investigou qual a expertise matemática de estudantes de engenharia mecânica. Para isso ele contou com a participação de dois estudantes cursando o último semestre. Eles trabalharam durante 100h em uma tarefa típica de engenheiros proposta pelos pesquisadores em um ambiente não escolar e também não laboral. Os alunos trabalharam com uma bancada para testes de máquinas a leme e “[...] deveriam investigar os componentes mais vulneráveis, medir a ocorrência de deformação nesses componentes usando tecnologias de medição disponíveis e um programa de processamento de dados, e interpretar os resultados⁷” (ALPERS, 2011, p.447, tradução nossa).

A partir dos dados coletados, o autor concluiu que: os alunos utilizaram modelos matemáticos vistos em aula para lidar com a situação; a interpretação dos resultados em termos da situação foi decisiva para o aceite ou não destes resultados; conhecer o modelo matemático foi importante para os estudantes identificarem alguns erros de procedimento nas medições. Em termos educacionais o autor afirmou que

Como consequência, trabalhar com modelos pequenos (a maioria existente, pelo menos quanto à forma de modelo) deveria ser integrado à educação matemática. Além disso, os alunos deveriam interconectar propriedades dos modelos e propriedades das aplicações e usar modelos para projetar uma

⁷ [...] should investigate the most vulnerable components, measure the occurring strain in these components using available measurement technology and a data processing program, and interpret the results.

configuração com certas propriedades⁸ (ALPERS, 2011, p.455, tradução nossa).

Com uma perspectiva mais teórica, Matsuzaki (2011) tem como objetivo descrever um método para analisar os ciclos de Modelagem percorridos por modeladores baseado no mapeamento das análises das respostas. Dois são os objetivos por trás desta análise: “(1) identificar componentes baseados nas experiências de um modelador com o intuito de mostrar detalhes do seu progresso na modelagem matemática e (2) descrever como alguns componentes mudam durante o progresso em modelagem matemática⁹” (MATSUZAKI, 2011, p.500, tradução nossa).

Para alcançar seus objetivos o pesquisador analisou um aluno de pós-graduação em Ensino de Física e um trabalhador em eletrônica resolvendo um problema de eletrônica em voz alta, por meio de uma entrevista. Para cada sujeito o pesquisador elaborou um mapa das respostas dadas e por meio da análise deste mapa ele identificou dois tipos de conhecimento prévio dos modeladores: um relacionado à realidade e outro relacionado à Matemática. Segundo o autor, usando o método do mapeamento é possível identificar como estes conhecimentos prévios influenciam no processo de Modelagem, inclusive na construção de modelos.

1.1.3 Pesquisas sobre Modelagem, Tecnologias e Ensino Superior

Kadijevich (2007) apresenta uma discussão mais teórica sobre a pouca presença da Modelagem em sala de aula. Ele sugere que uma das razões para isso é que os professores não conhecem o potencial da modelagem computacional e afirma que é necessário estabelecer padrões para a modelagem computacional em cursos de formação inicial ou continuada e garantir que ela seja usada.

O autor indica os seguintes cinco padrões: reconhecer um contexto humanístico na Modelagem (quer dizer, reconhecer que um modelo é desenvolvido pelo homem e, portanto, está sujeito a falhas e escolhas subjetivas); apresentar a Modelagem como um processo complexo (verificar a existência de vários modelos para uma mesma situação; conscientizar sobre as diferenças de valores e atitudes entre as pessoas que modelam; reconhecer necessidade de tempo para desenvolver um modelo que possa ser institucionalizado); usar a

⁸ As a consequence, work within small models (mostly existing, at least as to the way to model) should also be integrated into the mathematical education. Moreover, students should interconnect model properties and application properties and use models to design a configuration with certain properties.

⁹ (1) to identify components based on a modeller's own experiences in order to display details of their mathematical modeling progress and (2) to describe how some components change during the mathematical modeling progress.

Modelagem para dar poder ao pensamento e à aprendizagem (refletir sobre as limitações de um modelo; utilizar a Modelagem para melhorar o entendimento da Matemática); reconhecer e tratar as questões cognitivas, metacognitivas e afetivas da Modelagem (auxiliar os alunos a desenvolverem a matematização, a elaboração de hipóteses e a análise crítica do modelo); usar computadores como *mindtools* para modelar (o que, segundo o autor, significa: utilizar ferramentas computacionais diversas; evitar o uso como Black Box; entender o computador como ferramentas que expandem nossas funções mentais).

O autor sugere ainda que, para evitar discrepâncias entre os padrões sobre modelagem computacional esperados e os realmente aplicados, é necessário que os cursos de formação de professores lidem com questões importantes, dentre as quais ele aponta quatro principais: perceber o poder do trabalho com modelagem computacional; selecionar indicadores para os padrões oficiais (ao invés de trabalhar com todos os indicadores, selecionar alguns, o que facilita o trabalho para iniciantes); dar vida aos indicadores escolhidos; reforçar o contexto dos padrões oficiais (manter um suporte ao professor de sala de aula, inclusive por meio da internet).

Em um viés mais aplicado, Neves et al. (2011) discutem como o software *Modellus* pode ser utilizado em atividades de modelagem computacional exploratórias e interativas. Os autores descrevem atividades utilizadas em um curso introdutório de mecânica, ministrado para alunos de engenharia biomédica na Universidade Nova de Lisboa. Nesta disciplina, a cada aula os alunos trabalharam em duplas ou trios na resolução de cinco situações de modelagem computacional. Os alunos deveriam construir os modelos com o software e resolver os problemas propostos. Eles receberam auxílio durante todo o processo.

Duas atividades são descritas como exemplo, ambas envolvendo movimentos circulares e oscilações. Segundo os autores, o software foi efetivo devido a: a) fácil elaboração de modelos matemáticos usando a notação matemática padrão; b) possibilidade de criar animações interativas com objetos presentes nos modelos; c) exploração simultânea de gráficos, tabelas e objetos animados.

Uma possível sequência a esta revisão de literatura seria a elaboração de considerações referentes ao modo como minha pesquisa se relaciona com as demais. Entretanto, antes de partir para estas reflexões, considero importante e necessário que o leitor tenha um pouco mais de conhecimento sobre a abordagem pedagógica que embasa esta pesquisa. Deste modo, na seção seguinte, apresento o fenômeno biológico e o modelo matemático que foram

propostos aos alunos. Em seguida, descrevo com mais detalhes a abordagem pedagógica e, na última seção do capítulo é que procuro relacionar minha pesquisa com as demais.

1.2 O fenômeno biológico e seu modelo matemático: alicerçando a abordagem pedagógica

1.2.1 Transmissão da malária

Após estar com a ideia central da proposta melhor definida passei a procurar por fenômenos biológicos que fossem modelados matematicamente. São vários os fenômenos que preenchem este quesito. Também são vários os conteúdos matemáticos utilizados para a elaboração dos modelos. Minha ideia inicial era o trabalho com EDO. De fato, esta opção mostrou-se coerente, uma vez que EDO é um tópico que “amarra” os conceitos mais importantes de um curso de CDI I: funções, derivadas e integrais. Além disso, vários fenômenos biológicos possuem modelos matemáticos elaborados com EDO ou sistemas de EDO.

Na busca por artigos e trabalhos sobre fenômenos biológicos modelados matematicamente, deparei-me com o artigo de Basañez e Rodríguez (2004) cujo tema é o estudo do modelo de Ross-Macdonald para a transmissão da malária. Tal modelo é composto por um sistema de duas EDO, e não apenas por uma equação. Este fato foi alvo de reflexões, pois os alunos cursando a disciplina Matemática Aplicada nunca estudaram, em geral, o conceito de derivada. Assim, o trabalho com uma EDO poderia ser complicado, uma vez que as equações envolvem derivadas das funções. O que dizer, então, de estudar um sistema?

Continuei minha busca por fenômenos, mas os que possuíam um modelo com apenas uma equação eram também os mais simples biologicamente: envolviam apenas uma espécie (crescimento populacional de uma população de bactérias, por exemplo). Porém a grande maioria dos fenômenos biológicos envolve a interação entre mais de uma espécie. Assim, seria difícil não trabalhar com um sistema se eu quisesse utilizar um fenômeno diferente do crescimento populacional de uma espécie. Decidi, então, arriscar: trabalhar com um fenômeno biológico mais complexo, a transmissão da malária, mas que envolvia um sistema de EDO para ser modelado matematicamente.

Antes de analisar o modelo, é importante que eu mencione alguns fatos¹⁰ sobre a malária para esclarecer o que já se sabe biologicamente sobre a transmissão da doença e evidenciar as simplificações feitas para o modelo a partir das hipóteses assumidas. A malária é causada por um parasita do gênero *Plasmodium*, que é transmitido aos seres humanos pela picada da fêmea do mosquito do gênero *Anopheles*. O ciclo de vida do parasita inclui o organismo humano e o organismo do mosquito. Ele tem início quando um mosquito infectado pica uma pessoa. Os parasitas, alojados nas glândulas salivares do mosquito, são inoculados na corrente sanguínea da pessoa quando da picada. Uma vez no sangue, os parasitas se dirigem às células do fígado. Aí eles sofrem transformações morfológicas e realizam reprodução assexuada. No período em que os parasitas se encontram no fígado a pessoa não transmite a doença, caracterizando-se o período de incubação.

Após este período, as células produzidas entram na corrente sanguínea, invadindo os glóbulos vermelhos. Parte destas células reproduz-se de forma assexuada gerando um grande número de novos parasitas. Isto causa um aumento dos glóbulos vermelhos que eventualmente se rompem causando a morte das hemácias e a liberação de toxinas no sangue. Deste modo, mais parasitas são liberados no sangue. Outra parte dos parasitas que entram nos glóbulos vermelhos se modifica em células sexuais. São estas células que são captadas por outro mosquito ao picar esta pessoa. Elas se reproduzem sexualmente no estômago do mosquito e após algumas transformações morfológicas migram para suas glândulas salivares. O ciclo está completo e pronto para reiniciar. A imagem a seguir (Fig.1) representa de forma ilustrativa o ciclo do *Plasmodium*.

¹⁰ Algumas referências utilizadas como base para a escrita do texto sobre estes fatos são: Basañez e Rodríguez (2004); Wyse, Bevilacqua e Rafikov (2006); Aron e May (1982); Anderson e May (1991); Pull e Grab (1974).

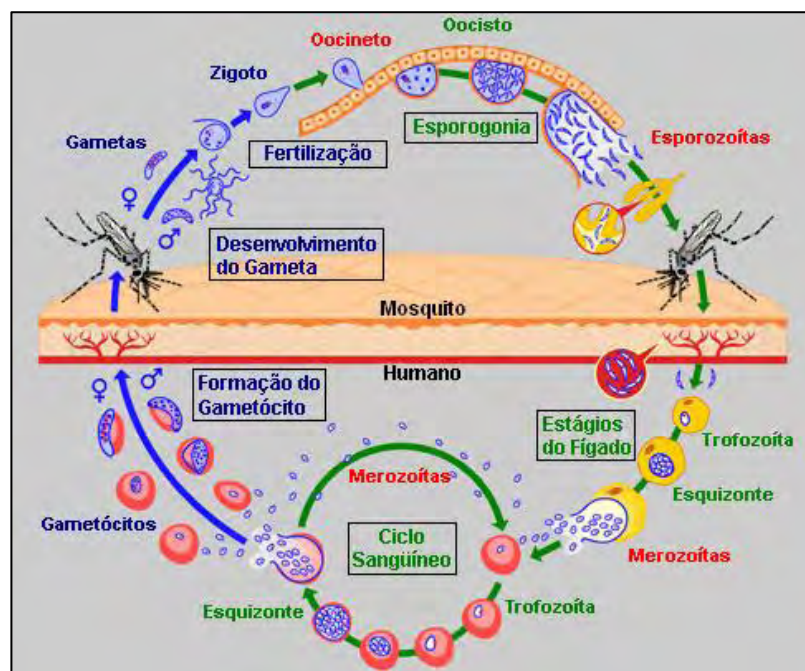


Figura 1 - Ciclo de Vida do *Plasmodium Vivax*.¹¹

Os sintomas da malária incluem: dores-de-cabeça, vômito, fadiga, dores musculares e febres. As febres são cíclicas em períodos de três ou quatro dias, dependendo do parasita, e coincidem com o rompimento das hemácias. O tratamento existe e é eficaz quando realizado de forma correta, de modo que princípios ativos apropriados sejam usados dependendo da cepa do parasita¹². De todo o modo, a prevenção ainda é a melhor opção.

1.2.2 Um modelo matemático para a transmissão da malária

O modelo de Ross-Macdonald foi o primeiro modelo desenvolvido para o estudo da malária. Sua primeira versão foi elaborada por Ross no período de 1911-1917. Na década de 1950, Macdonald aprimorou-o agregando maior realismo através de uma análise mais acurada dos parâmetros. O modelo é pautado em uma série de hipóteses simplificadoras do fenômeno biológico, descritas a seguir:

Quadro 1 – Hipóteses do Modelo Ross-Macdonald.

As populações de humanos e vetores (isto é, mosquitos) se mantêm constantes no tempo. São populações fechadas.
As populações de humanos e mosquitos são homogêneas quanto à suscetibilidade, exposição,

¹¹ Fonte: <http://www.virtual.unifesp.br/malaria/restrito/pop_agt_ciclo.htm> Acesso em: 23 jun. 2011.

¹² Há quatro cepas causadoras da malária em humanos: *Plasmodium malarie*, *Plasmodium vivax*, *Plasmodium falciparum* e *Plasmodium ovale*. No Brasil encontram-se as três primeiras. O *Plasmodium falciparum* é responsável pelo tipo mais grave da doença, podendo causar a malária cerebral.

atratividade, etc.

São ignorados os períodos de incubação dentro dos humanos e mosquitos (infectados = infectantes).

Ignora-se a aquisição gradual de imunidade nos humanos.

A taxa *per capita* de recuperação dos humanos é muito mais alta que sua taxa *per capita* de mortalidade; em consequência se ignora a taxa de mortalidade em humanos.

Os mosquitos não se recuperam; não se ignora a mortalidade do vetor.

Não se produz mortalidade adicional do hospedeiro humano ou vetor induzida pelo parasita.

Não se produz superinfecção em humanos ou mosquitos. Somente se infectam os suscetíveis.

Fonte: Basañez e Rodríguez (2004, p.116).

É importante ressaltar que fatores como a mortalidade, descartada neste modelo, são em realidade muito importantes. As estatísticas mostram que uma criança morre de malária na África a cada 30 segundos (Organização Mundial da Saúde¹³). Considerar a população total de mosquitos constante ao longo do tempo também é uma simplificação considerável, uma vez que em diversas regiões o fator sazonal afeta esta quantidade. Por outro lado, as hipóteses de simplificação são importantes para que o modelo matemático possa ser analisado. Em geral, quanto mais fatores são considerados no fenômeno e quanto maior a fidedignidade do modelo ao fenômeno, maior será a complexidade do modelo matemático.

Apesar destas simplificações, o modelo ainda pode ser considerado útil para um primeiro estudo da doença, tendo-se em mente estas suposições, já que apresenta alguns padrões sobre as interações entre humanos e mosquitos. A partir deste modelo, é claro, é possível elaborar outros modelos que, aos poucos, incorporem mais detalhes sobre o processo de interação entre as duas espécies.

Tendo em vista estas informações e as hipóteses consideradas, é possível estruturar um fluxograma (Fig.2) para representar a dinâmica de transmissão da malária. Neste fluxograma vamos considerar as seguintes variáveis:

- X : número de pessoas infectadas
- Y : número de mosquitos (fêmeas) infectados

O modelo considera que as populações de pessoas e mosquitos são constantes ao longo do tempo. Deste modo, denominamos N o total de pessoas na região e M o total de mosquitos, ambos constantes. Assim temos que:

- $N-X$: número de pessoas não-infectadas
- $M-Y$: número de mosquitos não-infectados

¹³ Endereço eletrônico: <<http://www.who.int/features/factfiles/malaria/en/index.html>> Acesso em: 6 jun. 2011.

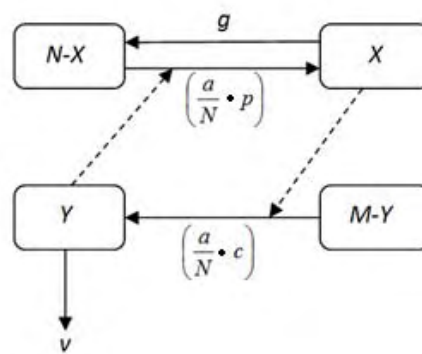


Figura 2 - Fluxograma representativo da dinâmica de transmissão da malária segundo o modelo de Ross-Macdonald. Adaptado de Basañez e Rodríguez (2004).

Podemos analisar este fluxograma (Fig.2) da seguinte maneira: as pessoas saudáveis ($N-X$) ficam infectadas (X) quando são picadas por mosquitos infectados (Y). Entretanto, nem toda a picada gera uma infecção. Isto vai depender de dois fatores principais: o número de picadas que cada mosquito dá por dia em cada pessoa da população estudada $(a/N)^{14}$ e a probabilidade da pessoa ser infectada (p). Nesse modelo, todas as pessoas são consideradas homogêneas com relação à suscetibilidade, portanto o parâmetro p é o mesmo para todas as pessoas da população.

De forma inversa, as pessoas que estão infectadas (X) se recuperam, voltando a ser saudáveis ($N-X$). Isto ocorre segundo uma taxa de recuperação (g). O modelo desconsidera a mortalidade devido à doença, de modo que todas as pessoas, eventualmente, podem se recuperar.

No caso dos mosquitos, temos o seguinte: mosquitos não-infectados ($M-Y$) ficam infectados (Y) quando picam pessoas doentes (X). Novamente aqui nem toda a picada gera uma infecção. Isto vai depender de dois fatores: o número de picadas que cada mosquito dá por dia em cada pessoa da população (a/N) e a probabilidade de cada mosquito se infectar (c). Como temos a hipótese de homogeneidade, o valor de c é o mesmo para todos os mosquitos da população. É importante notar aqui que o modelo desconsidera o período de incubação da doença, ou seja, uma pessoa é considerada infectante imediatamente após ser infectada pelo parasita.

No caso dos mosquitos, ao contrário das pessoas, o modelo considera que eles não se recuperam e morrem infectados. Esta hipótese é razoável, uma vez que o tempo de vida do

¹⁴ O parâmetro a é o número de picadas que cada mosquito dá por dia, independente do número de pessoas que ele pica.

mosquito é relativamente curto: varia entre duas semanas e um mês. Vamos considerar que os mosquitos infectados (Y) morrem segundo uma taxa de mortalidade (v).

Assim, temos uma caracterização para a dinâmica de transmissão da malária com base nas hipóteses assumidas para a elaboração do modelo matemático. De modo geral, podemos ver que esta caracterização descreve como as populações de pessoas infectadas e de mosquitos infectados aumentam e diminuem ao longo do tempo. Uma subtração entre a quantidade de pessoas infectadas e a quantidade de pessoas recuperadas em um determinado intervalo de tempo nos dá informação da variação da população de pessoas infectadas naquele intervalo. De forma semelhante obtemos a variação da população de mosquitos infectados em um determinado intervalo de tempo.

A partir desta descrição feita com o auxílio do fluxograma (Fig.2), podemos elaborar um sistema de equações que modele esta dinâmica. Partindo das variáveis consideradas anteriormente, consideramos a primeira equação para descrever a variação da população de pessoas infectadas ao longo do tempo:

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p \right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X \quad (1.1)$$

O primeiro termo do lado direito da equação representa o aumento de pessoas infectadas na população e descreve que este aumento se deve ao fato de pessoas sadias ($N-X$) serem picadas por mosquitos infectados (Y). Além disso, indica que este aumento depende do número de picadas dada por cada mosquito por dia em cada pessoa (a/N) e da probabilidade de cada pessoa ser infectada (p). O segundo termo representa a diminuição da população de pessoas infectadas. Ele descreve que isso se deve à recuperação das pessoas infectadas (X) que ocorre segundo uma taxa de recuperação (g). A subtração destas quantidades para cada instante de tempo (t) nos dá a variação da população de pessoas infectadas em cada instante de tempo, isto é, a taxa de variação instantânea da população de pessoas infectadas (dX/dt).

De forma semelhante, temos uma equação que descreve a taxa de variação instantânea da população de mosquitos infectados:

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c \right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y \quad (1.2)$$

O primeiro termo do lado direito da equação representa como a população de mosquitos infectados aumenta ao longo do tempo, e descreve que isso se deve ao fato de mosquitos não-infectados ($M-Y$) picarem pessoas infectadas (X). Além disso, indica que este aumento depende do número de picadas que cada mosquito dá por dia em cada pessoa (a/N) e da probabilidade de cada mosquito ser infectado (c). O segundo termo representa como a

população de mosquitos infectados diminui e descreve que isso depende de sua morte que ocorre segundo uma taxa de mortalidade (v).

As duas equações em conjunto formam um sistema dinâmico que descreve a dinâmica de transmissão da malária para as hipóteses consideradas:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p \right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X \\ \frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c \right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y \end{cases} \quad (1.3)$$

As soluções do sistema são $X(t)$ e $Y(t)$ que justamente nos informam o número de pessoas e mosquitos infectados, respectivamente, para cada instante de tempo t na região estudada. A partir da análise destas soluções podemos inferir como as populações de pessoas infectadas e mosquitos infectados interagem entre si, isto é, de que forma o crescimento/decrescimento de uma população interfere no crescimento/decrescimento da outra. Também podemos analisar como o sistema como um todo evolui ao longo do tempo e avaliar de que forma os parâmetros do modelo interferem nesta evolução. Um estudo deste tipo tem potencial para nos auxiliar a compreender aspectos relacionados à transmissão da doença e sua prevalência em uma determinada região, de acordo com os fatores que foram considerados para a elaboração do modelo. Esta potencialidade é capaz de dar significado e importância ao estudo do modelo matemático.

1.3 A abordagem pedagógica

Com o fenômeno biológico e o modelo em mãos, foi possível pensar de forma mais direcionada sobre a elaboração da abordagem pedagógica. A principal motivação para a elaboração desta proposta, além dos estudos realizados no mestrado, foi a possibilidade de trabalhar com os alunos um fenômeno importante do ponto de vista social e biológico por meio de um modelo matemático desenvolvido por pesquisadores. Este modelo é capaz de descrever o fenômeno, ainda que com limitações, de uma forma razoavelmente próxima da realidade.

O objetivo central inicialmente pensado para a proposta era, desde o primeiro dia de aula, estudar um fenômeno biológico modelado matematicamente (neste caso e para esta disciplina por um sistema de EDO). O estudo deste modelo serviria como ponto de partida e pano de fundo para a discussão dos conteúdos da disciplina. Assim, os conteúdos apareceriam conforme sua necessidade para aprofundar a análise do modelo e o entendimento das informações fornecidas pelo modelo sobre o fenômeno biológico.

Por exemplo, a primeira aula do curso seria totalmente dedicada à discussão do fenômeno biológico escolhido para trabalhar. Os alunos poderiam debater sobre o que já conheciam sobre o fenômeno e pesquisar dados e informações que os auxiliassem em sua compreensão do ponto de vista biológico. Também poderiam discutir os fatores que aparentemente são os mais relevantes para a ocorrência do fenômeno e elaborar um possível esquema para representar sua dinâmica (por exemplo, um fluxograma).

Em uma segunda aula, o professor poderia introduzir o modelo matemático escolhido, confrontando os esquemas elaborados pelos alunos com o esquema que dá suporte ao modelo matemático, assim como as hipóteses assumidas sobre o fenômeno pelos alunos e pelo autor do modelo matemático. A partir daí os alunos poderiam iniciar um estudo mais acurado do modelo. O que precisariam para isso? No caso da transmissão da malária, por exemplo, uma possibilidade seria iniciar compreendendo o que são suas soluções X e Y . São variáveis? São funções? São variáveis e funções simultaneamente? Estes questionamentos poderiam ser um ponto de partida para o estudo dos conceitos de variáveis e de funções do ponto de vista matemático. Ou seja, a discussão destes conceitos surgiria a partir da análise do modelo, da necessidade de entender seus elementos e o que significam em termos do fenômeno.

Todos os demais conceitos da ementa seriam discutidos a partir de situações semelhantes, propostas pelo professor ou pelos alunos. A ordem dos conteúdos surgiria, portanto, a partir destes questionamentos e não necessariamente seguiria a ordem comumente utilizada nas disciplinas de CDI I, a saber: funções, limites, derivadas e integrais. Assim, o professor teria um papel importante de orientar as discussões para que todos os conceitos previstos na ementa fossem contemplados, mesmo que outros não previstos também aparecessem.

Deste modo, meu intuito era o de que os alunos discutissem os conceitos do CDI I em conexão com algum problema ou situação importante de sua área. Este objetivo estava relacionado com uma situação muito frequente nas disciplinas de serviço, relatada nas pesquisas apresentadas na introdução desta tese, e que eu já havia presenciado em outros semestres quando acompanhando as aulas do professor na disciplina Matemática Aplicada: a dúvida dos alunos com relação à utilidade da disciplina para sua formação.

De fato, foi comum presenciar expressões de insegurança, medo e angústia dos alunos com relação ao curso, tanto durante os semestres em que apenas acompanhei a disciplina, quanto durante os dois semestres em que apliquei as atividades. Poucos comentavam gostar de Matemática e vários diziam ter bloqueio. Esta presença de inquietação despertou ainda mais a intenção de trazer a Biologia e a Matemática de forma mais interligada para os alunos.

A abordagem pedagógica parecia uma boa opção para chamar a atenção dos alunos para um tema de sua área de interesse e, simultaneamente, relacioná-lo com a Matemática. Ou seja, proporcionar a oportunidade para que discutissem de que forma a Matemática poderia ser útil (ou não) para eles como biólogos. Daí a necessidade de trabalhar com um tema de relevância tanto biológica quanto social. O tema transmissão da malária preenche este quesito.

De fato, o estudo da transmissão da malária enquadra-se na área de Epidemiologia, um segmento importante da Biologia. Além disso, a malária é uma doença diretamente relacionada com questões sociais, uma vez que as populações mais atingidas em geral são as economicamente menos favorecidas. Atualmente, ela é considerada uma doença negligenciada, uma vez que muitas pessoas não têm acesso a um tratamento correto e muitas vezes nem mesmo a métodos de prevenção. No Brasil, por exemplo, não é difícil encontrar pessoas que já tiveram malária dezenas de vezes¹⁵.

Entretanto, uma abordagem pedagógica com este caráter poderia apresentar implicações importantes com relação ao cumprimento da ementa, ao andamento da disciplina e à aprendizagem dos alunos, implicações estas que seriam desconhecidas *a priori*. Portanto, decidi por fazer uma modificação na proposta original de modo que ficasse garantido o cumprimento da ementa da disciplina ao longo do semestre. Sendo assim, a proposta original não foi aplicada, e sim sua versão modificada.

A partir desta modificação, o estudo do modelo matemático deixou de ser o “fio condutor” para a disciplina e passou a ser um trabalho cuja estrutura se assemelha à do DNA: uma dupla hélice que possui uma série de ligações (Fig.3). Cada hélice do DNA representa um dos dois momentos em que cada aula foi dividida. O primeiro momento foi utilizado para a apresentação e discussão dos conceitos matemáticos previstos na ementa da disciplina e foi liderado pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba. O professor baseou-se em aulas com dinâmicas variadas envolvendo: diálogo com os alunos, momentos de exposição, resolução e correção de exercícios, análise de situações com o uso de softwares matemáticos, como o *Geogebra*¹⁶ e o *Winplot*¹⁷, em conjunto com os alunos. O segundo momento foi destinado ao estudo do modelo matemático, que foi liderado por mim.

Cada hélice do DNA segue uma trajetória própria, mas elas possuem várias ligações e, de quando em quando, se entrelaçam, de modo que seu desenvolvimento é interdependente. De modo semelhante, cada um dos momentos de aula possuiu um encaminhamento próprio

¹⁵ Reportagem TV Senado: <http://www.youtube.com/watch?v=WZc-IX0r_rw> Acesso em: 1 mar. 2011.

¹⁶ Site: <<http://www.geogebra.org>> Acesso em: 1 mar. 2011.

¹⁷ Site: <<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>> Acesso em 1 mar. 2011.

para a discussão dos conceitos matemáticos. Além disso, assim como as hélices possuem ligações, os dois momentos de aula também apresentaram interlocuções. O professor da disciplina sempre procurou resgatar reflexões elaboradas a partir da análise do modelo matemático nos momentos que liderou e, por outro lado, a análise do modelo sempre foi permeada pelos conceitos e reflexões desenvolvidas com os alunos nos primeiros momentos de aula. Por fim, os entrelaçamentos entre as duas hélices representam o objetivo comum a ambos os momentos de trabalhar cada um dos conceitos da ementa da disciplina.

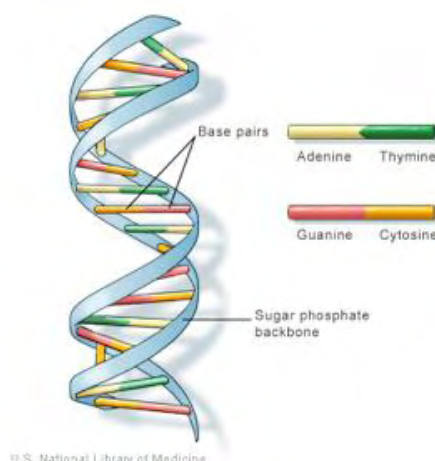


Figura 3 - Representação da estrutura de dupla hélice do DNA¹⁸.

Sendo assim, os conceitos matemáticos não foram discutidos a partir de questionamentos feitos durante a análise do modelo matemático, mas seguiram o planejamento da disciplina e a ordem prevista na ementa¹⁹. Além disso, nem todos os conteúdos da disciplina foram abordados de forma integrada à análise do modelo matemático (mas todos foram abordados nos momentos de aula liderados pelo Prof. Marcelo Borba). O conceito de limite, por exemplo, apareceu subtendido na análise da tendência de comportamento das soluções para valores grandes do tempo, mas não foi formalizado a partir das atividades. O conceito de integral também não foi trabalhado, uma vez que a atividade elaborada exigia recursos adicionais e uma avaliação mais cuidadosa da interpretação utilizada para introduzir este conceito.

Uma segunda modificação esteve relacionada à análise do modelo matemático, que deixou de ocorrer de forma livre, a partir de questionamentos feitos pelos alunos, e passou a

¹⁸ Fonte: <http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:ADN_selecta.jpg> Acesso em: 12 set. 2012.

¹⁹ Uma descrição mais detalhada de como as atividades foram organizadas no decorrer das aulas está elaborada no Capítulo 3, referente às questões metodológicas.

ser guiada por um conjunto de atividades. Estas atividades direcionaram as discussões sobre os elementos do modelo matemático, enfatizando os significados das informações que forneciam sobre o fenômeno biológico e relacionando-os com os conteúdos da ementa na ordem em que foram apresentados ao longo do semestre no primeiro momento de cada aula. A natureza destas atividades será apresentada com mais detalhes no Capítulo 3, que aborda a discussão metodológica.

Estas modificações são, na verdade, bastante profundas, pois trazem um caráter diferente do original para a proposta. Entretanto, foram justificadas e ainda mantiveram a ideia principal de aproximar a Matemática e a Biologia, por meio da discussão dos conceitos matemáticos em conexão com um fenômeno biológico. Sendo assim, a ideia central da proposta permaneceu: trabalhar desde o primeiro dia de aula na análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico; porém seguindo uma estrutura de “dupla hélice” e não mais como o “fio condutor” da disciplina.

Outro aspecto da abordagem pedagógica que merece uma justificativa é o uso de um software durante as aulas da disciplina, que possui uma carga horária de apenas 4 horas semanais. A necessidade desta justificativa é plausível, pois o tempo necessário para os alunos se familiarizarem com o software pode ser crucial para o completo desenvolvimento dos conteúdos previstos na ementa. A decisão de utilizar o *Modellus* esteve fortemente relacionada com o tipo de modelo matemático que se quis apresentar aos alunos, a saber, um modelo matemático que foi desenvolvido por cientistas e que representasse o fenômeno biológico com certa fidedignidade, de modo que os alunos pudessem apreciar a Matemática como útil para o entendimento de fenômenos da sua área de interesse. Modelos matemáticos deste tipo apresentam, em geral, certa complexidade, sendo que o software é um meio para que os estudantes possam analisá-lo. Além disso, no meu entendimento, o tempo que por ventura precisasse ser investido na familiarização dos alunos com o software seria compensado pela oportunidade de refletir sobre os conceitos matemáticos sob uma perspectiva diferente, envolvendo dinamicidade e interatividade.

1.4 Minha pesquisa em meio às demais...

Agora que o leitor já tem uma ideia mais detalhada sobre a abordagem pedagógica que estou propondo nesta tese, retomarei as pesquisas apresentadas na revisão de literatura refletindo sobre sua relação com a minha pesquisa. Para isso inicio lembrando que o objetivo deste estudo é analisar qual o papel que o software *Modellus* desempenhou durante o desenvolvimento da abordagem pedagógica.

De todos os trabalhos apresentados na revisão de literatura, considero que quatro deles têm um foco bastante diferenciado da pesquisa aqui apresentada, são eles: Iversen e Larson (2006), Dan e Xie (2011), Matsuzaki (2011) e Kadijevich (2007). Os dois primeiros têm focos parecidos, na medida em que tentam relacionar o desempenho dos alunos em tarefas de Modelagem com outros aspectos como o seu desempenho em testes tradicionais (IVERSEN; LARSON, 2006); o seu conhecimento matemático e a sua criatividade (DAN; XIE, 2011). Já Matsuzaki (2011) apresenta um método de análise do progresso de um processo de Modelagem, e Kadijevich (2007) sugere padrões para o uso da modelagem computacional em cursos de formação inicial ou continuada.

Em termos gerais, os três primeiros estudos trazem indícios sobre a complexidade do processo de Modelagem, sendo que Iversen e Larson (2006) e Dan e Xie (2011) ainda abordam a não trivialidade envolvida na avaliação desse processo. Kadijevich (2007), por meio de um trabalho mais teórico, ressalta a humanidade envolvida na Modelagem e aspectos que algumas vezes não são enfatizados quando do seu trabalho, como limitações dos modelos e os objetivos por trás de seu desenvolvimento. Discussões envolvendo alguns destes aspectos elencados pelo autor estão previstas na abordagem pedagógica aqui apresentada, como o leitor poderá perceber ao longo do texto.

Um artigo que apresenta algumas semelhanças com a abordagem pedagógica proposta nesta tese é o escrito por Deprez (2011). O autor descreve uma abordagem para o ensino de autovalores e autovetores que se assemelha com a proposta nesta tese, no sentido de que o autor também se vale de um modelo matemático para um fenômeno como meio para discutir os conceitos matemáticos em foco. Sua sequência didática, entretanto, abrange apenas uma parte da disciplina e, pelo que é possível depreender de seu texto, não há utilização de tecnologias pelos alunos durante a análise do modelo proposto pelo professor. Neste sentido, as abordagens pedagógicas diferem. O foco da pesquisa também é diferenciado, na medida em que o objetivo do autor era a análise da possibilidade de utilizar tal sequência didática para a introdução dos conceitos e avaliar a aceitabilidade dos alunos com relação à mesma. Seus resultados, de fato, oferecem expectativa positiva com relação à aceitação dos alunos à abordagem aqui proposta.

Um segundo trabalho que de certo modo se relaciona com a abordagem pedagógica é o de Klymchuk et al. (2011). Estes autores fizeram um estudo das respostas dadas por alunos e professores com relação à análise das previsões feitas por três modelos matemáticos para a dissipação da gripe em uma região. Por meio deste estudo, os autores concluíram que os alunos utilizaram seu senso comum de uma forma efetiva na análise das diferentes previsões.

Não há, entretanto, a proposição de uma abordagem pedagógica para a sala de aula, como é o caso desta pesquisa, e nem o uso de tecnologias. Por outro lado, os resultados encontrados pelos autores dão indícios quanto à possibilidade de se trabalhar com modelos já existentes em sala de aula. Indícios semelhantes são encontrados no trabalho de Alpers (2011) que, investigando a expertise matemática de alunos de engenharia, concluiu sobre a importância do trabalho em sala de aula com modelos matemáticos já existentes.

Finalmente, os demais trabalhos estão mais diretamente relacionados ao foco de investigação desta pesquisa: o papel do software. Apesar de este não ser exatamente o foco destes estudos, de um modo ou de outro os autores discutem em seus resultados aspectos que podem ser relacionados ao papel do software com o qual estão trabalhando.

Por exemplo, Pead et al. (2007) e Neves et al. (2011), apresentam em seus resultados possibilidades trazidas pelas tecnologias para o trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. Hußmann (2007) e Greefrath et al. (2011) discutem funções mais gerais para a tecnologia, como contribuir para a construção de ideias ou a validação de modelos matemáticos, respectivamente. Greefrath et al. (2011) vão além e afirmam que a tecnologia influencia cada uma das etapas do ciclo de Modelagem. Já Geiger (2011), abordando um aspecto mais geral, apresenta um caráter situacional para o papel do software em tarefas de Modelagem, isto é, discute o papel do software como contingente à visão do professor com relação à Modelagem e às tecnologias em sala de aula.

Estas pesquisas trazem discussões sobre a tecnologia e a Modelagem em diferentes contextos, apontando para diferentes papéis que podem ser desempenhados pela tecnologia. Então, de que forma minha pesquisa se diferencia destas? Primeiramente e de forma mais marcante, pela existência de uma abordagem pedagógica que a embasa, abordagem esta que prevê o trabalho com um modelo envolvendo conteúdos matemáticos ainda não estudados pelos estudantes e que, portanto, exige do software uma presença constante. Em segundo lugar, o tipo de trabalho realizado pelos alunos, que analisam um modelo matemático existente, focando o estudo de suas soluções. Finalmente, o próprio entendimento sobre o papel do software no processo de produção de conhecimento, que não o considera apenas uma ferramenta ou auxiliar, mas um ator central neste processo, como será discutido mais adiante. Deste modo, esta pesquisa se diferencia das demais apresentadas até então, e tem o potencial para contribuir com as discussões já iniciadas por outros autores. É com este espírito que dou continuidade ao texto e passo a explicitar com mais detalhes uma das ideias centrais da abordagem pedagógica: a análise do modelo matemático.

Capítulo 2 – Sobre Sistemas Dinâmicos

No Capítulo 1 apresentei uma revisão de literatura sobre pesquisas que lidam com o uso de modelos matemáticos em sala de aula e, após esclarecer as principais ideias relacionadas à abordagem pedagógica que embasa esta pesquisa, teci algumas reflexões a respeito da relação entre a pesquisa proposta nesta tese e os estudos apresentados. Uma das diferenciações feitas foi com respeito ao tipo de trabalho realizado pelos alunos que, na abordagem aqui proposta, envolve a análise de modelos matemáticos já existentes, e não o processo completo de Modelagem. Mas o que significa *analisar um modelo matemático* nesta tese?

A análise a qual me refiro parte do estudo das próprias equações do modelo matemático e enfatiza a investigação do comportamento das soluções e a influência dos parâmetros neste comportamento. Para que esta análise tenha sentido é preciso ainda compreender: o significado das variáveis, dos parâmetros e de cada termo das equações com relação ao fenômeno; as informações dadas pelas soluções do fenômeno; as hipóteses do modelo e as relações que estas hipóteses determinam entre as variáveis.

Mas como é possível analisar o comportamento das soluções a partir do estudo das equações? E, mais ainda, como alunos do curso de Biologia da disciplina Matemática Aplicada que, em geral, nunca ouviram falar de derivada, poderiam compreender o significado de um sistema de EDO e, além disso, analisá-lo? Aqui entram em cena dois aspectos centrais da proposta: o caráter qualitativo da análise do sistema e o uso de um software. Neste capítulo irei abordar algumas discussões envolvendo estes dois temas, tanto do ponto de vista da Matemática como da Educação Matemática, de modo a esclarecer um pouco mais sobre o lugar destes dois elementos na abordagem pedagógica e também sobre sua importância para a mesma. De início, entretanto, é importante analisar o que são sistemas dinâmicos e EDO.

2.1 Sistemas dinâmicos, equações diferenciais ordinárias e pesquisas sobre seu ensino

O que são sistemas dinâmicos? No *website* do IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) é possível encontrar uma definição bem geral para o que são sistemas dinâmicos:

[...] sistemas cujo estado evolui no tempo tais como são encontrados nas mais diversas áreas da Ciência e da atividade humana: Física, Ecologia, Meteorologia, Biologia, Economia, e tantas outras disciplinas [...]. A lei de

evolução pode assumir diversas formas; iterações, equações diferenciais, equações diferenciais parciais, transformações ou fluxos estocásticos²⁰.

Outra definição pode ser encontrada em Katok e Hasselblatt (1995, p.1, tradução nossa):

A noção mais geral e um pouco vaga de um sistema dinâmico inclui os seguintes ingredientes:

(i). Um “espaço de fase X ”, cujos elementos ou “pontos” representam possíveis estados do sistema.

(ii). “Tempo”, que pode ser discreto ou contínuo. Ele pode se estender apenas para o futuro (processos irreversíveis ou não invertíveis) ou tanto para o passado como para o futuro (processos reversíveis ou invertíveis). A sequência de momentos de tempo para o processo de tempo discreto reversível está em uma correspondência natural com o conjunto de todos os inteiros; irreversibilidade corresponde à considerar apenas os inteiros não-negativos. De forma similar, para um processo de tempo contínuo, o tempo é representado pelo conjunto de todos os números reais no caso reversível e pelo conjunto dos números reais não-negativos para o caso irreversível.

(iii). A lei de evolução no tempo. No contexto mais geral esta é uma regra que nos permite determinar o estado do sistema em cada momento de tempo t a partir de seus estados em todos os momentos anteriores. Assim, a lei de evolução no tempo mais geral é dependente do tempo e tem memória infinita²¹.

Podemos entender, então, que um sistema dinâmico é composto por uma lei de evolução que descreve seu estado ao longo do tempo. Esta lei pode ser elaborada de diversas formas e pode ser utilizada para modelar fenômenos de diferentes áreas científicas. Por exemplo, o modelo para a transmissão da malária apresentado no Capítulo 1 é um sistema dinâmico. Este sistema descreve o estado das populações de mosquitos e humanos infectados ao longo do tempo. Neste caso, temos como espaço de fase o plano XY ; o tempo é contínuo, podendo ser um processo reversível ou irreversível de acordo com os objetivos da análise; e podemos determinar estados futuros a partir de um estado inicial. Além disso, a lei de evolução é a mesma para qualquer instante de tempo, isto é, ela não muda com o tempo.

²⁰ Disponível em: <http://milenioimpa.br/novo/portugues/areas_dinamicos.htm> Acesso em: 31 maio 2011.

²¹ The most general and somewhat vague notion of a dynamical system includes the following ingredients:

(i). A “phase space” X , whose elements or “points” represent possible states of the system.

(ii). “Time”, which may be discrete or continuous. It may extend either only into the future (irreversible or noninvertible processes) or into the past as well as the future (reversible or invertible processes). The sequence of time moments for a reversible discrete-time process is in a natural correspondence to the set of all integers; irreversibility corresponds to considering only nonnegative integers. Similarly, for a continuous-time process, time is represented by the set of all real numbers in the reversible case and by the set of nonnegative real numbers for the irreversible case.

(iii). The time-evolution law. In the most general setting this is a rule that allows us to determine the state of the system at each moment of time t from its states at all previous times. Thus, the most general time-evolution law is time dependent and has infinite memory.

A lei de formação deste sistema é composta por equações diferenciais ordinárias. Vamos entender um pouco mais²² sobre o que são EDO para compreendermos o tipo de análise qualitativa a que me refiro na introdução à abordagem pedagógica. Iniciamos com uma definição:

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são **equações diferenciais** (BOYCE; DIPRIMA, 2006, p.1, grifo do autor).

De outro modo,

Em geral, uma **equação diferencial** é aquela que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. A **ordem** de uma equação diferencial é a mesma da derivada mais alta que ocorre na equação. [...] Por exemplo, quando consideramos a equação diferencial

$$(4) \quad y' = xy$$

entendemos que y seja a função desconhecida de x .

Uma função f é denominada **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y=f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, f é uma solução da Equação 4 se

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos os valores de x em algum intervalo (STEWART, 2009, p.585, grifos do autor).

Apesar de a definição geral não apresentar o tempo como variável independente, várias EDO possuem esta característica. Sendo assim, é importante notar que uma EDO também pode ser considerada um sistema dinâmico, uma vez que sua expressão define como a função desconhecida evolui ao longo do tempo. Esta evolução é caracterizada pelos diferentes estados que o sistema dinâmico assume ao longo do tempo, o que está diretamente relacionado ao estudo das soluções da equação. Sendo assim, a determinação das soluções de uma EDO é uma tarefa importante. Para alguns tipos de equações diferenciais é possível determinar uma solução analítica, isto é, uma expressão que envolve operações e funções elementares. Infelizmente, para uma grande quantidade de equações isto não é possível. Por isso, desenvolveram-se métodos numéricos e gráficos²³ para a aproximação das soluções.

Este fato é foco de discussão em alguns trabalhos voltados para o ensino de equações diferenciais. Hubbard (1994, p. 372, tradução nossa), por exemplo, destaca que “a maioria das equações diferenciais não têm soluções que podem ser escritas de forma elementar”²⁴ e

²² Não tenho a intenção de fazer um levantamento exaustivo sobre classificações e métodos relacionados ao estudo de equações diferenciais, mas sim destacar alguns aspectos que considero relevantes para o entendimento do que seria uma análise qualitativa para um sistema de equações deste tipo.

²³ Para mais informações sobre estes métodos recomendo Boyce e Diprima (2006) e Stewart (2007).

²⁴ Most differential equations do not have solutions that can be written in elementary form [...].

afirma que existe uma discrepância entre a visão que Newton tinha sobre equações diferenciais – as equações como “*o elo entre a matemática e a ciência*”²⁵ (HUBBARD, 1994, p. 372, grifo do autor, tradução nossa) – e a visão do ensino de EDO – técnicas de resolução analítica das equações. Para o autor, as técnicas de resolução não deveriam ser o foco do ensino de EDO pois, mesmo no caso em que é possível determinar a solução analítica, há um desvio da questão central: “*Como as soluções se comportam?*”²⁶ (HUBBARD, 1994, p. 372, tradução nossa).

De fato, é o comportamento das soluções de um sistema dinâmico, em particular de equações diferenciais, que é relevante, pois é através de sua análise que é possível compreender como os estados do sistema variam ao longo do tempo. Claro que ter expressões analíticas para as soluções é interessante, mas nem sempre elas são intuitivas quanto à sua evolução. Por isso, a importância de abrir espaço no ensino para este tipo de discussão e análise.

Stephan e Rasmussen (2002, p.460, tradução nossa), há uma década, já enfatizavam que:

Abordagens tradicionais em equações diferenciais enfatizam técnicas analíticas para encontrar expressões fechadas para funções soluções enquanto esforços atuais de reforma estão enfatizando abordagens gráficas e numéricas para analisar e compreender o comportamento das funções soluções. Pesquisas recentes indicam que o ensino de equações diferenciais pode ser transformado para incluir abordagens mais centradas no aluno e um currículo mais rico tecnologicamente (por exemplo, Artigue, 1992; Rasmussen, 2001)²⁷.

Diferentes pesquisas abarcam diferentes questionamentos envolvendo o ensino de equações diferenciais. Em particular, destaco os trabalhos relacionados ao projeto “Investigação Orientada em Equações Diferenciais” (Inquiry Oriented Differential Equations Project – IO-DE) desenvolvido por Rasmussen e colaboradores. As pesquisas relacionadas a este projeto possuem três principais focos. O primeiro está relacionado com o desenvolvimento e análise de propostas instrucionais inovadoras (RASMUSSEN; KWON, 2007). Uma destas propostas é pano de fundo para a pesquisa de Rasmussen e Blumenfeld

²⁵ [...] the link between mathematics and science [...].

²⁶ *How do solutions behave?*

²⁷ Traditional approaches in differential equations emphasize analytic techniques for finding closed form expressions for solution functions whereas current reform efforts are emphasizing graphical and numerical approaches for analyzing and understanding the behavior of solution functions. Recent research indicates that the teaching of differential equations can be transformed to include a more student-centered approach and a more technology-rich curriculum (e.g., Artigue, 1992; Rasmussen, 2001).

(2007), que investigaram os modos como estudantes de graduação raciocinam sobre quantidades enquanto *reinventam* as soluções de um sistema com duas equações lineares.

Nesta pesquisa, o trabalho dos alunos iniciou com o convite feito pelo professor para que eles construíssem todos os possíveis gráficos de velocidade X posição de um sistema massa-mola. Os alunos trabalharam em pequenos grupos sob a orientação do professor. Durante os diálogos nos pequenos grupos e em grande grupo, os alunos apresentaram suas ideias e discutiram as propostas, procurando argumentar e justificar seus raciocínios e conclusões alcançadas. O professor orientou as discussões de forma a fomentar a curiosidade dos alunos e os argumentos que podem levar à reinvenção pretendida. Este tipo de trabalho caracteriza-se na perspectiva da investigação orientada.

Um segundo foco é o estudo do pensamento dos estudantes conforme desenvolvem suas ideias e o conhecimento que o professor necessita para apoiar a reinvenção de ideias matemáticas pelos estudantes (RASMUSSEN; KWON, 2007). Dentro deste escopo, Rasmussen (2001) investigou e procurou interpretar as dificuldades e compreensões dos estudantes sobre ideias matemáticas centrais para o estudo de equações diferenciais ordinárias. Para isso, ele se baseou em uma proposta onde os métodos numéricos e gráficos ganham ênfase. Esse autor apontou como questões centrais: o entendimento da natureza funcional das soluções; a interpretação das soluções de equilíbrio; e a importância de compreender as quantidades representadas nos gráficos das soluções para uma análise efetiva de uma equação. O pesquisador também identificou e analisou as imagens e intuições dos estudantes sobre três ideias matemáticas centrais para o trabalho com métodos gráficos e numéricos com equações diferenciais: “teorias intuitivas dos estudantes sobre soluções de equilíbrio, imagens conceituais dos estudantes de aproximações numéricas, e intuições e imagens dos estudantes sobre estabilidade”²⁸ (RASMUSSEN, 2001, p.73, tradução nossa).

O terceiro foco de pesquisa é a produção social de significados e a identidade dos estudantes (RASMUSSEN; KWON, 2007). Neste âmbito, Stephan e Rasmussen (2002) analisaram as práticas matemáticas de sala de aula na primeira metade de um curso introdutório de equações diferenciais em uma universidade. O design instrucional do curso também foi baseado na investigação orientada. Os autores identificaram seis práticas matemáticas desenvolvidas pela turma ao longo deste período: predição de funções soluções individuais; refinamento e comparação das predições feitas para uma solução; elaboração de um campo de direções e sua relação com predições sobre as soluções; reflexão sobre a função

²⁸ [...] students’ intuitive theories about equilibrium solutions, students’ concept images of numerical approximations, and students’ intuitions and images about stability.

desconhecida da equação diferencial ser tanto uma variável como uma função; elaboração e organização de coleções de funções soluções; reflexão com espaços de funções soluções. Os autores destacam que as práticas matemáticas de sala de aula não ocorrem de forma sequencial com relação ao tempo e podem emergir de uma forma que permite sobreposições entre uma prática e outra.

Estas pesquisas vinculadas ao projeto IO-DE baseiam-se no trabalho com a investigação orientada, como já mencionado e evidenciado em alguns dos trabalhos ilustrados anteriormente. A investigação orientada possui três objetivos principais: auxiliar os alunos a reinventar várias ideias matemáticas centrais e métodos para equações diferenciais; utilizar tarefas desafiadoras, situadas em situações realísticas, como ponto de partida para a investigação; e utilizar um tratamento balanceado das abordagens analítica, numérica e gráfica, de modo que emirjam no trabalho dos alunos mais ou menos simultaneamente (RASMUSSEN; KWON, 2007).

Tem-se, então, que o conjunto de pesquisas realizadas pelos participantes do projeto IO-DE procura investigar e analisar diferentes aspectos relacionados ao ensino de equações diferenciais dentro de uma perspectiva que abre espaço para métodos gráficos e numéricos, buscando contribuir para que este tipo de trabalho tenha resultados positivos para os alunos e professores.

Na mesma direção de estudar propostas inovadoras para o ensino de EDO encontra-se a pesquisa de Javaroni (2007), que propôs uma abordagem geométrica para o mesmo. O objetivo de sua pesquisa foi analisar “quais as possibilidades de ensino e aprendizagem de EDO com ênfase na abordagem geométrica das soluções com o auxílio das TIC” (JAVARONI, 2007, p. 21-22). A base para a pesquisa foi uma proposta cujo objetivo era o estudo de modelos matemáticos clássicos por meio da análise de suas equações e também de suas soluções. Para isso, os alunos utilizaram os softwares Maple²⁹, Excel e Winplot, assim como lápis e papel, para construir os campos de direções das equações e analisá-los, buscando entender como as soluções de cada modelo se comportavam.

Na pesquisa de Javaroni evidenciou-se o papel importante dos softwares durante o processo de elaboração das atividades pelos alunos. Segundo a autora, em algumas situações o computador “pode desempenhar o papel de facilitador de contas, em outras, ele surge como um ampliador de memória dos alunos e, em outras situações, ainda, ele possibilita a reorganização do pensamento dos alunos” (JAVARONI, 2007, p.164).

²⁹ Endereço eletrônico: <<http://www.maplesoft.com/>> Acesso em: 1 mar. 2011.

A análise qualitativa dos modelos torna-se interessante quando auxiliada pelas mídias informáticas, visto que estas mídias nos trazem várias possibilidades de trabalho. Por exemplo, podemos utilizar uma planilha para realizar os cálculos dos coeficientes angulares dos vetores tangentes às soluções para esboçar os campos de direções; ou ainda, por meio da utilização de um software gráfico, podemos esboçar esse campo de direções. É possível também utilizar um software algébrico para calcular a solução da EDO e compará-la com a análise elaborada por meio dos campos de direções. Estas possibilidades ilustram a presença dos softwares nos processos desenvolvidos pelos alunos que participaram como sujeitos da pesquisa realizada pela autora (JAVARONI, 2007).

Outro aspecto relevante na pesquisa de Javaroni (2007) foi o papel da visualização no desenvolvimento das atividades. Como mencionado anteriormente, os alunos utilizaram os campos de direções das equações para analisar a evolução de suas soluções ao longo do tempo. Esta análise exigiu uma transição entre as representações geométricas e analíticas de uma mesma situação. A autora aponta esta transição como um dos grandes desafios da abordagem geométrica, mas também salienta que, em sua opinião, o gráfico dos campos de direções apresenta-se como “[...] uma possibilidade de procurar elucidar o despercebido ao estudar uma EDO” (JAVARONI, 2007, p.169).

Ainda nesta mesma direção encontramos o trabalho de Dullius (2009). Tendo em vista a insatisfação de seus alunos de turmas de engenharia com o conteúdo de EDO, uma vez que não percebiam a importância do mesmo para sua carreira profissional, a autora propôs uma abordagem às Equações Diferenciais a partir do estudo de situações problemas contextualizadas, com o auxílio da planilha eletrônica do OpenOffice e do software *Powersim*³⁰. Os objetivos da autora incluíram: identificar as dificuldades dos alunos com a aprendizagem de EDO; refletir sobre possibilidades para auxiliá-los a desenvolver uma aprendizagem significativa sobre este conteúdo e propor uma abordagem para a sala de aula; e investigar como utilizar recursos computacionais e quais as vantagens e desvantagens disto.

Com base nos dados que coletou e na literatura estudada a autora pôde concluir que as principais dificuldades dos alunos residem, entre outras, em dificuldades quanto ao conhecimento de matemática básica e entendimento do conceito de derivada e integral assim como suas interpretações; resistência na consideração de representações gráficas e numéricas

³⁰ O Powersim é um software que permite a elaboração de modelos formados por fluxogramas. Ele apresenta representações gráficas das soluções do modelo construído e permite que os parâmetros e as condições iniciais e de contorno sejam modificadas. Endereço eletrônico: <<http://www.powersim.com/>>. Acesso em: 15 abr. 2010.

como legítimas; falta de motivação para compreender o que realmente fazem; dificuldades de interpretação de gráficos; entre outras.

A proposta apresentada pela autora teve como objetivo o estudo de EDO inserido em um contexto de aplicação e de uma forma equilibrada quanto aos métodos numéricos, gráficos e analíticos, com o auxílio do software *Powersim*. Os alunos trabalharam em duplas ou trios, com o auxílio da planilha eletrônica e do software *Powersim*, analisando situações-problema selecionadas pela pesquisadora e consideradas importantes para a área de estudo dos alunos. As situações-problema propostas foram: desintegração radioativa, crescimento da população, absorção de medicamentos pelo organismo, reações químicas, problemas de mistura, Lei do Resfriamento de Newton, queda de corpos com resistência do ar, circuitos elétricos, crescimento populacional logístico, e propagação de enfermidades.

As atividades eram formadas por questões que auxiliavam os alunos na elaboração de modelos para as situações-problema com o software *Powersim*, na análise do comportamento de suas soluções e na análise da influência dos parâmetros do modelo nesse comportamento. Algumas atividades foram realizadas sem o uso do computador e tinham como principal objetivo a resolução analítica das equações estudadas e da comparação destas equações com os modelos elaborados pelos alunos.

Os principais resultados apresentados pela pesquisadora foram: (i) o trabalho em duplas revelou-se de suma importância para os alunos; (ii) o uso do computador facilitou a visualização e a elaboração de cálculos; muitos alunos não o identificaram como positivo para a aprendizagem uma vez que os software não colaboraram com o aprendizado das soluções analíticas das equações; (iii) o trabalho com situações-problema relacionadas à sua área de estudo motivou os alunos; (iv) apesar de entenderem a metodologia de trabalho como sendo positiva, muitos alunos tiveram dificuldades com ela, sentindo falta de aulas expositivas e de exercícios modelo; (v) os alunos apresentaram resistência em considerar soluções geométricas e numéricas como sendo legítimas. A avaliação geral da autora foi que a metodologia de trabalho desenvolvida é positiva, mas devem ser consideradas questões como a adaptação dos alunos a ela, o que pode necessitar de bastante tempo.

Evidencia-se, portanto, nestas pesquisas, a busca por incorporar ao ensino de EDO a realidade vivenciada matematicamente de utilizar técnicas qualitativas de análise das equações, técnicas estas que surgiram a partir da dificuldade em determinar as soluções analíticas. Esta busca materializa-se nas pesquisas através do desenvolvimento e investigação de propostas de ensino que enfatizam métodos gráficos e numéricos para o estudo de EDO com enfoque na análise do comportamento de suas soluções, a questão central.

2.2 Análise qualitativa de um sistema dinâmico

É interessante esclarecer ao leitor o que entendo por análise qualitativa de um sistema dinâmico, uma vez que já mencionei o uso de métodos gráficos e numéricos associados a este tipo de análise. Afinal, como métodos numéricos podem estar associados a uma análise qualitativa?

Esta dúvida pode surgir, em parte, devido às discussões metodológicas que perpassam, em geral, as pesquisas na área de Educação Matemática. Estes debates normalmente expõem a pesquisa qualitativa como aquela que trabalha com dados que não podem ser tratados numericamente. Assim, ela se “opõe”, num certo sentido, à pesquisa quantitativa, que utiliza dados passíveis de um tratamento numérico.

No caso aqui exposto, entretanto, a análise qualitativa não se “opõe” ao numérico, mas sim ao analítico. Quer dizer, dada uma equação diferencial, por exemplo, ao invés de utilizar técnicas de resolução analíticas para encontrar uma expressão em termos de funções e operações elementares para a solução, utilizam-se outras técnicas que possam fornecer informações sobre a mesma.

O termo qualitativo refere-se ao fato de que o foco deste tipo de análise recai sobre as qualidades do comportamento das soluções conforme o tempo passa e próximo a pontos estratégicos, chamados de pontos de equilíbrio. Estas informações podem ser obtidas por meio de uma análise da própria equação diferencial, e as técnicas utilizadas para esta análise envolvem procedimentos gráficos e/ou numéricos. Estes procedimentos, por sua vez, estão embasados matematicamente e fazem parte do que chamamos de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias.

Historicamente, as EDO emergiram do trabalho de matemáticos e físicos na tentativa de resolver problemas físicos, como problemas de elasticidade (elasticidade de uma viga, por exemplo), problemas relacionados a pêndulos, problemas ligados à astronomia (problemas dos dois corpos e, mais tarde, dos três corpos). Na metade do século XVIII o conteúdo de EDO se tornou uma disciplina independente. A questão principal durante este século esteve relacionada com a determinação das soluções de uma EDO. Conforme os estudos foram se desenvolvendo, o entendimento do que era uma solução foi mudando: inicialmente os matemáticos procuravam por soluções expressas em termos de funções elementares; mas logo

já se contentavam em expressar as soluções por uma quadratura³¹ que provavelmente não poderia ser efetuada. Mais tarde, quando estes métodos falharam, eles expressaram as soluções em termos de séries infinitas (KLINE, 1972).

Apesar dos vários métodos de resolução desenvolvidos neste período, não se conseguiu encontrar um método geral, de modo que o conteúdo de EDO continuou como um conjunto de técnicas para diferentes tipos de equações. No século XIX, o estudo de EDO esteve relacionado principalmente ao estudo de equações diferenciais parciais, que emergiram do estudo de problemas físicos mais complicados. Várias contribuições foram feitas, por diferentes matemáticos, com relação ao estudo das soluções das EDO e de sistemas delas. Em particular, cito o trabalho de Poincaré, que estudou, entre outros assuntos, o movimento planetário e a estabilidade de órbitas de planetas e de satélites. As equações mais relevantes para este estudo são não lineares e não havia se desenvolvido um método geral para resolvê-las (KLINE, 1972).

Tendo em vista que as soluções das equações para o movimento de corpos (até mesmo para três corpos) não podem ser expressas em termos de funções conhecidas, foi preciso buscar outro método que não dependesse deste fato. Foi então que Poincaré vislumbrou um método para análise das soluções a partir de suas equações, e deu início ao desenvolvimento da Teoria Qualitativa das EDO (KLINE, 1972). Deste modo, é possível perceber que a análise qualitativa das equações emergiu historicamente da busca por solucionar dificuldades enfrentadas pelos matemáticos na determinação de soluções analíticas para as equações que estudavam, inicialmente vinculadas a situações da Física. A Teoria Qualitativa trouxe outra perspectiva para o entendimento das soluções de EDO e de sistemas de EDO. Neste texto, sempre que me referir à *análise de um modelo matemático*, estarei tomando como base o foco desta Teoria Qualitativa, isto é, o *estudo do comportamento de suas soluções*.

2.3 Sistemas de equações diferenciais ordinárias

Tendo em vista as considerações apresentadas anteriormente, uma questão que emerge é a seguinte: como ficam os sistemas de equações diferenciais neste panorama? O interessante é que para os sistemas é ainda mais difícil encontrar soluções analíticas. De modo geral, apenas os sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares e aqueles que podem ser

³¹ O termo quadratura neste caso se refere à determinação de uma área por meio de uma integral. Quer dizer, os matemáticos desenvolviam os procedimentos de resolução algébrica das equações diferenciais chegando à solução expressa como uma integral, que muito provavelmente não conseguiriam resolver.

reduzidos a sistemas lineares são passíveis de possuir soluções analíticas. Uma equação diferencial ordinária linear tem a seguinte forma geral:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} x'' + a_{n-1} x' + a_n x = g(t) \quad (2.4)$$

onde não ocorrem múltiplos ou outras não linearidades em x ou em suas derivadas. Os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ podem ser constantes ou funções da variável independente t . Quando $g(t)=0$ para todo t pertencente a um intervalo $I=(\alpha, \beta)$, dizemos que a equação é *homogênea* (EDELTEIN-KESHET, 2005).

Deste modo, um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$ assume a seguinte forma geral:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + g_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + g_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + g_n(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Outro modo de escrever o sistema acima é através da notação matricial. Considere $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, ..., $x_n=x_n(t)$ as coordenadas do vetor $\mathbf{x}$; $g_1=g_1(t)$, $g_2=g_2(t)$, ..., $g_n=g_n(t)$ as coordenadas do vetor $\mathbf{g}$; e a matriz $A=(a_{ij})_{n \times n}$ a matriz dos coeficientes. Então o sistema pode ser escrito como:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g} \quad (2.6)$$

(DOERING; LOPES, 2005).

Um exemplo de sistema homogêneo de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem em $\mathbb{R}^2$ é o seguinte sistema que modela um sistema massa-mola:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - 0,125x_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

(BOYCE; DIPRIMA, 2006, p.193).

O sistema que analisamos para a transmissão da malária, por exemplo, é um sistema *não linear*, pois cada uma de suas equações envolve o produto entre as duas funções soluções desconhecidas. Para este tipo de sistema a análise das soluções naturalmente envolve técnicas numéricas e gráficas, uma vez que encontrar soluções analíticas é um privilégio de poucos sistemas.

A análise gráfica envolve a identificação das soluções de equilíbrio e o modo como as soluções se comportam a medida que $t \rightarrow +\infty$ (ou $t \rightarrow -\infty$, quando se quer analisar o passado

do sistema). Além disso, o estudo da influência das condições iniciais e dos parâmetros no comportamento destas soluções também é relevante. Temos aqui um exemplo de análise qualitativa de um sistema dinâmico.

Vamos utilizar o modelo para a transmissão da malária³² como um exemplo e um “fio condutor” para explorar as técnicas possíveis de serem utilizadas para o estudo do comportamento de suas soluções. É importante ressaltar que estas técnicas não fazem parte dos objetivos da abordagem pedagógica e, portanto, **não** foram trabalhadas com os alunos que cursaram a disciplina Matemática Aplicada. O objetivo de apresentá-las neste texto é fornecer ao leitor subsídios para que possa avaliar a complexidade matemática que perpassa o estudo de sistemas dinâmicos. Para tanto, considere o sistema (2.3) com os seguintes parâmetros: $a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $g=0.8$, $M=60000$, $c=0.01$, $v=0.2$ ³³. Temos, então:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{0.29}{1000} \cdot 0.5 \right) \cdot Y \cdot (1000 - X) - 0.8X \\ \frac{dY}{dt} = \left(\frac{0.29}{1000} \cdot 0.01 \right) \cdot X \cdot (60000 - Y) - 0.2Y \end{cases} \quad (2.8)$$

Simplificando e utilizando outra notação para a derivada, temos:

$$\begin{cases} X' = 0.000145Y(1000 - X) - 0.8X \\ Y' = 0.0000029X(60000 - Y) - 0.2Y \end{cases} \quad (2.9)$$

Vamos iniciar observando que:

01) $f_1(X,Y)=0.000145Y(1000-X)-0.8X$ e $f_2(X,Y)=0.0000029X(60000-Y)-0.2Y$ são funções contínuas³⁴ que possuem derivadas parciais contínuas com relação a X e Y em uma região do espaço. No caso do sistema (2.9) consideramos a seguinte região do plano XY : $R=\{(X,Y) | 0 \leq X \leq 1000 \text{ e } 0 \leq Y \leq 60000\}$.

O sistema (2.9) juntamente com as condições iniciais $X(0)=100$ e $Y(0)=6000$ forma o que chamamos de Problema de Valor Inicial (PVI). Como as condições iniciais pertencem à região R e temos a condição de continuidade acima, então temos garantido que o PVI possui uma única solução. O seguinte teorema confirma este resultado:

³² Recomendo o trabalho de Javaroni (2007) para exemplos de análise qualitativa de EDO, tais como o modelo de um objeto em queda livre e a Lei de Resfriamento de Newton.

³³ Estou usando a notação americana para decimais onde, no lugar da vírgula é o ponto, para seguir o padrão de notação dos *software* de Matemática.

³⁴ É possível demonstrar a continuidade destas funções utilizando a definição de continuidade de funções de duas variáveis reais.

Considere o sistema geral de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.10)$$

O teorema afirma o seguinte:

Suponha que cada uma das funções $F_1, \dots, F_n$ e suas derivadas parciais, $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$, são contínuas em uma região R do espaço $tx_1 \dots x_n$ definida por $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1$, ..., $\alpha_n < x_n < \beta_n$, e suponha que o ponto $(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ está em R . Então, existe um intervalo $|t - t_0| < h$ no qual há uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema de equações diferenciais (2.10) que também satisfaz as condições iniciais $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$ (BOYCE; DIPRIMA, 2006, p.194).

É importante ressaltar que o teorema acima não é o mais geral possível e suas hipóteses são suficientes, mas não necessárias, para a validade do resultado. Outras formulações podem ser feitas com hipóteses mais fracas. É importante notar, também, que o tamanho do intervalo de tempo onde a solução do PVI existe e é única não foi especificado, podendo ser muito pequeno (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

02) As funções $f_1(X,Y)$ e $f_2(X,Y)$ não dependem de forma explícita do tempo. Neste caso, denominamos as equações diferenciais $X' = f_1(X,Y)$ e $Y' = f_2(X,Y)$ de equações diferenciais ordinárias *autônomas*. Esta “independência” do tempo permite que as soluções possam ser analisadas como trajetórias no plano XY ao invés de serem vistas como superfícies no espaço tXY .

Para cada ponto (X,Y) do plano, temos um único vetor $(f_1(X,Y), f_2(X,Y))$ correspondente, que não muda com o tempo. Como uma curva solução passando por (X,Y) deve satisfazer o sistema $X' = f_1(X,Y)$, $Y' = f_2(X,Y)$, tem-se que a curva solução deve ter esses vetores como tangente em cada ponto. O conjunto desses vetores é chamado de *campo de direções*. Através deste campo, podemos esboçar um *retrato de fase*, isto é, um conjunto de famílias de curvas-solução.

Vamos elaborar um campo de direções para o modelo da malária dado pelo sistema (2.9). Iniciamos elaborando uma tabela com valores para X , Y , $f_1(X,Y)$ e $f_2(X,Y)$, como segue:

Tabela 1 – Cálculo de $f_1(X,Y)$ e $f_2(X,Y)$ a partir de valores arbitrários para X e Y .

X	Y	$f_1(X,Y)=0.000145Y(1000-X)-0.8X$	$f_2(X,Y)=0.0000029X(60000-Y)-0.2Y$
0	0	0	0
50	6000	786.5	-1192.17
50	3000	373.25	-591.735
100	6000	703	-1184.34
100	3000	311.5	-583.47
250	6000	452.5	-1160.85
250	3000	126.25	-558.675
250	1500	-36.875	-257.5875
500	6000	35	-1121.7
500	3000	-182.5	-517.35
500	1500	-291.25	-215.175
600	6000	-132	-1106.04
600	3000	-306	-500.82
700	6000	-299	-1090.38
700	3000	-429.5	-484.29

Fonte: Tabela elaborada no Excel.

Escolhendo valores arbitrários para X e Y , obtemos uma coleção de valores para $f_1(X,Y)$ e $f_2(X,Y)$. Podemos, então, traçar o campo de direções marcando cada ponto arbitrário escolhido acompanhado de um pequeno segmento de reta apontando na mesma direção e sentido do vetor $(f_1(X,Y), f_2(X,Y))$. Para os pontos da tabela obtemos o seguinte (Fig.4):

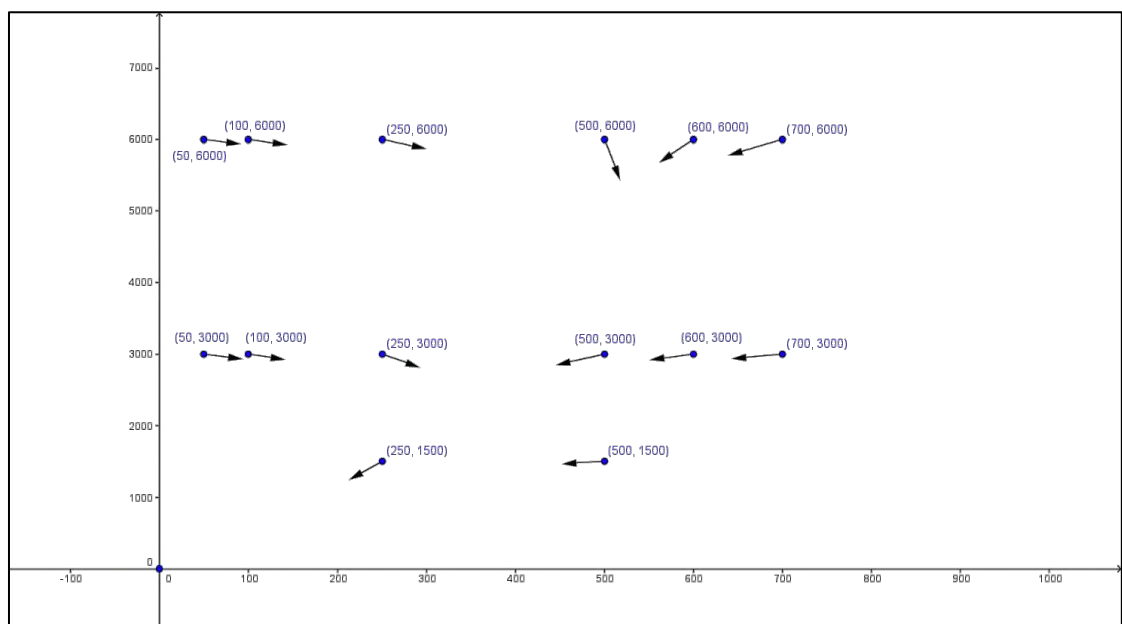


Figura 4 - Vários pontos (X,Y) associados aos respectivos vetores-direção $(f_1(X,Y), f_2(X,Y))$ calculados pelo sistema (2.9) cujos valores estão na Tabela 1.

Quanto mais pontos calcularmos, mais preciso será o campo de direções. Tendo em vista que o trabalho de cálculo e representação dos vetores-direção no plano é dispendioso, podemos utilizar um software para obter um campo de direções. A imagem abaixo (Fig.5) apresenta um campo de direções para o sistema (2.9), elaborado com o software *Winplot*³⁵. A imagem também apresenta algumas trajetórias que podem ser esboçadas através da análise do campo.

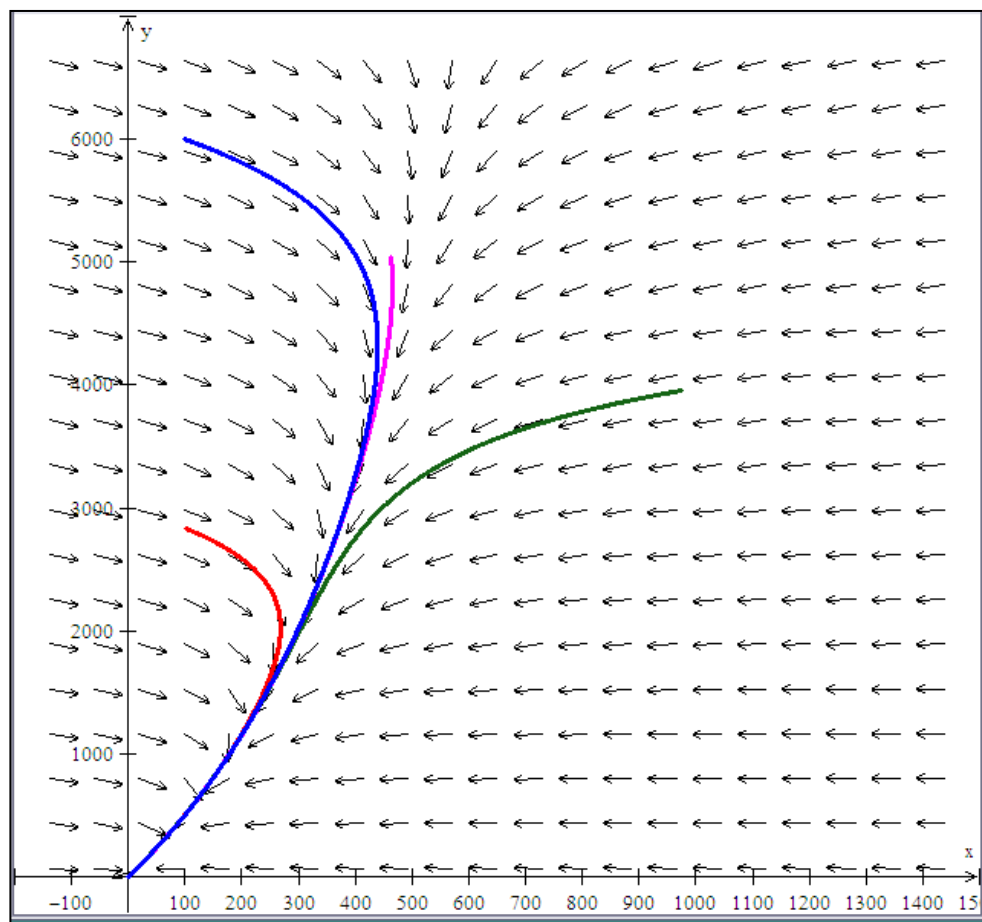


Figura 5 - Campo de direções e algumas trajetórias do sistema (2.9).

Note que o campo de direções foi traçado apenas para valores positivos de X e Y . Isto se deve à relação do sistema com o fenômeno biológico. De fato, como X e Y representam quantidade de pessoas e mosquitos infectados, respectivamente, valores negativos não fazem sentido biologicamente. Entretanto é necessário deixar claro que é possível traçar o campo de direções em todo o plano XY .

³⁵ Software gráfico matemático gratuito que permite o esboço de gráficos e tabelas de diferentes tipos de funções. Endereço eletrônico: <<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>>. Acesso em: 2 abr. 2010.

O campo de direções do sistema (2.9) mostra uma tendência de comportamento das soluções que se torna clara quando analisamos as trajetórias traçadas. Para qualquer ponto pertencente ao plano XY na região R contida no primeiro quadrante que considerarmos como condições iniciais do sistema temos que a curva-solução passando por este ponto se aproxima de uma determinada curva e tende ao ponto $(0,0)$ conforme o tempo t tende a infinito. Em outras palavras, para qualquer condição inicial após um determinado tempo suficientemente grande a tendência é que a malária seja extinta na região de estudo.

É interessante ressaltar que os campos de direção não são quantitativamente precisos, uma vez que são formados por um número finito de segmentos. Deste modo, é preciso ter em mente que as trajetórias esboçadas a partir do campo são *aproximações* das soluções. Apesar disto, é possível inferir por meio da análise do campo o comportamento das curvas-solução e utilizá-lo para interpretar a evolução do fenômeno correspondente (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

Uma maneira mais eficaz para a construção de um campo de direções para um sistema baseia-se na determinação de *nullclines*, que são curvas no plano XY onde as funções f_1 ou f_2 são identicamente nulas, isto é, $f_1(X,Y)=0$ ou $f_2(X,Y)=0$ para todos os pontos (X,Y) pertencentes às curvas. (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

Se $f_1(X,Y)=0$, então $X'=0$, o que implica que X não muda. Conclui-se então que o vetor direção é paralelo ao eixo Y . Analogamente, se $f_2(X,Y)=0$, então $Y'=0$, o que implica que Y não muda. Então o vetor direção é paralelo ao eixo X . Os pontos de intersecção das *nullclines* satisfazem $X'=0$ e $Y'=0$, e representam estados de equilíbrio (*pontos de equilíbrio*) (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

A seguir, vamos determinar o campo de direções do sistema (2.9) a partir das *nullclines*.

a) Cálculo da X *nullcline*:

$$\begin{aligned}
 X' = 0 &\Leftrightarrow 0.000145 \cdot Y \cdot (1000 - X) - 0.8X = 0 \\
 &\Leftrightarrow 0.000145 \cdot Y \cdot (1000 - X) = 0.8X \\
 &\Leftrightarrow Y = \frac{0.8X}{0.000145(1000 - X)} \\
 &\Leftrightarrow Y = \frac{0.8X}{0.145 - 0.000145X} \times \frac{10^6}{10^6} \\
 &\Leftrightarrow Y = \frac{8 \cdot 10^5 X}{145000 - 145X}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Assim, para todos os pontos (X,Y) na curva $Y = \frac{8 \cdot 10^5 X}{145000 - 145X}$ temos que $f_1(X,Y)=0$.

A imagem a seguir (Fig.6) mostra o gráfico da X nullcline:

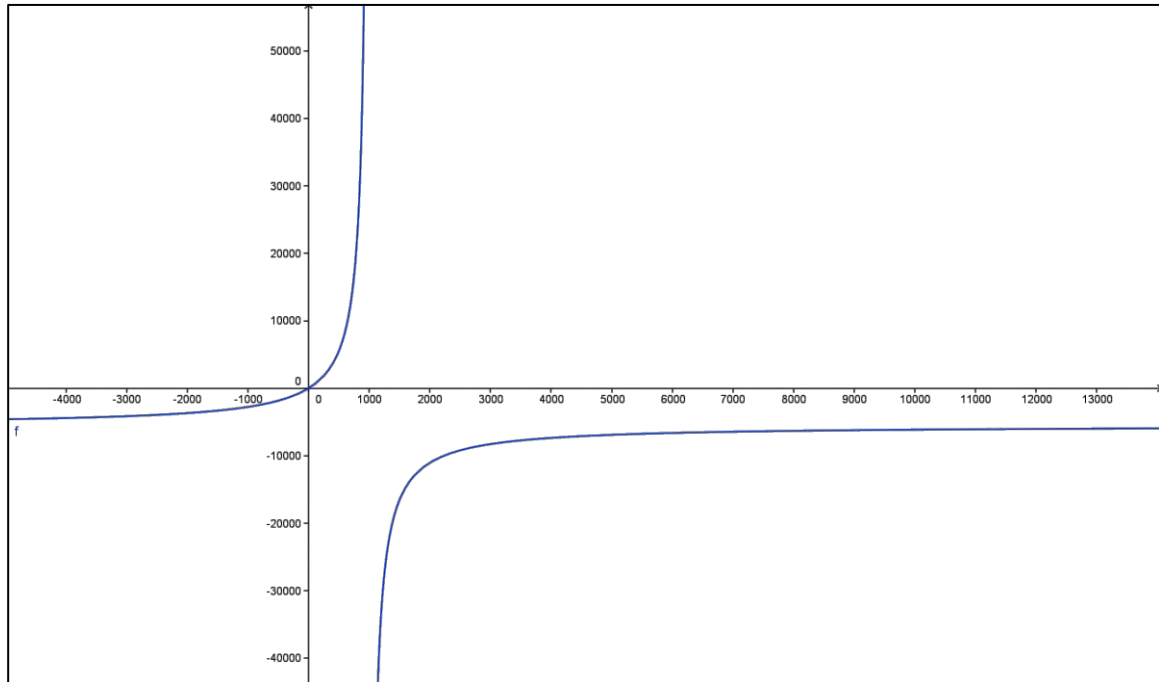


Figura 6 - Gráfico da X nullcline para o sistema (2.9).

b) Cálculo da Y nullcline:

$$\begin{aligned}
 Y' = 0 &\Leftrightarrow 0.0000029 \cdot X \cdot (60000 - Y) - 0.2Y = 0 \\
 &\Leftrightarrow 0.0000029 \cdot X \cdot (60000 - Y) = 0.2Y \\
 &\Leftrightarrow 0.174X - 0.0000029XY = 0.2Y \\
 &\Leftrightarrow 0.2Y - 0.0000029XY = 0.174X \\
 &\Leftrightarrow Y(0.2 - 0.0000029X) = 0.174X \\
 &\Leftrightarrow Y = \frac{0.174X}{0.2 - 0.0000029X} \times \frac{10^7}{10^7} \\
 &\Leftrightarrow Y = \frac{174000X}{2 \cdot 10^6 - 29X}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

De forma semelhante, para todos os pontos (X,Y) pertencentes à curva $Y = \frac{174000X}{2 \cdot 10^6 - 29X}$, temos que $f_2(X,Y)=0$. A figura a seguir (Fig.7) mostra o gráfico da Y nullcline:

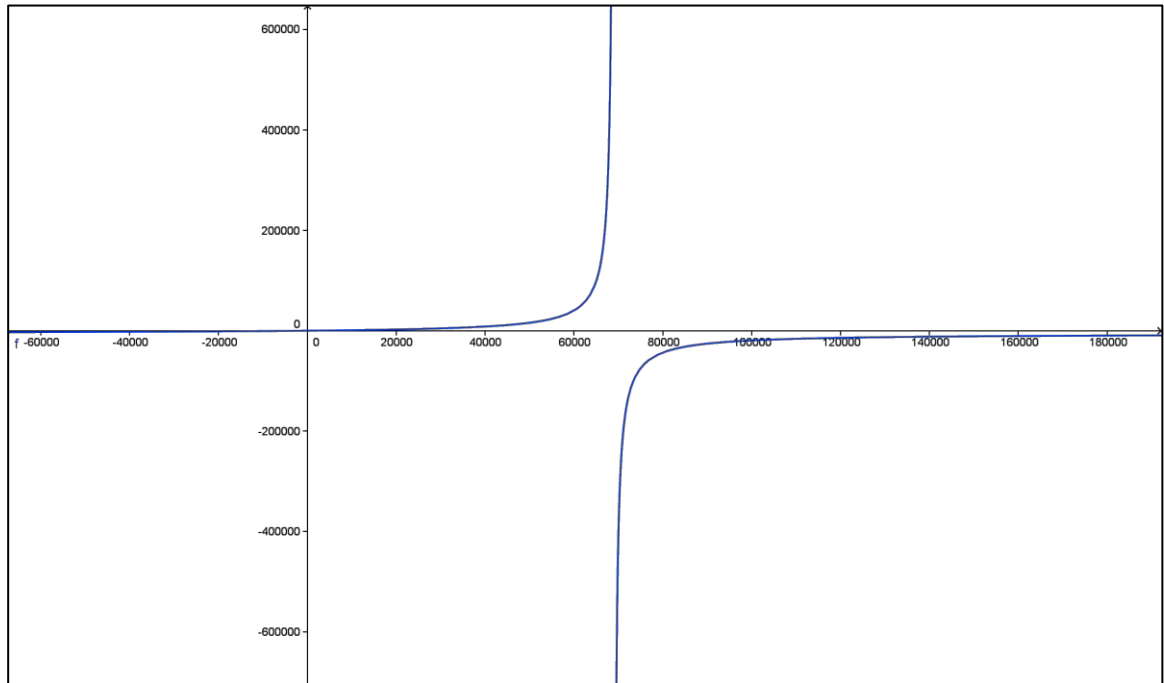


Figura 7 - Gráfico da Y nullcline para o sistema (2.9).

Precisamos, agora, determinar o sentido dos vetores diretores ao longo das *nullclines*. Os vetores diretores são nulos nos pontos de intersecção das *nullclines*, como vimos acima, e sua orientação deve variar continuamente de um ponto a outro das *nullclines*. A mudança de orientação ocorre, portanto, apenas nos pontos de equilíbrio (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

Deste modo, vamos determinar os pontos de equilíbrio do sistema (2.9), que são dados pela intersecção das *nullclines* que calculamos anteriormente:

$$\begin{aligned}
 \frac{8 \cdot 10^5 X}{145000 - 145X} &= \frac{174000X}{2 \times 10^6 - 29X} \Leftrightarrow \\
 8 \cdot 10^5 X (2 \times 10^6 - 29X) &= 174000X (145000 - 145X) \Leftrightarrow \\
 16 \cdot 10^{11} X - 232 \cdot 10^5 X^2 &= 2523 \cdot 10^7 X - 2523 \cdot 10^4 X^2 \Leftrightarrow \\
 2523 \cdot 10^4 X^2 - 2320 \cdot 10^4 X^2 + 160000 \cdot 10^7 X - 2523 \cdot 10^7 X &= 0 \Leftrightarrow \\
 203 \cdot 10^4 X^2 + 157477 \cdot 10^7 X &= 0 \Leftrightarrow \\
 X(203 \cdot 10^4 X + 157477 \cdot 10^7) &= 0 \Leftrightarrow \\
 X = 0 \quad \text{ou} \quad 203 \cdot 10^4 X + 157477 \cdot 10^7 &= 0 \Leftrightarrow \\
 X = 0 \quad \text{ou} \quad X \approx -775.75 \cdot 10^3
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Logo, temos dois pontos de equilíbrio: $(0,0)$ e $(-775.75 \cdot 10^3, Y^*)$, onde Y^* corresponde ao valor de Y para o segundo valor de X encontrado. A imagem abaixo (Fig.8) mostra os pontos de intersecção entre os gráficos das *nullclines*.

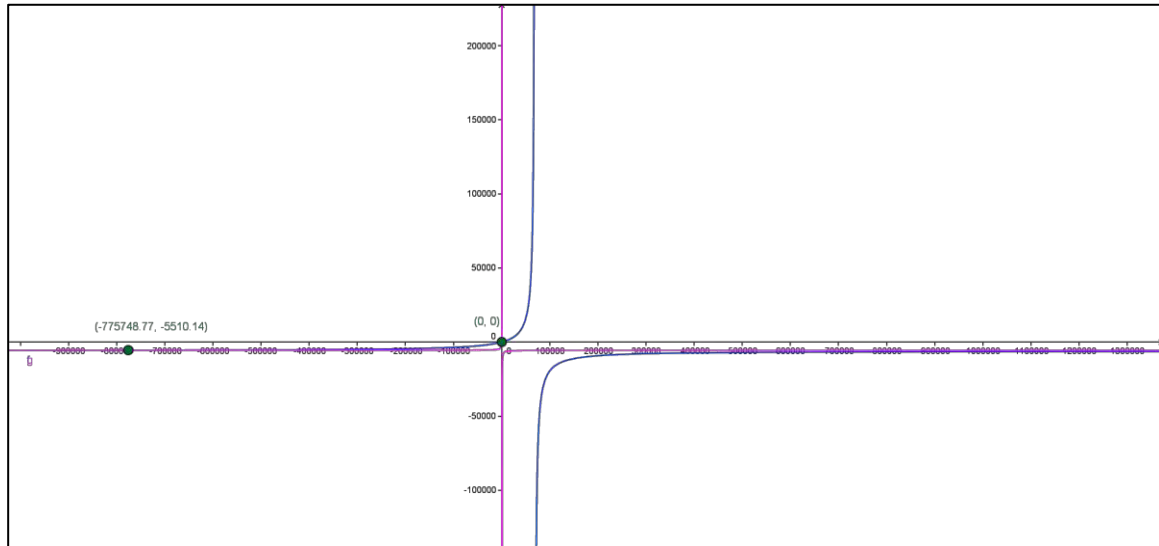


Figura 8 - Gráficos das X e Y nullclines para o sistema (2.9) com seus pontos de intersecção.

Como um dos pontos de equilíbrio possui os valores de X e Y negativos, não o consideramos em virtude do fenômeno biológico. Portanto, vamos analisar apenas o ponto de equilíbrio $(0,0)$. Queremos, então, verificar a orientação dos vetores diretores ao longo das *nullclines* tomando como ponto de referência o ponto de equilíbrio $(0,0)$. Para vários sistemas, a orientação dos vetores diretores é oposta em lados diferentes do ponto de equilíbrio. É possível verificar se esta propriedade de reversibilidade é válida calculando-se o determinante da matriz Jacobiano no ponto de equilíbrio. Se $\det J \neq 0$, então a propriedade é válida (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

Para o nosso caso, como o ponto de equilíbrio é a origem do plano XY e estamos interessados apenas em valores positivos de X e Y , a verificação da validade da propriedade de reversibilidade indicará se a orientação dos vetores diretores permanece a mesma ou muda ao longo da parte da curva que está à direita do ponto de equilíbrio.

Para o sistema (2.9) temos a seguinte matriz Jacobiano:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial Y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.000145Y - 0.8 & 0.000145(1000 - X) \\ 0.0000029(60000 - Y) & -0.0000029X - 0.2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Assim, o determinante de J no ponto de equilíbrio vale:

$$\det J(0,0) = \det \begin{pmatrix} -0.8 & 0.145 \\ 0.174 & -0.2 \end{pmatrix} = 0.16 - 0.02523 = 0.13477 \neq 0 \quad (2.15)$$

Logo, a propriedade da reversibilidade é válida. Por isso, basta testarmos valores de X e Y pertencentes às *nullclines* e que estejam de cada lado do ponto de equilíbrio para identificarmos a orientação dos vetores diretores. No nosso caso, testaremos apenas valores positivos para X e Y como mencionamos anteriormente.

a) Considere, por exemplo, $X=500$ e Y pertencente à X *nullcline*. Então:

$$Y = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 500}{145000 - 145 \cdot 500} = 5517.24 \quad (2.16)$$

Analisando as derivadas temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= 0 \\ \frac{dY}{dt} &= 0.0000029 \cdot 500 \cdot (60000 - 5517.24) - 0.2 \cdot 5517.24 = (-1024.44) < 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, ao longo da X *nullcline*, para valores positivos de X , os vetores diretores são paralelos ao eixo Y e apontam para baixo.

b) Considere, por outro lado, $Y=500$ e X pertencente à Y *nullcline*. Então:

$$X = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 500}{174000 + 29 \cdot 500} = 5305.03 \quad (2.18)$$

Analisando as derivadas temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= 0.000145 \cdot 500 \cdot (1000 - 5305.03) - 0.8 \cdot 5305.03 = (-4556.13) < 0 \\ \frac{dY}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Assim, ao longo da Y *nullcline*, para valores positivos de Y , os vetores diretores são paralelos ao eixo X e apontam para a esquerda. A imagem a seguir (Fig.9) apresenta as *nullclines* e os vetores diretores.

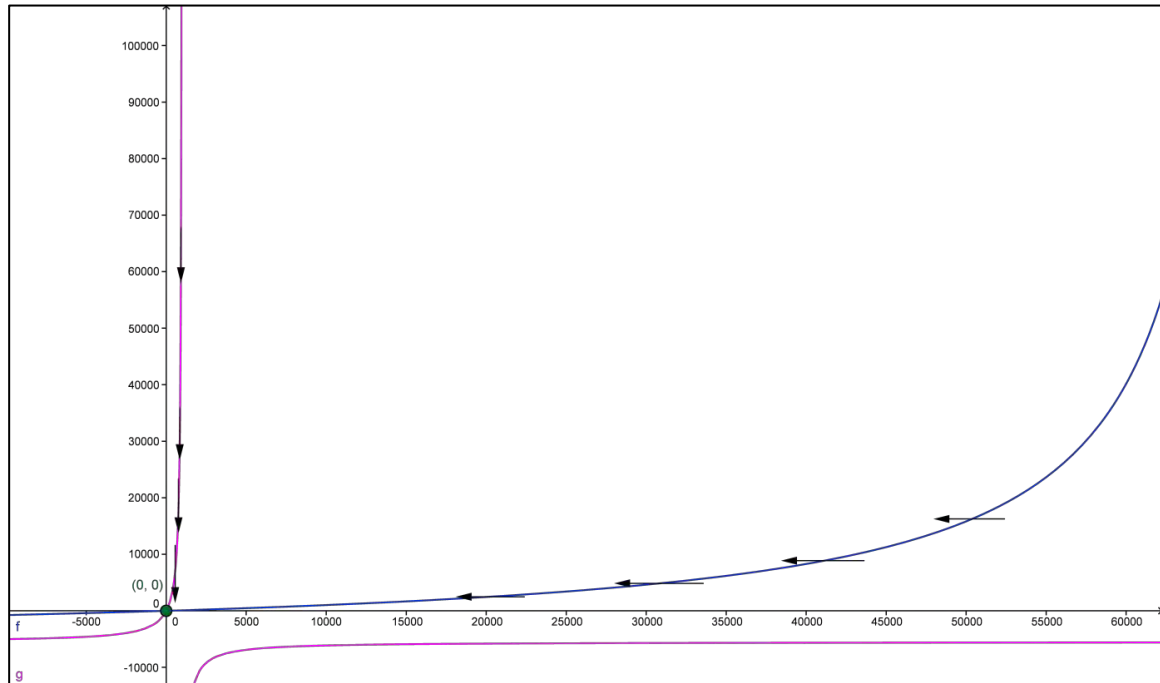


Figura 9 - Nullclines acompanhadas dos vetores diretores.

Outra maneira de verificar a orientação do vetor diretor é através de uma análise de sinal das derivadas X' e Y' utilizando o valor que Y e X assumem nas *nullclines*, respectivamente. Por exemplo, se Y pertence à X *nullcline*, pela análise de sinal encontramos que $Y' < 0$ para todo $X > 0$. Analogamente, se X pertence à Y *nullcline*, a análise de sinal nos diz que $X' < 0$ para todo $Y > 0$. Estes resultados são os mesmos obtidos por meio dos testes feitos anteriormente, porém através de uma análise mais geral.

Podemos, ainda, analisar o sinal das derivadas ao longo dos eixos X e Y para valores positivos de X e de Y . Deste modo teremos uma imagem mais completa de como as trajetórias se comportam.

Para $X=0$, temos que:

$$\frac{dX}{dt} = 0.000145 \cdot Y \cdot (1000 - 0) - 0.8 \cdot 0 = (145Y) > 0 \quad (2.19a)$$

$$\frac{dY}{dt} = 0.0000029 \cdot 0 \cdot (60000 - Y) - 0.2Y = (-0.2Y) < 0 \quad (2.19b)$$

Deste modo, ao longo do eixo Y os vetores $(X', Y') = (f_1, f_2)$ apontam como na imagem a seguir (Fig.10):

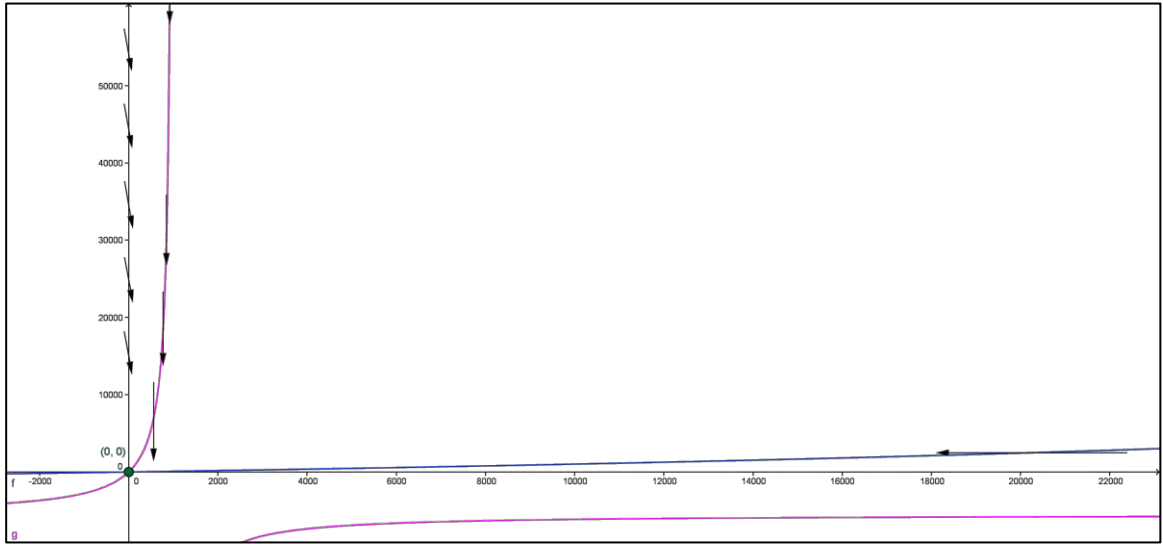


Figura 10 - Vetores diretores ao longo do eixo Y.

Para $Y=0$, temos que:

$$\frac{dX}{dt} = 0.000145 \cdot 0 \cdot (1000 - X) - 0.8X = (-0.8X) < 0 \quad (2.20a)$$

$$\frac{dY}{dt} = 0.0000029 \cdot X \cdot (60000 - 0) - 0.2 \cdot 0 = (0.174X) > 0 \quad (2.20b)$$

Logo, ao longo do eixo X os vetores diretores $(X', Y') = (f_1, f_2)$ são como na imagem abaixo (Fig.11):

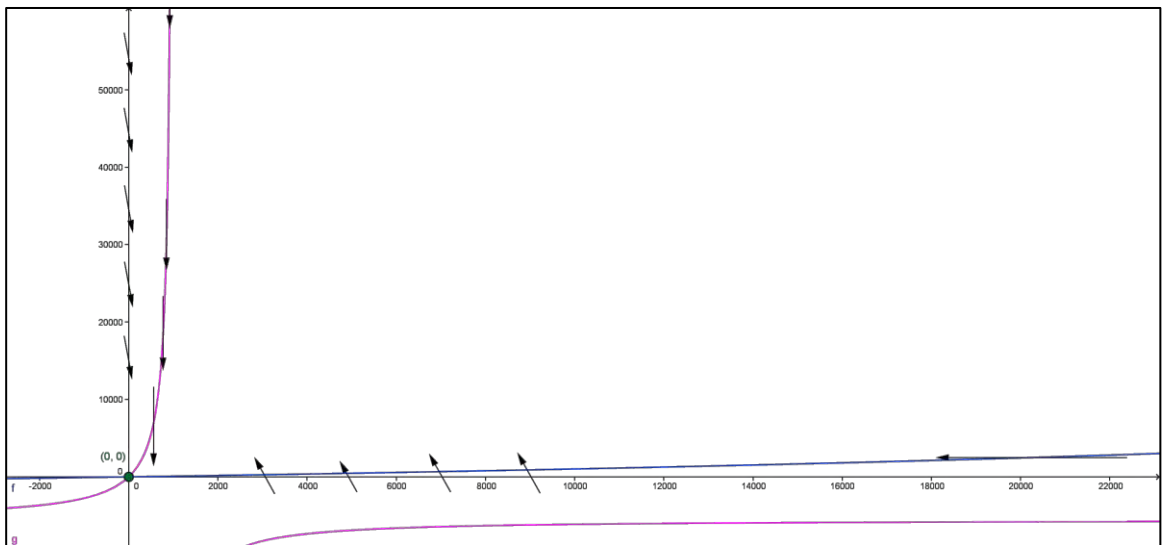


Figura 11 - Vetores diretores ao longo do eixo X.

A análise dos vetores diretores indica que qualquer trajetória cuja condição inicial está no primeiro quadrante do plano XY possui um comportamento tal que tende a se aproximar da

X nullcline (curva rosa). Uma vez alcançada esta curva, a trajetória permanecerá sobre ela, seguindo o seu trajeto até a origem. Mas será que todas as trajetórias se aproximam mesmo da origem? Será que não existe uma trajetória que segue outra direção?

Para respondermos a estas perguntas precisamos analisar o que ocorre próximo ao ponto de equilíbrio. Para isso, utilizamos o fato de que próximo ao ponto de equilíbrio o sistema não-linear

$$\begin{cases} X' = f_1(X, Y) \\ Y' = f_2(X, Y) \end{cases} \quad (2.21)$$

se comporta de forma similar ao sistema linear

$$\begin{cases} X' = a_{11}X + a_{12}Y \\ Y' = a_{21}X + a_{22}Y \end{cases} \quad (2.22)$$

onde os coeficientes a_{ij} são dados pela matriz Jacobiano calculada no ponto de equilíbrio que estamos analisando, isto é, se denominarmos o ponto de equilíbrio por $(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$, então:

$$J(\bar{X}_0, \bar{Y}_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial Y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial Y} \end{pmatrix}_{(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)} \quad (2.23)$$

A análise dos sinais de três elementos do Jacobiano nos indica o comportamento da solução próximo à condição de equilíbrio. Os elementos analisados são, em geral:

$$\beta = a_{11} + a_{22} = \text{Tr}J(\bar{X}_0, \bar{Y}_0) \quad (2.24a)$$

$$\gamma = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det J(\bar{X}_0, \bar{Y}_0) \quad (2.24b)$$

$$\delta = \beta^2 - 4\gamma = \text{disc}J(\bar{X}_0, \bar{Y}_0) \quad (2.24c)$$

onde $\text{Tr}J(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$ = traço, $\det J(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$ = determinante e $\text{disc}J(\bar{X}_0, \bar{Y}_0)$ = discriminante (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

A combinação de sinais fornece a seguinte classificação:

1. **Nó instável:** $\beta > 0$ e $\gamma > 0$ – todas as trajetórias se afastam do ponto de equilíbrio;
2. **Ponto de sela:** $\gamma < 0$ – parte das trajetórias se afastam e parte das trajetórias se dirigem ao ponto de equilíbrio;
3. **Nó estável:** $\beta < 0$ e $\gamma > 0$ – todas as trajetórias se aproximam do ponto de equilíbrio;
4. **Espiral instável:** $\beta^2 < 4\gamma$ e $\beta > 0$ – as trajetórias se espiralam se afastando do ponto de equilíbrio;

5. **Centro neutro:** $\beta^2 < 4\gamma$ e $\beta = 0$ – as trajetórias são circulares concêntricas em torno do ponto de equilíbrio;
6. **Espiral estável:** $\beta^2 < 4\gamma$ e $\beta < 0$ – as trajetórias se espiralam se aproximando do ponto de equilíbrio (EDELSTEIN-KESHET, 2005).

A imagem abaixo (Fig.12) ilustra como as trajetórias se comportam de acordo com a classificação acima dos pontos de equilíbrio e sumariza as principais características de um sistema linear através do *plano de parâmetros* $\beta\gamma$.

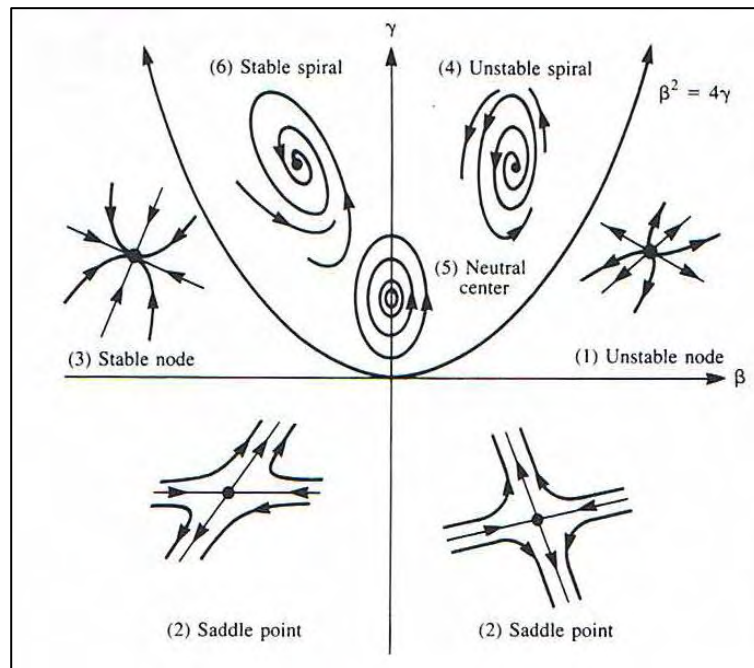


Figura 12 - Plano de Parâmetros $\beta\gamma$ mostrando o comportamento das trajetórias de sistemas lineares de acordo com o ponto de equilíbrio. Edelstein-Keshet (2005, p.190).

Note que estes são os comportamentos possíveis para as trajetórias de sistemas lineares. O sistema (2.9) não é linear, mas como mencionado anteriormente, podemos aproximar o comportamento das trajetórias deste sistema próximo ao ponto de equilíbrio pelo sistema linear correspondente. Deste modo, precisamos analisar o sinal dos três elementos da matriz Jacobiano aplicada no ponto de equilíbrio $(0,0)$. Para o sistema (2.9) a matriz Jacobiano no ponto de equilíbrio $(0,0)$ é:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.145 \\ 0.174 & -0.2 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Então:

$$\beta = \text{Tr}J(0,0) = -0.8 + (-0.2) = (-1) < 0 \quad (2.26a)$$

$$\gamma = \det J(0,0) = (-0.8) \cdot (-0.2) - (0.145) \cdot (0.174) = (0.13477) > 0 \quad (2.26b)$$

$$\beta^2 = 1 > 0.53908 = 4\gamma \quad (2.26c)$$

Logo, temos que $(0,0)$ é um nó estável, ou seja, próximo a ele as trajetórias do sistema cujas condições iniciais pertencem ao primeiro quadrante do plano XY se aproximam de $(0,0)$ conforme o tempo passa ($t \rightarrow +\infty$). Este comportamento coincide com o que foi inferido através da análise do campo de direções, porém agora está fundamentado devido a todos os resultados matemáticos que estão envolvidos na aplicação das técnicas aqui utilizadas³⁶.

Em termos do fenômeno biológico isto significa que após certo tempo a malária se extingue da região. A justificativa para este comportamento está em grande parte atrelada aos parâmetros utilizados. A partir da determinação das *nullclines*, dos vetores diretores que as acompanham e da análise do comportamento das trajetórias próximo ao ponto de equilíbrio podemos traçar um retrato de fase para o sistema (2.9). Um retrato de fase é formado por algumas trajetórias que indicam as tendências de comportamento das soluções dependendo da sua condição inicial. Cada ponto da trajetória nos informa o valor de X e de Y no mesmo instante de tempo. É como se, percorrendo a trajetória com a ponta do dedo, o tempo estivesse passando e, ao parar em um determinado ponto, obtemos a quantidade de pessoas e de mosquitos infectados naquele instante de tempo. A imagem a seguir (Fig.13) apresenta um retrato de fase com as duas *nullclines* e algumas trajetórias. Note que o comportamento das trajetórias coincide com a análise feita por meio do campo de direções:

³⁶ Os resultados que embasam as técnicas aqui apresentadas não foram demonstrados uma vez que este não é o escopo deste capítulo, nem desta tese. Porém, recomendo Edelstein-Keshet (2005) e Doering e Lopes (2005) para um aprofundamento teórico desta discussão.

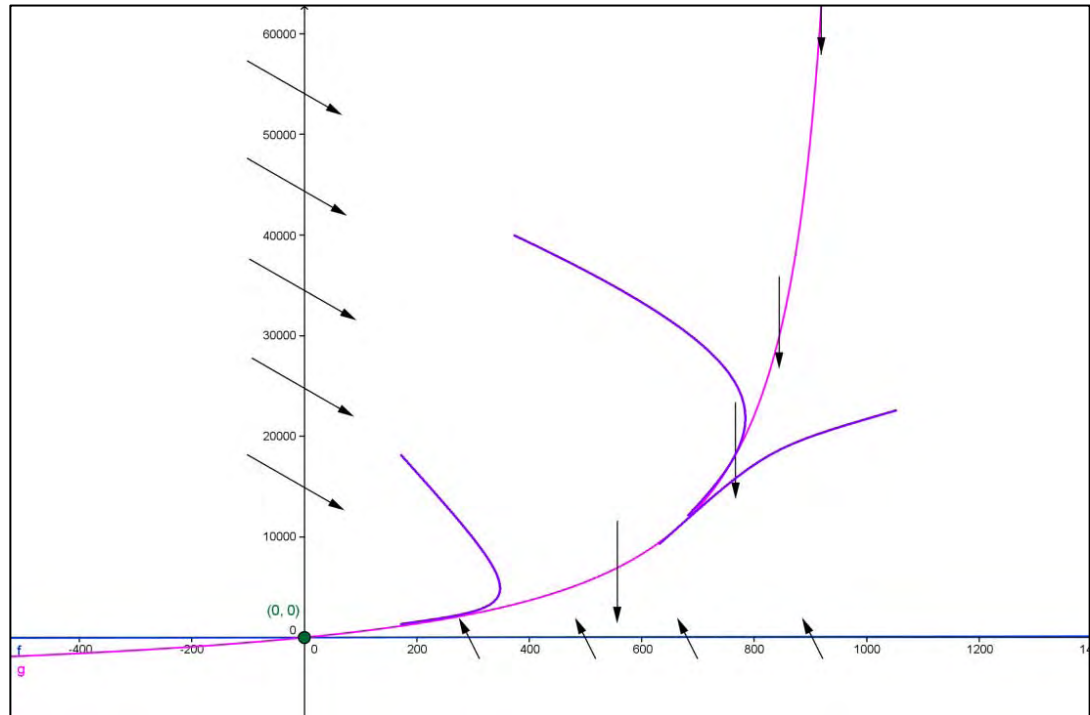


Figura 13 - Plano de fase do sistema (2.9) com algumas trajetórias (em roxo) e as nullclines (curvas rosa e azul).

2.4 Retomando a abordagem pedagógica...

As técnicas utilizadas até aqui são procedimentos de análise qualitativa para os sistemas de equações diferenciais, que são fundamentados matematicamente e fazem parte da rotina das pesquisas em que modelos matemáticos são utilizados na resolução de problemas das mais variadas áreas. Assim sendo, entendendo ser coerente uma abordagem pedagógica que enfatize este tipo de análise. Entretanto, ao mesmo tempo estas técnicas não são apropriadas para serem discutidas com alunos de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I devido à variedade de conceitos matemáticos avançados relacionados a elas. Sendo assim, os objetivos da abordagem pedagógica aqui apresentada não incluem o ensino destas técnicas de análise qualitativa aos alunos. Isto pode parecer contraditório, pois como a análise do comportamento das soluções será possível se os alunos não têm acesso a esses métodos?

Neste momento a tecnologia assume um papel fundamental para possibilitar a realização desta proposta. Como será apresentado com mais detalhes no capítulo referente à metodologia de pesquisa, os alunos trabalharam com um software, o *Modellus*³⁷, capaz de fornecer representações gráficas e tabulares das soluções de um sistema de equações diferenciais. Assim sendo, é interessante notar que, ao utilizar o software é como se toda a

³⁷ Endereço eletrônico: <<http://modellus.fct.unl.pt/>>. Acesso em: 10 abr. 2009.

análise qualitativa feita na seção anterior fosse realizada pelo mesmo, obtendo como resultado final as soluções em gráficos e tabelas.

É a partir das informações fornecidas pelo software que os alunos conseguem estudar o comportamento das soluções e também a influência dos parâmetros do modelo neste comportamento. Mais ainda, os conteúdos da disciplina foram relacionados com esta análise, fornecendo elementos para que os alunos compreendessem diferentes aspectos do sistema com o qual estavam trabalhando, como a natureza funcional das soluções, a natureza variacional das equações e as informações possíveis de serem obtidas sobre o fenômeno quando da análise das taxas de variação instantâneas das soluções, entre outros.

Apesar desta possibilidade aparente fornecida pelo software de colocar os alunos em contato com as soluções de um sistema de equações diferenciais, será que é possível trabalhar com sistemas deste tipo antes mesmo de os alunos aprenderem derivada? Será que os alunos de um curso de graduação conseguem dar sentido a um sistema deste tipo e relacioná-lo com o fenômeno biológico que este modela? Estas questões fazem sentido, uma vez que, como apontam Jacobson e Wilensky (2006), pesquisas sugerem que conceitos importantes para o entendimento destes sistemas, que eles denominam sistemas complexos, são contra-intuitivos ou estão em conflito com crenças comumente sustentadas pelos indivíduos. Os autores citam como exemplo o chamado “efeito borboleta”, que afirma que pequenas ações podem gerar efeitos em grande escala. Isto contradiz a crença comum de que pequenas ações geram efeitos pequenos, enquanto que grandes ações geram efeitos grandes.

Apesar destas dificuldades apontadas pelos autores, as pesquisas realizadas por Wilensky e seus colaboradores têm dado suporte ao fato de que é possível trabalhar com sistemas complexos com alunos da educação básica e da graduação, e não apenas com alunos de pós-graduação, como é o mais comumente entendido (JACOBSON; WILENSKY, 2006).

As pesquisas desenvolvidas por este autor e seus colaboradores baseiam-se no trabalho com alunos da educação básica e em início de cursos de graduação com diferentes tipos de sistemas complexos, envolvendo fenômenos naturais, sociais, econômicos, etc. Em particular, algumas pesquisas foram realizadas com fenômenos biológicos (WILENSKY; REISMAN, 1998a; WILENSKY, REISMAN, 1998b). Nestas pesquisas alunos de ensino médio utilizaram o software StarLogoT³⁸ para desenvolver modelos que descrevem algum fenômeno biológico. O fenômeno escolhido pode ser próximo da vivência dos alunos, como é o caso da relação

³⁸ Endereço eletrônico: <<http://education.mit.edu/starlogo/>>. Acesso em: 15 jun. 2010.

predador-presa, ou situações não tão próximas, como é o caso do fenômeno de vaga-lumes que piscam em sincronia.

O software StarLogoT foi desenvolvido com base no software Logo³⁹ mas, ao invés de uma tartaruga, é possível trabalhar com várias tartarugas ao mesmo tempo. Na elaboração dos modelos, os alunos descrevem o que cada uma das tartarugas deve fazer e analisam o resultado emergente deste comportamento individual. Por exemplo, no modelo predador-presa define-se tartarugas que serão presas (por exemplo, ovelhas) e tartarugas que serão predadoras (por exemplo, lobos). Para cada ovelha pode-se definir o seguinte comportamento: mover-se ao longo do plano de forma aleatória; reproduzir-se conforme certa probabilidade. Para cada lobo pode-se definir: mover-se de forma aleatória ao longo do plano com gasto de energia; alimentar-se com as ovelhas com ganho de energia; morrer caso tenha energia menor ou igual a zero; reproduzir-se segundo certa probabilidade (WILENSKY; REISMAN, 1998a).

Conforme os alunos desenvolvem seus modelos e analisam o estado emergente a partir dos comportamentos individuais fornecido pelo software, eles refletem sobre a plausibilidade do que criaram e refinam seu trabalho. Os alunos são incentivados a buscar na literatura informações que os auxiliem a compreender um pouco melhor o fenômeno com o qual estão lidando e confrontar estas informações obtidas com o modelo que desenvolveram. Assim, aos poucos podem refinar seus modelos (WILENSKY; REISMAN, 1998a).

Segundo estes autores, esta abordagem facilita o trabalho e o entendimento dos sistemas complexos, pois permite que o aluno pense sobre o comportamento dos indivíduos ou organismos que compõem este fenômeno, analisando o resultado emergente. Para eles, este tipo de raciocínio é mais acessível aos estudantes do que o raciocínio global normalmente utilizado na elaboração de modelos matemáticos, que se baseiam na análise de cada uma das populações (no caso do presa-predador) como um todo (WILENSKY; REISMAN, 1998a; WILENSKY, REISMAN, 1998b).

Para os autores, esta abordagem também permite que os alunos possam trabalhar com sistemas complexos mesmo sem possuir uma bagagem matemática profunda. Aliás, os autores apontam que a complexidade dos conceitos matemáticos utilizados na elaboração de modelos para fenômenos biológicos, por exemplo, é um dos principais motivos para que os alunos que não estejam em um nível de graduação avançado não tenham a possibilidade de analisar estes sistemas. A proposta de trabalho sugerida pelos autores, portanto, busca uma aproximação dos estudantes com raciocínios que envolvam o estudo de sistemas complexos

³⁹ Endereço eletrônico: <<http://el.media.mit.edu/logo-foundation/>>. Acesso em: 15 jun. 2010.

de uma forma que supere as dificuldades proporcionadas pela complexidade matemática. (WILENSKY; REISMAN, 1998a; WILENSKY, REISMAN, 1998b).

O trabalho de Wilensky e colaboradores se aproxima, num certo sentido, da proposta desenvolvida nesta pesquisa, pois ambos utilizam sistemas complexos como foco de trabalho dos alunos. Entretanto são notáveis as suas diferenças. Enquanto a proposta destes autores prevê o desenvolvimento de “modelos” pelos alunos, a proposta aqui apresentada propõe a análise de um modelo matemático já existente. Além disso, os alunos não trabalham com representações matemáticas para o modelo que desenvolvem, no caso do trabalho de Wilensky. Já na proposta aqui colocada, os alunos estão todo o tempo em contato com a representação analítica do modelo matemático para a transmissão da malária, o que se justifica, uma vez que as próprias equações envolvem um dos principais conceitos a serem trabalhados na disciplina: o conceito de derivada. Mais ainda, a proposta prevê que os conceitos da disciplina sejam desenvolvidos de forma interligada à análise do modelo (e quando possível a partir desta análise) servindo de ferramenta para a compreensão de seus elementos.

O estudo de um modelo matemático para um fenômeno biológico de importância, como é a transmissão da malária, parece ter o potencial de destacar uma relação positiva entre a Matemática e a Biologia e trazer aos alunos um exemplo forte de como os conteúdos que eles aprendem na disciplina Matemática Aplicada podem ser úteis na área profissional que escolheram seguir, quem sabe auxiliando-os a vislumbrar outros caminhos futuros.

2.5 Síntese das ideias

A abordagem pedagógica elaborada e que serve como base para o desenvolvimento desta pesquisa tem como ideia central trabalhar desde o primeiro dia de aula o estudo de um modelo matemático para um fenômeno biológico, de modo que os conteúdos da disciplina sejam discutidos e utilizados durante esta análise e, quando possível, a análise seja o ponto de partida para a discussão de conceitos da disciplina.

O estudo do modelo baseia-se essencialmente em uma análise qualitativa das soluções, uma vez que o comportamento das soluções e o entendimento das informações que ele traz sobre o fenômeno são pontos centrais. Este tipo de análise é coerente com as práticas realizadas e desenvolvidas por matemáticos e pesquisadores, que tiram o foco da solução analítica para poder estudar os sistemas dinâmicos com os quais trabalham.

Apesar de os sistemas dinâmicos carregarem consigo um conjunto de ideias e relações nem sempre intuitivas para as pessoas, pesquisas mostram que já é possível trabalhar com

sistemas dinâmicos com alunos muito novos (JACOBSON; WILENSKY, 2006), indício que traz subsídios para a aplicação da proposta desenvolvida.

Finalmente, a tecnologia parece trazer possibilidades para estes trabalhos uma vez que permite aos alunos trabalhar com diferentes representações para os fenômenos estudados. Em particular, nesta proposta, o software *Modellus* proporciona o contato com representações gráficas e numéricas das soluções do modelo, permitindo que os alunos tenham acesso a elas sem aprender (ainda) as técnicas matemáticas de análise qualitativa. Entretanto, será este o único papel deste software durante o desenvolvimento das atividades pelos alunos? Haverá alguma outra influência por parte do software no trabalho dos alunos? Este é o foco de investigação desta pesquisa e, no capítulo que segue, apresento os procedimentos metodológicos que possibilitaram o seu desenvolvimento.

Caminhante, não há caminho.

Faz-se caminho ao andar.

Antonio Machado

Capítulo 3 - Metodologia de Pesquisa e Procedimentos Metodológicos

Nos capítulos anteriores apresentei a ideia central que permeia a abordagem pedagógica que embasa esta pesquisa e procurei justificar alguns aspectos relacionados a ela, como a escolha por um fenômeno biológico cujo modelo matemático envolve um sistema de EDO, o foco em uma análise qualitativa do modelo, e a necessidade do uso de um software para o desenvolvimento das atividades com os alunos.

Dando continuidade a esta caracterização da abordagem pedagógica, apresento o capítulo que trata das questões metodológicas, uma vez que aqui será explicitado com mais detalhes a natureza das atividades propostas aos alunos assim como a natureza do software *Modellus*. Além disso, resgato o problema de investigação desta pesquisa, localizando o leitor no foco central do trabalho aqui desenvolvido, e abordo as questões metodológicas relacionadas à coleta de dados.

3.1 Sobre a perspectiva metodológica assumida

No processo de desenvolvimento desta pesquisa, a elaboração da proposta de ensino foi um aspecto central: foi por meio de sua aplicação que o ambiente de aprendizagem que serviu de base para a pesquisa foi configurado. Como explicitado no Capítulo 1, a ideia central da proposta é que os alunos estudem, desde o primeiro dia de aula, um fenômeno biológico modelado matematicamente por um sistema dinâmico, e que a análise do modelo e de suas soluções seja relacionada com alguns conteúdos da disciplina assim como com o fenômeno.

Tendo esta proposta em mente como base para a configuração do ambiente de ensino, desenvolvi minha pergunta de pesquisa, um processo não linear, repleto de idas e vindas. Como relatam Araújo e Borba (2004), a pergunta diretriz é uma entidade suscetível a modificações. Eles apresentam este fato como um aspecto característico do *design emergente*, apresentado por Lincoln e Guba (1985) como uma das características do paradigma

naturalista. O design de uma pesquisa diz respeito ao seu planejamento que, segundo estes autores, possui um caráter flexível e emergente quando considerado dentro deste paradigma.

Nesse sentido, a pergunta diretriz passou por três fases principais. A primeira delas estava ligada ao objetivo de analisar como os alunos produziam conhecimento sobre o modelo matemático e sobre o fenômeno biológico ao trabalhar com as atividades propostas. Esta questão foi repensada e isto justifica-se pelo entendimento de que experimentos de ensino⁴⁰ seriam mais adequados para a análise do processo de produção de conhecimento pelos alunos, uma vez que permitem um acompanhamento mais detalhado do raciocínio desenvolvido. Em uma sala de aula regular é muito difícil fazer este acompanhamento.

A segunda fase corresponde ao objetivo de analisar as possibilidades de ensino e aprendizagem dos conteúdos de CDI fomentadas pela proposta, ou seja, pelo estudo e análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico. Esta pergunta foi refinada devido à sua amplitude, uma vez que não seria possível a realização de uma análise profunda sobre todos os elementos que compõem indícios de resposta à pergunta.

A terceira fase tem sua origem na segunda. Tendo em vista a amplitude da pergunta anterior, optei por investigar possibilidades propiciadas pelo software utilizado durante o trabalho que contribuíram para o estudo do modelo matemático para o fenômeno de transmissão da malária, e para o estabelecimento de conexões entre os conteúdos da disciplina e a análise do modelo. Deste modo, configurei a seguinte pergunta diretriz, norteadora desta pesquisa:

Qual o papel de um software no desenvolvimento de uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos⁴¹?

É interessante notar que a ideia central desta pergunta foi definida apenas durante o segundo momento de construção dos dados⁴². A amplitude da pergunta anterior permitiu vislumbrar algumas possibilidades de investigação. O desenvolvimento do trabalho de campo, as leituras realizadas em paralelo e conversas com colegas do grupo e com o orientador contribuíram para a escolha de uma destas possibilidades, definindo um foco para a pesquisa.

Apesar das mudanças realizadas na pergunta, todas as fases contêm perguntas de caráter aberto, que propõem um fenômeno para ser investigado e compreendido do modo mais profundo possível. Como afirma Bicudo (1993, p.18) “[...] não há compreensão e

⁴⁰ Para mais informações sobre experimentos de ensino ver Steffe e Thompson (2000).

⁴¹ Análise de Modelos refere-se à proposta de analisar um modelo matemático para um fenômeno. Isto será abordado com mais detalhes no Capítulo 4 desta tese.

⁴² Mais adiante os dois momentos da pesquisa serão analisados e descritos em detalhes.

interpretações plenamente desenvolvidas e que dão conta de todas as dimensões do fenômeno interrogado. Mas há sempre uma andar em torno... outra vez e outra ainda...”.

Este “andar em torno... outra vez e outra ainda...” pressupõe uma busca por indícios que auxiliem na compreensão do fenômeno em estudo, mesmo que existam limitações nessa compreensão. Neste sentido, assumi uma perspectiva metodológica que valoriza a intenção mencionada acima, assim como pressupõe uma flexibilidade com relação ao planejamento da pesquisa e aos métodos utilizados.

Como afirmam Lincoln e Guba (1985) e reforçam Araújo e Borba (2004), é importante que exista uma coerência entre a perspectiva metodológica, a visão de conhecimento e os procedimentos metodológicos assumidos pelo pesquisador para que a pesquisa propicie resultados significativos.

No caso desta pesquisa, utilizo como base para a visão de conhecimento o construto teórico seres-humanos-com-mídias, que entende a produção de conhecimento como um processo coletivo, que envolve atores humanos e não-humanos, que podem ser, por exemplo, a mídia com a qual se está trabalhando. Como será discutido no capítulo 4, este construto também traduz uma relação de mútua influência entre a mídia e o ser-humano. Ou seja, como a mídia faz parte da unidade produtora do conhecimento, ela influencia o modo como o ser-humano desenvolve seu pensamento, ao mesmo tempo em que ele influencia o modo como a mídia é utilizada. Deste modo, há uma valorização do *processo* de produção do conhecimento, e não apenas o seu resultado. Ou seja, a compreensão por parte do aluno e o raciocínio que desenvolve são questões fundamentais.

Deste modo, tanto a perspectiva metodológica quanto a visão de conhecimento assumidas valorizam os processos que permeiam o fenômeno de produção de conhecimento e o entendimento destes processos. Não é o resultado que é o aspecto mais importante, mas sim a evolução desenvolvida e que permitiu alcançar este resultado. Esta convergência de valores caracteriza e justifica a harmonia entre elas.

Quanto aos procedimentos metodológicos, precisam seguir esta mesma linha de entendimento para que possam contribuir para a compreensão do fenômeno proposto para investigação, e para que sejam coerentes com a visão de conhecimento. Neste sentido, optei por procedimentos metodológicos qualitativos.

Lincoln e Guba (1985) caracterizam os procedimentos qualitativos como mais facilmente adaptáveis quando o pesquisador busca o entendimento de um fenômeno em suas múltiplas dimensões ou realidades. Além disso, são preferidos quando o principal instrumento de construção de dados são seres-humanos. No caso desta pesquisa, apesar de diversas fontes

de construção de dados terem sido utilizadas, os vídeos gerados pelo software *Camtasia* e as entrevistas desenvolvidas constituíram-se como centrais para o trabalho. Em particular, as entrevistas são resultantes do meu trabalho como pesquisadora.

Goldenberg (2004, p. 49-50) afirma que “os métodos qualitativos enfatizam as particularidades de um fenômeno em termos de seu significado para o grupo pesquisado”. No caso desta pesquisa, o grupo de alunos para os quais aplicamos a proposta configura o grupo pesquisado. Na busca pelo entendimento do papel do software ao longo do desenvolvimento da abordagem pedagógica torna-se relevante compreender que significados os alunos dão ao ambiente de aprendizagem configurado pela abordagem pedagógica e do qual fizeram parte, e também aos seus elementos, incluindo o software utilizado. Deste modo, a perspectiva dos alunos poderá contribuir para destacar aspectos que não foram identificados por mim enquanto professora/pesquisadora.

Por fim, Bogdan e Biklen (1994, p.16) sugerem que dados provenientes de procedimentos metodológicos qualitativos são “ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas”. Esta riqueza de informações e detalhes configura-se como produtiva quando a intenção de uma pesquisa é compreender um fenômeno da maneira mais profunda possível, de modo que pode propiciar uma fonte de reflexão sobre diferentes dimensões do fenômeno analisado. No caso desta pesquisa, busca-se uma reflexão sobre o papel de um software de modelagem no desenvolvimento da abordagem pedagógica proposta. Os alunos e suas conversas podem revelar elementos das diferentes dimensões envolvidas no fenômeno estudado que não sejam perceptíveis de outra forma, daí a importância de procedimentos que sejam capazes de fornecer descrições detalhadas sobre os mesmos. Com base nestes argumentos justifico a opção por procedimentos metodológicos qualitativos. A descrição destes procedimentos é o tema da próxima seção.

3.2 Procedimentos metodológicos de pesquisa

3.2.1 Momentos de construção dos dados

Neste trabalho irei utilizar a expressão construção de dados, ao invés de coleta de dados, por entender que os dados de uma pesquisa não existem por si só, de uma forma independente do pesquisador, e que o papel deste é apenas coletá-los. Como afirma Clarke (2006), os dados são uma construção do pesquisador, uma vez que todas as suas decisões,

desde os recursos tecnológicos utilizados, até os momentos que serão focados e como serão registrados, influenciam nos dados.

A construção dos dados desta pesquisa pode ser dividida em três momentos: o projeto piloto, o Momento 1 e o Momento 2. Cada um destes momentos caracterizou-se pela aplicação de uma versão do conjunto de atividades elaborado para a abordagem pedagógica em uma turma da disciplina Matemática Aplicada do curso de Biologia da Unesp de Rio Claro, SP. Estes momentos não foram definidos *a priori*, mas foram pensados ao longo do processo de pesquisa.

O projeto piloto, por exemplo, surgiu da necessidade de avaliar se a ideia central da abordagem pedagógica era viável, se teria alguma possibilidade de ser realizada com os alunos da Biologia, uma vez que eles iriam trabalhar com um sistema de duas equações diferenciais ordinárias e ainda não conheciam o conceito de derivada. As atividades nesta época ainda estavam em fase inicial de elaboração, e diziam mais respeito a uma primeira análise do modelo matemático, focando no comportamento de suas soluções e na análise da influência dos parâmetros neste comportamento. Deste modo, o piloto foi importante para que a concepção e a escrita das atividades fossem refinadas.

O Momento 1 correspondeu à primeira construção oficial dos dados. Ele ocorreu durante o segundo semestre de 2010 e as atividades utilizadas foram uma primeira versão completa da abordagem pedagógica. Praticamente todos os conteúdos previstos na ementa (com exceção de limite e integral, como mencionado no Capítulo 1) foram abordados. Como será visto com mais detalhes mais adiante, algumas modificações extras na organização das aulas tiveram de ser formuladas, e isto gerou um distanciamento razoável entre a ideia original da abordagem e o que foi realmente realizado.

Como comentei no Capítulo 1, a ideia era que os dois momentos de aula configurassem uma “hélice de DNA”, isto é, que convergissem para um mesmo objetivo de ensino e apresentassem interligações, de modo que as ideias discutidas em um momento de aula também estivessem presentes no outro. Entretanto, estas interligações não ocorreram da forma esperada, ou seja, não formaram a “hélice de DNA”, o que contribuiu para o distanciamento da proposta original.

Além disso, neste período a questão de pesquisa ainda não estava bem definida, de modo que as anotações feitas por mim no caderno de campo e mesmo as entrevistas realizadas com os alunos ao final da disciplina estão muito amplos e, portanto, não trazem elementos muito sólidos para a realização da investigação proposta. Entretanto, as entrevistas foram muito úteis para perceber a necessidade de modificação nas atividades.

Tendo em vista este cenário, decidi por realizar o Momento 2 de construção dos dados, que ocorreu no primeiro semestre de 2011. As atividades utilizadas para este semestre apresentaram modificações significativas com relação ao momento anterior, configurando-se como uma segunda versão completa da abordagem pedagógica⁴³. Além disso, diferentemente do momento anterior, os dois momentos de aula foram muito mais interligados e a organização dos trabalhos permitiu que algumas atividades fossem utilizadas para introduzir alguns conceitos da disciplina, de modo que este momento se aproximou mais da ideia original da proposta. Assim, o Momento 2 tornou-se naturalmente o momento de construção de dados oficial, e o Momento 1 passou a ser encarado como um Estudo Preliminar. Tanto que o foco da Análise dos Dados apresentada no Capítulo 5 deste texto foi o Momento 2 de construção dos dados, ou seja, a aplicação da proposta para a turma de 2011.

É interessante notar que, nesta pesquisa, os Momentos 1 e 2 de construção dos dados foram realizados a partir da aplicação da proposta a todos os alunos de uma turma ao longo do semestre regular. Optei por esta empreitada, pois o objetivo da proposta era uma integração com o currículo da disciplina como um todo, de modo que aplicar as atividades a um grupo de alunos fora da sala de aula não proporcionaria uma visão sobre essa integração.

Além disso, a sala de aula pode ser vista como o ambiente natural em que os alunos convivem e onde estão presentes as relações e contradições construídas no processo de ensino e aprendizagem, além de valores inerentes ao contexto. Lincoln e Guba (1985) afirmam que a escolha pela realização da pesquisa no ambiente natural dos seus participantes decorre, entre outros, do entendimento de que “o contexto é crucial para decidir se um resultado tem ou não significado em algum outro contexto” (LINCOLN; GUBA, 1985, p. 39).

Esta dependência do contexto ressaltada por Lincoln e Guba (1985) está fortemente relacionada com a ideia de que a realidade não é única, mas sim múltipla; e, além disso, a realidade não é dada, mas construída. Portanto, ao analisar um fenômeno é preciso considerar estas múltiplas realidades no qual está inserido, é preciso ter um olhar holístico. Outra ideia que embasa esta dependência do contexto é a de que um dos objetivos de uma pesquisa qualitativa naturalista é a de contribuir para a construção de um conhecimento sobre o fenômeno na forma de hipóteses que descrevam o caso estudado. Daí resulta uma dependência do tempo e do contexto, isto é, um fenômeno só pode ser compreendido nas relações com o tempo e com o espaço no qual ele se manifesta.

⁴³ Mais detalhes sobre estas modificações serão apresentadas e analisadas no Capítulo 5, referente à análise dos dados.

Deste modo, o contexto da disciplina Matemática Aplicada para o curso de Ciências Biológicas da Unesp, campus Rio Claro, SP, é um fator importante na realização desta pesquisa. Para cada momento da pesquisa, entretanto, tem-se um contexto específico. Nas sessões seguintes, descrevo com mais detalhes cada um destes momentos, além de outras questões relacionadas ao desenvolvimento da abordagem pedagógica e que se caracterizam como procedimentos metodológicos da pesquisa.

3.2.2 Projeto piloto

Uma das primeiras versões do conjunto de atividades foi desenvolvida em 2009, meu primeiro ano no curso de doutorado. Durante o primeiro semestre daquele ano acompanhei a turma de Matemática Aplicada do curso noturno de Ciências Biológicas, composta por 22 alunos cursando o terceiro ano da graduação.

O professor da disciplina cedeu parte de uma das aulas para que eu aplicasse as atividades que eu desenvolvesse. Nosso intuito era analisar a sua exequibilidade. As atividades propostas foram baseadas na leitura de um artigo sobre um modelo matemático para a transmissão da malária (BASÁÑEZ; RODRÍGUEZ, 2004) e tinham como principal objetivo a análise do comportamento de suas soluções e da influência dos parâmetros nesse comportamento. Os alunos não finalizaram as questões nessa aula e, portanto, convidei-os a continuar a desenvolvê-las no próximo semestre. Apenas duas alunas se interessaram e compareceram.

Dois encontros de aproximadamente duas horas cada foram desenvolvidos com as alunas. Elas trabalharam juntas na resolução das atividades e seus movimentos na tela do computador, assim como suas falas, foram gravados com o auxílio do software *Camtasia Studio*. Este software captura os dados mencionados e gera um arquivo em formato vídeo para exportá-los. As alunas realizaram as atividades com o mínimo de interferência da pesquisadora, pois o intuito principal era analisar a adequabilidade das atividades. Quando as alunas apresentaram dúvidas, suas perguntas foram respondidas de forma a gerar questionamentos que as auxiliassem na resolução de sua dúvida inicial.

A análise dos vídeos gerados pelo *Camtasia*⁴⁴ nos dois dias de trabalho permitiu a elaboração de algumas considerações:

- No início da elaboração das atividades, as alunas prestaram mais atenção ao tutorial e aos detalhes de inserção das informações sobre o modelo no software.

⁴⁴ Utilizarei, muitas vezes, apenas *Camtasia* para me referir ao software *Camtasia Studio*, a título de abreviação.

- Durante todo o trabalho elas se referiram às funções X e Y pelos seus representantes do fenômeno biológico: humanos e mosquitos infectados, respectivamente.
- Durante a resolução das atividades as alunas:
 - procuraram relacionar os gráficos com o fenômeno biológico;
 - conversaram sobre e analisaram os hábitos de alimentação dos mosquitos com o intuito de compreender seu ciclo de vida e a sua influência na transmissão da doença;
 - utilizaram o artigo como fonte de consulta;
 - discutiram as possibilidades de ocorrer ou não a transmissão da doença, fato que está relacionado com um dos parâmetros do modelo;
 - questionaram o comportamento do gráfico apresentado pelo software uma vez que, segundo seus conhecimentos biológicos, o comportamento do fenômeno deveria ser cíclico;
 - não analisaram de forma mais profunda os valores assumidos pelos parâmetros analisados, de modo que não apareceram como justificativa para os comportamentos observados nos gráficos.

Estas considerações promoveram indícios positivos quanto ao trabalho com a referida abordagem com os alunos do curso de Biologia e registram a ocorrência de um debate sobre o fenômeno biológico e o modelo matemático. Além disso, o estudo preliminar foi importante para a reformulação das atividades de modo a aprimorá-las quanto à sua clareza e objetivos. A falta de referência dos parâmetros na justificativa sobre o comportamento dos gráficos, por exemplo, foi uma das principais contribuições para a melhoria das atividades.

3.2.3 Momento 1 de construção dos dados – Turma de 2010

O primeiro momento constituiu-se pela aplicação das atividades à turma que cursou a disciplina no segundo semestre de 2010. Essa turma possuía 42 alunos e era do curso integral. As aulas ocorreram todas as segundas-feiras à tarde, das 14h às 18h. O semestre em questão apresentou vários feriados, totalizando cinco segundas-feiras sem aula, o que fez com que o professor da disciplina marcasse aulas extras com os alunos para completar a carga horária mínima de 60 horas semestrais. As aulas extras tinham duas horas de duração e, portanto, as atividades da proposta não foram aplicadas nestas aulas.

Como mencionei no Capítulo 2, a ideia inicial da proposta consistia em utilizar as atividades como ponto de partida para a discussão dos conteúdos da disciplina com os alunos. Esta proposta demandaria uma modificação estrutural no currículo da disciplina. Como não sabia até que ponto esta modificação influenciaria a aprendizagem dos alunos e o andamento

da disciplina, decidi juntamente com o orientador que seria melhor fazer uma modificação de forma a garantir que os alunos estudassem todos os conteúdos previstos na ementa da disciplina, como foi explicitado no Capítulo 1.

Além deste fator ético, outro fator influenciou nas mudanças realizadas na proposta: o número de alunos da turma de 2010 e o espaço físico disponível no laboratório de informática que iria utilizar. O Departamento de Matemática da Unesp possui um laboratório de informática capaz de acomodar 40 alunos, porém utilizavam o Linux como sistema operacional nesta época e, apesar do software *Modellus* possuir uma versão para o Linux, a versão para o Windows é mais ágil na elaboração dos gráficos e animações.

Deste modo, foi necessário utilizar o laboratório do próprio GPIMEM. Porém seu espaço físico e o número de máquinas permitem que apenas 22 alunos sejam acomodados. Assim, necessitamos fazer mais modificações na proposta original para que ela pudesse ser realizada. Temos, assim, o que Skovsmose e Borba (2004) chamam de situação imaginada e situação arranjada.

Para os autores tem-se, na verdade, três tipos de situações. A *situação corrente*, que é a situação existente antes da pesquisa ou do experimento de pesquisa a ser realizado. Em geral, esta situação apresenta um caráter problemático e configura-se como ponto de partida para a pesquisa. A *situação imaginada* inclui as possibilidades e alternativas pensadas pelo pesquisador ou pesquisado com relação à situação corrente. Em geral, está vinculada às expectativas e esperanças do professor. Finalmente, a *situação arranjada* configura-se como uma alternativa prática à situação imaginada. Ela é elaborada tendo-se em mente a situação imaginada e normalmente envolve um processo de negociação entre pesquisador e professor (SKOVSMOSE; BORBA, 2004).

No caso desta pesquisa, podemos utilizar esta terminologia para representar as situações envolvidas no experimento. Como *situação corrente* pode-se considerar a realidade do ensino de CDI como uma disciplina em serviço e suas problemáticas, como encontrado na literatura e identificado no contexto de pesquisa: alunos desmotivados com o curso, sem ideia de como utilizar os conteúdos estudados em sua área de formação; alunos com dificuldades em conteúdos básicos de matemática; alunos com bloqueios com relação à Matemática; etc.

Como *situação imaginada* tem-se a ideia inicial pensada para a proposta de trabalho, onde o estudo do modelo matemático de um fenômeno biológico seria o ponto de partida para a discussão dos conteúdos da disciplina e permearia de forma profunda o trabalho dos alunos ao longo de todo o semestre. Tendo em vista as questões éticas e as restrições oferecidas pelo número de alunos da turma de 2010 e pelo espaço físico disponível no laboratório de

informática utilizado, elaborei uma modificação da proposta inicial, que constitui uma *situação arranjada*. Esta modificação inclui:

(i) a divisão das aulas em dois momentos, cada um liderado por um professor, de modo que fosse garantido o estudo dos conteúdos previstos na ementa da disciplina;

(ii) apresentação das atividades da proposta após a discussão dos conteúdos da disciplina;

(iii) divisão da turma em dois grupos, A e B, para o trabalho no laboratório de modo que as aulas seguissem o seguinte horário: das 14h às 15h55min – aula com o professor Borba para toda a turma; das 16h15min às 17h05min – aula no laboratório para a turma A, com liderança da pesquisadora, e aula com o professor Borba para a turma B; das 17h10min às 18h – inversão das turmas. Assim, cada sessão no laboratório de informática teve duração de 50 minutos e foi realizada com metade da turma de cada vez.

Todas estas características constituíram o contexto de pesquisa específico do primeiro momento de construção dos dados. Na seção seguinte, apresento as características do segundo momento.

3.2.4 Momento 2 de construção dos dados – Turma de 2011

O segundo momento de construção dos dados, constituiu-se pela aplicação das atividades à turma que cursou a disciplina no primeiro semestre de 2011. Essa turma era do curso noturno e possuía 22 alunos. As aulas ocorreram todas as quartas-feiras à noite, das 19h às 23h. Os alunos não tiveram apenas uma aula devido a feriado e, portanto, uma aula extra precisou ser agendada.

A característica de situação arranjada também pode ser vinculada ao segundo momento da construção de dados. Não houve a restrição causada pelo número de alunos, uma vez que a turma de 2011 tinha apenas 22 alunos, que puderam ser acomodados no laboratório de informática do GPIMEM. Entretanto, as aulas ainda foram divididas em dois momentos: das 19h às 21h15min aula com o professor Marcelo Borba; das 21h35min às 23h aula no laboratório de informática. Apesar de a liderança da segunda parte da aula ser de minha responsabilidade, o professor da disciplina esteve presente também, participando das discussões e da orientação dos alunos, o que permitiu uma melhor integração entre os dois momentos de aula. Neste sentido, a “hélice de DNA” foi formada.

De modo geral, a situação que é analisada em uma pesquisa é a situação arranjada (no caso desta pesquisa, o foco de análise será a situação arranjada referente ao primeiro semestre de 2011, que corresponde ao que foi realizado com os alunos ao longo deste semestre).

Entretanto, como afirmam Skovsmose e Borba (2004), as vivências da situação arranjada e a sua análise servem como uma janela através da qual é possível olhar e analisar a situação imaginada. A situação arranjada fornece dados que dão evidências a partir das quais pode-se qualificar e compreender melhor a situação imaginada. Deste modo, apesar de a proposta ter sofrido uma modificação com relação à ideia original, é possível olhar para ela através da análise da proposta que foi aplicada e analisar o que poderia ter ocorrido (SKOVSMOSE; BORBA, 2004).

3.2.5 Natureza das atividades propostas

O processo de elaboração das atividades foi longo e caracterizou-se por diversas modificações quanto a enunciados, ordem e organização. A análise do projeto piloto e as sugestões de membros do GPIMEM foram muito importantes para a elaboração das mudanças nas atividades. O principal objetivo das atividades é o de guiar os alunos na análise do modelo matemático proposto e relacionar esta análise com os conteúdos da disciplina. Deste modo, um conjunto de dez atividades foi elaborado. A seguir, explicito de forma geral os *objetivos* de cada uma das atividades aplicadas aos alunos de 2011⁴⁵. Para mais detalhes sobre as atividades o leitor pode recorrer à Seção 5.2, onde apresento as atividades de forma mais detalhada para mostrar as modificações feitas nas atividades de 2010 para o ano de 2011. O leitor também poderá recorrer ao Apêndice 1 para visualizar as atividades de 2010 na íntegra, e ao Apêndice 2, para as atividades de 2011.

A primeira atividade tem como objetivo a introdução do fenômeno biológico a ser estudado durante a disciplina. No caso desta pesquisa, foi escolhido apenas um fenômeno para ser trabalhado durante todo o semestre, mas é possível que em outras versões mais de um fenômeno seja analisado. Escolhi introduzir o fenômeno transmissão da malária através da apresentação de um vídeo de curta duração sobre a doença (uma reportagem) como meio de dar início a um debate entre os alunos. Num primeiro momento este debate foi feito em duplas e, posteriormente, aberto para grande grupo. Questões relacionadas ao debate foram: (i) informações já conhecidas sobre a doença e sua transmissão, assim como questionamentos sobre ela; (ii) fatores de influência na transmissão da doença considerados importantes; (iii) métodos de estudo da transmissão da malária, objetivando uma primeira discussão sobre a possibilidade de uso de um modelo matemático; (iv) outras questões consideradas relevantes.

⁴⁵ Irei apresentar aqui apenas as atividades de 2011, pois os dados construídos nesse período é que serão foco da análise. Entretanto, na primeira parte do Capítulo 5 irei discutir as mudanças sofridas pelas atividades de 2010.

A segunda atividade tem como objetivo a apresentação do modelo matemático relacionado ao fenômeno biológico escolhido⁴⁶. Uma primeira versão desta atividade consistia na leitura e debate, pelos alunos, do artigo utilizado no projeto piloto. Entretanto, em uma discussão com o grupo de pesquisa, os colegas sugeriram uma abordagem diferenciada, pois consideraram a leitura do artigo muito técnica para alunos do primeiro ano da Biologia⁴⁷. Deste modo, optei por uma palestra baseada em apresentação de slides sobre o modelo matemático. Esta palestra seguiu na linha da apresentação feita no Capítulo 1 desta tese, com ênfase no significado dos termos das equações e na dinâmica de transmissão da malária.

A terceira atividade tem por objetivo a inserção do modelo matemático no software *Modellus*, a partir da orientação de um tutorial elaborado, e uma primeira análise dos resultados fornecidos pelo software, ou seja, das soluções do modelo apresentadas de forma gráfica e tabular. Esta análise busca auxiliar o aluno a refletir sobre: (i) as informações que os gráficos fornecem sobre o fenômeno; (ii) o comportamento desses gráficos e o seu significado em termos do fenômeno; (iii) a natureza funcional das soluções do modelo, identificando quais as variáveis independentes e dependentes, assim como o domínio, o contradomínio e a imagem das funções, e principalmente justificando o porquê de ser função.

A quarta atividade tem como objetivo explorar um pouco mais sobre o comportamento das soluções do modelo, o seu significado com relação ao fenômeno e, principalmente, a influência dos parâmetros do modelo neste comportamento. Foram elaboradas situações hipotéticas com base em dados de pesquisas relacionadas à malária e que serviram como contexto para a discussão sobre os parâmetros. O objetivo é que os alunos tomem consciência da informação dada por cada parâmetro, analisem o comportamento das soluções para valores diferentes dos parâmetros e signifiquem a mudança de comportamento visualizada em termos do fenômeno.

As atividades cinco e seis estão relacionadas com o conceito de derivada e foram planejadas tendo-se em mente sua relação com a ideia intuitiva de variação. Deste modo, a atividade cinco propõe uma análise das variações das funções, primeiramente para intervalos fixos de tempo e posteriormente para intervalos de tempo cada vez menores. A motivação para esta análise foi a tentativa de descrever como dois gráficos Xxt muito semelhantes em termos de comportamento poderiam ser diferenciados. Para isso usou-se a noção de taxa de variação média, interpretada como velocidade média de crescimento/decrescimento da

⁴⁶ Modelo apresentado e discutido no Capítulo 1 da tese, quando da apresentação da proposta.

⁴⁷ As alunas participantes do projeto piloto já estavam no terceiro ano da graduação possuindo, teoricamente, várias leituras em Biologia. Entretanto, os alunos da próxima turma a ser aplicada a proposta seriam do primeiro ano.

população infectada de humanos. A partir daí discutiu-se com os alunos que estratégia poderia ser utilizada para determinar a taxa de variação instantânea da função em um determinado instante. A atividade seis tem como objetivo relacionar a derivada com a sua interpretação geométrica, como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto.

A atividade sete propõe um estudo dos pontos de máximo/mínimo das funções solução e sua relação com a derivada da função naquele ponto. A atividade oito propõe o estudo de uma modificação no modelo matemático para a malária. O objetivo inicial era que um modelo mais avançado sobre a doença fosse estudado, mas limitações de sintaxe no software⁴⁸ não permitiram a sua execução. Deste modo, modificou-se o modelo estudado de forma simplificada, apenas substituindo-se o parâmetro M , considerado inicialmente constante, por uma função do tempo. Finalmente, a atividade nove propõe uma análise do plano de fase do sistema dinâmico que pode ser elaborado no software. Esta análise tem por objetivo explorar outra forma de representação das soluções do sistema dinâmico e que é usualmente mais comum de ser encontrada na literatura.

Uma atividade envolvendo integrais foi elaborada, mas recursos adicionais seriam necessários para seu desenvolvimento mais preciso. Portanto, ela não foi aplicada e ainda precisa de mais estudos para ser aprimorada.

Todas as atividades foram aplicadas aos alunos no segundo momento de cada aula, em ambos os momentos da pesquisa. Cada dupla de alunos recebeu orientações escritas para cada uma das atividades, incluindo informações relativas à configuração do software quando necessário (Ver Apêndice 2). Os encontros sempre iniciavam com os alunos trabalhando em duplas, lendo as atividades, seguindo suas orientações e procurando refletir sobre as questões e situações propostas. Como professora, procurava atender às dúvidas dos alunos, fosse sobre as configurações no software ou sobre as questões propostas. No segundo caso, sempre procurava ajudá-los a avançar no raciocínio sem fornecer-lhes respostas prontas.

Durante a maior parte da aula o trabalho era desse modo, com os alunos trabalhando entre si, tendo meu apoio quando necessário. Ao final das aulas, em geral nos últimos quinze minutos, eu reunia a turma para um debate conjunto, onde pedia para que os alunos socializassem suas observações. Em geral, os alunos sentiam dificuldade em socializar suas ideias, de modo que muitas vezes foi necessário insistir com eles e, em outras vezes, foi necessária uma intervenção mais significativa para que o debate avançasse.

⁴⁸ A sintaxe do software não permite utilizar a notação funcional, por exemplo, $X(t)$, de modo que se escreve apenas X . Isto não permitiu que modelos envolvendo um período de incubação da doença, por exemplo, fossem analisados, pois eles possuem um retardo de tempo que, em geral é expresso por $X(t-\tau)$.

A atividade cinco foi a única que fugiu à configuração acima descrita, pois foi utilizada para introduzir o conceito de derivada aos alunos. Ela foi organizada de modo que os trabalhos foram sendo orquestrados por mim de modo que todas as duplas caminhassem juntas. A aula foi permeada por vários momentos de debate, de modo que os alunos pudessem socializar suas observações a cada item da atividade proposta. Por exemplo, como é possível ver na descrição completa da atividade no Apêndice 2, os alunos calcularam a taxa de variação média para intervalos de tempo cada vez menores. Durante a aula, esta tarefa foi dividida entre as duplas, de modo que cada dupla calculou a taxa de variação média para apenas um intervalo de tempo em cada um dos gráficos. Os valores encontrados foram copiados na lousa para a apreciação e discussão de toda a turma.

De modo geral, portanto, as atividades foram desenvolvidas após o professor da disciplina discutir com os alunos determinado conceito matemático. A Atividade 5, porém, fugiu a este padrão e foi utilizada para a introdução do conceito de derivada, aproximando-se do que foi vislumbrado na proposta original.

3.2.6 Natureza do software *Modellus*

Para a realização das atividades da proposta é necessário que os alunos tenham acesso às soluções do modelo matemático em estudo, neste caso, do sistema dinâmico que modela a transmissão da malária. Como fazer isso, uma vez que o objetivo das atividades não é a aprendizagem de técnicas de resolução de sistemas dinâmicos?

Neste ponto, contamos com o apoio dos recursos tecnológicos, mais particularmente de software específicos capazes de fornecer a informação que desejamos. Dos software que estão disponíveis, escolhi o software *Modellus*⁴⁹ (versão 4.01) para trabalhar com os alunos. Nesta seção irei explicitar algumas características deste software e justificar sua escolha.

O *Modellus* foi desenvolvido pelo professor Vitor Duarte Teodoro e colaboradores, da Universidade Nova de Lisboa. Seu desenvolvimento está baseado na perspectiva de Papert, que entende o computador como um “objeto para pensar com”, e em uma perspectiva de conhecimento alicerçada na teoria de Vygotsky e em considerações de Resnick e Collins.

Teodoro (2002) caracteriza o *Modellus* como um sistema de modelação, cuja principal característica é permitir que o usuário construa múltiplas representações (modelos) para uma determinada situação em estudo e transite entre elas. Estas representações incluem: a representação analítica, a representação gráfica, a representação numérica/tabular, e a

⁴⁹ O *Modellus* é um software livre. Endereço eletrônico: <www.modellus.fct.unl.pt> Acesso em: 2 abr. 2009.

representação icônica que, em geral, aparece sob a forma de animações que podem ser desenvolvidas no software.

A interface do programa é amigável e foi elaborada, segundo o autor, com o intuito de proporcionar a construção e a análise de modelos de um modo muito próximo ao que seria feito sem o uso do computador. “Deste modo, procura-se que o utilizador, aluno e professor, *pense com o computador como pensaria se estivesse usando papel e lápis*” (TEODORO, 2002, p.25).

Com o *Modellus* é possível: (i) construir e explorar modelos matemáticos envolvendo funções, equações diferenciais, iterações, objetos geométricos, equações a diferenças finitas, etc. através de múltiplas representações; (ii) elaborar modelos a partir de: um estudo teórico, dados experimentais, registros de imagem fixa, ou vídeos; (iii) analisar se um modelo matemático é razoável, tanto em termos teóricos quanto experimentais; (iv) valorizar o aspecto visual, sem menosprezar os aspectos de representação formal; (v) abordar fenômenos naturais ou representações formais de forma integrada (TEODORO, 2002).

Tendo em vista as colocações acima, considere o *Modellus* um software conveniente para o trabalho com alunos da Biologia. Nas atividades propostas aos alunos, foram exploradas as representações analítica, gráfica e tabular, sendo que a representação analítica estava relacionada com a equação do modelo e as demais com sua solução. A Fig.14 apresenta uma tela do *Modellus* contendo o modelo para a transmissão da malária estudado pelos alunos.

A tela do software apresenta três janelas, que contêm as representações do modelo em questão. A janela *Modelo Matemático* é o local para a inserção das equações do modelo. A sintaxe do programa é semelhante a de outros software⁵⁰, mas a representação final é idêntica à notação que utilizamos normalmente com lápis e papel. A janela *Gráfico* apresenta as soluções do modelo selecionadas. Na figura temos o gráfico da solução $X \times t$ (número de pessoas infectadas pelo tempo) para três casos distintos. É possível, também, visualizar os gráficos de $Y \times t$ simultaneamente aos de $X \times t$. O plano de fase ($X \times Y$) também pode ser construído para cada um dos casos. Na janela *Tabela* estão apresentados os valores assumidos por t e por X para os três casos considerados. As barras coloridas na tabela variam de tamanho conforme o valor assumido, proporcionando um recurso visual para a sua análise. Há ainda a janela *Notas*, que permite que sejam feitas anotações no próprio software.

⁵⁰ Operações de soma e subtração, assim como o símbolo de igualdade, são os usuais; multiplicação é asterisco (*) ou a barra de espaço; a divisão é a barra (/) do teclado numérico; algumas notações especiais são encontradas no próprio menu do software, como radiciação, potenciação, o número PI, o número e, a derivada, etc.

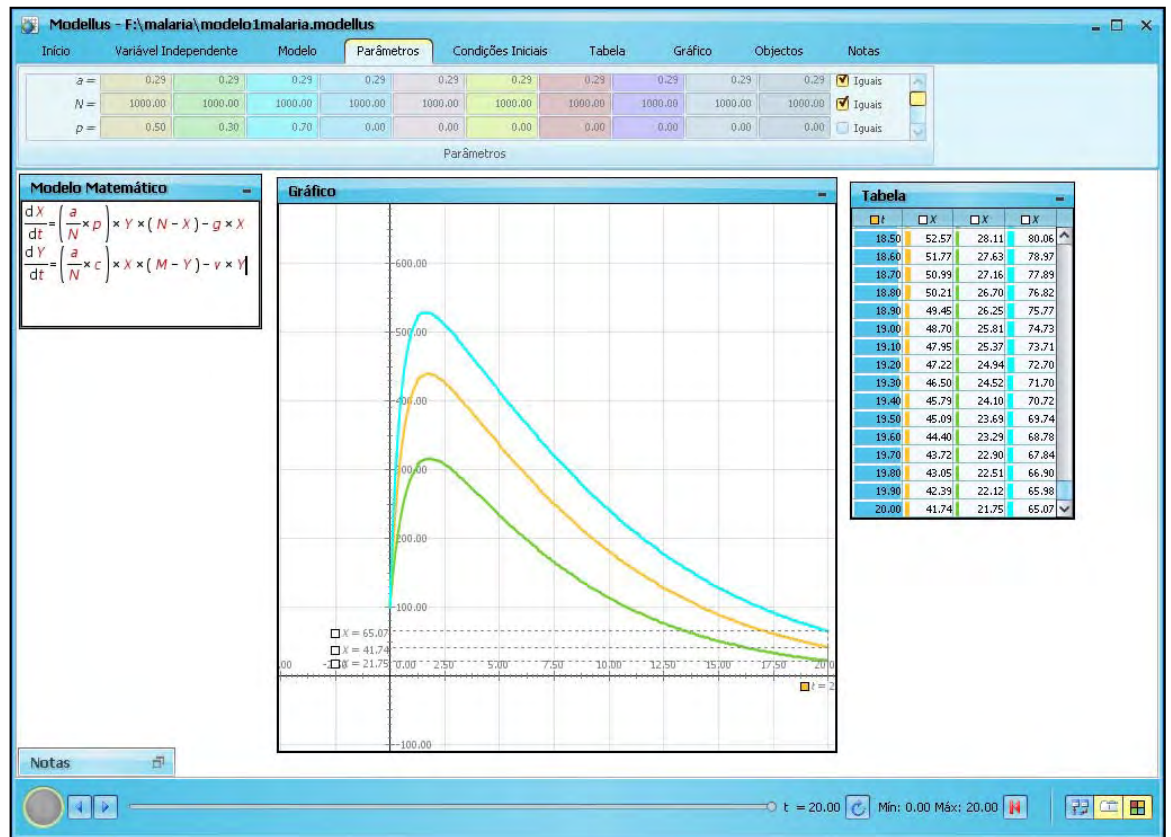


Figura 14 - Tela do Modellus com o modelo de Ross-Macdonald.

O menu superior é formado por abas que permitem a configuração dos detalhes do modelo. A aba *Início* permite que sejam configurados: o número de casas decimais, o limite exponencial, a unidade dos ângulos e o mostrar ou esconder da malha. Na aba *Variável Independente* é possível escolher: qual a variável independente considerada; o passo, ou seja, o intervalo da variável independente que o software irá usar para fazer as iterações; e os valores de máximo e mínimo dessa variável.

A aba *Modelo* apresenta os caracteres especiais que podemos utilizar para escrever o modelo matemático na janela *Modelo Matemático*, como o símbolo de derivada, por exemplo. A aba *Parâmetros* permite que sejam configurados os valores dos parâmetros do modelo. Cada parâmetro pode assumir mais de um valor, criando-se, assim, os casos. A aba *Condições Iniciais* permite que as condições iniciais do modelo sejam configuradas.

Na aba *Tabela* é possível escolher de quais variáveis queremos ver os valores na janela correspondente, assim como escolher o aparecimento ou não das barras coloridas. De modo semelhante, configuramos o gráfico na aba *Gráfico*. A aba *Objectos* apresenta uma coleção de objetos que podemos utilizar para elaborar as animações, como partículas, vetores,

indicadores de nível, entre outros. Finalmente, a aba *Notas* permite a configuração do texto das notas. Nas guias das atividades propostas aos alunos, um tutorial foi utilizado para orientar o trabalho sempre que necessário, tendo em vista o número de detalhes a serem observados no momento de inserção do modelo.

Finalmente, penso ser importante uma justificativa quanto a não utilização das animações no trabalho com os alunos da Biologia. De fato, este recurso é muito interessante, mas principalmente para modelos físicos, tendo em vista que o software foi desenvolvido primariamente para o ensino de Física. Uma possível animação para o modelo de transmissão da malária seria o uso de indicadores de nível, que apresentam uma variação de quantidade, ou imagens relacionadas às variáveis e que variam de tamanho de acordo com o valor assumido pelas mesmas. Entretanto, em minha opinião elas não acrescentariam informações novas para a análise do fenômeno além da tabela e do gráfico, por isso optei por não utilizá-las.

3.2.7 Fontes de dados

Para ambos os Momentos 1 e 2 da pesquisa, as fontes de dados foram praticamente as mesmas. Elas caracterizam-se por serem fontes apropriadas à procedimentos qualitativos de pesquisa. Tendo em vista a opção metodológica, acredito que procedimentos qualitativos de pesquisa são coerentes e convenientes para encontrar indícios que respondam à pergunta diretriz. As fontes de dados foram as seguintes:

- Gravação da aula realizada com uma câmera posicionada de modo a captar o maior número de alunos. Durante a maior parte da aula a câmera permaneceu fixa. Nos momentos de discussão em grande grupo, a filmagem foi feita por um colega do Programa de Pós-Graduação que se disponibilizou a acompanhar as aulas.
- Gravação do trabalho das duplas realizada pelo software *Camtasia Studio*, que captura a imagem e os movimentos realizados na tela do computador, assim como a voz dos alunos⁵¹.
- Relatórios elaborados pelos alunos ao final de cada aula, que contavam como parte de sua avaliação. Estes relatórios tinham por objetivo que os alunos expressassem as reflexões e discussões que surgiram durante as aulas, as dúvidas, e as conclusões alcançadas.

⁵¹ Este software também captura a imagem dos alunos através da *webcam*, caso seja desejado. Entretanto não utilizei este recurso tendo em vista que o tempo para o software gerar o vídeo com a gravação é bem maior e o intervalo entre uma turma e outra era de apenas 5 minutos em 2010. No ano seguinte, optei por manter o mesmo estilo de gravação.

- Fóruns de discussão realizados no ambiente virtual de aprendizagem Tidia-AE⁵², que deu suporte ao trabalho na disciplina. Este ambiente possui diversas ferramentas, incluindo Agenda, Chat, Fórum, Repositório (espaço para postar materiais que ficam disponíveis para todos os usuários da turma), Calendário, Cronograma, Atividades (espaço para que os alunos postem atividades realizadas) e Escaninho (espaço para que os alunos postem materiais pessoais). Os fóruns ficaram disponíveis para participação durante todo o semestre.
- Trabalhos escritos realizados pelos alunos sobre a malária. Cada dupla escolheu um foco dentro do tema geral malária para estudar. Conforme dados numéricos, gráficos ou modelos fossem aparecendo, incentivei os alunos a aprofundarem a análise e o entendimento sobre eles. O trabalho fez parte da avaliação dos alunos.
- Gravação das apresentações orais dos trabalhos realizados pelos alunos no final do semestre.
- Avaliação por escrito e individual sobre a proposta desenvolvida ao longo do semestre entregue por alguns alunos voluntários (somente em 2010).
- Caderno de campo elaborado ao longo das aulas, contendo observações e apontando os questionamentos mais interessantes feitos pelos alunos ao longo do curso.
- Entrevista filmada realizada com duplas voluntárias da turma ao final do semestre.

A escolha pela realização da entrevista deu-se ao longo do desenvolvimento do primeiro momento de construção dos dados. Nesta ocasião, a entrevista foi utilizada com o objetivo de alcançar uma avaliação da abordagem pedagógica pelos alunos. Algumas questões comuns foram propostas aos alunos, e outras questões foram realizadas ao longo da entrevista quando algum esclarecimento mostrou-se necessário.

Para o segundo momento da pesquisa (turma de 2011), a entrevista possuiu um caráter mais aberto e teve como objetivo buscar indícios que respondessem à pergunta diretriz a partir do entendimento que os alunos tiveram sobre a abordagem pedagógica. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a entrevista na pesquisa qualitativa é uma técnica “utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo” (p.134); neste caso, a entrevista poderia auxiliar na compreensão do modo como os alunos interpretavam aspectos da abordagem pedagógica, entre eles o papel do software.

⁵² Endereço Eletrônico: < www.tidia-ae.rc.unesp.br > Acesso em: 1 mar. 2010.

Para que a entrevista proporcionasse abertura aos alunos para definir o trabalho desenvolvido ao longo do semestre e para destacar os aspectos da proposta que consideraram relevantes, optei pela entrevista não estruturada. Segundo Lincoln e Guba (1985) este tipo de entrevista se adapta bem aos objetivos citados. Poupart (2010) complementa ainda que um dos argumentos a favor da realização de entrevistas do tipo qualitativo é sua eficácia para dar conta do ponto de vista dos atores e, em particular a entrevista não estruturada, permite ao pesquisador “explorar mais em profundidade as diferentes facetas da experiência do entrevistado” (POUPART, 2010, p.225).

De acordo com Fontana e Frey (2000), a entrevista não estruturada caracteriza-se por não impor categorias *a priori*, tendo como objetivo a compreensão de um fenômeno em sua complexidade. Deste modo, apesar de ter perguntas em minha mente para as quais gostaria de obter uma resposta, optei por deixar os alunos livres para falarem sobre a abordagem pedagógica e, a partir de suas próprias falas, busquei mais esclarecimentos sobre os aspectos que me chamaram a atenção.

As entrevistas foram encaminhadas como segue: seguindo sugestão de Bogdan e Biklen (1994) iniciei a entrevista perguntando aos alunos os motivos que os levaram a escolher o curso de Biologia e as atividades que realizavam academicamente com o intuito de “quebrar o gelo”. Em seguida, pedi para que os alunos falassem sobre o que havia se destacado para eles na abordagem pedagógica com a qual trabalharam. Foi a partir destas falas que busquei mais esclarecimentos no sentido de construir material importante para responder a pergunta diretriz. Finalmente, caso os alunos não tivessem feito espontaneamente nenhuma observação sobre o uso do software, eu então os questionei sobre sua experiência com o uso do software.

Entretanto, um segundo tipo de entrevista foi utilizado simultaneamente com os alunos. Inspirada no design de pesquisa do projeto Estudo da Perspectiva dos Alunos (Learner’s Perspective Study – LPS) (CLARKE, 2006), organizei parte da entrevista baseada em partes dos textos produzidos pelos alunos e publicados nos fóruns abertos no Tidia-AE ou nos relatórios. A análise destes textos permitiu-me identificar considerações feitas pelos alunos e que me chamaram a atenção pois de alguma forma poderiam trazer mais indícios para responder a pergunta diretriz. Apresentei aos alunos cada um destes trechos e os questionei se gostariam de fazer algum comentário sobre ele. A partir de suas falas, fui questionando por mais esclarecimentos.

Com o uso de diferentes fontes e métodos de construção dos dados, foi possível realizar a *triangulação* dos dados. Segundo Denzin e Lincoln (2006) o uso de múltiplos procedimentos se caracteriza como uma tentativa de garantir a compreensão do fenômeno em estudo em profundidade. Eles ponderam, entretanto, que “a realidade objetiva nunca pode ser captada” (DENZIN; LINCOLN, 2006, p. 19). A triangulação de dados configura-se como uma alternativa para a validação de uma pesquisa e é defendida por outros autores, como Alvez-Mazzotti (1998), Araújo e Borba (2004) e Goldemberg (2004).

3.2.8 Análise dos dados

Ao longo do processo de construção dos dados, procurei analisar de forma inicial os dados obtidos e refletir sobre os mesmos, como sugerido por Bogdan e Biklen (1994) e Lincoln e Guba (1985). Os cadernos de campo, os relatórios dos alunos e os trabalhos finais foram os dados com os quais trabalhei mais durante este período. Entretanto, foi após a finalização da construção dos dados que iniciei um trabalho mais efetivo com todo o conjunto de dados, incluindo os vídeos e as entrevistas.

A análise dos dados é uma parte fundamental para qualquer pesquisa. Segundo Lincoln e Guba (1985) a análise dos dados é um processo de síntese a partir do qual o pesquisador dá significado às construções que emergiram de suas interações. É um processo complexo e não-linear.

Para Bogdan e Biklen (1994, p.205), a

análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros.

O tipo de análise escolhida para esta pesquisa baseia-se no processo de indução, segundo o qual os temas de análise emergem a partir dos dados, isto é, não são gerados *a priori*. Estes temas muitas vezes incluem as categorias utilizadas pelos próprios sujeitos para caracterizar suas experiências e sua visão de mundo. Os temas emergentes podem estar relacionados e, portanto, estas relações também precisam ser analisadas. (LINCOLN; GUBA, 1985).

O volume de dados construídos ao longo dos dois momentos foi grande. Só para se ter uma ideia, os relatórios de 2011 somam um total de 73 produções, e os vídeos do *Camtasia* da turma de 2011 somam um total de aproximadamente 60 horas e meia. Para a organização e codificação dos dados utilizei o software NVivo 9, que foi criado para auxiliar pesquisadores nesta fase da pesquisa. O software possui diversas ferramentas. As que eu utilizei foram,

principalmente, a ferramenta de transcrição, a ferramenta de codificação e a ferramenta de anotações. As notas e os códigos ficam ligados com a parte do texto ou do vídeo selecionada e é possível recuperar todas as partes relacionadas a um mesmo código rapidamente. Estes recursos de transcrição, codificação e recuperação dos dados foram importantes para o trabalho de análise, uma vez que permitiram agilizar o processo, principalmente com relação à recuperação dos dados vinculados a cada código definido.

As entrevistas foram todas transcritas, tendo em vista que tiveram duração de aproximadamente 15 a 30 minutos e somaram um total de 11 entrevistas no primeiro momento e 8 no segundo. Já os vídeos gerados pelo *Camtasia* não foram transcritos completamente, de modo que em alguns momentos foi realizada apenas uma descrição das ações dos alunos. Mesmo assim, os diálogos foram transcritos quase em totalidade. Conforme transcrevia as entrevistas e os vídeos gerados pelo *Camtasia*, já inseria os dados no software *NVivo9* e procurava organizá-los de acordo com temas que emergiam. Nesta primeira organização também estavam incluídos os relatórios dos alunos e os cadernos de campo.

Após finalizar a construção dos dados e transcrever todas as entrevistas e todos os vídeos gerados pelo *Camtasia*, iniciei uma análise mais profunda de todo o conjunto de dados. Há dois tipos de dados construídos: os dados de observação (caderno de campo e vídeos) e os dados provenientes das percepções ou atividades dos alunos (relatórios, entrevistas e trabalhos finais). Ao longo do processo as entrevistas e os vídeos gerados pelo *Camtasia* mostraram-se como os dados mais relevantes para a investigação, de modo que a análise está fortemente centrada nestes dados. Os demais, principalmente o caderno de campo e os relatórios aparecem na análise de uma forma menos enfática.

Devido à diferença nos dados, optei por seguir a indicação de Busse e Ferri (2003) e trabalhar com uma análise do tipo vertical, onde cada tipo de dado é considerado uma unidade e interpretado separadamente. Deste modo, iniciei a análise pelas entrevistas. A partir da leitura e releituras das transcrições, refleti sobre os temas que haviam sido elencados em um primeiro momento e procurei agrupá-los para formar temas mais gerais. Estes temas provêm das próprias falas dos alunos. Em um segundo momento, analisei as transcrições dos vídeos gerados pelo *Camtasia*, procurando identificar se outro tema ainda não elencado surgiria e também selecionar extratos que poderiam corroborar com os temas já elencados. Para cada tema elencado, algumas ideias foram debatidas sob a luz da teoria que estudei durante todo o período do doutorado. Em um terceiro momento procurei articular as ideias debatidas em cada um dos temas sob o ponto de vista de cada um dos tipos de dados, elaborando então o processo de triangulação.

3.3 A proposta como parte do desenvolvimento da pesquisa

Como mencionei anteriormente, a abordagem pedagógica constituiu-se como um aspecto central para o desenvolvimento desta investigação, uma vez que foi por meio de sua aplicação que o ambiente de aprendizagem para o estudo foi configurado. Mais do que isso, a própria elaboração da proposta pode ser entendida como parte do desenvolvimento da pesquisa.

Elaborar a proposta de trabalho para os alunos da Biologia configurou-se como uma tarefa não-linear e complexa. Exigiu pesquisas e reflexões para estruturar desde o seu planejamento geral até as atividades que seriam propostas aos alunos. Parte deste processo e das reflexões elaboradas foram apresentados ao longo dos primeiros capítulos desta tese, portanto nesta seção foco principalmente no desenvolvimento das atividades.

Um pensamento que esteve presente desde o início, e que foi decorrente de meu trabalho de mestrado, foi o de enfatizar uma análise que focasse no comportamento das soluções do modelo e na compreensão de suas equações e parâmetros com relação ao fenômeno biológico. Encontrei pensamentos na mesma direção nas pesquisas sobre o ensino de EDO que enfatizavam a importância da análise da evolução das soluções das equações. Estas pesquisas deram suporte teórico a este encaminhamento.

Elaborar as atividades foi, então, o próximo desafio. Como introduzir o fenômeno biológico e seu modelo aos alunos? Como organizar questões que, simultaneamente, orientassem a análise do modelo pelos alunos e não fechassem o trabalho demasiadamente? Como equilibrar as discussões sobre as informações dadas pelo modelo, suas potencialidades e limitações, e os conceitos matemáticos necessários para compreendê-las? Estas e outras questões permearam todo o processo de elaboração das atividades.

Diversas versões das atividades foram elaboradas e, por meio do projeto piloto e de discussões com os colegas do GPIMEM, aos poucos foram sendo refinadas. Decisões foram tomadas, reformulações foram feitas, revisões e debates foram desenvolvidos, até que se alcançou um ponto em que considere as atividades em um nível bom para serem aplicadas à turma de Biologia. Entretanto, como mencionei anteriormente neste capítulo, a primeira aplicação das atividades mostrou a necessidade de modificá-las, e isso foi feito para a segunda aplicação no primeiro semestre de 2011. E esta aplicação mostrou, por sua vez, que outras modificações são necessárias. De fato, o processo de refinamento das atividades poderia continuar caso o tempo para o desenvolvimento desta pesquisa fosse maior, quem sabe inclusive alcançando uma formatação semelhante à planejada originalmente.

A preocupação em elaborar uma abordagem pedagógica e de refiná-la ao longo da pesquisa é uma das principais características do *design research* (pesquisa-projeto). Como afirmam Doerr e Wood (2006, p.117), “A primeira [característica] é a intenção explícita de desenvolver (no mesmo sentido da Engenharia ou da Arquitetura) um processo ou um produto aprimorado visando algum propósito dentro de um sistema necessariamente imerso em negociações e limitações”. No caso desta pesquisa, o sistema imerso em negociações e limitações é a própria disciplina Matemática Aplicada, inserida em um sistema mais amplo que é o do curso de Ciências Biológicas. O propósito, por sua vez, pode ser pensado como sendo a discussão dos conceitos matemáticos previstos na ementa da disciplina de uma maneira inter-relacionada com a Biologia e de uma forma relevante.

As autoras citam uma segunda característica importante deste tipo de pesquisa: “[...] ela requer vários ciclos de análise para aprimorar o produto e a interpretação em múltiplos níveis” (DOERR; WOOD, 2006, p.117). De fato, a elaboração da proposta passou por diferentes ciclos de análise, para seu aprimoramento. O projeto piloto, as discussões com o grupo e as próprias aplicações nas turmas podem ser entendidos como estes ciclos. Seria possível, então, entender esta pesquisa como *design research*?

Para avaliar com mais propriedade esta questão, é importante olhar para outras características que definem o *design research*. The Design-Based Research Collective (2003, p.5, tradução nossa) apresentam cinco características para este tipo de pesquisa:

Primeiro, os objetivos centrais do planejamento de ambiente de aprendizagem e do desenvolvimento de teorias ou “prototeorias” de aprendizagem estão inter-relacionados. Segundo, o desenvolvimento e a pesquisa ocorrem através de ciclos contínuos de planejamento, representação, análise e replanejamento (Cobb, 2001; Collins, 1992). Terceiro, as pesquisas em planejamento devem levar a teorias compartilháveis que auxiliem a comunicar implicações relevantes para os praticantes e outros planejadores educacionais (cf. Brophy, 2002). Quarto, a pesquisa deve dar conta de como o planejamento funciona em contextos autênticos. Ela não deve considerar apenas sucessos e falhas, mas também focar nas interações que refinam nosso entendimento das questões de aprendizagem envolvidas. Quinto, o desenvolvimento destas considerações se baseia em métodos que podem documentar e conectar processos de representação para os resultados de interesse⁵³.

⁵³ First, the central goals of designing learning environments and developing theories or “prototheories” of learning are intertwined. Second, development and research take place through continuous cycles of design, enactment, analysis, and redesign (Cobb, 2001; Collins, 1992). Third, research on designs must lead to sharable theories that help communicate relevant implications to practitioners and other educational designers (cf. Brophy, 2002). Fourth, research must account for how designs functions in authentic setting. It must not only document success or failure but also focus on interactions that refine our understanding of the learning issues involved. Fifth, the development of such accounts relies on methods that can document and connect processes of enactment to outcomes of interest.

Cobb et al. (2003) também discutem algumas destas características do *design research*, e destacam seu caráter intervencionista. Eles afirmam que “O objetivo é investigar as possibilidades para o avanço educacional trazendo novas formas de aprendizagem com o intuito de estudá-las⁵⁴” (COBB et al., 2003, p.10, tradução nossa). Estes autores também afirmam que um dos desafios que emergem deste tipo de pesquisa é a análise em múltiplos níveis.

Os múltiplos níveis citados se referem aos níveis de participantes deste tipo de pesquisa que, usualmente, é desenvolvida em parceria com os professores. Assim, tem-se pelo menos três níveis: alunos, professores e pesquisadores. Doerr e Wood (2006) se referem ao trabalho de Lesh e Kelly (2000), onde os autores apresentam um quadro resumo (Quadro 3.1) no qual descrevem os múltiplos níveis de análise de um suposto experimento de ensino:

Quadro 2 - Design Research: Um experimento de ensino em três camadas.

Camada 3: Nível dos Pesquisadores	Os pesquisadores desenvolvem modelos para dar sentido às atividades de modelagem dos professores e dos estudantes. Eles revelam suas interpretações a medida que criam situações de aprendizagem para professores e estudantes e eles descrevem, explicam e prevêm o comportamento de professores e estudantes ⁵⁵ .
Camada 2: Nível dos Professores	Conforme os professores desenvolvem ferramentas compartilháveis (como formas de observação ou guias para avaliar as respostas dos alunos) e conforme eles descrevem, explicam e prevêm os comportamentos dos estudantes, eles constroem e refinam modelos para dar sentido às atividades de modelagem dos alunos ⁵⁶ .
Camada 1: Nível dos Estudantes	Grupos de três estudantes podem trabalhar em uma série de atividades de modelagem (model-eliciting activities), nas quais os objetivos incluem construir e refinar modelos (descrições, explicações e justificativas) que revelem parcialmente como eles estão interpretando a situação ⁵⁷ .

Fonte: Lesh e Kelly (2000).

Tendo em vista estas características do *design research* e a pesquisa que reporto nesta tese, algumas considerações podem ser elaboradas. A primeira delas diz respeito ao foco de estudo, que no caso desta tese é o papel do software no desenvolvimento das atividades

⁵⁴ The intent is to investigate the possibilities for educational improvement by bringing about new forms of learning in order to study them.

⁵⁵ Researchers develop models to make sense of teachers' and students' modeling activities. They reveal their interpretations as they create learning situations for teachers and students and as they describe, explain, and predict teachers' and students' behaviors.

⁵⁶ As teachers develop shared tools (such as observation forms or guidelines for assessing students' responses) and as they describe, explain, and predict students' behaviors, they construct and refine models to make sense of students' modeling activities.

⁵⁷ Three-person teams of students may work on a series of model-eliciting activities, in which the goals include constructing and refining models (descriptions, explanations, justifications) that reveal partly how they are interpreting the situation.

propostas. Esta análise não tem a intenção de desenvolver uma teoria, como enfoca o *design research*.

Também não houve, nesta pesquisa, uma parceria entre professor e pesquisadores do modo como apontam os trabalhos sobre *design research*. Apesar de ter existido uma parceria entre o professor da disciplina, orientador desta pesquisa, e eu, as atividades da proposta foram lideradas por mim, de modo que eu atuei no papel de professora-pesquisadora, e não apenas no de pesquisadora. Mais ainda, a análise dos dados não ocorreu de uma forma multi-nivelada. O que se buscou foi entender o papel do software durante o trabalho dos alunos, de forma que meu olhar esteve direcionado para os alunos e suas interações com o software, e não permeou os níveis alunos e professor.

Assim, a pesquisa aqui apresentada possui traços do *design research*, embora não siga todas as suas etapas. O caráter intervencionista, a preocupação com o desenvolvimento de um produto e o seu refinamento, os diferentes ciclos de análise e o uso de diferentes fontes de construção de dados são características que estiveram presentes e se aproximam deste tipo de pesquisa.

Capítulo 4 – Fundamentação Teórica

Nos capítulos precedentes procurei caracterizar a abordagem pedagógica desenvolvida. Para isso apresentei sua ideia central, seus objetivos e suas características principais. Além disso, discuti questões que a justificam e também a natureza de suas atividades e do software *Modellus*. Também caracterizei a pesquisa, apresentando sua pergunta diretriz, a metodologia e o contexto de desenvolvimento.

Importante salientar a não-linearidade dos eventos, reflexões e aspectos discutidos nesta tese. O texto é linear, e apresenta de forma mais ou menos organizada um relato destas entidades, podendo passar uma falsa ideia de retidão ao longo do processo. O design da pesquisa é emergente, assim como as reflexões e análises, que são repletas de idas e vindas. Com estas considerações em mente, dou continuidade ao texto, elencando e discutindo neste capítulo alguns aspectos teóricos relacionados à abordagem pedagógica em particular e à pesquisa em geral, de modo a fundamentá-las teoricamente.

4.1 Modelagem Matemática, Aplicações...

Como mencionei anteriormente, a abordagem pedagógica desenvolvida tem como ideia central propor a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, neste caso, a transmissão da malária e integrá-la com alguns conceitos matemáticos previstos na ementa de CDI I. Em geral, os trabalhos de pesquisa em Educação Matemática que lidam com modelos matemáticos estão vinculados à tendência de Modelagem Matemática.

A Modelagem⁵⁸ tem sua origem no trabalho dos matemáticos aplicados, que procuram “traduzir” uma determinada situação em termos matemáticos para estudá-la. Do ponto de vista pedagógico, a Modelagem é considerada uma estratégia que pode trazer contribuições variadas para a aprendizagem dos alunos, como: relacionar a Matemática com outras áreas do conhecimento (BASSANEZI, 2009); motivar o aluno e levá-lo a trabalhar conhecimentos que serão fundamentais em sua vida no meio social (BIEMBENGUT; BASSANEZI, 1992); proporcionar uma aprendizagem significativa e um conhecimento reflexivo sobre a Matemática (ALMEIDA; DIAS, 2004); entre outros.

Existem diferentes perspectivas de Modelagem na Educação Matemática que emergiram das pesquisas realizadas na área ao longo dos anos. As variações de uma perspectiva à outra estão em diferentes níveis como, por exemplo, na presença ou não do viés

⁵⁸ Utilizarei Modelagem como abreviação para Modelagem Matemática, de modo a evitar repetições.

da Educação Matemática Crítica, quem é o responsável pela escolha do tema (professor e/ou alunos), na ênfase dada à elaboração e validação do modelo. O próprio entendimento sobre o que considerar um modelo matemático parece assumir variações. Por exemplo, Villarreal et al. (2010) descrevem um trabalho realizado por professoras de três escolas da cidade de Córdoba (Argentina) em parceria com pesquisadores. Neste trabalho, as professoras desenvolveram atividades de modelagem com seus alunos, com idades entre 11 e 12 anos. Como as autoras do artigo reportam, no início do processo as professoras negociaram com seus alunos o que seria considerado um modelo matemático e, eventualmente, chegaram a seguinte definição:

Um modelo matemático é qualquer estrutura matemática [diagrama, fórmula, tabela, equações algébricas, etc.] planejadas a partir das relações estabelecidas entre as variáveis consideradas relevantes, para corresponder a alguma entidade; e ele [o modelo] nos permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e compreender⁵⁹ (VILLARREAL et al., 2010, p.412, tradução nossa).

Deste modo, a elaboração de uma tabela relacionando os dados levantados por um grupo de alunos para resolver sua questão, a translação desses dados para um plano Cartesiano com o auxílio do software *Graphmatica* e a definição de uma linha de tendência também com o auxílio do software, foram entendidos como modelos matemáticos. Este trabalho ilustra a possibilidade de definir o que é um modelo matemático de modo diferenciado do que usualmente tomamos como sendo um modelo matemático, como funções e equações, por exemplo.

Nem sempre está claro nos trabalhos encontrados na literatura a concepção de modelo adotada pelos seus autores. Esta discussão, de fato, pode tornar-se bastante ampla. Como este não é o objetivo principal desta tese, me limitarei a explicitar o entendimento de modelo matemático que permeia o trabalho envolvido na abordagem pedagógica desenvolvida, o mesmo proposto por Bassanezi (2009, p.20, ênfase do autor): “Chamaremos simplesmente de *Modelo Matemático* um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representem de alguma forma o objeto estudado”. Nesta definição existe uma ênfase em um modelo analítico explicitando as relações entre as variáveis. No entanto, isso não significa que a proposta aqui apresentada não pode ser adaptada para o trabalho com alunos mais novos, adotando uma definição de modelo mais flexível.

⁵⁹ A mathematical model is any mathematical structure [diagram, formula, table, algebraic equation, etc.] designed from relationships established among variables considered relevant, to match some entity; and it [the model] allows us to make predictions, to make decisions, to explain, to understand.

Tendo em vista que a Modelagem envolve a elaboração de um modelo matemático, é comum encontrar na literatura esquemas representativos das principais etapas envolvidas neste processo. Doerr e Pratt (2008) apresentam dois tipos destes esquemas. O primeiro é mais linear e apresenta as seguintes etapas principais: a matematização de uma situação do mundo real em um modelo matemático; a transformação deste modelo através de sua resolução; a interpretação da solução encontrada em termos da situação do mundo real; e a validação dos resultados encontrados (Fig.15). A validação pode ou não ser satisfatória e, no segundo caso, reinicia o ciclo, dando a ele um caráter iterativo.

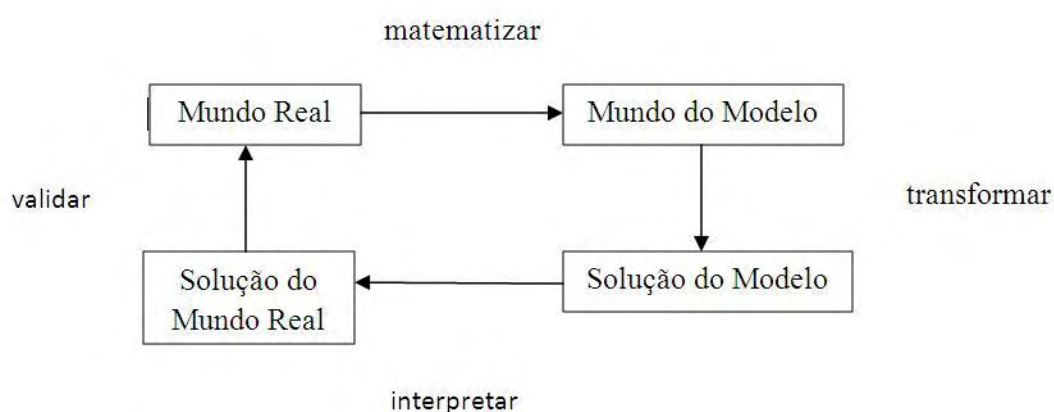


**Figura 15 - Esquema representando as etapas de um processo de Modelagem.
Adaptado de Doerr e Pratt (2008).**

O segundo tipo de esquema apresentado em Doerr e Pratt (2008) de certa forma provém de uma rejeição a esta visão mais linear. Em alguns trabalhos, como em Doerr (1996), por exemplo, é possível encontrar argumentos que indicam que os alunos, quando engajados em uma atividade de Modelagem, fazem vários movimentos entre as diversas fases envolvidas no processo de elaboração de um modelo, inclusive revisitando algumas delas, num processo cíclico e não-linear. A Fig.16 exemplifica a possibilidade de caminhos que podem ser tomados na realização de uma atividade de Modelagem, representados pelos nós e interconexões.

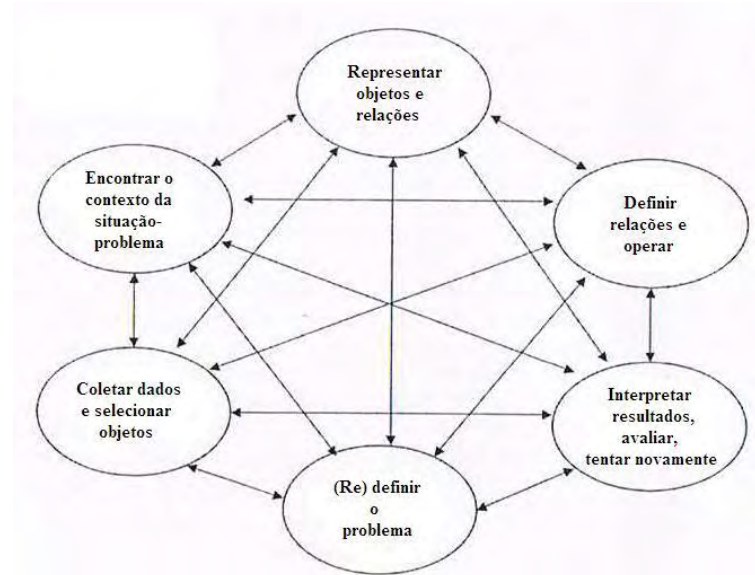


Figura 16 - Esquema não-linear das etapas envolvidas em um processo de Modelagem.
Adaptado de Doerr e Pratt (2008).

Um terceiro esquema bastante referenciado na literatura é o proposto por Blum e Leiß (2007, apud BLUM, 2011), apresentado na Fig.17, que apresenta uma característica mais cíclica. É interessante notar que este esquema diferencia entre a situação real, e o modelo real, sendo este último uma estruturação da situação real, já considerando as variáveis principais, hipóteses e simplificações da situação real. Por exemplo, no caso do Modelo de Ross-Macdonald, o framework utilizado para a posterior montagem das equações matemáticas, pode ser considerado um modelo real, pois ali as variáveis, parâmetros, hipóteses e simplificações já estão consideradas.

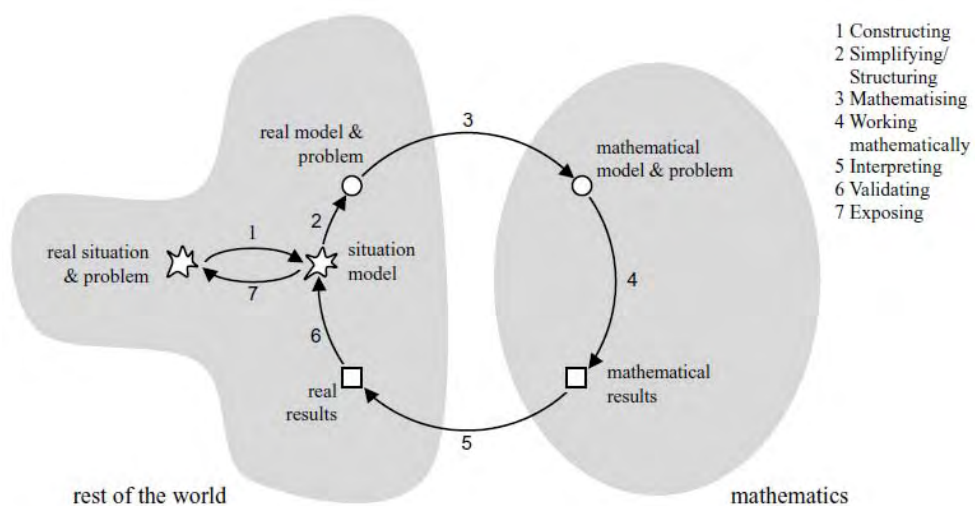


Figura 17 - Esquema de modelagem proposto por Blum e Leiß (2007). Extraído de Blum (2011).

Parece-me que nenhum destes esquemas, nem mesmo outros encontrados na literatura, consegue captar a complexidade envolvida nos processos de modelagem. Entretanto, podem ser úteis para algumas reflexões. A questão que surge quando olho para estas etapas de um processo de Modelagem é a seguinte: Como a abordagem pedagógica aqui apresentada se relaciona com a Modelagem? Como afirmo em Soares (2011), onde apresento uma discussão inicial sobre esta questão⁶⁰, é interessante notar que na abordagem pedagógica os alunos *não elaboram seu próprio modelo matemático* para a transmissão da malária. Eles estudam um modelo pronto. Apesar de inicialmente os alunos pensarem sobre possíveis hipóteses a considerar para a elaboração de um modelo matemático para a transmissão da malária, elas servem como meio para comparar suas ideias com as do autor do modelo que lhes é apresentado, e discutir suas potencialidades e limitações.

De acordo com Blomhøj e Kjeldsen (2011), um processo de modelagem nem sempre precisa começar com a descrição e compreensão de uma situação, de um objeto bem definido. Como o ciclo de modelagem não deve ser tomado como linear, o processo de modelagem poderia iniciar em qualquer etapa. Os autores exemplificam por meio de projetos desenvolvidos por alunos da Universidade de Roskilde que, às vezes, o processo inicia com a escolha de um modelo matemático já existente para determinada situação, e é a partir dali que os alunos desenvolvem o ciclo de modelagem completo.

Na abordagem pedagógica, os alunos também iniciam com o modelo matemático, na verdade na transição do modelo da situação para o modelo matemático, se pensarmos sob a perspectiva do esquema de Blum e Leiß (2007, apud BLUM, 2011), porém eles não chegam a completar o ciclo como os alunos citados por Blomhøj e Kjeldsen (2011). Assim, as atividades propostas aos alunos focam na interpretação das equações e das soluções do modelo matemático, assim como na análise de seu comportamento ao longo do tempo. Deste modo, poderíamos dizer que a abordagem pedagógica concentra o trabalho dos alunos na fase de interpretar e avaliar os resultados do modelo, caso tenhamos em mente o esquema proposto por Doerr e Pratt (2008) da Fig.15; ou então na transição entre o modelo da situação e o modelo matemático, no esquema proposto por Blum e Leiß (2007, apud BLUM, 2011), com períodos de extrapolação para a fase de delimitação do problema e verificação de limitações do modelo, que pode ser o gancho para a discussão de possíveis modificações no modelo, que

⁶⁰ Na verdade, em Soares (2011) também discuto o modo como a proposta se relaciona com Aplicações e Modelagem Exploratória. Neste capítulo abordo estes mesmos pontos e amplio um pouco mais a discussão.

podem ser apresentadas aos alunos ou desenvolvidas por eles mesmos com o auxílio do professor⁶¹.

Outra perspectiva de trabalho relacionada ao uso de modelos é o que foi chamado de Modelagem Exploratória (*Exploratory Modeling*). Doerr e Pratt (2008) baseiam-se no trabalho de Bliss e Ogborn (1989) para descrever este tipo de abordagem. O foco do artigo destes dois últimos autores é a análise de ferramentas para explorar a aprendizagem. Eles distinguem entre dois tipos de ferramentas: as exploratórias e as expressivas. As ferramentas exploratórias permitem que os estudantes investiguem modelos prontos de uma situação. Em geral, estes modelos são desenvolvidos por especialistas e são diferentes dos modelos dos estudantes. As ferramentas expressivas, por outro lado, permitem que os alunos desenvolvam e explorem seus próprios modelos (BLISS; OGBORN, 1989).

Um exemplo de ferramenta exploratória são os micromundos, que funcionam como simuladores de uma situação e permitem aos estudantes explorarem, por exemplo, as consequências causadas pela mudança de parâmetros na simulação. Segundo Doerr e Pratt (2008) perguntas do tipo “E se...” são os principais questionamentos propostos por este tipo de trabalho. Elas citam como atividades típicas: “variar os parâmetros de entrada, observar mudanças nos resultados, e explicar as consequências de certas ações e condições⁶²” (DOERR; PRATT, 2008, p.265, tradução nosta).

Tendo em vista estes apontamentos, como a abordagem pedagógica aqui apresentada se relaciona com a Modelagem Exploratória? Se olharmos para as atividades elaboradas para a abordagem pedagógica, com certeza encontraremos algumas com objetivos semelhantes aos das atividades típicas de uma Modelagem Exploratória. Isto porque é importante que os alunos entendam o modelo que estão analisando e a influência de seus parâmetros em sua evolução. Entretanto, as atividades não se resumem a isso. Elas incluem uma análise mais profunda da evolução do fenômeno, enfocando o comportamento das soluções ao longo do tempo. Além disso, incluem a análise de potencialidades e limitações do modelo. E, ainda, os elementos propostos para análise são relacionados com alguns conceitos previstos na ementa da disciplina, de modo que as atividades integram a disciplina regular.

⁶¹ O leitor irá notar que algumas possibilidades de trabalho apresentadas nesta discussão como vinculadas à abordagem desenvolvida não foram aplicadas na coleta de dados. Mas como bem coloquei nas considerações metodológicas, a situação imaginada pode ser pensada a partir da situação arranjada e, por isso, algumas vezes já elaborei minha reflexão num patamar mais amplo, abordando outras opções que vislumbro para o aprimoramento da proposta desenvolvida e aplicada.

⁶² [...] varying input parameters, observing changes in output, and explaining the consequences of certain actions and conditions.

É interessante notar que, no texto de Doerr e Pratt (2008), a Modelagem Exploratória fica fortemente vinculada à investigação de simulações realizadas em micromundos. Por outro lado, o software escolhido para trabalhar a abordagem pedagógica com os alunos, o *Modellus*, é considerado pelo seu autor como um sistema de modelação, cuja principal característica é permitir que o usuário construa múltiplas representações (modelos) para uma determinada situação em estudo e transite entre elas (TEODORO, 2002).

Classificações à parte, aparentemente o que chama a atenção é o fato de os alunos terem contato com a expressão analítica do modelo matemático ao trabalharem com o *Modellus*, o que a coloca no foco de análise, compreensão e até mesmo crítica por parte dos alunos. Neste contexto, isto é um elemento importante, pois as equações do modelo envolvem derivada, um conceito fundamental trabalhado por eles na disciplina. Assim, compreender as equações, os seus elementos e a informação que descrevem sobre o fenômeno, se transforma em um objetivo que, simultaneamente, pode justificar a importância deste conceito para a Biologia.

Esta justificativa é delineada nos diálogos estabelecidos em sala de aula; no caso desta pesquisa ao longo dos dois momentos de aula construídos. A definição matemática de derivada, trabalhada no primeiro momento de aula, auxilia na compreensão do significado da equação do modelo com relação ao fenômeno biológico; e as informações fornecidas pelo modelo, discutidas no segundo momento de aula, contribuem para o entendimento da utilidade do conceito matemático de derivada. Estas discussões desenvolvem a mesma função das pontes de hidrogênio nas hélices de DNA, isto é, assim como as últimas efetivam a conexão entre as bases que o formam, as primeiras estabelecem as interligações entre os dois momentos de aula.

Numa perspectiva um pouco diferenciada da Modelagem, há os trabalhos considerados como fazendo parte do eixo das Aplicações. No capítulo introdutório do 14º ICMI Study, Niss, Blum e Galbraith (2007) definem, de modo geral, que uma aplicação ocorre sempre que algum conteúdo matemático é *aplicado*, ou seja, é utilizado para compreender ou lidar com uma situação do mundo externo à Matemática⁶³. Deste modo, toda a aplicação envolve, de forma implícita ou explícita, um modelo matemático.

Segundo estes autores, nas últimas duas décadas, os termos Aplicações e Modelagem têm sido usados para referenciar qualquer tipo de ligação entre a Matemática e o mundo externo a ela. Entretanto, cada um dos termos enfatiza um determinado aspecto. Enquanto

⁶³ Segundo Niss, Blum e Galbraith (2007), “o mundo externo à matemática pode ser outro conteúdo ou disciplina, uma área de prática, uma esfera da vida privada ou social, etc.” (p.3).

Modelagem enfatiza a direção “realidade→matemática” (NISS et al., 2007, p.10) e, mais geralmente, os processos envolvidos nesse caminho, *Aplicações* enfatiza a direção “matemática→realidade” (NISS et al., 2007, p.10) e, de forma mais geral, os objetos envolvidos (NISS et al., 2007). Em outras palavras:

[...] com *modelagem* nós estamos do lado de fora da matemática olhando para dentro: ‘Onde eu posso encontrar alguma matemática para me ajudar com este problema?’ [...] com *aplicações* estamos dentro da matemática olhando para fora: ‘Onde eu posso usar esta peça particular do conhecimento matemático?’”⁶⁴ (NISS et al., 2007, p.10-11, tradução nossa).

E como seria uma abordagem pedagógica alinhada às Aplicações? É interessante notar que durante meus estudos sobre Modelagem, foram poucos os trabalhos que encontrei se referindo a Aplicações. No próprio 14º ICMI Study, a grande maioria dos capítulos aborda os trabalhos com Modelagem. Neste sentido, fica difícil identificar o tipo de trabalho que seria proposto aos alunos seguindo esta linha. Por exemplo, Muller e Burkhardt (2007) escrevem sobre uma visão global de Modelagem e Aplicações para a Matemática. Eles distinguem dois tipos de aplicação: uma apenas ilustrativa, em que várias situações práticas são tomadas para praticar e ilustrar a utilidade de um determinado conteúdo matemático; e a outra que eles chamam modelagem ativa, onde os alunos precisam determinar as ferramentas necessárias para lidar com uma situação do mundo real.

Segundo estes autores, os dois tipos de aplicações são importantes para a aprendizagem da Matemática, entretanto a modelagem ativa envolveria “uma gama completa de competências matemáticas” (MULLER; BURKHARDT, 2007, p.269). Neste sentido, a partir da leitura deste texto, um trabalho com aplicações parece se restringir à ilustração do uso de um conteúdo matemático, algo que não parece contribuir tanto para a aprendizagem dos alunos quanto a modelagem.

Entretanto, na pesquisa realizada por Legé (2007), o trabalho com aplicações aparece com outro significado. Aqui um grupo de alunos foi dividido em dois subgrupos sendo que cada um destes foi exposto a uma abordagem: o primeiro grupo examinou de forma crítica modelos prontos de uma situação; já o segundo grupo construiu seus próprios modelos para a mesma situação. Os modelos apresentados aos alunos do primeiro grupo tinham a forma de tabelas de informação. Além disso, os alunos tinham acesso às hipóteses elaboradas para cada modelo, assim como todos os cálculos completos. Os estudantes examinaram de forma crítica

⁶⁴ [...] with *modelling* we are standing outside mathematics looking in: “Where can I find some mathematics to help me with this problem?” [...] with *applications* we are standing inside mathematics looking out: “Where can I use this particular piece of mathematical knowledge?”

os modelos propostos, procurando compreender sua elaboração, seus cálculos e determinar suas limitações.

O estudo de Legé (2007) foi comparativo, analisando estatisticamente o desempenho dos alunos em quarenta objetivos, vinte relacionados com o processo de Modelagem e vinte com a estrutura dos modelos. O autor concluiu que, de forma geral, não houve diferenças estatísticas significativas entre os dois grupos. Entretanto, o segundo grupo, que trabalhou com Modelagem, obteve um melhor desempenho em quatro dos quarenta objetivos: a utilização de submodelos, isto é, os alunos elaboraram e refinaram os modelos construídos; precisão nos cálculos, quer dizer, enquanto os alunos do primeiro grupo procuraram estabelecer fórmulas para relacionar os dados das tabelas, os alunos que trabalharam com Modelagem utilizaram o recurso da contagem; habilidade de reconhecer características conceituais inerentes ao modelo; e determinação das limitações inerentes a ele.

Com base nestes trabalhos, temos, portanto, uma caracterização geral para Aplicações e dois exemplos de abordagens pedagógicas alinhadas a esta perspectiva. Neste sentido, como a abordagem pedagógica apresentada neste artigo se relaciona com Aplicações? Pela caracterização geral, observa-se uma convergência entre ambos, uma vez que a partir de um conteúdo matemático determinado (equações diferenciais ordinárias), buscou-se por fenômenos (biológicos) que poderiam ser representados por modelos envolvendo este conteúdo. É importante ressaltar, porém, que a escolha do fenômeno esteve fortemente relacionada com a possibilidade de ser um tema passível de ser o foco de trabalho dos alunos em seu futuro profissional.

Entretanto, analisando os dois exemplos encontrados na literatura, outros elementos surgem gerando algumas divergências. No primeiro exemplo, o principal objetivo atrelado ao trabalho com Aplicações é a ilustração de como utilizar determinado conteúdo. Neste caso, o conteúdo matemático é ensinado previamente e posteriormente utilizado pelos estudantes para resolver problemas vinculados ao mundo exterior à Matemática (MULLER; BURKHARDT, 2007). Esta, definitivamente, não é uma característica da abordagem aqui apresentada.

Por outro lado, o segundo exemplo parece apresentar uma estrutura semelhante à da abordagem pedagógica desenvolvida: o exame crítico de modelos prontos para um fenômeno. De fato, analisar a estrutura dos modelos para a transmissão da malária, assim como suas hipóteses e limitações, é um dos objetivos da proposta. Porém, ela vai além, uma vez que enfatiza o estudo do comportamento das soluções e suas relações com o fenômeno, e convida a utilizar a análise do modelo como fio condutor para a discussão de conceitos matemáticos

da disciplina, isto é, os conceitos previstos na ementa da disciplina aparecem como importantes elementos para a realização desta análise⁶⁵.

Assim, o estudo de modelos proposto neste trabalho extrapola o objetivo de ilustrar o uso do conteúdo matemático, assim como também extrapola a análise dos modelos por si só. Deste modo, é possível identificar convergências, mas também divergências, entre a abordagem pedagógica apresentada e as Aplicações, no sentido aqui exposto. Esta mesma situação se verifica com relação à Modelagem e à Modelagem Exploratória. Isto é, a proposta aqui apresentada não possui total convergência com nenhuma das três abordagens acima mencionadas. Mas e será que uma convergência deste tipo deveria ser buscada?

4.2 Análise de Modelos

Como em toda pesquisa, meu intuito ao procurar relacionar a abordagem pedagógica desenvolvida com a Modelagem e as Aplicações ultrapassa a simples classificação dentro de uma ou outra perspectiva, e sim busca localizar a pesquisa desenvolvida em um conjunto maior de investigações que lidam com o trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. Também busca discutir alguns temas relevantes e que possam contribuir para o desenvolvimento teórico da área.

Por outro lado, é interessante poder localizar a pesquisa em uma perspectiva mais geral, que abarque trabalhos que caminham na mesma direção. Neste sentido, tendo percebido uma relação um tanto instável entre a abordagem pedagógica desenvolvida e as abordagens usualmente relacionadas ao tratamento de modelos matemáticos na área da Educação Matemática, senti a necessidade de desenvolver uma caracterização própria, que dê conta de propostas como a que foi aqui apresentada. Denominei-a de *Análise de Modelos*.

Um trabalho envolvendo Análise de Modelos assemelha-se ao desta abordagem, no sentido de que propõe o estudo de um modelo matemático para algum fenômeno de outra área científica ou do dia-a-dia como ponto de partida de uma disciplina ou da discussão de um conceito matemático. O foco de análise é o qualitativo, isto é, a ênfase não é a busca por soluções analíticas. Compreender as hipóteses do modelo, entender seus elementos e os conceitos matemáticos subjacentes, estudar a influência dos parâmetros na evolução do modelo, analisar o comportamento de suas soluções, avaliar suas potencialidades e limitações,

⁶⁵ Um contraponto que deve ser feito é o de que o trabalho apresentado por Legé (2007) é um estudo comparativo e, portanto, não está inserido em um contexto de disciplina, com cronograma e ementa pré-definidos. Neste sentido, não é possível saber se o trabalho com os alunos, tanto analisando modelos prontos quanto elaborando seus próprios modelos, possuía o objetivo de trabalhar conceitos matemáticos novos.

e interpretar o modelo matemático com relação ao fenômeno são objetivos centrais. E é a partir da realização destes objetivos que os conceitos matemáticos das disciplinas surgem e são utilizados como meios de compreensão destes aspectos (JAVARONI; SOARES, 2012).

É interessante notar que diversos encaminhamentos podem ser elaborados para o cumprimento destes objetivos. No caso desta pesquisa, como explicitado no primeiro capítulo, um conjunto de atividades foi elaborado e o encaminhamento mostrou-se bem estruturado, de acordo com a ordem dos conteúdos na ementa da disciplina, ainda que com perguntas de caráter aberto. Entretanto, outra possibilidade de trabalho seria aquela vislumbrada inicialmente, em que o estudo do modelo e de seus elementos condicionaria a ordem de estudo dos conceitos matemáticos relevantes. Uma gama de possibilidades de encaminhamento está aberta.

Um exemplo de pesquisa já desenvolvida e que poderia ser caracterizada como Análise de Modelos é o trabalho de Javaroni (2007). A autora propõe o estudo de modelos matemáticos clássicos da literatura como ponto de partida para a discussão de conceitos matemáticos presentes na ementa da disciplina de Introdução às EDO. O foco deste estudo também é baseado em uma análise qualitativa, tendo em vista que o objetivo da autora é trazer uma abordagem geométrica para o ensino de EDO, desde as disciplinas introdutórias. As atividades propostas aos alunos envolveram o trabalho com campos de direção e o estudo do comportamento das soluções.

De forma mais geral, os modelos matemáticos propostos aos alunos não precisam ser clássicos, no sentido de serem modelos comumente presentes nos livros texto das disciplinas de Matemática. Como no caso desta proposta, optou-se por um modelo matemático clássico no sentido de ser o primeiro modelo desenvolvido para o fenômeno em estudo. Entretanto, outros modelos poderiam ser utilizados, como modelos recentemente desenvolvidos em dissertações ou teses na área de Matemática e que por enquanto estão publicados apenas em artigos. A flexibilidade é grande, dependendo apenas do nível com o qual se quer trabalhar e de acesso a recursos que permitam o trabalho dos alunos com o modelo escolhido.

Diretamente relacionado à escolha dos modelos matemáticos está a escolha dos fenômenos a serem estudados. Dependendo da disciplina com a qual se quer trabalhar, a escolha do modelo matemático precisará preceder o fenômeno, quer dizer, perguntar-se-á “Qual fenômeno possui um modelo envolvendo tal conteúdo matemático?”. Em outros casos, pode ser que o fenômeno seja o ponto principal a ser escolhido, seguido do modelo matemático. Neste caso, perguntar-se-á “Que tipo de modelo matemático há para tal fenômeno?”. Finalmente, fenômeno e modelo podem ser escolhidos simultaneamente, no

sentido que se deseja cumprir condições para ambos. Esta pesquisa é um exemplo deste caso, como será explicitado mais adiante.

Outro ponto relacionado à escolha do fenômeno e do modelo é quem possui a responsabilidade por esta tarefa: professor ou alunos? Esta discussão já permeou diferentes trabalhos na área de Modelagem. Há vários autores que incentivam que a escolha do tema seja feita pelos alunos. Bassanezi (2009), por exemplo, recomenda fortemente que os temas sejam escolhidos pelos alunos, pois, deste modo, sentir-se-iam corresponsáveis pelo processo de aprendizagem. Jacobini (2004, p.2) argumenta que “A opção por temas de interesse do aluno amplia sua motivação para o estudo e o seu comprometimento com as tarefas inerentes ao trabalho com a modelagem”. Borba, Meneguetti e Hermini (1999) também enfatizam a escolha do tema pelos alunos, inclusive incluindo esta característica como parte da perspectiva de modelagem assumida em seu trabalho.

Nesta pesquisa, a escolha do fenômeno e do modelo matemático foi realizada por mim. Alguns fatores nortearam esta escolha como: (i) ser um fenômeno biológico; (ii) ser um fenômeno de relevância para a área; (iii) ser um fenômeno cujo modelo matemático envolvesse conceitos previstos na ementa da disciplina. Escolher um fenômeno biológico sempre me pareceu algo natural, uma vez que os alunos da disciplina cursam Biologia. É interessante notar que a pesquisa de Herminio (2009) traz a mesma conjectura. Ela desenvolveu sua investigação no mesmo contexto⁶⁶, porém com alunos da turma de 2007, analisando como se dá o processo de escolha dos temas dos trabalhos de Modelagem. Naquele ano, dos sete trabalhos de Modelagem desenvolvidos na turma, seis deles versavam sobre temas relacionados à Biologia.

Com relação ao interesse, Herminio e Borba (2010) apontam que, quando o professor escolhe o tema, *pode* ocorrer uma transferência de interesse, isto é, os alunos, que inicialmente estudam o tema apenas para agradar o professor, passam a ter prazer com este trabalho. Deste modo, o foco deixa de ser o professor e os alunos dirigem sua atenção apenas para o trabalho. O tema de estudo não é mais do professor, mas dos alunos. Por outro lado, quando o aluno escolhe o tema, *pode* ocorrer de perder o interesse por este tema ao longo do estudo, e então o trabalho não se desenvolve. Na pesquisa de Herminio (2009) é possível encontrar um exemplo desta situação.

O ponto que gostaria de chamar atenção com estas considerações é que não é possível garantir que um trabalho de Modelagem (ou de Análise de Modelos) desperte o interesse dos

⁶⁶ Disciplina Matemática Aplicada do curso de Ciências Biológicas da Unesp de Rio Claro, SP.

alunos, independente de quem é responsável por definir o tema de estudo. O que se faz é oferecer oportunidades para que este interesse possa se desenvolver e, então, influenciar o processo de aprendizagem do aluno.

Entretanto, isto não significa que não devemos oferecer ao aluno a oportunidade de escolher o tema. O importante é termos consciência das várias possibilidades. Neste sentido, acredito que seja possível que os alunos participem da escolha do tema também quando trabalham com Análise de Modelos. Talvez, entretanto, seja necessário que haja uma maior negociação entre professor e alunos para a definição do tema, para que tanto o fenômeno como o modelo matemático correspondente sejam compatíveis com os objetivos do trabalho proposto. Por exemplo, no caso desta pesquisa, se os alunos escolhessem o tema, seria importante que o modelo matemático correspondente apresentasse alguma relação com o conceito de derivada e, simultaneamente, pudesse ser estudado pelos alunos.

Finalmente, a opção por uma nova terminologia, a saber, Análise de Modelos, deve-se à intenção de ressaltar o caráter diferenciado do trabalho aqui proposto, e de outros trabalhos que sigam na mesma direção, com relação à Modelagem e às Aplicações, como foi discutido na seção anterior. Por outro lado, não tenho o intuito de segregar os trabalhos em Análise de Modelos do conjunto de trabalhos em Modelagem e Aplicações. Pelo contrário, uma vez que todos lidam com modelos matemáticos, cada um a sua maneira, e existem várias possibilidades de inter-relacioná-los. Por exemplo, no caso da Análise de Modelos, após o estudo de um modelo pronto, os alunos poderiam elaborar modificações neste modelo ou elaborar seu próprio modelo para o mesmo fenômeno ou para algum fenômeno relacionado. Deste modo, a Modelagem pode ser incorporada à Análise de Modelos, complementando o trabalho.

Com esta nomenclatura, meu intuito é enfatizar o enfoque na análise qualitativa do modelo e de suas soluções, assim como suas potencialidades e limitações, tudo como pano de fundo para o desenvolvimento de conceitos matemáticos subjacentes e novos para os alunos. Além disso, trabalhos da mesma natureza do que o aqui apresentado e que anteriormente não se caracterizavam muito bem como Modelagem ou Aplicações, podem ser contemplados por uma perspectiva teórica. Certamente, ainda há muito para desenvolver neste sentido, e muitos questionamentos e pesquisas com relação a abordagens em Análise de Modelos precisarão ser realizadas. Mas este é um passo inicial para que isso seja alcançado.

4.3 Visão epistemológica sobre as tecnologias

O modo como esta proposta foi estruturada, e mais geralmente trabalhos em Análise de Modelos, permite que modelos que envolvam conceitos matemáticos ainda não aprendidos pelos alunos sejam analisados, uma vez que o foco não está nas técnicas de resolução analítica. Deste modo, é possível que fenômenos complexos sejam estudados mais cedo na carreira escolar, o que pode permitir ao aluno estar em contato com situações relevantes do ponto de vista social e da própria área de conhecimento à qual o fenômeno de interesse está vinculado.

Entretanto, a exemplo desta pesquisa, muitas vezes para se ter acesso às informações fornecidas pelo modelo sobre o fenômeno, é necessário utilizar uma gama de conhecimentos matemáticos muito avançados para o nível dos alunos. Deste modo, é importante que se tenha recursos que permitam aos alunos acesso a essas informações. A tecnologia, em particular softwares específicos, configura-se como um possível recurso.

Como mencionei no Capítulo 3, onde faço as discussões metodológicas, minha visão de conhecimento está embasada no construto teórico seres-humanos-com-mídias proposto por Borba e Villarreal (2005). Este construto se baseia principalmente nas ideias de dois autores: Tikhomirov e Lévy. Em seu trabalho, Tikhomirov (1981) discute sobre o modo como o computador influencia a cognição humana. Ele critica duas visões a esse respeito. A primeira delas é a ideia de que o computador substitui o ser-humano no sentido de que o computador poderia reproduzir a mesma heurística de raciocínio do ser-humano. Para o autor esta teoria não é adequada. Através de estudos laboratoriais foi possível identificar que os processos de busca, por exemplo, realizados pelo ser-humano e pelo computador não são semelhantes em sua maioria; e nas vezes em que se assemelham, os processos utilizados pelo computador são muito mais simples do que os humanos.

Como ressaltam Borba e Villarreal (2005), a noção de substituição debatida por Tikhomirov (1981) não inclui questões relacionadas à substituição de mão de obra humana por robôs na indústria, por exemplo. Como explicitado acima, ele analisa as relações entre o pensamento humano e o trabalho com o computador. Portanto, para este autor, a teoria da substituição não é adequada para descrever como o trabalho com o computador pode influenciar o desenvolvimento do pensamento humano.

Uma segunda teoria criticada por este autor é a da suplementação, que decorre do entendimento de que “processos complexos de pensamento consistem de processos

elementares de manipulação simbólica⁶⁷” (TIKHOMIROV, 1981, p.259, tradução nossa). Deste entendimento decorre que o computador permite ao ser-humano processar um volume maior de informação muito mais rápido, suplementando-o. Esta teoria, entretanto, não é considerada apropriada pelo autor, uma vez que leva em conta apenas aspectos quantitativos, e não qualitativos, relacionados à influência do uso do computador no desenvolvimento do pensamento humano. Outro aspecto desconsiderado por esta teoria é “o fato que o pensamento também inclui o objetivo que a pessoa tem em mente, a escolha do problema a ser atacado, e mudanças no problema durante um processo de investigação⁶⁸” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.12, tradução nossa).

Tikhomirov (1981) propõe que a influência do uso do computador no pensamento humano é o da reorganização, isto é, para este autor o computador reorganiza o modo como o ser-humano pensa, o modo como ele conhece. A noção de reorganização está embasada na teoria de Vygotsky que entende a linguagem como mediadora da atividade humana. Para Tikhomirov, o computador também medeia a atividade humana, possuindo uma característica peculiar que é a de fornecer um *feedback* imediato. Deste modo, o computador regula a atividade humana de forma qualitativamente diferente da linguagem (BORBA; VILLARREAL, 2005).

É possível que um debate com outro autor nos ajude a compreender esta noção sob outro aspecto, mas que me parece convergente com a visão de Tikhomirov. Pea (1985) também apresenta em seu trabalho a noção de reorganização para o papel do computador junto à cognição humana. Ele afirma que usualmente o computador é visto como um amplificador das capacidades cognitivas humanas. Este entendimento levou a uma série de programas de pesquisa, inclusive ligados à criação de softwares educacionais. Estes programas ressaltavam a rapidez com que os estudantes poderiam explorar determinado conceito. Para Pea, entretanto, apesar destas considerações descreverem mudanças provenientes do uso do computador, por exemplo, na resolução de problemas, outras mudanças mais profundas podem ser negligenciadas caso a metáfora da amplificação predominar.

O autor, então, propõe a noção de reorganização baseando-se em Cole e Griffin, que por sua vez se baseiam nas ideias de Vygotsky com relação à linguagem. Cole e Griffin afirmam que as tecnologias simbólicas mudam qualitativamente as funções cognitivas. Eles

⁶⁷ [...] complex processes of thought consist of elementary processes of symbol manipulation [...].

⁶⁸ [...] the fact that thinking also includes the goal one has in mind, the choice of the problem to be tackled, and changes in the problem during a process of investigation.

explicam que, cientificamente, a ideia de amplificar está vinculada ao aumento de intensidade de um sinal, mas isso não causa mudanças em sua estrutura básica. Neste sentido, a ideia de amplificação restringe a análise sobre os efeitos das tecnologias cognitivas⁶⁹ a aspectos quantitativos. Com relação a este fato, Pea (1985, p.170, tradução nossa) explica que:

Como evidência de tais tendências, Cole e Griffin discutem como um lápis pode ser pensado como amplificador do poder de memória de um aluno da sexta série para uma longa lista de palavras quando apenas o produto do comprimento da lista é considerado. Mas seria distorção, eles sugerem, continuar dizendo que o processo mental de lembrar que leva ao produto foi amplificado pelo lápis porque “lembrar” nos dois casos se refere a duas atividades qualitativamente diferentes. O lápis não amplificou uma capacidade mental fixa chamada memória; ele reestruturou o sistema funcional para lembrar, e consequentemente levou a um produto mais poderoso (ao menos para o propósito de lembrar mais itens)⁷⁰.

Pea (1985) entende que esta mesma noção de reorganização pode ser utilizada para compreender a relação entre o uso de computadores e as funções cognitivas humanas. Para ele, o uso do computador não apenas amplifica estas funções, mas modifica tanto o conteúdo quanto o fluxo dos processos cognitivos humanos envolvidos na resolução de problemas. Ou seja, quando usamos computador a estrutura básica de nossos processos cognitivos é modificada, e não apenas intensificada quanto à velocidade. Além disso, para ele, esta modificação é qualitativamente diferente da gerada por outras tecnologias cognitivas, como a escrita, por exemplo.

Para ilustrar sua ideia, Pea (1985) analisa três exemplos em detalhe. Um deles está relacionado ao uso de planilhas eletrônicas na elaboração de orçamentos. Antes das planilhas, os cálculos eram feitos a mão ou em programas de *main-frame*, que ficavam restritos aos departamentos de processamento de dados. Com as planilhas eletrônicas emergiu a possibilidade de testar diferentes cenários de situações financeiras complexas através da análise de diferentes hipóteses. Este tipo de exploração era muito difícil de ser feito anteriormente, apenas através dos programas *main-frame*, que não eram acessíveis aos executivos.

⁶⁹ “Uma tecnologia cognitiva é fornecida por qualquer mídia que auxilie transcender as limitações da mente, como a memória, em atividades do pensamento, como a resolução de problemas” (PEA, 1985, p.168, tradução nossa)

⁷⁰ As evidence of such tendencies, Cole and Griffin discuss how a pencil can be thought of as amplifying the power of a sixth grader’s memory for a long list of words when only the outcome of the list length is considered. But it would be distortive, they suggest, to go on to say that the mental process of remembering that led to the outcome was amplified by the pencil because “remembering” in the two cases refers to two qualitatively different activities. The pencil did not amplify a fixed mental capacity called memory; it restructured the functional system for remembering, and thereby led to a more powerful outcome (at least for the purpose of remembering more items).

Deste modo, o autor argumenta que as planilhas eletrônicas reorganizaram o trabalho mental de elaborar orçamentos. Em termos de conteúdo, as operações mentais predominantes no trabalho com a planilha eletrônica são as relacionadas ao planejamento das hipóteses a serem testadas, e não mais a elaboração dos cálculos. Com relação ao fluxo, o que mudou é que os experimentos e testes de hipóteses podem ser feitos a qualquer momento.

Um segundo exemplo é a utilização de software para a resolução de problemas matemáticos. Pea (1985) considera o software *AlgebraLand*, que sugere equações para serem resolvidas (por exemplo, $4(2+N)=20$, para ser resolvida em N) e fornece um quadro com possíveis operações (soma, subtração, multiplicação, divisão, combinar termos, distribuir, expandir). O usuário escolhe a sequência de operações que deseja executar e o software as realiza. O software também registra todas as operações escolhidas e fornece uma representação em “árvore” dos caminhos utilizados pelo usuário assim como os resultados obtidos em cada um.

Pea (1985) argumenta que, ao trabalhar com o software, o aluno fica livre das operações de cálculo, e foca o seu pensamento na escolha de quais operações deve utilizar e em que momento. Além disso, o registro em “árvore” permite que o aluno explore os caminhos que utilizou, identificando, por exemplo, em que situações uma determinada operação levou a um caminho sem sucesso; assim como pode estudar características das equações, procurando determinar padrões. O autor argumenta que o software “proporciona novas oportunidades para diferentes formas e tipos de aprendizagem através de resolução de problemas que não estavam disponíveis nas tecnologias simbólicas estáticas, não baseadas em computador para resolver equações⁷¹” (PEA, 1985, p.173, tradução nossa).

Deste modo, tanto do ponto de vista de Tikhomirov (1981), quanto de Pea (1985), o computador reorganiza o modo como o ser humano pensa, como ele conhece, pois reestrutura suas funções cognitivas. E o modo como reorganiza é qualitativamente diferente do modo como as outras mídias (lápiz-e-papel, oralidade) o fazem. Neste sentido, o computador é entendido como um mediador e um modelador do conhecimento.

O construto seres-humanos-com-mídias também traz este entendimento e os exemplos apresentados por Borba e Villarreal (2005) destacam alguns aspectos diferentes daqueles apresentados por Pea (1985). Por exemplo, o trabalho com o software *Excel* no desenvolvimento de um projeto de modelagem cujo objetivo era analisar o crescimento de cloroplastos em função do tempo, permitiu que os alunos desenvolvessem experimentos e

⁷¹ [...] affords new opportunities for different forms and types of learning through problem solving that were not available in static, noncomputer-based symbolic technologies for solving equations.

determinassem uma equação que modelasse a situação. Além disso, eles puderam plotar os dados que encontraram sobre a situação que investigavam e testaram a função que encontraram para o problema com base nos dados da literatura. Este exemplo sugere que o software reorganiza a atividade de modelagem, na medida em que o processo de determinação de uma equação, de um modelo algébrico, pode ser desenvolvido por meio de experimentações gráficas e não mais apenas com base em cálculos manuais, como os cálculos do método dos mínimos quadrados, por exemplo.

Outros exemplos apresentados por Borba e Villarreal (2005) enfatizam a elaboração de conjecturas matemáticas pelos alunos com base na experimentação que executam com o software e também com base nos elementos visuais que ele fornece. Diferentes exemplos envolvendo o trabalho com funções e derivada são apresentados no texto, envolvendo diferentes níveis educacionais, do ensino básico ao superior. Estes exemplos ilustram que tarefas do tipo: “Adivinhe a expressão da função cujo gráfico é a seguinte curva” (Fig.18), baseadas na abordagem experimental-com-tecnologias, quando desenvolvidas com software geram oportunidades em que os estudantes elaboram conjecturas e sugerem problemas para reflexão.

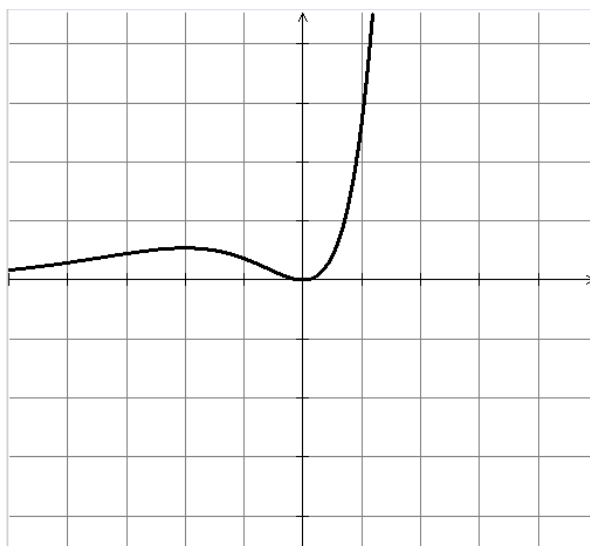


Figura 18 - Gráfico da função $y=x^2.e^x$ proposto para investigação. Adaptado de Borba e Villarreal (2005).

Recursos como o de traçar vários gráficos simultânea e rapidamente e o *zoom*, instigam os estudantes a analisar a situação proposta e, muitas vezes, a justificar sua validade de forma visual. Estes recursos permitem que os alunos foquem o seu pensamento na experimentação e teste de possíveis expressões para o gráfico dado, por exemplo, e não mais em calcular pontos específicos, plotá-los no plano cartesiano e posteriormente elaborar o

gráfico a partir de uma expressão algébrica dada. Neste sentido, novamente é possível notar que o software reorganiza o pensamento do estudante.

Outro aspecto que Borba e Villarreal (2005) destacam em seus exemplos é o feedback dado ao aluno pelo software. Em uma situação em que uma estudante procurava desenhar o gráfico da derivada de uma função sem conhecer sua expressão algébrica com o software *Derive*, os autores observam que a estudante desenvolveu um procedimento visual para melhor entender a construção da derivada. Neste processo, o feedback dado pelo software mostrou-se importante para que a aluna testasse suas conjecturas e avaliasse suas construções, pensando com o software para desenvolver um procedimento de sucesso.

Todos estes exemplos, tanto os apresentados por Pea (1985) como os apresentados por Borba e Villarreal (2005), destacam diferentes aspectos do processo de reorganização do pensamento pelos software em diferentes contextos. A reorganização, de certa forma, molda o pensamento do ser humano. Entretanto, Borba e Villarreal (2005) propõem mais do que o computador moldando o ser humano, mas também o inverso, o ser humano moldando o computador. Isto significa, por exemplo, que um usuário ao trabalhar com um software pode utilizá-lo de maneiras não imaginadas pelos seus desenvolvedores. Neste sentido uma dialética entre o usuário e as intenções do grupo de desenvolvedores é estabelecida, de modo que existe uma moldagem recíproca entre ser humano e computador.

Esta noção de moldagem recíproca subentende uma relação próxima entre tecnologia e ser humano, de modo que não é possível estabelecer uma dicotomia entre ambos. As ideias de Lévy são basilares para Borba e Villarreal (2005) abordarem esta questão. Segundo esses autores, Lévy (1993) argumenta que as tecnologias sempre fizeram parte do desenvolvimento da humanidade ao longo da história. Ele destaca três técnicas principais as quais denomina tecnologias da inteligência: oralidade, escrita e informática, todas relacionadas à memória e ao conhecimento. Cada uma destas tecnologias foi (e é) utilizada como uma extensão da memória humana; e cada uma estende a memória de uma forma qualitativamente diferente da outra: a oralidade, com um caráter circular, foi utilizada por diferentes povos para manter sua cultura e seu conhecimento através de mitos e lendas; a escrita, com um caráter linear, que permitiu uma organização mais estável para o pensamento, incluindo as narrativas e as sequências lógicas; e a informática, com um caráter descontínuo, que desafia o pensamento linear através de uma linguagem variada que envolve desde simulações até construções envolvendo oralidade, escrita, imagem e comunicação instantânea (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Estas ideias ressaltam o modo como as tecnologias, em particular as tecnologias da inteligência sempre estiveram presentes na evolução da humanidade, mesmo que usualmente não fossem identificadas. Assim, a dicotomia entre ser humano e tecnologia fica sem sentido diante deste panorama (BORBA; VILLARREAL, 2005). Estes autores afirmam também que: além da não dicotomia, eles acreditam que o conhecimento é produzido coletivamente, este coletivo envolvendo humanos e tecnologias da inteligência ou mídias⁷². Assim sendo, eles definem como a unidade produtora do conhecimento o coletivo seres-humanos-com-mídias.

Villarreal e Borba (2010, p.51) resumem bem as duas ideias centrais que permeiam a noção de seres-humanos-com-mídias:

[...] que a cognição não é um empreendimento individual, mas ao contrário, coletivo por natureza; e a cognição inclui ferramentas, dispositivos, artefatos e mídias com os quais o conhecimento é produzido. As mídias são componentes do sujeito epistêmico, não sendo nem auxiliares nem suplementares, mas uma parte essencial constitutiva dele. Elas são tão relevantes que diferentes mídias levam à produção de conhecimentos diferentes⁷³.

Estas ideias enfatizam o papel de reorganização do software (e também da oralidade e do lápis-e-papel) no processo de produção de conhecimento, um papel considerado ativo. Isto é, as mídias, em particular os softwares, são atrizes no processo de produção de conhecimento. É dentro desta perspectiva que entendo a presença do *Modellus* no desenvolvimento das atividades propostas aos alunos participantes desta pesquisa e me proponho a identificar e analisar o(s) papel(éis) desempenhado(s) por ele no contexto da Análise de Modelos. Antes de direcionar a atenção do leitor para os dados construídos nesta pesquisa e que podem lançar luz sobre este objetivo, gostaria de debater mais um ponto relacionado à fundamentação teórica que considero importante.

4.4 Tecnologias e Análise de Modelos: como se relacionam?

No terceiro capítulo desta tese argumentei que a visão de conhecimento, a metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos desta pesquisa estão em ressonância, seguindo as orientações de Lincoln e Guba (1985) quanto à importância desta reflexão para que a pesquisa não tenha resultados inconsistentes. A noção de ressonância,

⁷² Os autores explicam em seu texto que utilizam mídias e tecnologias quase como sinônimos, pois acreditam que “[...] a tecnologia é sempre usada para comunicar, e a mídia sempre pode ser vista como uma tecnologia. Nós frequentemente usamos o termo mídia para enfatizar os aspectos comunicativos das tecnologias da inteligência” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.23).

⁷³ [...] that cognition is not an individual enterprise, but rather collective in nature; and that cognition includes tools, devices, artifacts and media with which knowledge is produced. The media are components of the epistemic subject, being neither auxiliary nor supplementary, but an essential, constitutive part of it. They are so relevant that different media lead to the production of different knowledge.

neste caso, significa que existe uma relação coerente entre as perspectivas que embasam estes elementos. Uma expansão desta ideia de ressonância é feita por Borba e Villarreal (2005) que argumentam a importância de se ter metodologia, visão de conhecimento, pedagogia e tecnologia em ressonância para se desenvolver pesquisa e prática consistentes.

Em seu trabalho, Borba e Villarreal (2005) argumentam sobre a ressonância entre a Modelagem e a visão epistemológica sobre as tecnologias. Os autores apontam uma variedade de entendimentos para o tema Modelagem e também para tecnologias, de modo que há diferentes possibilidades de ressonância. Por exemplo, se uma pessoa acredita que a Modelagem significa a resolução de problemas aplicados, inclusive os que comumente encontramos em livros texto, uma perspectiva sobre computadores que pode estar em ressonância é a que considera o computador como tutor, substituindo o professor, sendo este aquele que responde perguntas. Outro exemplo: se a pessoa entende Modelagem como fortemente relacionada ao conteúdo matemático (por exemplo, a Modelagem restrita a atividades que levam à utilização de algum conteúdo específico na elaboração de modelos), então uma perspectiva sobre computadores que pode ser ressonante é o de motivação. Assim, o computador criaria um ambiente para motivar os alunos a utilizarem determinado conteúdo (BORBA; VILLARREAL, 2005).

No caso da perspectiva de Modelagem utilizada pelos autores, que preconiza a escolha de um tema por grupos de alunos para ser estudado com o auxílio do professor, uma perspectiva sobre o computador que está em ressonância é a proposta por eles: a de que o computador reorganiza o pensamento. Os autores apresentam alguns exemplos de projetos de Modelagem realizados por alunos onde foi feita a utilização de softwares ou calculadoras gráficas. Os exemplos ilustram situações onde os softwares foram usados para a construção de gráficos, para a experimentação e determinação de funções necessárias para modelar o problema, e para a análise de dados tabulares. Os exemplos também mostram a Internet como fonte de informações sobre o tema escolhido. Neste sentido, para os autores, a tecnologia torna a Modelagem mais poderosa, o que significa que as perspectivas de Modelagem e de tecnologia adotadas estão em ressonância.

Villarreal et al. (2010) também argumentam sobre a ressonância entre a Modelagem e as tecnologias. Elas comentam que vários autores reconhecem a importância do uso de tecnologias nos trabalhos de Modelagem. Alguns aspectos considerados pelos autores que elas analisaram são: cálculos trabalhosos podem ser feitos de forma mais rápida; é possível visualizar e elaborar simulações; alguns problemas podem se tornar triviais; o uso das tecnologias pode fomentar ou impedir o desenvolvimento de algumas competências em

Modelagem. Entretanto, como afirmam as autoras, estas considerações se referem apenas a um papel auxiliar da tecnologia.

Da mesma forma que Borba e Villarreal (2005), Villarreal et al. (2010) procuram destacar a ressonância entre a Modelagem e as tecnologias. Elas apresentam exemplos de situações vivenciadas em suas pesquisas e que ilustram o modo como as tecnologias tornam a Modelagem mais poderosa. No primeiro exemplo que apresentam, o software aparece como um recurso que permite a alunos com idades entre 11 e 12 anos lidar com a representação no plano cartesiano dos dados que possuem, e também uma análise de uma curva de melhor ajuste fornecida pelo software. Estes são conceitos ainda não trabalhados por alunos neste nível, mas que foram utilizados e analisados por eles por meio do software. No segundo exemplo, alunos de um curso universitário utilizaram o software para validar um modelo matemático que elaboraram apenas com lápis-e-papel. Estes exemplos ilustram a ressonância entre a Modelagem e as tecnologias em suas perspectivas adotadas.

De forma análoga, acredito que Análise de Modelos também está em ressonância com a perspectiva de seres-humanos-com-mídias. Como já comentei anteriormente, no caso desta pesquisa o software é um elemento fundamental para que os alunos possam desenvolver o estudo dos modelos, uma vez que as técnicas qualitativas para a resolução de um sistema de EDO são muito avançadas para os alunos da disciplina Matemática Aplicada. Será esta a única justificativa para esta ressonância?

4.5 Retomando mais uma vez a abordagem pedagógica

As discussões realizadas neste capítulo caracterizam os dois pilares principais de sustentação da abordagem pedagógica desenvolvida: a perspectiva de Análise de Modelos e o construto teórico seres-humanos-com-mídias. Como mencionei anteriormente, a proposta prevê a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico, no caso a transmissão da malária, desde o primeiro dia de aulas. Esta análise foi desenvolvida de forma interligada aos conteúdos da ementa da disciplina Matemática Aplicada, com foco no estudo do comportamento das soluções do modelo ao longo do tempo. Isto a caracteriza como pertencente à perspectiva de Análise de Modelos.

Além disso, o estudo do modelo para a transmissão da malária foi desenvolvido pelos alunos com o uso do *Modellus*. Segundo a visão epistemológica sobre as tecnologias apresentada neste capítulo, baseada no construto seres-humanos-com-mídias, meu entendimento é o de que o software é um ator no processo de produção de conhecimento dos alunos no desenvolvimento das atividades propostas. Ou seja, considero que ele possui um

papel ativo e também reorganiza o pensamento dos alunos. Deste modo, estou interessada em identificar e analisar qual(is) o(s) papel(éis) que o software desempenha junto ao trabalho dos alunos com uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos, o que se configura como a pergunta diretriz desta pesquisa. O momento agora é o de olhar os dados e buscar caminhos para respondê-la.

Capítulo 5 – Modificações nas Atividades; Apresentação e Análise dos Dados

Até o momento, fiz uma apresentação da abordagem pedagógica que embasa esta pesquisa, assim como discuti aspectos teóricos referentes a ela e à pesquisa. Chega o momento de apresentar e analisar os dados construídos. Como mencionei no Capítulo 3, o foco da análise serão os dados construídos em 2011, entretanto considero importante esclarecer ao leitor as mudanças que foram feitas na abordagem pedagógica de um ano para o outro. Assim, este capítulo está dividido em duas partes.

A primeira parte é mais descritiva e apresenta as principais dificuldades relacionadas com a elaboração das atividades, a aplicação da abordagem pedagógica e a construção de dados em turmas regulares. Algumas dessas dificuldades foram forças motrizes para a elaboração de modificações nas atividades de 2010 para 2011 e essas modificações também são apresentadas nesta primeira parte. É importante ressaltar que a narrativa desenvolvida está fortemente embasada em percepções da pesquisadora/professora e dos comentários dos alunos do que em aspectos teóricos.

A segunda parte do capítulo se dedica mais propriamente à análise dos dados construídos em 2011 e que se relacionam de forma mais direta à pergunta diretriz da tese, a saber: *Qual o papel de um software no desenvolvimento de uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos?* A estrutura desta segunda parte consiste em apresentar a análise dos dados gerados pelas entrevistas, a análise dos dados de observação e, finalmente, um entrelaçamento entre as análises realizadas.

Ao longo do texto, os trechos extraídos das transcrições das entrevistas e dos vídeos estão apresentados em itálico; os trechos extraídos de relatórios e das avaliações escritas aparecem como citação. Todos os textos aparecem da forma original, isto é, estão mantidas as expressões idiomáticas e as eventuais incorreções ortográficas. Trechos destacados em negrito assim estão, pois são os que, do meu ponto de vista, mais se relacionam com o aspecto que está sendo discutido. Trechos inseridos entre colchetes ([]) foram adicionados por mim ao texto original com o intuito de esclarecer o sentido da fala ou expressar algum gesto dos alunos. O símbolo [?] foi utilizado sempre que não tenha sido possível transcrever a fala por dificuldades de entendimento do interlocutor.

Parte 1: Considerações sobre a Abordagem Pedagógica

Nesta primeira parte do capítulo irei apresentar e refletir sobre alguns aspectos relacionados com a elaboração e aplicação da abordagem pedagógica. O texto está estruturado em duas subseções. Na primeira delas apresento e discuto algumas dificuldades relacionadas à elaboração das atividades, ao dia-a-dia na sala de aula e à construção de dados com uma turma regular. Na segunda, forneço mais detalhes sobre as modificações que foram feitas nas atividades de 2010 para 2011.

5.1 Dificuldades...

Quando elaboramos o texto final de uma tese de doutorado é natural que muitos aspectos do caminho não sejam explicitados, pois o foco da escrita não é propriamente apresentar ao leitor todos os passos envolvidos nesse processo, mas sim tecer reflexões que contribuam para o desenvolvimento da área científica no contexto da pergunta diretriz da pesquisa. Entretanto, como a presente tese está fortemente embasada na elaboração de uma abordagem pedagógica e na aplicação desta abordagem para uma turma regular, acredito ser importante dividir e refletir em conjunto com o leitor sobre algumas das dificuldades enfrentadas no caminho de pensar, estruturar e aplicar a abordagem pedagógica, pois deste modo é possível amenizar a sensação que pode existir a partir da leitura do texto de que tudo ocorreu como em um “mar de rosas”. A verdade é que não, nem tudo funcionou como o planejado, e é preciso reconhecer e compartilhar estas dificuldades.

5.1.1 Atividades

Uma primeira dificuldade já apareceu no início deste texto e também no Capítulo 3, e se refere à elaboração das atividades. O aspecto mais problemático aqui foi encontrar um equilíbrio entre fornecer um guia para os alunos, de modo que tivessem condições de compreender os objetos matemáticos com os quais estavam trabalhando, e ao mesmo tempo deixar espaço para que eles pudessem desenvolver ideias, estratégias e conjecturas tanto com relação aos conceitos matemáticos quanto com relação ao estudo do modelo e do fenômeno, utilizando seu conhecimento de Biologia para analisar e até mesmo confrontar os resultados apontados pelo modelo.

Este equilíbrio, de fato, ainda não pode ser observado totalmente nas atividades aplicadas aos alunos em 2011, mas já houve uma melhora de 2010 para 2011. Na seção

seguinte irei tratar das mudanças que foram feitas nas atividades de um ano para o outro, mas é oportuno adiantar um pouco o assunto para exemplificar um sintoma de que havia problemas neste equilíbrio: a opinião dos alunos de 2010 de que as atividades estavam repetitivas. Vários alunos falaram sobre isso, mas apresento em seguida a fala de Ana Maria e Fernanda, a título de ilustração, pois foram as primeiras alunas a serem entrevistadas e uma das duplas mais espontâneas em termos de críticas. Elas fizeram o seguinte comentário:

Ana Maria: *Só que na folinha eu achei um pouco extenso pro tempo que você tinha, e algumas perguntas foram repetitivas, talvez você poderia ser mais objetiva. Por exemplo, começando ... [?] desde o que era mais básico, por exemplo, ah você traça uma reta... uma reta... secante, aí depois você, digamos assim, vai dando... dando não, isso é a derivada... mais ou menos como você fez, só que um pouco menos... assim...*

Fernanda: *Repetitivo! Muitas vezes a mesma pergunta mas assim uma formulação diferente que a outra...*

Débora: *Hum...*

(Trecho da entrevista, Ana Maria e Fernanda, 25/10/2010).

A observação de que as atividades se tornaram repetitivas, cansativas e de que as questões pareciam iguais se repete nas falas de mais alguns alunos durante a entrevista ou então na avaliação escrita que alguns entregaram. Renata, por exemplo, escreveu o seguinte em sua avaliação escrita:

Durante o desenvolvimento das aulas, as dificuldades que surgiram se referiam às dúvidas de compreensão de algumas perguntas das atividades entregues. Algumas vezes, respondíamos a mesma coisa em itens diferentes e isso nos deixava confusos, mas buscávamos diferenciar nossas respostas, já que itens diferentes buscavam respostas diferentes.
(Trecho da Avaliação Escrita, Renata).

O que fica claro por meio da colocação dos alunos é justamente a não existência de um equilíbrio entre orientação para e independência dos alunos nas atividades. A preocupação em não deixá-los demasiadamente perdidos durante o trabalho, devido à natureza do modelo matemático proposto, dominou quaisquer outros aspectos que deveriam ser considerados na elaboração das atividades, de modo que as perguntas acabaram por confundir ao invés de auxiliar. Como Renata observa, muitas vezes eles percebiam que provavelmente deveriam responder algo diferente do que haviam respondido anteriormente, mas não conseguiam identificar esta diferença apenas com base na pergunta.

O quadro a seguir apresenta as primeiras questões da Atividade 3, cujo objetivo era a análise da natureza de X e Y e a compreensão de que ambos são funções do tempo.

Quadro 3 - Primeiras questões da Atividade 3.

1. Analise os gráficos que você obteve pelo software. Como você descreveria seu comportamento? Como você relacionaria este comportamento com o fenômeno biológico?
2. Agora, olhe apenas para o gráfico $X \times t$. Escolha três valores diferentes para t e encontre os valores de X que correspondem a estes valores do tempo usando o gráfico. Para cada valor de t o que o valor correspondente de X lhe diz com relação ao fenômeno? Conforme o tempo varia, o que acontece com os valores de X ? Para cada valor de t quantos valores de X correspondem? Existe algum valor de t que não possui um valor de X correspondente? O que estas características nos dizem a respeito de X com relação a t ?
3. Agora, olhe apenas para o gráfico $Y \times t$ e faça uma análise semelhante à feita acima.
4. A partir das análises anteriores, o que você pode concluir sobre a natureza de X e de Y ? Explícite seu argumento.

Fonte: Conjunto de atividades aplicado em 2010.

O que é possível perceber nestas questões, principalmente no item 2), é um exagero de orientação. As várias perguntas tinham o intuito de guiar o aluno na análise de cada um dos elementos que constituem a definição do que é uma função e que, a partir daí, eles pudessem concluir a natureza de X e de Y como funções do tempo. O problema é que as questões ficaram tão superficiais, como apontou Marcos em sua avaliação escrita, que ao invés de integrar, separaram e estratificaram os elementos desta definição. Além disso, os alunos focaram em cada uma das questões individualmente, não conseguindo relacioná-las e, portanto, não alcançando o objetivo pretendido. Em outras palavras, as atividades engessaram de mais o trabalho e os alunos não tinham “espaço para se movimentar”, para fazer conjecturas ou até mesmo para questionar o modelo matemático. Este sintoma foi, de fato, crucial para uma reelaboração das atividades do ano de 2010 para 2011.

5.1.2 A abordagem pedagógica no dia-a-dia

Nesta seção meu objetivo é refletir sobre algumas das dificuldades que surgiram durante a aplicação da abordagem pedagógica, no dia-a-dia da sala de aula. É importante notar que dificuldades sempre existem, em qualquer sala de aula, de modo que não é um privilégio das aulas ministradas nas turmas participantes da pesquisa. Acredito ser importante refletir sobre elas, pois podem auxiliar em uma reelaboração/reestruturação das atividades propostas.

No ano de 2010 a maior dificuldade foi a divisão da turma em dois grupos para o segundo momento de aula. Esta divisão trouxe duas consequências importantes: o tempo

disponível para os alunos refletirem sobre as questões propostas e uma menor conexão entre o primeiro e o segundo momentos de aula, uma vez que o professor regente da disciplina não participava dos segundos momentos de aula.

Como a turma tinha 42 alunos, precisamos dividir os alunos para a segunda parte da aula, de modo que cada grupo tinha apenas 50 minutos para trabalhar nas atividades. O tempo foi, de fato, um dos temas mais recorrentes na fala dos alunos, tanto nas entrevistas quanto na avaliação escrita que alguns alunos entregaram, com relação a aspectos que poderiam ser melhorados na abordagem pedagógica. A fala de Ana Maria, exposta na seção anterior, e os trechos a seguir, que foram retirados de avaliações escritas, ilustram a posição dos alunos com relação a esta questão:

A única coisa que eu acho é que por termos pouco tempo de aula no laboratório, as atividades precisariam ser um pouco menores. Porque falando por mim, acho que queria conseguir fazer todas as atividades para acabar a tempo e acabava não prestando tanta atenção, ou mesmo lendo os problemas e os gráficos com mais calma, para poderem ser melhores analisados. (Trecho da Avaliação Escrita, Lais).

O tempo de aula que normalmente passávamos no laboratório de informática (50 minutos), em relação ao tempo total da aula (4 horas), achei suficiente, porém se formos analisar com relação às atividades propostas, esses 50 minutos, dependendo da atividade, eram suficientes somente nas atividades iniciais, que eram mais simples, depois começou a ser pouco tempo. Quando não era suficiente, acabava se tornando muito difícil continuar o raciocínio parado na aula da semana anterior e continuá-lo na aula seguinte, com uma semana de diferença, acho que por uma questão de desorganização dos próprios alunos, que muitas vezes não levavam as folhas das atividades ou não tinham anotado o necessário. (Trecho da Avaliação Escrita, Marina).

As duas alunas enfatizam que o tempo não foi suficiente para a realização das atividades. Em 50 minutos ter de abrir o software, lembrar o que foi feito na aula anterior, fazer as configurações necessárias e refletir sobre todas as questões propostas ficou um trabalho pesado para os alunos. Duas consequências foram apontadas pelas alunas: ansiedade para terminar todas as questões na mesma aula, de modo que os alunos não conseguiram desenvolver uma análise mais apurada do modelo e das soluções; e dificuldades para retomar o raciocínio na aula seguinte.

Outra consequência que é possível apontar é que os alunos se tornaram muito dependentes da professora, que a todo o momento precisava responder às dúvidas relacionadas às questões propostas. Pela própria estrutura das atividades, como já mencionado, os alunos questionavam o que precisavam responder em uma ou outra questão,

sem parar para refletir sobre as possíveis diferenças entre elas. Apesar de a professora ter conversado com os alunos várias vezes durante o semestre explicando que as questões poderiam ser consideradas mais como guias, de modo que eles não precisavam se fixar a elas, isso não surgiu efeito na postura dos alunos. O tempo disponível para as questões do modo como estavam estruturadas foi, portanto, um fator de dificuldade para o trabalho.

Com relação ao segundo aspecto mencionado anteriormente, a relação entre os dois momentos de aula, apesar de a divisão da turma não ter favorecido que esta conexão fosse desenvolvida e enfatizada pelo professor, os alunos conseguiram, em diferentes níveis, estabelecer uma relação entre os conteúdos previstos na ementa e a análise do modelo matemático. Alguns testemunhos dos alunos, apresentados a seguir, ilustram sua percepção.

As relações entre os gráficos desenvolvidos na aula com o Borba e no laboratório foram fáceis de serem percebidas, inclusive com o uso da derivada. No começo parecia que o laboratório era algo independente, mas com o passar do tempo a interação aumentou. O conceito de velocidade em um gráfico foi muito bem explorado, para mim foi uma das partes mais marcantes. (Avaliação Escrita, Vinicius).

Achei a proposta das aulas muito boa, além de sair do comum da matemática aplicada em aula e exercícios e mais exercícios, **as aulas sempre conciliavam pelo menos alguma coisinha com a matéria dada pelo Borba inserindo o aspecto mais biológico que também é permeado pelos cálculos, quando aprendemos limites vimos como a aproximação do Δt agia na curva do gráfico, as tangentes como se comportavam resultando na derivada, entre outras** (Avaliação Escrita, Alberto)

Natalia: É porque, eu... eu fiquei meio confusa, assim, na verdade. Não sei se é porque eu faltei muito, e eu não acompanhei... tudo né. É que eu não conseguia ligar muito bem as coisas, sabe? Eu tive muita dificuldades, assim... de misturar os assuntos. Eu não via aplicação direta, do que a gente... vai trabalhar depois. Mas não só, tipo, ah eu vou aprender isso porque, sabe?

Talitta: Assim, as atividades de informática com a aula, até vi isso assim porque, aí o gráfico que a gente tava vendo às vezes... a taxa de variação, tipo, ou a gente via a derivada assim, era mais ou menos o que a gente tinha acabado de ver na aula, mais ou menos assim... não sei...

(Trecho da Entrevista, Natalia e Talitta, 28/10/2010)

Como é possível perceber, enquanto Vinicius afirma que as relações entre as aulas do professor regente e as atividades de análise do modelo foram facilmente estabelecidas, Alberto e Talitta relacionaram alguns conteúdos e Natalia não conseguiu estabelecer relações. Este processo de conectar as duas partes da aula pareceu ficar muito mais a cargo dos alunos em 2010. Apesar de várias das atividades terem como foco a reflexão sobre os conceitos

matemáticos aprendidos no contexto da análise do modelo, provavelmente a estrutura das atividades e o pouco tempo disponível não favoreceu esse aspecto.

No ano de 2011 a turma não precisou ser dividida para ir ao laboratório de informática. Deste modo o professor regente pôde participar dos segundos momentos de aula e isso contribuiu para que ele próprio relembresse com os alunos no primeiro momento de aula, em várias ocasiões, discussões que foram realizadas no segundo momento de aula e que se relacionavam com o conceito matemático em estudo. Além disso, o tempo dedicado às atividades de análise do modelo passou de 50 minutos para 1 hora e 25 minutos de duração. Deste modo estas dificuldades foram superadas em 2011.

Como as atividades foram reformuladas e a turma possuía um número menor de alunos, a condução das atividades ocorreu de forma mais tranquila, com possibilidade de estabelecer um debate em grande grupo ao final de todas as atividades. Apesar de algumas vezes a participação dos alunos ter sido tímida nestes debates, não considero que houve grandes obstáculos ou dificuldades na condução da abordagem pedagógica neste ano.

5.1.3 Construção dos dados em uma turma regular

Uma das decisões importantes que tiveram de ser tomadas durante o desenvolvimento da pesquisa foi sobre aplicar ou não as atividades em uma turma regular. Como já mencionei no Capítulo 1, esta decisão teve influências sobre a estrutura geral da abordagem pedagógica e por isso precisou ser bem pensada. Uma vantagem interessante deste tipo de trabalho é a oportunidade de pensar atividades e abordagens que já possam ser aplicadas quase que diretamente em sala de aula. Mas algumas dificuldades surgem no momento de desenvolver a pesquisa.

Uma das principais dificuldades com relação à construção dos dados em uma turma regular é a escolha das fontes de dados. Nesta pesquisa optamos pelos vídeos gerados pelo *Camtasia* como uma forma de obter registros sobre as discussões elaboradas pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades. Apesar de o software ser um recurso bastante interessante para o registro do trabalho dos alunos, a qualidade do som gravado nem sempre é boa, principalmente na situação de uma sala de aula regular, pois as duplas de alunos ficam bem próximas, de modo que as gravações são geradas com muito ruído de fundo, dificultando o processo de transcrição.

Além disso, não é possível ter-se controle a todo o momento se o software está funcionando corretamente ou se os alunos não movimentaram o microfone, por exemplo, colocando-o em um lugar que não capta sua voz. Estes foram alguns dos incidentes que

ocorreram tanto em 2010 quanto em 2011, de modo que algumas gravações foram perdidas. Em 2011, por exemplo, das 10 duplas, 4 não possuem gravações boas de seus trabalhos por problemas na gravação do som.

Outra dificuldade na construção dos dados em uma turma regular surge justamente do duplo papel pesquisador/professor. De que modo conciliar a necessidade de fornecer respostas aos alunos e ao mesmo tempo observar o que ocorre na turma? Como acompanhar as discussões que ocorrem em cada uma das duplas (Nesta questão o *Camtasia* ajuda a fazer este acompanhamento *a posteriori*)? Como abordar os questionamentos dos alunos de forma que favoreça a obtenção de elementos para a pesquisa e ao mesmo tempo não deixe os alunos frustrados por não terem um rumo?

Esta dificuldade não é exclusiva de um trabalho com uma turma regular. Experimentos de ensino liderados pelo pesquisador também são suscetíveis a dificuldades semelhantes. Por exemplo, Barbosa (2009) testemunha o conflito que vivenciou ao realizar sua pesquisa por meio de experimentos de ensino: “A pesquisadora se segurava para não interferir muito e a professora queria ensinar” (BARBOSA, 2009, p.177). Manter o balanço entre esses dois papéis não é uma tarefa trivial.

Falar por muito tempo de dificuldades pode trazer a impressão contrária do que se quer: ao invés de alertar o leitor para o fato de que algumas coisas podem não sair como o planejado, pode passar a sensação de que a maior parte delas é que não funcionou e que não compensa fazer pesquisa em um ambiente de sala de aula regular. Mas este não é o caso. Há vantagens em se desenvolver pesquisas em uma sala de aula regular. Como mencionei no início desta seção, em termos da abordagem pedagógica, ela já é pensada com o intuito de ser aplicada e inserida no currículo da disciplina, de modo que se houver necessidade de adaptações, provavelmente elas serão em número reduzido.

Já em termos da pesquisa, ela é desenvolvida no ambiente natural (LINCOLN; GUBA, 1985), incorporando os diferentes fatores que influenciam no mesmo. Neste sentido, aspectos como a existência de uma ementa para cumprir, a presença de exames e provas, e o tempo disponível estão todo o tempo influenciando o desenvolvimento das atividades. Este fato tem o potencial de facilitar que a pesquisa alcance a sala de aula, saia das prateleiras para ser colocada em prática. Tendo em vista que atualmente é mínima a quantidade de pesquisas que chegam à sala de aula, esta potencialidade constitui uma das principais vantagens de estudos como este, de modo que considero importante desenvolver mais pesquisas em sala de aula regular.

Além disso, como o leitor poderá perceber no desenvolvimento da análise dos dados, vários aspectos do desenvolvimento da abordagem pedagógica ocorreram de forma positiva. As dificuldades foram apresentadas aqui para evidenciar a fonte geradora de mudanças e a importância de aceitá-las e analisá-las com cuidado para realizar melhoras nas atividades e na abordagem pedagógica como um todo.

5.2 Mudanças na abordagem pedagógica de 2010 para 2011

Conforme mencionei anteriormente, foram três os principais aspectos que evidenciaram a necessidade de modificações na abordagem de 2010 para 2011: o pouco tempo, a integração entre os momentos de aula e as atividades repetitivas. O número de 22 estudantes na turma de 2011 permitiu que todos pudessem ser acomodados no laboratório de informática simultaneamente, o que solucionou o problema do tempo. Isto contribuiu para permitir que os debates em grande grupo não se perdessem com o desenvolvimento do semestre e para que o professor regente pudesse assistir aos segundos momentos de aula, promovendo uma melhor interação entre os conteúdos ministrados no primeiro momento de aula e as atividades baseadas na análise do modelo matemático.

O caráter repetitivo das atividades tornou-se, portanto, o principal ponto para reflexão. No que segue, irei comentar brevemente cada uma das atividades, descrevendo sua estrutura em 2010 e as modificações que foram feitas (ou não) para 2011. Não irei apresentar cada uma das atividades na íntegra, mas as guias das atividades aplicadas em 2010 podem ser encontradas no Apêndice 1, e as de 2011 estão no Apêndice 2.

5.2.1 Atividade 1

O objetivo da primeira atividade foi introduzir o fenômeno biológico a ser estudado ao longo do semestre. Em 2010 isto foi feito a partir da apresentação de três vídeos curtos sobre a malária: uma reportagem da TV Senado, parte de um documentário do canal Discovery e uma reportagem sobre pesquisas relacionadas à prevenção da malária. Após assistirem aos vídeos os alunos foram convidados a discutirem, em duplas, o que sabiam sobre a doença: transmissor, sintomas, região de ocorrência, etc. Também foram convidados a discutir questões relacionadas ao estudo da doença em uma região: que recursos utilizariam, que fatores considerariam, como representariam os dados obtidos, etc. Algumas questões para guiar seu trabalho foram projetadas em um slide e os alunos foram convidados a utilizar cartolina e caneta hidrográfica para representar suas discussões. Ao final da atividade foi desenvolvido um debate com todos os alunos, cujo principal objetivo era elencar os fatores de

influência na transmissão da doença sugeridos pelos alunos e criar um “gancho” para falar do modelo matemático na aula seguinte.

Os alunos desenvolveram as discussões em duplas, entretanto vários tiveram dúvidas sobre o que deveriam refletir, e também não entenderam muito bem a proposta do uso das cartolinas e canetas hidrográficas. O tempo para o desenvolvimento da atividade se mostrou insuficiente, de modo que alguns alunos não refletiram sobre o estudo da doença, outros se dedicaram muito mais a pensar sobre meios de prevenção e questões sociais, e outros se sentiram na obrigação de saber o máximo de informações possíveis sobre a doença. No debate em grande grupo os alunos participaram, mas o principal foco das discussões foram novamente modos de prevenção e não tanto fatores de influência da doença. Deste modo, as seguintes alterações foram feitas para 2011:

- As questões para guiar as discussões dos alunos foram impressas e entregues para cada dupla, com ênfase para o debate relacionado ao estudo da transmissão da doença;
- O convite para representar suas discussões em papel cartolina foi descartado;
- Apenas um vídeo foi apresentado aos alunos para introduzir o fenômeno biológico (a reportagem da TV Senado), sendo os demais vídeos postados no Repositório do Tidia-AE para quem quisesse saber mais.

As mudanças feitas auxiliaram para que os alunos tivessem mais tempo para refletir sobre as perguntas e focassem sua atenção na discussão referente aos modos de estudo da transmissão da doença, possíveis formas de representar resultados, o que consideram um modelo e os principais fatores de influência na transmissão da doença. O debate em grande grupo também ocorreu com um foco maior nesses aspectos e, apesar de os alunos se mostrarem um pouco tímidos, compartilharam suas ideias com os demais por vezes discutindo com mais intensidade uma ou outra questão mais polêmica para eles.

5.2.2 Atividade 2

O objetivo da Atividade 2 foi apresentar o modelo matemático para os alunos. Em 2010 isto foi feito por meio de uma explanação da professora utilizando uma apresentação de slides para explicar o modelo. O início da explicação foi baseado na retomada dos fatores de influência da transmissão da doença elencados pelos alunos na aula anterior. A partir daí a professora comentou sobre a possibilidade de elaborar um modelo matemático para representar o fenômeno biológico, chamando a atenção de que muitas vezes é necessário simplificar o fenômeno para que se obtenha um modelo matemático com o qual seja possível trabalhar. Os fatores elencados pelos alunos foram comparados com as hipóteses do modelo

de Ross-Macdonald, de modo que os alunos puderam refletir sobre as simplificações feitas para a elaboração do modelo, e as limitações decorrentes destas simplificações.

Em seguida, a professora explicou a dinâmica de transmissão da doença, com base nas hipóteses feitas, a partir da análise do framework (apresentado no Capítulo 1). Finalmente, as equações matemáticas foram apresentadas, com base no framework, e utilizando a noção de variação do número de pessoas e mosquitos infectados ao longo do tempo para os símbolos dX/dt e dY/dt , respectivamente. Como já mencionei anteriormente, essa noção foi refinada ao longo do semestre.

Como os alunos acompanharam, dentro das condições possíveis, as explicações dadas pela professora, em 2011 a estrutura da apresentação do modelo matemático foi mantida. Um texto com as explicações foi postado no Repositório do Tidia-Ae para que os alunos tivessem acesso e pudessem retomar as explicações dadas sempre que quisessem tanto em 2010 como em 2011.

5.2.3 Atividade 3

O objetivo desta atividade era inserir o modelo matemático no software e refletir sobre a natureza de X e Y como funções do tempo. Em 2010, um tutorial foi entregue aos alunos para orientá-los com relação à inserção do modelo no software. Após completarem os passos sugeridos, os alunos obtinham os gráficos de X e de Y pelo tempo, simultaneamente. Uma sequência de questões foi proposta para que os alunos refletissem sobre a natureza de X e de Y a partir da análise de seus gráficos, ou seja, o objetivo era reconhecer que os gráficos plotados eram gráficos de funções do tempo.

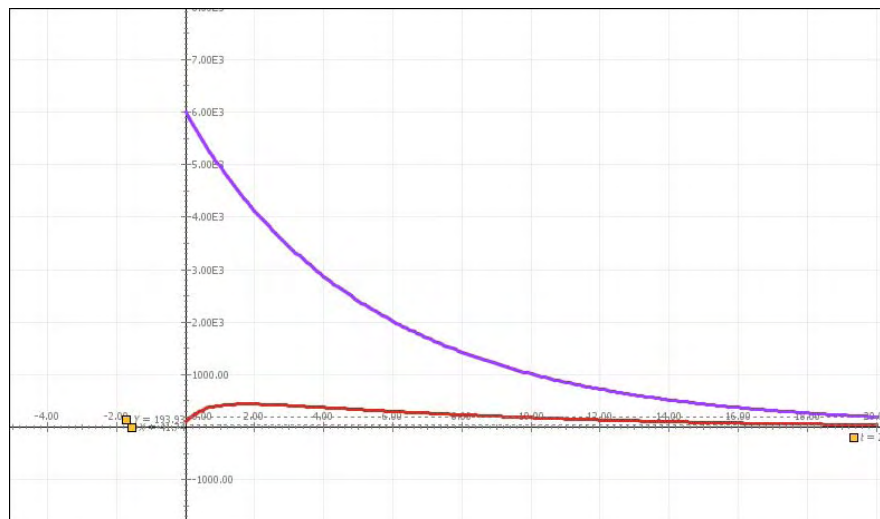


Figura 19 - Gráficos de $X(t)$ (vermelho) e $Y(t)$ (roxo) plotados simultaneamente.

As questões foram elaboradas com base na definição de função, com o intuito de que os alunos analisassem cada elemento da definição nos gráficos e posteriormente concluíssem sobre a natureza funcional. Porém, as questões ficaram muito segmentas (ver Quadro 3 na p.128) e os alunos não conseguiram articular os elementos e percebê-los como sendo necessários para definir função. Devido a isso, em 2011 estas questões foram modificadas. Perguntou-se diretamente aos alunos se X e Y eram funções do tempo, e pediu-se que eles justificassem suas respostas.

Uma segunda parte da atividade esteve relacionada com a identificação dos conjuntos Domínio, Contradomínio e Imagem de cada uma das funções, e o seu significado em termos do fenômeno biológico. Esta segunda parte foi mantida em 2011, porém a escrita das questões foi reformulada com o intuito de torná-las mais claras.

5.2.4 Atividade 4

O objetivo da Atividade 4 foi a análise da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de suas soluções. Seis situações foram propostas para análise, cada uma relacionada à modificação dos valores de um dos parâmetros. As situações foram elaboradas de modo que os valores propostos para os parâmetros, em sua maioria, foram obtidos a partir de pesquisas realizadas e publicadas em artigos, e se referem a diferentes aspectos relacionados às condições de transmissão da doença em uma região, sendo portanto próximas de uma possível situação real. Os estudantes obtiveram representações gráficas e tabulares de $X(t)$ e $Y(t)$ no software para diferentes “casos” (Fig.20), que foram construídos a partir da definição de dois ou três valores distintos para um dos parâmetros.

Em 2010, o tempo para a discussão desta atividade foi extremamente curto, o que prejudicou o debate em grande grupo. Deste modo, apesar de não ter feito modificações nas questões propostas para 2011, e apesar de os alunos terem mais tempo para a elaboração da atividade, enfatizei que os alunos priorizassem a discussão das duas primeiras situações, que são as mais interessantes (ver Apêndice 2). Deste modo, foi possível desenvolver o debate em grande grupo e os alunos se sentiram mais tranquilos para pensar sobre as situações propostas.

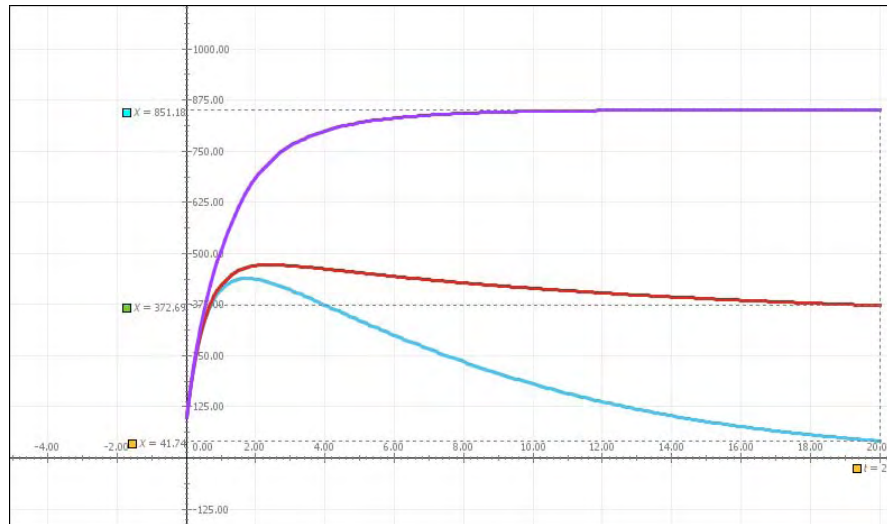


Figura 20 - Gráficos de $X(t)$ para três casos distintos.

5.4.5 Atividades 5 e 6

As Atividades 5 e 6, aplicadas em 2010, serão discutidas em conjunto pois ambas estão relacionadas com a introdução do conceito de derivada. A Atividade 5 teve como principal objetivo a análise das variações de X e de Y conforme o tempo variava em intervalos de 0.5 unidades. A atividade estava dividida em cinco partes. A primeira parte instruiu os alunos a plotarem o gráfico de X pelo tempo para o primeiro caso e retomarem o significado de seu comportamento. A segunda parte pedia que os alunos analisassem visualmente o modo como os valores de X variavam conforme o tempo variava a cada 0.5 unidades e a parte três pedia que os alunos fizessem uma análise semelhante, porém calculando os valores das variações de X . A terceira parte sugeria que os alunos plotassem retas secantes e analisassem suas inclinações.

A parte quatro da atividade explicava a noção de taxa de variação e propunha que os alunos construíssem com o software o gráfico da função de variação com $\Delta t = 0.5$, e analisassem seu comportamento e procurassem compreender as informações dadas por essa função sobre o fenômeno biológico. Finalmente a parte cinco orientava os alunos a analisarem a função Y .

As principais dificuldades relacionadas à Atividade 5 foram as seguintes:

- não ficou claro para os alunos que a análise a ser realizada na parte dois era visual, de modo que eles já realizaram cálculos neste momento e, portanto, a parte três tornou-se repetitiva;
- cada dupla precisou realizar um grande número de cálculos para fazer a análise proposta;
- os alunos tiveram dificuldades para entender o papel da reta secante em todo o processo;

- os alunos também tiveram dificuldades para entender o gráfico da função taxa de variação.

A Atividade 6 teve como objetivo refinar a análise das taxas de variação, com Δt diminuindo cada vez mais. A primeira parte da atividade sugeria que os alunos calculassem $\Delta X/\Delta t$ para diferentes valores de Δt , e fizessem uma análise desses valores. A ideia era que por meio dessa análise os alunos conseguissem identificar a existência de um valor limite. A segunda parte da atividade pedia que os alunos calculassem o valor de dX/dt , utilizando a equação do modelo matemático, no ponto fixo onde analisaram as variações anteriormente. O objetivo era que os alunos percebessem que conforme o valor de Δt diminui cada vez mais, o valor da taxa de variação se aproxima do valor de dX/dt . A terceira parte da atividade pedia que os alunos plotassem o gráfico da função taxa de variação instantânea. Finalmente, a última parte sugeria uma análise semelhante para a função Y .

As principais dificuldades nesta atividade foram:

- o grande número de cálculos que os alunos precisaram desenvolver;
- dificuldade para realizar os cálculos, com ocorrência frequente de erros;
- dificuldades para interpretar o sentido de dX/dt .

É importante notar que em 2010 essas atividades foram aplicadas após o professor discutir o conceito de derivada com a turma. Apesar disso, elas foram elaboradas com o intuito de introduzir o conceito de derivada, mas foi possível perceber que sua estrutura não ficou adequada, pois, mesmo os alunos já tendo visto o conceito, tiveram muitas dificuldades na interpretação e na condução das atividades.

Deste modo, em 2011 as Atividades 5 e 6 foram fundidas em apenas uma atividade, que tornou-se a Atividade 5 (ver Apêndice 2). Ela foi planejada novamente para introduzir o conceito de derivada, mas desta vez com maior acompanhamento e guia da professora. De fato, ela foi utilizada em 2011 para introduzir o conceito de derivada, a única atividade que foi realizada antes de o professor discutir o conceito matemático com os alunos, e que cumpriu com o que fora pensado originalmente para a abordagem pedagógica.

O encaminhamento da atividade foi o seguinte: primeiramente a professora pediu que os alunos comparassem dois gráficos de X pelo tempo, com valores diferentes para o parâmetro a . Como é possível ver na Fig.21 esses gráficos possuem um comportamento semelhante, mas não são iguais. O objetivo era que os alunos descrevessem como explicariam a diferença entre os dois comportamentos. A partir da observação de que os valores de X no gráfico verde atingem um valor maior do que os valores de X no gráfico laranja em um mesmo intervalo de tempo (na região crescente do gráfico), os alunos discutiram juntamente com a professora a ideia de velocidade média (pensando o gráfico como distância pelo tempo)

e posteriormente a ideia de taxa de variação média, indicando o número médio de pessoas doentes de malária em cada intervalo de tempo. Os alunos calcularam os valores das taxas de variação média em dois intervalos diferentes do gráfico, identificando seu significado com relação ao fenômeno biológico.

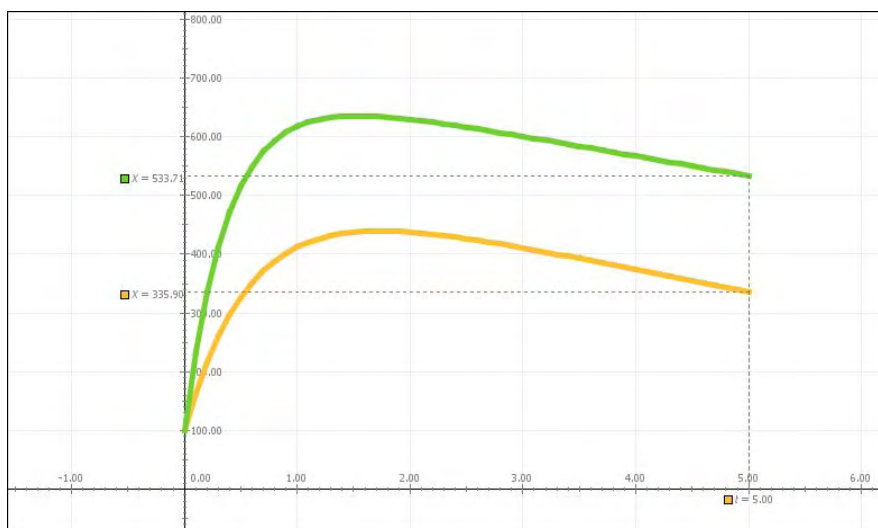


Figura 21 - Gráficos de $X(t)$. Gráfico verde: $a=0.6$; gráfico laranja: $a=0.29$.

Em um segundo momento, a professora questionou como eles fariam para calcular a velocidade em um instante de tempo (pensando o gráfico novamente como distância pelo tempo). Os alunos sugeriram estratégias, desde o uso das fórmulas estudadas em física, até o cálculo de $\Delta X/\Delta t$ para valores de Δt cada vez menores. A professora, então, explicou que a segunda estratégia era mais indicada, pois o gráfico com o qual estavam lidando não era da distância pelo tempo, e sim do número de pessoas infectadas pelo tempo. Em seguida, os alunos foram convidados a calcular $\Delta X/\Delta t$ para valores de Δt variados e cada vez menores. Aqui um aspecto importante é que cada dupla fez apenas dois cálculos: um para cada uma das curvas.

Uma tabela foi montada com os valores obtidos e os alunos analisaram em conjunto o comportamento desses valores, concluindo no final a existência de um valor limite. Este valor limite foi mais tarde comparado com o valor de dX/dt no ponto analisado que os alunos calcularam em casa. A professora explicou, a partir da análise da tabela, o conceito de taxa de variação instantânea, e o relacionou com a ideia de velocidade instantânea (para gráficos de distância pelo tempo).

5.2.6 Atividade 7

O objetivo da Atividade 7 era relacionar o conceito de taxa de variação instantânea com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico. Em 2010, esta atividade teve cinco partes. Na primeira parte o aluno era convidado a analisar um triângulo retângulo imaginário com vértices $A(0, X(0))$, $B(1, X(0))$ e $C(1, X(1))$, calculando o valor da tangente do ângulo formado entre a hipotenusa e o cateto horizontal. Em seguida, os alunos deveriam encontrar a reta secante passando pelos pontos A e C . Finalmente deveriam repetir o processo para mais dois triângulos, porém com a variação de t menor.

Na parte dois, os alunos deveriam comparar o valor do coeficiente angular de cada uma das retas encontradas com o valor da tangente do ângulo formado entre hipotenusa e cateto horizontal de cada um dos triângulos. Na parte três, deveriam plotar os gráficos das retas secantes, e analisar seu comportamento conforme o valor de Δt ia diminuindo, além de interpretar a informação que forneciam sobre o fenômeno. Na parte quatro, deveriam encontrar a equação da reta tangente, utilizando a equação do modelo matemático para encontrar o coeficiente angular. E finalmente na parte cinco, deveriam repetir a análise para o gráfico de Y .

Novamente muitos cálculos foram exigidos dos alunos, e isso não facilitou o seu trabalho. A atividade foi desenvolvida em duas aulas. Os alunos apresentaram dificuldades para a realização dos cálculos e para analisar o comportamento das retas secantes conforme o Δt diminuía cada vez mais. Deste modo, as mudanças feitas nesta atividade, e que geraram a Atividade 6 aplicada em 2011 (ver Apêndice 2), tiveram como principal foco diminuir a quantidade de cálculos.

Assim, foi pedido que os alunos encontrassem a equação de apenas uma reta secante, plotassem seu gráfico no software (Fig.22) e relacionassem com a expressão para encontrar a taxa de variação média. Além disso, foi pedido que os alunos pensassem sobre a relação entre a taxa de variação e a taxa de variação instantânea sem muita indicação de como fazer isso. Eles deveriam se lembrar das discussões que tiveram em aula com o professor Marcelo Borba antes de realizar esta atividade. Ainda foi pedido que calculassem a equação da reta tangente e plotassem seu gráfico no software, interpretando a informação fornecida em termos do fenômeno biológico.

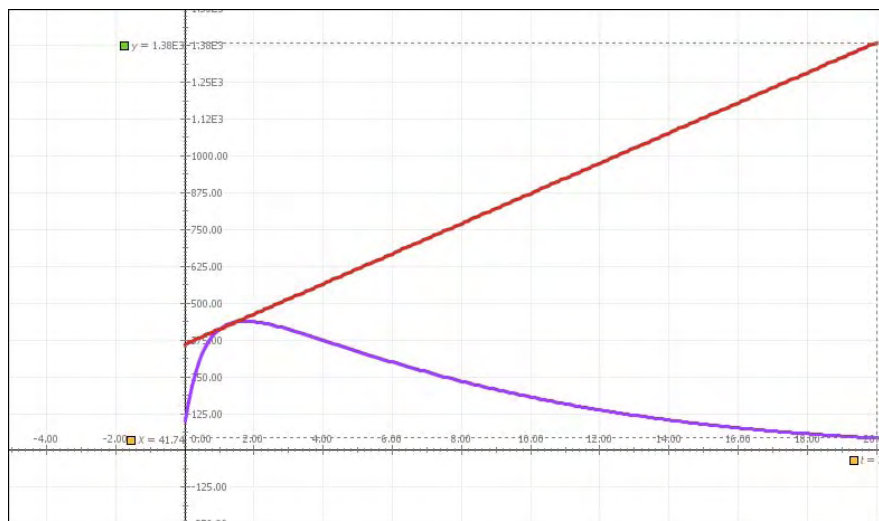


Figura 22 - Gráfico de $X(t)$ (roxo) com reta secante (vermelha) passando pelos pontos $(1, X(1))$ e $(1.5, X(1.5))$.

5.2.7 Atividade 8

O objetivo desta atividade era fazer uma análise dos pontos de máximo e mínimo das funções e relacioná-los com o valor da derivada e a inclinação da reta tangente. Esta atividade não sofreu modificações de um ano para o outro (Atividade 7 em 2011, ver Apêndice 2). É uma atividade mais tranquila, não possui contas, e baseia-se principalmente na observação da inclinação das retas tangentes construídas pelo software com a opção “Tangentes” ativada (Fig.23). A atividade também propõe que os alunos interpretem o significado de um ponto de máximo e de mínimo com relação ao fenômeno biológico. Os alunos não tiveram maiores dificuldades nesta atividade.

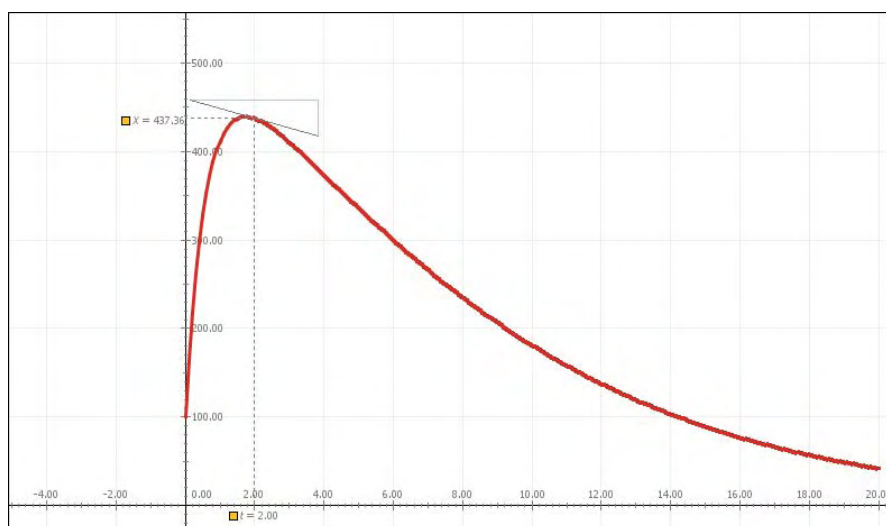


Figura 23 - Gráfico de $X(t)$ com opção "Tangentes" ativada.

5.2.9 Atividade 9

O objetivo da Atividade 9 é que os alunos analisem uma modificação simples no modelo matemático. O parâmetro M , considerado até então constante, foi substituído por uma função do tempo representando uma oscilação na população total de mosquitos ao longo do tempo. Esta oscilação tinha como objetivo simular a variação sazonal da população de mosquitos, de forma simplificada. A atividade sugere que os alunos iniciem analisando o comportamento de $M(t)$ e que depois os alunos variem os parâmetros que acharem pertinentes para analisar as soluções para este caso.

Em princípio, os alunos não mostraram muita dificuldade para analisar o comportamento das soluções, mas eles não foram críticos com relação à função utilizada para M . Deste modo, a atividade em 2011 (Atividade 8, ver Apêndice 2) foi estruturada em duas partes: a primeira pedindo que os alunos analisassem o comportamento apenas da função $M(t)$ e procurassem interpretar seu significado em termos do fenômeno biológico; a segunda parte sugeriu que os alunos analisassem as soluções do modelo modificado (Fig.24), encorajando para que escolhessem os parâmetros que achassem interessantes, avaliassem a plausibilidade do modelo e outras questões que achassem importantes.

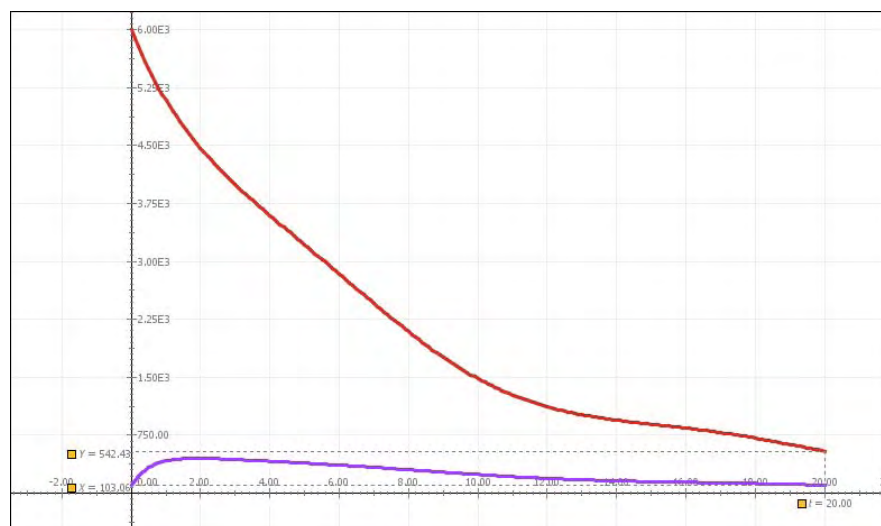


Figura 24 - Gráficos de $X(t)$ e $Y(t)$ com modificação no parâmetro M .

5.2.10 Atividade 10

A Atividade 10 teve como objetivo propor a análise de retratos de fase do modelo de Ross-Macdonald. Esta atividade teve uma versão preparada para 2010, mas que não foi aplicada por falta de tempo. Apesar disso, ela foi reformulada para aplicação em 2011, tornando-se a Atividade 9 (ver Apêndice 2). A versão de 2010 utilizava o software *Winplot*,

ao invés do *Modellus*, e tinha como objetivo a introdução da definição de equações diferenciais ordinárias, por meio da análise dos campos de direções do sistema. Repensando a atividade, ela me pareceu muito confusa e difícil e, portanto para 2011 a reescrevi de uma forma mais simples.

Em 2011, a atividade foi desenvolvida no próprio *Modellus*, e o objetivo principal era que os alunos compreendessem o tipo de gráfico traçado em um plano de fase, identificassem as informações fornecidas, e mudassem novamente um ou outro parâmetro observando o comportamento das soluções no plano de fase (Fig.25). Apesar de não entrar em detalhes sobre definições de ponto fixo, as atividades incentivaram os alunos a analisar o comportamento das trajetórias para valores cada vez maiores de tempo, identificando a existência de um valor limite. Dependendo do valor dos parâmetros este valor poderia ser zero ou outro valor diferente de zero. Os alunos também foram incentivados a comparar as informações fornecidas por esse tipo de gráfico com as informações fornecidas pelos gráficos analisados até então.

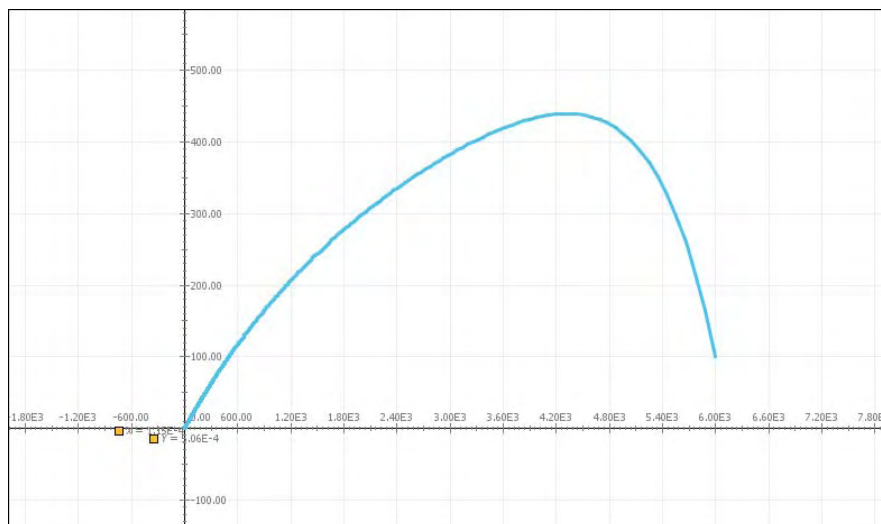


Figura 25 - Exemplo de solução no plano de fase $X \times Y$.

Parte 2: Apresentação e Análise dos Dados

Como comentei na introdução deste capítulo, esta segunda parte tem como foco a apresentação e análise dos dados que se relacionam mais diretamente com a pergunta diretriz desta tese, a saber, *Qual o papel de um software no desenvolvimento de uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos?*

Devido às diferentes fontes de dados, a análise foi realizada de forma vertical, conforme explicitarei no Capítulo 3. Deste modo, esta segunda parte está estruturada em três grandes seções. A primeira seção (5.3) dedica-se à análise das 8 entrevistas realizadas com alunos voluntários; a segunda seção (5.4) tem como foco a análise de trechos dos diálogos estabelecidos entre os alunos extraídos dos vídeos gerados pelo *Camtasia*. Dados provenientes dos relatórios elaborados pelos alunos, das respostas à questão extra da primeira prova⁷⁴, dos vídeos gerados pela câmera externa e do caderno de campo irão porventura aparecer entremeados aos dados supracitados, respeitando-se o tipo de dado (percepção dos alunos ou observação da pesquisadora)

Cada uma das seções 5.3 e 5.4 estão estruturadas a partir dos temas que emergiram da análise dos dados. O leitor irá perceber que a análise de cada um dos tipos de dados isoladamente muitas vezes gera outros questionamentos que os dados não dão conta. Deste modo, fica evidente a necessidade de realizar a triangulação das fontes de dados e, por isso, a análise dos dados de observação, apresentada na seção 5.4, já leva em consideração os questionamentos que emergiram da análise das entrevistas. A terceira e última seção (5.5) se dedica à articulação entre os temas emergentes da análise de cada um dos tipos de dados e também procura sumarizar as principais ideias debatidas com o intuito de formular um raciocínio que possa esclarecer diferentes aspectos da pergunta diretriz.

A formatação dos textos provenientes dos dados segue o mesmo padrão apresentado na introdução do capítulo. Além disso, a pessoa referida como Débora possui dois papéis: a de professora e de pesquisadora. Nas entrevistas o papel de pesquisadora é mais proeminente e, portanto, será referenciada deste modo, em geral em primeira pessoa. Já nas transcrições

⁷⁴ O professor da disciplina tem o costume de colocar duas ou três questões extras na prova, para que o aluno responda se quiser. Estas questões abordam temas gerais, muitas vezes relacionados ao ensino universitários ou à biologia. O intuito do professor é dar espaço para que os alunos expressem suas opiniões sobre temas de interesse geral. Na primeira prova da disciplina, o professor colocou a seguinte questão extra à qual me refiro: “O que você aprendeu na disciplina Matemática Aplicada sobre Malária?”. Apenas cinco alunos responderam esta questão.

dos vídeos, Débora será referida como professora e, portanto, em terceira pessoa, para que sua atuação durante as aulas possa ser avaliada e analisada com mais critério.

5.3 Apresentação e Análise dos Dados Provenientes das Entrevistas

5.3.1 Tema 1: O software como um fornecedor de resultados sobre o fenômeno biológico

Alguns alunos, durante a entrevista, referenciaram o software como uma fonte de resultados sobre o fenômeno biológico que estavam analisando. Por exemplo, o trecho a seguir foi extraído de um dos relatórios da dupla Kauã e Priscilla: "Cada dupla utilizou um computador e o programa Modellus para montar um gráfico e uma tabela pro problema matemático. O programa é simples e fácil de usar, além de ser uma ótima ferramenta para auxílio no ensino" (Trecho do relatório da Atividade 3, Kauã e Priscilla). Este trecho foi utilizado na entrevista com a dupla como disparador sobre uma conversa a respeito do trabalho com o software na disciplina. Como parte de sua resposta, Kauã fez o seguinte comentário:

Kauã: E é mais fácil de você questionar, aí também, porque... [Priscilla: É...] você olha uma fórmula não te diz nada. Pra mim não diz, sabe? [Débora: Uhum.] Aí quando você vai ver o... tipo, você vai ver, coloca no Modellus e... ele te dá um... tem uma coisa pra olhar que você pode parar e vamos analisar. Porque analisar é mais, também, é mais divertido, digamos assim do que analisar uma fórmula.
(Trecho da entrevista, Kauã e Priscilla, 01/07/2011).

Nesta fala, Kauã tenta explicar que é possível inserir algumas informações no *Modellus* e, em seguida, obter um produto fornecido pelo software e que é passível de análise. Este produto contém informações sobre o modelo matemático estudado e, por conseguinte, sobre o fenômeno biológico. Os alunos Dayane e Daniel caracterizam o produto fornecido pelo software como sendo a representação gráfica das soluções do modelo, em suas falas na entrevista. Por exemplo, em resposta ao debate iniciado na entrevista a partir do seguinte trecho de um dos relatórios da dupla: "A possibilidade de mudar variáveis, o tempo, analisar a variação da função e a respectiva gráfica com a utilização de animações para a construção do gráfico é muito importante e facilita o reforço no aprendizado" (Trecho do relatório da Atividade 3, Dayane e Natália), Dayane fez o seguinte comentário:

Dayane: É... é que a gente lançou aquela fórmula enorme [Débora: É.] e lançou... e formou um gráfico!

Débora: Um monte de números lá... [risos]

Dayane: É, e formou um gráfico. Nossa, simplesmente ele fez tudo sozinho e a gente consegue ter... depois teve que fazer as análises do gráfico, interpretar o que que foi que aconteceu... [Débora: Uhum.] eu achei interessante isso, porque eu... porque eu nunca tinha trabalhado diretamente com um programa assim... [Natália: Eu também não...] de geração de gráficos... A não ser o Excel, básico assim, mas nada tão... [Natália: Complexo...] tão específico, assim... (Trecho da entrevista, Dayane e Natália, 01/07/2011).

Dayane afirma que, a partir da inserção do modelo matemático (“aquela fórmula enorme”) no software, eles obtêm um gráfico, e inclusive o classifica como um programa de “geração de gráficos”. Em sua fala é possível identificar dois aspectos relevantes. O primeiro está relacionado com o fato de ela notar que o software “fez tudo sozinho”. Ou seja, os alunos inseriram o modelo no software, configuraram suas variáveis, seus parâmetros e suas condições iniciais, e obtiveram uma informação gráfica a partir daí. Os processos utilizados pelo software para a geração dos gráficos são desconhecidos pelos alunos. O segundo aspecto é o seguinte: apesar de o *Modellus* fazer tudo sozinho e fornecer um resultado, fica claro na fala de Dayane a necessidade de interpretar os gráficos para compreender a informação fornecida sobre o modelo.

Outra dupla que fez referência ao software como um fornecedor de resultados foi Franciele e Paula. Elas escreveram o seguinte comentário no relatório da primeira atividade:

Nessa aula tivemos o primeiro contato com o *Modellus*, **um software capaz de realizar operações e concretizar os modelos matemáticos**. Ficamos muito satisfeitas com as possibilidades que o software oferece. **Aparentemente ele parece ter potencial de facilitar o trabalho de profissionais que não têm em sua formação um estudo aprofundado de Matemática, como nós biólogos por exemplo, mas que utilizam a Matemática como ferramenta para a análise de dados pertinentes a seus projetos e realizações.** (Trecho do relatório da Atividade 1, Franciele e Paula).

Este trecho serviu como disparador, na entrevista, para um debate sobre o trabalho com o software durante a disciplina. Em resposta, as alunas comentaram o seguinte:

Paula: Porque assim, ó, por exemplo, o software a gente pega os dados, vai lá, joga, ele faz os cálculos e dá os resultados. Se a gente tivesse que fazer estes cálculos na mão, seria muito mais difícil, porque a gente não tem conhecimento Matemático para chegar e colocar lá e fazer por exemplo o cálculo... pra equação que a gente tinha lá do... da... de variação, delta y por delta x, da malária. Tudo bem que depois que você tá com a equação pronta, né, que você já deu pra gente, a gente colocou, beleza, né? Mas, acho que teria muita dificuldade de fazer sem um software, sem, sem ter um... modelo. Sei lá, se tivesse que fazer na minha cabeça e desenvolver aquilo... sem nada pra me ajudar...

Franciele: Mas na verdade, na verdade pra construir o modelo você não utiliza aquilo lá, né? Você vai colocar lá pra ver o resultado, como que vai...vai ter a taxa de variação, né?

Mas na verdade o modelo você tem que estudar e sentar acho que com um matemático mesmo [Paula: Eu sei, mas ela...] pra ele te ajudar a construir o modelo né?

*Paula: **Você deu um modelo pronto pra gente, só que a gente colocava as variáveis e ele já tipo dava os gráficos, por exemplo.***

Débora: Certo.

Paula: Eu tenho dificuldade de montar gráfico. Se eu tivesse que olhar aquilo lá e montar um gráfico sozinha, não sei se eu conseguiria assim tão bem... Agora que a gente fez a matéria tudo bem, que agora eu... aprendi a... fazer gráfico e tal, mas antes... acho que não. Não faria sozinha, to sendo sincera porque... Matemática pra mim...

[...]

*Paula: Então, aí te ajuda [o software]! Por exemplo, a gente tem um conhecimento básico de Matemática. **Agora se for pra fazer alguma coisa mais avançada aí ele já faz assim, né? A gente põe as variáveis e tem o resultado.** Acho que é isso.*

(Trecho da entrevista, Franciele e Paula, 01/06/2011).

Tanto na fala das alunas como no trecho do relatório, é possível perceber um encaminhamento semelhante ao de Dayane: o software faz os procedimentos de análise qualitativa do sistema de EDO “sozinho”, e fornece os resultados. A fala de Franciele (“Mas na verdade, na verdade pra construir o modelo você não utiliza aquilo lá, né? Você vai colocar lá pra ver o resultado, como que vai...vai ter a taxa de variação, né?”) ainda ressalta que o software não é usado para o desenvolvimento do modelo matemático, apenas para fornecer resultados sobre ele. Além disso, elas trazem outro viés, ressaltando o caráter ferramental da Matemática para a Biologia, e a possibilidade do software facilitar o trabalho de profissionais não especializados em Matemática.

Outro aspecto interessante que aparece na entrevista, principalmente na fala de Paula, é o “pensar com o software”. Quando a aluna afirma que teria dificuldades para elaborar gráficos sozinha ou que seria muito mais difícil realizar os cálculos à mão, ela reconhece a influência da tecnologia na atividade que desenvolve, na medida em que ela percebe que o software desenvolve certas tarefas que permitem que ela foque seu trabalho na análise dos gráficos, e não em sua construção ou elaboração de cálculos.

Apesar destas possibilidades, a fala de Paula a seguir levanta uma questão que é, no mínimo, intrigante:

Eu tenho dificuldade de montar gráfico. Se eu tivesse que olhar aquilo lá e montar um gráfico sozinha, não sei se eu conseguiria assim tão bem... Agora que a gente fez a matéria tudo bem, que agora eu... aprendi a... fazer gráfico e tal, mas antes... acho que não. Não faria sozinha, to sendo sincera porque... Matemática pra mim... (Trecho da entrevista, Paula e Franciele, 01/06/2011).

É possível notar em sua fala que a aluna acredita que os conteúdos trabalhados ao longo da disciplina são suficientes para que ela construa os gráficos das soluções de sistemas

de EDO como o que foi analisado durante o semestre. A questão que emerge é: Até que ponto o software “fazer tudo sozinho” não mascarou a real dificuldade do que foi trabalhado? De que modo essa dificuldade poderia ter sido explicitada?

Os trechos apresentados até aqui colocam dois pontos principais relacionados ao software como um fornecedor de resultados, e que de certa forma parecem exprimir duas ações complementares: i) o software faz tudo sozinho; ii) é preciso interpretar os resultados fornecidos pelo software. No que segue irei discutir cada um destes pontos, relacionando a cada um deles outras ideias que permearam os dados apresentados acima e também analisando as possibilidades e limitações que a experimentação e a visualização podem agregar a cada um deles.

As questões propostas a partir da fala de Paula também são genuínas e dignas de serem analisadas. A confiança da aluna com relação ao que aprendeu é simultaneamente surpreendente e preocupante. Entretanto, não existem outras evidências, nem em sua fala e nem na fala de outros colegas, que nos forneçam indícios sobre estas questões, de modo que seria necessária uma nova construção de dados para discuti-la com mais propriedade.

5.3.1.1 O software “faz tudo sozinho”

A ideia de que o software “faz tudo sozinho” está relacionada, de certo modo, à percepção dos alunos sobre a noção de que é possível ter contato com as soluções do modelo matemático sem necessitar aprender as técnicas de análise qualitativa do sistema de EDO, que são matematicamente avançadas para eles. Este fato traz poder à Análise de Modelos, na medida em que permite que modelos de fenômenos autênticos (KAISER et al., 2011) sejam foco de análise mais cedo na carreira escolar. Neste sentido, conforme afirmam Ainley et al. (2006, p.33-34, tradução nossa, ênfase do autor),

Designs pedagógicos baseados no framework do propósito e utilidade⁷⁵, com o suporte da tecnologia, invertem a tradição pedagógica da matemática escolar colocando a ênfase primariamente nas utilidades da nova ideia

⁷⁵ Ainley et al. (2006) definem *intenção (purpose)* como a percepção dos alunos sobre o modo como a matemática é utilizada fora do contexto de sala de aula. Deste modo, uma atividade intencional é aquela que possui um resultado (a solução de um problema, por exemplo) significativo para o aluno. Já *utilidade (utility)* é definida como a construção de significado para os modos como os procedimentos e conceitos matemáticos são úteis. A abordagem pedagógica desenvolvida nesta tese não foi elaborada com base neste paradigma, entretanto é possível estabelecer algumas relações entre ambos, tendo em vista que um dos motivos para o seu desenvolvimento foi fornecer aos estudantes a oportunidade de refletir sobre a utilidade da Matemática em sua área de interesse. Além disso, propôs aos estudantes analisar um modelo matemático para um fenômeno biológico, uma situação familiar para eles e cujos resultados obtidos seriam significativos.

matemática. [...]

Esta inversão é largamente possível (embora não exclusivamente) pelo poder da tecnologia em oferecer oportunidades para *usar* a ideia matemática antes de você aprender sobre seus procedimentos e relações⁷⁶”.

O fato de o software “fazer tudo sozinho”, fornecendo resultados sobre o fenômeno e sobre o modelo matemático, poderia ser interpretado como uma percepção não positiva por parte dos alunos, uma vez que isso poderia significar que eles se sentiram inativos durante o trabalho. Entretanto, o modo como os alunos que tocaram nesta questão falaram a respeito disto não transparece este sentimento. O comentário de Edgar, por exemplo, transmite uma ideia de que o software foi muito importante para o trabalho:

Débora: E como foi pra ti, ou pra vocês em geral, enfim, utilizar o software que a gente trabalhou, o Modellus?

Edgar: Ah, é... achei que, assim... um, uma mão na roda [faz gestos com a mão de entre aspas], né? Porque... é... ele constrói os gráficos, né? E assim, a gente tava aprendendo muito disso... [Débora: Uhum] Se não fosse ele a gente não teria a visualização de gráfico, a gente não ia conseguir fazer os gráficos.

(Trecho da entrevista, Edgar, 02/08/2011)

Já Paula e Franciele conectaram a ideia de o software fornecer resultados sobre o modelo e o fenômeno com uma possível utilidade do software para o trabalho de profissionais de outras áreas que não a Matemática. Como apresentado no trecho do relatório feito pela dupla sobre a primeira atividade, a Matemática pode ser entendida como uma ferramenta para áreas como a Biologia, pois pode ser utilizada para a compreensão de fenômenos biológicos. Assim, acessar as informações dadas pelas aproximações matemáticas para os fenômenos torna-se uma necessidade.

Conforme afirma Bassanezi (2009), os fenômenos biológicos são bastante complexos e envolvem parâmetros aleatórios. Uma variedade de conceitos matemáticos pode ser utilizada para a elaboração de modelos para estes fenômenos, muitas vezes conceitos avançados. Extrapolando para uma situação mais geral, software específicos que permitam a simulação dos modelos matemáticos fornecendo suas soluções em representações mais ou menos familiares para os usuários, podem “facilitar” o trabalho de biólogos.

No caso da transmissão da malária, o modelo apresentado aos alunos é mais determinista, pois seus parâmetros não são considerados aleatórios, e, apesar de o software

⁷⁶ “Pedagogic design based on the framework of purpose and utility, with the support of technology, inverts the pedagogic tradition of school mathematics by placing the emphasis primarily on the utilities of a new mathematical idea. [...]

This inversion is made possible largely (though not exclusively) by the power of technology to offer opportunities for *using* a mathematical idea before you learn about its procedures and relationships”.

utilizado não ser específico para a Biologia, ele permite o trabalho com modelos envolvendo sistemas de EDO. A ideia de que este software “facilita” o trabalho dos biólogos significa, do meu ponto de vista, que ele permite que estes profissionais façam inferências sobre a evolução do fenômeno em questão sem propriamente aprender a solucionar o modelo ou então o conteúdo matemático relacionado. É claro que ter os resultados em mãos não garante um aprendizado sobre o fenômeno. É preciso analisar estes resultados, interpretá-los, como os próprios alunos afirmaram. Neste sentido, mais do que facilitar o trabalho, o software é um ator neste processo, de modo que o considero mais como um colaborador. Voltarei a esta discussão mais adiante.

O que talvez seja interessante neste aspecto é que o software, fornecendo resultados sobre um fenômeno biológico, pode ser entendido como um *meio de aproximar a Matemática destes profissionais*, em particular dos alunos de Biologia, que frequentemente têm rejeição a esta disciplina. O testemunho das alunas Dayane e Natália traz uma dimensão da visão dos alunos sobre a aproximação entre as duas disciplinas:

Dayane: [...] E eu gostei por causa que tinha esse vínculo, né, com a Biologia, que é... o que eu gosto mesmo, [Débora: Uhum...] com a parte de Cálculo. Então a parte de... a parte... ficava fácil a interpretação assim. Mesmo nos gráficos, aqueles... aqueles modelos imensos, cheio dos números, cheio das fórmulas, mas... por causa do contexto geral que a gente tinha [Natália: Dava pra entender...] dava pra entender. Tipo, é... você sabe o que que é... o que que é um vetor [mosquito]...

Natália: Faz sentido, na verdade, [Dayane: Isso...] porque o Cálculo em si não faz sentido, né? [Dayane: É] [risos] Mas se você coloca alguma coisa da Biologia, daí faz sentido.
(Trecho de entrevista, Dayane e Natália, 01/07/2011).

Ou seja, analisar um modelo matemático para um fenômeno biológico permitiu que a Matemática se aproximasse da área que elas gostam, “emprestando” para os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral I um sentido que não era percebido por elas até então (SOARES; BORBA, 2012). Na medida em que representações matemáticas, que são consideradas pelos alunos passíveis de análise, são apresentadas para eles em relação a um fenômeno de sua área, a Matemática ganha outro status. No caso desta abordagem pedagógica, isto foi feito por meio do trabalho com o software, daí a possibilidade de compreendê-lo como um meio de aproximar as duas disciplinas.

Entretanto, do meu ponto de vista, apenas apresentar estas representações não é o que torna o software realmente um colaborador do trabalho do biólogo. Se assim fosse, representações impressas no papel teriam o mesmo efeito. O que me parece ter o potencial para isso é o fato de o software permitir que os alunos manipulem os parâmetros e visualizem

os efeitos desta manipulação no comportamento das soluções do modelo. Eles mesmos comentam sobre isso. Por exemplo, na entrevista, em resposta ao debate iniciado a partir do seguinte trecho do relatório da Atividade 3, já transcrito anteriormente, “A possibilidade de mudar variáveis, o tempo, analisar a variação da função e a respectiva gráfica com a utilização de animações para a construção do gráfico é muito importante e facilita o reforço no aprendizado” (Trecho do relatório da Atividade 3, Dayane e Natália), Dayane faz a seguinte fala:

Dayane: Então, quando a gente ficou fazendo as mudanças lá, via o gráfico mudar, se transformar, mexer, por... mexer em detalhes, mesmo, as variáveis assim... você vê que.. que... é que na verdade a malária acontece naturalmente, mas a gente tava manipulando ali os dados, né? [Débora: Uhum.] Mas você vê que qualquer alteração que, que você possa ter naturalmente assim no... na doença, assim, você poderia ter outro resultado, ter outra resposta. Então eu achei legal isso que o... que o tutorial [o software] tem a capacidade de fazer. Tipo, a gente conseguia visualizar, quais hipóteses possíveis poderiam ter conforme fosse a infecção assim... Ah, se mudasse... a taxa de... a probabilidade de infecção, se mudasse isso, mudasse aquilo [Débora: Uhum.] a gente conseguia visualizar.
(Trecho da entrevista, Dayane e Natália, 01/07/2011).

Renato, ao ser questionado na entrevista sobre como havia sido o trabalho com o software, apresentou uma resposta que parece complementar a de Dayane:

Renato: Eu acho que o software permite que a gente, a gente veja, faça é... acompanhe todos os fatores que a gente vai colocar lá no... no modelo... a gente muda um fator, a gente vê o que acontece, ele permite que faça vários gráficos, né, com o mesmo... com o mesmo... [Natalia: Modelo, né?] É, o mesmo... X ou Y, né? Aí você vê a diferença, você muda um fator lá que influencia e aí você consegue ver a diferença, bem claro assim...
(Trecho da entrevista, Renato e Natalia, 25/05/2011).

Dayane e Renato indicam em suas falas a possibilidade de mudar os parâmetros do modelo e ver as mudanças geradas nos gráficos das soluções. Mudar os parâmetros significa mudar as condições nas quais o fenômeno se desenvolve, uma vez que os parâmetros estão relacionados com as características dos mosquitos e das pessoas com relação à malária. Conforme os alunos variam os valores dos parâmetros, é como se testassem diferentes hipóteses quanto aos diferentes fatores que influenciam o fenômeno e que foram escolhidos para a elaboração do modelo matemático. É como se estivessem realizando uma pesquisa de campo em diferentes regiões com condições diferenciadas, mas sem propriamente trabalhar de perto com os mosquitos e as pessoas. Neste sentido, a manipulação dos parâmetros permite a elaboração de vários “experimentos digitais”, que podem esclarecer o modo como a doença pode evoluir em uma determinada região em diferentes condições.

A possibilidade de experimentar ao se trabalhar com softwares computacionais é um aspecto discutido por vários autores na área de Educação Matemática desde o início das reflexões sobre o uso de tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática. Já em 1985, no primeiro ICMI Study, é possível encontrar referência à experimentação em alguns dos artigos publicados. Em particular, Murakami (1988) elenca a possibilidade de trabalho com a exploração da Matemática como uma das mudanças no ensino da Matemática geradas pelo uso de computadores.

Segundo Benedetti (2003), a experimentação no sentido pedagógico apresenta-se relacionada com a elaboração, teste e validação de conjecturas, com a utilização de estratégias de tentativa e erro, com o levantamento de hipóteses e com outras observações que podem emergir a partir do trabalho com atividades exploratórias realizadas com softwares gráficos. Por exemplo, Villarreal (1999), utilizando o software *Derive*; Laborde (2001), utilizando o *Cabri*; e Drijvers e Doorman (1996), utilizando calculadoras gráficas, ressaltam as possibilidades de exploração matemática fornecidas pelas diferentes tecnologias utilizadas e as relacionam com a elaboração e análise de conjecturas pelos estudantes.

Borba e Villarreal (2005) trazem uma série de exemplos relacionados a pesquisas realizadas por membros do GPIMEM em que a experimentação foi utilizada como estratégia pedagógica. Os exemplos estão relacionados com o estudo de parábolas, de seções cônicas, de funções polinomiais do tipo $y=ax^n$, com a construção do gráfico de derivadas a partir do gráfico da função, e com a análise de uma reta tangente a um gráfico. Nestes exemplos, fica evidente a relação entre experimentação e visualização, tendo em vista que os alunos baseiam-se nos feedbacks visuais fornecidos pelos software para elaborar suas conjecturas e hipóteses. Também é possível notar pelos exemplos que a experimentação está intimamente relacionada com os diferentes recursos oferecidos pelas tecnologias utilizadas: a possibilidade de construção rápida de vários gráficos, opções de *zoom*, uso de barras de rolagem para movimentação da janela de visualização dos gráficos e sensores de movimento. Os autores utilizam a expressão experimental-com-tecnologias para definir abordagens pedagógicas nas quais os alunos têm a oportunidade de trabalhar com o computador em um ambiente onde gerem conjecturas, coordenem múltiplas representações, elaborem “demonstrações” e estratégias de “tentativa e erro”.

Nas pesquisas mencionadas anteriormente, a experimentação está diretamente relacionada com a elaboração de conceitos matemáticos pelos alunos. Eles exploram funções e objetos geométricos com o intuito de analisar suas propriedades e estabelecer relações que são muitas vezes apresentadas em teoremas. No caso da abordagem pedagógica descrita nesta

tese, os alunos também exploram funções, mas de uma forma “indireta”. Eles não modificam os parâmetros da expressão analítica das funções para analisar seu efeito no gráfico, mas eles modificam os parâmetros do modelo matemático, que influem no comportamento das funções, suas soluções. Como mencionei anteriormente, a mudança nos parâmetros está mais diretamente relacionada ao estabelecimento das condições nas quais a malária é transmitida, o que nos remete à noção de experimento científico.

Borba e Villarreal (2005) fazem um levantamento sobre algumas definições para “experimento” antes de iniciar uma discussão sobre experimentação e tecnologias. As definições elencadas pelos autores estão em geral relacionadas com experimentos científicos, realizados em laboratório, onde se busca a comprovação de alguma hipótese por meio de procedimentos de teste, onde uma ou mais variáveis são mantidas sob controle. Essa noção de experimento está intimamente relacionada a pesquisas nas áreas da Física, Química e Biologia.

No trabalho desenvolvido pelos alunos com as atividades da abordagem pedagógica, o teste de valores diferenciados para os parâmetros do modelo matemático e a análise de seus efeitos nas soluções pode ser entendido como uma versão digital de um experimento científico. Como este tipo de análise permeou várias das atividades, “experimentação” como um “experimento” é a noção que parece emergir mais fortemente do trabalho dos alunos.

Assim, é por meio de experimentos digitais que os alunos trabalham, por exemplo, as transformações nos gráficos das funções, de uma forma “indireta”. Este fato está também relacionado com o tipo de objeto matemático estudado pelos alunos. Um trabalho mais próximo do que o que foi relatado pelos autores supracitados só poderia ser realizado se os alunos tivessem acesso à expressão analítica das soluções do modelo matemático, o que de fato não ocorreu (e não por uma limitação do software, mas pelo simples fato de que encontrar representações analíticas para as soluções de um sistema de EDO é algo muito difícil, como já mencionei no Capítulo 2).

Por outro lado um viés de experimentação mais próximo do próprio trabalho dos biólogos pôde ser construído em um ambiente de aprendizagem de Matemática por meio da análise do modelo matemático com o uso do software. O modelo matemático, tomado como uma representação do fenômeno biológico e considerado em suas potencialidades e limitações, pode ser analisado por meio do trabalho com o software, com o teste de hipóteses e variações de condições (parâmetros) do fenômeno biológico, de modo que o software pode ser pensado como um *laboratório digital*.

Neste sentido, o fornecimento de resultados sobre o fenômeno e o modelo ocorre por

meio de um processo onde o software se torna um laboratório onde se realizam experimentos digitais de forma semelhante aos experimentos realizados em laboratórios científicos. Neste contexto, a experimentação ou exploração matemática ganha uma dimensão diferente daquelas até então mais discutidas em Educação Matemática.

5.3.1.2 *Necessidade de interpretar*

Embora os estudantes tenham afirmado que o software faz tudo sozinho, Dayane chamou a atenção explicitamente para a necessidade de interpretar os resultados fornecidos pelo software para que eles pudessem compreender as situações em foco. Keteryne e Sibeli também mencionaram a necessidade de interpretar durante sua entrevista, porém não como uma atitude espontânea por parte dos alunos, mas em parte direcionada pelas atividades propostas pela professora.

*Keteryne: É, não é também um monte de dados que tão jogados ali [Sibeli: É...], né? Tipo ah, você fala assim ah acontece isso e isso... É, eu acho que, é... quando a gente pode ver é... como que aquilo é... [Sibeli: Acontece...] como que aquilo acontece... é bem... a gente... assimila bem melhor, né? Daí se você tipo falar assim, olha gente, se a gente fizer isso aqui e você colocasse lá a formulinha [Sibeli: Na lousa assim e fizesse o gráfico aproximado, seria assim, eu acho que...] se você colocasse tipo só a fórmula com os dados, ó se eu colocar estes dados aqui a população vai crescer ou vai decrescer... **Eu acho que a gente vendo o gráfico a gente entende muito melhor. Que foi o que você per... é, que você perguntava, né, que que a gente consegue [Sibeli: O que que tá acontecendo com o gráfico...] é, o que que tá acontecendo? O que que vocês conseguem interpretar disso?** (Trecho da Entrevista, Keteryne e Sibeli, 25/05/2011).*

A interpretação foi, de fato, um elemento bastante marcante nas atividades desenvolvidas. Frequentemente aparecem questões dirigindo o pensamento dos alunos para uma reflexão sobre a relação entre os resultados que encontraram com o fenômeno biológico e, quando possível, elencando possíveis explicações biológicas para os comportamentos e resultados obtidos. Esta demanda com certeza esteve relacionada com uma das motivações para o desenvolvimento desta abordagem: auxiliar os alunos a aproximarem Matemática e Biologia. Por outro lado, mais do que um aspecto motivacional, interpretar gráficos (e outras representações matemáticas) é, na verdade, uma prática fortemente presente no trabalho diário de cientistas.

Segundo Roth e Bowen (1999, p.238), “gráficos são extremamente úteis para cientistas porque eles (a) constituem as melhores ferramentas para representar covariação entre medidas contínuas (Lemke, 1998) e (b) são úteis para resumir grandes quantidades de dados de forma econômica (Latour, 1987)”. Neste sentido, gráficos fazem parte do trabalho

diário de cientistas de diferentes áreas, incluindo biólogos, de modo que as atividades propostas aos alunos tiveram como um de seus focos justamente o desenvolvimento desta prática. Aparentemente interpretar um gráfico parece uma tarefa simples, entretanto várias pesquisas já reportaram sobre dificuldades importantes para este tipo de trabalho.

Roth (2003) afirma que a maioria das pesquisas sobre gráficos discutem dimensões psicológicas do conhecimento, aprendizagem e uso dos gráficos. Estas pesquisas, em geral, focam nas dificuldades que os alunos apresentam, e atribuem às interpretações diferentes da interpretação padrão o entendimento de que existe um déficit cognitivo por parte do aluno. Esta perspectiva de certa forma admite que existam aspectos inerentes aos gráficos e que estão ali para serem inferidos pelas pessoas. A pesquisa de Roth, entretanto, o colocou em uma posição de questionamento sobre esta perspectiva, na medida em que percebeu que cientistas com anos de experiência e formação acadêmica muitas vezes cometem erros ao interpretar gráficos que são usualmente trabalhados e feitos por estudantes. Afirmar que estes cientistas têm déficits cognitivos não parecia algo produtivo.

Com base neste conflito, Roth entende que gráficos e seus referentes existem como uma função de experiências históricas e culturais do indivíduo, de modo que sua interpretação é um processo que está relacionado com a comunidade de matemáticos, um processo consensual. Neste sentido, as interpretações que surgem em um determinado contexto podem ser diferentes daquelas que foram acordadas pela comunidade matemática, mas isto não caracteriza o autor desta interpretação como possuindo um déficit cognitivo. Eu concordo com Roth e, portanto, também assumo nesta tese a mesma concepção com relação aos gráficos.

Mas, voltando aos dados apresentados anteriormente, apesar de as alunas reconhecerem esta necessidade de interpretar, elas não falam muito sobre os processos envolvidos nesta tarefa. Desta forma, algumas questões emergem: Quais os processos subjacentes à investigação dos gráficos desenvolvidos pelos alunos durante o trabalho com as atividades propostas? Em que medida os estudantes conseguiram realizar esta interpretação? Quais dificuldades apresentaram? Como o software participou desses processos? Uma análise das outras fontes de dados desta pesquisa será necessária para buscar algumas indicações que possam esclarecer estas perguntas. No momento, entretanto, permanecerei com a atenção voltada às falas dos alunos nas entrevistas, em particular à fala de Kauã que levantou um aspecto interessante que pode ser relacionado com o processo de interpretação dos resultados fornecidos pelo software de um modo mais geral.

Em algum momento da entrevista com Kauã e Priscilla, apresentei para eles o seguinte

trecho de um dos relatórios que elaboraram: "Cada dupla utilizou um computador e o programa Modellus para montar um gráfico e uma tabela pro problema matemático. O programa é simples e fácil de usar, além de ser uma ótima ferramenta para auxílio no ensino" (Trecho do relatório da Atividade 3). Ele já foi citado na introdução desta seção e, como mencionado na ocasião, foi utilizado na entrevista como disparador para o debate sobre o software. Quando questionados para comentar sobre esse trecho, os alunos responderam:

Kauã: Ah, eu achei o Modellus, o Modellus muito bom, na verdade. [risos] Eu fiquei brincando com ele lá em casa um tempo... [Débora: Ahã] E, tipo, é bom porque... é muito difícil às vezes você visualizar as coisas sem ver o gráfico, e muito menos o desenvolvimento, e... montar também às vezes é impossível, né? [Débora: Uhum.] E eu acho que isso, é muito mais fácil de analisar daí do que... simplesmente ter uma fórmula lá...

Priscilla: É, você fazendo você aprende bem mais, né, então... você acho que abre mais a mente, assim, não sei... [Kauã: É mais fácil...] pra ter uma ideia de como funciona assim as coisas. [Débora: Uhum.]

Kauã: E é mais fácil de você questionar, aí também, porque... [Priscilla: É...] você olha uma fórmula não te diz nada. Pra mim não diz, sabe? [Débora: Uhum.] Aí quando você vai ver o... tipo, você vai ver, coloca no Modellus e... ele te dá um... tem uma coisa pra olhar que você pode parar e vamos analisar. Porque analisar é mais, também, é mais divertido, digamos assim do que analisar uma fórmula. [Priscilla: É verdade...] E... sei lá, e... [risos] ele é bonitinho, colorido... [risos] [P: É verdade, é por aí, bem...] se move, isso ajuda mesmo, é bem... didático.

Priscilla: Bem didático, mesmo. Bem legal mesmo.

(Trecho da entrevista, Kauã e Priscilla, 01/07/2011).

A fala de Kauã caracteriza de formas qualitativamente diferentes a possibilidade de análise de uma fórmula e de um gráfico ou uma tabela. Enquanto a fórmula se configura como algo misterioso, o gráfico e a tabela são elementos fornecidos pelo software e que são passíveis de análise, eles dizem algo ao aluno. Entretanto, apesar desta aparente clareza do gráfico e da tabela para representar informações, as considerações feitas por Roth supracitadas chamam a atenção para as dificuldades que podem ser encontradas nesta atividade.

No caso das atividades propostas nesta tese, a interpretação dos gráficos não pode ser considerada como algo trivial, ainda mais que as informações fornecidas pelo modelo matemático e pelas soluções são de natureza diferente (variação e quantidade, respectivamente). Ao mesmo tempo, é importante que elas possam ser acessíveis aos alunos de algum modo, pois caso contrário nenhum progresso no entendimento do modelo poderá ser alcançado.

Como afirmam Klymchuk et al. (2001), a análise e interpretação das soluções está relacionada com uma das competências de modelagem apresentadas por Kaiser (2007, apud Klymchuk et al., 2001), a saber, relacionar os dados matemáticos obtidos com a situação real e interpretá-los neste contexto. Deste modo, uma competência que é importante no ciclo de modelagem, pôde ser trabalhada com os alunos por meio das atividades propostas nesta tese. Até onde os alunos conseguiram desenvolvê-la e o papel do software neste processo, entretanto, só será possível de identificar por meio da análise dos vídeos.

5.3.2 Tema 2: O software contribuindo para a compreensão de conceitos matemáticos

Este segundo tema, o software contribuindo para a compreensão de conceitos matemáticos, emergiu a partir da análise e interpretação das “falas orais e escritas” de alguns alunos. Novamente retomarei os excertos dos relatórios da Atividade 3 elaborados pelas duplas Dayane e Natália, e Kauã e Priscilla. Na seção anterior os apresentei conectados à entrevista, como disparadores para um debate sobre o software. Agora foco mais especificamente no texto escrito:

Cada dupla utilizou um computador e o programa Modellus para montar um gráfico e uma tabela pro problema matemático. **O programa é simples e fácil de usar, além de ser uma ótima ferramenta para o auxílio no ensino.** (Trecho de relatório, Atividade 3, Kauã e Priscilla).

O programa usado em aula, o tutorial do Modellus pra se construir gráficos nos interessou muito, permitiu um ensino muito grande fazendo com que entendamos os gráficos a partir do modelo matemático proposto. A possibilidade de mudar variáveis, o tempo, analisar a variação da função e a respectiva gráfica com a utilização de animações para a construção do gráfico é muito importante e facilita o reforço no aprendizado (Trecho de relatório, Atividade 3, Dayane e Natália).

Kauã e Priscilla comentam que o software é uma “ótima ferramenta para o auxílio no ensino” e Dayane e Natália afirmam que o software “permitiu um ensino muito grande”. As alunas acrescentam, ainda, que as diversas possibilidades oferecidas pelo software “facilita[m] o reforço no aprendizado”. Como compreender/interpretar essas afirmações? Ao responder na entrevista o convite de falar um pouco mais sobre o que escreveram, é possível perceber que cada um dos alunos focou um aspecto diferente: enquanto Kauã discursou mais sobre a importância do software como um recurso visual, Dayane ressaltou a questão da

manipulação dos parâmetros e da experimentação, ambos de uma maneira geral. Entretanto nenhum deles entrou em detalhes sobre “ensino de que” ou “aprendizado sobre o que”⁷⁷?

Esses questionamentos poderiam ser respondidos de várias formas. Por exemplo, quando eles falam sobre o “ensino”, poderiam estar se referindo ao software como um “auxiliar” mais diretamente relacionado ao professor, considerando-o como o centro das práticas de sala de aula por meio do exercício da função de “ensinar”. Por outro lado, ao falar “ensino” os alunos poderiam estar se referindo ao processo de ensino e aprendizagem que ocorre em sala de aula, aí incluindo o software como um “auxiliar” também para as atividades que os alunos realizam. Neste caso, estariam reconhecendo a importância de sua participação e envolvimento nos processos de ensino e aprendizagem. Com relação ao objeto de ensino ou aprendizagem, poderiam estar se referindo ao modelo matemático, ao conteúdo matemático previsto na ementa da disciplina, ou a uma integração entre ambos.

O leitor poderá ainda perceber outras possibilidades de interpretação das assertivas dos alunos, mas o ponto principal aqui é na verdade levantar o questionamento: se o software participou dos processos de ensino e aprendizagem, isto ocorreu em quais situações e como? A resposta de Franciele a uma questão extra⁷⁸ da primeira prova da disciplina poderia nos dar um indicativo:

Pode-se dizer que a Matemática Aplicada sobre a malária incorporou a parasitologia à Matemática. Além de estarmos aprendendo muito sobre esta patologia, tanto com a professora Débora, por livros, pesquisas e pelo ambiente Tidia-Ae, **o modelo matemático criado, o software, os exercícios e os relatórios foram imprescindíveis para entender e amadurecer o conhecimento adquirido sobre derivada, sem os quais a matéria se tornaria bem mais complexa.** (Trecho da primeira prova, questão extra sobre malária, Franciele).

Franciele apresentou o software como *um* dos elementos fundamentais para compreender o conceito de derivada. Na entrevista que realizei com ela e Paula, utilizei este trecho como disparador para um debate sobre o assunto, pedindo que ela falasse um pouco mais sobre o que escreveu. Meu intuito era compreender porque o software foi considerado um elemento fundamental e de que forma ele exerceu este papel. Seu comentário foi o seguinte:

Franciele: Ah, Débora, é isso! [risos] É, eu achei que... que eu... O que eu acho é que... que foi... assim muito importante. Por exemplo, pra estudar pra prova, eu acabei lendo os

⁷⁷ Note-se que a pesquisadora também não se atentou para questionar os alunos de forma mais direta sobre estes aspectos no momento da entrevista.

⁷⁸ “O que você aprendeu na disciplina Matemática Aplicada sobre Malária?”

relatórios que a gente... que a gente fez pra dar uma revisada, e eu acho que conforme você vai tendo as aulas e vai fazendo, você às vezes não percebe muito o que você está fazendo, né? E depois quando você pega... pega tudo o que você já fez, lê é... pra ver se entende novamente e relembrar, aí você vai linkando as aulas e vendo a importância de cada aula. Igual aquela aula que você deu no sábado eu saí daqui morrendo de raiva, gente, eu não entendi o objetivo dessa aula. Pra mim não muda nada essa aula! Eu vim aqui no sábado, pra mim não fez o menor sentido! E não tinha feito, até aquele momento. Nas duas próximas aulas por aí, pronto, aí eu entendi qual tinha sido a importância da aula, mas pra mim tava... morrendo de raiva ainda...

Débora: A aula tu diz do sábado [Franciele: do sábado...] [Paula: de velocidade média...]

Franciele: Eu falei, Deus, por quê? Por quê?

Paula: Eu sou testemunha, que ela saiu daqui brava. [risos]

Franciele: Nossa, eu saí com muito... saí com raiva assim, por quê? O que que isso vai mudar pra mim? Não mudou nada, não acrescentou nada! Era o que eu tinha achado. [Débora: Sim.]E não é verdade, de fato foi muito importante pra depois a gente entender... porque... é... pra entender o que que a derivada vai dar... que ela vai poder dar a inclinação da reta a cada instante, esse tipo de coisa... e que daí... nas aulas anteriores eu acho que nos relatórios antes a gente escrevia ficava uma coisa meio embolada assim, depois eu relendo os relatórios, gente, o que a gente queria dizer aqui, né? E depois eu acho que foi, foi importante aquela aula, e eu acho que foi muito interessante, pelo tanto que reforçou, aí quando a gente teve isso na prática, e ver o gráfico e interpretar... e falar que a deri... que... o gráfico era crescente, decrescente, que a derivada era positiva, negativa, eu acho que isso foi... foi muito bom.

(Trecho da Entrevista, Franciele e Paula, 01/06/2011).

Neste trecho, em resposta ao meu pedido de falar um pouco mais sobre a resposta que dera na prova, Franciele comenta mais sobre a importância dos relatórios e da dificuldade com a aula do sábado do que propriamente sobre o software. Esta aula de sábado foi a de introdução ao conceito de taxa de variação instantânea, relativa à Atividade 5 (ver Apêndice 2). No que segue da entrevista não consigo retomar o assunto sobre o software, pois elas começam a desabafar sobre a quantidade de tarefas que precisavam realizar durante o semestre, em particular na disciplina de Matemática Aplicada. Deste modo, as questões ainda permanecem, embora já tenhamos um indicativo de que o software pode ter participado do processo de produção de conhecimento sobre o conceito de derivada.

Nas demais entrevistas não é possível encontrar outros comentários diretamente relacionados às questões do ensino ou da aprendizagem, porém a fala de Natalia transcrita a seguir traz uma ideia interessante:

*Natalia: [...] Acho que foi boa a ideia do problema da malária e boa a ideia do software também. O software facilitou bastante pra gente e a ideia da malária, facilitou o trabalho... da malária, e o problema da malária facilitou a gente... encaixar isso na... relacionar a **Biologia e a Matemática**. As duas coisas foram bem legais.*

(Trecho da entrevista, Renato e Natalia, 25/05/2011).

Neste trecho Natalia tenta expressar que o software contribuiu para que eles trabalhassem com o modelo matemático para a transmissão da malária, e pensar sobre a malária os auxiliou a relacionar Biologia e Matemática. Novamente aqui o software está aparecendo como um meio para os alunos aproximarem as duas áreas do conhecimento e, talvez em uma interpretação ousada, podemos entender que o software contribuiu para a compreensão de conceitos matemáticos de modo geral, pois como já afirmaram Natália e Dayane, o CDI passa a fazer sentido quando relacionado com a Biologia. Entretanto neste momento esta interpretação é muito mais especulativa do que concludente.

Por outro lado, a fala de Edgar transcrita a seguir nos dá uma pista de como o software pode ter contribuído para a compreensão de conceitos matemáticos.

Débora: E como foi pra ti, ou pra vocês [ele e sua dupla] em geral, enfim, utilizar o software que a gente trabalhou, o Modellus?

*Edgar: Ah, é... achei que, assim... um, uma mão na roda [faz gestos com a mão de entre aspas], né? Porque... é... ele constrói os gráficos, né? E assim, a gente tava aprendendo muito disso... [Débora: Uhum] **Se não fosse ele a gente não teria a visualização de gráfico, a gente não ia conseguir fazer os gráficos.***

Débora: Uhum. E se eu trouxesse... e se ao invés de usar o software, por exemplo, eu trouxesse pra vocês os gráficos impressos... os gráficos lá... os mesmos gráficos que vocês viam no software, mas no papel, impresso. Tu acha que seria diferente?

*Edgar: Seria. É, assim, com certeza seria melhor do que a gente fazer, com os gráficos impressos, **mas o software** ainda é melhor porque ele **mostra como que o gráfico é construído, né?** [Débora: Entendi]. **Porque ele... vai desenhando os pontinhos, e tem outros aplicativos, por exemplo, quando a gente pedia pra ele pegar a tangente, ele sempre mostrava onde a tangente ia bater, né, aquela retinha.** Assim, ajudaria bastante, claro, é... mas aí eu acho que o software é melhor.*

(Trecho da entrevista, Edgar, 02/08/2011).

A fala de Edgar ressalta possibilidades oferecidas pelo software ligadas à visualização, em particular duas animações: a própria construção do gráfico, que pode ser acompanhada pelos alunos, e a reta tangente ao gráfico, que aparece como um segmento de reta tangenciando o gráfico e que acompanha a sua construção. O segmento de reta tangente na verdade é a hipotenusa de um triângulo retângulo, que indica visualmente a inclinação da reta tangente com relação ao eixo horizontal. Após a construção do gráfico é possível movimentar o controle do tempo com o mouse e analisar a reta tangente em cada um dos pontos do gráfico que se queira. A figura abaixo (Fig.26) mostra uma sequência de imagens com a opção “Tangentes” selecionada.

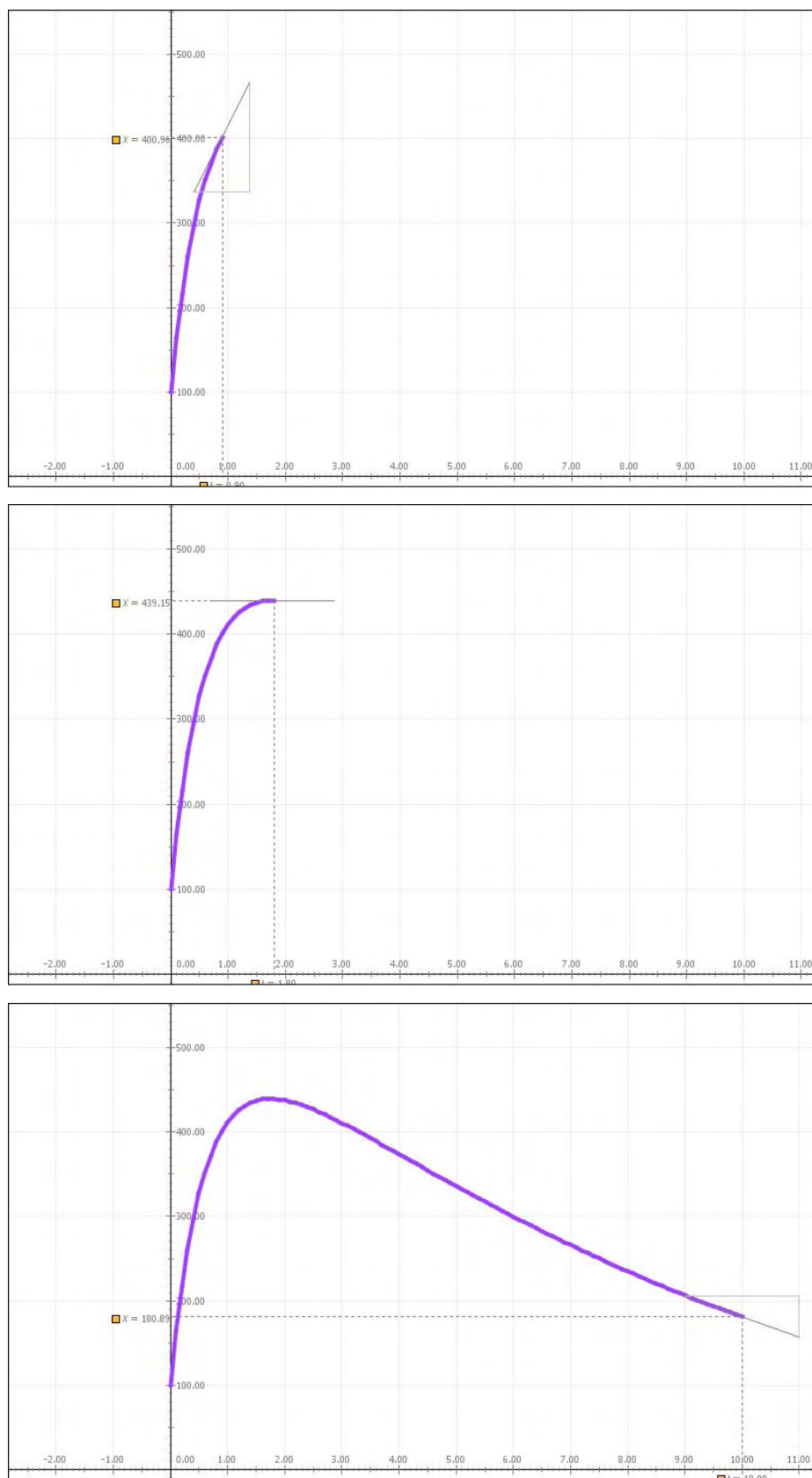


Figura 26 - Reta Tangente acompanhando a construção do gráfico.

Como Edgar não mencionou explicitamente em sua fala que estes recursos visuais contribuíram para a compreensão de conceitos matemáticos, e apenas se referiu a eles para justificar o porquê de o software ser “melhor” do que gráficos impressos, não é possível afirmar nada nesse sentido a partir de sua assertiva. Deste modo surgem mais questionamentos: Esses recursos visuais oferecidos pelo software foram importantes para os alunos pensarem com o software sobre os conceitos matemáticos? Em que momentos isso ocorreu? Como?

Em um viés um pouco mais voltado para o entendimento do próprio fenômeno biológico a partir da análise do modelo matemático, a fala de Natalia transcrita a seguir aponta para uma possibilidade oferecida pelo software já bem conhecida e discutida na literatura: a possibilidade de construir diferentes gráficos rapidamente.

Natalia: *Eu não lembro direito os valores, mas a gente mudava a taxa de picada de zero vinte e nove [0.29] pra, sei lá, zero seis [0.6] e ficava um gráfico super diferente, assim. Então eu acho que se de repente a gente fosse fazer isso no papel, era menos prático e mais difícil também pra gente.*

Renato: *Demorava mais.*

Natalia: *Com certeza, e pra gente entender também, “ah tá, mudei o a [o parâmetro a], tá, e aí, né?” Então pra gente aqui muda, ah só mudar o a lá rapidinho já sai um gráfico diferente. Acho que foi... legal. Facilitou bastante pra gente entender.*

(Trecho da entrevista, Renato e Natalia, 25/05/2011).

Segundo Natalia, a possibilidade de construir vários gráficos de forma rápida utilizando o software foi um fator que contribuiu para que eles compreendessem o modo como cada um dos parâmetros poderia influenciar na evolução da doença. Vários autores (BENEDETTI, 2003; BORBA; PENTEADO, 2007; BORBA; CONFREY, 1996) já reportaram sobre as possibilidades oferecidas por este tipo de recurso que vários softwares de Matemática possuem para a elaboração, análise e validação/refutação de conjecturas, principalmente no estudo de funções. Benedetti (2003), por exemplo, relaciona a possibilidade de elaboração de vários gráficos com a experimentação matemática e a elaboração/validação de conjecturas por alunos do primeiro ano do ensino médio estudando sobre funções. O recurso permitiu que os alunos explorassem famílias de funções e elaborassem conjecturas sobre seu comportamento com relação aos parâmetros de sua expressão analítica.

Aqui novamente me remeto à discussão que foi feita na seção anterior sobre experimentação no sentido de experimento laboratorial (experimento digital), pois a construção dos diferentes gráficos está relacionada às mudanças nos parâmetros do modelo

matemático, como mencionei anteriormente. O interessante agora é notar a percepção da aluna de que a possibilidade de analisar os vários gráficos gerados pelo software foi importante para que os alunos compreendessem a evolução do fenômeno de acordo com mudanças em cada um dos parâmetros. Será que este recurso também contribuiu para a compreensão de conceitos matemáticos no contexto da abordagem pedagógica?

Novamente é importante também analisar limitações do software. Keteryne e Sibeli expressaram a seguinte opinião na entrevista:

Débora: Tá, aí eu queria perguntar assim... Vocês não falaram nada sobre o software que a gente usou. Então eu queria que vocês falassem um pouquinho... sobre o Modellus.

*Sibeli: É **difícil** de usar...*

*Keteryne: É... **no começo é meio complicado, né. Que nem, quando a gente pegou aquele primeiro relatório e lá falou "Faça isso", a gente ãhh?? [risos] A gente não entendeu nada!***

*Sibeli: É **que às vezes a gente fica perdida lá nos parâmetros, o que que tem que mudar, como muda...***

Keteryne: É...

Sibeli: Mas eu acho que é porque é falta de prática [Keteryne: Falta de prática], né, de mexer lá...

*Keteryne: É, que nem, **hoje em dia a gente tá bem melhor do que no começo, mas devido a... praticar**, mas acho que se a gente tivesse, pudesse praticar mais, a gente taria melhores ainda...*

(Trecho da Entrevista, Keteryne e Sibeli, 25/05/2011)

Segundo as alunas, o software se mostrou difícil de usar, apesar das indicações fornecidas nos tutoriais que acompanhavam as atividades. De fato, o software exige vários detalhes em termos de configuração, e o grande número de parâmetros que o modelo matemático apresenta pode ter gerado essa sensação de “estar perdido” que as alunas mencionaram. As aulas, de fato, foram sempre permeadas por questionamentos dos alunos com relação aos procedimentos que precisavam realizar no software. Minha percepção de que, com o tempo, a frequência deste tipo de questionamento diminuiu está em sintonia com o testemunho das alunas de que durante o semestre elas foram aprimorando o modo de trabalhar com o software. Esta é apenas uma percepção, de modo que uma análise mais direcionada dos demais dados construídos seria necessária para verificar a existência de indícios relacionados a esta questão. Porém acredito que esse não é o ponto mais importante para se pensar, mas sim procurar identificar em que extensão essas dificuldades apresentadas pelas alunas afetaram o seu andamento e desenvolvimento das atividades. Será que as dificuldades técnicas prejudicaram a produção de conhecimento de algum aluno?

Uma primeira impressão que vem à mente é que essas dificuldades técnicas podem ser superadas ao longo do trabalho, conforme os alunos se familiarizam mais e mais com o

software, de modo que não imporiam maiores problemas para a produção de conhecimento dos alunos. Entretanto, poderia ocorrer que para alunos menos interessados em computadores o fato de o software exigir um número grande de detalhes se tornar na verdade um obstáculo ou um fator de desânimo, bloqueio ou dificuldades extras.

Como o leitor pôde perceber, surgiram mais perguntas do que respostas ao longo desta seção. As falas dos alunos dão indícios de que o software contribuiu no processo de produção de conhecimento, mas não esclarecem que conhecimento (os conceitos matemáticos previstos na ementa? o modelo matemático? o fenômeno biológico?). Também não é possível ter indícios com relação às quais os momentos em que o software contribuiu ou se houve alguma situação em que não houve contribuição, apesar da indicação de que existiram dificuldades técnicas ao se trabalhar com o software. Mais uma vez a análise das demais fontes de dados será necessária para buscar indícios que possam subsidiar a discussão destes questionamentos e possivelmente esclarecê-los.

5.3.3 Tema 3: O software como um meio para relacionar Matemática e Biologia

A primeira pergunta feita aos alunos na entrevista e que esteve relacionada com as atividades desenvolvidas ao longo do semestre foi o que mais os chamou atenção e o que eles destacariam do trabalho. Nas oito entrevistas realizadas os alunos referiram-se, de alguma forma ou de outra, à relação entre Biologia e Matemática. Esta seção retrata um tema que pode ser entendido mais amplamente, no sentido de não estar pontualmente relacionado com o papel do software, mas de um modo mais geral com toda a abordagem pedagógica. Entretanto, como o software foi de suma importância para que a abordagem pedagógica pudesse ser desenvolvida, apresento este tema procurando identificar o papel do software, mesmo que ele não seja mencionado diretamente pelos alunos.

Um primeiro tipo de resposta à pergunta feita é a que destaca a possibilidade de conhecer uma aplicação da Matemática à Biologia. A seguir apresento três excertos de entrevistas como exemplo deste tipo de comentário. A primeira fala é de Keteryne e Sibeli:

Sibeli: *Eu acho que deu pra vincular bem, né, essa parte de... aprender essa parte do Ca... essa parte do Borba com a.... com o exemplo da malária... [Keteryne: É foi o que eu escrevi na...] você vê a derivada... essas coisas...*

Keteryne: *Foi o que eu escrevi na prova do Borba até, que eu achei que ... a sua parte, a parte dos vídeos que ele levou em aula, complementou, né, então a gente pôde ver assim... no dia-a-dia vamos supor como que se aplica aquela... porque é a gente fa... alguns professores até falam pra gente, ah, que os alunos falam, pra quê que a gente vai estudar*

isso? pra quê que a gente quer isso? Tem que decorar esse monte de fórmula e a gente pensa, a gente nunca vai usar isso, pra que isso? Eu acho que tanto os vídeos que o Borba trouxe quanto a sua parte deu pra gente ver mais ou menos... as coisas... [Sibeli: A aplicação...] é... onde cada coisa se encaixa.

(Trecho da Entrevista, Keteryne e Sibeli, 25/05/2011).

Em sua fala, as alunas destacam a possibilidade de relacionar a matéria que foi vista no primeiro momento das aulas, liderado pelo professor Marcelo Borba, com a análise do modelo matemático proposta no segundo momento de cada aula. O fenômeno da transmissão da malária é um exemplo, uma aplicação dos conceitos matemáticos trabalhados no curso. Keteryne afirma que estudar esta aplicação supriu parcialmente uma das angústias de vários alunos ao estudarem Matemática: saber como podem utilizar os conceitos que aprendem. Nesta mesma linha, Kauã e Priscila afirmaram o seguinte:

Kauã: Ah, o que... acho que o que ficou destacado pra mim nesse trabalho, o que ele destacou foi... justamente tipo, uma utilidade da... Matemática pra... Biologia [Débora: Ahã]. Acho que foi isso o principal... [Priscilla: É.] Porque eu acho que se a gente só tivesse tido... a aula, isso ficaria muito vago. Porque é o que acontece com várias outras matérias também [Priscilla: É...] [Débora: Entendi]. Que é, por exemplo... tipo... Física, sabe? [Priscilla: É...] Que a gente até sabe que tem relação, sabe, mas a gente não vê na prática, então...

Débora: Entendi.

Kauã: Mas eu acho que esse foi bem pra gente ligar... ver o... como a Matemática pode ser usada no estudo da Biologia mesmo, tipo, não só pode como deve...

Priscilla: E muitas pessoas também entram, fazendo o curso de Biologia, tentando escapar da, da, das exatas, mas você vê que tudo tá relacionado e isso é muito importante.

Débora: Uhum...

Priscilla: Acho que é isso, é legal... Mostrou que... a aula mostrou que... tá tudo relacionado mesmo e... botar isso em prática.

(Trecho da entrevista, Kauã e Priscilla, 01/07/2011).

Kauã e Priscilla destacam que o trabalho proporcionou que eles identificassem uma utilidade da Matemática para a Biologia. Eles ressaltam a importância de realmente trabalhar com uma aplicação, pois, apesar de saberem que duas áreas podem ser relacionadas, se as aplicações não forem realmente trabalhadas a relação estabelecida entre as áreas pelos alunos é vaga, superficial. Entretanto, essas aplicações precisam ser bem pensadas, pois como é possível ver na fala de Natalia, a seguir, os alunos compreendem claramente a diferença entre os vários tipos possíveis de aplicação.

Renato: Ah, eu acho que foi uma experiência muito legal ter... associando, fazer a disciplina de Matemática associando com um problema da Biologia, mesmo assim. Realmente foi Matemática aplicada à Biologia. [Natalia concorda com movimentos de cabeça]. [Débora: Uhum] E a gente acabou entendendo a Matemática com... a partir de uma aplicação que

tinha né, no caso, a taxa de variação... [Débora: Uhum] Eu achei bem interessante.

Natalia: Desde o começo [Renato: Bem legal...] eu já achava muito legal assim, a gente via uma coisa no Borba, tá a gente falava "não, tudo bem, existe e tal", mas aonde eu vou usar isso, nunca né? Aí a gente... a gente chegava no GPIMEM aqui e você mostrava tal. E eu falava, "Nossa! Pior que usa". [Débora: Sim..] Eu achei legal isso, associar um problema que a gente pode tá... de repente tem um projeto, sei lá, do governo envolvendo isso, a gente pode tá ali como biólogo, né, e ter que usar a Matemática.

Renato: Fora todos aqueles... todos aqueles modelos matemáticos que a gente fazia os exercícios no livro aí a gente via, assim... mais ou menos na prática como que...

Natalia: É, mas aqueles do livro, você diz os exercícios, né?

Renato: É...

Natalia: Então é tudo meio por cima assim, que eles falam, ah do microorganismo, ah não sei o que... é sempre uma coisa assim que você pensa "ah podia ser qualquer outra coisa, né?" [Débora: Uhum] "Podia ser qualquer outro exemplo", mas esse da malária eu achei muito legal.

Renato: É, porque a gente vendo um, a gente [Natalia: É, né?] acompanhando um... um... processo, a gente mais ou menos tem uma ideia [Natalia: Acho que facilitou, né?] de como aplicar a Matemática no... no...

Natalia: Pra gente que tem uma cabeça bem biológica, facilitou colocar uma coisa biológica no meio da Matemática. Acho que se não tivesse a parte da malária talvez a gente ficasse mais... mais pensando "nossa, que inútil". [risos]

Débora: Sim.

Natalia: Ah, porque a gente pensa! Sinceramente, a gente pensa! [risos] [Débora: É, eu sei...] A gente olha aquilo, "ah, eu não vou usar...". Depois a gente vê que usa.

(Trecho da entrevista, Renato e Natalia, 25/05/2011).

Em sua fala, Natalia expressa uma diferenciação entre os exercícios feitos em aula e a análise do modelo matemático para a transmissão da malária. Estes exercícios aos quais ela se refere são exercícios encontrados no livro-texto utilizado pelo professor ao longo do curso, que é um dos poucos livros de Cálculo Diferencial e Integral I que apresenta uma quantidade razoável de exercícios envolvendo contextos biológicos. Entretanto, como a própria aluna notou, são exercícios que, em sua maioria, o contexto não é realmente determinante, pois outro contexto poderia ser utilizado com a mesma estrutura matemática. Para a aluna, este tipo de aplicação é “tudo meio por cima assim”, ou seja, são situações criadas para se enquadrar no conteúdo matemático que se estuda, mas não retratam uma situação possível de se trabalhar como biólogo.

Neste trecho da entrevista, Renato inicia sua fala destacando que eles puderam entender a Matemática a partir de uma aplicação, e se referiu ao conceito de derivada como um exemplo. Outros alunos também mencionaram o trabalho com o modelo para a transmissão da malária como importante para a compreensão da Matemática. Algumas falas que exemplificam esta questão são as seguintes:

Edgar: Com tudo? [Débora: Uhum.] Eu gostei. Apesar de... malária não ser um dos meus

temas favoritos, assim, mas não... não dá pra agradar todo mundo, mas não é um tema que eu não gosto, só não é um tema que eu escolheria.

Débora: Entendi.

Edgar: Mas eu achei que foi bem, bem legal assim, é... essa relação que você fez e... progredir o estudo com... junto com a matéria, sabe? Que... a gente fazia o modelo aí a gente aprendia, por exemplo, a derivada. Aí a gente fazia outro modelo. Aí a gente aprendia... não sei, é... a integral, fazia outro modelo. **E assim, é... principalmente pra quem é biólogo que... não gosta muito de Matemática, isso foi um... uma coisa bem bacana, assim, pra... pra ajudar a entender a matéria, pra ajudar a entender as aplicações da Matemática [Débora: Uhum.] e... pra ajudar a entender a própria Biologia com a Matemática, sabe? Que uma coisa acho que completa a outra, que tá meio que ligado, assim. E foi isso, é... Eu achei que foi legal é...**

(Trecho da entrevista, Edgar, 02/08/2011).

Paula: Eu achei bem legal. **Achei que facilitou muito pra entender umas coisas que... eu acho que eu não entenderia sozinha, assim, só com... com o Borba. Não com o Borba explicando, mas só com... [Franciele: Com a aula...] só com a aula, com os números, eu acho que seria difícil pra entender algumas coisas assim. Aí, quando a gente fez o modelo, que teve taxa de variação, que nem depois a gente viu tudo aquilo, acho que eu associei melhor, sabe? Pra mim, pelo menos, foi isso. E é legal, né? É uma coisa que tá muito, muito próxima da gente, assim, apesar de a gente não ter estudado malária a fundo, é o que a Fran falou, a gente viu vários modelos, é... que explicam o crescimento de bactérias, essas coisas assim, daí dá pra associar...**

(Trecho da entrevista, Franciele e Paula, 01/06/2011).

Nas duas falas, os alunos associam o trabalho com a análise do modelo matemático para a malária com um auxílio para a compreensão dos conceitos matemáticos vistos em sala de aula. O trabalho com um tema biológico, que pertence à sua área de interesse, permitiu que os alunos fizessem associações entre seus conhecimentos biológicos e os conceitos matemáticos, algumas vezes inclusive com outras situações biológicas que não a estudada durante a disciplina. Esta fala ecoa o comentário que Dayane e Natália fizeram e que foi citado na primeira seção deste capítulo, onde elas comentam que “o Cálculo em si não faz sentido, né? [Dayane: É] [risos] Mas se você coloca alguma coisa da Biologia, daí faz sentido” (Trecho da entrevista, Dayane e Natália, 01/07/2011). É importante notar, neste momento, que estas são as impressões dos alunos. Seus testemunhos são importantes, pois estão diretamente relacionados com a motivação para a elaboração da abordagem pedagógica, como mencionei anteriormente.

Esta motivação, de proporcionar uma oportunidade para que os alunos refletissem sobre a Matemática e a Biologia, pareceu dar frutos por meio da abordagem pedagógica desenvolvida. Os testemunhos de dois alunos mostram que o trabalho desenvolvido os auxiliou a perceber uma relação entre as duas áreas de uma maneira diferente daquela que percebiam anteriormente. Por exemplo, uma das questões extras da primeira prova perguntava

o que os alunos aprenderam sobre malária durante a disciplina até aquele momento. Diego respondeu o seguinte: "Aprendi diversas informações úteis durante a pesquisa, sem contar o fato do modelo matemático. Honestamente antes da disciplina eu não via muita relação com a Biologia. Hoje minha visão a respeito desta relação se amplificou". Já Natália e Dayane comentaram o seguinte na entrevista:

Natália: É, tipo, eu também nunca imaginei assim, não sei, né, se não pensei nisso, mas eu nunca imaginei que tinha um modelo matemático pra você ver quantidade de picadas essas, enfim tudo, sabe? Eu não sabia que existia uma coisa que estudasse [Dayane: É pra analisar...] da matemática mesmo, mas que estudasse a malária nesse sentido [Débora: Ahã.] É interessante por causa disso, porque envolve os dois que é uma coisa que a gente se interessa, né, que é a parte biológica e fica mais fácil porque, né, os dois juntos ali é bem mais fácil de entender.

Dayane: É, essa parte que você falou que você não conseguia imaginar, é... tem um... tem uma... não sei se eu posso falar, tem uma função específica pra cada fase da doença, assim. Você tem como avaliar desde a taxa de infecção, a probabilidade de ser infectado, a probabilidade de pegar a doença, quer dizer, cada parte pode ser analisada, e nisso você gera um gráfico... final... e você fala "nossa é verdade, aqui [?] [Natalia: Faz sentido...] aqui não vai morrer, aqui vão se recuperar..." e aí acaba ficando completa... assim a... a visão, assim, eu acho...

(Trecho da entrevista, Dayane e Natália, 01/07/2011).

Ambos os alunos expressaram em suas falas que, a partir do trabalho proposto, descobriram uma relação entre a Matemática e a Biologia que até então não percebiam. Diego não deixou muito claro como relacionou as duas áreas, mas Natália e Dayane falam sobre a possibilidade de utilizar a Matemática para estudar fenômenos biológicos, algo sobre o qual elas não haviam refletido anteriormente. Esta relação que foi possível estabelecer entre as duas áreas também pareceu contribuir para que os alunos mudassem algumas de suas atitudes com relação à Matemática. As falas de Kauã e Natalia nas entrevistas ilustram esta questão. Por exemplo, Kauã comentara momentos antes na entrevista sobre a possibilidade de perceber uma utilidade da Matemática para a Biologia ao trabalhar com as atividades propostas. Eu o questiono se essa relação foi estabelecida de uma forma forçada, e ele e Priscilla respondem:

Kauã: Ah, eu achei [Priscilla: Foi bem interessante...] que foi bem... foi uma boa relação, não achei algo forçado, tipo... Porque a... é... acho que... eu até entendi o que você quer dizer, porque às vezes fica algo muito forçado mesmo. Mas não, eu achei que foi uma boa relação e... esqueci o que eu tava falando... [risos] Não eu... pra mim foi bom, eu até tinha me... eu, eu tinha medo de Matemática [Débora: Ahã]. E até perdi isso... Descobri que eu nem sou ruim em Matemática [risos].

Débora: Que bom, né?

Priscilla: É. Eu sempre gostei na verdade...

Kauã: É porque... É, tipo, eu gostava no Ensino Médio, aí na... no vestibular me deu um medo de Matemática absurdo... Mas aí depois aqui, tipo... sei lá, meio que, porque é uma

coisa que... eu acabei fazendo ligações com coisas fora... não só da malária, no caso, mas... tipo, porque a gente vê bastante coisa... que é... é que na verdade, é que a gente tá acostumado a pegar os resultados das, das coisas matemáticas e aí a gente começa a ver tipo ah... sabe? É uma coisa matemática. [risos]
(Trecho da entrevista, Kauã e Priscilla, 01/07/2011).

A fala de Kauã é bastante pessoal, mas retrata o sentimento que vários alunos expressaram ao longo do curso: o de medo ou insegurança com relação à Matemática. É interessante ele perceber que seu sentimento com relação à disciplina mudou ao longo do trabalho. Ele atribui essa mudança às relações que conseguiu estabelecer entre os conceitos matemáticos e o fenômeno da malária, e também com outras situações com as quais ele provavelmente estava trabalhando. A fala de Natalia, transcrita a seguir, também mostra uma mudança de atitude com relação à Matemática. Momentos antes desta fala, enquanto explicava o que chamara sua atenção com relação ao trabalho proposto, ela comentou que utilizar uma situação biológica para trabalhar a Matemática foi importante para os alunos, pois eles têm “uma cabeça bem biológica”. Eu usei este comentário como um “gancho” para outra pergunta:

Débora: E você falou dessa parte de ter a cabeça biológica. Vocês acham que vocês conseguiram é... trazer elementos disso que vocês têm da Biologia pro trabalho?

Natalia: Da malária?

Débora: É.

Natalia: Nossa, com certeza!

Débora: Ou de alguma manei... é... não, não [?] que eu pergunte. Pode falar mais... [risos]

Natalia: Não eu acho que sim, eu acho que sim... Principalmente no nosso trabalho, assim. [D: Uhum.] Acho que facilitou, sabe, quando a... a gente pegou um gráfico lá, tinha uma linhazinha no meio. Nossa, eu nunca ia saber o que que era aquela linhazinha. Aí que a gente viu, que era uma média de quatro casos por ano... Aí eu falei, "ah, tá...faz sentido".

Débora: No trabalho final você diz?

Natalia: No trabalho final, é.

Débora: Entendi.

Natalia: A... aquelas tabelinhas também... é um gráfico de barra que tem lá também assim... Parece que, não sei, a gente começa a olhar com mais... mais amor... [risos]

Renato: Um olhar mais matemático.

Natalia: É, mas, não olhando "nossa, uma tabela!". A gente até que fala, "ah tá, uma tabela, tudo bem".

(Trecho da entrevista, Renato e Natalia, 25/05/2011).

A fala de Natalia é mais abrangente, pois inclui, além dela, outra(s) pessoa(s), provavelmente sua dupla, Renato, e talvez os demais colegas também. Novamente o sentimento de medo/insegurança aparece, quando ela exemplifica um possível pensamento ao ver uma tabela em um texto com o qual estivesse trabalhando antes de fazer a disciplina

(“nossa, uma tabela!”)⁷⁹. A frase seguinte (“ah tá, uma tabela, tudo bem”) expressa uma mudança nesse sentimento, que passa de algo que amedronta para algo que é rotineiro. A expressão de que agora eles passam “a olhar com mais... mais amor...” objetos como tabelas, também ilustra uma mudança de atitude com relação à Matemática.

Poder-se-ia pensar que esta mudança ocorreu porque os alunos se tornaram familiarizados com objetos matemáticos como gráficos, tabelas e funções, devido à extensa exposição durante o semestre. Mas se assim o fosse, todo o período de exposição à Matemática que tiveram ao longo de sua carreira escolar deveria ser mais do que suficiente para que eles desenvolvessem atitudes positivas com relação à Matemática. Os indícios apontam que o fator determinante aqui foi justamente estabelecer relações entre os conceitos matemáticos aprendidos e a área de interesse dos alunos, apresentando a Matemática como uma área que possui recursos que podem ser úteis para os biólogos.

Como é possível perceber, os depoimentos dos alunos são bastante gerais, e se referem à abordagem pedagógica como um todo, não focando no software, em particular. Entretanto, como a pergunta desta tese se refere ao papel do software no desenvolvimento da abordagem pedagógica, me dedicarei a seguir a pensar sobre seu papel no processo de estabelecer relações entre a Matemática e a Biologia, e no processo de mudança de atitudes com relação à Matemática. Será que houve uma participação do software nestes processos?

Como é o software que fornece resultados para os alunos sobre o modelo matemático e é por meio dele que é possível desenvolver experimentos digitais para a análise da evolução da doença ao longo do tempo, me parece natural entender que estes papéis estiveram ativos durante os processos mencionados acima. Fornecer representações gráficas e tabulares das soluções do modelo matemático permitiu que uma situação envolvendo um fenômeno biológico, que não foi tão simplificada a ponto de ser um exercício de Matemática, pudesse ser trabalhada com os alunos. Uma situação desse tipo, um pouco mais próxima de uma situação com a qual eles poderiam trabalhar em sua carreira profissional, e mais próxima até mesmo dos trabalhos que já desenvolvem em estágios ou iniciações científicas ao longo do curso, é que tem potencial para permitir que uma relação entre as áreas seja desenvolvida. A possibilidade de elaborar experimentos digitais, por outro lado, aproxima a situação ainda mais do trabalho laboratorial do biólogo.

⁷⁹ Infelizmente não é possível retratar no texto a entonação que ela utilizou em sua fala. Com certeza, se isto fosse possível, o leitor teria melhores condições de avaliar a presença (ou não) desse sentimento.

Compreender a utilidade da Matemática para sua área de interesse é, em geral, uma demanda dos alunos, principalmente nos cursos em que a Matemática aparece como uma disciplina em serviço. A pesquisa exploratória de Catapani (2001), por exemplo, registrou fatores relacionados ao interesse/desinteresse de alunos do curso de Geologia da Unesp, campus de Rio Claro, para com o curso de Cálculo Diferencial e Integral I. A autora identificou fatores reforçadores das problemáticas relacionadas à disciplina. Em particular, destaca-se o que se relaciona ao desconhecimento pelos alunos da importância da disciplina para o curso de Geologia. Várias vezes os alunos se queixaram da falta de aplicações dos conteúdos matemáticos vistos na disciplina às situações da Geologia, demonstrando a existência de uma demanda por parte dos alunos para o conhecimento destas aplicações.

Estas aplicações, entretanto, não cumprem esta exigência quando são muito simples. Como Natalia observou em sua entrevista, situações em que o contexto poderia ser qualquer um não dão conta desta demanda dos alunos. Por outro lado, aplicações que sejam muito avançadas para o nível dos alunos também podem ser problemáticas. Como foi mostrado por Catapani (2001), os alunos se queixaram da dificuldade de algumas das aplicações propostas de modo que não se engajaram no trabalho e também não conseguiram estabelecer relações entre a Matemática e a Geologia.

Diante desta problemática, entendo a abordagem da Análise de Modelos, aliada ao uso de tecnologias, como uma alternativa promissora para o estabelecimento de relações entre a Matemática e outras áreas científicas. Um modelo já apresenta a Matemática em conexão com a situação problema da área e, como já comentei anteriormente, o uso da tecnologia pode permitir o acesso dos estudantes ao modelo em questão. O uso de tecnologia, softwares computacionais e calculadoras gráficas em particular, é recomendado em vários dos artigos publicados no ICMI Study – Mathematics as a Service Subject (1988). Naquela época, os autores já mencionavam as possibilidades de experimentação e visualização proporcionadas por estas tecnologias.

Em particular, Howson et al. (1988, p.15, tradução nossa) ressaltam que o uso do computador permite que o aluno fique “ao mesmo tempo mais ativo, mais livre, mais disposto a experimentar⁸⁰”. Já Siegel (1988, p.87, tradução nossa) destaca que as tecnologias disponíveis “permitem a exploração e experimentação com problemas complexos. Elas representam o modo como alunos de graduação que não fazem o curso de Matemática

⁸⁰ [...] at the same time more active, more free, more disposed to experiment, [...]

(especialmente) farão Matemática no futuro⁸¹”. É claro que todas estas possibilidades existem de acordo com o uso que se faz da tecnologia. Como afirmam Borba e Penteado (2007) quando a mídia é domesticada, ou seja, quando rotinas pré-estabelecidas são transferidas para o trabalho com a mídia, as potencialidades oferecidas por ela não são valorizadas totalmente.

O trabalho realizado na abordagem pedagógica vai ao encontro do que é proposto pelos autores acima. Por um lado, a Análise de Modelos valoriza as possibilidades oferecidas pelo software, que são utilizadas pelos alunos para explorar o modelo para a transmissão da malária. Por outro lado, ela enfatiza a reflexão sobre a Matemática em meio a um contexto biológico, contribuindo para que os alunos de Biologia estabeleçam relações entre a Matemática e a sua área de interesse.

Já a mudança de atitude dos alunos com respeito à Matemática, pareceu ocorrer como uma consequência do estabelecimento destas relações entre a Matemática e a Biologia, principalmente da percepção de que a Matemática pode ser útil para o estudo de fenômenos biológicos. De acordo com Lim et al. (2009) existem quatro componentes principais da atitude: crenças (*beliefs*), utilidade (*usefulness*), satisfação (*enjoyment*) e ansiedade (*anxiety*). A pesquisa desenvolvida por estes autores tem como objetivo analisar o efeito de uma abordagem baseada na modelagem elaborada para alunos de um curso de Ciências da Terra em uma Universidade taiwanesa. Os pesquisadores propuseram um projeto com dois meses de duração, onde os alunos interpretaram as soluções de um modelo matemático para a dissipação das cinzas de um vulcão em erupção com o software MATLAB[®].

Com base em outras pesquisas os autores definiram os quatro componentes da atitude sob uma perspectiva do projeto como segue:

‘Crenças’ foram definidas como as suposições que os estudantes trouxeram para o exercício. Elas são baseadas no seu conhecimento e experiências prévias.

‘Utilidade’ foi definida como aquilo que foi visto como útil, prático e benéfico – na visão dos estudantes, tornando o projeto valer a pena de ser feito.

‘Satisfação’ foi definida em termos do prazer e ausência de pressão.

‘Ansiedade’ foi definida como sentir-se preocupado e pressionado com relação ao projeto⁸² (LIM et al., 2009, p.444).

⁸¹ [...] allow for exploration and experimentation with complex problems. They represent the way non-mathematics majors (especially) will be doing mathematics in the future”.

⁸² ‘Beliefs’ were defined as the assumptions that students brought to the exercise. These were based on their knowledge and previous experience.

‘Usefulness’ was defined as that which was seen to be helpful, practical and of benefit – in students eyes, making the project worth doing.

‘Enjoyment’ was defined in terms of pleasure and absence of pressure.

‘Anxiety’ was defined as feeling worried and pressured about the project.

Por meio de questionário e entrevistas, os pesquisadores concluíram que as crenças e a ideia de utilidade dos alunos não mudaram muito, mas o sentimento de satisfação aumentou e o de ansiedade diminuiu com o trabalho proposto.

No caso da pesquisa apresentada nesta tese, o componente da atitude que apareceu na fala de Kauã e Natalia foi a ansiedade. Não uma ansiedade com relação às atividades propostas, mas de modo mais geral com a Matemática. Embora não seja possível generalizar para todo o grupo de alunos, as falas de Kauã e Natalia demonstram uma redução no nível de ansiedade, representado pelo medo e insegurança, por parte desses alunos, corroborando os resultados encontrados por Lim et al. (2009).

Já nas falas apresentadas no início da seção, a componente utilidade é que apareceu e esteve relacionada às atividades de análise do modelo matemático. Foi possível constatar mudanças nesta componente em alunos como Diego e Natália, que reportaram explicitamente sobre esta questão. Porém, como todos os alunos destacaram em suas entrevistas a relação entre Matemática e Biologia, não é difícil pensar que para vários deles esta mudança ocorreu.

No meu entendimento, o software exerceu um papel ativo neste processo, já que foi por meio do trabalho com o *Modellus* que os alunos puderam refletir sobre a transmissão da malária e a Matemática. Além disso, a percepção de que é possível trabalhar com um modelo matemático mesmo que não se conheça toda a matemática envolvida, também pode ter contribuído neste processo, dando mais confiança aos alunos na medida em que percebem que podem trabalhar/pensar com o software para analisar, interpretar e compreender aspectos matemáticos com os quais possam se deparar futuramente.

Os vários aspectos envolvidos no processo de mudança de atitude, assim como seus movimentos, constituem uma dimensão afetiva do trabalho com a abordagem pedagógica proposta. Investigar esta dimensão não é propriamente o objetivo desta pesquisa, e por isso ela não será explorada em todos os seus aspectos. Porém, considero este tema de grande relevância para a Educação Matemática, inclusive vislumbrando-o como um possível caminho futuro de investigação.

5.3.4 Síntese das ideias

Até o momento fiz uma análise das entrevistas que os alunos voluntários forneceram ao final da disciplina tendo como foco a busca por indícios sobre o(s) papel(éis) do software no desenvolvimento da abordagem pedagógica. Ao longo das discussões traçadas foi possível perceber que alguns aspectos se entrelaçam ou se repetem. Em uma tentativa de sumarizar as

principais ideias discutidas, é possível destacar três papéis do software até o momento: fornecer resultados sobre o fenômeno biológico, contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos e mediar o estabelecimento de uma relação entre Matemática e Biologia.

Com relação ao papel de fornecer resultados sobre o fenômeno, identifiquei dois aspectos relacionados: a ideia de que o software faz tudo sozinho, expressando a percepção dos alunos sobre o fato de terem acesso às soluções do modelo matemático; e a necessidade de interpretar os resultados fornecidos pelo software. Em particular, o acesso às soluções do modelo foi conectado com a possibilidade de realizar experimentos digitais e também de trabalhar com situações mais próximas daquelas com as quais os alunos irão trabalhar profissionalmente. Uma consequência desta possibilidade foi o estabelecimento pelos alunos de uma relação entre Matemática e Biologia, reconhecendo uma utilidade da primeira com relação à segunda e gerando uma mudança de atitude por parte de alguns alunos com relação à Matemática. O terceiro papel do software, mediar o estabelecimento de uma relação entre a Matemática e a Biologia, surgiu a partir daí.

Com relação ao papel de contribuir com a compreensão de conceitos matemáticos, novamente a possibilidade de relacionar Matemática e Biologia pareceu ter uma influência. Além disso, alguns recursos oferecidos pelo software foram mencionados pelos alunos, como a possibilidade de acompanhar a construção do gráfico, a visualização de retas tangentes e a possibilidade de construir vários gráficos simultânea e rapidamente.

De um modo geral, entretanto, a análise das entrevistas levantou uma série de novos questionamentos, mais especificamente conectados a cada um dos papéis supracitados. Este fato evidencia a necessidade de análise das outras fontes de dados, em particular aquelas relacionadas à observação (vídeos gerados pelo *Camtasia*, vídeos gerados pela câmera externa e caderno de campo), para que sejam buscados indícios que possam esclarecer estes questionamentos, de modo a elaborar uma caracterização mais completa dos papéis até então elencados por meio da triangulação dos dados. É este o objetivo da seção seguinte.

5.4 Análise dos Vídeos

5.4.1 Tema 1: O software como um fornecedor de resultados sobre o fenômeno biológico

Quando da análise das entrevistas duas foram as ideias principais que surgiram relacionadas com a noção de o software atuar como um fornecedor de resultados sobre o fenômeno biológico: a ideia de que o software faz tudo sozinho e a necessidade de interpretar

os gráficos fornecidos pelo software. É possível encontrar a primeira ideia também em comentários feitos pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades. Por exemplo, na terceira atividade, após Edgar e Mitra introduzirem o modelo matemático no software e fazerem as configurações para gerar os gráficos de $X(t)$ e $Y(t)$ simultaneamente, eles fazem o seguinte comentário:

Mitra: Que bonitinho...

Edgar: Que fofo!!

Mitra: Ah ele fez tudo pra gente, a gente não precisou fazer nada...

[risos]

(Trecho do Camtasia, Edgar e Mitra, Atividade 3)

A última fala de Mitra deixa clara a ideia de que o software fez tudo e os alunos não precisaram fazer nada. Entretanto, a assertiva da aluna parece não considerar as ações de configuração realizada pela dupla antes da obtenção dos gráficos. Por outro lado, estas ações podem ter sido levadas em consideração, porém entendidas como muito simples. De fato, esta foi a primeira atividade em que os alunos interagiram com o software, de modo que ainda não estavam familiarizados com ele. Assim, precisaram seguir as orientações do tutorial sem muito questionar o que estava indicado. O comentário feito por Luis ao finalizar a configuração proposta explicita o mesmo sentimento:

Hileia: Olha!

Luis: Legal.

Hileia: Legal! [risos] Curti o negócio...

Luis: É, mas ficou meio robozinho, né, mano... a gente podia fazer alguma coisa... Porque aqui tipo, eu não entendi nada, pra falar a verdade, você entendeu alguma coisa?

Hileia: Mais ou menos... vamos... será que dá pra voltar? [Hileia movimenta o controle do tempo com o mouse] Ah... você volta o quanto você quiser... Ah, ele foi acompanhando a reta...

Luis: Uhum. É porque é a variação, né?

Hileia: É... cada um... da malária...

[...]

Hileia: Legal...Porque daí a gente teria que ler direitinho, né? Porque o X... tá lá escrito, né?...

Luis: É, ele já é...

Hileia: População [de humanos] infectada... é o X, aí o Y...

Luis: Não, isso é, mas... o que eu to falando é assim ó... o que cada coisa aqui faz na função entendeu? Faz ali no gráfico, como que funciona a variação da...

Hileia: É, isso daqui [apontando com o mouse para as equações do modelo] ela mostrou lá no coisinho, né, aqui é a quantidade de picadas por pessoa...

Luis: Não, sim, mas é que... eu to falando é... do programa, como que o programa funciona, porque que ele joga aqui no gráfico e de que forma, entendeu?

Hileia: Entendi... É isso seria legal...

(Trecho do Camtasia, Luis e Hileia, Atividade 3)

Luis parece um pouco mais incomodado com a situação, uma vez que a realização das configurações pelos alunos foi descrita como “robozinho”, ou seja, os alunos apenas seguiram as orientações fornecidas sem refletir sobre elas. A fala de Luis no final do diálogo expressa uma demanda pelo entendimento sobre os procedimentos utilizados pelo software para a obtenção dos gráficos, ou seja, o aluno manifestou o interesse por compreender os processos de resolução do modelo matemático. Parece-me que o fato de não conhecer os procedimentos utilizados pelo software foi o motivo de Luis considerar a atividade como “robozinho”. Paradoxalmente, é justamente este o ponto que tornou possível aos alunos estudarem o modelo de Ross-Macdonald em uma disciplina de CDI I: eles não precisaram aprender as técnicas de resolução de um sistema de EDO.

Uma das ideias presentes na teoria da cognição distribuída pode nos ajudar a compreender melhor o que ocorreu nesse processo. A ideia central desta teoria é que a cognição é melhor compreendida como um fenômeno distribuído, ao invés de localizado, isto é, a cognição não está em um indivíduo; pelo contrário, os processos cognitivos deveriam ser compreendidos como “um sistema formado pelo indivíduo, todo o contexto e as múltiplas relações entre eles⁸³” (SIVASUBRAMANIAM, 2004, p.95, tradução nossa). Deste modo, as mídias utilizadas pelo indivíduo devem ser consideradas no processo de compreensão da cognição. Esta ideia é, de fato, muito semelhante à metáfora seres-humanos-com-mídias, esta última, porém, enfatiza um processo de moldagem recíproca entre ser humano e mídia, e também o coletivo de humanos. A afirmação de Döfler (apud Sivasubramanian, 2004, p.95, tradução nossa) é enfática quanto à consideração das mídias: “Não existe tal coisa como trabalho “puro” sem o uso de alguma ferramenta⁸⁴”.

Como afirma Pea (1985), o software “assume” parte do processo cognitivo, permitindo que o indivíduo foque os seus processos cognitivos em outros aspectos da atividade. No caso do *Modellus*, por exemplo, os processos envolvidos na resolução do sistema de equações (no caso, a aplicação dos métodos numéricos) e na construção dos gráficos das soluções (como determinar a escala e plotar os pontos) ficam a cargo do software, enquanto que os alunos ficam responsáveis por determinar quais variáveis vão em cada eixo do plano cartesiano e os valores dos parâmetros, por exemplo. Assim, os alunos ficam liberados para focarem na análise do comportamento das soluções, na interpretação das informações fornecidas pelo software sobre o fenômeno e nos demais elementos envolvidos

⁸³ [...] a system made up of the individual, the whole context and multiple relationship between them.

⁸⁴ There is no such a thing as “pure” work without using any tool.

no modelo matemático. Em outras palavras, o software reorganiza a atividade de analisar as soluções do modelo.

Deste modo, os alunos não estão realmente sem fazer nada. Sua participação ativa é importante, até mesmo para que a mídia contribua para a atividade que estão realizando. Como afirmam Salomon et al. (1991, p.3, tradução nossa), “o lápis, a enxada, o microscópio, a câmera, a régua de cálculo, o processador de texto, e pacotes de estatística computadorizados exigem que trabalhem com eles; eles fazem pouco por nós sem nossa participação ativa⁸⁵”.

Retomando as considerações feitas por Luis com relação a atividade, é importante notar que as questões propostas na Atividade 3 na sequência da introdução do modelo no software tinham o intuito de chamar a atenção dos alunos para os passos que tomaram durante esta inserção e auxiliá-los na reflexão sobre os mesmos, relacionando alguns deles a aspectos da definição de função. Outro ponto a considerar novamente é o fato de a maioria dos alunos não ter expressado a mesma opinião com relação ao software fornecer os resultados para eles nem durante a entrevista nem nos diálogos estabelecidos em sala de aula. Como vimos nas entrevistas, uma dupla de alunas (Franciele e Paula) inclusive vinculou este fato à possibilidade de o software ser útil para o trabalho de biólogos.

Naquele momento teci algumas considerações sobre a experimentação como um fator importante para a potencial utilidade do software para o trabalho de biólogos, ressaltando a noção de um experimento científico como o aspecto da experimentação mais evidente no trabalho dos alunos com as atividades propostas. O trecho a seguir, extraído do diálogo de Dayane e Natália durante a realização da Atividade 4, ilustra esta noção. As alunas já haviam analisado o comportamento da função $X(t)$ para três casos simultaneamente: o primeiro com $M=60000$, o segundo com $M=125000$ e o terceiro com $M=300000$, todos eles com $c=0.01$, como sugerido no item (b) da segunda parte da atividade (ver Apêndice 2). Na sequência elas modificam o valor de c para 0.9 e analisam novamente os três gráficos:

Dayane: Ah, agora a tendência é ele manter mais alto ainda a quantidade de pessoas infectadas.

Natália: Ele mantém mais estável.

Dayane: É, ele mantém quase constante a quantidade de pessoas infectadas.

...

Dayane: É que assim, ó, a quantidade de pessoas na população total é sempre constante, é sempre mil. Então desses mil, quanto mais mosquitos, mais esses mil se contaminam, mais ainda. Quando mais mosquitos se contaminam, é quase o total! Tá, não chega ao total, mas

⁸⁵ [...] the pencil, the hoe, the microscope, the camera, the slide rule, the word processor, and the computerized statistical package require that we work with them; they do little for us without our active participation.

chega muito próximo, olha... novecentos e cinquenta e oito [ela aponta o último valor de X na tabela na coluna correspondente ao terceiro caso]... A densidade aqui é maior e é zero ponto nove [0.9] a probabilidade do mosquito se contaminar. É quase o total da população que se contamina. Ele mantém muito constante esse valor...

Natália: Porque é maior a probabilidade de infecção do inseto? É maior a densidade de mosquito e maior a quantidade de pessoas infectadas.

(Trecho do Camtasia, Dayane e Natália, Atividade 4).

Este trecho ilustra o tipo de estudo do comportamento das soluções feita pelos alunos a partir da modificação das condições de ocorrência da transmissão da malária. A análise feita pelas alunas é típica de um experimento científico, uma vez que elas modificam o parâmetro, consequentemente modificando as condições de ocorrência da transmissão da doença, descrevem o comportamento observado e buscam justificativas para o mesmo.

Um segundo aspecto que surgiu quando da análise das entrevistas e que relatei ao tema “o software como um fornecedor de resultados sobre o fenômeno biológico” foi a necessidade de interpretar as informações fornecidas pelo software. Em particular, a interpretação das informações gráficas foi mais marcante na fala dos alunos. A partir daí levantei algumas perguntas relacionadas com esta interpretação: Quais os processos envolvidos? Quais as dificuldades dos alunos? Qual o papel do software? Com base na análise dos vídeos gerados pelo *Camtasia* foi possível obter indícios para a compreensão destes questionamentos.

Com relação aos processos envolvidos na interpretação dos gráficos, a análise dos diálogos travados entre os alunos permitiu identificar três principais etapas cumpridas por eles, em sua maioria. A primeira etapa consistiu na identificação das convenções; a segunda consistiu em uma descrição do comportamento da curva; e a terceira etapa, na tentativa de justificar o comportamento observado. A etapa de identificação de convenções pode ser dividida em dois tipos. O primeiro tipo esteve relacionado com a identificação de qual variável estava representada em cada eixo do plano cartesiano. Este tipo de identificação ocorreu principalmente nas Atividades 3 e 9 (ver Apêndice 2). Nas demais atividades esta identificação voltou a ocorrer principalmente quando os alunos faltavam a uma aula e precisavam lembrar a situação com a qual estavam trabalhando na aula seguinte, mas a frequência foi pequena.

O segundo tipo esteve relacionado com identificar quais gráficos estavam relacionados a quais valores de um determinado parâmetro. Este tipo de identificação ocorreu principalmente nas Atividades 4, 8 e 9 (ver Apêndice 2), que justamente envolveram a mudança no valor dos parâmetros. O trecho abaixo extraído do diálogo entre Dayane e

Natália sobre o item (a), parte 2 da Atividade 4 (ver Apêndice 2) ilustra as etapas envolvidas na interpretação dos gráficos. Natália lê em voz alta a questão, que apresenta uma situação em que uma pesquisa feita com três espécies diferentes do mosquito *Anopheles* identificou valores diferentes para a probabilidade desses mosquitos se infectarem (c) com o *Plasmodium vivax*. A questão pede para os alunos analisarem como o parâmetro *c* influencia na quantidade de pessoas e mosquitos infectados ao longo do tempo na região. Após ouvir a leitura da colega, Dayane comenta:

Dayane: Ah, entendi... A gente vai analisar só a... tipo, a suscetibilidade do inseto...

...

Dayane: Esse aqui é zero ponto zero um [0.01] a probabilidade dos mosquitos se infectarem [Dayane aponta com o mouse para o gráfico roxo]. Esse aqui é zero ponto um [0.1] [apontando com o mouse para o gráfico rosa], e esse aqui é zero ponto nove [0.9] [apontando com o mouse para o gráfico azul]. Aí aqui... a quantidade de mosquitos infectados... não, aqui são pessoas infectadas... a quantidade de pessoas que se contaminou aqui ó...

Natália: [?] então quer dizer que eles não estão contaminados.

Dayane: Não, é baixa a proporção. Lembra, tempo...

Natália: É que ele tá falando aqui a probabilidade do mosquito ser infectado... [Dayane: Pelo parasita, então...] depende de coisas, então quer dizer que esses são menos suscetíveis ao [Plasmodium]...

Dayane: Isso, aí, logo, menos pessoas são infectadas, tá vendo, que o gráfico tá baixo? Aí no fim, todos eles vão... vão tender a diminuir né? Aí esse daqui já é zero ponto um [0.1], então tem mais mosquitos se contaminando, logo tem mais pessoas se infectando. E esse aqui... Aí, essa é a primeira resposta... comparar os gráficos pros três casos...

Natália: E como isso influencia a solução do modelo?

Dayane: Bom, a solução do modelo é que tudo tende... as pessoas tendem a se recuperar e os mosquitos tendem a morrer e nascer... sem ser contaminado.

Natália: Isso... [?]

Dayane: Em ambos os casos as pessoas se recuperam!

[...]

Dayne:[...] Ó, aqui o quanto de pessoas que têm contaminadas... [Ela aponta com o mouse para o último valor na tabela na coluna que mostra os valores de X para o caso 1] é pouco, nesse final do tempo. Aqui é bastante e aqui é mais ainda! [Ela aponta, sucessivamente, para o último valor na coluna que mostra os valores de X para o caso 2 e para o caso 3]. Por quê? Porque os mosquitos que nasceram... que morreram e já nasceram, eles já se contaminaram de novo!

(Trecho do Camtasia, Dayane e Natália, Atividade 4)

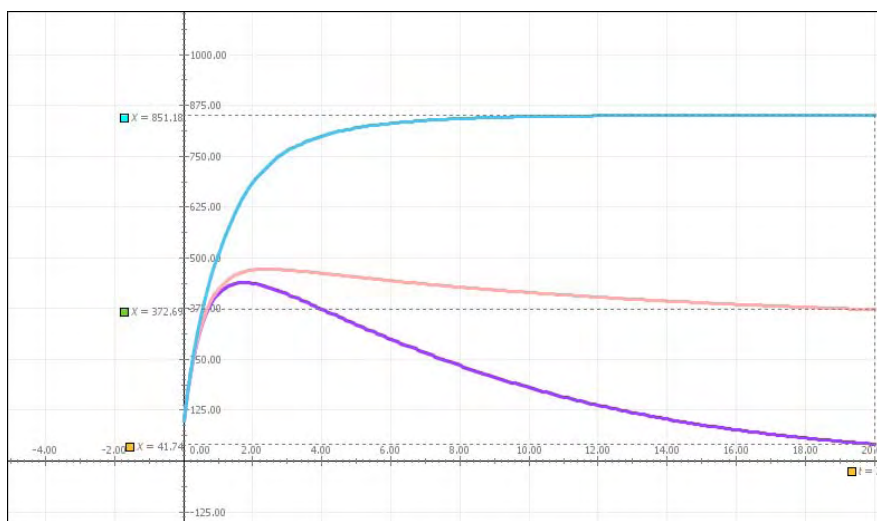


Figura 27 - Gráficos de $X(t)$ para três casos distintos.
Curva roxa – $c=0.01$; curva rosa – $c=0.1$; curva azul – $c=0.9$.

No diálogo estabelecido por Dayane e Natália as três etapas estão mais ou menos separadas temporalmente, seguindo uma ordem de evolução. Após identificarem qual gráfico correspondia a cada valor do parâmetro c elas fazem uma descrição das curvas em termos comparativos e ensaiam uma justificativa. A questão proposta na atividade, sugerindo que relacionem o comportamento observado com o fenômeno biológico, estimula Dayane a procurar outros elementos para confirmar sua primeira descrição. Entretanto, a ordenação temporal das etapas não é uma regra. No diálogo a seguir, estabelecido entre Kauã e Priscilla para a mesma atividade, é possível perceber uma não-linearidade nestas etapas.

Priscilla: Certo...

Kauã: Ah, a gente vai ter que fazer [?], não vai?

Priscilla: Qual que era mesmo o... o zero um [0.1], zero nove [0.9], ...?

Kauã: Esse é o zero um... não, esse é o zero zero um [0.01], esse é o zero um [0.1] e esse é o zero nove [0.9]. Porque... O que significa... Porque como esse aqui... a taxa de infecção dele é muito pequena, ãh...

Priscilla: Ah, assim...

Kauã: Tipo, como eles vão morrendo e vão nascendo saudáveis, e poucos vão se infectando... entendeu? Tipo, como é que a gente pode explicar isso?

Priscilla: Ah, é o que ela tá falando, tipo... altamente suscetível.

Kauã: É, mas aqui é a quantidade da população que está sendo infectada. Então perai, a gente tá no número de pessoas... infectadas. X é a população de pessoas infectadas...

Priscilla: Aqui não é o tempo?

Kauã: É, ao longo do tempo. A quantidade de pessoas infectadas ao longo do tempo, entendeu? Ai tá assim, tipo, é que na fórmula a gente coloca a... as, as...

Priscilla: Não é o mosquito não?

Kauã: Aqui? Não, aqui continua sendo a população, a... a população.

Priscilla: Ah tá.

...

Priscilla: A população não é humana?

Kauã: É, então, é porque assim, tipo... Essa é a população de pessoas, população de pessoas infectadas aqui no caso, mas com esse mosquito tende a diminuir por quê? Porque esse mosquito vai se infectando muito pouco... e vai ficando.. tipo, pelo... eles vão morrendo quando são infectados e nascem saudáveis, e como é muito pequena a taxa de... a taxa de mortalidade, a taxa de infecção deles, a população [de humanos] infectada vai diminuindo também. E inicialmente tem um aumento, que aí eu não... deixa eu tentar pensar porque tem esse aumento. Por que tem esse aumento?

Priscilla: Qual esse daqui?

Kauã: É porque a gente já inicia com uma quantidade... elevada de pessoas infectadas... eu não lembro...

(Trecho do *Camtasia*, Kauã e Priscilla, Atividade 4)

O diálogo de Kauã e Priscilla inicia com a identificação das convenções, que neste caso significa identificar qual gráfico corresponde a qual valor do parâmetro c . Em seguida, eles já pulam para uma justificativa do comportamento que observam nas curvas, apesar de não verbalizarem este comportamento. Mais uma vez eles retomam a identificação das convenções, porém desta vez esclarecendo qual a variável que estão analisando. Em seguida Kauã retoma a justificativa biológica, explicitando ao final de sua fala o comportamento observado nas curvas e questionando o porquê do crescimento inicial da população de pessoas infectadas para os dois primeiros casos.

As etapas verificadas no trabalho dos alunos podem ser relacionadas, em parte, a três componentes principais para a compreensão de gráficos identificados por Friel et al. (2001) a partir do estudo de várias pesquisas abordando este tema. Apesar de o foco dos autores ser em gráficos estatísticos, acredito que suas considerações se aplicam para o caso aqui analisado.

Embora os pesquisadores citados neste artigo são de diferentes disciplinas e usaram terminologias diferentes, existem similaridades em sua visão sobre a compreensão de gráficos. Nós identificamos três componentes principais na compreensão de gráficos; estes componentes mostram uma progressão na atenção de características locais para características globais de um gráfico (a) Para ler informações diretamente de um gráfico, o indivíduo precisa compreender as convenções do gráfico (e.g., Kosslyn, 1994); (b) para manipular a informação lida a partir do gráfico, o indivíduo faz comparações e realiza cálculos; e (c) para generalizar, predizer ou identificar tendências, o indivíduo deve relacionar a informação no gráfico com o contexto da situação⁸⁶ (FRIEL et al., 2001, p.152, tradução nossa)

⁸⁶ Although the researcher cited throughout this article are from different disciplines and used different terminology, similarities in their views on understanding graph comprehension exist. We identified three main components of graph comprehension; these components show a progression of attention from local to global features of a graph: (a) To read information directly from a graph, one must understand the conventions of graph design (e.g., Kosslyn, 1994); (b) to manipulate the information read from a graph, one makes comparisons and performs computations; and (c) to generalize, predict, or identify trends, one must relate the information in the graph to the context of the situation.

No caso das atividades propostas, os alunos não realizaram cálculos para manipular as informações lidas a partir do gráfico, porém descreveram verbalmente o comportamento observado e fizeram comparações entre os gráficos com valores diferentes para os parâmetros, no sentido de compreender a sua influência no seu comportamento. Já a identificação das convenções e a relação com o contexto, o fenômeno biológico, foram ações que permearam todo o processo de interpretação dos gráficos.

Encontrar uma justificativa biológica para o comportamento das soluções observado nem sempre se mostrou uma tarefa simples para os alunos. Um dos aspectos que ficaram marcantes neste processo foi a necessidade de articular diferentes fontes de informação para estruturar essa justificativa. Vamos analisar o diálogo estabelecido entre duas duplas durante atividades em que precisavam justificar o comportamento das soluções. Começamos analisando o diálogo entre Renato e Natalia ao trabalharem com a Atividade 4, mesma atividade descrita anteriormente.

Renato: A população infectada de mosquitos inicial é seis mil. Então, a gente tem... como a probabilidade de infecção é muito baixa e os mosquitos vão morrendo, então os mosquitos diminuem.

Natalia: Mas aqui é humanos, né?

*Renato: Sim, mas eu tô falando de mosquito por quê? **Porque aqui o c é, é a... a... taxa do mosquito ser infectado que tá influenciando...***

Natalia: A quantidade de pessoas sendo infectadas.

*Renato: **Porque assim, ao longo do tempo, como a taxa, a probabilidade de infecção do mosquito é baixa, os mosquitos vão morrendo, vão se contaminando pouco e consequentemente a população de humanos ela vai se..** [Natalia: **Vai diminuindo...**] **vai se recuperando. Se recupera rápido.** Ó, aquilo que a gente viu no primeiro dia lá, quando a gente colocou os dois gráficos pra correrem juntos.*

Natalia: Mas eu tô dizendo assim, porque que isso daqui é a população de pessoas infectadas e não a quantidade de pessoas se recuperando?

Renato: Mas esse é a da população se recuperando, só que a gente tem que lembrar lá do gráfico de mosquitos. É assim, ó. Quando você tem a do mosquito, você tem sessenta mil mosquitos na população...

Natalia: Ah?

*Renato: **Dez por cento infectados, então você tem seis mil mosquitos infectados. Se a probabilidade de infecção do mosquito é baixa, esses seis mil vão morrendo e se contaminando muito pouco.***

Natalia: Certo.

Renato: Então eles vão morrer... a taxa de mortalidade, vai ser maior...

Natalia: [?]

Renato: Vamos perguntar pra Débora?

*Natalia: **Eu colocaria assim, o gráfico da primeira espécie mostra que como a probabilidade de infecção dos mosquitos é baixa, a quantidade de população infectada também é baixa. Pra mim era só isso. Não ia pensar nessa coisa de recuperação, ou do mosquito morrer...***

*Renato: **Como a gente tá analisando humanos, ela vai abaixando porque as pessoas tão se recuperando.***

Natalia: Ou porque os mosquitos não tão sendo infectados?

Renato: Mas eles tão. Você tem que levar em consideração que a quantidade de mosquitos infectados é seis mil. Então tem um mosquito infectado.

Natalia: Mas se a probabilidade deles se infectarem é baixa [?] não significa que eu tenho seis mil mosquitos infectados em cada uma das espécies. Porque, tipo, uma tem menos... porque ele tem probabilidade menor.

Renato: Ó, parâmetros. Quando a gente vai em parâmetros [mostra a aba para Natalia], tem lá, ó...

(Trecho do *Camtasia*, Renato e Natalia, Atividade 4)

Neste trecho é possível perceber a tentativa de Renato de articular três fontes de informação: o significado do parâmetro c , a hipótese do modelo de que os mosquitos morrem, e a hipótese do modelo de que as pessoas se recuperam. As informações que ele está tentando articular estão corretas, porém nem sempre a articulação é feita da melhor forma. Por exemplo, quando Renato afirma que a população de humanos se recupera rápido porque a probabilidade de o mosquito se infectar é baixa. Na verdade, a taxa de recuperação dos humanos é a mesma para os três casos. Por outro lado, a interpretação do parâmetro c , sua influência no processo de transmissão da malária e a articulação com a hipótese de que os mosquitos infectados morrem, estão corretas.

Vamos, agora, analisar o diálogo entre Daniel e Hileia, ao trabalharem com a Atividade 9 (ver Apêndice 2). Nesta atividade, os alunos analisam o retrato de fase do modelo matemático para diferentes casos. Após identificarem qual variável estava representada em cada eixo do plano cartesiano, eles passam a analisar o gráfico (Fig.28).

Daniel: Aqui é o finzinho, né? [aponta com o mouse para a região da curva próxima à origem do plano cartesiano] [?]... Então o gráfico começa... com uma crescente no número de... pessoas infectadas... [aponta o mouse para o ponto (6000, 100) e depois acompanha o movimento da curva].

Hileia: Mas o número de mosquitos tá diminuindo...

Daniel: O número de mosquitos tá sempre diminuindo...

Hileia: Acho que é porque, tipo, tinha muito [mosquito] no começo e as pessoas demoram um pouco mais pra...

Daniel: Pra ficar doente...

Hileia: É. Aí, conforme vai diminuindo as pessoas vão... porque é... é retardado, né? Vamos escrever isso. É porque aqui tem uma grande concentração, aí eles saem pra picar. Aí eles morrem, mas... mas já picaram um monte de gente, né?

Daniel: É verdade... Aí quando elas [as pessoas] vão ficando doentes, né? [H: Vai diminuindo [os mosquitos]...] Aí [os mosquitos] já tão morrendo...

(Trecho do *Camtasia*, Daniel e Hileia, Atividade 9)

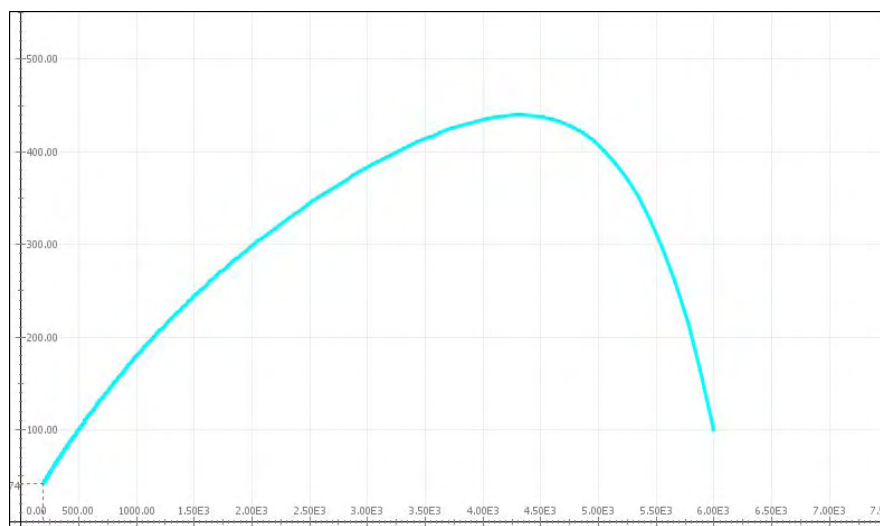


Figura 28 - Trajetória do retrato de fase XxY para $c=0.01$.

Neste trecho, Daniel e Hileia verificam que, enquanto o número de mosquitos infectados apenas diminui, o número de pessoas infectadas aumenta até um determinado instante de tempo e depois decresce. Eles justificam este crescimento inicial do número de pessoas afirmando que o fenômeno é retardado, uma interpretação que, no meu entendimento, vem do conhecimento dos próprios alunos sobre o fenômeno biológico, uma vez que este tipo de consideração não está explícito nas hipóteses do modelo.

Estes extratos ilustram os tipos de informação que precisam ser articuladas no momento de relacionar o comportamento das soluções apresentado pelo software com o fenômeno biológico: o significado das variáveis, o significado dos parâmetros, as hipóteses do modelo e o próprio conhecimento dos alunos sobre o fenômeno. Como é possível ver pelos exemplos esta articulação nem sempre é fácil de ser estabelecida. Algumas vezes, inclusive, os alunos são tentados a estabelecer relações que não procedem entre estas informações. Isto, de certa forma, já era esperado, pois a grande quantidade de parâmetros e de hipóteses para o modelo dificulta estar plenamente consciente de todos eles o tempo todo. Em parte por isso a maioria das atividades sobre influência dos parâmetros propôs que apenas um parâmetro fosse modificado de cada vez. Foi interessante, entretanto, que alguns alunos não se restringiram a isso e procuraram relacionar mais de uma hipótese ou parâmetro para justificar o comportamento observado. Este foi o caso de Renato e Natalia, citado anteriormente.

Neste processo de interpretação dos gráficos, a metáfora do software como um laboratório digital, como um fornecedor de resultados sobre o fenômeno, caracteriza bem o papel desenvolvido pelo *Modellus*. Apesar de o software não fornecer sugestões sobre possíveis explicações para o comportamento das soluções, foi ele quem forneceu aos alunos

os dados para observação, tendo em vista as condições configuradas pelos estudantes para a transmissão da malária. Além disso, assim como em um laboratório, o software também possui alguns recursos que têm o potencial de auxiliar os alunos na observação dos dados. Nem sempre estes recursos foram utilizados pelos alunos, de modo que sua potencialidade por vezes ficou evidente “por falta”.

Por exemplo, das 7 transcrições dos vídeos gerados pelo *Camtasia* na Atividade 9, apenas uma dupla acompanhou com cuidado a elaboração de todos os gráficos pelo software. Nesta atividade, os alunos analisaram retratos de fase do modelo para diferentes casos. As primeiras atividades estavam relacionadas novamente com a variação do parâmetro c . Para $c=0.01$ e $c=0.1$ (Fig.29 e Fig.30, respectivamente), as trajetórias seguem um movimento “da direita para a esquerda”, pois os valores de Y (plotados no eixo horizontal) sempre diminuem ao longo do tempo. Porém, quando $c=0.9$ (Fig.31), a trajetória segue um movimento “da esquerda para a direita”. Quando Renato e Natalia construíram o retrato de fase para $c=0.9$ com o software eles não acompanharam a construção da curva, pois estavam conversando com os colegas ao lado, ajudando-os. Assim, quando retomaram a atividade fizeram a seguinte análise:

Natalia: Vamos lá, então. Qual a tendência de comportamento de cada gráfico?

Renato: Bom, então a gente vai falar aqui do... do... do caso três primeiro, né?

Natalia: É.

Renato: Que já que a gente já tá com o gráfico aqui então a gente...

Natalia: Onde o c é zero vírgula nove [$c=0.9$].

Renato: É. Aí... a gente fala que nesse caso... a tendência do c ... a tendência do... [...]

Natalia: E aí?

Renato: Então, a tendência do caso três, a tendência do gráfico é... diminuir, né, a... derivada e... A derivada diminui devagar...

Natalia: Mas ele não tá falando de derivada ainda, né? É o comportamento do gráfico... conforme o tempo aumenta, não tá falando do... Então assim, a tendência do gráfico é diminuir...

Renato: A população de insetos...

Natalia: É diminuir é... como é que a gente pode falar que aqui é pouquinho e aqui é bem acentuado? Tipo assim, diminuir levemente de início?

Renato: Pouco acentuado, ou menos acentuado...

Natalia: Decrescer acho que fica melhor do que diminuir, né?

Renato: Mais acentuado no final, menos acentuado no começo. Porque... acentuado é. [...] E aí no final ela é bem acentuada... só que tipo... chega num momento que não desce mais... tipo assim.. metade de junho, não desce mais... entendeu?

Natalia: Renato, ó. No caso três a tendência do gráfico é decrescer pouco no início e de forma acentuada no final. Mas não tende a zero, né, aí?

Renato: Não. Porque no momento, no momento cem... a gente colocou t igual a cem aqui [$t=100$]... Tipo...

Natalia: Sem tender a zero...

Renato: É, quem tende a zero, é o... quem tende a zero é a população de humanos, certo? Tende a descer, a zero.

Natalia: Mas a população de mosquito não...

Renato: Mas como o mosquito... a população de mosquito ela não diminui mais...

Natalia: O c é o que?

Renato: Então...

Natalia: **A probabilidade do mosquito ser infectado... É, como a probabilidade do mosquito ser infectado é alta, então o número de mosquitos não diminui...**

Renato: Não diminui, é... É... Então a população de humanos infectados também nunca vai... chegar a zero. Quer dizer, pode chegar a zero assim, mas... a longo prazo, que o t cem [t=100] por exemplo é impossível a gente... fazer no Modellus.

Natalia: Sem tender a zero... quer colocar esse negócio da probabilidade do mosquito ser picado? Ou não precisa?

Renato: Não, mas é isso que tá variando.

Natalia: Então tá bom.

(Trecho do Camtasia, Renato e Natalia, Atividade 9)

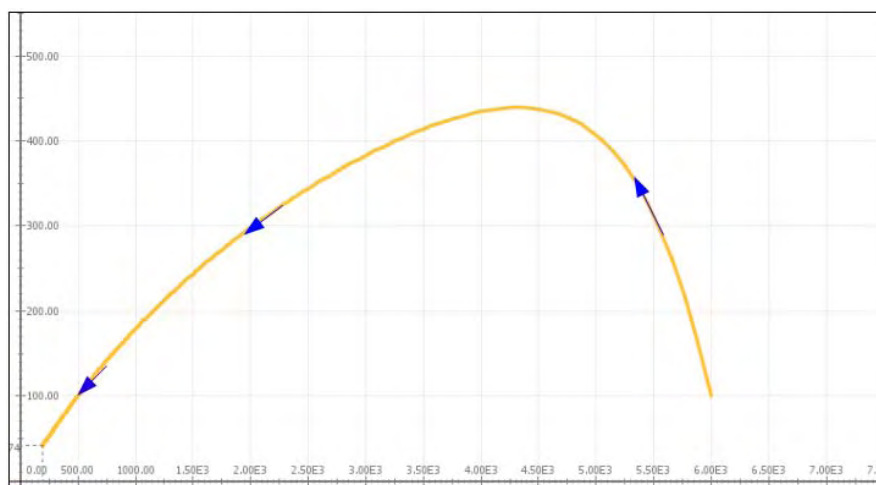


Figura 29 - Trajetória do retrato de fase XxY – $c=0.01$.

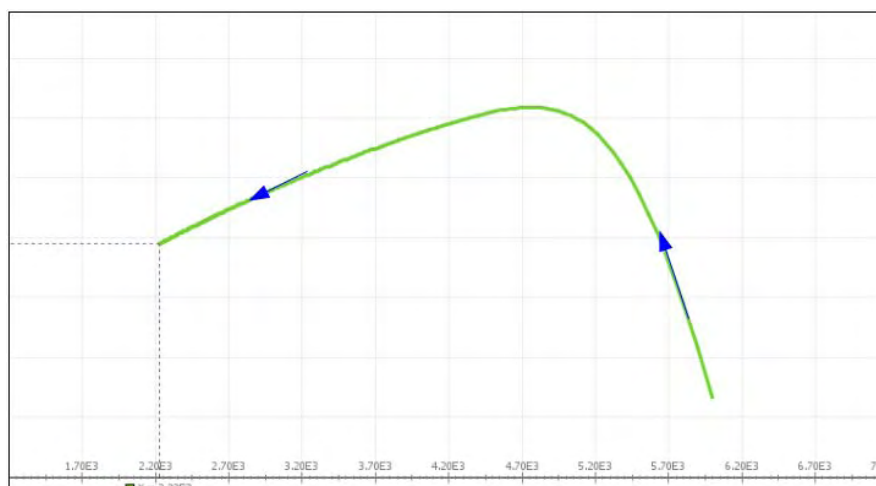


Figura 30 - Trajetória do retrato de fase XxY – $c=0.1$.

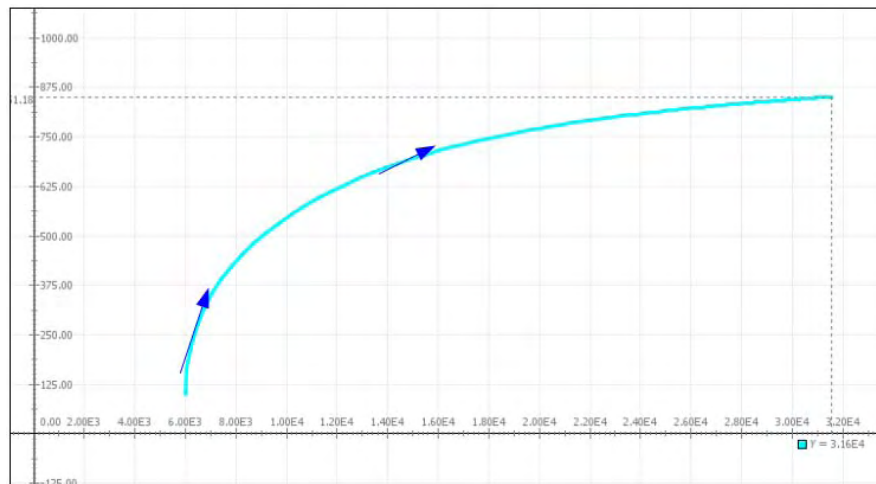


Figura 31 - Trajetória do retrato de fase XxY – $c=0.9$.

Neste trecho, é possível perceber que Renato e Natalia analisaram a trajetória XxY para $c=0.9$ supondo que o sentido do movimento era o mesmo dos gráficos que analisaram anteriormente. Mais interessante ainda é que os alunos retomaram o significado do parâmetro c e, mesmo já tendo feito uma análise semelhante algumas aulas antes, não perceberam a contradição ao afirmarem que “[...] como a probabilidade do mosquito ser infectado é alta, então o número de mosquitos não diminui” com o que observaram no gráfico “Natalia: Então assim, a tendência do gráfico é diminuir... Renato: A população de insetos...”. Uma maneira de perceberem a orientação do gráfico seria localizando as condições iniciais assumidas, porém a animação do gráfico tem um forte apelo visual e potencial para auxiliar na compreensão da evolução da doença.

Como afirma Rieber (1990, p.79, tradução nossa), baseando-se em Klein, a “Animação traz três atributos para um contexto de ensino: visualização, movimento, e trajetória (trajetória se refere à direção do caminho de viagem de um objeto animado) [Klein, 1987])⁸⁷”. No caso da atividade proposta, os três atributos são importantes. A visualização, por meio da qual os alunos observam os valores obtidos por X e Y em cada instante de tempo e têm uma visão global da evolução dos mesmos; o movimento, que neste caso é pertinente uma vez que X e Y assumem valores conforme o decorrer do tempo; e, finalmente, a trajetória, que no excerto apresentado é o atributo com poder de esclarecimento sobre a evolução da doença.

⁸⁷ Animation brings three attributes to an instructional setting: visualization, motion and trajectory (trajectory refers to the direction of the path of travel of an animated object [Klein, 1987]).

A ideia da trajetória está originalmente presente no retrato de fase de um sistema de EDO. Uma trajetória representa uma das soluções do sistema que satisfaz determinada condição inicial. Apesar da representação para um sistema de duas equações ser em duas dimensões, o tempo, que é a variável independente, está passando. Daí a ideia de trajetória. Para os alunos da disciplina, que não têm familiaridade com este tipo de gráfico, o atributo de trajetória da animação exerce o papel de fornecer informações perceptuais que revelam a evolução da doença ao longo do tempo.

Outro recurso em potencial é a possibilidade de aumentar o valor máximo de t para analisar a tendência de comportamento da curva. Este recurso foi um pouco mais utilizado pelos alunos ao longo do semestre, principalmente a partir de sugestões da professora e na Atividade 9, que indicava explicitamente uma análise para valores grandes de t . Nas atividades mais iniciais, entretanto, este não foi o caso. O trecho a seguir do diálogo entre Kauã e Priscilla ilustra uma situação em que a modificação do valor máximo de t poderia ter trazido elementos mais precisos para a análise elaborada pelos alunos. Eles analisaram o comportamento do gráfico de $Y(t)$ (gráfico roxo na Fig.32) na Atividade 3.

Kauã: A medida que vai passando o... não, a população não caminha... Não, é porque...

Priscilla: Ele tá diminuindo...

Kauã: É, aqui tá diminuindo, mas ele continua diminuindo? [Ele acompanha o movimento dos dois gráficos para t próximo a vinte com o mouse]. Ah não, se tá aqui ele vai... se ele continuasse...

Priscilla: É, então... depende do...

Kauã: É, eu acho que ele não ia continuar descendo não... Ou ele ia continuar meio estável aqui... [Ele desenha com o mouse a continuação do gráfico de Y_{xt} que está imaginando, uma curva estabilizando...]

Priscilla: É, ou continuar alguns instantes e aí...

(Trecho do *Camtasia*, Kauã e Priscilla, Atividade 3)

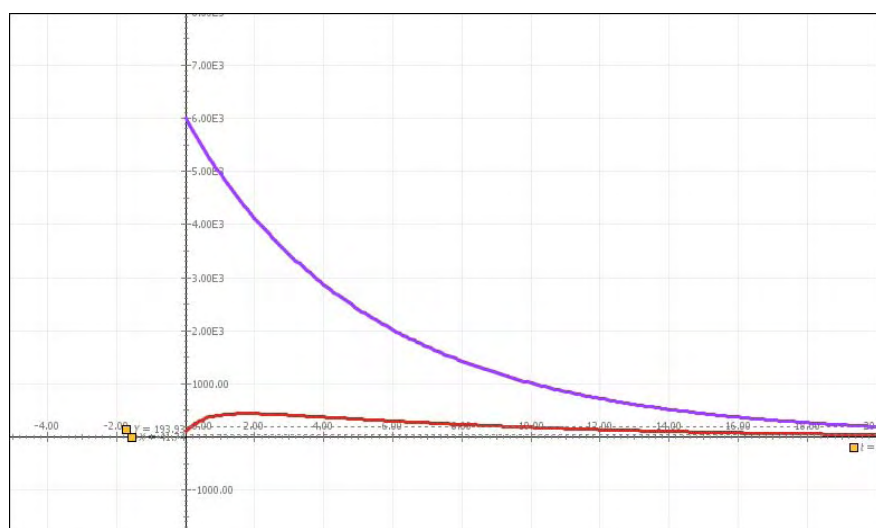


Figura 32 - Gráficos de $X(t)$ (vermelho) e de $Y(t)$ (roxo) plotados simultaneamente.

Como o diálogo mostra, Kauã questiona o comportamento do gráfico de $Y(t)$ para valores maiores do que $t=20$. Ele e Priscilla não têm certeza se os valores de Y continuam diminuindo ou se estabilizam com o passar do tempo. Ao traçar com o mouse uma continuação para o gráfico, Kauã procura imaginar a tendência do comportamento, mas sem muitos elementos que o ajude a justificar esta tendência além do visual. Possíveis razões biológicas para a escolha entre uma tendência de comportamento e outra também não são mencionadas.

Modificar o valor máximo de t teria auxiliado os alunos a comprovarem ou não sua hipótese de estabilização da curva. De fato, aumentando t é possível verificar que os valores de Y se aproximam cada vez mais de zero conforme os valores de t aumentam cada vez mais. Esta ação, entretanto, não se mostrou espontânea, corroborando com a observação feita por Artigue (2002) com base em outros estudos experimentais. Segundo a autora, é importante estar ciente das restrições (e também possibilidades) oferecidas pelo software. No caso do *Modellus*, a opção “escala automática” possibilita uma análise global de duas curvas simultaneamente, entretanto pode restringir uma análise local. A escala mostrada pelo software para plotar os gráficos de X e Y simultaneamente não deixou claro visualmente qual o comportamento de Y para valores cada vez maiores de t , gerando uma possível “ilusão óptica”. Aprender a lidar com estas restrições do software e encontrar possibilidades que permitam minimizá-las é um processo que envolve a familiarização do usuário com o mesmo.

Outro recurso que de repente poderia auxiliar os alunos na identificação da tendência de comportamento do gráfico é a tabela. Na maioria dos diálogos entre os alunos, a tabela aparece como fonte para encontrar o valor das variáveis em determinados instantes de tempo, porém uma situação chamou minha atenção, pois parece dar à tabela outro status. Ela ocorreu com Renato e Natalia enquanto realizavam a Atividade 4. Os alunos configuraram os três casos para valores de c conforme sugerido na atividade e iniciaram a análise do seu comportamento. Inicialmente eles se confundiram e consideraram $X(t)$ como o número de mosquitos infectados em cada instante de tempo. Mais adiante nesta mesma seção, um colega conversa com eles, e percebem a troca que fizeram. A passagem que me chamou a atenção está bem no início do trabalho e, portanto, os alunos falam de X como mosquitos infectados. Apesar desta troca, isto não prejudicará o debate que irei realizar. Vejamos, então, o diálogo dos alunos.

Natalia: Então a gente vai ter que escrever isso agora... Compare os gráficos para os três

casos... Então assim, por exemplo, na primeira espécie... é... o gráfico tá decrescente.

Renato: Esse é a primeira espécie, mesmo? [apontando com o mouse o gráfico azul]

Natalia: Então, eu não sei... eu acho que é... eu acho que sim, ó, porque aqui é... Primeiro X, segundo X, terceiro X [aponta com o mouse as colunas da tabela]. Essa aqui que tá decrescendo, ó... Olha como ela era grande no começo [Renato: Beleza], daí deu uma aumentada e depois diminuiu [mexendo na barra de rolagem da tabela, analisando os valores e as barras coloridas].

[...]

Natalia: O gráfico da primeira espécie...

Renato: O gráfico... da primeira espécie...

Natalia: É decrescente... é muito decrescente, porque o segundo também é decrescente, mas é menos né?

[...]

Natalia: O que tá variando... [Renato: Verdade] Só tá variando o tipo de mosquito. Então assim, é... o gráfico da primeira espécie é decrescente porque a probabilidade desta espécie ser infectada pelo plasmodium é pequena... Mas tipo assim, tá é pequena, mas porque sobe?

Renato: Por quê?

(Trecho do Camtasia, Renato e Natalia, Atividade 4)

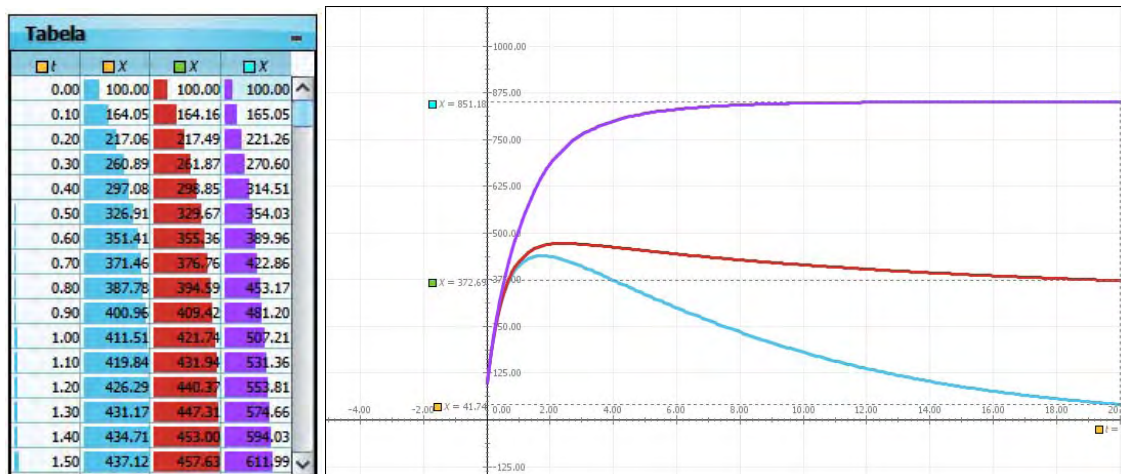


Figura 33 - Tabela e gráfico da função $X(t)$ para três casos distintos:
Curva azul – $c=0.01$; curva vermelha – $c=0.1$; curva roxa – $c=0.9$.

Neste trecho os alunos fazem a primeira análise do comportamento dos gráficos obtidos pelo *Modellus*. Logo de início, Natalia caracterizou o gráfico da primeira espécie como decrescente, mas em seguida, ao analisar a tabela, observou que há um crescimento inicial do gráfico antes do decrescimento. Esta observação parece não ter sido muito relevante de início, pois os alunos tomaram nota de suas observações apenas indicando que o gráfico era decrescente. Natalia inclusive reforçou que ele é “muito decrescente” numa tentativa de diferenciar este comportamento do gráfico do segundo caso. Entretanto, mais tarde, a questão do crescimento inicial do gráfico ressurgiu, agora ligada ao interesse de compreender o porquê desta ocorrência. Como os alunos estão interpretando o gráfico como o número de

mosquitos infectados ao longo do tempo, este crescimento inicial não faz muito sentido para eles. Na sequência do diálogo eles investem algum tempo pensando sobre isso, de forma intercalada com outras questões, até que um colega os ajuda e eles percebem que $X(t)$ na verdade é o número de pessoas infectadas em cada instante de tempo.

O que me chamou a atenção nesta passagem é que o crescimento inicial do gráfico foi trazido para debate por meio da análise da tabela, e não do gráfico em si. Parece-me que a informação visual mais marcante ao analisar o gráfico foi o decrescimento do mesmo, até porque o gráfico permanece nesse movimento mais tempo do que crescendo. A própria animação também pode ter reforçado esta impressão. Foi após o término da animação, analisando a tabela, seus valores e as barras coloridas, que os alunos observaram o crescimento inicial. E este comportamento passou a ser marcante, e instigante, uma vez que ele retorna ao foco de atenção dos alunos mais tarde.

Roth e Lee (2004, p.276-277, tradução nossa) fazem a seguinte consideração quanto à interpretação de gráficos:

Como parte do processo de alcançar o objetivo da atividade, o sujeito se movimenta perceptualmente para diferentes partes do gráfico, de fato, analisa o gráfico e então elabora verbalmente as diferentes partes que se tornaram salientes no processo. Isto tem duas consequências: Primeiro, embora o gráfico é dado materialmente em sua totalidade desde o início, ele se revela ao participante diacronicamente [ao longo do tempo]. Segundo, conforme novas estruturas se tornam disponíveis, estruturas percebidas anteriormente podem ser questionadas, descartadas, reinterpretadas ou usadas como fontes para explicações subsequentes.

Para elaborar, a leitura de um gráfico não ocorre em um instante. Assim, qual é a estrutura pertinente de um gráfico se revela ao longo do tempo, se tornando disponível aos participantes como se eles fossem se movendo em uma sala escura e se tornando conscientes do ambiente de forma cumulativa ao longo do tempo⁸⁸.

No caso da animação, inicialmente o gráfico não é dado em sua totalidade, pois ele vai se desenrolando aos poucos. Porém, como os alunos observam três gráficos simultaneamente e o gráfico em foco decresce durante a maior parte do tempo, provavelmente este decrescimento se tornou a estrutura mais saliente e foi a estrutura do gráfico que se tornou disponível primeiramente para os alunos. Segundo os autores, as estruturas percebidas podem

⁸⁸ As part of the process of achieving the goal of the activity, the subject perceptually moves to different parts of the graph, in fact, parses the graph and then verbally elaborates the different parts made salient in the process. This has two consequences: First, although the graph is materially given in its entirety from the beginning, it reveals itself to the participant diachronically. Second, as new structures become available, previously perceived structures may be questioned, discarded, reinterpreted or used as resources for subsequent explanations. To elaborate, reading a graph does not occur in an instance. Therefore, what the pertinent structure of a graph is unfolds over time, becoming available to the participants as if they were moving about in a dark room and becoming aware of the environment cumulatively over time.

ser questionadas e reinterpretadas conforme novos elementos se tornam disponíveis, o que neste caso ocorreu por meio da análise da tabela e da coordenação entre as duas representações. Neste sentido, a tabela demonstra um potencial para enriquecer a análise do comportamento dos gráficos, destacando elementos que podem passar despercebido apenas pela análise visual.

A animação e a possibilidade de aumentar o valor máximo de t são recursos oferecidos pelo software que se assemelham aos instrumentos de um laboratório. Eles podem ser usados pelos alunos para compreender melhor o comportamento das soluções do modelo e, conseqüentemente a evolução do fenômeno biológico. O uso destes recursos, entretanto, não se mostrou uma ação espontânea dos alunos, exigindo orientação por meio das atividades e da intervenção da professora.

Ao longo do semestre os alunos foram se familiarizando cada vez mais com o software e também com as hipóteses do modelo e com possíveis justificativas para os comportamentos analisados. As atividades que se seguiram à Atividade 4 têm bastante foco nos conteúdos previstos na ementa da disciplina, a saber: derivada, derivada e reta tangente, máximos e mínimos. Apenas na Atividade 8 os alunos retomam a análise do comportamento das soluções, agora para uma modificação do modelo matemático, onde o parâmetro M , que era constante, foi substituído por uma função do tempo representando a variação sazonal da população total de mosquitos na região. Kauã e Priscilla desenvolveram a seguinte análise para o gráfico de $Y(t)$ (gráfico vermelho na Fig.34).

Priscilla: Bom, ela [a derivada] não tá constante...

Kauã: O quê?

Priscilla: Não sei, tipo... ela vai variando...

Kauã: É, porque agora, tipo... antes a gente considerava a população de mosquitos fixa, né? E agora a gente colocou que os mosquitos variam conforme a época do ano. Ou seja... Ó, esse aqui é do Y , né? Esse aqui é a população de mosquitos [infectados]... olha o jeito que ela vai caindo. Esse aqui é a população de, é o número de pessoas infectadas, certo? Tem um aumento...

Priscilla: Esse aqui tem um aumento quando os mosquitos tão morrendo...

Kauã: Não, mas é que... tem muito mosquito...

Priscilla: Ah, é verdade...

[...]

Kauã: É que assim, esse daqui ó... o que a gente pode ver é que a derivada é muito mais instável, né? Ela tipo, aumenta e diminui... bastante. Não que ela chegue, mude de positivo para negativo, mas aqui ela tá grande...

Priscilla: Ela é irregular...

Kauã: É, aqui ela é grande [apontando com o mouse a região inicial do gráfico de Y], aí de repente, tipo, ela fica lenta, tipo, diminui aqui [apontando com o mouse a primeira ondulação do gráfico], aí depois ela aumenta e diminui aqui...

Priscilla: A velocidade [?]...

Kauã: *Aí até que depois ela vai tendendo a zero...*
(Trecho do *Camtasia*, Kauã e Priscilla, Atividade 8)

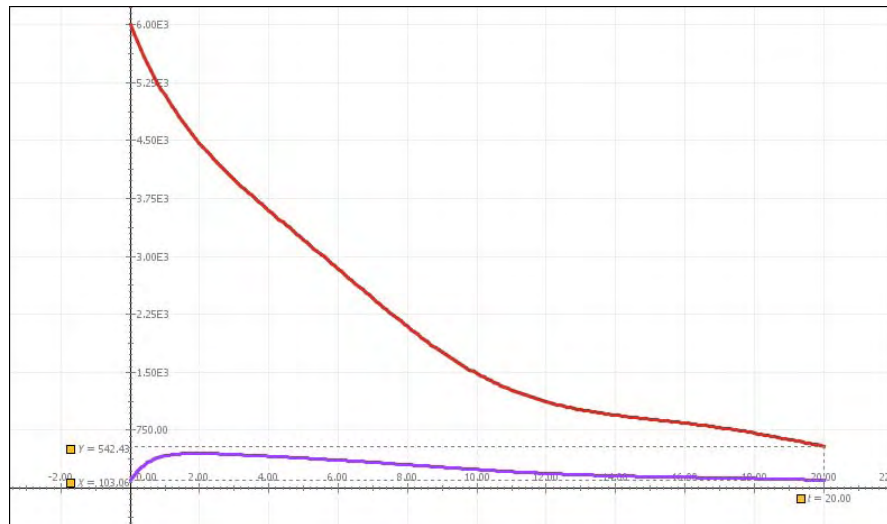


Figura 34 - Gráficos de $X(t)$ (roxo) e $Y(t)$ (vermelho) plotados simultaneamente.

Neste trecho, Kauã e Priscilla analisam os gráficos de $X(t)$ e $Y(t)$ simultaneamente. É possível notar que eles mudam completamente o foco da análise quando comparamos com as atividades iniciais. Agora o elemento de análise não é propriamente se o gráfico é crescente ou decrescente, mas sim se a derivada é positiva, negativa, e o quanto ela varia. Em algum momento eles inclusive caracterizam a derivada como “lenta”, e mais tarde Priscilla comenta sobre a velocidade, o que indica que os alunos estão interpretando a derivada como a “velocidade” de crescimento/decrescimento do número de mosquitos infectados.

Kauã e Priscilla foram a única dupla de alunos⁸⁹ que elaboraram este tipo de análise com base no sinal da derivada. Como justificar isso? Haveria alguma influência do software nesta situação? Se sim, qual? É possível que analisando outros trechos de vídeos gerados pelo *Camtasia* obteremos indícios que nos ajudem a compreender estas questões.

Nesta seção, a partir da análise dos dados de observação, em particular dos Vídeos gerados pelo software *Camtasia*, foi possível elaborar com mais detalhes uma caracterização para o papel do software de fornecer resultados sobre o fenômeno biológico. A partir das entrevistas já havia sido possível identificar o aspecto da experimentação (como experimento científico) possibilitada pelo software, caracterizando-o como um laboratório digital, onde os alunos modificam as condições de ocorrência da transmissão da malária e visualizam gráfica

⁸⁹ É importante notar havia apenas 6 arquivos gerados pelo *Camtasia* disponíveis desta atividade, e um deles não pôde ser transcrito por problemas técnicos.

e tabularmente os efeitos destas mudanças na evolução da doença em uma região.

A partir da análise dos Vídeos gerados pelo *Camtasia* foi possível verificar que, assim como em um laboratório, o software também apresenta recursos que podem ser utilizados para contribuir para um melhor entendimento do comportamento das soluções e também sua interpretação. O uso destes recursos nem sempre se mostrou espontâneo, evidenciando a importância da intervenção do material e do(a) professor(a) para que os alunos fiquem cientes das possibilidades e restrições oferecidas pelo software. Com relação aos processos de interpretação dos gráficos pelos alunos, ficou evidente a necessidade de articulação de diferentes fontes de informação.

5.4.2 Tema 2: O software contribuindo para a compreensão de conceitos matemáticos

A análise das entrevistas permitiu identificar como um dos papéis atribuídos ao software pelos alunos o de contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos. Vários questionamentos emergiram a partir daí, incluindo a que conceitos matemáticos os alunos se referiam e de que forma o software realizou esta contribuição. Na ocasião, as falas de alguns alunos deram algumas pistas relacionadas a estas questões como, por exemplo, o conceito de derivada como sendo um dos conceitos que tiveram contribuição do software; e o recurso de visualizar a reta tangente ao gráfico como uma forma de contribuição.

Nesta seção irei apresentar e discutir trechos dos diálogos dos alunos que trazem indícios para entender de que forma, em que situações e para a compreensão de quais conceitos o software contribuiu. Deste modo, organizei a seção em subseções que levam como título os principais conceitos trabalhados na disciplina. Possibilidades e limitações oferecidas pelo software, em conjunto com as atividades e as intervenções da professora, serão analisadas com relação a cada um dos conceitos, quando for pertinente.

5.4.2.1 Funções

O conceito de função foi trabalhado principalmente na Atividade 3, onde questões foram propostas para que os alunos refletissem sobre alguns dos passos realizados para a inserção e configuração do modelo matemático no software e relacionassem estas reflexões com a característica funcional das soluções do modelo. Uma das questões perguntava se X e Y eram funções do tempo e pedia que os alunos justificassem sua resposta. Como os alunos já haviam revisado o conceito de função em aula, incluindo sua definição matemática, o intuito da atividade era que retomassem esta definição e a utilizassem como meio de justificar sua

resposta.

A maioria dos diálogos gravados pelo *Camtasia* mostra que os alunos responderam corretamente que X e Y são funções do tempo, porém as justificativas é que não necessariamente envolveram a definição matemática de função. Por exemplo, no trecho abaixo é possível ver o modo como Renato explica para Natalia porque X e Y são funções do tempo.

Natalia: X pra tempo e Y pra tempo são gráficos de funções? Sim.

Renato: Sim.

Natalia: Ou, de outro modo, você acha que X e Y são funções do tempo? ... X e Y são funções do tempo?

*Renato: **Sim. De acordo com determinado tempo a gente vai ter uma determinada... [Natalia: Variação] quantidade de pessoas.***

(Trecho do *Camtasia*, Renato e Natalia, Atividade 3)

A justificativa de Renato está atrelada ao conceito de relação e, portanto, não inclui as condições para que seja uma função. Já Dayane utilizou parcialmente a definição de função para elaborar sua justificativa.

Natália: Você acha que os gráficos de $X...$ $X, t [Xxt]$ e $Y, t [Yxt]$ são gráficos de funções?

*Dayane: **Realmente, né, são. Porque... pra cada valor de x tem um valor de y .***

Natália: Ou, de outro modo, você acha que X e Y são funções do tempo? Justifique sua resposta. Procure lembrar a definição de função para tomar sua decisão. Você acha que X e Y são função do tempo?

*Dayane: **É, porque assim, elas variam conforme o tempo varia.***

(Trecho do *Camtasia*, Dayane e Natália, Atividade 3)

Como é possível ver pelo trecho acima, Dayane afirma que “para cada valor de x tem um valor de y ” e, em seguida, apenas utiliza a dependência do tempo para justificar que X e Y são funções. O fato de que para cada valor de x deve haver um *único* valor de y não é enfatizado em sua fala e um fator que pode ter colaborado para isso é a variável independente ser justamente o tempo. Como o tempo possui um caráter de continuidade, no sentido de passado, presente e futuro, me parece que intuitivamente não existe a necessidade desta ênfase, pois um determinado evento em nossas vidas não ocorre em dois momentos diferentes da mesma, já que o agora em breve será o passado, que não retorna.

Deste modo, me parece que esta sensação intuitiva é projetada para a análise do modelo matemático, que representa uma situação da vida real e, portanto, não desperta a necessidade de enfatizar o valor *único* da variável dependente para cada valor da variável independente (o tempo). Uma hipótese a considerar é a de que este fato poderia ser reforçado pela própria animação do software: basta o gráfico ser construído que é função. Isto pode ser percebido no diálogo abaixo:

Antonio: Ó, indentifique as variáveis independente e dependente das funções acima... Não, independente é o... é o tempo não é isso? Independente de todas as outras...

Diego: São funções do tempo? São.

Antonio: A população de humanos... a população infectada...

Diego: **Só não sei... Mas são funções do tempo, não são? Tipo, o tempo tá passando. Lembra que a gente deu o play e ele foi uhhh.**

Antonio: Não, ele quer dizer, ah são gráficos de funções, né?

Diego: São.

Antonio: São... Só tem um, é... Cada valor de x só tem um y né?

Diego: É.

(Trecho do *Camtasia*, Antonio e Diego, Atividade 3).

Neste trecho Diego utiliza o fato de o tempo estar passando para justificar que X e Y são funções do tempo e se refere à animação do software como forma de validação para sua justificativa. É neste sentido que a hipótese acima foi levantada. Segundo Rieber (1991, p.319, tradução nossa), “Representações do contexto do problema são esperadas serem úteis apenas se os estudantes reconhecerem as características mais salientes da representação e consequentemente compreender como essas características se relacionam com o problema⁹⁰”.

Na situação apontada, o atributo do movimento atrelado à animação pode ter reforçado o passar do tempo, sendo este o elemento que se sobressaiu para Diego e, portanto, aquele que justifica a natureza funcional de X e Y . Interessante notar, por outro lado, que Antonio não se satisfaz com esta justificativa apesar de ter observado a mesma animação que o colega. Interpretando a questão de uma forma mais geral, não considerando funções de t apenas como funções do tempo, ele percebeu a necessidade de recorrer à definição matemática (ou uma versão dela) para justificar que X e Y são funções de t .

Apesar de a animação do software possivelmente apresentar esta limitação, acredito que ela também possui aspectos positivos que podem ser mais bem explorados com relação ao conceito de função. Para isso, iniciar o debate sobre o conceito de função a partir desta atividade de repente seria mais interessante, pois se poderia confrontar as conclusões elaboradas por meio da análise dos gráficos do modelo matemático com outros exemplos para alcançar a definição matemática de função, chamando a atenção para algumas características que parecem naturais quando trabalhamos com o tempo como variável independente.

Um aspecto interessante que pode ser trazido para o conceito de função por meio do uso de animações como a que o software apresenta, é a ideia de trajetória. Em geral, os softwares utilizados para plotar gráficos o fazem de forma que o gráfico aparece por completo na tela do computador. No caso do *Modellus*, o aluno acompanha a construção do gráfico,

⁹⁰ Representations of the problem context would be expected to be helpful only if students recognize the most salient features of the representation and consequently understand how those features relate to the problem.

seguindo sua trajetória. Este tipo de recurso me parece muito útil principalmente para a análise do comportamento da função para valores grandes da variável independente, como discutirei mais adiante. Mais do que isso, porém, parecem ter o potencial de agregar um novo aspecto dinâmico ao conceito de função.

Quando Borba e Confrey analisaram o trabalho de alunos estudando funções com o software Function Probe ainda em 1996, eles destacaram a característica experimental das atividades propostas e a ideia de função não mais como um conceito estático, mas sim dinâmico, onde mudanças nos parâmetros da expressão analítica geraram mudanças no aspecto e comportamento do gráfico. Aqui, um novo elemento pode ser agregado ao aspecto dinâmico da função: a direção e sentido do gráfico. Este novo elemento apresentado pelo software teria o potencial de reorganizar o pensamento matemático dos alunos com relação ao conceito de função, segundo o construto teórico seres-humanos-com-mídias.

Porém, é difícil analisar, a partir dos dados que foram construídos nesta pesquisa, se a ideia de função como trajetória esteve presente no trabalho dos alunos e até que ponto ela foi utilizada por eles no estudo das demais funções. Uma pesquisa mais direcionada a estas questões precisaria ser delineada com procedimentos de construção de dados que permitissem avaliar estes aspectos.

5.4.2.2 Derivada

O conceito de derivada foi trabalhado das Atividades 5, 6 e 7 (ver Apêndice 2 1). A análise do vídeo gerado pela câmera externa na Atividade 5 e das transcrições dos vídeos gerados pelo *Camtasia* nas atividades 6 e 7 permitiu a identificação de alguns aspectos para serem discutidos com relação a quando e como o software contribuiu para a compreensão do conceito de derivada.

A Atividade 5 tinha como objetivo introduzir o conceito de derivada. Como descrevi no Capítulo 3, esta atividade foi desenvolvida com uma maior orientação da professora, que propunha questionamentos aos alunos, abria espaço para que eles refletissem sobre os mesmos durante alguns minutos, e logo em seguida debatia com todos sobre as ideias que tiveram. A ideia central da atividade era analisar e comparar as taxas de variação média de $X(t)$ em dois casos diferentes. A professora direcionou o debate para o desenvolvimento do conceito de taxa de variação instantânea. Para isso, os alunos plotaram os gráficos e tabelas referentes às soluções (Fig.35) com o software e, a partir daí, procederam com as discussões.

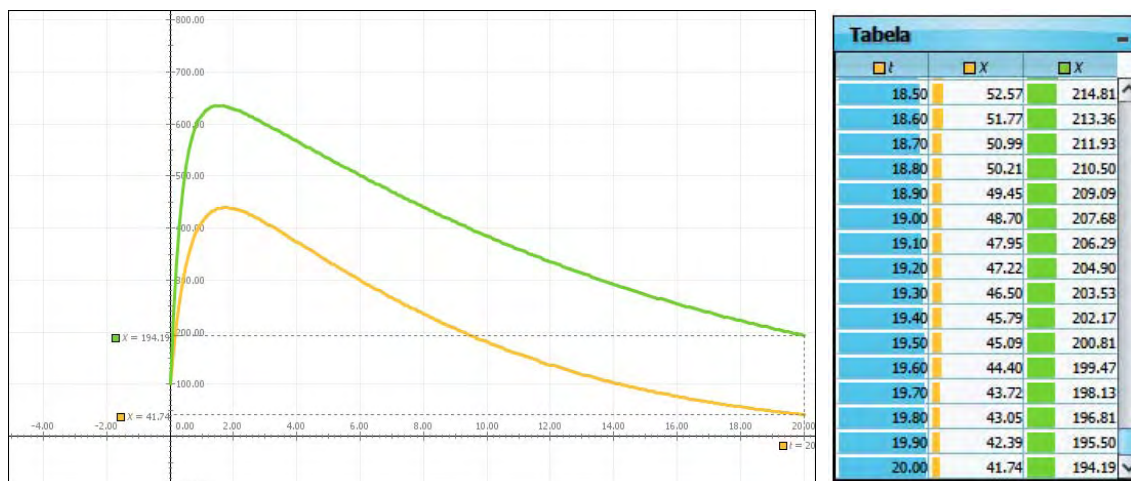


Figura 35 - Gráfico e tabela da função $X(t)$ em dois casos distintos: $a=0.29$ (curva laranja) e $a=0.6$ (curva verde).

Em alguns momentos, as discussões envolveram a ideia de velocidade e, com o intuito de auxiliar os alunos na discussão destas ideias, a professora propôs a análise do seguinte gráfico (Fig.36), realizado com uma animação do software que deixa um rastro para a partícula a cada determinado intervalo de tempo. A partir daí os alunos discutiram com a professora: como comparar a velocidade das partículas em cada uma das curvas?

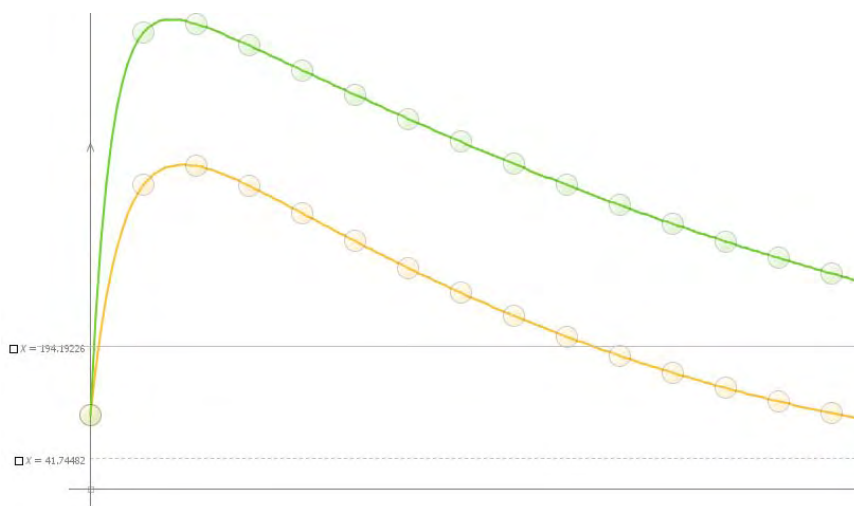


Figura 36 - Gráfico gerado com o recurso de animação do Modellus.

Todas as discussões foram realizadas com base nos gráficos e tabelas apresentados acima, de modo que o trabalho teve um caráter bastante visual. Além disso, os alunos utilizaram os dados fornecidos pela tabela para calcular as taxas de variação média conforme indicado pela professora. A análise do vídeo trouxe indícios de que o software, juntamente com os questionamentos propostos, teve dois papéis: o de disparador para a discussão sobre

taxa de variação, por meio do feedback visual fornecido; e o de fornecer os dados para os cálculos a serem realizados.

A Atividade 6 tinha como objetivo relacionar o conceito de derivada com a inclinação da reta tangente. Para isso, os alunos foram convidados a, inicialmente, encontrar a equação de uma reta secante passando pelos pontos $(1, X(1))$ e $(1.5, X(1.5))$, plotar esta reta com o software e analisar como poderiam relacionar esta reta com a taxa de variação média de $X(t)$. Em seguida os alunos foram questionados sobre como poderiam relacionar a taxa de variação instantânea com a taxa de variação média, assim como a reta tangente. Mais tarde a atividade pedia que os alunos encontrassem a equação da reta tangente a dois pontos do gráfico, porém o foco de análise estará nas duas primeiras questões. Vamos analisar alguns trechos de diálogos entre os alunos.

Mitra: O m... a tangente não é o m?

Edgar: Sim.

Mitra: Então, a tangente... [?] ela dá o valor do coeficiente angular.

[...]

Edgar: **Pode-se dizer que sim, é... a reta secante, a velocidade instantânea nada mais é do que a... a velocidade média...**

Mitra: **Mas a velocidade... a variação... a variação instantânea é aquela em que... a taxa de variação instantânea é aquela [E: Tende a zero.] que tende a zero.**

Edgar: Sim. Então...

Mitra: Aí a gente pode relacionar com a reta secante...

Edgar: Hum?

Mitra: **A gente pode relacionar ela com a reta secante por quê?**

Edgar: Porque a reta instantânea...

Mitra: A velocidade instantânea.

Edgar: **A velocidade instantânea nada mais é do que a velocidade média com h tendendo a zero.**

[...]

Edgar: Ô Renato, me diz a resposta da dois aí?

Mitra: O que que vocês colocaram na um?

Natalia: Eu coloquei assim: dá pra relacionar porque a velocidade média tem o mesmo valor do coeficiente angular da reta secante.

Mitra: Ah...

Natalia: Que é cinquenta e um ponto vinte e dois [51.22]... Só que aí na dois pergunta: e a velocidade instantânea?

Mitra: **É, aí a gente tá falando que a velocidade instantânea é a velocidade média com o h tendendo a zero.**

Natalia: **Então é a mesma coisa, tá relacionada do mesmo jeito.**

Edgar: **Mas a reta secante vai ser outra porque se a gente mudar o h aqui, ó, muda... muda a velocidade média. Muda o coeficiente angular da reta secante.**

Natalia: **Mas que continua sendo igual a velocidade média.**

Edgar: Sim.

Mitra: Mas...

Natalia: **Então, a relação continua sendo a velocidade média igual ao coeficiente angular da reta secante. A velocidade média não, desculpa, a velocidade instantânea. Vamos supor que você tenda o h a zero, vai ter um valor a velocidade média, que vai ser o mesmo valor da...**

Mitra: **Da velocidade instantânea.** Mas, então...

Edgar: Oi.

Mitra: Mas aí ela pede pra relacionar...

(Trecho do Camtasia, Edgar e Mitra, Atividade 6).

Neste trecho, Edgar e Mitra iniciam relacionando a taxa de variação instantânea com a taxa de variação média e a utilizam para justificar porque podem relacionar a taxa de variação instantânea com a reta secante. Mais adiante, conversando com Natalia, eles concluem que, ao tender o valor de h a zero, eles obtêm um valor para a taxa de variação média igual ao da taxa de variação instantânea. A conclusão dos alunos neste momento não está correta, porém é interessante ver como os alunos se engajaram em uma discussão matemática a partir da atividade proposta. Apesar da dificuldade, os alunos procuraram refletir sobre a situação e justificar suas ideias.

Entretanto, um aspecto que destaco aqui é o fato de que, após inserir a equação da reta secante no software, Edgar e Mitra não interagiram mais com o software. Dayane e Natalia também quase não interagiram com o software após inserirem a equação da reta secante. Elas desenvolveram o seguinte diálogo para a mesma questão:

Natália: *E a velocidade instantânea ou taxa de variação instantânea? Podemos relacioná-la com a reta secante? Se sim, de que forma? Como a reta tangente se relaciona com tudo isso?*

Dayane: *A tangente?*

Natália: **Qual que é a velocidade instantânea?**

Dayane: **Essa é a mesma coisa quando a gente coloca o h bem próximo de zero, lembra?**

Natália: [?]

Dayane: *É, só que teoricamente... a gente tem que pensar nessa... Isso, porque o que acontece? Isso aqui... calculando parte por parte, a gente.. teria que ficar colocando vários valores pra h , entendeu? Diminuindo, diminuindo, diminuindo o h ... Aqui a gente substituiu, a gente disse que o h era meio. Lembra que a gente montou aquela tabelinha? Quando a gente faz essa fórmula direto a gente tá substituindo dois pontos... da reta... a gente descobre esse coeficiente angular sem precisar saber o h . Aí, como é a velocidade instantânea? **A velocidade instantânea, é quando o h , que é Δt nesse caso, é zero, certo? Então tem relação. A velocidade instantânea... Podemos relacioná-la com a velocidade instantânea? Não com a reta secante, porque a reta secante ela tem dois pontos. A tangente, que é quando a gente pega um ponto só, que é quando a gente tem esse...***

(Trecho do Camtasia, Dayane e Natália, Atividade 6)

Dayane relaciona a taxa de variação instantânea com a reta tangente. Apesar de ela notar que a taxa de variação instantânea é obtida por meio da taxa de variação média com o h

tendendo a zero, ela não consegue fazer a transição e notar que as retas secantes se aproximam da reta tangente conforme o h tende a zero. Como as alunas também quase não interagiram com o software durante todo o desenvolvimento da atividade, uma hipótese que emergiu foi a de que, nesta atividade, o software não contribuiu para a compreensão do conceito de derivada e sua interpretação geométrica.

A ideia da atividade era a de que, após plotarem a reta secante ao gráfico e relacionarem a taxa de variação média com a inclinação da reta secante, os alunos conseguiriam perceber que a taxa de variação instantânea é igual à inclinação da reta tangente ao gráfico em um determinado ponto, uma vez que ao fazer o h tender a zero a inclinação das retas secantes vai se aproximando cada vez mais de um determinado valor, que é a inclinação da reta tangente. Apesar de os alunos já terem desenvolvido esta ideia durante a Atividade 5 e posteriormente com o professor Marcelo Borba em sala de aula, a maioria dos alunos não conseguiu completar este raciocínio sozinho.

Meu entendimento é o de que a atividade requisitou em demasia dos alunos, na medida em que era necessário elaborar mentalmente a visualização das retas secantes se aproximando da reta tangente conforme h diminui cada vez mais, apenas a partir do gráfico de $X(t)$ e da reta secante plotada. Além disso, a atividade não auxiliou os alunos a identificar e utilizar recursos do software que poderiam ser úteis para a elaboração desta visualização. Neste sentido, uma nova versão da atividade, ainda não testada, foi proposta e pode ser encontrada no Apêndice 3.

Entretanto, um contraponto para esta discussão pode ser feito a partir da análise do diálogo elaborado entre Kauã e Priscilla para a mesma questão apontada anteriormente:

Kauã: E a velocidade instantânea (ou taxa de variação instantânea)? Podemos relacioná-la com a reta secante? Se sim, de que forma?

Priscilla: É... a reta tangente, né? Porque a secante vai dar um valor [?]. A secante vai dar em um ponto só... Porque ó, se você aumentar aqui, ó... [Priscila dá zoom nos eixos do gráfico]. Ó, você vê que, tipo, tá passando por dentro [do gráfico], né?

Kauã: Sim.

Priscilla: Aí, tipo, meio que pega dois pontos. Só que a tangente, vai ficar menor, entende? Vai ficar praticamente bem aqui assim, vai ficar praticamente um ponto só.

Kauã: Qual que você tá falando? A reta tangente?

Priscilla: A secante é essa!

Kauã: A secante é essa, sim.

Priscilla: A tangente seria essa aqui [?]. Vai pegar praticamente um ponto assim só...

Kauã: Eu não sei como seria essa reta...

Priscilla: Assim ó... Secante praticamente, tipo... ela pega... ela vai pegar dois valores, ó. Só sei que tipo a tangente vai ficar mais ou menos assim ó... vai pegar bem em um ponto, em um ponto só...

Kauã: Hum...

Priscilla: A secante, ela pega esse valor e esse valor...

Kauã: E cruza aqui...

Priscilla: É.

Kauã: A tangente não. Ah, sim!

Priscilla: Entendeu?

Kauã: Mas como ela... Vamos do começo, né? A velocidade instantânea... podemos relacionar com a reta secante?

Priscilla: Que a velocidade instantânea ele vai querer o tempo bem menor! A gente pegou a variação de zero cinco...

Kauã: Ahã.

Priscilla: Aí seria uma secante, porque ele vai passar por dentro, entendeu?

Kauã: Não, sim, mas é que tipo...

Priscilla: A tangente? Ela vai...

Kauã: A variação instantânea ainda teria que colocar mais perto ali, não é?

Priscilla: Sim, sim... Daí quanto menor o tempo, vai pegar o t...

[...]

Kauã: Ah, tipo, quanto mais... quanto mais instantâneo, não vai... a reta, a reta não vai tender a ficar igual, elas não vão ficar mais parecidas?

...

Kauã: Porque ó, tipo... Porque a... se a gente diminuir o ponto, tipo, ele não vai cruzar dois pontos. Se isso aqui vier aqui, sabe...

Priscilla: É, quanto menor... vai ter uma reta só...

Kauã: E a reta tangente, daí, tipo... não vai tender a... ficarem iguais ou pelo menos parecidas? Porque a reta tangente encosta nele [no gráfico], não é?

Priscilla: É, encosta... somente em um ponto...

Kauã: Só que, então, na velocidade... com o... na velocidade instantânea, a taxa de variação instantânea, a gente vai ter só um ponto, tipo...

Priscilla: É...

Kauã: [?] Então as duas não vão ficar muito... muito parecidas?

Priscilla: Sim, é, então, é isso que eu queria dizer. Tipo, a instantânea, ela é mais parecida com a tangente do que com a secante. A secante seria mais parecida com a velocidade média.

Kauã: Não, mas a... Não, mas então, a secante na velocidade instantânea, vai ficar igual à tang...a... Porque tipo isso aqui, tá muito tipo... tipo isso aqui é a mesma coisa que isso aqui só que menor [Acho que falam do intervalo de tempo]. Isso vai causar que essa reta é bem parecida com essa.

Priscilla: É... é... [?]

Kauã: A equação da reta tangente...

Priscilla: Que é a velocidade instantânea.

Kauã: A reta tangente ela é só pra um momento, não é pra...

Priscilla: Então, é isso que eu queria dizer... A velocidade instantânea, entendeu? Aí, quando menor o tempo, é... a tangente vai encostar bem... Ah, eu não sei explicar... acho que você tá entendendo...

Kauã: E tipo, a questão é...

Priscilla: Qual é a pergunta mesmo?

Kauã: Como a reta secante pode ser relacionada com a velocidade instantânea?

Priscilla: Aí tá perguntando se pode relacionar.

Kauã: Sei lá...

Priscilla: Então, poder eu acho que pode, mas a gente tem que achar...

Kauã: *Mas se a gente pode relacionar com a velocidade média, a gente pode relacionar com a taxa de variação instantânea, porque...*

Priscilla: *Mas então, pra mim, com a reta tangente, porque com a reta secante eu não sei. Assim, pra mim não, entendeu, pra mim sim com a reta tangente.*

Kauã: *Então mas é que... Se a gente considerar a taxa de variação instantânea, tipo, isso aqui, não se a gente considerar a taxa de variação instantânea um h pequeno. Se a gente considerar um h pequeno, ela pode se relacionar... não é? Porque vai ter dois pontos...*

Priscilla: *Relacionar com quem?*

Kauã: *A reta secante com a velocidade instantânea. Que aí... se a gente considerar a velocidade instantânea, tipo, t igual a um $[t=1]$, sabe? Aí não dá pra relacionar com a reta secante. Agora, se eu relacionar com... com... se esse, se essa taxa de variação instantânea, a gente considerar aquele h super pequeno, sabe... Mas aí vai continuar tendo dois pontos... Não tem como relacionar com a...*

Priscilla: *É, então...*

[...]

O Professor Marcelo Borba conversa com Diego e Antonio explicando sobre fazer Δx tender a zero... Kauã e Priscila perguntam para eles o que o professor explicou.

Diego: *Então, é que de certo modo é aquela ideia de ir diminuindo o t né? Até tender a zero...*

Priscilla: *Mas assim...*

Diego: *Você usa a fórmula. Você pode usar $[?]$...*

Priscilla: *Mas aí.. seria zero, seria a reta tangente e não a secante.*

Antonio: *Você pega uma secante e você vai aproximando ela de uma...*

Priscilla: *Que vira uma reta tangente... É, é isso que eu to querendo dizer.. Tipo, sim, dá pra relacionar, mas ... pra mim é uma reta tangente, entendeu? Daí vira uma reta tangente, não é mais uma secante...*

Diego: *Poxa...*

(Trecho do Camtasia, Kauã e Priscilla Atividade 6)

Neste trecho é possível perceber que Kauã e Priscilla se envolveram em uma discussão bastante interessante sobre a possibilidade de relacionar a taxa de variação instantânea com a reta secante. Enquanto Priscilla afirmava que a taxa de variação instantânea poderia ser relacionada com a reta tangente apenas, Kauã tentava sugerir que, ao tender o h a zero, as retas secantes ficavam cada vez mais parecidas, se aproximando de uma reta limite. No meu entendimento, Priscilla estava compreendendo do mesmo modo que Kauã, como sua última fala no trecho transcrito acima revela, porém ela não estava conseguindo se expressar muito bem.

Kauã e Priscilla foram praticamente a única dupla, dentre aquelas cujas transcrições foram possíveis de serem realizadas, que conseguiram visualizar as retas secantes se aproximando da reta tangente no desenvolvimento da atividade proposta. Esta situação coloca uma pergunta: por quê? Porque eles conseguiram fazer esta visualização enquanto os demais alunos mostraram muita dificuldade?

É difícil fornecer uma explicação definitiva e conclusiva sobre esta situação, pois vários motivos poderiam ser elencados: a dedicação nos estudos, um melhor entendimento por parte dos alunos das ideias já discutidas em aula, uma habilidade visual mais bem desenvolvida, entre outras. Entretanto, um fator que pode ter contribuído para o seu desenvolvimento foi o software. Isto pode parecer contraditório, tendo em vista a discussão considerada acima, porém é importante lembrar as palavras de Salomon et al. (1991, p.8, tradução nossa): “[...] não é a tecnologia sozinha afetando as mentes, mas toda a “nuvem de variáveis correlatas” – tecnologia, atividades, objetivo, contexto, papel do professor, cultura – exercendo seu efeito combinado⁹¹”.

Nesta nuvem de variáveis também está incluído o próprio aluno e o modo como interage com a tecnologia. É possível notar, analisando o diálogo dos alunos, que eles interagiram com o software, enquanto Priscilla explicava para Kauã a diferença entre as retas secante e tangente. Por meio do recurso de zoom, Priscilla mostrou ao colega que a reta secante cruza o gráfico em dois pontos, “passando por dentro” dele. A partir daí, eles conseguiram desenvolver o raciocínio. No meu entendimento, esta interação com o software, por meio do zoom pode ser considerada um dos fatores que contribuiu para o sucesso dos alunos. Este é um exemplo de que os alunos pensaram com o *Modellus* (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Porém, a pergunta ainda se mantém: Por que apenas Kauã e Priscilla pensaram com o software? Quando Salomon et al. (1991) falam sobre a noção de parceria (*partnership*) com a tecnologia, eles ressaltam que “qualquer parceria requer esforço⁹²” (SALOMON et al., 1991, p.4, tradução nossa). Eles apresentam o conceito de *mindfulness* para destacar a importância de o estudante engajar-se em processos mentais não automáticos durante a resolução de uma atividade com o uso de tecnologia. Eles destacam a importância da atividade, do material e do ambiente para o estímulo deste estado mental. Neste sentido, o estudante que se encontra em um estado *mindfull* conseguiria estabelecer uma interação com a tecnologia utilizada que lhe proporcionasse novos insights e o desenvolvimento de conjectura.

A consideração feita por Artigue (2002) pode ser retomada neste momento: é importante estar ciente dos recursos oferecidos pelo software e das possibilidades e limitações dos mesmos. No caso de Kauã e Priscilla, por exemplo, os alunos estavam conscientes do comando de zoom e o utilizaram de forma que os auxiliasse a lidar com a situação proposta.

⁹¹ [...] it is not the technology alone affecting minds but the whole “cloud of correlated variables” – technology, activity, goal, setting, teacher’s role, culture – exerting their combined effect.

⁹² [...] any partnership requires effort [...].

No meu entendimento, a consciência do comando zoom foi despertada por meio de uma intervenção da professora momentos antes, quando conversou com os alunos a seu chamado para solucionar uma dúvida. Os alunos haviam encontrado o valor do coeficiente angular da reta secante passando pelos pontos $(1, X(1))$ e $(1.5, X(1.5))$ e verificaram que o valor dera igual à taxa de variação média de X no intervalo de tempo $[1, 1.5]$. Como eles fizeram esta verificação sem fazer os cálculos, mas comparando o resultado com um colega, ficaram na dúvida sobre como justificar que os valores deram iguais.

Kauã: Aqui a gente tá discutindo a relação entre a média... entre a velocidade média e o...

Débora: A reta secante.

Kauã: A reta secante. A gente sabe que o resultado da velocidade média é o mesmo valor de m , o coeficiente angular. Essa é a relação?

Débora: Isso.

Kauã: Agora justifique.

[risos]

Priscilla: Tem que fazer a conta...

Débora: É, como que você acha o m ?

Priscilla: Pode justificar fazendo a conta?

Kauã: O m dá pra justificar... o m dá pra... dá pra achar o m de dois modos, pela velocidade média ou substituindo na...

Débora: Ah, é porque vocês usaram a equação... E o m também...

Priscilla: Tá errado?

Débora: Não, não tem problema. É que daí se vocês usarem... O que que é esse m na verdade com relação àquele ângulo de inclinação da reta ali?

Kauã: É o...

Priscilla: É o coeficiente...

Kauã: É o coeficiente angular da tangente...

Débora: Na verdade o m é exatamente o valor da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo x , né? Como que a gente calcula a tangente de um ângulo?

Priscilla: É... cateto oposto pelo adjacente.

Débora: Quem que é o cateto oposto no caso ali de vocês?

Priscilla: É o X ... A variação do X .

A professora dá um zoom no gráfico e mostra com o mouse para eles:

Débora: Então você quer achar com relação a isso daqui, não é? [Indica com o mouse um triângulo retângulo imaginário, mostrando a inclinação da reta com relação ao eixo horizontal] Então tem que fazer a medida do cateto oposto sobre a medida do cateto adjacente. Então, quem que é a medida do cateto oposto? Como vocês acham ela? [Desenha com o mouse o cateto oposto]

Kauã: É o...

Priscilla: O X final...

Kauã: É o X final menos o X inicial.

Débora: E o cateto adjacente?

Priscilla: O tempo final menos o tempo inicial.

Débora: Então, dá pela equação. No fim, é a mesma coisa. Tudo é a mesma coisa.

(Trecho do Camtasia, Kauã e Priscilla, Atividade 6)

A intervenção da professora, que auxiliou os alunos a justificar sua conjectura de que

o valor do coeficiente angular da reta secante ao gráfico de uma função é o mesmo da taxa de variação média da função, fez uso do recurso de zoom, possivelmente despertando para os alunos possibilidades que até então não estavam evidentes para eles. De fato, até o momento Kauã e Priscilla não haviam utilizado o zoom para desenvolver suas análises em nenhuma das atividades anteriores.

Por meio dessas considerações é possível inferir que “pensar com” a tecnologia é um processo que envolve pelos menos dois aspectos: a identificação de recursos oferecidos pela tecnologia que apresentem possibilidades para o desenvolvimento da situação problema e o estado de *mindfulness* por parte do usuário/aluno. É claro que estes fatores não se desenvolvem por conta e, assim como Salomon et al. (1991) destacam a importância das atividades para o desenvolvimento do estado de *mindfulness*, acredito que elas também têm um papel fundamental na conscientização sobre os recursos oferecidos pela tecnologia, assim como as intervenções do professor.

Neste sentido, essas considerações reforçam ainda mais a necessidade de reelaboração desta Atividade, para que além de valorizar as potencialidades do software com relação ao problema proposto, oriente os alunos na identificação de recursos com os quais eles possam “pensar com”. Quanto ao estabelecimento de um estado de *mindfulness*, acredito que a maioria dos alunos se engajou ativamente em discussões sobre conceitos matemáticos envolvidos na situação proposta.

O objetivo da Atividade 7 é analisar a existência de pontos de máximo e mínimo nas soluções do modelo e relacioná-los com o valor da derivada da função nestes pontos. Para a realização desta atividade, os alunos ativaram a função “Tangentes” do software, que fornece um segmento de reta tangente que acompanha a construção do gráfico (Fig.37). Além disso, a inclinação da reta é representada por um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento de reta tangente. Novamente o diálogo estabelecido por Kauã e Priscilla chamou a atenção dentre as transcrições para esta atividade. O diálogo abaixo está relacionado com a análise da inclinação da reta tangente ao longo do gráfico e a relação com seu crescimento e decrescimento.

Kauã: Aqui tá a tangente no final [ele aponta com o mouse a região final do gráfico]. O que que a gente sabe... tangente positiva [segue com o mouse o movimento crescente inicial do gráfico]... tangente zero [com o mouse sobre o ponto de máximo]... tangente zero, derivada zero... o coeficiente angular da tangente... e aqui é negativo, até o final. Aqui ela é... grande [Kauã move o mouse acompanhando a curva próximo do ponto inicial] é...

Priscilla: É crescente.

Kauã: Não, mas... a [?] é grande, ela é alta aqui...

Priscilla: Ah tá.

Kauã: Então a derivada é alta. Aqui ela vai reduzindo [aponta com o mouse a região da curva próxima e anterior ao ponto de máximo], até chegar em zero nesse pico, e depois ela vai caindo... também, tipo, ela vai aumentando cada vez menos, ou seja, a derivada vai... se aproximando cada vez mais de zero...

Priscilla: Aqui ela é só menor...

Kauã: Aqui ela é só menor... Mas ela nunca chegou... ela não chega a zero aqui [apontando com o mouse para a região do gráfico próxima a $t=20$], só aqui [apontando com o mouse para o ponto de máximo], mas...

...

Kauã: ãh... Como você relacionaria o sinal da derivada de com o crescimento/decrescimento do gráfico? Ah, é isso! A inclinação da reta tangente... ela tá mostrando como que tá a variação em cada momento... nesse momento ela tá maior [apontando para o início do gráfico]... Vamos de novo pra gente ver... [Kauã reseta e dá play novamente. Ele acompanha a animação do gráfico e faz seus comentários]. Tá indo rápido... Ó, aqui ela fica zero depois vai caindo.. e aí... é isso...

(Trecho do Camtasia, Kauã e Priscilla, Atividade 7)

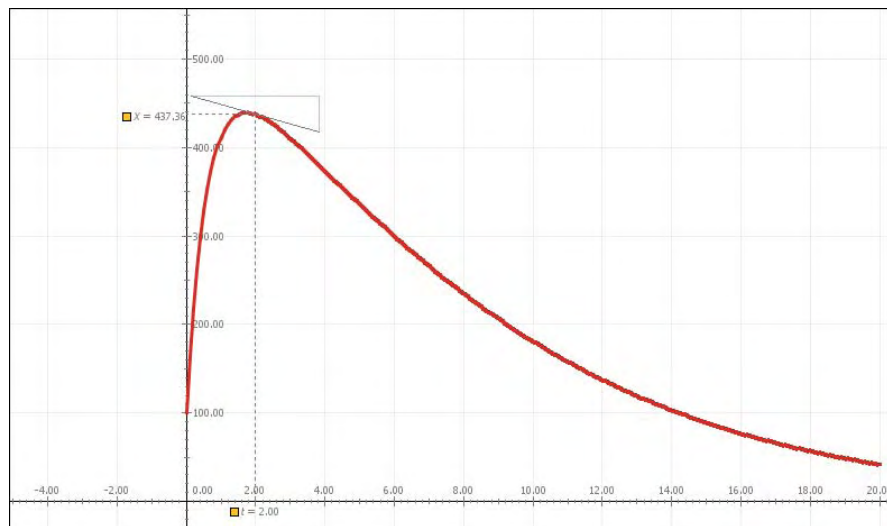


Figura 37 - Gráfico de $X(t)$ com a opção “Tangentes” ativada

O que chama a atenção neste trecho é o modo como Kauã analisa a inclinação da reta tangente em diferentes pontos do gráfico. Diferentemente dos demais colegas⁹³ que, em geral, descreveram “inclinação positiva quando o gráfico é crescente e inclinação negativa quando o gráfico é decrescente”, Kauã detalhou mais as diferenças que percebeu na inclinação da reta. É possível perceber isto quando ele descreve a inclinação da reta para pontos do gráfico um pouco antes do ponto de máximo e também na região do gráfico próxima a $t=20$.

A análise minuciosa da inclinação das retas tangentes ao gráfico, aliada ao recurso visual dinâmico do software, também ilustra o pensar com o *Modellus*. A partir do feedback

⁹³ Novamente aqui me refiro às transcrições disponíveis para esta atividade que, no total, foram 5.

visual fornecido pelo software, os alunos não só descreveram de forma geral as inclinações das tangentes, mas destacaram aspectos particulares como pontos onde a inclinação é zero e regiões onde a inclinação é máxima.

O recurso “Tangentes” tem o potencial de reorientar ou reorganizar (BORBA; VILLARREAL, 2005; PEA, 1985) a atividade de analisar a inclinação das retas tangentes aos gráficos das soluções do modelo matemático. Temos indícios disto quando nos recordamos da Atividade 6. Nesta atividade foi pedido aos alunos para calcular a equação da reta tangente ao gráfico em dois pontos distintos. Por meio da análise das transcrições do *Camtasia* fica evidente que o pensamento matemático dos alunos permaneceu focado nos cálculos: determinar o valor do coeficiente angular da reta tangente por meio da equação do modelo matemático; determinar a equação da reta, inclusive fazendo simplificações; conferir os cálculos e corrigi-los quando não corretos. O tempo investido nestes cálculos foi muito maior do que aquele destinado à interpretação das informações fornecidas pela inclinação das retas tangentes. A opção “Tangentes” permite uma reorganização da atividade e também do pensamento matemáticos dos alunos: o foco agora não é mais o cálculo, as operações mais mecânicas, uma vez que a reta tangente já é apresentada, mas é a análise da própria inclinação.

Além disso, há também um processo de moldagem do pensamento matemático por parte do software na medida em que as infinitas retas tangentes ao gráfico são representadas por apenas um segmento de reta, que “passeia” pelo gráfico, adaptando sua inclinação a cada ponto do mesmo. Este modo de representação molda a elaboração de uma imagem mental para as retas tangentes que é dinâmica. O leitor pode se questionar sobre as implicações deste aspecto dinâmico para a compreensão do conceito de reta tangente ao gráfico de uma função e do conceito de derivada. Infelizmente, os dados construídos nesta tese não permitem que sejam tecidas considerações seguras quanto a esta questão.

Porém, é possível depreender dos dados que Kauã e Priscilla desenvolveram uma estratégia mental de visualização da derivada atrelada à inclinação da reta tangente que passaram a utilizar para analisar o comportamento das soluções do modelo. Como foi apresentado na Seção 5.4.2.1 os alunos mudaram o foco de análise do gráfico em si para a inclinação das retas tangentes ao gráfico, mesmo sem a opção “Tangentes” ativada. Neste sentido, este recurso do software de certa forma esteve presente no coletivo pensante (LÉVY, 1993) formado pelos alunos e o software quando do desenvolvimento da Atividade 9 (BORBA, 2005).

5.4.2.3 Limite

O conceito de limite foi discutido na disciplina apenas de forma intuitiva, sem uma formalização matemática. Devido a isso, uma atividade específica para este conceito não foi elaborada, porém a análise das transcrições dos vídeos mostrou que algumas das atividades já elaboradas poderiam ser usadas para a discussão ou introdução deste conceito com os alunos tendo em vista que vários dos gráficos das soluções apresentaram uma tendência de comportamento assintótico para valores suficientemente grandes de tempo.

Nesta seção irei apresentar trechos dos diálogos dos alunos em que o conceito de limite aparece em potencial. Alguns destes trechos mostram como os alunos interpretaram de diferentes maneiras o comportamento dos gráficos e, em alguns momentos é possível identificar a potencialidade de alguns recursos do software na discussão deste conceito. Vamos iniciar olhando um trecho do diálogo entre Renato e Natalia durante a Atividade 4. Os alunos analisavam os gráficos de $X(t)$ para três casos distintos simultaneamente ($c=0.01$; $c=0.1$; $c=0.9$) (Fig.38). Em um determinado momento Renato fez o seguinte comentário:

Renato: Posso aumentar, posso aumentar o tempo aqui? Só pra gente ver e eu já mudo? [Aumenta o valor máximo de t e refaz o gráfico].

Natalia: É, o último [roxo] tá constante.

Renato: Tá.

Natalia: O debaixo [vermelho] tá diminuindo um pouquinho e o e... e o outro [azul] chegou quase ao zero.

Renato: É. Tá vendo que, então a gente pode falar que...

Natalia: Que o de cima [roxo] ele chega a uma constante.

(Trecho do Camtasia, Renato e Natalia, Atividade 4).

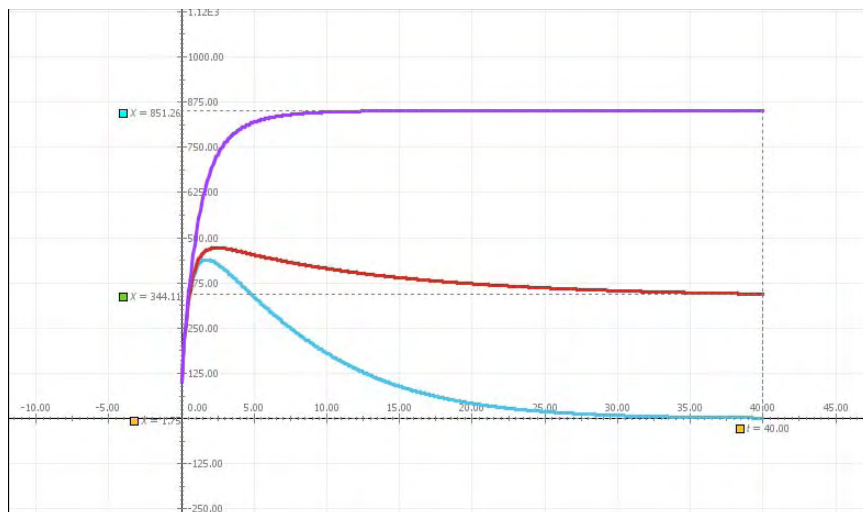


Figura 38 - Gráficos de $X(t)$ para t máximo igual a 40.
Curva azul – $c=0.01$; curva vermelha – $c=0.1$; curva roxa – $c=0.9$.

No momento em que esta atividade foi realizada os alunos ainda não tinham visto a definição de derivada, que é o momento onde a noção intuitiva de limite aparece na disciplina. Eles interpretaram, portanto, o comportamento dos gráficos como se eles fossem alcançar o valor para o qual se aproximam. Por exemplo, o gráfico azul “chegou quase ao zero”, o que indica que para eles aumentando o tempo o gráfico chegará ao zero; já o gráfico roxo “chega a uma constante”. Esta interpretação está fortemente atrelada aos aspectos visuais do gráfico, pois os alunos não analisam os valores da tabela, por exemplo.

Este fato ilustra que uma análise baseada apenas no aspecto visual pode não ser precisa. Como comentei anteriormente, a escala automática do software é ótima para uma análise mais global do gráfico, porém para um estudo mais detalhado do comportamento do gráfico pode ser necessário o uso de recursos que auxiliem a superar esta limitação. O software possui alguns, que serão analisados no texto que segue.

Uma atividade em que os alunos foram explicitamente requisitados a analisar o comportamento do gráfico para valores grandes de t foi a Atividade 9, onde eles analisaram retratos de fase do modelo matemático. Dayane e Natália fizeram a seguinte análise do retrato de fase $X \times Y$ para o caso em que $c=0.01$ (Fig.39):

Natália e Dayane modificam o valor máximo de t para 60 e dão play. Acompanham por alguns segundos o movimento da curva.

Dayane: Vai ficar negativo.

Natália: Não, vai pro zero.

Elas escrevem no editor de texto:

C) A tendência do comportamento da curva, conforme o tempo passa cada vez mais, é que chegue mais próximo do zero.

Natália: Mas e se você aumentar, colocar pra cem?

Dayane modifica o valor máximo de t para 100 e dá play. Elas acompanham os valores pela tabela, o que é possível de perceber pois apontam com mouse para os valores que são gerados na tabela.

Dayane: Ué, vai ficar negativo? Mas porque o gráfico não mostra?

Natália: Não, não fica negativo. É zero vírgula zero zero zero zero...

Dayane: Então não chega no zero.

...

Dayane: O que isso significa em termos do fenômeno?

Elas escrevem:

E termos do fenômeno significa que diminuirá muito o número de pessoas e mosquitos contaminados, mas nunca chegará a zero.

Natália: Nunca vai chegar a zero?

Dayane: Não. Vamos colocar um milhão!

Dayane modifica o valor máximo de t para 10000 e dá play. Elas dão play e analisam a tabela por mais alguns segundos.

Dayane: Nossa, não vai acabar nunca mais! [...] Não, não chega a zero. Então, nunca chegará, nunca chegará...

Natália: Tenderá a zero...

Dayane: Não tenderá... Mas não existirá nenhum... tempo máximo... Nunca terá um tempo máximo...

Ela completa a escrita:

E termos do fenômeno significa que diminuirá muito o número de pessoas e mosquitos contaminados, mas nunca chegará a zero, independente do tempo que passar.

(Trecho do Camtasia, Dayane e Natália, Atividade 9)

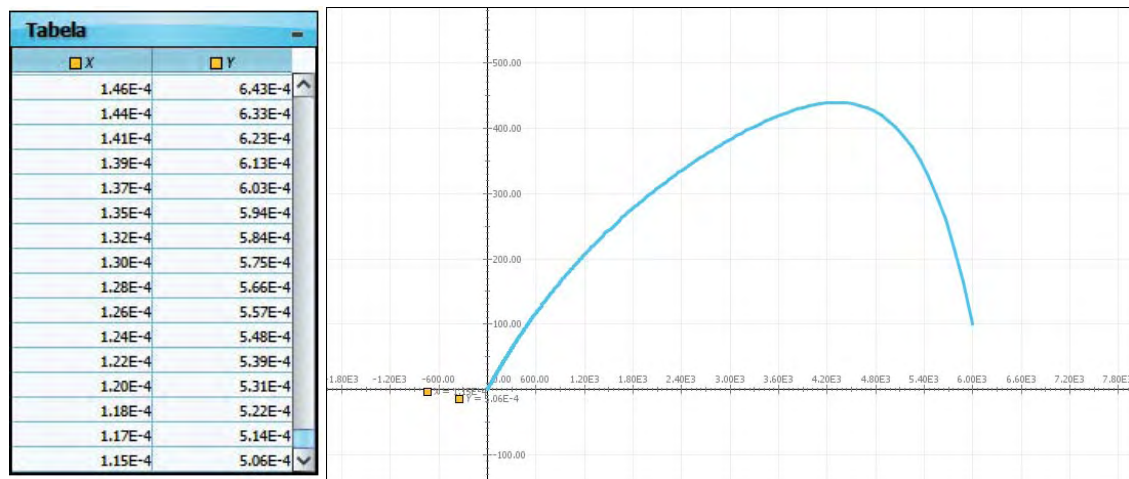


Figura 39 - Tabela e retrato de fase XxY para $c=0.01$ e t máximo igual a 100.

Neste trecho é interessante notar o modo como Dayane interage com as representações gráfica e tabular das soluções do modelo, buscando uma coerência entre as informações fornecidas. A intervenção de Natália sobre a notação utilizada na tabela auxiliou Dayane a compreender o comportamento do gráfico, percebendo que não havia discrepância entre as representações. A tabela se mostra como um recurso importante para este tipo de análise de comportamento, pois fornece os valores atingidos pela função.

Outro recurso que pode ser interessante na análise do comportamento assintótico dos gráficos é o zoom. Rafael e Henrique descobriram um comando para dar zoom no gráfico exatamente sobre o ponto que se quer. Eles usaram este recurso para analisar o mesmo gráfico mencionado acima.

Rafael e Henrique aumentam o valor máximo de t para 80 e constroem o gráfico várias vezes. Em seguida eles dão zoom na curva na região próxima à origem e aumentam o valor máximo de tempo para 2000. Refazem o gráfico e vão dando zoom na região do gráfico próxima à origem.

Henrique: *Vai indo no negativo, tudo negativo...*

Rafael: *Nossa, mano, ele tá aqui ainda. É eterno, véio. Será que ele vai chegar lá?*

Henrique: *Não passa...*

Eles vão dando zoom, cada vez mais... até que perdem o gráfico e voltam para a escala automática.

Henrique: *Ah, já dá pra gente entender que... ele não passa... [para valores negativos]...*

Rafael: *Que ele tende... ao zero nos dois eixos, só que ele nunca alcança [o zero]...*

(Trecho do Camtasia, Rafael e Henrique, Atividade 9)

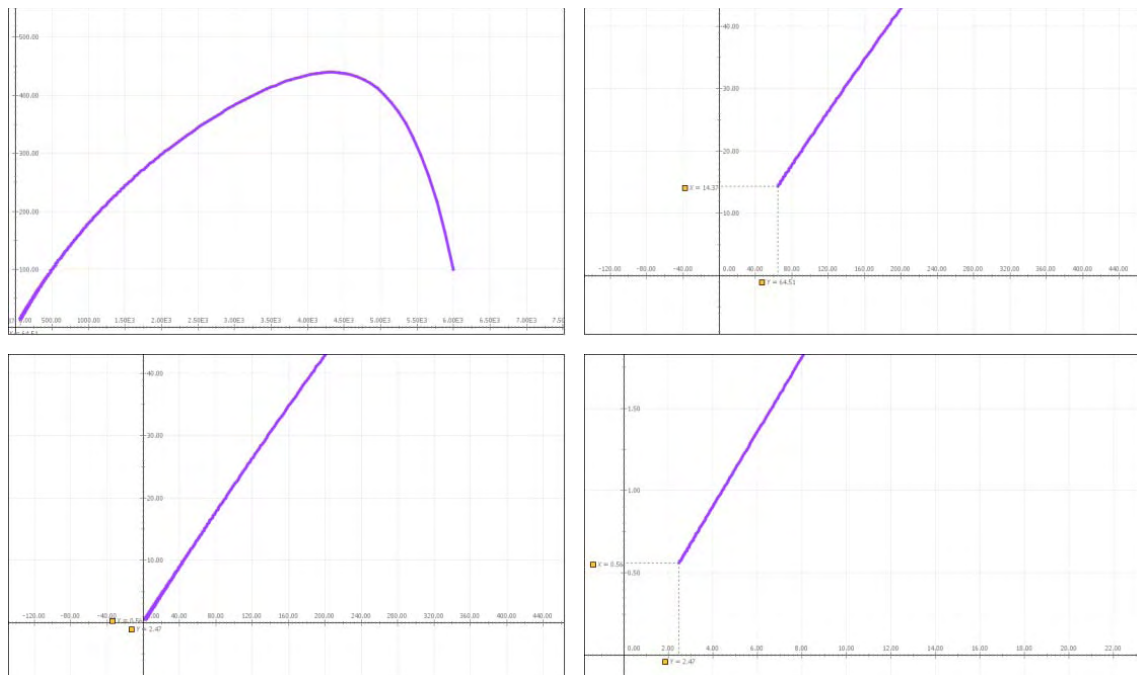


Figura 40 - Sequência de imagens mostrando o uso do zoom para analisar o gráfico $X \times Y$ próximo da origem.

O uso do zoom conforme o gráfico estava sendo construído permitiu aos alunos acompanharem a curva se aproximando da origem cada vez mais (Fig.40), porém sem alcançá-la, um recurso visual dinâmico que lembra muito o processo de aumento de um microscópio. Quando a curva se aproximava da origem, os alunos davam o zoom e percebiam que ainda existia uma distância entre a curva e a origem do plano cartesiano. A cada vez que os alunos utilizavam a função zoom era como se trocassem a lente de aumento do microscópio para uma lente mais potente. Por causa desta visualização que Rafael comentou

com Henrique que o processo era “eterno”.

Finalmente, a própria animação mostrou-se com potencial para trabalhar o conceito de limite. O trecho abaixo foi extraído do diálogo entre Daniel e Hileia enquanto eles analisavam a trajetória XxY para $c=0.1$ (Fig.41).

Daniel e Hileia modificam o valor máximo de t para 150 e dão play. Hileia quer acelerar o processo e movimenta o controle do tempo com o mouse, mas o software não acompanha.

Hileia: [...] Ah, ele não tá nem andando!

Daniel: Dá até pra jogar jogo da velha... [risos]

Hileia: Nossa!

Daniel: Parou de andar...

Hileia: É, não vai chegar...

Daniel: É, ele deve tender a zero também, né, mas...

Hileia: [?]

Daniel: Se ele não tende a zero, a gente pode falar que ele tem uma... [?]

[...]

Eles modificam mais uma vez o valor máximo de t , agora para 300000.

Daniel: Até aqui ele vai rapidão, aí depois devagarinho e já vai... quase não muda...

Hileia: Ah, tipo, parou no mesmo lugar... Bom, enfim....

[...]

(Trecho do *Camtasia*, Daniel e Hileia, Atividade 9)

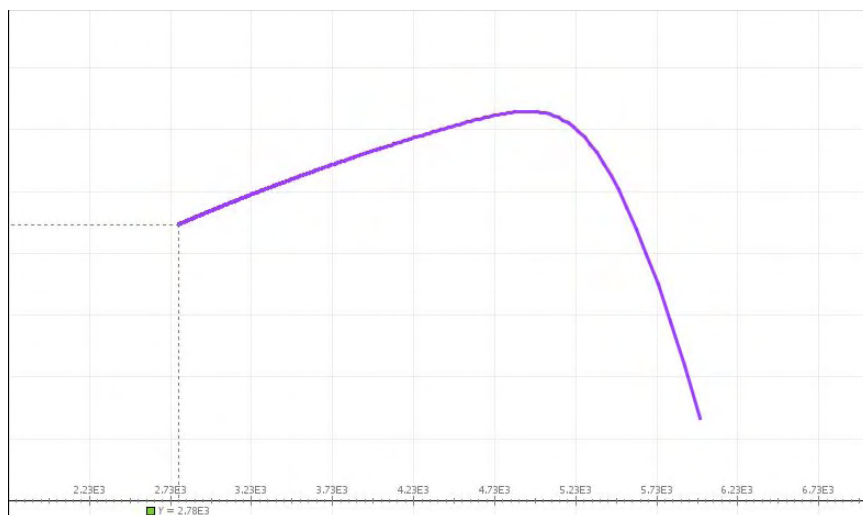


Figura 41 - Retrato de fase XxY para $c=0.1$ com valor máximo de t igual a 150.

Conforme o gráfico é construído, Daniel e Hileia acompanham sua perda de velocidade e o acúmulo do gráfico em um determinado ponto. Os alunos têm em mente inicialmente que o gráfico irá se aproximar de zero, como viram ocorrer no primeiro caso, porém não é o que ocorre. Apesar de verem o gráfico “parando” próximo àquele determinado

ponto, eles não conseguem interpretar muito bem o que ocorre devido à sua hipótese original. Assim, eles não chegam a concluir nada e passam para o próximo caso. No relatório desta atividade fazem a seguinte descrição: “O gráfico para o caso 2 sofre um aumento no número de pessoas infectadas e logo após um pequeno decréscimo” (Trecho do Relatório, Daniel e Hileia, Atividade 9).

A animação do software também parece ter o potencial de contribuir para a compreensão do conceito de limite, na medida em que é possível visualizar o gráfico se aproximando cada vez mais de uma assíntota ou, no caso do retrato de fase, é possível visualizar o gráfico se acumulando em um ponto. Neste último caso, ainda, a animação também pode contribuir para o entendimento do conceito de ponto de equilíbrio no caso de estudo de sistemas de EDO.

É claro que todos estes recursos precisam ser explorados com atividades que possibilitem ao aluno utilizá-los no sentido de desenvolver o conceito de limite. Como isto não foi feito nas atividades apresentadas nesta abordagem pedagógica, não é possível avaliar com precisão as possibilidades e limitações dos mesmos, apenas indicar uma potencialidade.

Cada um dos recursos (a tabela, o zoom, o aumento do valor máximo de t , a animação do gráfico) traz um aspecto diferente para o conceito de limite, ou seja, cada um dos recursos (re)organiza o pensamento matemático dos alunos (BORBA; VILLARREAL, 2005) com relação a este conceito de uma forma diferente. Por exemplo, enquanto a animação ressalta a ideia de acumulação, o zoom ressalta a ideia de que sempre existirá um “espaço” entre a curva e a origem do sistema de eixos e que pode ser maximizado. É claro que essas ideias estão em um nível intuitivo, mas acredito que elas podem ser trabalhadas de modo a refinar e formalizar o conceito de limite.

5.4.3 Tema 3: O software como um meio para relacionar Matemática e Biologia

Este terceiro tema emergiu da análise das entrevistas, e atribui ao software um papel de mediar o estabelecimento de relações entre Matemática e Biologia. Como discuti anteriormente, não estou afirmando que foi o software o responsável pelos alunos estabelecerem relações entre as duas áreas científicas. É importante estar ciente de todo o contexto em que o software foi utilizado – as atividades, as intervenções da professora, as discussões entre os alunos, etc. Por outro lado, também é preciso estar ciente do fato de que se não fosse pelo software os alunos dificilmente teriam acesso ao modelo e suas soluções.

Em geral, durante o desenvolvimento das atividades os alunos relacionaram as informações obtidas por meio do software com o fenômeno biológico. Nem sempre,

entretanto, foram críticos com relação à sua plausibilidade. Por exemplo, quando eles analisaram a modificação no modelo matemático sugerida na Atividade 8 (ver Apêndice 2) nenhum dos alunos questionou se a função seno seria uma boa aproximação para a oscilação sazonal da população total de mosquitos. Esta capacidade crítica é muito importante, e seria interessante se ela se mantivesse presente durante todo o desenvolvimento das atividades. Porém, como Dayane colocou perante um questionamento da professora sobre não terem criticado a função utilizada, com o tempo os alunos acostumaram-se com as hipóteses do modelo (Vídeo Câmera Externa, 02/04/2011).

Certamente as hipóteses de um modelo matemático são centrais para uma boa avaliação das soluções fornecidas, porém as previsões que se fazem a partir delas nem sempre são realistas. Neste sentido, a análise destas previsões pode ressaltar a importância de fatores que foram desconsiderados quando da elaboração do modelo por motivo de simplificação. No caso da abordagem pedagógica aqui proposta, o trabalho final tinha como um de seus objetivos propiciar aos alunos mais conhecimento sobre o fenômeno biológico e, portanto, dar subsídios para que eles pudessem questionar o modelo matemático. Entretanto estes questionamentos pouco apareceram nos diálogos dos alunos, de modo que é importante refletir sobre possíveis formas de enfatizar mais este aspecto na próxima ocasião em que uma versão modificada destas atividades for empregada.

Uma das atividades que mais apresentou questionamentos ou comentários dos alunos e que indicou que eles estavam conscientes das limitações do modelo foi a Atividade 9, a última aplicada no semestre. Por exemplo, durante a análise do comportamento do retrato de fase $X \times Y$ para $c=0.01$, com valor máximo de t igual a 50, Natalia faz o seguinte comentário:

Natalia: Beleza. O que isso significa em termos do fenômeno?

Renato: Hum...

*Natalia: **Que conforme o passar do tempo... em algum momento não teremos mais pessoas infectadas nem mosquitos infectados. O que é uma coisa que não dá pra fazer, mas... Biologicamente a gente sabe que não vai acontecer.***
(Trecho do *Camtasia*, Renato e Natalia, Atividade 9).

Neste trecho, Natalia descreve o comportamento que observa do retrato de fase: “em algum momento não teremos mais pessoas infectadas nem mosquitos infectados”, porém logo em seguida ela afirma que “biologicamente a gente sabe que não vai acontecer”. Ou seja, seu comentário mostra que ela está consciente das limitações do modelo matemático, uma vez que uma situação de extinção da malária em uma região é praticamente impossível sem alguma intervenção. Apesar de alguns parâmetros do modelo matemático poderem ser relacionados

com algum meio de prevenção, por exemplo, este tipo de intervenção não está claramente colocado nas equações, de modo que em princípio não são considerados. Por outro lado, esta situação realça a importância de considerar o período de incubação, fator que influencia na manutenção da doença em uma região e foi desconsiderado para o modelo de Ross-Macdonald.

Estas discussões, é claro, precisam ser fomentadas pelo(a) professor(a) durante o debate em grande grupo, algo que nem sempre é possível, já que algumas vezes não há a participação dos alunos. Uma possibilidade é introduzir questões nas atividades que convidem os alunos a avaliar a plausibilidade das informações e previsões obtidas por meio da análise das soluções do modelo de forma mais explícita.

Ainda com relação à mesma atividade, Kauã e Priscilla e Diego e Antonio fazem as seguintes observações:

Kauã: O que significa em termos do fenômeno? Que a gente vai acabar com a malária.

[risos]

Kauã: Tem o fato de que, primeiro, não é possível ter a população negativa...

Priscilla: Então...

Kauã: Mas e o fato de... de nunca chegar a zero?

Priscilla: Que... sempre vai ter... malária, não é? Eu acho que é isso mesmo!

Kauã: Porque se a gente pensar esse zero vírgula zero zero zero zero... não vai ter ninguém.

Priscilla: É...

(Trecho do Camtasia, Kauã e Priscilla, Atividade 9)

Antonio: O que aconteceu? Vê ali. [Diego analisa os últimos valores da tabela para X e Y].

Diego: Ficou zero ponto trinta e cinco aqui. Não ficou nem uma pessoa, ficou um terço de uma pessoa. Você corta as pernas dela, tá com malária.

[risos]

Diego: O resto do corpo não tá.

Antonio: Aumenta o tempo aí então, vai.

[Eles colocam o valor máximo de t igual a 90].

Antonio: Bom o que acontece? O que acontece é isso que a gente já esperava já.

Diego: É. Olha ali ó, tá caindo.

Antonio: Nunca vai chegar a zero, né?

Diego: Never, cara, never. Never. ... Aí, mano... Mano, ficou zero vírgula...

...

Antonio: O que significa em termos do fenômeno? Significa.... que...

Diego: O dedão de uma pessoa vai ter malária. [risos]

Antonio: Que alguém vai ter que amputar a perna...

(Trecho do Camtasia, Antonio e Diego, Atividade 9)

Estes dois trechos mostram a inquietação dos alunos com o comportamento mostrado

pelo software (ambos X e Y tendendo a zero conforme t tende ao infinito) e a sua interpretação em termos do fenômeno biológico. Kauã e Priscilla, por exemplo, enfrentam uma contradição, pois por um lado o fato de os valores de X e de Y nunca chegarem a ser zero poderia indicar que ainda existe malária na região e, por outro lado, X e Y indicam quantidade de indivíduos, de modo que para valores menores do que 1 já não existe um indivíduo. Diego e Antonio ressaltam esta mesma questão quando em um tom de brincadeira falam que apenas uma parte da pessoa tem malária.

Esta dificuldade de interpretação parece ser decorrente, em parte, de o modelo matemático ser contínuo enquanto que as variáveis representam quantidade de indivíduos, em geral representada por números inteiros. Esta situação pode reascender a discussão sobre a relevância da matemática discreta para cursos em que a Matemática é uma disciplina em serviço. De fato, o modelo matemático apresentado aos alunos poderia ser reelaborado em termos de equações a diferenças finitas. A escolha pelo modelo utilizando EDO deu-se principalmente em função do conteúdo matemático previsto na ementa. Apesar de os alunos não conseguirem lidar muito bem com estas contradições, seus questionamentos mostram que eles estavam atentos, naquele momento, às possíveis limitações do modelo matemático, possivelmente em decorrência da intervenção feita pela professora na aula anterior.

Além destas reflexões sobre as informações dadas pelo modelo e da interpretação dos gráficos fornecidos pelo software em termos do fenômeno biológico, os alunos também se envolveram em discussões sobre os conceitos matemáticos com os quais estavam trabalhando. Algumas vezes estes debates ocorreram de forma descontextualizada, enquanto em outras estiveram relacionados com a situação biológica que estavam analisando (muitas vezes incentivados pelos questionamentos propostos nas atividades). Será que o software exerceu algum papel no desenvolvimento destas reflexões, além de propiciar aos alunos o acesso às soluções do modelo, como foi discutido quando da análise das entrevistas?

O diálogo abaixo entre Dayane e Natália, ilustra a constatação da informação fornecida por cada uma das funções $X(t)$ e $Y(t)$ sobre o fenômeno biológico. As alunas trabalhavam na Atividade 3. Após configurarem o que é pedido, elas dão o play e obtêm os gráficos de X e de Y em função do tempo (Fig.42).

Dayane: Uau... que lindo!

Natália: Mas esse aqui é o tempo [apontando o eixo horizontal com o mouse] e esse aqui é...?

Dayane: Ó, Y é o mosquito, lembra?

Natália: Ó o tempo tá andando.

Dayane: Então tem dois gráficos. Tem um gráfico em função... a população [humana] infectada em função do tempo e o outro de mosquitos infectados em função do tempo.

(Trecho do *Camtasia*, Dayane e Natália, Atividade 3)

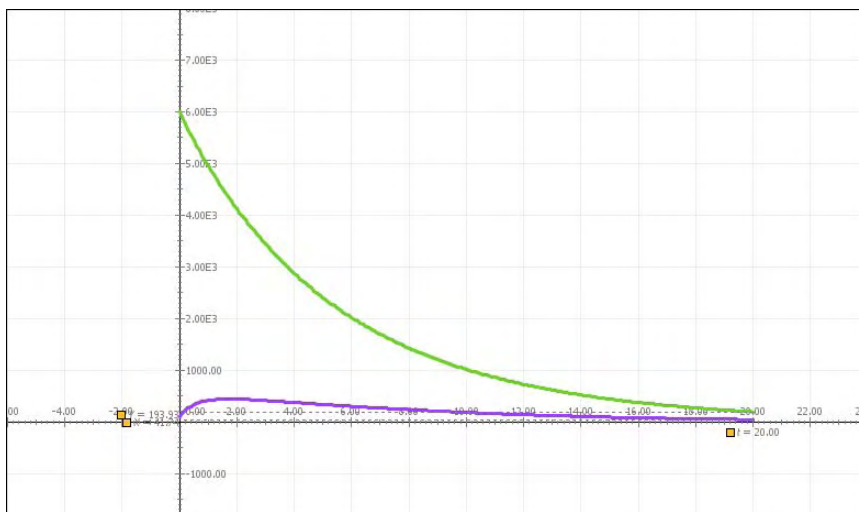


Figura 42 - Gráficos de $X(t)$ (roxo) e $Y(t)$ (verde).

Neste excerto, as alunas mencionam a localização da variável tempo na representação cartesiana e identificam as duas variáveis representadas nos gráficos já em termos do fenômeno biológico (população de humanos e população de mosquitos em função do tempo). A partir daí, na continuação do diálogo, elas seguem descrevendo o comportamento dos gráficos, justificam o porquê de X e Y serem funções do tempo, e mais tarde passam a refletir sobre quais são as variáveis dependente e independente de cada função.

*Dayane: Aqui é assim também. Pra... pro tempo... o tempo que seria o x , entendeu? **Ele é independente, porque dependente do tempo eu vou ter um valor pra...***

Natália: Vai ter um valor pra...

Dayane: ... de pessoas, entendeu? É que no caso aqui, ó, pessoas é X , né? O X , a gente mistura com as outras funções, mas aqui seria tipo... o eixo na vertical é o eixo y , é eixo das pessoas, é o eixo das variáveis. Então, o X ele é totalmente... o número de pessoas ele é dependente do tempo, porque de acordo com que o tempo passa vai variar o número de pessoas. Tipo, ela vai ficar boa... só no tempo isso. Ela não vai tá doente hoje e amanhã ela vai estar curada. Então, esse valor de X vai mudar conforme o tempo passa. E a mesma coisa aqui, né? [Dayane mostra o gráfico de Yxt] Os mosquitos se contaminam conforme eles vão picando as pessoas, então eles...

Natália: Nascem...

(Trecho do *Camtasia*, Dayane e Natália, Atividade 3)

É possível notar que as alunas utilizam dois aspectos para justificar quais são as variáveis dependentes e independentes. O primeiro é a convenção do gráfico, quando Dayane afirma que o eixo vertical corresponde ao “eixo das pessoas”, isto é, a quantidade de pessoas infectadas é plotada no eixo vertical. O segundo é a utilização do próprio fenômeno, quando Dayane afirma que as pessoas ficam doentes e se curam ou não conforme o tempo passa. O

segundo aspecto parece mais dominante que o primeiro.

Nestes trechos, as alunas estão refletindo sobre questões ligadas ao conceito de função e à sua representação gráfica de forma interligada com o fenômeno biológico. A imagem do gráfico, fornecida pelo software, e em outros momentos também a tabela, embasam suas reflexões. O papel do software mais evidente nesta ocasião foi o de dar acesso às soluções para as alunas, fornecendo representações que pudessem ser analisadas por elas.

Outro trecho de diálogo que pode fornecer indícios sobre a pergunta é o seguinte, extraído do diálogo entre Franciele e Paula durante a realização da Atividade 7. Após plotarem o gráfico de $X(t)$ para o caso indicado (Fig.43), ativar a opção “Tangentes” e dar play, as alunas discutem sobre a primeira questão da atividade, que pede para relacionarem a inclinação da reta tangente e o sinal da derivada de X com o crescimento/decrescimento do gráfico.

Paula: *Então, a reta positiva a gente tá tendo um aumento do número de pessoas infectadas... Quando ela tá assim [se referindo à reta tangente paralela ao eixo horizontal] estabiliza o número de pessoas infectadas porque não tem inclinação.*

Franciele: *A inclinação é igual a zero.*

Paula: *É. Quando desce, quando é negativa... ela... é porque diminui o número de pessoas infectadas. Mas.. a incli... a derivada de X , $t [X(t)]$ não é a taxa de variação de pessoas infectadas?*

Débora: *É a taxa de variação instantânea.*

Paula: *Instantânea.*

Débora: *Isso.*

Paula: *Daí como que eu vou ver isso, porque, tipo, é a mesma resposta, não é?*

Débora: *Sim, porque a derivada de X é a taxa de variação instantânea e o coeficiente angular da reta tangente, certo?*

Paula: *Certo.*

(Trecho do Camtasia, Franciele e Paula, Atividade 7).

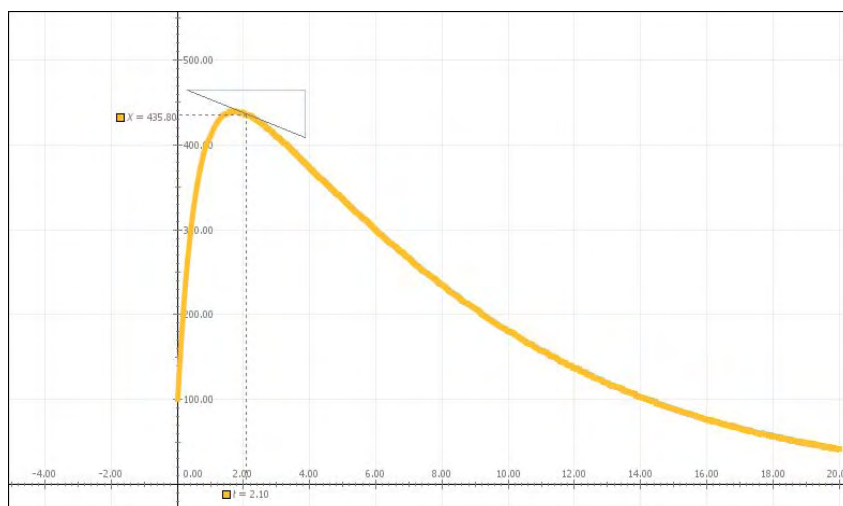


Figura 43 - Gráfico de $X(t)$ para o caso 1 com opção "Tangentes" ativada.

Neste trecho, as alunas estão lidando com vários aspectos envolvendo o conceito de derivada: sua interpretação como coeficiente angular da reta tangente; sua interpretação como taxa de variação instantânea; a relação entre a inclinação da reta tangente, o sinal da derivada e o crescimento/decrescimento do gráfico. É possível notar que elas abordam esta questão de forma relacionada com o fenômeno biológico, na medida em que Paula se refere ao aumento ou decrescimento do número de pessoas infectadas de acordo com a inclinação da reta tangente ao gráfico de $X(t)$, e se refere à taxa de variação do número de pessoas infectadas.

O software, nesta situação, forneceu a representação visual para as retas tangentes ao longo do gráfico, permitindo que as alunas focassem sua atividade na análise de sua inclinação. Neste sentido, baseando-se nas interpretações que já haviam construído para os gráficos, no feedback visual fornecido pelo software e no seu conhecimento matemático, as alunas discutem questões referentes ao conceito de derivada de forma interligada com o fenômeno biológico em um processo mediado pelo software.

Outro trecho de diálogo que ilustra o tipo de reflexões matemáticas elaboradas pelos alunos é o seguinte, que ocorreu entre a dupla Kauã e Priscilla e o colega Diego. Kauã e Priscilla já haviam realizado todas as questões propostas na Atividade 7 para o gráfico de $X(t)$ quando Diego os questiona sobre a interpretação da inclinação da reta tangente no ponto de máximo do gráfico. Kauã conversa com o colega:

Kauã: Naquele instante ele tá estável.

Diego: Estável?

Kauã: Instáv..., é estável. Naquele instante ele tá estável. Mas, tipo, não tá crescendo nem diminuindo. Esses... olhando no gráfico dá pra ver que é o ponto máximo, entendeu? [...] Porque naquele instante tá mostrando que é o nosso ponto máximo. Tipo, o maior número de pessoas infectadas é naquele instante. Mas eu acho que tipo, não necessariamente se a gente ver que é o zero dá pra saber que é o máximo, porque a gente precisa saber qual que vai ser o comportamento da curva. Que às vezes ela pode subir de novo, né?

Diego: É, de repente ela pode subir de novo...

Kauã: Pode ser um ponto ordinário.

(Trecho do *Camtasia*, Kauã e Priscilla, Atividade 7)

Kauã primeiramente explica ao colega que, no caso em que estão analisando, eles podem concluir que o ponto onde a reta tangente tem inclinação zero é o ponto de máximo do gráfico, que representa o instante onde o número de pessoas infectadas é máximo na região. Entretanto, em seguida ele pondera que, apenas conhecendo que a derivada é zero em um ponto não é possível decidir se o ponto é máximo, pois é necessário conhecer o comportamento da curva. Esta reflexão não está mais atrelada ao fenômeno biológico, mas

surgiu a partir de uma análise que inicialmente esteve relacionada ao fenômeno. O papel do software, neste trecho, é menos explícito. É preciso resgatar todo o processo de raciocínio desenvolvido pelos alunos ao longo da atividade para percebê-lo. Neste caso, o feedback visual, fornecendo o gráfico e a representação da reta tangente, é o papel mais proeminente.

De modo geral, é possível depreender que este processo permeou todas as atividades. Os vários trechos de diálogos apresentados ao longo desta tese ilustram o uso dos vários recursos oferecidos pelo software, que contribuíram (ou não) para a compreensão do comportamento das soluções do modelo ou para a discussão de conceitos matemáticos previstos na ementa da disciplina. Independentemente do caso, relações com o fenômeno biológico foram frequentemente estabelecidas pelos alunos. Neste sentido, todas as possibilidades e limitações oferecidas pelo software e que foram discutidas até então participaram deste processo, caracterizando a mediação do software no estabelecimento de relações entre a Matemática e a Biologia.

5.5 Tecendo reflexões...

Da análise dos dados construídos nessa pesquisa emergiram três temas que identificam os papéis desempenhados pelo software *Modellus* no desenvolvimento da abordagem pedagógica apresentada nesta tese. São eles: fornecer resultados sobre o fenômeno biológico, contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos e mediar o estabelecimento de relações entre a Matemática e a Biologia. Algumas ideias foram discutidas em cada um dos temas, sob o ponto de vista dos alunos e sob o ponto de vista das observações.

Nesta seção, meu intuito é articulá-las, de modo a elaborar uma caracterização mais apurada dos papéis exercidos pelo software. Também me proponho a refletir a respeito destes papéis no contexto da situação imaginada, como sugerido por Skovsmose e Borba (2004), de modo a pensar sobre o que poderia ter acontecido. Além disso, apresento uma reflexão mais geral, envolvendo as tecnologias e a abordagem da Análise de Modelos.

5.5.1 Uma metáfora para o software

Para iniciar a reflexão proposta, revisarei as principais ideias discutidas até então em cada tema. O primeiro papel do software, fornecer resultados sobre o fenômeno biológico, foi discutido a partir de duas ideias. A primeira delas foi a de que “o software faz tudo sozinho”. Com base nas entrevistas meu entendimento foi o de que esta expressão reflete o modo como os alunos percebem o fato de terem acesso às soluções do modelo matemático por meio do software. A identificação de que alguns alunos entenderam isto como uma possibilidade de o

software ser útil para profissionais como biólogos, me levou a discutir as possibilidades de experimentação fornecidas pelo software sob a perspectiva dos experimentos científicos, caracterizando-o como um laboratório digital, onde os alunos podem investigar as diferentes condições de ocorrência da doença sem necessitar ir à campo.

A análise dos vídeos gerados pelo *Camtasia*, por outro lado, permitiu a compreensão de que sugerir que o software faz tudo sozinho é uma percepção incompleta do que ocorre. A reflexão com base nestes vídeos mostrou que o software reorganiza a atividade de análise de um modelo matemático, na medida em que o desenvolvimento dos métodos numéricos de resolução do sistema e a plotagem dos gráficos deixam de estar em foco no pensamento do aluno. O processo cognitivo desenvolvido pelo aluno enfoca a escolha das variáveis que serão plotadas, a determinação dos valores dos parâmetros do modelo e o estudo do comportamento das soluções apresentadas, assim como sua interpretação.

A necessidade de interpretar os resultados fornecidos pelo software foi, de fato, a segunda ideia discutida neste tema. A percepção dos alunos com relação à importância desta ação evidencia a necessidade de sua participação ativa para a compreensão do modelo matemático proposto. Mais uma vez, foi a análise dos vídeos gerados pelo *Camtasia* que permitiu compreender os processos envolvidos no desenvolvimento desta interpretação. Esta análise permitiu a identificação de três etapas principais realizadas pelos alunos para interpretar os gráficos fornecidos pelo software (identificação das convenções, descrição do comportamento e justificativa do comportamento em termos do fenômeno biológico). Como mencionei na ocasião, estas etapas não ocorrem de forma linear.

Um segundo aspecto que emergiu dos vídeos com relação à interpretação dos gráficos foi a necessidade de articular diferentes fontes de informações para justificar os seus comportamentos com relação ao fenômeno biológico, uma tarefa que não se mostrou trivial. A compreensão das hipóteses do modelo e a consciência dos parâmetros envolvidos são fatores que influenciaram neste processo. O software, por outro lado, não pareceu contribuir para a elaboração destas articulações, porém mostrou-se ativo com relação à compreensão do próprio comportamento do gráfico.

Como os vídeos sugerem, o software possui recursos (animação, valor máximo de t e tabela) que têm potencial para contribuir com a identificação do comportamento das soluções do modelo. Estes recursos podem ser pensados como instrumentos presentes em laboratórios científicos, de modo que a ideia do software como um laboratório digital novamente se faz presente. Cada instrumento de um laboratório científico é utilizado para cumprir uma determinada tarefa, sendo que alguns se destinam a funções parecidas, porém não iguais. Por

exemplo, a proveta graduada é utilizada para guardar ou medir volumes de modo aproximado. Porém, se for necessário medir pequenas quantidades de volumes e de forma mais precisa, então se usa a pipeta volumétrica. De forma semelhante, analisar os gráficos com a função “Escala Automática” ativada permite que os alunos tenham uma apreciação geral do seu comportamento, porém a análise da tabela para valores grandes de t pode permitir uma apreciação mais detalhada da evolução da curva.

O segundo papel do software, contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos, emergiu das falas dos alunos nas entrevistas, porém um pouco incerto com relação a quais conceitos matemáticos e de que forma o software contribuiu. A análise dos vídeos permitiu novamente a identificação de recursos do software (animação, zoom, valor máximo de t , tabela, opção “Tangentes”, plotagem de vários gráficos simultânea e rapidamente), porém agora com potencialidade para contribuir com a compreensão dos conceitos de funções, derivada e limite. Entretanto, também foram apontadas limitações destes recursos, e inclusive uma situação em que o software pareceu não contribuir com a compreensão do conceito. Neste caso, o que se pôde perceber é a importância das atividades e da intervenção da professora no sentido de auxiliar alunos a identificar quais recursos podem utilizar para realizar a atividade pretendida e para que possam formar um coletivo pensante com o software.

É interessante notar que estes recursos reorganizam o pensamento dos alunos com relação a cada um dos conceitos trabalhados com eles, e isso ocorre independentemente de serem as possibilidades ou limitações dos recursos que estejam em ação. Esta é uma das razões que torna importante avaliar a tecnologia com a qual se quer trabalhar e planejar atividades que potencializem as possibilidades oferecidas e minimizem as limitações, ou utilizem as limitações como disparadoras para um estudo mais detalhado sobre o conceito matemático que se quer trabalhar com os alunos.

Estes recursos oferecidos pelo software e que estiveram mais relacionados com a reflexão sobre os conceitos matemáticos, também podem ser pensados como instrumentos de um laboratório, porém agora um laboratório de experimentação matemática. Borba e Villarreal (2005) utilizam esta mesma ideia quando referem-se à abordagem experimental-com-tecnologias. Neste caso, os recursos do software são utilizados de modo que, ao pensar com eles, os alunos elaboram conjecturas e refletem sobre os conceitos matemáticos. Isto de certa forma ocorreu durante o desenvolvimento da abordagem pedagógica aqui apresentada, de modo que a metáfora do laboratório também se aplica aqui, porém com uma caracterização diferente da utilizada anteriormente.

Finalmente, o terceiro papel do software, mediar o estabelecimento de relações entre a Matemática e a Biologia, emergiu a partir de uma consideração mais geral de que a abordagem pedagógica como um todo auxiliou os alunos a estabelecerem relações entre as duas áreas científicas. O software, entretanto, sendo fundamental para o desenvolvimento da abordagem, exerce influência neste processo apesar de não ser o único fator. Novamente a ideia de laboratório digital aparece aqui, pois foi a partir da análise dos resultados fornecidos e da experimentação proporcionada pelo software, é que os alunos puderam refletir sobre a Matemática em relação a um fenômeno biológico.

Uma das consequências do estabelecimento destas relações foi a mudança de atitude dos alunos com relação à Matemática de modo geral. No meu entendimento, o software também influenciou neste processo na medida em que, percebendo que poderiam ter acesso ao modelo matemático e suas soluções por meio do trabalho com o software, os alunos desenvolveram sua confiança. Isto de fato é algo importante de ser considerado, uma vez que o modelo sugerido aos alunos não é de todo simples, sendo alvo de estudos por alunos de Matemática, por exemplo, apenas nos semestres finais da graduação ou em um nível de mestrado.

Um aspecto que deve ser considerado, entretanto, é o de que existe uma linha tênue que divide o estabelecer relações entre a Matemática e outra ciência, e entender a Matemática como a ciência da verdade, como uma ciência sempre confiável para lidar com problemas de outras áreas científicas e da vida em geral. Esta perspectiva faz parte do que Borba e Skovsmose (2001) chamam de ideologia da certeza. Não se quer desenvolver esta ideia com os alunos ao trabalhar-se com Análise de Modelos, de modo que é importante que as limitações dos modelos sejam foco de discussão. Os vídeos gerados pelo *Camtasia* mostraram que nem sempre os alunos estiveram críticos com relação ao modelo estudado, demonstrando a necessidade de reestruturação de algumas das atividades propostas no sentido de enfatizar reflexões neste sentido.

De um modo geral, a metáfora do software como um laboratório permeia os três papéis atribuídos ao software e discutidos nesta tese. Assim como um laboratório, o software apresenta recursos com os quais os alunos trabalham para analisar a evolução do fenômeno biológico e compreender os conceitos matemáticos subjacentes ao modelo. No primeiro caso, os alunos desenvolvem experimentos digitais, modificando as condições de ocorrência do fenômeno. No segundo caso, os alunos refletem sobre os conceitos matemáticos, elaborando conjecturas relacionadas aos mesmos. Neste sentido, a experimentação ocorre de duas formas:

a experimentação como um experimento científico e a experimentação como elaboração de conjecturas.

Os recursos do software fornecem possibilidades e restrições para a realização da atividade em foco, e por meio delas reorganizam estas atividades e também o pensamento matemático dos alunos. No caso da abordagem pedagógica aplicada, o software e os recursos que possui reorganizaram a atividade de analisar um modelo matemático num âmbito mais geral, e reorganizaram o pensamento dos alunos com relação aos conceitos matemáticos trabalhados, em um âmbito mais específico. O processo de reorganização encerra o processo de moldagem, que também pôde ser percebido ao longo do trabalho dos alunos.

A moldagem do pensamento dos estudantes por parte do software pôde ser observada com relação aos elementos trazidos pelos recursos do software para cada um dos conceitos trabalhados: funções, limite e derivada, conforme foi apresentado em vários trechos extraídos dos vídeos gerados pelo *Camtasia*. Também foi possível observar a moldagem com relação aos feedbacks fornecidos pelo software. Algumas vezes o feedback caracterizou-se como algo não esperado pelos alunos, condicionando a reação dos mesmos. No caso desta pesquisa, foi possível identificar alguns tipos de reações dos alunos em casos como este, a saber: conjecturar que o gráfico estivesse errado e revisar as configurações feitas no software para corrigi-lo; buscar justificativas para o comportamento apresentado, em geral envolvendo aspectos biológicos do fenômeno e as hipóteses base do modelo matemático; total inatividade por parte dos alunos, que não souberam como lidar ou explicar o comportamento apresentado.

Por outro lado, também foi possível perceber a moldagem sofrida pelo software por parte dos seres humanos presentes na sala de aula. Por parte da professora, por exemplo, a moldagem ocorreu a partir das atividades propostas aos alunos, que orientaram o software para os objetivos pedagógicos a serem atingidos (PEA, 1985), inclusive direcionando o mesmo para trabalhos com situações da Biologia e não da Física, como foi originalmente planejado por seus desenvolvedores. Já os alunos moldaram o software na medida em que privilegiaram o uso de determinados recursos ou destinaram funções fixas para algum elemento do software. Por exemplo, é possível perceber, a partir da análise de alguns diálogos registrados pelo *Camtasia*, que algumas duplas utilizaram a tabela apenas para obter valores para as funções em determinados instantes de tempo, não a utilizando como um recurso para a análise do comportamento das soluções.

No meu entendimento, os processos de moldagem recíproca e reorganização ocorrem apenas quando os alunos conseguem pensar com o software, construir um coletivo pensante que inclua o software. Ou seja, o software desempenha seu papel apenas com a formação

deste coletivo. Como mencionei anteriormente isto nem sempre ocorreu no caso desta abordagem pedagógica. Alguns trechos de vídeos gerados pelo *Camtasia* e apresentados na Seção 5.4.2.2, forneceram indícios de que nem sempre os alunos incluíram o software no coletivo, na medida em que não interagiram com ele para refletir sobre a atividade. Neste caso, o software não exerceu o papel de contribuir para a compreensão do conceito de derivada em relação à sua interpretação geométrica.

A análise destes vídeos ainda trouxe o indício de que pensar com o software aparentemente está relacionado a dois fatores: o envolvimento ativo dos alunos e as orientações das atividades e do(a) professor(a) com relação aos próprios recursos do software. Esta constatação corrobora a característica situada do papel do software apontada por Geiger (2011) e contribui com outros dois aspectos em potencial para influenciar no mesmo. Quando este coletivo se forma, no meu entendimento o software se torna um colaborador do processo de produção de conhecimento e também do trabalho do biólogo.

No contexto da aplicação da abordagem pedagógica proposta nesta tese, a formação dos coletivos pensantes envolvendo os alunos e o software, permitiu que os alunos estabelecessem relações entre as duas áreas científicas, gerando uma mudança de atitude com relação à Matemática por parte de alguns alunos. O pensar desenvolvido pelo coletivo esteve orientado, é claro, pelas atividades propostas e, portanto, deve ser considerado em seu contexto.

Neste sentido, como seria o pensar desenvolvido pelos coletivos se o contexto fosse a situação imaginada, onde a análise do modelo é pano de fundo para o desenvolvimento da disciplina? Qual seria o(s) papel(is) do software neste contexto? A seguir, me dedico ao exercício de analisar o que poderia ter ocorrido, de pensar sobre a situação imaginada a partir da situação arranjada (SKOVSMOSE; BORBA, 2004).

5.5.2 Refletindo sobre a situação imaginada

Imagine a seguinte situação: primeiro dia de aula da disciplina Matemática Aplicada. O(A) professor(a) entra em sala, cumprimenta os alunos, se apresenta e pede para cada aluno se apresentar. Em seguida, o(a) professor(a) introduz a disciplina, comenta sobre seus objetivos e os modos de avaliação. O próximo passo é iniciar a atividade planejada para o dia. O(A) professor(a) convida os alunos a se reunirem em pequenos grupos e propõe a seguinte situação: “Imaginem que vocês fazem parte de uma equipe governamental que está responsável pelo estudo da evolução da malária no Brasil. O objetivo desta equipe é identificar os principais focos da doença, os fatores que influenciam a sua prevalência e

aumento, e os meios de prevenção ou cura, entre outros. Discutam como vocês procederiam para desenvolver esta tarefa e preparem uma pequena apresentação para compartilhar com toda a classe”.

Após ouvirem e lerem a situação proposta pelo professor, um burburinho se inicia na sala de aula. Os alunos se dividem em pequenos grupos e começam a comentar a tarefa proposta. Alguns ficam surpresos em pesquisar sobre um tema biológico em uma aula de Matemática, outros não entenderam direito o que precisam fazer, outros ainda se mostram animados e já cheios de ideias. Após compreenderem a situação proposta, os alunos iniciam suas reflexões e discutem que procedimentos devem realizar para alcançar os objetivos almejados.

Alguns alunos iniciam lembrando o que sabem sobre a doença, enquanto outros não recordam muito sobre o assunto e decidem buscar informações. Há alunos que escolhem iniciar seu trabalho levantando dados sobre a presença da doença no país, enquanto outros focam sua atenção em aspectos mais sociais. Mas há grupos, também, que se sentem um pouco perdidos: “Tem que ter algo de Matemática?”, “Como assim, fatores que influenciam?”... A intervenção do(a) professor(a) nestes grupos se faz necessária. As discussões continuam durante toda a aula, e chega a hora de liberar os alunos.

A aula seguinte inicia com os grupos apresentando suas ideias e surgem questões como: sintomas da doença, ciclo de vida do parasita, habitat e modos de vida do mosquito transmissor, questões sociais, questões de prevenção, conhecimento da população sobre a doença, entre outros⁹⁴... Conforme os grupos apresentam, o(a) professor(a) elabora anotações no computador com fatores de influência considerados importantes pelos alunos. Após a apresentação dos grupos, ele(a) convida os alunos para revisarem os fatores anotados e inicia uma discussão sobre a relevância de considerar todos os fatores elencados. O(A) professor(a) então propõem que os grupos escolham cinco fatores dentre todos os que estão elencados. Os grupos compartilham suas escolhas e o(a) professor(a) discute com eles que há vezes em que é necessário reduzir o número de fatores de influência, fazer uma simplificação. Ele(a) também discute com os alunos os impactos desta simplificação sobre o estudo e questiona sobre possíveis razões para a redução no número de fatores considerados.

O final da aula está próximo. O(A) professor(a) conduz uma última discussão sobre a questão proposta e encaminha o trabalho para que os alunos reflitam durante a semana sobre como trabalhar com todos os dados que coletaram e os fatores elencados. Como organizar

⁹⁴ Estas questões apareceram na discussão do primeiro dia de aula dos alunos tanto da turma de 2010 como de 2011.

estas informações de modo a alcançar os objetivos da equipe governamental e pensar ações com relação à doença? Que recursos poderiam ser utilizados para isso? Mais uma aula termina e os alunos vão para casa com a sensação de que o(a) professor(a) de Matemática esqueceu a disciplina que está ministrando.

A terceira aula inicia com o(a) professor(a) organizando mais um debate para ouvir a opinião dos alunos sobre como organizar e lidar com todas as informações apresentadas na aula anterior, no sentido de pensar alguma ação que possa contribuir para o controle da doença no país. Os alunos apresentam e discutem suas ideias: organizar os dados em tabelas e em gráficos, utilizar programas de computador para ajudar no processamento de dados, etc. A partir daí, o(a) professor(a) afirma que ele(a) também tem uma sugestão: utilizar um modelo matemático para representar o fenômeno. Ele pergunta aos alunos o que eles pensam sobre isso, mas eles não entendem direito sobre o que o(a) professor(a) está falando. Ele(a) sugere aos alunos realizarem uma pesquisa sobre o tema.

Os alunos utilizam os computadores e o acesso à internet para pesquisar sobre modelos matemáticos. Alguns grupos inclusive encontram exemplos de modelos que já estudaram, como os utilizados na Física, por exemplo. Eles discutem, mais uma vez, sobre as ideias que encontraram: a função de um modelo matemático, os objetivos por trás de sua elaboração, os processos envolvidos, etc. O(A) professor(a), então, apresenta aos alunos o modelo de Ross-Macdonald para a transmissão da malária. Ele(a) discute as hipóteses utilizadas para a elaboração do modelo, comparando com todos os fatores elencados pelos alunos e chamando a atenção para as simplificações feitas. Os alunos, vendo tantas simplificações, questionam o(a) professor(a) sobre a validade de tal modelo e a relevância de estudá-lo. O(A) professor(a) explica que elaborar um modelo que seja mais ou menos acurado é um processo demorado, e os modelos mais simplificados auxiliam a refletir sobre a situação e a refinar mais e mais o modelo.

Ele(a), então, convida os alunos a analisarem um pouco melhor o modelo apresentado. Em duplas, os alunos iniciam o trabalho com um software (poderia ser o *Modellus*) que os permite acesso às soluções do modelo. Eles seguem um tutorial elaborado pelo professor para introduzir o modelo matemático e obtêm, ao final das configurações, gráficos e tabelas. “Mas, são gráficos e tabelas de que, professor(a)”? A largada é dada, e os alunos iniciam de fato a análise do modelo matemático.

O(A) professor(a) incentiva os alunos a investigarem o modelo, mexer nas configurações sugeridas, analisar os gráficos fornecidos, porém sem muita orientação, e sugere que tomem nota de questionamentos. Aos poucos, mais perguntas vão surgindo: “O

que são X e Y , mesmo?”, “Por que este gráfico tem esse formato?”, “O que significa este gráfico?”, “Professor(a), nós construímos um gráfico diferente da outra dupla... está de ponta cabeça... por quê?”, “Esses gráficos são das equações?”, etc... O(A) professor(a) elabora um banco de perguntas, reunindo as sugeridas pelos alunos, acrescentando outras... essas perguntas irão guiar os trabalhos ao longo do semestre.

Neste momento é sensato parar o exercício de imaginação por alguns instantes, pois a narrativa que foi elaborada até agora pode suscitar alguns questionamentos como, por exemplo, que momento as aulas de Matemática irão começar de fato, pois até agora, na situação imaginada, nenhuma definição foi dada, nenhum exercício foi proposto ou corrigido... e já estamos na terceira aula do semestre! Segundo meu entendimento, a aula de Matemática já começou, desde o primeiro dia de aula. E não apenas pelos dados numéricos que provavelmente os alunos levantaram em suas pesquisas, mas pelas discussões acerca da doença, da importância de estudá-la, da necessidade de tomar atitudes para combatê-la, das questões sociais envolvidas, etc.

Todas estas discussões criaram um ambiente onde a Matemática aparece como uma possibilidade para compreender a situação e pensar nas ações que são necessárias. Elas foram se afunilando na direção de introduzir um modelo matemático para estudar o fenômeno e, por meio dele, fazer previsões e simular os efeitos, a longo prazo, das ações tomadas. A Matemática não existe apenas nas definições e regras, mas ela existe e se constrói no contexto de pensar em problemas e situações que afetam a humanidade e com os quais precisamos lidar. E não se trata aqui, também, de fazer apologia à Matemática como a fornecedora da verdade, mas utilizá-la como *um dos possíveis recursos* para pensar o problema em questão.

Estes argumentos são razoáveis, porém outras questões podem ainda ser levantadas: Com todas estas perguntas elencadas pelos alunos como dar sequência ao trabalho? Onde entra a Matemática em tudo isso? Como fica a ementa da disciplina? Eu não tenho receitas, mas continuarei mais um pouco o exercício de imaginação, pensando em algumas possibilidades de lidar com estas questões.

Com todas aquelas perguntas em mãos, o(a) professor(a) precisa orientar seus alunos de modo que eles consigam compreender melhor o modelo matemático e ao mesmo tempo possam refletir sobre conceitos matemáticos relacionados ao modelo. Ele(a) sugere então, aos alunos, que analisem com cuidado dois gráficos: o gráfico de Xxt e o gráfico de txX . Em conjunto com os alunos ele(a) discute: Que informações esses gráficos nos dão? Qual a diferença entre eles? Qual destas representações é a mais comum de encontrarmos? Por quê? Esses gráficos são parecidos com outros que vocês já viram? Quais?

Os alunos dão suas opiniões e por meio da discussão chegam à conclusão de que a estruturação de um gráfico envolve convenções e que a forma Xxt é mais interessante para a leitura. Alguns alunos dão exemplo de gráficos parecidos com este, como velocidade X tempo e distância X tempo. Mas um aluno afirma que, de modo geral, o gráfico plotado se assemelha ao gráfico de uma função. O(A) professor(a) aproveita a deixa para perguntar aos alunos: X é função de t ? Por quê? Como eu decido isso?

Alguns alunos dizem que sim, enquanto outros dizem que não. “Mas por quê?”, pergunta o(a) professor(a). Um aluno se manifesta e afirma que X é função do tempo, pois varia com o tempo. Outro diz que é função porque cada valor de t tem um valor de X correspondente. Outro, ainda, lembra uma regra aprendida na escola que se traçar retas paralelas ao eixo vertical e elas cortarem o gráfico em apenas um ponto cada uma, então é função. O(A) professor(a), então, anota cada sugestão e propõe outros exemplos, confrontando com as sugestões dos alunos e discutindo com eles as condições necessárias e suficientes para se ter uma função. A definição matemática de função começa a aparecer...

Poderia continuar mais um bom tempo neste exercício de imaginação, abarcando os demais conceitos da disciplina, porém este não é exatamente o objetivo aqui. Meu intuito é inserir o leitor no contexto da situação imaginada e dar uma ideia de como pensei o desenvolvimento da disciplina com base na análise do modelo. As reflexões matemáticas estariam entremeadas à análise do modelo de um modo bastante aberto, embasadas nas perguntas feitas pelos alunos ou sugeridas pelo professor. Além disso, como eu propus no início deste exercício, a ideia era refletir sobre qual seria o(s) papel(eis) do software na situação imaginada. Passemos então a esta reflexão.

A análise dos dados construídos na situação arranjada sugeriram três papéis para o software, que foram condensados posteriormente na metáfora do software como um laboratório digital; um laboratório permitindo a experimentação em dois sentidos: a experimentação como experimento científico e a experimentação matemática, relacionada à elaboração de conjecturas. O exercício de imaginação sobre a situação imaginada sugere que estes papéis ainda seriam fundamentais.

Os alunos ainda continuariam tendo acesso às soluções do modelo por meio do software, e seus recursos ainda seriam utilizados para a experimentação, nos dois sentidos mencionados acima. Acredito, entretanto, que a experimentação matemática seria ainda mais evidente, pois com momentos de discussão matemática entremeados aos momentos de análise do modelo, muitas vezes os alunos poderiam abrir um novo arquivo no software para investigar alguma propriedade matemática. Por exemplo, poderiam utilizar a opção

“Tangentes” para analisar a derivada ao longo do gráfico de funções lineares e quadráticas; ou poderiam utilizar a opção de modificar o valor máximo de t para analisar o comportamento de funções diversas para valores grandes da variável independente. Deste modo, o papel de contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos seria enfatizado.

O papel de mediar o estabelecimento de relações entre a Matemática e a Biologia também seria desempenhado e de repente enfatizado, caso a situação da equipe governamental fosse mantida durante o trabalho do modelo. Isto porque um dos objetivos desta situação é pensar ações com base nos dados que se tem, de modo que o modelo poderia ser usado para fazer previsões e discutir estas possíveis ações de combate à doença. Novamente, as limitações do modelo e os objetivos relacionados à sua elaboração poderiam ser discutidos, ampliando o alcance da reflexão crítica sobre a própria Matemática.

Além desses três papéis apontados com base na situação arranjada, acredito que o fato de não existir um conjunto de atividades pré-definidas para guiar o trabalho dos alunos poderia atrelar ao software outro papel: o de disparador de discussões e questionamentos. Como a exploração dos alunos seria mais livre, sem um direcionamento para o seu olhar dado pelas atividades, acredito que o feedback dado pelo software de acordo com as configurações feitas por eles seria mais inesperado, fomentando questionamentos. Ao mesmo tempo, o desenvolvimento de testes estaria menos direcionado, ampliando o software como um espaço para experimentos e testes. Minha impressão é a de que os alunos inclusive seriam mais ousados em escolher parâmetros para testar e analisar do que foram na versão arranjada da abordagem pedagógica.

Por outro lado, é importante estar consciente de que, assim como as possibilidades, as limitações do software também continuarão presentes. O caráter mais livre do andamento da disciplina dá abertura para que as limitações apareçam com mais frequência, exigindo do(a) professor(a) “jogo de cintura” para lidar com as mesmas. As limitações, entretanto, não devem ser encaradas como negativas, pois muitas vezes podem ser disparadoras para um debate esclarecedor com relação a determinado conceito matemático.

O olhar para a situação imaginada a partir da situação arranjada, permitiu visualizar o software desempenhando os seus três papéis, no caso em que se formam os coletivos pensantes, podendo ser enfatizados devido à estrutura das aulas. Por outro lado, um papel de disparador de questionamentos também foi apontado, enfatizando o aspecto do inesperado que pode surgir em situações abertas.

Neste contexto, é importante retomar a questão da ementa. Como garantir que ela será cumprida? Parece-me que não há como garantir o seu cumprimento em um ambiente em que

as questões propostas pelos estudantes é que primordialmente guiam o encaminhamento e o conteúdo das discussões em sala de aula. Por outro lado, entretanto, o professor ainda tem um papel importante na condução dos trabalhos, de modo que pode negociar com os alunos prioridades nos assuntos discutidos, mas mesmo assim não é possível ter-se garantia neste sentido.

Cabe questionar, entretanto, a “força” da ementa da disciplina em um contexto mais aberto como o da situação imaginada. Quero dizer, cumprir a ementa deve ser um objetivo com prioridade alta de realização neste contexto? No caso da situação arranjada este foi um ponto importante, que influenciou na estruturação das aulas em dois momentos, como em uma hélice de DNA, e também na elaboração de atividades guia para os estudantes. Mas parece-me que na situação imaginada, a estrutura de dupla hélice do DNA não se aplica, pois as discussões sobre o modelo matemático e sobre os conceitos matemáticos deveriam ser desenvolvidas de forma menos estruturada, isto é, de forma mais fluida. Uma prioridade alta para o cumprimento da ementa, me parece, contribui para uma diminuição desta fluidez. Mas esta, de fato, é uma questão que ainda permanecerá em aberto.

5.5.3 Análise de Modelos e Tecnologias

Tendo refletido sobre os possíveis papéis a serem desempenhados pelo software no desenvolvimento da situação imaginada, retomo a partir de agora a reflexão sobre a situação arranjada. Na última seção do Capítulo 4, discuti como a Modelagem Matemática e a visão epistemológica sobre tecnologias podem (ou não) estar em ressonância, isto é, como a relação entre estes elementos pode (ou não) ser coerente. A partir daí, comentei que a Análise de Modelos e a visão epistemológica das tecnologias adotada nesta tese (baseada no construto seres-humanos-com-mídias) também estavam em ressonância, devido ao fato de as tecnologias serem um elemento fundamental para o desenvolvimento da abordagem pedagógica proposta. Entretanto, esta questão ainda ficou em aberto naquela ocasião e, por isso, retomo-a neste momento. Afinal, por que seres-humanos-com-mídias e Análise de Modelos estão em ressonância?

Uma maneira de lidar com esta questão é justificar a ressonância com o fato de que as tecnologias dão poder à Análise de Modelos. E o que isso significa? O construto seres-humanos-com-mídias considera que as tecnologias reorganizam e moldam o pensamento das pessoas, em particular, reorganizam e moldam o pensamento matemático dos alunos. Neste sentido, elas permitem que os alunos reflitam sobre aspectos relacionados aos conceitos matemáticos que dificilmente estariam evidentes caso não trabalhassem com a tecnologia.

No caso da abordagem pedagógica aqui desenvolvida, isto pode ser identificado nos excertos dos vídeos gerados pelo *Camtasia* que foram analisados ao longo do capítulo e que ilustram os elementos trazidos pelos recursos do software (ou em potencial para tal) para cada um dos conceitos matemáticos trabalhados nas atividades propostas. Este fato também pode ser ilustrado pela possibilidade de os alunos da disciplina refletirem sobre um sistema de EDO de um ponto de vista qualitativo, isto é, enfocando o estudo do comportamento de suas soluções.

De um ponto de vista mais amplo, as tecnologias também reorganizam e moldam as atividades das pessoas, de modo que permitem a realização de tarefas que dificilmente poderiam ser feitas sem as mesmas. Um exemplo disso é a própria abordagem pedagógica, que só pôde ser desenvolvida com os alunos da disciplina devido às possibilidades oferecidas pelo software para que eles tivessem acesso às soluções do modelo, que envolvia conceitos matemáticos ainda não estudados pelos alunos.

Argumentos semelhantes a estes podem ser encontrados em Peard et al. (2007, p.318), que afirmam que as tecnologias “[...] permitem que os estudantes trabalhem com conceitos matemáticos que são tradicionalmente vistos como muito difíceis para eles⁹⁵” e “desafiam a visão de que aplicações e modelagem podem ser introduzidas somente depois de o estudante desenvolver todo o conhecimento matemático exigido⁹⁶”. Estes autores também argumentam, como mencionado no Capítulo 1, que o uso de tecnologias aumenta o espectro de exemplos que podem ser trabalhados com os alunos. No caso da Análise de Modelos, isto significa que modelos mais acurados podem ser propostos para estudo.

Além disso, no caso da abordagem pedagógica proposta nesta tese, é possível perceber por meio da análise dos extratos apresentados ao longo deste capítulo, que os alunos não apenas tiveram acesso às soluções do modelo, mas puderam interagir com elas, experimentando diferentes condições de ocorrência do fenômeno e analisando a plausibilidade das mudanças geradas nos gráficos em decorrência destas experimentações. Todos estes exemplos ilustram o modo como as tecnologias dão poder à Análise de Modelos, tanto em um âmbito mais específico, relacionado aos conceitos matemáticos trabalhados, tanto em um âmbito mais geral, relacionado à análise do modelo matemático.

Uma segunda possibilidade para justificar esta questão é observar que o construto seres-humanos-com-mídias valoriza os processos envolvidos na produção de conhecimento, e não apenas o seu resultado, como comentei no Capítulo 3, na medida em que a influência da

⁹⁵ [...] allow students to work with mathematical concepts which are traditionally seen as too difficult for them.

⁹⁶ [...] Challenge the view that applications and modeling can only be introduced after the student has developed all the required mathematical knowledge.

mídia, reorganizando e moldando o pensamento do aluno, precisa ser considerada para que o conhecimento produzido pelo coletivo possa ser compreendido. Por sua vez, a Análise de Modelos é uma abordagem que também valoriza os processos, uma vez que enfatiza a investigação, a interpretação e avaliação do modelo matemático, e a compreensão dos conceitos matemáticos. Neste sentido, ambos possuem uma raiz comum com relação à compreensão sobre a produção de conhecimento.

Tendo em vista esta discussão, é importante refletir, neste momento, sob uma perspectiva mais geral, quais as implicações da Análise de Modelos juntamente com o uso do software *Modellus* para a disciplina Matemática Aplicada do curso de Ciências Biológicas da Unesp, Rio Claro, na versão arranjada da abordagem pedagógica. As discussões elaboradas ao longo desta pesquisa permitem vislumbrar pelo menos duas implicações para a disciplina, e de um modo geral para outras disciplinas de Matemática em serviço: a possibilidade de iniciar a disciplina discutindo um modelo matemático mais ou menos acurado para uma situação biológica; e a oportunidade de desenvolver alguns dos conceitos matemáticos previstos na ementa de forma relacionada a esta situação.

A primeira implicação já foi destacada desde o início da tese, mas até então estava embasada mais em minha intuição. Planejei a abordagem pedagógica imaginando que os alunos conseguiriam trabalhar com o modelo matemático proposto mesmo sem ter estudado ainda derivada ou EDO. As pesquisas de Wilensky e colaboradores deram algum indício de que isso seria possível, mas a verdade é que tudo poderia ter dado errado. Os dados construídos ilustram, entretanto, que os alunos conseguiram compreender a dinâmica do modelo por meio das explicações feitas, das atividades propostas e do trabalho com o software, mesmo sem terem esses pré-requisitos. Em particular, o software foi essencial para que isso ocorresse.

A segunda implicação está relacionada com a primeira: compreendendo o modelo e analisando-o por meio do trabalho com o software, os alunos refletiram sobre conceitos matemáticos previstos na ementa da disciplina de forma relacionada à transmissão da malária e ao modelo matemático. As discussões dos alunos muitas vezes saíram do contexto do fenômeno, focando os objetos matemáticos em um contexto abstrato, para depois retornar a ele por meio da interpretação das informações que forneciam sobre o fenômeno biológico.

A Análise de Modelos aliada à tecnologia, materializada nesta pesquisa por meio da abordagem pedagógica desenvolvida, configura-se, portanto, como mais uma alternativa para o ensino e aprendizagem de disciplinas de Matemática em serviço. Eu diria, inclusive, para disciplinas de Matemática ministradas para alunos de Matemática. Ela não é a salvação de

todos os problemas relacionados a estas disciplinas, e nem se propõe a isso, mas como a Modelagem e as Aplicações, propõe uma forma de desenvolver a Matemática relacionada a outras áreas científicas e, aliada à tecnologia, apresenta diferentes possibilidades. É importante, entretanto, novamente refletir sobre as dificuldades focando neste momento a última versão da abordagem pedagógica, e pensar em possíveis soluções para elas. É a isso que me proponho na subseção seguinte.

5.5.4 Mais mudanças...

Nesta subseção darei continuidade às reflexões iniciadas na primeira parte deste capítulo, onde discuti sobre as dificuldades que permearam o processo de elaboração da abordagem pedagógica e apontei as modificações que foram realizadas do ano de 2010 para 2011. Cabe agora perguntar: que outras modificações são necessárias nas atividades?

Apesar das mudanças feitas nas atividades de um ano para outro, como professora e pesquisadora percebo que ainda existem atividades que precisam ser reformuladas, pois não estão suficientemente bem elaboradas. Na sequência, comento sobre o tipo de mudança que acredito ser necessária em algumas das atividades e no Apêndice 3 apresento uma sugestão de modificação para as mesmas. Os números das atividades se referem à versão aplicada em 2011.

A primeira atividade que considero passível de modificação é a Atividade 4, cujo objetivo é a análise da influência dos parâmetros no comportamento das soluções. Apesar de ser uma das atividades que não sofreu modificações de um ano para o outro e ser uma das atividades com as quais os alunos mais se envolveram, é importante notar que muitas vezes a análise dos alunos se resumiu a: “aumentando o parâmetro, aumenta o número de pessoas infectadas”, por exemplo. Este tipo de comentário é parcialmente verdadeiro e muito simplificado. O objetivo da atividade era que os alunos explorassem mais todo o comportamento da curva e procurassem analisar a influência do parâmetro neste sentido, procurando relacionar com aspectos biológicos.

Deste modo, uma sugestão que talvez auxilie os alunos a refletirem mais sobre esta análise é propor uma situação mais geral em que eles precisassem decidir sobre a necessidade ou não de utilizar medidas de controle em uma região e qual tipo de controle utilizar. Assim, seria fornecido uma série de dados sobre a região estudada e eles deveriam ser capazes de determinar quais parâmetros precisariam analisar, por exemplo. Obviamente uma atividade deste tipo precisaria de mais tempo para ser desenvolvida.

Outra atividade que pode ser modificada é a Atividade 5, não em termos de sua estrutura, mas apenas em termos de seu encaminhamento. Apesar de a noção de velocidade ser bastante intuitiva e de repente poder auxiliar os alunos a desenvolverem uma interpretação sobre o valor da derivada, ela pode também confundir e, portanto, me parece desnecessária. Pensar sobre velocidade em alguns momentos auxiliou os alunos, mas em outros foi um ponto de distração, pois eles relacionaram com vários aspectos e detalhes do estudo da cinemática e que não eram necessários. Sendo assim, esses elementos acabaram distraindo os alunos.

A Atividade 6 precisa definitivamente ser reelaborada. Como foi visto na segunda parte deste capítulo, os alunos quase não utilizaram recursos do software para pensar esta atividade. De repente a inserção de uma animação que os auxilie a visualizar o comportamento das retas secantes conforme o intervalo de tempo diminui cada vez mais seja apropriado. Além disso, determinar a equação da reta tangente utilizando a equação que define dX/dt dada no modelo matemático apresentou muitas dificuldades para os alunos. Primeiramente, isto não estava explícito na questão e os alunos não conseguiram dar-se conta de utilizar a equação do modelo matemático para calcular o coeficiente angular da reta tangente. Além disso, os estudantes apresentaram dificuldades para a realização dos cálculos, forçando-os a gastarem muito tempo nesta parte. Deste modo, acho importante também acrescentar um texto explicativo sobre como os alunos devem calcular o coeficiente angular da reta tangente sugerindo que eles se convençam de o porquê podem fazer isso e, posteriormente, talvez sugerir que as contas sejam elaboradas com o Excel. Finalmente, a Atividade 7 também pode ser reelaborada para diminuir o número de questões e deixá-las menos estratificadas.

Estas sugestões de mudanças para as atividades dão início a um novo ciclo de análise para a pesquisa, na medida em que incita a aplicação desta nova versão de atividades a uma nova turma e a construção de novos dados. Este processo faz parte de pesquisas com características de *design research*, uma vez que, ao se desenvolver uma pesquisa deste tipo, há a intenção de produzir um produto aprimorado, como mencionei no Capítulo 3. Refletir sobre as falhas e propor mudanças são o início para um novo ciclo de análise, que irá contribuir para este aprimoramento. Não será o caso desta pesquisa dar continuidade ao processo, porém estão abertas oportunidades para novos trabalhos neste sentido.

5.6 Considerações sobre os papéis do software

Um laboratório é um espaço muito importante para o desenvolvimento de pesquisas científicas. Ele acolhe o cientista e fornece condições para que ele desenvolva seus

experimentos, teste suas conjecturas e busque prová-las (ou refutá-las). Em seu laboratório, o cientista tem um espaço onde pode levantar questionamentos, experimentar, aprender novas técnicas e recomeçar do zero caso seja necessário.

Entender o *Modellus* como um laboratório permite que percebamos as possibilidades que ele pode trazer para o trabalho com modelos matemáticos e também com conceitos matemáticos. Esta metáfora permite manter em mente as ideias de investigação e experimentação e vinculá-las ao trabalho de sala de aula, o que tem o potencial para modificar a visão a respeito da Matemática como uma ciência pré-determinada e isolada das demais áreas científicas. Como em um laboratório, o trabalho com o software pode permitir o teste, a experimentação e o recomeço de uma investigação.

Além disso, a metáfora do laboratório digital, quando associada ao construto seres-humanos-com-mídias, também contribui para que tomemos consciência da influência que esta possibilidade de experimentar pode ter sobre a produção de conhecimento matemático e convida para uma reflexão acerca dela. Um experimento é incerto, pois muitas vezes não se sabe *a priori* que caminho se deve seguir; o cientista precisa definir este caminho. Para isso ele elabora conjecturas, define um plano de ação e não raramente o caminho escolhido lhe apresenta surpresas, que podem necessitar de um redirecionamento deste plano de ação. Do mesmo modo, surpresas podem aparecer por meio do trabalho com o software, isto é, aspectos sobre um determinado conceito matemático (ou modelo matemático) que dificilmente seriam percebidos sem a experimentação com o software podem vir à tona, e será preciso analisá-los e compreendê-los. O software como um laboratório, portanto, traz incertezas.

Como notei anteriormente, esta metáfora permeia os três papéis desempenhados pelo software durante o desenvolvimento da abordagem pedagógica proposta nesta tese, porém ela não os resume, uma vez que cada um deles apresentou outros aspectos relacionados. Neste sentido, é importante retomar os três papéis identificados nesta pesquisa: fornecer resultados sobre o fenômeno biológico, contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos e mediar o estabelecimento de relações entre a Matemática e a Biologia. Este movimento de retomar os três papéis em sua completude nos permitirá desenvolver algumas reflexões a seu respeito.

Um primeiro aspecto a considerar é que os dois primeiros papéis, apesar de terem sido diferenciados, de alguma maneira estão relacionados, uma vez que parte do estudo dos conceitos matemáticos ocorreu durante a análise do modelo. Assim, as informações fornecidas sobre o fenômeno foram fonte tanto para sua interpretação e compreensão da

evolução do fenômeno, quanto para a discussão de conceitos matemáticos. A diferenciação feita, portanto, se esvanece no terceiro tema, que apresenta o papel de mediar as relações entre as duas áreas científicas. Por outro lado, ela enfatiza a existência de dois objetivos pedagógicos: a compreensão do modelo matemático e a compreensão de conceitos matemáticos, que, dentro da perspectiva da Análise de Modelos, são interligados.

Ainda com respeito à relação entre os papéis do software, no meu entendimento, eles são interdependentes e influenciam um ao outro. Os trechos dos vídeos gerados pelo *Camtasia* e das falas dos estudantes dão indícios de que contribuir para a compreensão de um conceito matemático está intimamente ligado com os resultados que são fornecidos sobre o fenômeno e com as discussões interdisciplinares. A discriminação dos papéis separadamente cumpre muito mais um papel didático, nos auxiliando a refletir sobre o software no processo de produção de conhecimento matemático.

Sendo interdependentes, os três papéis identificados para o software colaboram, na minha visão, para a constituição de um papel central no desenvolvimento da abordagem pedagógica – ao qual já me referi algumas vezes ao longo do texto – que é o de permitir que os alunos da disciplina Matemática Aplicada tivessem acesso a um modelo matemático relativamente acurado para um fenômeno biológico desde o primeiro dia de aula e, por meio da análise desse modelo, discutissem alguns aspectos dos conceitos matemáticos relacionados a esse modelo. Além disso, em conjunto com a abordagem pedagógica, permitiu que os estudantes desenvolvessem discussões que nem sempre ocorrem nas disciplinas onde este tipo de modelo é estudado e dificilmente ocorrem em disciplinas de EDO, a saber, discussões que enfatizam o estudo do comportamento das soluções do modelo e sua relação com o fenômeno representado.

Este papel central está estreitamente relacionado à ideia de que o software reorganiza a atividade de analisar um modelo matemático. De fato, quando o foco do pensamento migra do desenvolvimento das técnicas qualitativas de resolução de um sistema para o teste de hipóteses e a análise da repercussão destas hipóteses no comportamento das soluções do modelo, é que se abre a oportunidade para que estudantes que ainda não estudaram formalmente todos os conceitos matemáticos relacionados ao modelo tenham acesso ao mesmo.

Além disso, o papel central do software acrescenta às discussões sobre reorganização um aspecto ainda não discutido. Como é possível perceber por meio da análise dos exemplos citados na Seção 4.3, Pea (1985) enfatiza a mudança no foco do pensamento matemático dos alunos quando trabalham com um software. Já Borba e Villarreal (2005) enfatizam a

elaboração de conjecturas, a possibilidade de experimentar a Matemática, a visualização e o feedback do software como aspectos da reorganização.

Os exemplos apresentados ao longo desta tese destacam, de modo geral, a realização de “experimentos científicos digitais”, enfatizando um caráter aplicado da Matemática. Porém, outros aspectos referenciados pelos autores supracitados, como a mudança de foco no pensamento, a visualização e a experimentação Matemática também aparecem nestes exemplos. Em particular, a observação de que a experimentação Matemática ocorreu de forma interligada aos experimentos científicos digitais permite considerar não apenas um caráter aplicado para a Matemática, mas também um caráter *blended*.

Conforme aponta Borba (2012), a expressão *blended learning* é regularmente utilizada para designar uma modalidade de ensino em que atividades online são combinadas com atividades regulares em sala de aula presencial. O autor propõe o uso desta expressão também para caracterizar situações como a de um curso online onde os participantes, professores do ensino básico, aprendiam como utilizar determinado software no mundo virtual e aplicavam atividades com o mesmo software em suas salas de aula presencial na escola.

Inspirando-me neste autor, também proponho uma “nova camada de significado” (BORBA, 2012, p.806) para o termo *blended*. A ligação entre a experimentação Matemática e o experimento científico digital caracteriza, de fato, um *blend* entre duas abordagens: a Análise de Modelos (e quem sabe futuramente a Modelagem) e o experimental-com-tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Isto é, os estudantes, trabalhando com o software, puderam analisar e levantar conjecturas sobre os conceitos matemáticos de forma relacionada com o estudo do modelo para o fenômeno de transmissão da malária. Situações, que antes eram propostas apenas no contexto da própria Matemática, na abordagem pedagógica puderam ser discutidas no contexto de uma situação biológica, de modo que seus significados em termos do fenômeno puderam ser explorados conjuntamente com suas características matemáticas.

A noção de *blended* exprime o que ocorreu durante a abordagem pedagógica, uma vez que, como é possível depreender dos exemplos apresentados ao longo deste capítulo, seguidamente os alunos discutiram os conceitos matemáticos de forma imersa no contexto da situação. Este processo é diferente de utilizar a situação biológica apenas como um ponto de partida para a discussão do conceito matemático e continuar a exploração do mesmo fora do contexto. De fato, foi possível notar, a partir da análise dos vídeos, que algumas duplas tiveram esse movimento em suas discussões, o que é algo bastante interessante. Entretanto, na maior parte do tempo observou-se o primeiro caso.

Manter a discussão sobre conceitos matemáticos imersa no contexto de uma situação biológica pode ter sido uma maneira que os estudantes encontraram para dar sentido aos conceitos que discutiam. O *blend* entre as duas abordagens parece ter o potencial para fomentar este tipo de discussão. Ainda não está claro, entretanto, que implicações essas discussões têm para a aprendizagem de conceitos matemáticos pelos estudantes. Os dados construídos nesta pesquisa podem dar alguns indícios sobre esta questão, mas uma investigação direcionada a ela seria necessária para uma compreensão mais profunda sobre a mesma.

Apesar desta questão em aberto, é interessante observar que o *blend* entre a Análise de Modelos e o experimental-com-tecnologias presente nos exemplos discutidos neste texto, com base nas atividades propostas aos alunos, constitui uma nova camada às discussões existentes a respeito da noção de reorganização do pensamento no contexto do construto seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Um *blend* entre dois tipos de experimentações, entre dois tipos de abordagens, caracterizou a reorganização do pensamento matemático na abordagem pedagógica, destacando um novo aspecto deste processo.

Retomando as reflexões sobre os papéis do software, outro aspecto a considerar é o de que eles estão relacionados a duas questões que me parecem fundamentais da Educação Matemática. A primeira questão está relacionada com a aprendizagem da Matemática, e os dois primeiros papéis apresentam discussões neste sentido. A segunda questão está relacionada com a preocupação de trabalhar a Matemática de uma forma que os alunos percebam sua relação com o mundo, em particular com sua área de interesse, de modo a construírem uma atitude mais positiva com relação à Matemática e isto aparece no terceiro tema.

Estas discussões, é claro, não fornecem receitas para resolver todas as dificuldades vinculadas a estas questões e também não exaurem todos os possíveis aspectos que poderiam ser abordados. Elas apresentam reflexões relacionadas a um dos possíveis atores pertencentes a um ambiente educacional de produção de conhecimentos matemáticos: as tecnologias. A partir destas discussões é possível inferir que, se os coletivos entre alunos e software forem formados, os papéis que ele desempenha são tais que têm potencial para transformar tanto a própria natureza da produção de conhecimento matemático – na medida em que contribui (ou não) para a compreensão de conceitos matemáticos – quanto a compreensão da Matemática enquanto ciência – na medida em que permite o acesso às soluções de um modelo matemático representando um fenômeno, e medeia discussões na interface das duas ciências.

Os papéis que foram elencados ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, entretanto, não podem, e nem devem, ser tomados como os únicos a serem desempenhados pelo software. O olhar do pesquisador qualitativo busca o que lhe cativa, o que lhe chama a atenção durante a análise dos dados construídos. Neste sentido, a apreciação dos dados por outro pesquisador poderia apontar para outros papéis além dos que aqui foram identificados. Portanto, apesar de alguns indícios para a compreensão da pergunta terem sido apontados, ela ainda se mantém:

Qual é o papel do software?

Considerações Finais

O momento de fechar uma tese nunca é realmente de encerramento, uma vez que muitas discussões ainda podem ser realizadas e derivadas dos dados e das ideias apresentadas no texto. Neste sentido, neste capítulo de considerações finais tenho como uma das metas sugerir outras pesquisas que podem ser realizadas com base no que foi apontado. Antes, porém, é importante refletir: quais as contribuições desta tese para a Educação Matemática?

Um aspecto interessante desta tese é que ela apresenta à comunidade de professores e pesquisadores um produto: uma sequência de atividades, que possui um diferencial importante: já foram aplicadas em uma sala de aula regular. Este fato, como comentei anteriormente, tem o potencial de auxiliar para que a pesquisa saia da prateleira e seja aplicada por outros professores, com adaptações. Estas adaptações podem envolver tanto as próprias atividades, o encaminhamento e, é claro, o fenômeno proposto para estudo. No meu entendimento, esta mesma proposta pode ser desenvolvida com disciplinas ministradas para outros cursos: Engenharias, Física, Química, Ecologia, Geologia, etc. Também entendo que a abordagem pode ser adaptada para outros softwares que satisfaçam as necessidades exigidas para se trabalhar com o modelo matemático.

A abordagem pedagógica também contribui no sentido de quebrar parcialmente a tradição do pré-requisito: em geral, um sistema de EDO é estudado apenas após a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Aqui, ele foi estudado por alunos que ainda não tinham visto o conceito de derivada. Mais ainda, foi estudado por alunos que não fazem o curso de Matemática e que, em geral, nem apresentam este conteúdo previsto em seu currículo. É claro que não houve uma formalização do conceito de EDO, por exemplo, mas os alunos discutiram as questões principais relacionadas a um sistema (as informações que passam suas equações e o comportamento das soluções) de uma forma que nem sempre está presente nas disciplinas de EDO.

Em um âmbito mais específico, a situação arranjada não desafiou tanto a estrutura da ementa da disciplina, porém a situação imaginada possui esta potencialidade uma vez que a ordem prevista na ementa não é um requisito para seu desenvolvimento. Neste sentido, a abordagem permite que questionemos a estrutura curricular existente e o seu engessamento. Além disso, também questiona os próprios conteúdos ensinados, pois não seria melhor trabalhar com um modelo discreto, uma vez que analisamos a quantidade de pessoas e mosquitos infectados?

Em termos teóricos, a pesquisa colabora com a discussão sobre o papel das tecnologias no processo de produção de conhecimento. Por um lado, ela apresenta explicitamente três papéis para o software utilizado, relacionando-os por meio da metáfora “laboratório digital”, porém sob duas perspectivas diferentes. Os dados construídos na pesquisa também ilustram os processos de reorganização do pensamento e da moldagem recíproca, em diferentes níveis.

Por outro lado, apresenta condições para o desenvolvimento do coletivo pensante e do pensar com as tecnologias. Duas condições foram apontadas para isto com base na análise dos dados, e pode ser que outras sejam encontradas em novas pesquisas. Isto mostra que as ideias teóricas têm realmente seu lugar na prática, porém são contingentes. O próprio papel desempenhado pelo software é situado, pois para que ele se desenvolva, é necessária a formação do coletivo pensante.

Neste sentido, portanto, fica evidente que as tecnologias apresentam possibilidades para o ensino e aprendizagem de Matemática, porém as atividades e a intervenção do(a) professor(a) são essenciais para que os papéis em potencial do software sejam desenvolvidos. Isto ecoa os resultados de outras pesquisas já desenvolvidas e que chamam a atenção para este fato, ressaltando a importância de não domesticar as tecnologias e a influência da visão dos professores com relação às tecnologias no papel que desempenham.

Outra contribuição teórica, que por agora poderá parecer pequena, é a proposição do termo *Análise de Modelos*. Talvez não seja possível apreciar no momento o nível de contribuições que esta nomenclatura trará ao debate acadêmico, porém diferenciar abordagens pedagógicas que se assemelhem a aqui apresentada dos demais trabalhos com modelos matemáticos em sala de aula, tem potencial para esclarecer as diferentes formas de trabalhar com modelos, os processos envolvidos, e as potencialidades e limitações oferecidas por cada uma delas. Como mencionei anteriormente, a ideia não é segregar as diferentes formas de se trabalhar com modelos matemáticos, mas chamar a atenção para diferenças, pois o trabalho em conjunto com as várias opções pode trazer ainda mais contribuições para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Com relação a investigações que podem depreender da que aqui foi apresentada, vislumbro algumas possibilidades. Como mencionei no capítulo de metodologia e o leitor pôde apreciar no capítulo de análise, nem todos os dados construídos nesta pesquisa forneceram indícios para a compreensão da pergunta diretriz. Os vídeos gerados pela câmera externa, os trabalhos finais dos alunos e os fóruns que eles participaram no Tidia-AE praticamente não apareceram (alguns realmente não apareceram) na análise dos dados. O

estudo deste material poderia ser realizado com o intuito de compreender se e que tipo de relações os alunos estabeleceram entre a Matemática e a Biologia, além daquela proposta pela abordagem pedagógica. Além disso, uma análise dos vídeos gerados pelo *Camtasia* poderia ser feita, porém com o intuito de analisar as reflexões matemáticas desenvolvidas pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades propostas.

Com relação às atividades, experimentos de ensino poderiam ser desenvolvidos com cada atividade, com o intuito de analisar os processos de produção de conhecimento envolvidos. A análise do pensamento elaborado pelos alunos durante as atividades poderia contribuir para o seu aprimoramento, no sentido de identificar limitações que porventura não puderam ser identificadas por meio da construção dos dados realizada nesta pesquisa. Também por meio de experimentos de ensino, seria possível investigar, quais competências de modelagem são agenciadas no desenvolvimento das atividades propostas.

Outro aspecto que pode ser investigado com relação à abordagem pedagógica é o modo como o interesse dos alunos pelo fenômeno biológico se manifesta ao longo do desenvolvimento da proposta e que fatores influenciam neste movimento. Em Soares e Borba (2012) algumas conjecturas foram feitas no sentido de elencar possíveis razões para uma perda de interesse dos alunos durante o semestre com relação ao fenômeno da transmissão da malária. Os dados construídos nesta pesquisa não dão conta desta questão, de modo que uma metodologia diferenciada seria necessária. No artigo foi proposto que uma metodologia baseada no acompanhamento dos grupos ao longo do semestre, semelhante ao que foi realizado por Araújo (2002), poderia contribuir para o entendimento deste movimento.

Com relação ao software, uma investigação que poderia ser feita é a respeito do impacto do software nas atividades dos alunos. Será que eles fizeram uso do mesmo em outras atividades que desenvolveram ao longo do curso? Ou será que eles fizeram uso de algum outro software? Uma investigação deste tipo provavelmente envolveria entrevistas com os alunos egressos da disciplina e contribuiria para uma apreciação sobre a influência da própria disciplina na formação dos alunos.

Finalmente, tendo em vista que a pesquisa foi realizada com base em uma situação arranjada, é natural que um dos possíveis encaminhamentos futuros seja o estudo da situação imaginada. O papel do software, as competências de modelagem envolvidas, o interesse dos alunos... todas são questões que poderiam ser investigadas no contexto da situação imaginada. Além disso, uma continuação da abordagem pedagógica poderia ser elaborada neste contexto, procurando um refinamento da atividade sobre integrais e a integração da Modelagem ao encaminhamento das atividades.

Referências Bibliográficas

AINLEY, J.; PRATT, D.; HANSEN, A. Connecting Engagement and Focus in Pedagogic Task Design. *British Educational Research Journal*, v.32, n.1, p.23-38, 2006.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um Estudo sobre o Uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*, ano 17, n.22, p.19-35, 2004.

ALPERS, B. The Mathematical Expertise of Mechanical Engineers: taking and processing measurements. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.445-456

ALVEZ-MAZZOTTI, A. J. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. São Paulo: Pioneira, 1998.

ANDERSON, R. M.; MAY, R. M. *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. New York: Oxford University Press, 1991.

ARAÚJO, J. L. Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos. 2002. 173f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

ARON, J. L.; MAY, R. M. The population dynamics of malaria. In: ANDERSON, R. M. (Ed.) *Population Dynamics of Infectious Diseases: theory and applications*. London: Chapman and Hall Ltd., 1982. p.139-179.

ARTIGUE, M. Learning Mathematics in a CAS environment: the genesis about a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v.7, n. 3, p.245-274, 2002.

BALDINO, R. R. Como Integrar Disciplinas sob o Ponto de Vista Epistemológico. In: *Encontro Setorial dos Cursos de Graduação da Unesp*, 1, 1995, Águas de Lindóia. Anais... Águas de Lindóia, 1995. p.30-47.

BARBOSA, S. M. *Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia*. 2009. 199f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

BASAÑEZ, M.-G.; RODRÍGUEZ, D. J. Dinámica de transmisión y modelos matemáticos en enfermedades transmitidas por vectores. *Entomotropica*, v.19, n.3, p.113-134, 2004.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 3ª ed., 2009.

BENEDETTI, F. C. *Funções, software gráfico e coletivos pensantes*. 2003. 316f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. *Pro-Posições*, v.4, n.1, p. 18-23, 1993.

BIEMBENGUT, M.S. & BASSANEZI, R. C. *Modelagem na Matemagicalândia*. In: *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*, ano 7, n. 8, p.15-37,1992.

BIEMGENGUT, M. S.; HEIN, N. Uma Proposta para o Ensino de Cálculo. *Temas & Debates*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano VIII, n. 6, p.44-59, 1995.

BLISS, J.; OGBORN, J. Tools for exploratory learning. *Journal of Computer Assisted Learning*, v.5, p.37-50, 1989.

BLOMHØJ, M.; KJELDSSEN, T. H. Students' Reflections in Mathematical Modelling Projects. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.385-396.

BLUM, W. Can Modelling be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.15-30.

BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H.-W.; NISS, M. (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education – The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Humans-with-Media: transforming communication in the classroom. In: CHRONAKI, A.; CHRISTIANSEN, I. M. (Org.) *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication*. Estados Unidos: Information Age Publishing, 2005, v.1, p.51-78.

BORBA, M. C. Humans-with-Media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, v.44, n.6, p.801-814, 2012.

BORBA, M. C.; CONFREY, J. A Student's Construction of Transformations of Functions in a Multiple Representational Environment. *Educational Studies in Mathematics*, v.31, n.3, p.319-337, 1996.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. Modelagem, Calculadora Gráfica e Interdisciplinaridade na Sala de Aula de um Curso de Ciências Biológicas. *Revista de Educação Matemática*, ano 5, n. 3, p.63-70, 1997.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 3ª Ed.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. A Ideologia da Certeza em Educação Matemática. In: SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BUSSE, A.; FERRI, R. B. Methodological reflections on a three-step-design combining observation, stimulated recall and interview. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, v.35, n.6, p.257-264, 2003.

CATAPANI, E. C. Cálculo em Serviço: um estudo exploratório. *BOLEMA*, ano 14, n.16, p.48-62, 2001.

CLARKE, D. J. The LPS Research Design. In: CLARKE, D. J.; KEITEL, C.; SHIMIZU, Y. (Eds.) *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: the insider's perspective*. p. 15-36. Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers, 2006.

CLEMENTS, R. R. Teaching mathematics to engineering students utilizing innovative teaching methods. In: HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKHEIM, E. (Eds.) *Mathematics as a Service Subject*, ICMI Study Series, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p.45-57.

COBB, P.; CONFREY, J.; diSESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, v.32, n.1, p.9-13, 2003.

DAN, Q.; XIE, J. Mathematical Modelling Skills and Creative Thinking Levels: an experimental study. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.457-466.

DENZIN, M. K.; LINCOLN, Y. S. Introdução: a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, M. K.; LINCOLN, Y. S. (Eds.) *O Planejamento da Pesquisa Qualitativa: teorias e abordagens*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

DEPREZ, J. Modelling the Evolution of the Belgian Population Using Matrices, Eigenvalues and Eigenvectors. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.467-478.

DINIZ, L. N. *O papel das tecnologias da informação e comunicação nos projetos de modelagem*. 2007. 118f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

DOERR, H. M. Integrating the Study of Trigonometry, Vectors, and Force Through Modeling. *School Science and Mathematics*, v.96, n.8, p.407-418, 1996.

DOERR, H. M.; PRATT, D. The Learning of Mathematics and Mathematical Modeling. In: HEID, M. K.; BLUME, G. W. (Eds.) *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Vol.1. Research Syntheses*. USA: Information Age Publishing, 2008. p.18-23.

DOERR, H.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (*design research*): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.) *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática*. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p.113-130.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M. The Graphics Calculator in Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior*, v.15, n.4, p.425-440, 1996.

DULLIUS, Maria Madalena. *Enseñanza y Aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con Abordaje Gráfico, Numérico y Analítico*. 2009. 514f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) – Universidade de Burgos, Departamento de Didáticas Específicas, Burgos, Espanha, 2009.

EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. Philadelphia, USA: SIAM, 2005.

FONTANA, A.; FREY, J. H. The Interview: from structured questions to negotiated text. In: DENZIN, L. N.; LINCOLN, Y. S. (Eds.) *Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks, USA: Sage Publications, 2000.

FRANCHI, R. H. De O. L. Cursos de Cálculo: uma proposta alternativa. *Temas & Debates*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano VIII, n. 6, 39-43, 1995.

FRIEL, S. N.; CURCIO, F. R.; BRIGHT, G. W. Making Sense of Graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.32, n.2, p.124-158, 2001.

GEIGER, V. Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modelling. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.305-314.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record, 2004. 8ª ed.

GREFRATH, G.; SILLER, H.-S.; WEITENDORF, J. Modelling Considering the Influence of Technology. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.315-330.

HERMINIO, M. H. G. B. *O processo de escolha dos temas dos projetos de modelagem*. 2009. 139f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

HERMINIO, M. H. G. B.; BORBA, M. C. A Noção de Interesse em Projetos de Modelagem Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, v.12, n.1, p.111-127, 2010.

HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKEIM, E. On the Teaching of Mathematics as a Service Subject. In: HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKEIM, E. (Eds.) *Mathematics as a Service Subject*, ICMI study series, Cambridge: Cambridge University Press, 1-19, 1988.

HOYLES, C.; LAGRANGE, J.-B. *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*, The 17th ICMI Study, New York: Springer, 2010.

HUBBARD, J. H. What It Means to Understand a Differential Equation. *The College Mathematics Journal*, v.25, n.5, p.372-384, 1994.

HUßMANN, S. Building Concepts and Conceptions in Technology-Based Open Learning Environments. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H.-W.; NISS, M. *Modelling and Applications in Mathematics Education – The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007. p.341-348.

IVERSEN, S. M.; LARSON, C. J. Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math – A Study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, v.38, n.3, p.281-292, 2006.

JACOBINI, O. R. *A Modelagem Matemática como Instrumento de Ação Política na Sala de Aula*. 2004. 225f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Unesp, Rio Claro, SP. 2004.

JACOBSON, M. J.; WILENSKY, U. Complex Systems in Education: scientific and educational importance and implications for the learning sciences. *The Journal of the Learning Sciences*, v.15, n.1, p.11-34, 2006.

JAVARONI, S. L. *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. 2007. 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

JAVARONI, S. L.; SOARES, D. S. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. *Acta Scientiae*, v.14, n.2, p.260-275, 2012.

KADJEVICH, D. Towards a Wider Implementation of Mathematical Modelling at Upper Secondary and Tertiary Levels. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H.-W.; NISS, M. *Modelling and Applications in Mathematics Education – The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007. p.349-356.

KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011.

KAISER, G.; SCHWARZ, B.; BUCHHOLTZ, N. Authentic Modelling Problems in Mathematics Education. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.591-602.

KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press, 1995.

KLINE, M. *Mathematical Thought Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972.

KLYMCHUK, S.; NARAYANAN, A.; GRUENWALD, N.; SAUERBIER, G.; ZVERKOVA, T. Modelling of Infectious Disease with Biomathematics: implications for teaching and research. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.489-498.

LABORDE, C. Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v.6, n.3, p.283-317, 2001.

LEGÉ, J. “To model, or to let them model?” That is the question! In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H.-W.; NISS, M. (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer, p.425-432, 2007.

LESH, R.; KELLY, A. Multi-tired teaching experiments. In: KELLY, A.; LESH, R. (Eds.) *Handbook of Research in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p.197-230.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LIM, L. L.; TSO, T.-Y.; LIN, F. L. Assessing Science Students’ Attitudes to Mathematics: a case study on a modelling project with mathematical software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v.40, n.4, p.441-453, 2009.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park: Sage Publications, 1985.

MALHEIROS, A. P. S. *A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem*. 2004. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

MATSUZAKI, A. Using Response Analysis Mapping to Display Modellers’ Mathematical Modelling Progress. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.499-510.

MULLER, E.; BURKHARDT, H. Applications and Modelling for Mathematics – Overview. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H.-W.; NISS, M. (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer, p.267-274, 2007.

MURAKAMI, H. Mathematical Education for Engineering Students. In: HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKHEIM, E. (Eds.) *Mathematics as a Service Subject*, ICMI Study Series, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p.63-69.

NEVES, R. G.; SILVA, J. C.; TEODORO, V. D. Improving Learning in Science and Mathematics with Exploratory and Interactive Computational Modelling. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14*. New York: Springer, 2011. p.331-339.

NISS, M.; BLUM, W.; GALBRAITH, P. Introduction. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H.-W.; NISS, M. (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007. p.3-32.

OLIMPIO JUNIOR, A. Compreensões de Conceitos de Cálculo Diferencial no Primeiro Ano de Matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2006. 263f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

PEA, R. D. Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganize Mental Functioning. *Educational Researcher*, v.20, n.4, p.167-182, 1985.

PEAD, D.; RALPH, B.; MULLER, E. Use of technology in learning mathematics through modeling. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H. W.; NISS, M. (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 2007. p.309-318.

POUPART, J. A entrevista de tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. In: POUPART, J.; DESLAURIERS, J.P.; GROULX, L.H.; LAPERRIÈRE, A.; MAYER, R.; PIRES, A. P. *A Pesquisa Qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos*. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010. 2^a ed. p. 215-253.

PULL, J. H.; GRAB, B. A simple epidemiological model for evaluating the malaria inoculation rate and risk of infection in infants. *Bulletin World Health Organization*, v.51, n.5, p.507-516, 1974.

RASMUSSEN, C. New directions in differential equations: a framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, v.20, n.1, p.55-87, 2001.

RASMUSSEN, C.; BLUMENFELD, H. Reinventing solutions to systems of linear differential equations: a case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior*, v.26, n.3, p.195-210, 2007.

RASMUSSEN, C.; KWON, O. N. An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, v.26, n.3, p.189-194, 2007.

RIEBER, L. P. Using Computer Animated Graphics in Science Instruction with Children. *Journal of Educational Psychology*, v.82, n.1, p.135-140, 1990.

RIEBER, L. P. Animation, Incidental Learning, and Continuing Motivation. *Journal of Educational Psychology*, v.83, n.3, p.318-328, 1991.

ROTH, W.-M. Competent Workplace Mathematics: how signs become transparent in use. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v.8, n.2, p.161-189, 2003.

ROTH, W.-M.; BOWEN, G. M. Complexities of Graphical Representations during Ecology Lectures: an analysis rooted in semiotics and hermeneutic phenomenology. *Learning and Instruction*, v.9, n.3, p.235-255, 1999.

ROTH, W.-M.; LEE, Y. J. Interpreting Unfamiliar Graphs: a generative, activity theoretic model. *Educational Studies in Mathematics*, v.57, n.2, p.265-290, 2004.

ROUBINE, E. Some Reflections about the Teaching of Mathematics in Engineering Schools. In: HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKHEIM, E. (Eds.) *Mathematics as a Service Subject*, ICMI Study Series, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p.70-74.

SALOMON, G.; PERKINGS, D. N.; GLOBERSON, T. Partners in Cognition: extending human intelligence with intelligent technologies. *Educational Researcher*, v.20, n.3, p.2-9, 1991.

SCHEFFER, N. F. Sensores, Informática e o Corpo: a noção de movimento no ensino fundamental. 2001. 242f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

SCUCUGLIA, R. A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas. 2006. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SEIGEL, M. J. Teaching Mathematics as a Service Subject. In: HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKEIM, E. (Eds.) *Mathematics as a Service Subject*, ICMI study series, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p.75-89.

SIMONS, F. Teaching First-Year Students. In: HOWSON, A. G.; KAHANE, J.-P.; LAUGINIE, P.; de TURCKEIM, E. (Eds.) *Mathematics as a Service Subject*, ICMI study series, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p.35-44.

SIVSUBRAMANIAM, P. Distributed Cognition and the Use of Graphing Calculators in the Learning of Mathematics. In: *National Conference on Graphing Calculator*, 2, Penang, 2004. Proceedings... Penang, 2004. p.93-103.

SKOVSMOSE, O.; BORBA, M. C. Research Methodology and Critical Mathematics Education. In: VALERO, R.; ZEVENBERGEN, R. (Eds.) *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues on power in theory and methodology*. Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 207-226.

SOARES, D. S. *Análise das soluções do sistema de EDO's para o fenômeno da circulação termohalina*. 2008. 134f. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura) – Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2008.

SOARES, D. S. Modelagem ou Aplicações? Caracterizando uma proposta pedagógica para alunos de Biologia. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 7, 2011, Belém, Pará. *Anais...*, 2011, p.1-16.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. O Interesse de Alunos de Biologia pela Análise de um Fenômeno Biológico e seu Modelo Matemático. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 5, Petrópolis, 2012. *Anais...* Petrópolis, 2012. p.1-18.

SOFRONAS, K. S.; DE FRANCO, T. C.; VINSONHALER, C.; GORGIEVSKI, N; SCHROEDER, L.; HAMELIN, C. What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *Journal of Mathematical Behavior*, v.30, p.131-148, 2011.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. W. Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Eds.) *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p.267-307.

STEPHAN, M.; RASMUSSEN, C. Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, v.21, n.4, p.459-490, 2002.

STEWART, J. *Cálculo*. Volume II. São Paulo: Cengage Learning, 5ª ed., 2009.

TEODORO, V. D. *Modellus: Learning Physics with Mathematical Modelling*. 2002. 248f. Tese (Doutorado em Ciências e Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2002.

THE DESIGN-BASED RESEARCH COLLECTIVE. Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, v.32, n.1, p. 5-8, 2003.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCSH, J. V. (Ed.) *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: M. E. Sharpe Inc., 1981. p.256-278.

VILLARREAL, M. E. O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

VILLARREAL, M. E.; BORBA, M. C. Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and... notebooks throughout 100 years of ICMI. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, v.42, n.1, p.49-62, 2010.

VILLARREAL, M. E.; ESTELEY, C. B.; MINA, M. V. Modeling empowered by information and communications technologies. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, v.42, n.3-4, p.405-419, 2010.

WILENSKY, U.; REISMAN, K. Thinking Like a Wolf, a Sheep or a Firefly: learning Biology through constructing and testing computational theories – an embodied modeling approach. *Cognition & Instruction*, v.24, n.2, p.171-209, 1998a. Disponível em: <<http://ccl.northwestern.edu/papers/bio/long/>> Acesso em: 02 abr. 2010.

WILENSKY, U.; REISMAN, K. ConnectedScience: learning Biology through constructing and testing computational theories – an embodied modeling approach. In: BAR-YAM, Y. (Ed.). *Proceedings of the Second International Conference on Complex Systems*. Nashua, NH: New England Complex Systems Institute, 1998b. Disponível em: <<http://ccl.northwestern.edu/papers/bio/short/>> Acesso em: 02 abr. 2010.

WYSE, A. P. P.; BEVILACQUA, L.; RAFIKOV, M. Modelo Matemático Sazonal para Malária. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA)*, v.7, n.2, p.391-400, 2006.

Apêndice 1:

Atividades Aplicadas em 2010

Este Apêndice é formado pelas guias das atividades aplicadas em 2010 e que foram entregues aos estudantes em sala de aula para guiar o seu trabalho.

Atividade 1 – O Fenômeno Biológico

Parte 1. Com base nos vídeos que assistimos sobre a malária, discuta com seu colega sobre as seguintes questões:

1. Como a malária é transmitida? O que influencia a transmissão da Malária? Em que regiões do país ela prevalece, por quê?
2. O que causa a doença? O processo de contágio é imediato?
3. Qual a importância do estudo da Malária em termos biológicos e sociais?

Parte 2. Imagine que você e seu colega fazem parte de um estudo governamental sobre a malária no Brasil.

1. Que tipo de recursos vocês utilizariam para proceder com um estudo sobre a transmissão da doença?
2. Quais fatores vocês consideram fundamentais no estudo da transmissão da malária?
3. Se vocês não pudessem considerar todos os fatores que influenciam o fenômeno em estudo e pudesse trabalhar com no máximo 5 quais você escolheria? Será que descartar alguns fatores influencia nas informações finais fornecidas pela análise das variáveis selecionadas?
4. O que você entende por modelo?
5. Como a elaboração de um modelo pode auxiliar no estudo de um fenômeno biológico?
6. O que é preciso considerar durante a elaboração de um modelo?
7. Um modelo é sempre preciso? É possível utilizar um modelo para manipular informações?

Atividade 2 – Modelo Matemático para o Fenômeno

Apresentando o modelo matemático sobre a malária:

No encontro passado nós pensamos sobre quais fatores consideraríamos para estudar a dinâmica de transmissão da malária em uma determinada região. Algumas das ideias que discutimos e que consideramos importante de discutir foram:

- índice de antropofilia do mosquito
- apenas a fêmea do mosquito que se alimenta de sangue
- influência da sazonalidade na população de mosquitos
- período de incubação
- aquisição de imunidade
- controle do mosquito através de incetidas, telas ou repelentes
- influência da medicação na recuperação das pessoas doentes
- índice de mortalidade dos humanos

Vários pesquisadores já estudaram a malária, por ser uma doença de importância em várias regiões do planeta. O modelo de Ross-MacDonald foi o primeiro a surgir sobre a malária. Algumas hipóteses são consideradas:

As populações de humanos e vetores se mantêm constantes no tempo. São populações fechadas. As populações de humanos e mosquitos são homogêneas quanto a suscetibilidade, exposição, atratividade, etc.

São ignorados os períodos de incubação dentro dos humanos e mosquitos (infectados = infectantes).

Se ignora a aquisição gradual de imunidade nos humanos.

A taxa *per capita* de recuperação dos humanos é muito mais alta que sua taxa *per capita* de mortalidade; em consequência se ignora a taxa de mortalidade em humanos

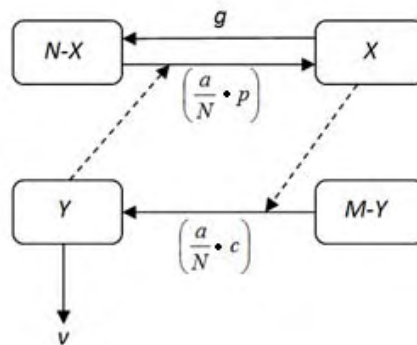
Os mosquitos não se recuperam; não se ignora a mortalidade do vetor.

Não se produz mortalidade adicional do hospedeiro humano ou vetor induzida pelo parasita.

Não se produz superinfecção em humanos ou mosquitos. Somente se infectam os suscetíveis.

Tabela: Modelo de malária de Ross-Macdonald: suposições básicas.

Para elaborar o modelo, alguns parâmetros são levados em conta e a dinâmica entre as populações também é considerada. O fluxograma a seguir representa esta dinâmica:



Considere N a população total de humanos em uma região e $X(t)$ a população de humanos infectados por malária num determinado instante t . Assim, a quantidade de humanos saudáveis e suscetíveis à infecção neste mesmo instante é dada por $N-X(t)$. Em geral, vamos escrever $N-X$.

Considere agora M a população total de mosquitos transmissores da malária na mesma região e $Y(t)$ a população de mosquitos infectados pelo parasita. Assim, a quantidade de mosquitos saudáveis e suscetíveis à infecção neste mesmo instante é dada por $M-Y(t)$. Em geral, vamos escrever $M-Y$.

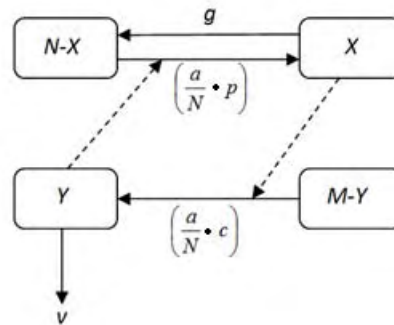
O que este diagrama nos diz é que: para que uma pessoa sadia pegue malária, ela precisa ser picada por um mosquito infectado. Isto depende da frequência diária com que cada mosquito pica um humano (a/N) e da probabilidade de um ser humano sadio ser infectado (p). Nosso modelo não considera a mortalidade por malária, mas prevê a recuperação da doença. Portanto, uma pessoa infectada volta a ser sadia e suscetível de acordo com uma porcentagem ou taxa g .

Agora, para que um mosquito seja infectado, ele precisa picar uma pessoa infectada. Isto depende da frequência diária com que cada mosquito pica um humano (a/N) e da probabilidade de um mosquito ser infectado (c). Nosso modelo não prevê que os mosquito se recuperam da malária, portanto, uma vez infectados assim passarão o resto da vida. Os mosquitos morrem segundo uma taxa de mortalidade v .

O quadro abaixo apresenta uma lista da nomenclatura utilizada para denominar parâmetros e variáveis no modelo de Ross-Macdonald.

Símbolo	Significado
M	Tamanho da população do vetor
N	Tamanho da população de humanos
h	Índice de antropofilia (fração de alimentações sanguíneas de origem humana).
γ	Duração do ciclo gonadotrófico em unidades de tempo
$1/\gamma$	Frequência de picada por mosquito em unidades de tempo ⁻¹
a	Taxa de picada sobre humanos por mosquito (h/γ)
p	Probabilidade que uma picada origine uma infecção no humano
c	Probabilidade que uma picada origine uma infecção no vetor
g	Taxa <i>per capita</i> de recuperação no humano em unidades de tempo ⁻¹
$1/g$	Duração média do evento malárico no humano em unidades de tempo
v	Taxa <i>per capita</i> de mortalidade do vetor em unidades de tempo ⁻¹
$1/v$	Expectativa de vida do mosquito (longevidade média do vetor) em unidades de tempo

O fluxograma que estudamos anteriormente representa o movimento que está sendo considerado para a elaboração deste modelo, tendo em vista as hipóteses formuladas e os parâmetros considerados. Podemos representar este mesmo movimento através de equações matemáticas. O fluxograma nos dá uma base para a elaboração destas equações.



As equações do modelo têm por objetivo expressar como as populações de *humanos e mosquitos infectados* variam ao longo do tempo. Então vamos nos guiar pelo fluxograma acima. Primeiramente vamos descrever como varia a população de humanos infectados. Para isso em cada instante consideramos as pessoas que foram infectadas e descontamos as que se recuperaram. Se uma pessoa é suscetível ela passa a ser infectada quando é picada por um mosquito infectado. Matematicamente expressamos estes encontros através da multiplicação das populações; temos então: $Y \cdot (N - X)$. Mas a chance de ocorrer a infecção depende da frequência de picada por mosquito em cada humano e da probabilidade de um humano ser infectado, por isso multiplicamos o produto acima por estes parâmetros: $\left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X)$. As pessoas se recuperam da malária segundo uma taxa g , portanto temos que $g \cdot X$ é o número de pessoas que se recuperam da doença a cada instante. Assim temos que:

Variação da população de humanos infectados ao longo do tempo =

$$\left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X$$

Agora vamos analisar como a população de mosquitos infectados varia ao longo do tempo. Para isso consideramos o número de mosquitos infectados e descontamos aqueles que morrem a cada instante. Para que um mosquito suscetível fique infectado, ele precisa picar uma pessoa que esteja infectada, e a chance de ocorrer a transmissão da doença depende da taxa de picada por mosquito em cada humano e da probabilidade de um mosquito ser infectado; matematicamente temos: $\left(\frac{a}{N} \cdot c\right) \cdot X \cdot (M - Y)$. A taxa de mortalidade dos

mosquitos é v , portanto temos que $v \cdot Y$ expressa o número de mosquitos infectados que morrem a cada instante. Deste modo, temos que:

Variação da população de mosquitos infectados ao longo do tempo =

$$\left(\frac{a}{N} \cdot c \right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y$$

Assim, obtemos as duas equações que expressam matematicamente o modelo elaborado com o fluxograma. Vamos apenas adicionar uma “notação” matemática para o termo “Variação da população ao longo do tempo”, a saber $\frac{d}{dt}$. Esta notação é mais do que isso e durante o curso iremos estudar o que há por trás dela e o seu significado matemático. Mas por enquanto seu significado intuitivo de variação irá servir bem. Deste modo vamos escrever as equações do seguinte modo:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p \right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X \\ \frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c \right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y \end{cases}$$

Atividade para casa. Investigue o significado de d/dt . Você já viu este símbolo em algum artigo biológico? Procure descobrir algum exemplo para compartilhar com a turma.

Atividade 3 – Primeira análise do modelo usando o Modellus

Parte 1. Seguindo o tutorial abaixo, insira no Modellus o modelo matemático que descreve a evolução da malária em uma região. Ao terminar, você terá obtido a tabela e o gráfico que representam uma possível solução para o sistema.

Tutorial – Modellus

Seguindo os passos deste tutorial você irá: (a) inserir o modelo matemático sobre a malária; (b) colocar valores para os parâmetros; (c) inserir valores para as condições iniciais; (d) configurar gráfico e tabela.

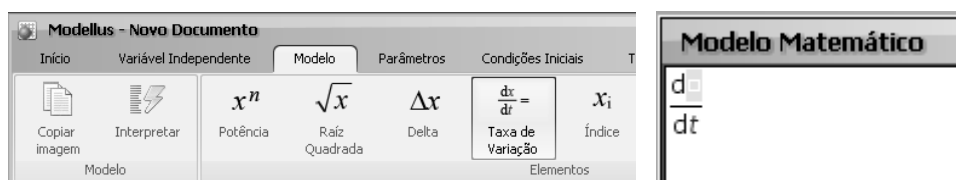
Atividade: Vamos iniciar inserindo o seguinte modelo matemático no Modellus.

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p \right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X$$

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c \right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y$$

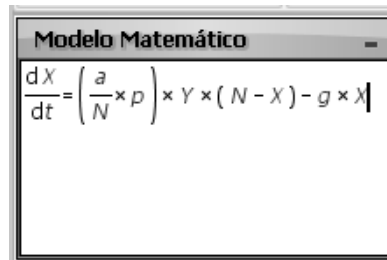
Para isso, siga os seguintes passos:

1. Maximize e janelas “Modelo Matemático”.
2. Na aba “Modelo” clique no botão “Taxa de Variação”. A expressão $\frac{d}{dt}$ irá aparecer na janela “Modelo Matemático”. Complete o quadrado cinza com a letra X . Você então obterá $\frac{dX}{dt}$.



3. Para finalizar a equação utilize seu teclado. Os sinais de igual, mais e menos são os mesmos do teclado. A operação de multiplicação pode ser inserida utilizando $*$. A operação de divisão é inserida usando a barra (/) ou o símbolo de divisão ($\div$) do teclado numérico. As operações de potência e raiz quadrada podem ser inseridas utilizando os botões da aba “Modelo”. A sequência de passos fica então assim:

$= (a/N \cdot p) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X$ (Obs: o software é sensível à letras maiúsculas e minúsculas).

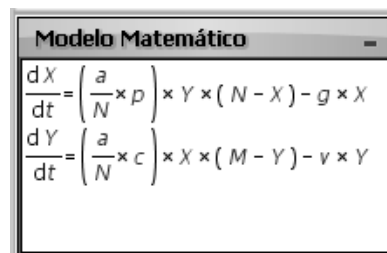


Modelo Matemático

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times p \right) \times Y \times (N - X) - g \times X$$

4. Para inserir a segunda equação repita os passos anteriores de forma semelhante. Sua

expressão ficará da seguinte maneira: $\frac{dY}{dt} = (a/N \cdot c) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y$

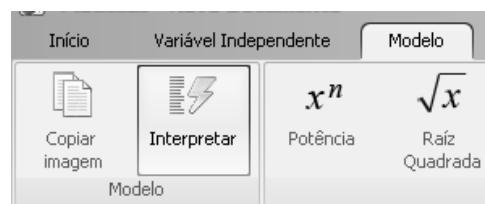


Modelo Matemático

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times p \right) \times Y \times (N - X) - g \times X$$

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times c \right) \times X \times (M - Y) - v \times Y$$

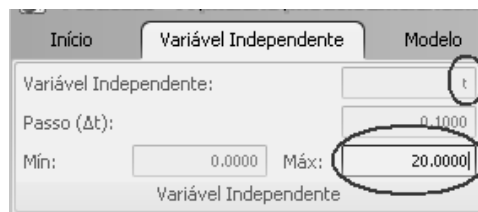
5. Clique no botão “Interpretar” na aba “Modelo” para que o modelo seja interpretado.



Após clicar no botão interpretar a aba “Parâmetros” irá aparecer automaticamente. Nesta aba você pode inserir valores para cada um dos parâmetros. Para iniciar insira os seguintes valores: $a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $g=0.8$, $c=0.01$, $M=60000$, $v=0.2$ (para alguns valores, o software abrevia a notação, por exemplo, 60000 irá aparecer como 6.00×10^4 . A notação E^4 significa 10^4 . De fato, $60000 = 6 \times 10000 = 6 \times 10^4$).

Em seguida você pode configurar a aba “Condições Iniciais”. Insira os seguintes valores: $X=100$, $Y=6000$. Deste modo você está supondo que a população inicial de pessoas infectadas e a população inicial de mosquitos infectados são 10% da população total de humanos e da população total de mosquitos, respectivamente.

Podemos ainda, configurar os valores de máximo e mínimo da variável independente t . Selecione a aba “Variável Independente”. Aí você pode escolher qual é a variável independente (no nosso caso o tempo t), pode ajustar o passo que significa ajustar a unidade de variação desta variável, e pode configurar os valores mínimo e máximo da variável. Vamos deixar o passo como está (0.10), vamos manter o valor mínimo da variável independente igual a zero e vamos escolher um valor de máximo. Vinte é um bom valor de máximo para iniciarmos nossa análise.

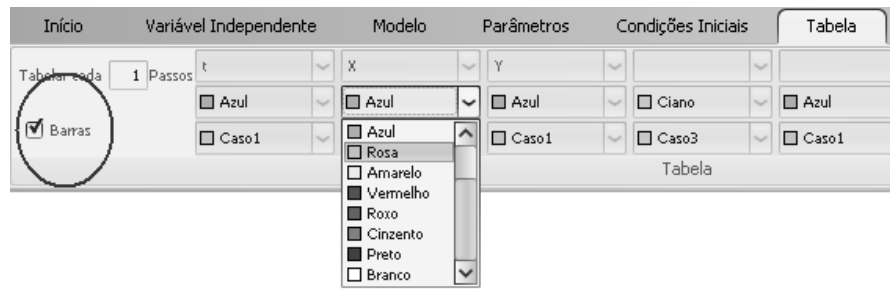


Tendo configurado os dados acima é possível partir para a configuração do gráfico e da tabela. Para configurar a tabela siga os seguintes passos:

1. Clique na aba “Tabela”.
2. As duas primeiras caixas já estão completas com t e X respectivamente. Clique na seta da terceira caixa e selecione Y . Deste modo a tabela irá apresentar os valores de t , X e Y simultaneamente.



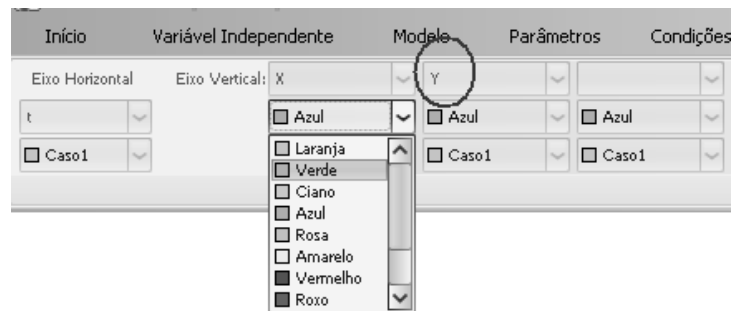
3. No canto esquerdo você encontra a opção “Barras”. Selecionando esta opção, barras coloridas irão aparecer na tabela. Estas barras variam de tamanho de acordo com o valor da variável possibilitando uma ferramenta visual para analisar os dados da tabela. Você pode selecionar uma cor diferente para cada uma das variáveis clicando nas setas da segunda linha de cada uma das caixas.



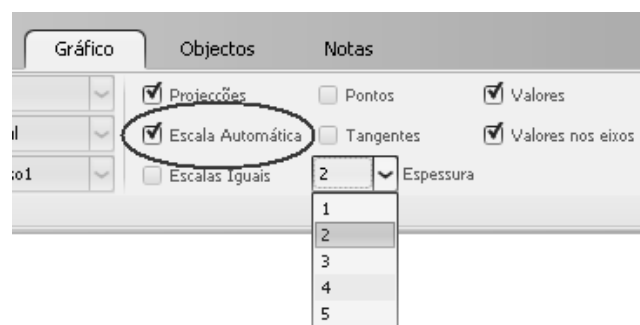
Para configurar o gráfico você deve seguir os seguintes passos:

1. Clique na aba “Gráfico”.
2. A variável do Eixo Horizontal (variável independente) já está selecionada (canto esquerdo) como sendo o tempo, então não é preciso modificar. Para outros modelos que tenham variáveis independentes diferentes é só clicar na flecha e selecionar a variável desejada.

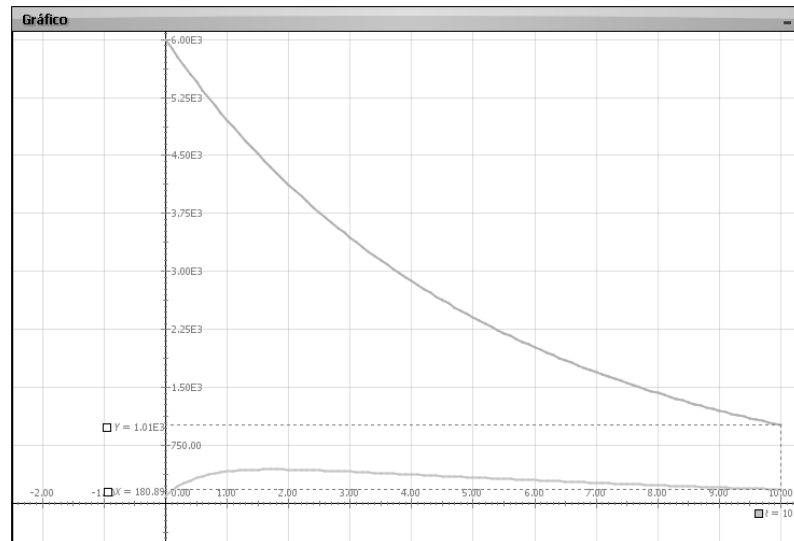
Para o Eixo Vertical uma das variáveis já está selecionada, a saber X . Você pode adicionar mais uma variável na segunda caixa usando a flecha. Selecione Y e você terá os gráficos $X \times t$ e $Y \times t$ simultaneamente. Para cada um você pode selecionar uma cor diferente usando as flechas na segunda linha de cada caixa.



3. No canto direito você pode configurar a escala e a espessura da linha dos gráficos.



Depois de completar os passos acima, pressione o botão *play* na parte inferior da janela . Deste modo você poderá acompanhar a construção do gráfico e da tabela simultaneamente.



Parte 2. Nesta atividade vamos analisar os gráficos obtidos e refletir sobre os passos realizados anteriormente para construí-los. Para isso, discuta com seus colegas de grupo as questões abaixo e elabore um relatório contendo o raciocínio elaborado por vocês assim como suas conclusões e justificativas para elas. Depois, selecione as ideias principais e elabore uma pequena apresentação para ser realizada em mais ou menos 5 minutos para todo o grupo.

1. Analise os gráficos que você obteve pelo software. Como você descreveria seu comportamento? Como você relacionaria este comportamento com o fenômeno biológico?
2. Agora, olhe apenas para o gráfico $X \times t$. Escolha três valores diferentes para t e encontre os valores de X que correspondem a estes valores do tempo usando o gráfico. Para cada valor de t o que o valor correspondente de X lhe diz com relação ao fenômeno? Conforme o tempo varia, o que acontece com os valores de X ? Para cada valor de t quantos valores de X correspondem? Existe algum valor de t que não possui um valor de X correspondente? O que estas características nos dizem a respeito de X com relação a t ?
3. Agora, olhe apenas para o gráfico $Y \times t$ e faça uma análise semelhante à feita acima.

4. A partir das análises anteriores, o que você pode concluir sobre a natureza de X e de Y ? Explícite seu argumento.
5. Antes de configurar o gráfico e a tabela, você foi sugerido a configurar os valores de máximo e mínimo da variável independente t . Assim, quando você apertou o botão *play* o tempo variou de zero até o valor máximo que você escolheu. O que estes valores representam em termos de X e de Y ? Como denominamos o intervalo $[0, t_{max}]$? O que ele significa?
6. Como vimos anteriormente, este modelo supõe que as populações totais de humanos (N) e mosquitos (M) permanecem sempre constantes ao longo do tempo. Compare os valores de X com N . O que acontece? Qual o sentido do intervalo $[0, N]$ para X ? Como denominamos este intervalo? Todos os valores deste intervalo são atingidos? Se não, como designamos o subconjunto de $[0, N]$ que são atingidos? O que eles representam em relação a X ?
7. Faça uma análise semelhante para os valores de Y com relação ao intervalo $[0, M]$.

Atividade 4 – Analisando parâmetros

Parte 1. Vamos iniciar construindo o gráfico e a tabela $X \times t$ em três casos distintos simultaneamente. Para isso, siga os passos do tutorial abaixo.

Inicie abrindo o seu arquivo, caso não esteja aberto.

1. Clique no botão *resetar* na parte inferior direita da janela  (sempre que você precisar fazer alguma edição no seu modelo clique primeiramente neste botão).
2. Selecione a aba parâmetros. Cada uma das colunas que aparecem na aba representa um caso diferente. Acrescente mais dois valores para o parâmetro c (por exemplo, $c=0.1$ e $c=0.5$) e pressione a caixa “igual” para os demais parâmetros. Deste modo você criou três casos diferentes para o modelo, onde apenas um parâmetro assume três valores diferentes.

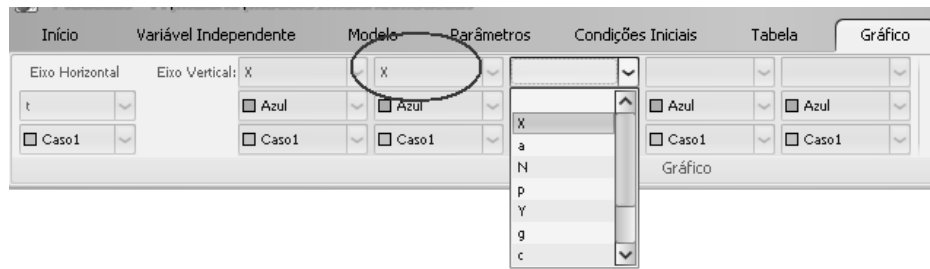
Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos	Notas
$g =$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	☒ Iguais
$c =$	0.01	0.10	0.90	0.00	0.00	0.00	0.00	☐ Iguais
$M =$	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	☒ Iguais

Parâmetros

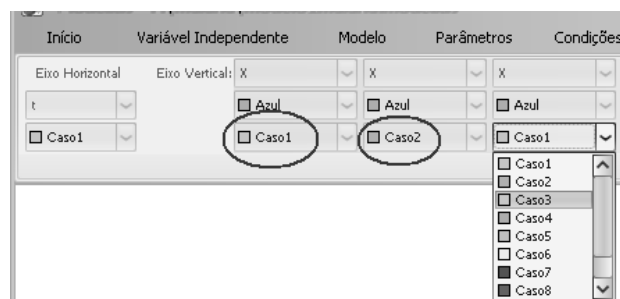
3. Selecione a aba “Condições Iniciais”. Na atividade anterior nós já havíamos configurado para o primeiro caso. Vamos manter as mesmas condições iniciais para os três casos. Então, basta clicar na opção “iguais” no canto direito.

Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos	Notas
$X =$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	☒ Iguais
$Y =$	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	☒ Iguais

4. Selecione a aba “Gráfico”. A variável independente (eixo horizontal) já está configurada. Vamos configurar a variável dependente (eixo vertical). A primeira caixa já possui a variável x selecionada, mas a segunda está com a variável y . Vamos trocar a variável na segunda caixa por x e escolher a terceira caixa também sendo x .



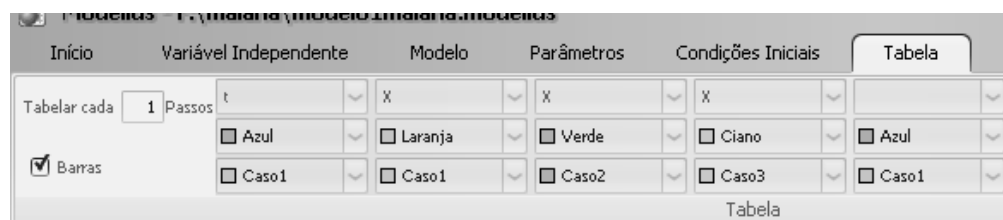
5. Na terceira linha de cada caixa você pode escolher o caso que quer representar. Deixe “Caso 1” para a primeira e escolha “Caso 2” e “Caso 3” para a segunda e a terceira respectivamente.



6. A segunda linha de cada caixa permite que você selecione uma cor para cada gráfico. Para facilitar sua visualização escolha para cada caso a cor padrão do programa (por exemplo, para o caso 1 escolha laranja, para o caso 2, verde, etc.)



7. Você pode configurar a tabela de forma semelhante na aba “Tabela” para mostrar os valores de X ao longo do tempo nos três casos simultaneamente.



8. Finalmente, aperte o botão *play* para ver a construção dos gráficos e da tabela.

Parte 2. Agora que vocês já sabem como construir gráficos para diferentes casos simultaneamente, utilizem esta ferramenta para discutir as seguintes situações hipotéticas. Se vocês acharem interessante, adicionem mais casos para cada uma das situações. Elaborem um relatório descrevendo o raciocínio elaborado pelo grupo assim como as conclusões estabelecidas e suas justificativas. Depois, selecionem as ideias principais e preparem uma apresentação de mais ou menos 3 minutos que será realizada para toda a classe.

1. Os gráficos que você obteve seguindo o tutorial estão relacionados com a seguinte situação: A probabilidade de um mosquito *anophelino* ser infectado pelo parasita malário depende da espécie do mosquito e da cepa do plasmódio. Suponha que tenhamos três diferentes espécies de anophelinos e através de experimentos laboratoriais verificamos que a probabilidade de infecção relativa ao *Plasmodium vivax* é dada pelos seguintes valores: $c=0.01$ caracterizando a primeira espécie como refratária; $c=0.1$ caracterizando a segunda espécie como suscetível à infecção; e $c=0.9$ caracterizando a terceira espécie como altamente suscetível à infecção. Compare os gráficos $X \times t$ e $Y \times t$ para as três casos e descreva como este parâmetro influencia as soluções do modelo e relacione com o fenômeno em estudo
2. Dependendo do mês do ano a densidade de mosquitos *Anopheles darling* muda na região de Novo Airão (Amazonas). Essas flutuações estão relacionadas com a estabilização dos criadouros. Nos períodos mais chuvosos, os criadouros tornam-se mais instáveis. Nos meses de abril, maio e junho temos os seguintes valores para a densidade de mosquitos na região (densidade de mosquitos = população total de mosquitos/população total de humanos = M/N): abril – 60; maio – 125; junho – 300⁹⁷. Supondo que a população total de humanos na região é $N=1000$, investigue como a mudança na população total de mosquitos M nos meses acima afeta a evolução da malária na região. (Obs: retorne o valor de c para 0.01 em todos os casos. Depois de analisar o comportamento do gráfico para os valores da densidade sugeridos acima, mude c para 0.1 e depois para 0.5 nos três casos. Há alguma mudança?)
3. Suponha que estamos no mês de junho, e que alguns pesquisadores estão testando o efeito de uma medida de controle a partir da termonebulização⁹⁸. Suponha que foi

⁹⁷ Dados retirados do site <<http://www.ibcperu.org/doc/isis/7268.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2009.

⁹⁸ Termonebulização é “uma técnica que consiste na aplicação de inseticidas líquidos, com formulação especial, através de equipamentos denominados termonebulizadores. A associação produto-equipamento permite a saída

constatado que depois de 3 dias o número de picadas em pessoas por mosquito caiu para $a=0.09$ por dia. Analisando os gráficos e tabelas $X \times t$ e $Y \times t$, o que você pode afirmar sobre a eficiência deste método? (Sugestão: esboce os gráficos de dois casos simultaneamente: o primeiro com $a=0.29$ e o segundo com $a=0.09$).

4. Segundo o texto “Um Guia para os Programas de Controle da Malária⁹⁹”, o uso de roupas impregnadas com permetrina e em combinação com o uso de repelente de inseto DEET reduz picadas em até 99%. Sendo assim, teríamos $a=0.0029$. Compare a eficiência deste método com o da terbonebulização para o caso em estudo. (Sugestão: na aba “Início” você pode modificar o número de casas decimais explicitadas na opção “Casas Decimais”).
5. Ainda segundo o texto “Um Guia para os Programas de Controle da Malária”, o simples uso de camisas de manga longa e calça reduz a chance de infecção em até 62%. Neste caso, a probabilidade de um humano ser infectado reduziria para $p=0.19$. Compare os gráficos $X \times t$ e $Y \times t$ para $p=0.5$ e $p=0.19$. Como eles diferem? O que isso significa em termos do fenômeno?
6. Suponha que em uma determinada região os medicamentos utilizados no controle da malária chegam com difícil acesso e, portanto, nem toda a população consegue se tratar com fármacos. Analise a influência do uso de medicamentos na evolução dos casos de malária nas pessoas dessa região. Descreva e justifique seu raciocínio.

Parte 3. Elabore uma pequena apresentação contendo as principais conclusões do grupo.

de pequenas gotículas pelo cano de descarga, formando uma névoa parecida com "fumaça" que contém o inseticida”. Fonte: <<http://www.grupocultivar.com.br/artigos/artigo.asp?id=33>>. Acesso em 11 maio 2010.

⁹⁹ Grupo de Assistência à Malária. *Um Guia para os Programas de Controle da Malária na indústria de óleo e gás*. Fonte: <http://www.ipieca.org/activities/health/downloads/publications/malaria_portuguese.pdf>. Acesso em: 11 maio 2010.

Atividade 5 – Variação das populações ao longo do tempo (Parte 1)

Parte 1. Nesta atividade vamos investigar o gráfico de X x t para um caso específico com o intuito de identificar a direção de mudança de uma variável com relação à outra.

1. Esboce o gráfico de X x t para o Caso 1 cujos parâmetros são $a=0.29$, $p=0.5$, $N=1000$, $g=0.8$, $M=60000$, $v=0.2$, $c=0.1$. Na Atividade 1 vimos que X é uma função de t , pois todos os valores de t possuem um valor de X correspondente e este valor é único. Descreva o comportamento do gráfico conforme o tempo passa e interprete o seu comportamento em termos do fenômeno.
2. Como os valores de X mudam conforme o tempo passa?

Parte 2. Análise da influência da variação do tempo de 0.5 unidades.

1. Analise os valores de X conforme t varia em intervalos de 0.5 unidades de tempo ($\Delta t=0.5$). Como eles variam?
2. O que esta variação de X para intervalos fixos de tempo nos diz sobre o fenômeno?
3. Como a variação de X para $\Delta t=0.5$ se relaciona com a concavidade do gráfico?

Parte 3. Vamos agora analisar as variações em X com relação às variações de 0.5 unidades em t .

1. Inicie calculando os valores de ΔX ($= X(t_2)-X(t_1)$) para diferentes valores de t em intervalos de 0.5 unidades iniciando com $t=0$ e finalizando com $t=5$.
2. Considere os triângulos retângulos de catetos Δt e ΔX . Trace a reta secante que contém a hipotenusa de cada um dos triângulos e calcule a sua inclinação (tangente do ângulo formado pela hipotenusa e o cateto horizontal). Qual a relação da inclinação da reta secante com os valores de Δt e ΔX ?
3. Analise as inclinações das retas secantes para os diferentes intervalos de tempo de 0.5 unidades. Como elas se comportam? Que informação podemos obter sobre o fenômeno a partir da análise destas inclinações?

Parte 4. Nas atividades anteriores analisamos a variação de X (ΔX) correspondente à variações de 0.5 unidades na variável tempo ($\Delta t = 0.5$). Quando calculamos a razão entre estas duas

variações ($\Delta X/\Delta t$) obtemos uma taxa, chamada de *taxa de variação*. A partir daí, podemos criar uma outra função, que vamos chamar de *função taxa de variação* e que, no nosso caso, possui $\Delta t = 0.5$ fixo. Esta função é dada por:

$$T(t) = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} = \frac{X(t + 0.5) - X(t)}{0.5}$$

(De forma análoga definimos uma função taxa de variação para Y).

1. Já vimos que o gráfico de $X \times t$ é o gráfico da função $X(t)$. Qual é a informação que este gráfico nos dá com relação ao fenômeno biológico?
2. Trace o gráfico da função taxa de variação acima no *Modellus* e analise seu gráfico. Qual é a informação que este gráfico nos fornece sobre o fenômeno biológico? (Observação: para inserir esta função no software, basta colocar a seguinte expressão na janela Modelo Matemático: $T = \Delta X/\Delta t$. Lembre-se de usar a barra ou o sinal de dividir do teclado numérico. Depois vá na aba Variável Independente e mude o passo de t (Δt) para 0.5 . Note que o próprio gráfico da função mudará um pouco sua aparência devido ao passo ser maior...)

Parte 5. Elabore uma análise semelhante para o gráfico $Y \times t$.

Atividade 6 – Variação das Populações ao longo do tempo (Parte 2)

Parte 1. Vamos analisar o gráfico de $X(t)$ de outra maneira. Ao invés de considerarmos intervalos fixos de tempo $\Delta t=0.5$, vamos fixar um valor $t_0=0$ e vamos tomar diferentes valores para Δt a partir de t_0 .

1. Inicie considerando o primeiro caso, cujos parâmetros são: $a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $g=0.8$, $c=0.01$, $M=60000$, $v=0.2$.
2. Calcule a taxa de variação $\Delta X/\Delta t$ (onde $\Delta t = t-t_0$ e $\Delta X = X(t)-X(t_0)$) para as seguintes variações de t : $\Delta t=\{2, 1, 0.5, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001\}$. (Observação: mude o passo na aba “Variável Independente” para que a tabela apresente os intervalos de tempo menores do que 0.1 e na aba “Início” mude o número de casas decimais para 5)
3. Analise os valores obtidos no item acima. O que ocorre com os valores de $\Delta X/\Delta t$ conforme Δt vai diminuindo cada vez mais?
4. O que a taxa de variação $\Delta X/\Delta t$ significa em termos do fenômeno biológico que estamos estudando?

Parte 2. Calcule o valor de dX/dt para $t=0$ usando a equação do modelo matemático.

1. Que valor você obteve?
2. Como este valor se compara com os valores das taxas de variação calculadas anteriormente?
3. Que relação este exemplo sugere para você entre o valor de dX/dt e as taxas de variação $\Delta X/\Delta t$?
4. Como podemos interpretar o valor da derivada dX/dt para $t=0$?

Parte 3: No item c da questão anterior você observou uma relação entre dX/dt e as taxas de variação $\Delta X/\Delta t$. Podemos fazer o gráfico da derivada no *Modellus* colocando na janela do Modelo a seguinte expressão:

$$T = \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

e configurando o passo para 0.1 na aba “Variável Independente”. Analise este gráfico. Que informação ele fornece sobre o modelo?

Parte 4: Faça uma análise semelhante para o gráfico de $Y \times t$.

Atividade 7 – Derivada e Reta Tangente

Parte 1. Construa o gráfico de X x t para o primeiro caso. Considere $t_0=0$ e desenvolva as análises propostas nos itens que se seguem elaborando um relatório com seus raciocínios e conclusões.

1. Para $\Delta t=1$, analise o triângulo de vértices $A(t_0, X(t_0))$, $B(t, X(t_0))$ e $C(t, X(t))$, onde $t=t_0+\Delta t$. Que tipo de triângulo é este? Quais relações você conhece e que pode escrever sobre este triângulo? (Faça um esboço do gráfico no seu caderno, assim como do triângulo, para ajudar na visualização).
2. Chame de α o ângulo CAB. Que informações você pode obter sobre α a partir do triângulo? Determine estas informações.
3. Se traçarmos a reta que contém o lado AC veremos que ela corta o gráfico em dois pontos. Chamamos uma reta deste tipo de *reta secante*. Escreva a equação que define esta reta.
4. Olhe para mais outros 2 triângulos com $\Delta t=0.1$, e $\Delta t=0.01$. Calcule o valor da tangente do ângulo α de cada triângulo e a equação da reta secante para cada um dos valores de Δt .

Parte 2. Compare o valor da tangente do ângulo α e o valor do coeficiente angular da equação da reta secante em cada um dos casos. O que você pode observar?

Parte 3. Insira as equações das retas secantes no software Modellus na janela “Modelo Matemático” e obtenha os gráficos de cada uma das retas. Reflita sobre as questões abaixo e elabore um relatório contendo suas reflexões e conclusões. Procure justificar suas afirmações.

1. Como você descreveria as retas de acordo com o valor de Δt ?
2. O que acontece com as retas conforme Δt diminui?
3. No limite, quando Δt é muito pequeno, como ficaria a reta? Como você a descreveria?
4. O que você pode dizer do valor da taxa $\Delta X/\Delta t$, para Δt muito pequeno, com relação à reta limite? Compare sua análise com a definição de derivada; o que você pode concluir?

Parte 4.

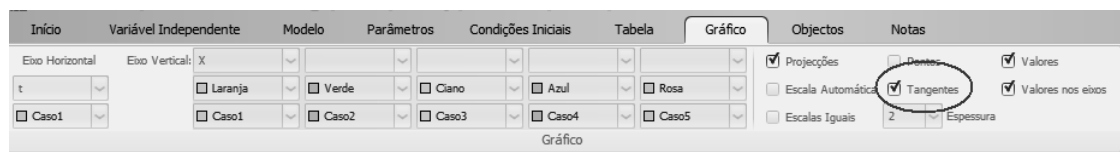
1. Nas atividades anteriores você elaborou uma possível interpretação geométrica para a derivada de uma função em um determinado ponto. Revise suas conclusões com seus colegas.
2. Encontre a equação da reta tangente para três valores distintos de t e construa o seu gráfico usando o Modellus. Analise as retas que você construiu. Quais informações sobre o fenômeno biológico podemos obter analisando as inclinações das retas tangentes ao gráfico de uma solução? O que inclinações positivas e negativas nos dizem?

Parte 5. Construa o gráfico $Y \times t$ para o mesmo caso que você analisou o gráfico $X \times t$. De forma semelhante à realizada nas etapas acima, analise os triângulos de vértices $A(t_0, Y(t_0))$, $B(t, Y(t_0))$ e $C(t, Y(t))$, onde $t=t_0+\Delta t$, $t_0=0$, e $\Delta t \in \{2; 1; 0,1; 0,001\}$. Elabore um relatório contendo seus raciocínios e suas conclusões.

Atividade 8 – Crescimento/Decrescimento, Máximos e Mínimos

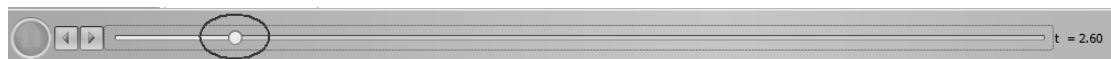
Parte 1. Nesta atividade vamos tentar relacionar o crescimento/decrescimento do gráfico de uma função com as retas tangentes ao seu gráfico.

1. Construa o gráfico e a tabela $X \times t$ para o caso 1 ($a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $g=0.8$, $M=60000$, $c=0.01$, $v=0.2$) específico, usando como passo para a variável independente 0.01 para ter mais precisão.
2. Na aba “Gráfico” escolha a opção “Tangentes”. Uma reta tangente irá aparecer e acompanhará o desenvolvimento do gráfico.



3. Analise o movimento das retas tangentes ao longo do gráfico, prestando atenção em sua inclinação. Como você relacionaria a inclinação da reta tangente com o crescimento/decrescimento do gráfico? Como você relacionaria o sinal da derivada de $X(t)$ com o crescimento/decrescimento do seu gráfico? Elabore um relatório contendo suas observações e conclusões, procurando justificá-las.

Parte 2. Analise novamente o movimento das retas tangentes ao gráfico $X \times t$, porém usando o mouse para movimentar o tempo.



1. Como você deve ter observado na atividade anterior, a inclinação da reta tangente passa de positiva para negativa. Analise com cuidado o momento desta transição. O que você observa?
2. No instante em que a reta tangente fica paralela ao eixo horizontal, qual é sua inclinação? Qual o valor de X para este instante? Qual a relação entre o valor de X neste instante com os demais valores de X ?
3. O que esta inclinação significa? O que ela nos diz sobre a solução do modelo? O que ela nos ajuda a entender sobre o fenômeno?

4. Como você relacionaria: o valor da derivada, a inclinação da reta tangente e o valor de X neste instante em particular?
5. Você consegue imaginar outras situações em que a reta tangente ao gráfico de uma função é paralela ao eixo horizontal? Quais? Explique seus exemplos.

Parte 3. Analise de forma semelhante o gráfico Y x t , elaborando um relatório com suas observações e conclusões.

1. Selecione novamente a opção “Tangentes” no gráfico Y x t e analise seu movimento. Como você relacionaria o sinal da derivada de $Y(t)$ com o crescimento/decrescimento de seu gráfico?
2. O gráfico de Y x t apresenta algum ponto em que a reta tangente é paralela ao eixo horizontal? O que isso significa em termos da solução? O que isso nos diz sobre o fenômeno biológico?

Atividade 9 – Analisando uma modificação do modelo

O objetivo desta atividade é analisar um outro modelo para malária, baseado no modelo que já estudamos, mas que considera a população total de mosquitos M variável ao longo do tempo.

Modifique o modelo matemático na janela correspondente do software para o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p \right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X \\ \frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c \right) \cdot X \cdot \left(\left(180000 + 120000 \cdot \sin\left(\frac{(2 \cdot \pi \cdot t)}{12} \right) \right) - Y \right) - v \cdot Y \end{cases}$$

Inicie a análise das soluções $X(t)$ e $Y(t)$ com os parâmetros que já usávamos: $a=0.29$, $p=0.5$, $N=1000$, $g=0.8$, $c=0.01$, $v=0.2$. Nas Condições Iniciais coloque $X=100$ e $Y=6000$.

As hipóteses são as mesmas do modelo estudado anteriormente, exceto pelo fato de que a população total de mosquitos M é variável e é dada por $M(t)=180000+120000 \cdot \sin((2\pi)/12)$. A unidade de tempo também mudou: ao invés de considerarmos o tempo em dias, agora consideramos o tempo em meses. Isso significa que a população total de mosquitos varia ao longo dos doze meses do ano segundo a função seno dada acima. Observe que quando $t=0$, $M(0)=180000$, pois $\sin(0)=0$. Assim, a população total de mosquitos na região no mês de janeiro é 180000. Conforme os meses vão passando, esta população aumenta e depois decai conforme o comportamento da função seno.

Você pode iniciar o trabalho analisando o gráfico de $M \times t$ e procurando compreender o que acontece com a população total de humanos ao longo do tempo (você pode construir este gráfico no Modellus).

Depois, varie os parâmetros do modelo matemático, faça sua análise relacionando as informações dadas pelos gráficos de $X(t)$ e de $Y(t)$ com as hipóteses do fenômeno, e registre

suas conclusões. Procure comparar com os gráficos das soluções deste modelo com as soluções do modelo que estávamos estudando até a aula passada: o que muda?

Atividade 10 – Definindo Sistemas Dinâmicos (Plano de Aula)

1. Objetivo

O objetivo desta atividade é discutir o conceito de Sistema Dinâmico (SD), assim como a definição de Equação Diferencial Ordinária (EDO) a partir da análise dos modelo estudado. Além disso, a interpretação geométrica vinculada às EDOs, a construção de um campo de direções, a definição de *nullclines* e de pontos de equilíbrio e o seu papel na análise do modelo também serão analisados.

2. Cronograma dos trabalhos

1. Os alunos irão discutir em grupos como definiriam uma Equação Diferencial Ordinária e um Sistema Dinâmico e irão elaborar um relatório contendo suas ideias e conclusões. Uma discussão em grande grupo buscará a sistematização destas definições (20min).
2. Os alunos irão discutir em grupos qual uma possível maneira de interpretar as EDOs e os sistemas dinâmicos geometricamente. Um relatório também será elaborado e uma discussão em grande grupo buscará uma sistematização dessas ideias.
3. A interpretação geométrica de uma EDO e de um SD será a base para a discussão de sua aplicação: o campo de direções. Os alunos poderão obter o campo de direções do modelo que estão estudando com o auxílio do software Winplot. Uma análise deste campo será feita com o intuito de analisar: Como o campo foi construído? O que cada vetor representa? Qual a utilidade de um campo de direções? Discussão em pequenos grupos será seguida por uma discussão em grande grupo.
4. A utilidade do campo de direções será base para a introdução do conceito de plano de fase. Os alunos podem visualizar o plano de fase para diferentes condições iniciais também utilizando o software Winplot. Uma análise do plano de fase será desenvolvida nos grupos com o intuito de aprimorar ainda mais a análise das soluções do sistema: agora visualmente interligadas.
5. Finalmente, uma breve discussão sobre *nullclines* e pontos de equilíbrio será realizada, com o intuito de conceitualizar estes objetos e explicitar sua importância na análise de soluções do fenômeno.

3. Conteúdos

Sistema Dinâmico, Equação Diferencial Ordinária, campos de direções, plano de fase, *nullclines* e pontos de equilíbrio.

4. Materiais de apoio

Laboratório de informática com o software Winplot.

Fichas de trabalho podem ser elaboradas para guiar o trabalho dos alunos ou o trabalho poderá ser conduzido oralmente pelo professor em conjunto com toda a turma.

5. Operacionalização

ETAPA 1

Composta pela discussão em grupos de uma possível definição para EDO e para SD. As seguintes perguntas podem guiar o trabalho dos alunos:

1. As equações $\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X$ e $\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c\right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y$

que formam o modelo matemático que estamos estudando são chamadas de *Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)*. Outros exemplos de equações deste tipo são:

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P \quad \text{e} \quad \frac{dP}{dt} = c \left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

Olhe para estas equações e discuta com seus colegas: como vocês definiriam o que é uma EDO?

2. O modelo matemático que descreve o fenômeno da malária e que estamos estudando, é formado por duas EDOs. Ele é chamado de *Sistema Dinâmico (SD)*, pois representa a dinâmica envolvida na relação de duas funções. Como você definiria um SD?

ETAPA 2:

Composta pela elaboração de uma possível interpretação geométrica para EDOs e SD. As seguintes perguntas podem guiar o trabalho dos alunos:

1. Vimos nas definições acima que uma EDO é uma equação formada por funções de uma variável e suas derivadas e que um SD é um sistema formado por EDOs. Nós

também já estudamos a interpretação geométrica de uma derivada. Relembre com seus colegas o que a derivada de uma certa função f em um ponto t_0 nos diz.

2. Como você relacionaria esta interpretação geométrica com uma EDO? Que informação uma EDO fornece para nós?

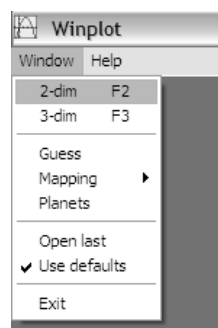
ETAPA 3:

Composta pela análise de um campo de direções para as equações do modelo matemático estudado para um caso específico. O campo de direções será elaborado com o auxílio do software Winplot. O seguinte tutorial e as seguintes perguntas guiarão a análise do campo de direções pelos alunos:

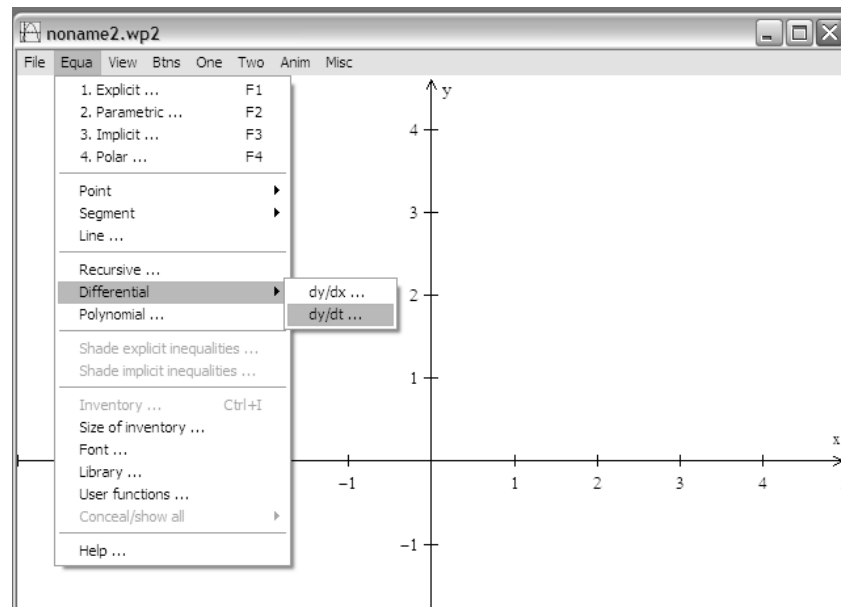
Tutorial Campo de Direções e Questões:

Vamos iniciar construindo um campo de direções para o modelo matemático que estamos estudando. Vamos escolher o caso em que $a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $c=0.01$, $M=60000$, $g=0.8$ e $v=0.2$. Siga os passos abaixo para a elaboração das atividades e procure analisar as perguntas propostas, elaborando um relatório com as ideias discutidas em seu grupo, assim como as conclusões alcançadas:

1. Depois de abrir o programa, escolha no menu “Window” a opção “2-dim”.



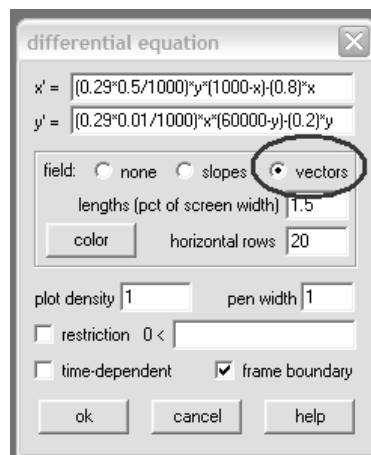
2. Uma nova janela se abrirá. Na opção “Equa” escolha “Differential” e em seguida “dy/dt”.



3. Mais uma janela se abrirá, onde você completará os campos x' e y' com as equações do modelo para o caso escolhido. Usando a sintaxe do programa você terá as seguintes expressões:

$x' = (0.29 * 0.5 / 1000) * y * (1000 - x) - (0.8) * x$ na primeira linha e

$y' = (0.29 * 0.01 / 1000) * x * (60000 - y) - (0.2) * y$ na segunda linha. Selecione a opção “vectors” entre as opções logo abaixo das equações.



4. Clique no botão “ok”. O campo de direções irá aparecer.

Questões para análise:

- a) Analise o campo de direções que você obteve no Winplot. Ele é formado por pequenos vetores. Como você acha que ele foi construído? A interpretação geométrica de um SD nos dá uma pista para compreender este processo.

- b) Cada vetor é formado por uma direção e um sentido. Que informação a direção do vetor nos dá? E qual a informação que você acha que o sentido do vetor nos dá? (Note que o eixo horizontal do campo de direções é formado pelos valores de X e o eixo vertical pelos valores de Y . Portanto as informações fornecidas pelos vetores não são para $X(t)$ ou $Y(t)$ em particular, mas sim para uma curva formada pelos valores de X e Y em cada instante t .)
- c) Por que você acha que um campo de direções é importante na análise de um sistema dinâmico?

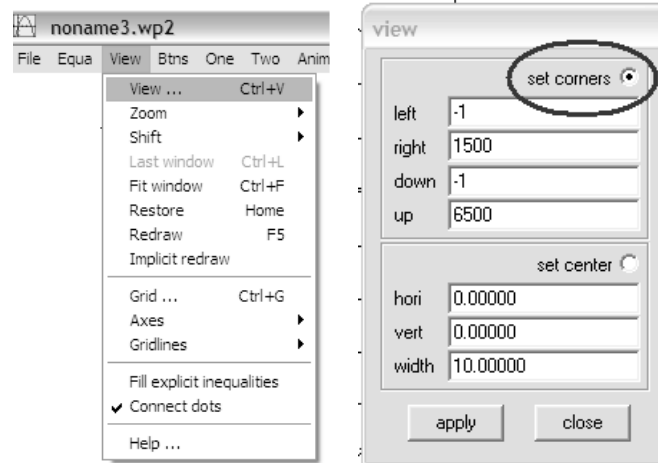
ETAPA 4:

Composta pela análise do plano de fase do modelo estudado. O seguinte tutorial e as seguintes perguntas poderão guiar os trabalhos dos alunos:

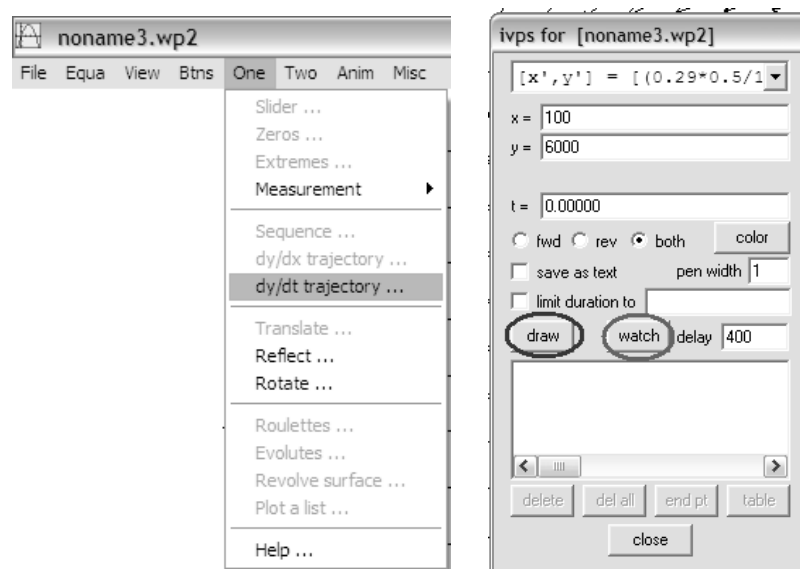
Tutorial Plano de Fase e Questões:

Na etapa anterior analisamos um campo de direções e vimos como é feita sua construção. Também vimos que cada um dos vetores do campo nos dá duas informações sobre as soluções do sistema: a direção nos informa qual é a inclinação da reta tangente à curva solução em um determinado instante t ; o sentido nos indica o sentido de movimento da curva solução conforme o tempo passa. Vamos agora construir a curva solução que corresponde às condições iniciais do caso que estamos estudando: $X(0)=100$ e $Y(0)=6000$.

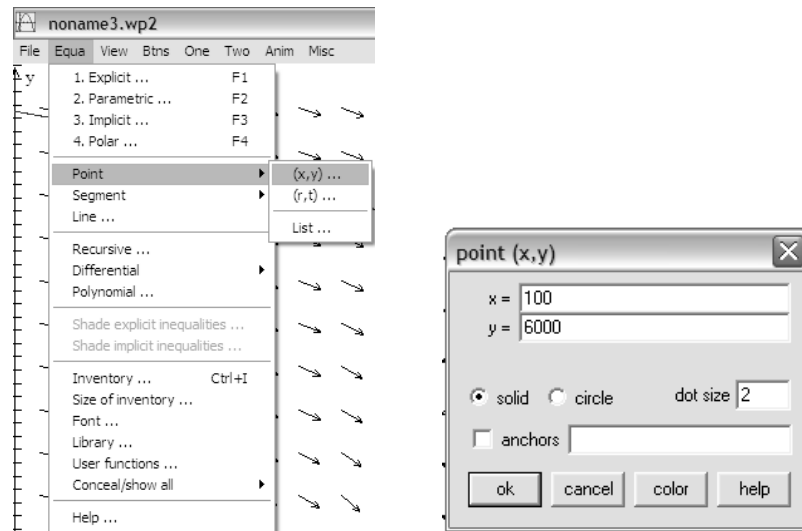
1. Primeiro vamos ajustar o nosso campo de visão. Na opção “View” do meu, selecione “View” novamente. Uma nova janela irá abrir, onde você poderá fixar valores máximos e mínimos para X e Y . Escolha: “left” -1, “right” 1500, “down” -1, “up” 6500. Selecione a opção “set corners” para fixar os valores escolhidos, pressione o botão “apply” para aplicar e depois o botão “close” para fechar a janela.



2. No menu, escolha a opção “One” e em seguida “dy/dt trajectory”. Uma nova janela se abrirá. Ela já irá conter as duas equações do sistema escritas na primeira linha. Preencha os espaços para x e y com os valores das condições iniciais: $x=100$ e $y=6000$. Para t deixe 0, pois isso indica que queremos a trajetória a partir do tempo inicial. Pressione o botão “draw” para ver a trajetória pronta, ou “watch” se quiser acompanhar a construção da curva.



3. Você pode marcar o ponto inicial da trajetória escolhendo no menu a opção “Equa” seguida de “Point”, seguida de “(x,y)”. Uma janela se abrirá para você completar os valores: $x=100$ e $y=6000$.



Questões para análise:

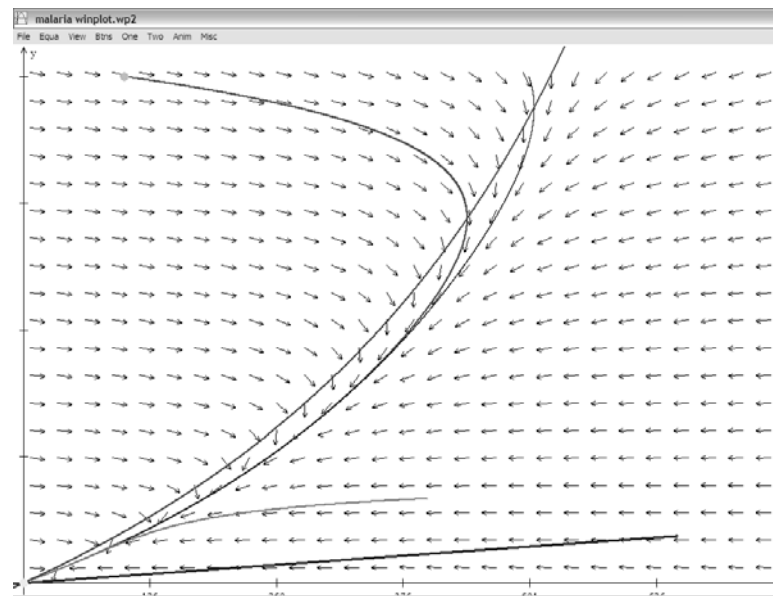
- Analise a curva obtida. Ela é chamada de Plano de Fase. Como ela se relaciona com os vetores do campo de direções?
- Nós já notamos anteriormente que o eixo horizontal contém valores de X e o eixo vertical contém valores de Y . Portanto, a curva que você obteve relaciona as duas soluções do sistema. Se você iniciar no ponto marcado e percorrer a curva com o dedo, você visita os valores de X e de Y conforme o tempo passa. Descreva como esses valores variam um com relação ao outro. O que isso significa em termos do fenômeno biológico?
- Trace outras curvas variando as condições iniciais do problema. Como estas curvas se comportam? O que esse comportamento significa em termos do fenômeno? Compare o comportamento das curvas que você obteve.

ETAPA 5:

Composta pela discussão sobre o conceito de *nullclines* e pontos de equilíbrio. Nesta atividade os alunos irão calcular as *nullclines* ($dx/dt=0$ e $dy/dt=0$) e os pontos de equilíbrio do

sistema em estudo. Estes dados serão plotados no Winplot e algumas perguntas podem ser propostas para a discussão nos grupos:

1. Para encontrar as *nullclines* você resolveu as seguintes equações: $dx/dt=0$ e $dy/dt=0$. Que informação estas curvas nos dão com relação ao fenômeno biológico estudado?
2. Que informação o(s) ponto(s) de equilíbrio nos fornece(m) com relação ao fenômeno biológico?
3. Observe novamente as curvas do plano de fase que você criou. Como elas se comportam com relação ao(s) ponto(s) de equilíbrio? O que esta informação nos diz com relação ao fenômeno? Esta informação é importante?



6. Avaliação

Será feita através da análise das produções dos alunos e de sua participação em sala de aula.

Apêndice 2:

Atividades Aplicadas em 2011

Este Apêndice é formado pelas guias das atividades aplicadas em 2011 e que foram entregues aos estudantes em sala de aula para guiar o seu trabalho.

Atividade 1 – O Fenômeno Biológico

Parte 1. Com base nos vídeos que assistimos sobre a malária, discuta com seu colega sobre as seguintes questões:

1. Como a malária é transmitida? O que influencia a transmissão da Malária? Em que regiões do país ela prevalece, por quê?
2. O que causa a doença? O processo de contágio é imediato?
3. Qual a importância do estudo da Malária em termos biológicos e sociais?

Parte 2. Imagine que você e seu colega fazem parte de um estudo governamental sobre a malária no Brasil.

1. Que tipo de recursos vocês utilizariam para proceder com um estudo sobre a transmissão da doença?
2. Quais fatores vocês consideram fundamentais no estudo da transmissão da malária?
3. Se vocês não pudessem considerar todos os fatores que influenciam o fenômeno em estudo e pudesse trabalhar com no máximo 5 quais você escolheria? Será que descartar alguns fatores influencia nas informações finais fornecidas pela análise das variáveis selecionadas?
4. O que você entende por modelo?
5. Como a elaboração de um modelo pode auxiliar no estudo de um fenômeno biológico?
6. O que é preciso considerar durante a elaboração de um modelo?
7. Um modelo é sempre preciso? É possível utilizar um modelo para manipular informações?

Atividade 2 – Modelo Matemático para o Fenômeno

Apresentando o modelo matemático sobre a malária:

No encontro passado nós pensamos sobre quais fatores consideraríamos para estudar a dinâmica de transmissão da malária em uma determinada região. Algumas das ideias que discutimos e que consideramos importante de discutir foram:

- índice de antropofilia do mosquito
- apenas a fêmea do mosquito que se alimenta de sangue
- influência da sazonalidade na população de mosquitos
- período de incubação
- aquisição de imunidade
- controle do mosquito através de incetidas, telas ou repelentes
- influência da medicação na recuperação das pessoas doentes
- índice de mortalidade dos humanos

Vários pesquisadores já estudaram a malária, por ser uma doença de importância em várias regiões do planeta. O modelo de Ross-MacDonald foi o primeiro a surgir sobre a malária. Algumas hipóteses são consideradas:

As populações de humanos e vetores se mantêm constantes no tempo. São populações fechadas. As populações de humanos e mosquitos são homogêneas quanto a suscetibilidade, exposição, atratividade, etc.

São ignorados os períodos de incubação dentro dos humanos e mosquitos (infectados = infectantes).

Se ignora a aquisição gradual de imunidade nos humanos.

A taxa *per capita* de recuperação dos humanos é muito mais alta que sua taxa *per capita* de mortalidade; em consequência se ignora a taxa de mortalidade em humanos

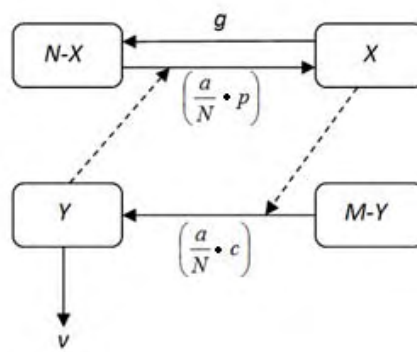
Os mosquitos não se recuperam; não se ignora a mortalidade do vetor.

Não se produz mortalidade adicional do hospedeiro humano ou vetor induzida pelo parasita.

Não se produz superinfecção em humanos ou mosquitos. Somente se infectam os suscetíveis.

Tabela: Modelo de malária de Ross-Macdonald: suposições básicas.

Para elaborar o modelo, alguns parâmetros são levados em conta e a dinâmica entre as populações também é considerada. O fluxograma a seguir representa esta dinâmica:



Considere N a população total de humanos em uma região e $X(t)$ a população de humanos infectados por malária num determinado instante t . Assim, a quantidade de humanos saudáveis e suscetíveis à infecção neste mesmo instante é dada por $N-X(t)$. Em geral, vamos escrever $N-X$.

Considere agora M a população total de mosquitos transmissores da malária na mesma região e $Y(t)$ a população de mosquitos infectados pelo parasita. Assim, a quantidade de mosquitos saudáveis e suscetíveis à infecção neste mesmo instante é dada por $M-Y(t)$. Em geral, vamos escrever $M-Y$.

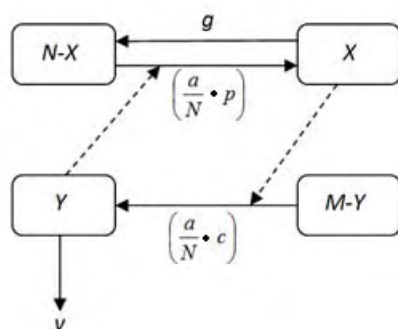
O que este diagrama nos diz é que: para que uma pessoa sadia pegue malária, ela precisa ser picada por um mosquito infectado. Isto depende da frequência diária com que cada mosquito pica um humano (a/N) e da probabilidade de um ser humano sadio ser infectado (p). Nosso modelo não considera a mortalidade por malária, mas prevê a recuperação da doença. Portanto, uma pessoa infectada volta a ser sadia e suscetível de acordo com uma porcentagem ou taxa g .

Agora, para que um mosquito seja infectado, ele precisa picar uma pessoa infectada. Isto depende da frequência diária com que cada mosquito pica um humano (a/N) e da probabilidade de um mosquito ser infectado (c). Nosso modelo não prevê que os mosquitos se recuperam da malária, portanto, uma vez infectados assim passarão o resto da vida. Os mosquitos morrem segundo uma taxa de mortalidade v .

O quadro abaixo apresenta uma lista da nomenclatura utilizada para denominar parâmetros e variáveis no modelo de Ross-Macdonald.

Símbolo	Significado
M	Tamanho da população do vetor
N	Tamanho da população de humanos
h	Índice de antropofilia (fração de alimentações sanguíneas de origem humana).
γ	Duração do ciclo gonadotrófico em unidades de tempo
$1/\gamma$	Frequência de picada por mosquito em unidades de tempo ⁻¹
a	Taxa de picada sobre humanos por mosquito (h/γ)
p	Probabilidade que uma picada origine uma infecção no humano
c	Probabilidade que uma picada origine uma infecção no vetor
g	Taxa <i>per capita</i> de recuperação no humano em unidades de tempo ⁻¹
$1/g$	Duração média do evento malárico no humano em unidades de tempo
v	Taxa <i>per capita</i> de mortalidade do vetor em unidades de tempo ⁻¹
$1/v$	Expectativa de vida do mosquito (longevidade média do vetor) em unidades de tempo

O fluxograma que estudamos anteriormente representa o movimento que está sendo considerado para a elaboração deste modelo, tendo em vista as hipóteses formuladas e os parâmetros considerados. Podemos representar este mesmo movimento através de equações matemáticas. O fluxograma nos dá uma base para a elaboração destas equações.



As equações do modelo têm por objetivo expressar como as populações de *humanos e mosquitos infectados* variam ao longo do tempo. Então vamos nos guiar pelo fluxograma acima. Primeiramente vamos descrever como varia a população de humanos infectados. Para isso em cada instante consideramos as pessoas que foram infectadas e descontamos as que se recuperaram. Se uma pessoa é suscetível ela passa a ser infectada quando é picada por um mosquito infectado. Matematicamente expressamos estes encontros através da multiplicação das populações; temos então: $Y \cdot (N - X)$. Mas a chance de ocorrer a infecção depende da frequência de picada por mosquito em cada humano e da probabilidade de um humano ser infectado, por isso multiplicamos o produto acima por estes parâmetros: $\left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X)$. As pessoas se recuperam da malária segundo uma taxa g , portanto temos que $g \cdot X$ é o número de pessoas que se recuperam da doença a cada instante. Assim temos que:

Variação da população de humanos infectados ao longo do tempo =

$$\left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X$$

Agora vamos analisar como a população de mosquitos infectados varia ao longo do tempo. Para isso consideramos o número de mosquitos infectados e descontamos aqueles que morrem a cada instante. Para que um mosquito suscetível fique infectado, ele precisa picar uma pessoa que esteja infectada, e a chance de ocorrer a transmissão da doença depende da taxa de picada por mosquito em cada humano e da probabilidade de um mosquito ser infectado; matematicamente temos: $\left(\frac{a}{N} \cdot c\right) \cdot X \cdot (M - Y)$. A taxa de mortalidade dos mosquitos é v , portanto temos que $v \cdot Y$ expressa o número de mosquitos infectados que morrem a cada instante. Deste modo, temos que:

Variação da população de mosquitos infectados ao longo do tempo =

$$\left(\frac{a}{N} \cdot c\right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y$$

Assim, obtemos as duas equações que expressam matematicamente o modelo elaborado com o fluxograma. Vamos apenas adicionar uma “notação” matemática para o

termo “Variação da população ao longo do tempo”, a saber $\frac{d}{dt}$. Esta notação é mais do que isso e durante o curso iremos estudar o que há por trás dela e o seu significado matemático. Mas por enquanto seu significado intuitivo de variação irá servir bem. Deste modo vamos escrever as equações do seguinte modo:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p \right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X \\ \frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c \right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y \end{cases}$$

Atividade para casa. Investigue o significado de d/dt . Você já viu este símbolo em algum artigo biológico? Procure descobrir algum exemplo para compartilhar com a turma.

Atividade 3 – Primeira análise do modelo usando o Modellus

Parte 1. Seguindo o tutorial abaixo, insira no Modellus o modelo matemático que descreve a evolução da malária em uma região. Ao terminar, você terá obtido a tabela e o gráfico que representam **uma possível solução** para o sistema.

Tutorial – Modellus

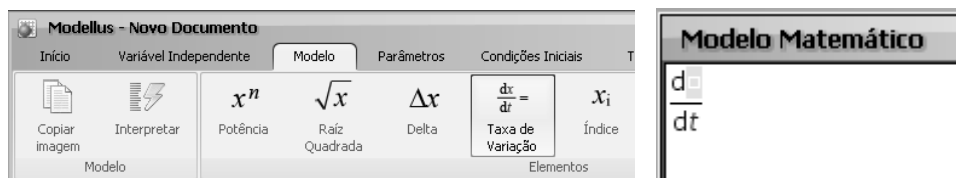
Seguindo os passos deste tutorial você irá: (a) inserir o modelo matemático sobre a malária; (b) colocar valores para os parâmetros; (c) inserir valores para as condições iniciais; (d) configurar gráfico e tabela.

Vamos iniciar inserindo o seguinte modelo matemático no Modellus.

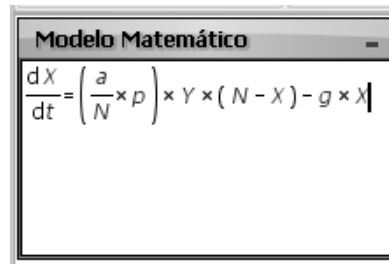
$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p \right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X \\ \frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c \right) \cdot X \cdot (M - Y) - v \cdot Y \end{cases}$$

Para isso, siga os seguintes passos:

1. Maximize a janela “Modelo Matemático”.
2. Na aba “Modelo” clique no botão “Taxa de Variação”. A expressão $\frac{d}{dt}$ irá aparecer na janela “Modelo Matemático”. Complete o quadrado cinza com a letra X . Você então obterá $\frac{dX}{dt}$.



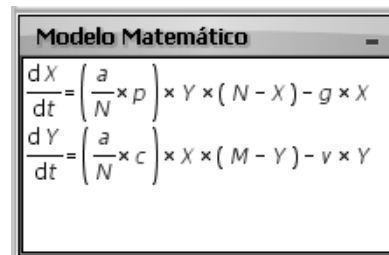
3. Para finalizar a equação utilize seu teclado. Os sinais de igual, mais e menos são os mesmos do teclado. A operação de **multiplicação** pode ser inserida utilizando *****. A operação de **divisão** é inserida usando a **barra (/)** ou o símbolo de **divisão (÷)** do **teclado numérico**. As operações de potência e raiz quadrada podem ser inseridas utilizando os botões da aba “Modelo”. A sequência de passos fica então assim: $=(a/N*p)*Y*(N-X)-g*X$ (Obs: o software é sensível à letras maiúsculas e minúsculas).



$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times p \right) \times Y \times (N - X) - g \times X$$

4. Para inserir a segunda equação repita os passos anteriores de forma semelhante. Sua

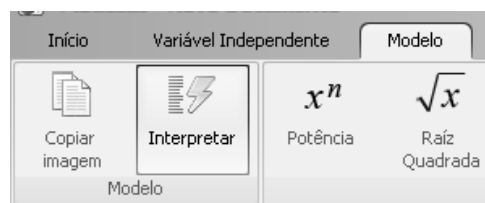
expressão ficará da seguinte maneira: $\frac{dY}{dt} = (a/N \times c) \times X \times (M - Y) - v \times Y$



$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times p \right) \times Y \times (N - X) - g \times X$$

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \times c \right) \times X \times (M - Y) - v \times Y$$

5. Clique no botão “Interpretar” na aba “Modelo” para que o modelo seja interpretado.

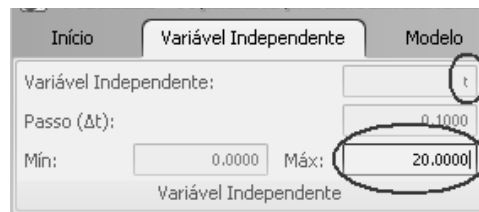


Após clicar no botão interpretar a aba “Parâmetros” irá aparecer automaticamente. Nesta aba você pode inserir valores para cada um dos parâmetros. Para iniciar insira os seguintes valores: $a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $g=0.8$, $c=0.01$, $M=60000$, $v=0.2$ (para alguns valores, o software abrevia a notação, por exemplo, 60000 irá aparecer como $6.00 \times E^4$. A notação E^4 significa 10^4 . De fato, $60000 = 6 \times 10000 = 6 \times 10^4$). Cuidado com os **valores decimais**: você deve usar **ponto** e não vírgula!

Em seguida você pode configurar a aba “Condições Iniciais”. Insira os seguintes valores: $X=100$, $Y=6000$. Deste modo você está supondo que a população inicial de pessoas infectadas e a população inicial de mosquitos infectados são 10% da população total de humanos e da população total de mosquitos, respectivamente.

Podemos ainda, configurar os valores de máximo e mínimo da variável independente t . Selecione a aba “Variável Independente”. Aí você pode escolher qual é a variável independente (no nosso caso o tempo t), pode ajustar o passo que significa ajustar a unidade de variação desta variável, e pode configurar os valores mínimo e máximo da variável. Vamos deixar o passo como está (0.10), vamos manter o valor mínimo da variável independente igual

a zero e vamos escolher um valor de máximo. Vinte é um bom valor de máximo para iniciarmos nossa análise.

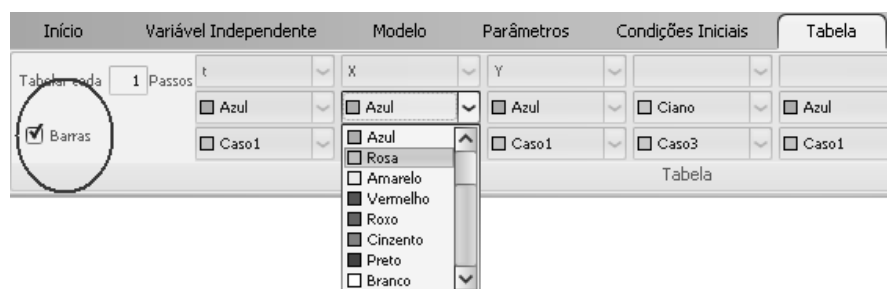


Tendo configurado os dados acima é possível partir para a configuração do gráfico e da tabela. Para configurar a tabela siga os seguintes passos:

1. Clique na aba “Tabela”.
2. As duas primeiras caixas já estão completas com t e X respectivamente. Clique na seta da terceira caixa e selecione Y . Deste modo a tabela irá apresentar os valores de t , X e Y simultaneamente.



3. No canto esquerdo você encontra a opção “Barras”. Selecionando esta opção, barras coloridas irão aparecer na tabela. Estas barras variam de tamanho de acordo com o valor da variável possibilitando uma ferramenta visual para analisar os dados da tabela. Você pode selecionar uma cor diferente para cada uma das variáveis clicando nas setas da segunda linha de cada uma das caixas.

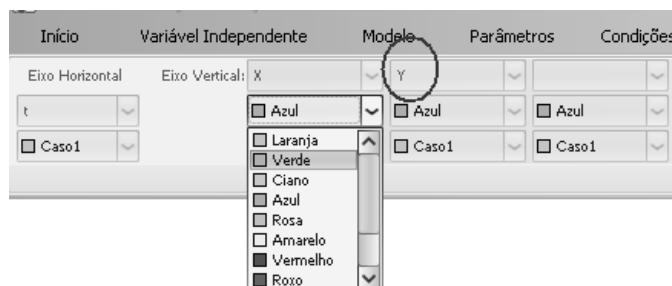


Para configurar o gráfico você deve seguir os seguintes passos:

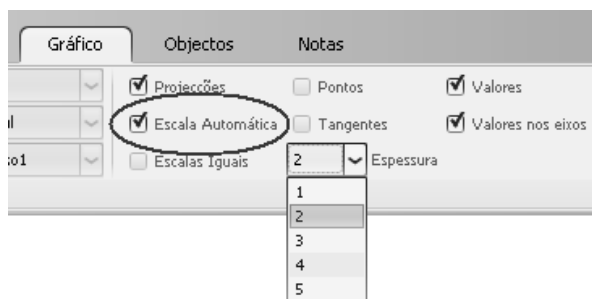
1. Clique na aba “Gráfico”.
2. A variável do Eixo Horizontal (variável independente) já está selecionada (canto esquerdo) como sendo o tempo, então não é preciso modificar. Para outros modelos

que tenham variáveis independentes diferentes é só clicar na flecha e selecionar a variável desejada.

Para o Eixo Vertical uma das variáveis já está selecionada, a saber X . Você pode adicionar mais uma variável na segunda caixa usando a flecha. Selecione Y e você terá os gráficos $X \times t$ e $Y \times t$ simultaneamente. Para cada um você pode selecionar uma cor diferente usando as flechas na segunda linha de cada caixa.



3. No canto direito você pode configurar a escala e a espessura da linha dos gráficos.



Depois de completar os passos acima, pressione o botão *play* na parte inferior da janela . Deste modo você poderá acompanhar a construção do gráfico e da tabela simultaneamente.

Parte 2. Nesta atividade vamos analisar os gráficos obtidos e refletir sobre os passos realizados anteriormente para construí-los. Para isso, discuta com seus colegas de grupo as questões abaixo.

1. Analise os gráficos que você obteve pelo software. Qual a informação que cada um dos gráficos nos dá sobre o fenômeno? Descreva o comportamento dos gráficos. O que este comportamento nos diz sobre o fenômeno?
2. Você acha que os gráficos de $X \times t$ e de $Y \times t$ são gráficos de funções? Ou de outro modo, você acha que X e Y são funções do tempo? Justifique sua resposta. (Procure relembrar o conceito de função para tomar sua decisão).
3. Identifique as variáveis independente e dependente das funções acima.

4. Para configurar o gráfico e a tabela, você escolheu um valor mínimo ($t=0$) e um valor máximo ($t=20$) para o tempo. Estes valores poderiam ser diferentes? Por quê? Qual o significado destes valores com relação ao fenômeno de transmissão da malária? Matematicamente como denominamos o conjunto de valores possíveis para a variável independente?
5. O modelo com o qual estamos trabalhando supõe que a população total de humanos é constante (N) ao longo do tempo. Neste caso, qual a quantidade máxima de pessoas infectadas que podemos ter na região que estudamos? Tendo em conta o gráfico $X \times t$ que o software forneceu, o número de pessoas infectadas na região em algum momento superou o total da população? Matematicamente, como denominamos o conjunto de todos os valores possíveis para a variável dependente? Qual seria esse conjunto no caso que consideramos? E como denominamos o conjunto de valores atingidos pela variável dependente? Qual é este conjunto neste caso?
6. Faça uma análise semelhante para os valores de Y com relação ao número total a população de mosquitos M .

Atividade 4 – Analisando parâmetros

Parte 1. Vamos iniciar construindo o gráfico e a tabela $X \times t$ em três casos distintos simultaneamente. Para isso, siga os passos do tutorial abaixo.

Inicie abrindo o seu arquivo, caso não esteja aberto.

1. Clique no botão *resetar* na parte inferior direita da janela  (sempre que você precisar fazer alguma edição no seu modelo clique primeiramente neste botão).
2. Selecione a aba parâmetros. Cada uma das colunas que aparecem na aba representa um caso diferente. Acrescente mais dois valores para o parâmetro c (por exemplo, $c=0.1$ e $c=0.9$) e pressione a caixa “igual” para os demais parâmetros. Deste modo você criou três casos diferentes para o modelo, onde apenas um parâmetro assume três valores diferentes.

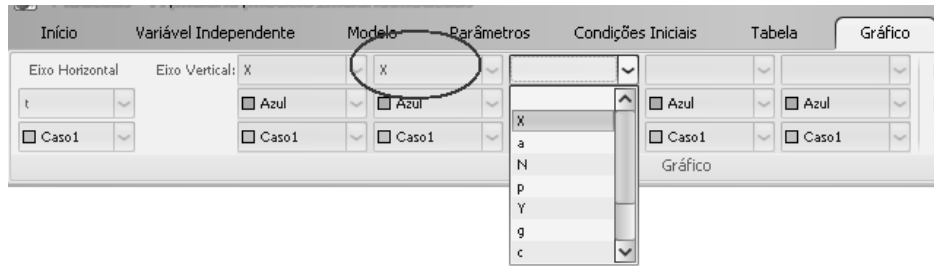
Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos	Notas
$g =$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	☒ Iguais
$c =$	0.01	0.10	0.90	0.00	0.00	0.00	0.00	☐ Iguais
$M =$	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	☒ Iguais

Parâmetros

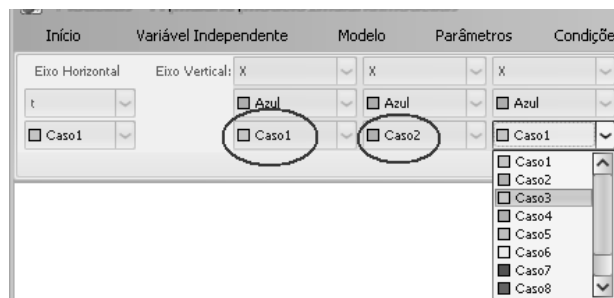
3. Selecione a aba “Condições Iniciais”. Na atividade anterior nós já havíamos configurado para o primeiro caso. Vamos manter as mesmas condições iniciais para os três casos. Então, basta clicar na opção “iguais” no canto direito.

Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos	Notas
$X =$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	☒ Iguais
$Y =$	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	☒ Iguais

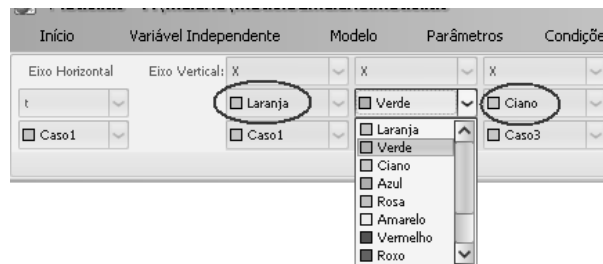
4. Selecione a aba “Gráfico”. A variável independente (eixo horizontal) já está configurada. Vamos configurar a variável dependente (eixo vertical). A primeira caixa já possui a variável X selecionada, mas a segunda está com a variável Y . Vamos trocar a variável na segunda caixa por X e escolher a terceira caixa também sendo X .



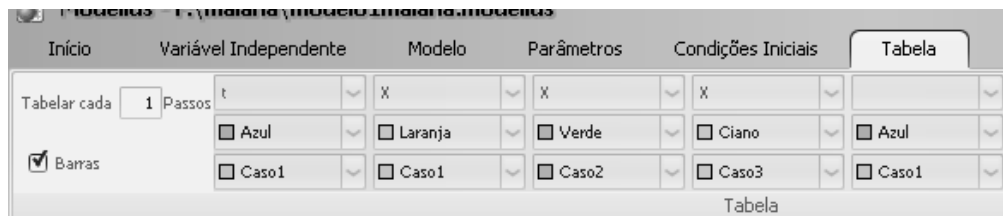
5. Na terceira linha de cada caixa você pode escolher o caso que quer representar. Deixe “Caso 1” para a primeira e escolha “Caso 2” e “Caso 3” para a segunda e a terceira respectivamente.



6. A segunda linha de cada caixa permite que você selecione uma cor para cada gráfico. Para facilitar sua visualização escolha para cada caso a cor padrão do programa (por exemplo, para o caso 1 escolha laranja, para o caso 2, verde, etc.)



7. Você pode configurar a tabela de forma semelhante na aba “Tabela” para mostrar os valores de X ao longo do tempo nos três casos simultaneamente.



8. Finalmente, aperte o botão *play* para ver a construção dos gráficos e da tabela.

Parte 2. Agora que vocês já sabem como construir gráficos para diferentes casos simultaneamente, utilizem esta ferramenta para discutir as seguintes situações hipotéticas. Se vocês acharem interessante, adicionem mais casos para cada uma das situações. Elaborem um

relatório descrevendo o raciocínio elaborado pelo grupo assim como as conclusões estabelecidas e suas justificativas.

- a) Os gráficos que você obteve seguindo o tutorial estão relacionados com a seguinte situação: A probabilidade de um mosquito *anophelino* ser infectado pelo parasita malário depende da espécie do mosquito e da cepa do plasmódio. Suponha que tenhamos três diferentes espécies de anophelinos e através de experimentos laboratoriais verificamos que a probabilidade de infecção relativa ao *Plasmodium vivax* é dada pelos seguintes valores: $c=0.01$ caracterizando a primeira espécie como refratária; $c=0.1$ caracterizando a segunda espécie como suscetível à infecção; e $c=0.9$ caracterizando a terceira espécie como altamente suscetível à infecção. Compare os gráficos $X \times t$ para os três casos e descreva como este parâmetro influencia as soluções do modelo e relacione com o fenômeno em estudo. Analise também os gráficos $Y \times t$.
- b) Dependendo do mês do ano a densidade de mosquitos *Anopheles darling* muda na região de Novo Airão (Amazonas). Essas flutuações estão relacionadas com a estabilização dos criadouros. Nos períodos mais chuvosos, os criadouros tornam-se mais instáveis. Nos meses de abril, maio e junho temos os seguintes valores para a densidade de mosquitos na região (densidade de mosquitos = população total de mosquitos/população total de humanos = M/N): abril – 60; maio – 125; junho – 300¹⁰⁰. Supondo que a população total de humanos na região é $N=1000$, investigue como a mudança na população total de mosquitos M nos meses acima afeta a evolução da malária na região. (Obs: retorne o valor de c para 0.01 em todos os casos. Depois de analisar o comportamento do gráfico para os valores da densidade sugeridos acima, mude c para 0.1 e depois para 0.9 nos três casos. Há alguma mudança?)
- c) Suponha que em uma determinada região os medicamentos utilizados no controle da malária chegam com difícil acesso e, portanto, nem toda a população consegue se tratar com fármacos. Analise a influência do uso de medicamentos na evolução dos casos de malária nas pessoas dessa região. Descreva e justifique seu raciocínio.

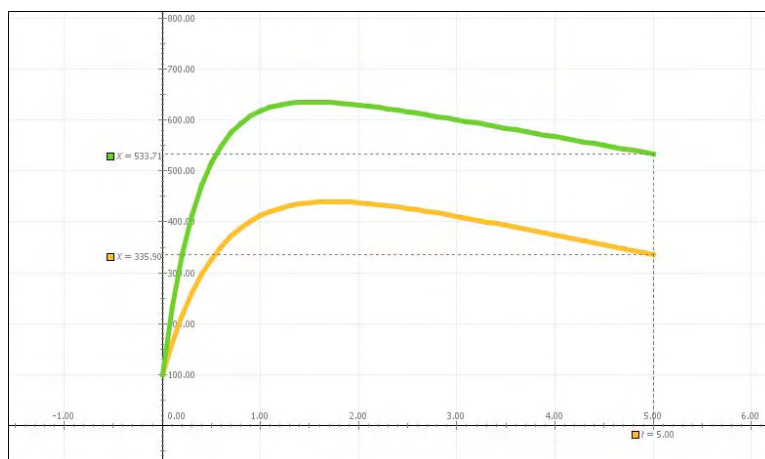
¹⁰⁰ Dados retirados do site <<http://www.ibcperu.org/doc/isis/7268.pdf>>. Acesso em: 20 maio 2009.

- d) Suponha que estamos no mês de junho, e que alguns pesquisadores estão testando o efeito de uma medida de controle a partir da termonebulização¹⁰¹. Suponha que foi constatado que depois de 3 dias o número de picadas em pessoas por mosquito caiu para $a=0.09$ por dia. Analisando os gráficos e tabelas $X \times t$ e $Y \times t$, o que você pode afirmar sobre a eficiência deste método? (Sugestão: esboce os gráficos de dois casos simultaneamente: o primeiro com $a=0.29$ e o segundo com $a=0.09$).
- e) Segundo o texto “Um Guia para os Programas de Controle da Malária¹⁰²”, o uso de roupas impregnadas com permetrina e em combinação com o uso de repelente de inseto DEET reduz picadas em até 99%. Sendo assim, teríamos $a=0.0029$. Compare a eficiência deste método com o da termonebulização para o caso em estudo. (Sugestão: na aba “Início” você pode modificar o número de casas decimais explicitadas na opção “Casas Decimais”).
- f) Ainda segundo o texto “Um Guia para os Programas de Controle da Malária”, o simples uso de camisas de manga longa e calça reduz a chance de infecção em até 62%. Neste caso, a probabilidade de um humano ser infectado reduziria para $p=0.19$. Compare os gráficos $X \times t$ para $p=0.5$ e $p=0.19$. Como eles diferem? O que isso significa em termos do fenômeno? E os gráficos $Y \times t$?

¹⁰¹ Termonebulização é “uma técnica que consiste na aplicação de inseticidas líquidos, com formulação especial, através de equipamentos denominados termonebulizadores. A associação produto-equipamento permite a saída de pequenas gotículas pelo cano de descarga, formando uma névoa parecida com “fumaça” que contém o inseticida”. Disponível em: <<http://www.grupocultivar.com.br/artigos/artigo.asp?id=33>> Acesso em: 11 maio 2010.

¹⁰² Grupo de Assistência à Malária. *Um Guia para os Programas de Controle da Malária na indústria de óleo e gás*. Disponível em: <http://www.ipieca.org/activities/health/downloads/publications/malaria_portuguese.pdf> Acesso em: 11 maio 2010.

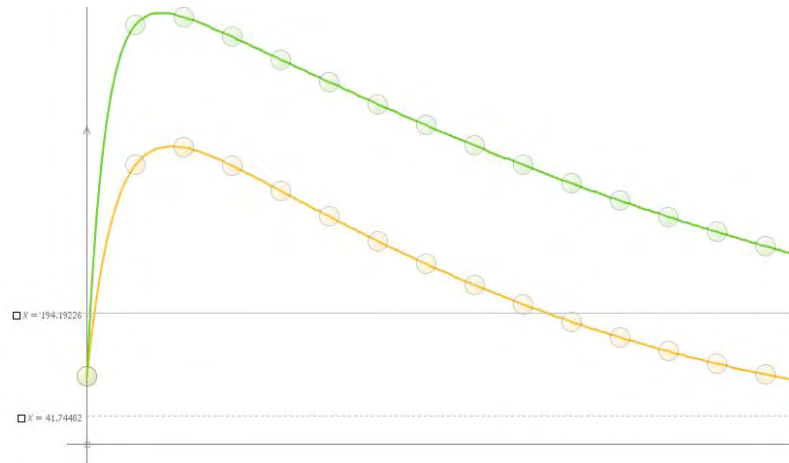
Atividade 5 – Velocidade Instantânea, Taxa de Variação Instantânea e Derivada no Modelo da Malária



1. Os gráficos acima de $X \times t$ possuem um comportamento semelhante. Como você diferenciaria estes gráficos?

Uma possibilidade de diferenciação é perceber que o gráfico verde tem um pico de pessoas infectadas maior do que o gráfico laranja. Isso significa que, se tivermos uma partícula no ponto inicial $(0, 100)$ em cada um dos gráficos, a partícula que está no gráfico verde percorre uma distância maior do que a que está no gráfico laranja em um mesmo intervalo de tempo inicial.

Se imaginarmos que os nossos gráficos nos dão a posição da partícula em cada instante de tempo, isto é, $X(t_0)$ é a posição da partícula no instante t_0 , podemos verificar que a velocidade do movimento é variável, uma vez que o gráfico da posição não é linear. Assim, para cada instante de tempo, temos uma velocidade para a partícula. Como podemos comparar estas velocidades, se elas variam?



2. Como podemos comparar a velocidade de crescimento dos gráficos acima no intervalo de tempo $[0,1]$, por exemplo?

Podemos utilizar o conceito de velocidade média para compararmos as velocidades das partículas no intervalo $[0,1]$. A velocidade média é como uma média das velocidades assumidas por cada partícula ao longo do intervalo. Deste modo, a velocidade média é um valor constante que pode ser comparado. Para encontrarmos a velocidade média precisamos encontrar o deslocamento da partícula. O deslocamento em um determinado intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é dado por:

$$\text{Deslocamento no intervalo } [t_0, t_1] = X(t_1) - X(t_0)$$

O instante t_1 nada mais é do que o instante t_0 mais um acréscimo. Podemos chamar este acréscimo de h e escrevemos $t_1 = t_0 + h$ e temos:

$$\text{Deslocamento do intervalo } [t_0, t_0 + h] = X(t_0 + h) - X(t_0)$$

Por exemplo, se $t_0 = 1$ e $t_1 = 4$, podemos escrever $t_1 = 1 + 3 = t_0 + 3$, de modo que, neste caso, $h = 3$.

É importante lembrarmos que o deslocamento não é o mesmo que a distância percorrida. Por exemplo, se um carro anda 100 metros no sentido positivo e 100 metros no sentido negativo, a distância percorrida é 200m, mas o deslocamento é nulo, uma vez que a posição inicial e final são iguais.

A velocidade média considera o sentido de movimento do objeto, podendo assumir valores positivos ou negativos de acordo com a orientação assumida. Neste caso, utilizamos o deslocamento para calcular essa velocidade, pois ele considera o sentido do movimento. Assim, definimos:

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}} = \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{t_0 + h - t_0} = \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} = \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

Note que para o cálculo da velocidade média precisamos calcular a razão entre duas variações: a variação da posição, que é o deslocamento, e a variação do tempo. A esta razão damos o nome de **taxa de variação**.

No nosso exemplo, teríamos as seguintes velocidades:

a) Partícula sobre a curva verde:

$$v_m = \frac{617,49 - 100}{1} = 517,49$$

b) Partícula sobre a curva laranja:

$$v_m = \frac{411,51 - 100}{1} = 311,51$$

Se o gráfico fosse de posição, usaríamos uma unidade de velocidade do tipo: unidade de comprimento/unidade de tempo. Entretanto nosso gráfico nos diz o número de pessoas infectadas em cada instante, de modo que podemos utilizar a seguinte unidade para a velocidade média encontrada: quantidade de pessoas infectadas/dia (ou semana, ou mês, de acordo com a unidade de tempo assumida). Ou seja, essa informação nos dá uma ideia de quantas pessoas infectadas são contabilizadas a cada unidade de tempo que, por sua vez, nos dá uma ideia de quão rápido a doença está se espalhando.

Vamos calcular a velocidade média de dissipação da doença no período compreendido entre o primeiro e o quarto dia.

a) Gráfico verde:

$$v_m = \frac{566,89 - 617,49}{4 - 1} = \frac{-50,6}{3} = -16,9 \cong -17$$

b) Gráfico laranja:

$$v_m = \frac{373,60 - 411,51}{4 - 1} = \frac{-37,91}{3} = -12,6333 \dots \cong -13$$

As velocidades obtidas foram negativas, o que significa que temos que em média 17 pessoas se recuperaram por dia no gráfico verde, e 13 pessoas se recuperaram por dia no gráfico laranja, no período compreendido entre o primeiro e o quarto dias.

3. E se ao invés de calcular a velocidade em um intervalo de tempo, eu quiser saber a velocidade em um único instante? Como devo proceder?

Notem que a fórmula acima não se aplica neste caso, pois $t_0=t_0+h$, de modo que teremos uma divisão por zero, que é uma indeterminação. Assim, precisamos encontrar outra estratégia. Uma maneira é calcularmos velocidades médias para intervalos $[t_0, t_0+h]$ cada vez menores, ou seja, com h cada vez menor. Assim, as velocidades médias funcionam como uma aproximação para a velocidade no instante t_0 (**velocidade instantânea**).

Vamos tentar fazer alguns cálculos a partir do nosso exemplo e ver o que ocorre com as velocidades médias de intervalos $[0, 0+h]$.

a) Gráfico verde:

$$h=1: \text{temos o intervalo } [0,1] \rightarrow v_m = \frac{617.49713-100}{1} = 517.49713$$

$$h=0.1: \text{temos o intervalo } [0, 0.1] \rightarrow v_m = \frac{234.33787-100}{0.1} = 1343.3787$$

$$h=0.01: \text{temos o intervalo } [0, 0.01] \rightarrow v_m = \frac{115.18611-100}{0.01} = 1518.611$$

$$h=0.001: \text{temos o intervalo } [0, 0.001] \rightarrow v_m = \frac{101.53784-100}{0.001} = 1537.84$$

$$h=0.0001: \text{temos o intervalo } [0, 0.0001] \rightarrow v_m = \frac{100.15398-100}{0.0001} = 1539.8$$

$$h=0.00001: \text{temos o intervalo } [0, 0.00001] \rightarrow v_m = \frac{100.0153998-100}{0.00001} = 1539.98$$

$$h=0.000001: \text{temos o intervalo } [0, 0.000001] \rightarrow v_m = \frac{100.0015400-100}{0.000001} = 1540$$

$$h=0.0000001: \text{temos o intervalo } [0, 0.0000001] \rightarrow v_m = \frac{0.000154000}{0.0000001} = 1540$$

b) Gráfico laranja:

$$h=1: [0,1] \rightarrow v_m = \frac{411,50960-100}{1} = 311,50960$$

$$h=0.1: [0, 0.1] \rightarrow v_m = \frac{164,05473-100}{0.1} = 640,5473$$

$$h=0.01: [0, 0.01] \rightarrow v_m = \frac{106,96399-100}{0.01} = 696,399$$

$$h=0.001: [0, 0.001] \rightarrow v_m = \frac{100,702034-100}{0.001} = 702,34$$

$$h=0.0001: [0, 0.0001] \rightarrow v_m = \frac{100,0702934-100}{0.0001} = 702.934$$

$$h=0.00001: [0, 0.00001] \rightarrow v_m = \frac{100.0070299-100}{0.00001} = 702.99$$

$$h=0.000001: [0, 0.000001] \rightarrow v_m = \frac{100,00070300-100}{0.000001} = 703$$

$$h=0.0000001: [0, 0.0000001] \rightarrow v_m = \frac{100.000070300-100}{0.0000001} = 703$$

Analizando os resultados que encontramos, podemos ver que os valores das velocidades médias dos intervalos $[0, 0+h]$ vão se aproximando mais e mais de 1540 no gráfico verde e 703 no gráfico laranja conforme h vai diminuindo cada vez mais. O que isso significa?

Note que conforme h diminui cada vez mais, o intervalo $[0, 0+h]$ vai diminuindo cada vez mais. Ou seja, conforme h se aproxima cada vez mais de zero (mas sem valer zero), o intervalo de tempo $[0, 0+h]$ se aproxima de um instante, no caso o instante zero. Assim, os valores 703 e 1540 correspondem ao valor da velocidade no instante zero para cada um dos gráficos, ou seja, encontramos a velocidade instantânea em $t=0$.

4. Como podemos relacionar esta velocidade instantânea ou taxa de variação instantânea com as equações do nosso modelo?

Quando conhecemos as equações do nosso modelo, vimos que a equação

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X$$

nos dava a variação da população de pessoas infectadas ao longo do tempo em uma determinada região. Note que o primeiro termo da equação nos diz como a população de

peessoas infectadas aumenta, e o segundo termo noz diz como a população de pessoas infectadas diminui. A subtração entre estas quantidades nos diz como a população de pessoas infectadas varia. Mas isso é para cada instante de tempo, portanto temos uma variação instantânea, ou mais precisamente, uma taxa de variação instantânea (velocidade instantânea de crescimento da população de pessoas infectadas).

$\frac{dX}{dt}$ é uma taxa, pois é uma razão entre duas grandezas. Mais ainda, é uma taxa de variação pois dX é uma variação de X e dt é uma variação de t . Entretanto, são variações em intervalos de tempo muito pequenos, praticamente um instante. Por isso, usamos esta notação dt , ao invés de Δt .

Atividade 6 – Derivada e Reta Tangente

Parte 1. Construa o gráfico de $X(t)$ para o primeiro caso. Na atividade passada vimos que podemos encontrar a taxa de variação de $X(t)$ em um intervalo $[t_0, t_0+h]$ através da seguinte expressão:

$$v_m = \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h}$$

Considere $t_0=1$ e $h=0.5$. Encontre a equação da reta secante ao gráfico nos pontos $(1, X(1))$ e $(1+h, X(1+h))$. Construa a reta com o software (*). É possível relacionar a velocidade média ou taxa de variação média de $X(t)$ no intervalo $[1, 1+h]$ com a reta secante que você encontrou? Se sim, de que forma? Justifique.

Parte 2. E a velocidade instantânea (ou taxa de variação instantânea)? Podemos relacioná-la com a reta secante? Se sim, de que forma? Como a reta tangente se relaciona com tudo isso? Justifique.

Parte 3. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $X(t)$ para $t=1$ e $t=2$ e construa o seu gráfico com o Modellus(*). Analise as retas que você construiu. Qual informação podemos obter sobre o fenômeno biológico a partir da inclinação destas retas tangentes? O que as inclinações positivas e negativas nos dizem sobre o fenômeno?

Parte 4. Construa o gráfico de $Y(t)$ para o mesmo caso que você analisou o gráfico de $X(t)$ e analise-o segundo a questão 3.

(*) Para introduzir a reta secante no Modellus digite a equação (ex: $y=a*x+b$) abaixo das equações do modelo na janela Modelo Matemático e selecione na aba “Gráfico” para mostrar o gráfico da equação no caso 1.

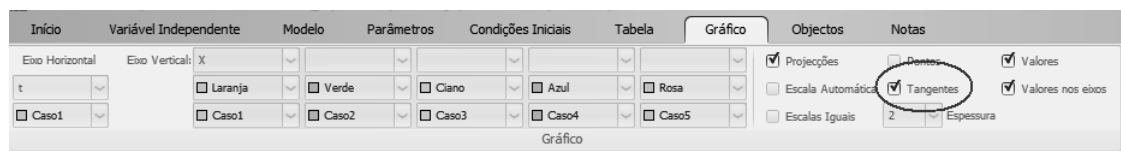
(**) Para introduzir a equação da reta tangente ao gráfico de $X(t)$ no Modellus siga os seguintes passos:

- você vai encontrar duas retas tangentes, então dê nomes diferentes a cada uma delas, por exemplo: $z=at+b$ e $w=ct+d$.
- na janela Modelo Matemático digite as equações das retas tangentes que você encontrou abaixo das equações do modelo; é só dar um enter. Atenção para a sintaxe: $z=a*t+b$.
- na aba gráfico escolha apresentar o gráfico de z e de w , ambos para o caso 1. Depois é só dar o play.

Atividade 7 – Crescimento/Decrescimento, Máximos e Mínimos

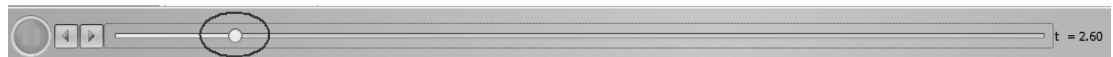
Parte 1. Nesta atividade vamos tentar relacionar o crescimento/decrescimento do gráfico de uma função com as retas tangentes ao seu gráfico.

1. Construa o gráfico e a tabela $X \times t$ para o caso 1 ($a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $g=0.8$, $M=60000$, $c=0.01$, $v=0.2$) específico, usando como passo para a variável independente 0.01 para ter mais precisão.
2. Na aba “Gráfico” escolha a opção “Tangentes”. Uma reta tangente irá aparecer e acompanhará o desenvolvimento do gráfico.



3. Analise o movimento das retas tangentes ao longo do gráfico, prestando atenção em sua inclinação. Como você relacionaria a inclinação da reta tangente com o crescimento/decrescimento do gráfico? Como você relacionaria o sinal da derivada de $X(t)$ com o crescimento/decrescimento do seu gráfico? Elabore um relatório contendo suas observações e conclusões, procurando justificá-las.

Parte 2. Analise novamente o movimento das retas tangentes ao gráfico $X \times t$, porém usando o mouse para movimentar o tempo.



1. Como você deve ter observado na atividade anterior, a inclinação da reta tangente passa de positiva para negativa. Analise com cuidado o momento desta transição. O que você observa?
2. No instante em que a reta tangente fica paralela ao eixo horizontal, qual é sua inclinação? Qual o valor de X para este instante? Qual a relação entre o valor de X neste instante com os demais valores de X ?
4. O que esta inclinação significa? O que ela nos diz sobre a solução do modelo? O que ela nos ajuda a entender sobre o fenômeno?
5. Como você relacionaria: o valor da derivada, a inclinação da reta tangente e o valor de X neste instante em particular?
6. Você consegue imaginar outras situações em que a reta tangente ao gráfico de uma função é paralela ao eixo horizontal? Quais? Explique seus exemplos.

Parte 3. Analise de forma semelhante o gráfico $Y \times t$, elaborando um relatório com suas observações e conclusões.

1. Selecione novamente a opção “Tangentes” no gráfico $Y \times t$ e analise seu movimento. Como você relacionaria o sinal da derivada de $Y(t)$ com o crescimento/decrescimento de seu gráfico?
2. O gráfico de $Y \times t$ apresenta algum ponto em que a reta tangente é paralela ao eixo horizontal? O que isso significa em termos da solução? O que isso nos diz sobre o fenômeno biológico?

Atividade 8 – Modificando o Modelo Inicial

O objetivo desta atividade é analisar outro modelo matemático para a malária, baseado no modelo que já estudamos, mas que considera a população total de mosquitos M variável ao longo do tempo.

As hipóteses são as mesmas do modelo estudado anteriormente, exceto pelo fato de que a população total de mosquitos M é variável e é dada por

$$M(t) = 180000 + 120000 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}\right)$$

Consideramos, neste caso, o tempo em meses. Isso significa que a população total de mosquitos varia ao longo dos doze meses do ano segundo a função seno dada acima.

Parte 1. Inicie o trabalho analisando o gráfico de $M(t)$ e procurando compreender o que acontece com a população total de mosquitos ao longo do tempo (você pode construir este gráfico no Modellus digitando a equação na Janela Modelo Matemático). Analise o comportamento, o valor inicial, procure compreender as informações que este gráfico nos diz sobre a população total de mosquitos na região.

Parte 2. Modifique o modelo matemático na janela correspondente do software incluindo a nova população total de mosquitos. As equações ficam da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X \\ \frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c\right) \cdot X \cdot \left(180000 + 120000 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}\right)\right) - Y - v \cdot Y \end{cases}$$

Inicie a análise das soluções $X(t)$ e $Y(t)$ com os parâmetros que já usávamos: $a=0.29$, $p=0.5$, $N=1000$, $g=0.8$, $c=0.01$, $v=0.2$. Nas Condições Iniciais coloque $X=100$ e $Y=6000$.

Depois, analise este modelo de forma que se sinta satisfeito com relação ao seu entendimento. Que informações este modelo traz sobre o fenômeno? Estas informações fazem sentido? O que mudou com relação ao modelo anterior? Faça outros questionamentos que achar pertinente!

Atividade 9 - Analisando um Plano de Fase

Parte 1. Na aba “Gráfico” escolha Y para o eixo horizontal e X para o eixo vertical, ambos no caso 1. Na aba “Tabela” configure para mostrar os valores de Y e de X no caso 1. Aperte *play* e observe o gráfico gerado.



O gráfico obtido é chamado de *Plano de Fase* do sistema que estamos estudando. Da forma como o construímos ele mostra os valores da função Y no eixo horizontal e os valores da função X no eixo vertical. O interessante do plano de fase é que ele nos mostra de forma bem direta a relação existente entre as duas soluções do sistema (X e Y).

Note que o tempo era a nossa variável independente e ela continua sendo, mas agora não aparece explicitamente nos eixos do gráfico. Mas o tempo ainda está passando quando construímos o gráfico! Assim, se colocarmos o dedo sobre algum do ponto do gráfico e percorrermos a curva, o tempo vai passando durante este movimento. Assim, qualquer ponto do gráfico **(Y , X) nos dá o valor da função Y e o valor da função X no mesmo instante de tempo.**

a) Relembre com seu colega as informações fornecidas pelas funções X e Y sobre o fenômeno. Com base nisso escreva: qual a informação fornecida por cada ponto do plano de fase (Y , X) sobre o fenômeno?

b) Configure o valor máximo da Variável Independente para 30 e construa o gráfico. Descreva o comportamento deste gráfico. Qual é o movimento realizado na construção da curva?

c) Aumente ainda mais o valor máximo da Variável Independente. Qual a tendência do comportamento da curva conforme o tempo passa cada vez mais? O que isso significa em termos do fenômeno? Como você relacionaria este fato com os gráficos de $X \times t$ e $Y \times t$ para o caso 1 analisados nas outras atividades?

d) Configure o caso 2 e o caso 3 adicionando os valores 0.1 e 0.9 , respectivamente, para o parâmetro c na aba “Parâmetros”. Construa o plano de fase para cada um dos casos separadamente e analise o seu comportamento, descrevendo-o e relacionando-o com o fenômeno. Qual a tendência de comportamento de cada gráfico conforme o tempo aumenta cada vez mais? O que isso nos diz sobre o fenômeno? Compare o comportamento do plano de fase com o comportamento dos gráficos das soluções ($X \times t$ e $Y \times t$) em cada caso e verifique se há coerência.

e) Na aba “Parâmetros” coloque o valor 0.9 para o parâmetro c nas colunas 4 (azul), 5 (rosa) e 6 (amarelo), respectivamente.

	Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos	Notas
$y =$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	☐ Iguais
$c =$	0.01	0.10	0.90	0.90	0.90	0.01	0.01	0.01	☐ Iguais
$M =$	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	☐ Iguais

Na aba “Condições Iniciais” coloque os valores 300 , 500 , 800 para X nas colunas 4, 5 e 6, respectivamente.

	Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos	Notas
$X =$	100.00	100.00	100.00	300.00	500.00	800.00	100.00	100.00	100.00
$Y =$	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3

Na aba “Gráfico” deixa a variável horizontal Y no caso 3 e escolha X quatro vezes na variável vertical, para os casos 3, 4, 5 e 6. Configure a tabela de forma semelhante.

	Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos
Eixo Horizontal	X	X	X	X	X	X	X	☒ Projecções
Eixo Vertical	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	☒ Escala Automática
Caso	Caso3	Caso3	Caso3	Caso4	Caso5	Caso6	Caso5	☐ Escalas Iguais

Apertando o *play* você verá quatro planos de fase sendo construídos simultaneamente. Eles variam de acordo com o valor inicial de X . Analise o comportamento destes planos de fase e descreva-o. O que você pode concluir sobre o fenômeno a partir destes planos de fase?

Apêndice 3:

Sugestões de Modificações nas Atividades de 2011

Este Apêndice apresenta reformulações das guias das Atividades 4, 5, 6 e 7, que foram aplicadas em 2011. Estas reformulações seguem as ideias apresentadas na Seção 5.5.4. Como comentei na ocasião, estas atividades reformuladas ainda não foram aplicadas.

Atividade 4 – Analisando parâmetros

Parte 1. Vamos iniciar construindo o gráfico e a tabela $X \times t$ em três casos distintos simultaneamente. Para isso, siga os passos do tutorial abaixo.

Inicie abrindo o seu arquivo, caso não esteja aberto.

1. Clique no botão *resetar* na parte inferior direita da janela  (sempre que você precisar fazer alguma edição no seu modelo clique primeiramente neste botão).
2. Selecione a aba parâmetros. Cada uma das colunas que aparecem na aba representa um caso diferente. Acrescente mais dois valores para o parâmetro c (por exemplo, $c=0.1$ e $c=0.9$) e pressione a caixa “igual” para os demais parâmetros. Deste modo você criou três casos diferentes para o modelo, onde apenas um parâmetro assume três valores diferentes.

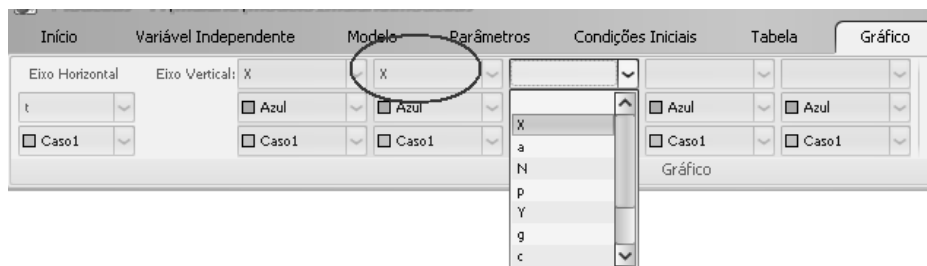
Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos	Notas
$g =$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	☒ Iguais
$c =$	0.01	0.10	0.90	0.00	0.00	0.00	0.00	☐ Iguais
$M =$	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	6.00E4	☒ Iguais

Parâmetros

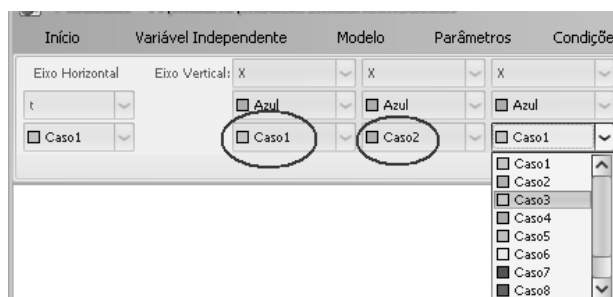
3. Selecione a aba “Condições Iniciais”. Na atividade anterior nós já havíamos configurado para o primeiro caso. Vamos manter as mesmas condições iniciais para os três casos. Então, basta clicar na opção “iguais” no canto direito.

Início	Variável Independente	Modelo	Parâmetros	Condições Iniciais	Tabela	Gráfico	Objectos	Notas
$X =$	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	☒ Iguais
$Y =$	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	6.00E3	☒ Iguais

4. Selecione a aba “Gráfico”. A variável independente (eixo horizontal) já está configurada. Vamos configurar a variável dependente (eixo vertical). A primeira caixa já possui a variável X selecionada, mas a segunda está com a variável Y . Vamos trocar a variável na segunda caixa por X e escolher a terceira caixa também sendo X .



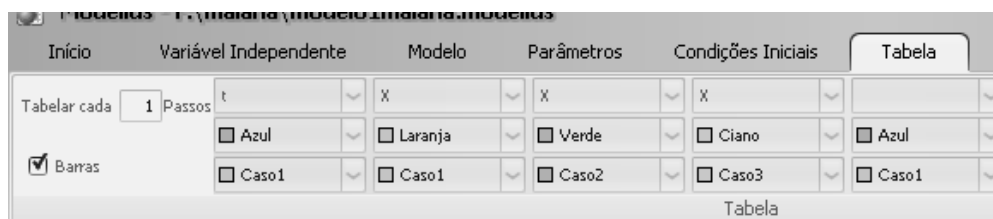
5. Na terceira linha de cada caixa você pode escolher o caso que quer representar. Deixe “Caso 1” para a primeira e escolha “Caso 2” e “Caso 3” para a segunda e a terceira respectivamente.



6. A segunda linha de cada caixa permite que você selecione uma cor para cada gráfico. Para facilitar sua visualização escolha para cada caso a cor padrão do programa (por exemplo, para o caso 1 escolha laranja, para o caso 2, verde, etc.)



7. Você pode configurar a tabela de forma semelhante na aba “Tabela” para mostrar os valores de X ao longo do tempo nos três casos simultaneamente.



8. Finalmente, aperte o botão *play* para ver a construção dos gráficos e da tabela.

Parte 2. Agora que vocês já sabem como construir gráficos para diferentes casos simultaneamente, utilizem esta ferramenta para discutir a seguinte situação hipotética. Imaginem que vocês fazem parte de uma equipe governamental responsável pelo estudo e controle da malária no país. A Região de Novo Airão no Amazonas foi a escolhida para ser

investigada. A equipe da qual vocês participam precisa analisar as condições da doença nesta região e elaborar um relatório para o governo, que servirá como base para a tomada de ações. Deste modo, seu relatório precisa conter informações sobre a situação atual da doença na região, a tendência de evolução da mesma ao longo do tempo e uma avaliação sobre: a necessidade de medidas de controle, qual a medida mais eficiente e em que momentos isso é necessário. Dados sobre a região são fornecidos abaixo. Repare que a região possui três espécies diferentes de mosquitos que transmite o parasita *Plasmodium vivax*. Além disso, a eficiência dos métodos de controle está sendo avaliada em termos dos parâmetros a ou p , ou seja, a partir do uso destes métodos os parâmetros passam a assumir os valores indicados na tabela.

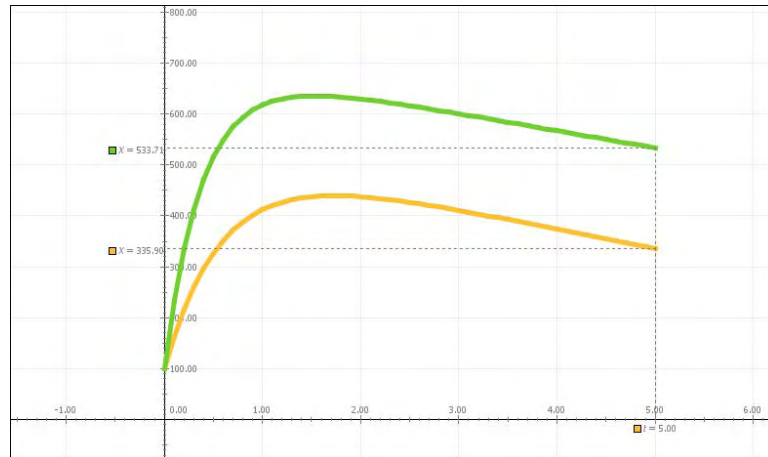
Espécies de Anophelinos na região: *An. darling*, *An. marajoara*, *An. nuneztovari*. Para todas as espécies suponha que:

$$c=p=0.3^{103}, g=0.6, N=1000, v=0.2$$

	<i>darling</i>	<i>marajoara</i>	<i>nuneztovari</i>
Picadas sobre humanos por mosquito (a)	0.37	0.057	0.016
Densidade de mosquitos (M/N)	Abril – 60	Abril – 200	Abril – 0
	Maio – 125	Maio – 400	Maio – 0
	Junho - 300	Junho - 150	Junho – 0
Eficiência da Termonebulização em termos da taxa de picada (a)	0.1147	0.01767	0.00496
Eficiência do uso de camisas de manga longa e calças em termos da probabilidade de infecção do humano (p)	0.114	0.114	0.114

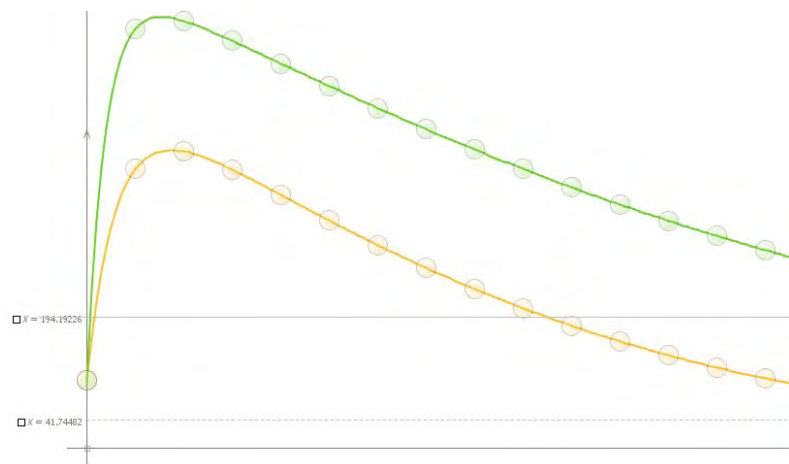
¹⁰³ Estes parâmetros não foram encontrados na literatura.

Atividade 5 – Taxa de Variação Instantânea e Derivada no Modelo da Malária



1. Os gráficos acima de X x t possuem um comportamento semelhante. Como você diferenciaria estes gráficos?

Uma possibilidade de diferenciação é perceber que o gráfico verde tem um pico de pessoas infectadas maior do que o do gráfico laranja. Por exemplo, o valor de $X(1)$ para o gráfico verde é maior do que o valor de $X(1)$ para o gráfico laranja. A imagem abaixo, criada a partir de uma animação no Modellus nos ajuda a visualizar esta diferença.



2. Como podemos comparar numericamente esta diferença entre os gráficos acima no intervalo de tempo $[0,1]$, por exemplo?

Podemos utilizar o conceito de taxa de variação média para compararmos as variações de X no intervalo $[0,1]$. A taxa de variação média é como uma média das variações

assumidas por X ao longo do intervalo. Deste modo, a taxa de variação média é um valor constante que pode ser comparado. Para encontrarmos a taxa de variação média determinamos o quanto o valor de X variou no intervalo desejado. Em outras palavras:

$$\text{Variação de } X \text{ no intervalo } [t_0, t_1] = X(t_1) - X(t_0)$$

O instante t_1 nada mais é do que o instante t_0 mais um acréscimo. Podemos chamar este acréscimo de h e escrevemos $t_1 = t_0 + h$ e temos:

$$\text{Variação de } X \text{ no intervalo } [t_0, t_0 + h] = X(t_0 + h) - X(t_0)$$

Por exemplo, se $t_0 = 1$ e $t_1 = 4$, podemos escrever $t_1 = 1 + 3 = t_0 + 3$, de modo que, neste caso, $h = 3$.

A taxa de variação média pode assumir valores positivos ou negativos de acordo com os valores de $X(t_0)$ e de $X(t_0 + h)$.

$$\text{taxa}_m = \frac{\text{variação de } X}{\text{intervalo de tempo}} = \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{t_0 + h - t_0} = \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} = \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

O nome taxa de variação deve-se ao fato de que calculamos uma razão (taxa) entre duas variações: a de X e a de t .

No nosso exemplo, teríamos as seguintes taxas de variação:

a) Partícula sobre a curva verde:

$$\text{taxa}_m = \frac{617,49 - 100}{1} = 517,49$$

b) Partícula sobre a curva laranja:

$$\text{taxa}_m = \frac{411,51 - 100}{1} = 311,51$$

Como nosso gráfico nos diz o número de pessoas infectadas em cada instante, podemos utilizar a seguinte unidade para a taxa de variação média encontrada: quantidade de pessoas infectadas/dia (ou semana, ou mês, de acordo com a unidade de tempo assumida). Ou seja, essa informação nos dá uma ideia de quantas pessoas infectadas são contabilizadas a cada unidade de tempo que, por sua vez, nos dá uma ideia de quão rápido a doença está se espalhando.

Vamos agora calcular a taxa de variação média no período compreendido entre o primeiro e o quarto dias.

a) Gráfico verde:

$$taxa_m = \frac{566,89 - 617,49}{4 - 1} = \frac{-50,6}{3} = -16,9 \cong -17$$

b) Gráfico laranja:

$$taxa_m = \frac{373,60 - 411,51}{4 - 1} = \frac{-37,91}{3} = -12,6333 \dots \cong -13$$

As taxas obtidas foram negativas, o que significa que temos que em média 17 pessoas se recuperaram por dia no gráfico verde, e 13 pessoas se recuperaram por dia no gráfico laranja, no período compreendido entre o primeiro e o quarto dias.

3. E se ao invés de calcular a taxa de variação em um intervalo de tempo, eu quiser saber a taxa de variação em um único instante? Como devo proceder?

Notem que a fórmula acima não se aplica neste caso, pois $t_0 = t_0 + h$, de modo que teremos uma divisão por zero, que é uma indeterminação. Assim, precisamos encontrar outra estratégia. Uma maneira é calcularmos taxas de variação médias para intervalos $[t_0, t_0 + h]$ cada vez menores, ou seja, com h cada vez menor. Assim, as taxas de variação médias funcionam como uma aproximação para a taxa de variação no instante t_0 (**taxa de variação instantânea**).

Vamos tentar fazer alguns cálculos a partir do nosso exemplo e ver o que ocorre com as taxas de variação médias de intervalos $[0, 0 + h]$.

a) Gráfico verde:

$$h=1: \text{temos o intervalo } [0,1] \rightarrow taxa_m = \frac{617.49713 - 100}{1} = 517.49713$$

$$h=0.1: \text{temos o intervalo } [0, 0.1] \rightarrow taxa_m = \frac{234.33787 - 100}{0.1} = 1343.3787$$

$$h=0.01: \text{temos o intervalo } [0, 0.01] \rightarrow taxa_m = \frac{115.18611 - 100}{0.01} = 1518.611$$

$$h=0.001: \text{temos o intervalo } [0, 0.001] \rightarrow taxa = \frac{101.53784 - 100}{0.001} = 1537.84$$

$$h=0.0001: \text{temos o intervalo } [0, 0.0001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{100.15398-100}{0.0001} = 1539.8$$

$$h=0.00001: \text{temos o intervalo } [0, 0.00001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{100.0153998-100}{0.00001} = 1539.98$$

$$h=0.000001: \text{temos o intervalo } [0, 0.000001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{100.0015400-100}{0.000001} = 1540$$

$$h=0.0000001: \text{temos o intervalo } [0, 0.0000001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{0.000154000}{0.0000001} = 1540$$

b) Gráfico laranja:

$$h=1: [0,1] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{411,50960-100}{1} = 311,50960$$

$$h=0.1: [0, 0.1] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{164,05473-100}{0.1} = 640,5473$$

$$h=0.01: [0, 0.01] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{106,96399-100}{0.01} = 696,399$$

$$h=0.001: [0, 0.001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{100,702034-100}{0.001} = 702,34$$

$$h=0.0001: [0, 0.0001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{100,0702934-100}{0.0001} = 702.934$$

$$h=0.00001: [0, 0.00001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{100.0070299-100}{0.00001} = 702.99$$

$$h=0.000001: [0, 0.000001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{100,00070300-100}{0.000001} = 703$$

$$h=0.0000001: [0, 0.0000001] \rightarrow \text{taxa}_m = \frac{100.000070300-100}{0.0000001} = 703$$

Analisando os resultados que encontramos, podemos ver que os valores das taxas de variação médias dos intervalos $[0, 0+h]$ vão se aproximando mais e mais de 1540 no gráfico verde e 703 no gráfico laranja conforme h vai diminuindo cada vez mais. O que isso significa?

Note que conforme h diminui cada vez mais, o intervalo $[0, 0+h]$ vai diminuindo cada vez mais. Ou seja, conforme h se aproxima cada vez mais de zero (mas sem valer zero), o intervalo de tempo $[0, 0+h]$ se aproxima de um instante, no caso o instante zero. Assim, os valores 703 e 1540 correspondem ao valor da taxa de variação no instante zero para cada um dos gráficos, ou seja, encontramos a taxa de variação instantânea em $t=0$.

4. Como podemos relacionar esta taxa de variação instantânea com as equações do nosso modelo?

Quando conhecemos as equações do nosso modelo, vimos que a equação

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (N - X) - g \cdot X$$

nos dava a variação da população de pessoas infectadas ao longo do tempo em uma determinada região. Note que o primeiro termo da equação nos diz como a população de pessoas infectadas aumenta, e o segundo termo nos diz como a população de pessoas infectadas diminui. A subtração entre estas quantidades nos diz como a população de pessoas infectadas **varia**. Mas isso é **para cada instante de tempo**, portanto temos uma variação instantânea, ou mais precisamente, uma taxa de variação instantânea (rapidez de crescimento da população de pessoas infectadas em um instante de tempo).

$\frac{dX}{dt}$ é uma taxa, pois é uma razão entre duas grandezas. Mais ainda, é uma taxa de variação pois dX é uma variação de X e dt é uma variação de t . Entretanto, são variações em intervalos de tempo muito pequenos, praticamente um instante. Por isso, usamos esta notação dt , ao invés de Δt .

Atividade 6 – Derivada e Reta Tangente

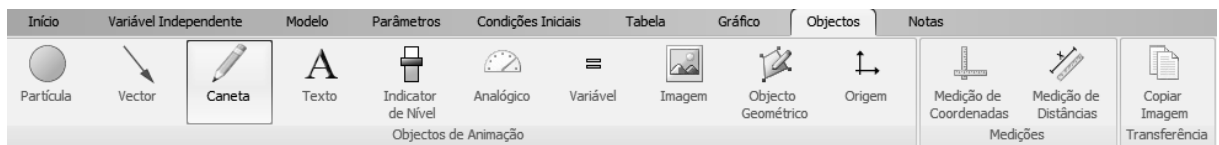
Parte 1. Construa o gráfico de $X(t)$ para o caso em que: $a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $g=0.8$, $c=0.01$, $v=0.2$, $M=60000$. Na atividade passada vimos que podemos encontrar a taxa de variação média de $X(t)$ em um intervalo $[t_0, t_0+h]$ através da seguinte expressão:

$$taxa_m = \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h}$$

Considere $t_0=1$ e $h=0.5$. Encontre a equação da reta secante ao gráfico nos pontos $(1, X(1))$ e $(1+h, X(1+h))=(1.5, X(1.5))$. Construa a reta com o software (*). É possível relacionar a taxa de variação média de $X(t)$ no intervalo $[1, 1.5]$ com a reta secante que você encontrou? Se sim, de que forma? Justifique.

Parte 2. De forma geral, a equação de qualquer reta secante que passa pelo ponto $(1, X(1))$ é dada por $y=m(t-1)+411.51$ (convença-se de que isso é verdade!!). Insira esta equação na janela Modelo Matemático do *Modellus* e faça a seguinte construção:

1) Clique na aba Objectos e selecione Caneta.



2) Clique área branca do software. Uma caneta atrelada a um sistema de eixos irá aparecer.

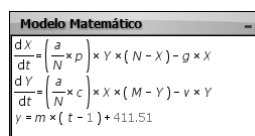
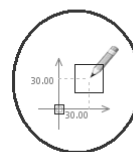
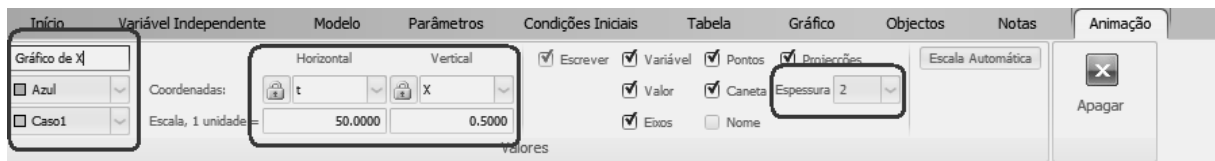


Tabela	
t	X
0.00	100.00
0.10	164.05
0.20	217.06
0.30	260.89
0.40	297.08
0.50	326.91
0.60	351.41
0.70	371.46
0.80	387.78
0.90	400.96
1.00	411.51
1.10	419.84
1.20	426.29
1.30	431.17
1.40	434.71
1.50	437.12



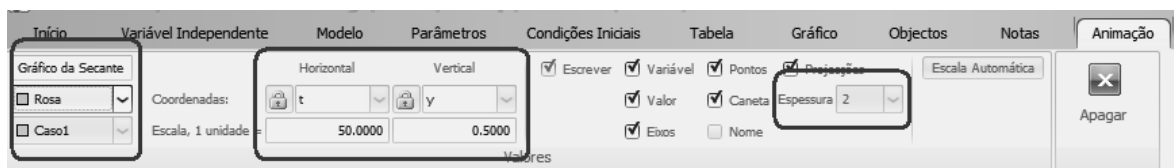
3) Simultaneamente, uma nova aba chamada Animação aparecerá no menu. Vamos configurar a caneta da seguinte forma:

- Na opção “Coordenadas” escolha a variável t para a Horizontal e a variável X para a vertical.
- Clique nos cadeados ao lado esquerdo de cada variável para fechá-los. Isto irá deixar o objeto atrelado às variáveis selecionadas.
- Configure a opção “Escala, 1 unidade =” do seguinte modo: 50 para a coordenada Horizontal e 0.5 para a coordenada Vertical.
- Deixe selecionado o Caso 1 e escolha uma cor.
- Você pode trocar o nome de objeto de “Caneta 1” para “Gráfico de X”, por exemplo, no canto esquerdo superior.
- Você também pode mudar a espessura para 2.

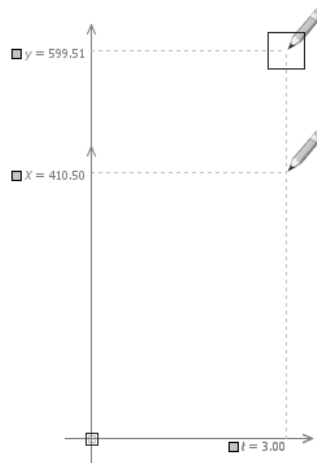


4) Crie uma segunda Caneta, seguindo um procedimento semelhante ao mostrado acima, e faça as seguintes configurações:

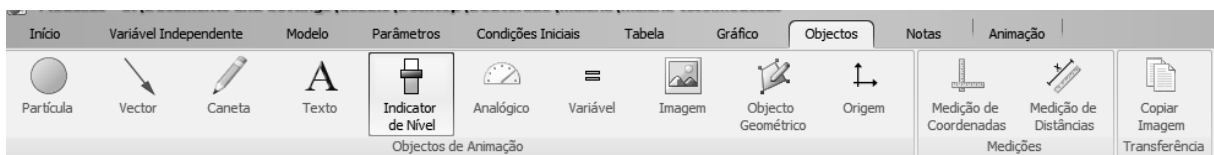
- Coordenada Horizontal: t
- Coordenada Vertical: y (ou o nome que você deu para a variável dependente da equação geral da reta secante que passa por $(1, X(1))$ e que inseriu no software no início da Parte 2).
- Clique nos cadeados.
- Configure a Escala do mesmo modo da primeira caneta.
- Escolha uma cor.
- Mude o nome para “Gráfico da Secante”
- Coloque espessura 2.



5) Na área branca, selecione a origem da Caneta “Gráfico da Secante” e posicione-a sobre a origem da Caneta “Gráfico de X”. Você terá uma imagem semelhante à seguinte:

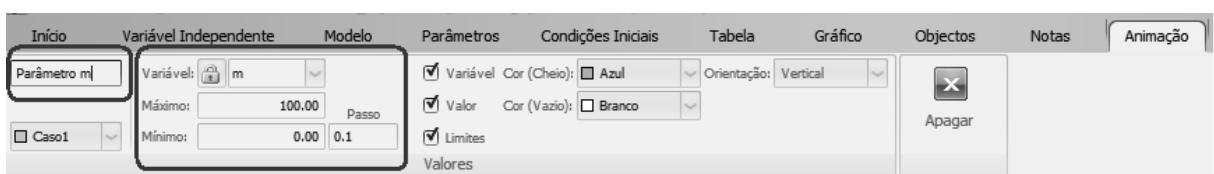


6) Clique novamente na aba objectos e escolha um indicador de nível.

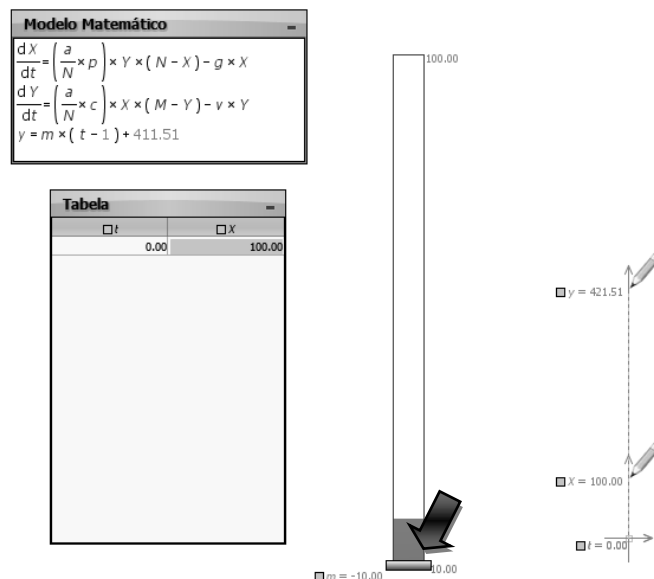


7) Clique na área branca do software. A aba Animação irá surgir novamente. Configure-a da seguinte maneira:

- Nomeie de “Parâmetro m ”
- Variável: selecione m (**não** clique no cadeado).
- Defina o valor mínimo como -10 , o máximo como 100 e o passo como 0.1 .
- Aumente o comprimento do indicador de nível, clicando com o mouse em um dos vértices e arrastando-o.



Depois de realizar estas construções, você terá uma imagem mais ou menos como essa na área de trabalho do software:



Ao dar o play, você verá as canetas traçarem o gráfico de X para o caso configurado e também uma reta secante ao gráfico de X que passa pelo ponto $(1, X(1))$. Movimentando com o mouse a barra horizontal do indicador de nível (a flecha preta aponta para ela na imagem acima) você altera o valor de m . Analise as retas secantes para diferentes valores de m e descreva seu comportamento (modifique o valor máximo de t para 5 na aba Variável Independente). Conforme você aumenta o valor de m , o que ocorre com o intervalo de tempo que separa os pontos de intersecção da reta secante com o gráfico de X ? E o que ocorre com os próprios pontos de intersecção entre a reta secante e o gráfico de X (coforme você aumenta o valor de m)? Você acha que este comportamento será o mesmo para sempre? Por quê? (Sugestão: você pode utilizar a “bolinha” no controle do tempo para analisar o gráfico com mais detalhes)

Parte 3. Na primeira parte desta atividade você verificou se havia alguma relação entre a reta secante passando pelos pontos $(1, X(1))$ e $(1.5, X(1.5))$ e a taxa de variação média. Se você estabeleceu alguma relação, por favor, revise-a. Com base nesta relação e também no que pensou durante a Parte 2, reflita sobre as seguintes questões: Podemos relacionar a taxa de variação instantânea com a reta secante? Se sim, de que forma? Como a reta tangente se relaciona com tudo isso? Justifique.

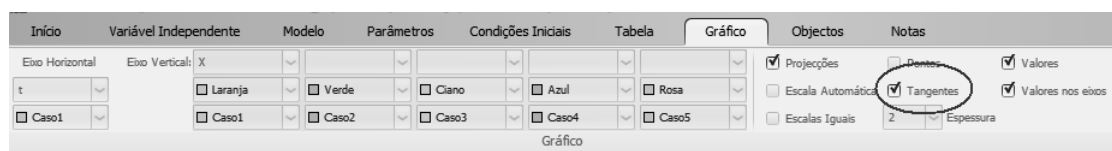
Parte 4. Se você fosse determinar a equação da reta tangente ao gráfico de X passando pelo ponto $(1, X(1))$ que procedimentos você realizaria? Descreva-os. É possível realizá-los com as informações que você tem a partir do software?

Parte 5. Como não temos a expressão analítica da função $X(t)$ precisamos pensar em outra estratégia para determinar a equação da reta tangente. O essencial é determinarmos o seu coeficiente angular, pois já sabemos o ponto onde a reta deve tangenciar o gráfico. Apesar de não termos a expressão analítica da função, temos as equações do modelo matemático, que nos fornecem o valor do coeficiente angular da reta tangente em cada ponto do gráfico (Por quê?). Para isso, basta substituírmos na expressão dX/dt os valores de cada parâmetro e no lugar de X e Y colocar os valores que as funções assumem em $t=1$. Utilizando esta estratégia, determine a equação da reta tangente e compare o valor de seu coeficiente angular com os valores de m que você analisou na Parte 2 por meio da animação. Faça uma análise sobre eles.

Atividade 7 – Crescimento/Decrescimento, Máximos e Mínimos

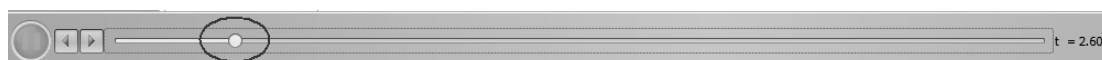
Parte 1. Nesta atividade vamos tentar relacionar o crescimento/decrescimento do gráfico de uma função com as retas tangentes ao seu gráfico.

1. Construa o gráfico e a tabela $X \times t$ para o caso 1 ($a=0.29$, $N=1000$, $p=0.5$, $g=0.8$, $M=60000$, $c=0.01$, $v=0.2$), usando como passo para a variável independente 0.01 para ter mais precisão.
2. Na aba “Gráfico” escolha a opção “Tangentes”. Uma reta tangente irá aparecer e acompanhará o desenvolvimento do gráfico.



3. Analise o movimento das retas tangentes ao longo do gráfico, prestando atenção em sua inclinação. Como você relacionaria a inclinação da reta tangente e o valor da derivada com o crescimento/decrescimento do gráfico? Elabore um relatório contendo suas observações e conclusões, procurando justificá-las.

Parte 2. Analise novamente o movimento das retas tangentes ao gráfico $X \times t$, porém usando o mouse para movimentar o tempo.



1. Como você deve ter observado na atividade anterior, a inclinação da reta tangente passa de positiva para negativa. Analise com cuidado o momento desta transição. O que você observa?
2. No instante em que a reta tangente fica paralela ao eixo horizontal, qual é sua inclinação/ o valor da derivada de X ? Qual o valor de X para este instante? Qual a relação entre o valor de X neste instante com os demais valores de X ? O que esta inclinação significa? O que ela nos ajuda a entender sobre o fenômeno?
3. Você consegue imaginar outras situações em que a reta tangente ao gráfico de uma função é paralela ao eixo horizontal? Quais? Explique seus exemplos.

Parte 3. Analise de forma semelhante o gráfico $Y \times t$, elaborando um relatório com suas observações e conclusões.

1. Selecione novamente a opção “Tangentes” no gráfico $Y \times t$ e analise seu movimento. Como você relacionaria o sinal da derivada de $Y(t)$ com o crescimento/decrescimento de seu gráfico?
2. O gráfico de $Y \times t$ apresenta algum ponto em que a reta tangente é paralela ao eixo horizontal? O que isso nos diz sobre o fenômeno biológico?

Apêndice 4:

Compartilhando Experiências dos Estágios Sanduíches

Este Apêndice contém uma breve descrição sobre as experiências que vivenciei nos dois estágios sanduíches que tive a oportunidade de realizar durante o doutorado.

Durante meu período de doutoramento, tive a oportunidade de realizar dois estágios sanduíches, o primeiro no Canadá e o segundo na Alemanha. Cada um destes estágios trouxe contribuições importantes para o desenvolvimento da minha pesquisa, e me proponho a compartilhar com o leitor essas experiências no texto que segue. Para isso, organizei-o em duas seções, cada uma sobre um dos estágios. Em cada seção irei apresentar o modo como a oportunidade surgiu, o apoio financeiro que recebi, as atividades previstas para realização durante o estágio, a dinâmica de atividades durante o estágio, e as contribuições para minha pesquisa.

A3.1. London, Canadá

A oportunidade de realizar um estágio sanduíche no Canadá surgiu por meio do contato entre o Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, orientador desta tese, e o Prof. Dr. George Gadanidis, da University of Western Ontario (UWO), London, Ontario, Canadá. No final de 2009, o Prof. Gadanidis enviou um email ao Prof. Borba, questionando se haveria algum(a) aluno(a) de pós-graduação interessado(a) em realizar um estágio sanduíche por meio do Emerging Leaders of Americas Program. Este programa prevê uma bolsa do próprio governo canadense para estudar naquele país de 4 a 6 meses. Eu me interessei pela oportunidade e participei da seleção, sendo contemplada com a bolsa.

Deste modo, embarquei para London no início de Janeiro de 2010, e permaneci até o início de Julho do mesmo ano. London é uma cidade localizada próxima à região dos Três Grandes Lagos, distando aproximadamente 190km de Toronto. Sua população atingiu a marca de 352.395 habitantes, de acordo com o censo realizado em 2006¹⁰⁴. A UWO é uma universidade bastante prestigiada, e recebe alunos de diferentes regiões do Canadá, assim como de diferentes países. É notável a diversidade cultural do país, devido à imigração.

Durante o período em que estive em London, as atividades previstas no cronograma incluíam tanto tarefas relacionadas à minha pesquisa, quanto tarefas relacionadas a um dos projetos do Prof. Gadanidis. Assim, trabalhei em média 10 horas semanais nas tarefas requisitadas pelo orientador canadense, e as outras horas da semana foram dedicadas à minha pesquisa.

As tarefas realizadas para o Prof. Gadanidis estiveram relacionadas ao Projeto Windows into Elementary Mathematics¹⁰⁵. Baseando-me em entrevistas que haviam sido

¹⁰⁴ Disponível em: <http://www.london.ca/About_London/PDFs/1_PopulationHousing_JP_Final.pdf> Acesso em: 07 set. 2012

¹⁰⁵ Website: <<http://www.fields.utoronto.ca/mathwindows/>> Acesso em: 04 dez. 2012

realizadas com matemáticos sobre temas como: telescópios e paraboloides, padrões crescentes e linhas paralelas na geometria esférica, elaborei applets utilizando softwares de matemática para que ideias relacionadas a estes temas pudessem ser exploradas.

Em termos da minha pesquisa, o momento do estágio correspondeu ao início do segundo ano de doutoramento. Neste período, estava envolvida em: estudar pesquisas envolvendo o trabalho com modelos matemáticos em sala de aula, estudar o referencial teórico para a tese, e principalmente elaborar as atividades para a abordagem pedagógica que intentava construir. Neste sentido, realizei extensas pesquisas na biblioteca da Faculdade de Educação da UWO, por meio da qual tive acesso a uma variada literatura em Educação Matemática, principalmente periódicos (alguns deles não temos acesso pelo Portal da Capes aqui no Brasil).

Com relação às atividades, após ter uma primeira versão das mesmas, conversei com a Prof.^a Dr.^a Lindi Wahl do Departamento de Matemática Aplicada da UWO por intermédio do Prof. Gadanidis. A Prof.^a Wahl analisou as ideias principais das atividades que eu havia elaborado, analisou o software com o qual eu pensava trabalhar e me auxiliou na compreensão do modelo matemático que escolhera: o Modelo de Ross-Macdonald. O auxílio da professora foi muito importante para escrever o modelo de uma forma um pouco mais palpável para os alunos, corrigir a representação do *framework* dada no artigo, e discutir as possibilidades de sucesso das atividades quando aplicadas aos alunos.

Além destas atividades, participei dos seminários semanais oferecidos na Faculdade de Educação, versando sobre temas variados (como aplicar para um emprego ou como fazer buscas em databases de artigos, por exemplo) e estive presente como aluna ouvinte na segunda metade de uma das disciplinas ministradas pelo Prof. Gadanidis a professores em formação continuada. Também tive a oportunidade de participar de dois eventos na universidade. O primeiro, o 23º Annual Western Research Forum, onde apresentei sobre meu projeto de doutorado; e o segundo, o Research Day, onde fiz uma apresentação sobre as atividades que estava desenvolvendo para o Prof. Gadanidis. Além disso, participei de dois encontros Fields Mathematics Education Forum, realizados no Instituto Fields, em Toronto, sendo que em um deles também apresentei meu trabalho de doutorado e alguns resultados que já havia obtido por meio do projeto piloto.

A experiência no Canadá foi a minha primeira experiência em um país do exterior e foi muito gratificante. Apesar de a área de pesquisa do Prof. Gadanidis não ser exatamente a mesma da minha pesquisa, com exceção do foco em tecnologias, as contribuições para minha pesquisa, em particular, e para minha formação, em geral, foram grandiosas. Destaco: a

prática da Língua Inglesa, com aperfeiçoamento principalmente da leitura e da conversação; o estabelecimento de contatos com outros estudantes e professores do país; a oportunidade de debater sobre minha pesquisa com pessoas de uma cultura diferenciada; o enriquecimento da revisão de literatura e do referencial teórico da minha pesquisa; as reflexões, debates e sugestões relacionadas às atividades que fariam parte da abordagem pedagógica proposta.

A3.2 Hamburgo, Alemanha

A oportunidade de realizar o segundo estágio sanduíche, surgiu também pelo contato do Prof. Borba com a Prof.^a Dr.^a Gabriele Kaiser, professora na Faculdade de Educação, Psicologia e Ciência do Movimento Humano, da Universidade de Hamburgo, Hamburgo, Alemanha. A Prof.^a Kaiser é reconhecida internacionalmente por suas pesquisas em Modelagem Matemática, entre outros temas. No início do ano de 2011, ela veio em uma visita de trabalho à Unesp, Rio Claro, SP, durante a qual tive a oportunidade de conversar com ela sobre o meu trabalho.

Após sua visita, ela ofereceu-me a oportunidade do estágio sanduíche. Devido à necessidade de completar o exame de qualificação e os prazos para requisição da bolsa, minha ida ao país só foi possível em Abril de 2012, com um período de estadia de 3 meses, de modo que retornei ao Brasil em Julho de 2012. Durante este período tive o apoio financeiro do Programa de Estádias de Pesquisa na Alemanha para Doutorandos, do convênio Capes/DAAD.

Hamburgo é a segunda maior cidade da Alemanha, com 1.7 milhões de habitantes¹⁰⁶. É uma cidade portuária e localiza-se ao norte do país, a aproximadamente 290km da capital Berlim. A Universidade de Hamburgo também é bastante prestigiada no país e recebe alunos de várias regiões do país e do mundo. A diversidade cultural também é notável.

As atividades previstas no cronograma focaram totalmente na minha pesquisa, em particular na análise dos dados. O momento deste segundo estágio foi bastante diferente do primeiro, pois agora já havia construído os dados, inclusive havia feito toda a transcrição das entrevistas e dos vídeos gerados pelo *Camtasia*. O foco na análise dos dados foi, portanto, coerente com o momento e teve como objetivo colher as contribuições da Prof.^a Kaiser e do seu grupo de pesquisa.

Neste sentido, minhas principais atividades durante o estágio foram: pesquisas bibliográficas com o objetivo de expandir a revisão de literatura sobre Modelagem que havia

¹⁰⁶ Disponível em: <<http://english.hamburg.de/nofl/1700416/hamburg-at-a-glance-english.html>> Acesso em: 07 set. 2012.

feito para a qualificação, e estudar pesquisas que me auxiliassem nas discussões a serem realizadas a partir da análise dos dados e que não estivessem diretamente relacionadas ao referencial já construído. Além destas atividades, participei de um curso voltado para a escrita científica em Inglês (nível não avançado) e dos encontros quinzenais realizados pelo grupo de pesquisa da Prof.^a Kaiser.

No início do mês de Maio, tive a oportunidade de apresentar minha pesquisa ao grupo, donde colhi uma série de sugestões e críticas para a mesma. Foi necessário refletir sobre estas contribuições para analisar o que seria possível adotar e o que não seria possível, devido principalmente ao tempo disponível para o fechamento da pesquisa. A partir das decisões, uma nova apresentação foi realizada no grupo no final de Junho, dias antes de meu retorno ao Brasil. Neste momento, colhi uma aprovação do grupo com relação aos temas emergentes da análise das entrevistas realizadas com os alunos, assim como mais algumas sugestões de discussões que poderiam ser feitas com relação a estes temas.

Das críticas e sugestões feitas, destaco uma relacionada aos procedimentos de análise dos dados. Após explicar como planejava lidar com tantas fontes diferentes de dados, não ficou claro para os colegas o modo como estava realizando a análise, o modo como lidaria com possíveis contradições provenientes dos dados, e o modo como estava construindo os temas. Naquele momento, os colegas chamaram minha atenção para o fato de que eu possuía dados de tipos diferentes e era importante refletir sobre isso. Também seria importante refletir sobre a relevância dos vários tipos de dados para a pergunta diretriz da pesquisa.

A partir daí, desencadeou-se um processo reflexivo, onde procurei compreender melhor os dados que eu tinha, e de que maneira poderia analisá-los. Foi com base no artigo de Busse e Ferri (2003) que esclareci várias de minhas dúvidas e tomei a decisão de elaborar uma análise vertical. O resultado não foi ainda uma análise vertical “pura”, pois o tempo disponível não me permitiu um distanciamento suficiente dos dados para elaborar a análise dos vídeos gerados pelo *Camtasia* sem ter os temas que emergiram da análise das entrevistas muito presentes. Apesar disso, os procedimentos de análise dos dados se tornaram muito mais claros para mim, e acredito que ficou clara a necessidade de realizar uma triangulação dos dados. Além disso, também ficou claro para mim, quais as fontes de dados que seriam mais relevantes para minha análise. Estas, com certeza, foram as contribuições principais deste estágio sanduíche para minha tese.

No período em que estive na Universidade de Hamburgo, além dos alunos e professores participantes do grupo de pesquisa da Prof.^a Kaiser, tive a oportunidade de manter contato com outras duas alunas: uma vinda do Iran, fazendo doutorado sanduíche, e a outra

vinda da China, fazendo um início de Pós-Doutorado. O contato com estas colegas foi bastante intenso e permeado por reflexões envolvendo nossos trabalhos de pesquisa. Foram momentos importantes para minha formação profissional e pessoal.

A3.3 Um momento para agradecer...

Considero importante, neste momento, deixar um agradecimento especial ao Prof. Gadanidis, à Prof.^a Kaiser e ao Prof. Borba, que me oportunizaram a chance de vivenciar estas experiências tão importantes. Importante agradecer também a todas as pessoas que estiveram presentes nestes momentos, que me receberam em suas cidades e universidades, que compartilharam comigo seu tempo e conhecimentos, que me acolheram de braços e mentes abertos.

Os estágios sanduíche foram formados por momentos de crescimento profissional e pessoal, que me permitiram olhar mais longe, desafiar minhas próprias crenças e conhecimentos, expandir minhas expectativas com relação à minha própria pesquisa. Foram momentos tão significativos para mim, que desejo a todos os alunos de pós-graduação a chance de terem experiências como estas...