UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

# Regra de Sinais de Descartes para Polinômios Ortogonais

Gustavo de Toledo Siqueira

Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# Regra de Sinais de Descartes para Polinômios Ortogonais

Gustavo de Toledo Siqueira

Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Siqueira, Gustavo de Toledo.
S63r Regra de Sinais de Descartes para polinômios ortogonais / Gustavo de Toledo Siqueira. - Presidente Prudente : [s.n.], 2015
xv, 67 f. : il.

Orientador: Fernando Rodrigo Rafaeli
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Regra de Sinais de Descartes. 2. Polinômios ortogonais. 3. Teorema de Obrechkoff. I. Rafaeli, Fernando Rodrigo. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

## BANCA EXAMINADORA

Fernando R. Rafaeli

**Prof. Dr. FERNANDO RODRIGO RAFAELI**
ORIENTADOR

**Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR**
UNESP/FCT

André Luis M. Martinez

**Prof. Dr. ANDRÉ LUIS MACHADO MARTINEZ**
UTFPR

Gustavo de T. Siqueira

**GUSTAVO DE TOLEDO SIQUEIRA**

Presidente Prudente (SP), 30 de setembro de 2015.

Resultado: **APROVADO**.

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Seção Técnica de Pós-Graduação
Rua Roberto Simonsen, 305 CEP 19060-900 Presidente Prudente SP
Tel 18 3229-5417 fax 18 3223-4519 posgrad@fct.unesp.br

*À minha família,*
*Michel, Luiz e Sueli , dedico!*

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Luíz e Sueli e meu irmão Michel pelo imenso apoio financeiro e psicológico, amor e amizade. Agradeço aos amigos Pancadões da Nave pela amizade, alegria e bom humor, ao grande brother Douglas Yugi e a galerinha do Isaac pelos bons momentos do passado e quiçá do futuro, e aos amigos de infância Guilherme, Marcos, Bruno e Rogério pelas boas conversas e risadas. Agradeço também em especial aos meus salvadores de $n$ momentos, Eloiza Fazinazzo e Leonardo Kashimoto, por ajudas e dicas que auxiliaram a desembaraçar os pensamentos e alavancar o desenvolvimento da dissertação em momentos que estava estagnado e em busca de referências para resultados muito específicos. Agradeço imensamente também ao mestre Prof. Dr. Fernando pela orientação e ensinamentos neste projeto. Finalmente, agradeço a Priscilla (Sandy) pelo carinho e apoio nessa jornada exigente, inflexível, problemática, seletiva, dura, fatigante, laboriosa, penosa, aflitiva, atormentadora, ingrata e severa que se chama mestrado acadêmico em matemática aplicada sem bolsa de estudos. Também agradeço à minha força de vontade, que na verdade é a força de todos citados acima, que não apontei nominalmente para não correr o risco de cometer injustiças e não me alongar.

*" It's Dangerous to go Alone!*
*Take This."*
***The Legend of Zelda***

# Resumo

O objetivo principal deste texto é o estudo da Regra de Sinais de Descartes e da Regra de Sinais de Descartes Generalizada. Apresentamos também uma aplicação da Regra de Sinais de Descartes Generalizada para polinômios Ortogonais. Para este último resultado são apresentadas duas demonstrações, uma é devido a Obrechkoff e outra a Schoenberg. Por fim, apresentamos uma aplicação da Regra de Sinais de Descartes Generalizada para os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi e Laguerre.

Palavras-Chave: *Teorema de Obrechkoff, Regra de Sinais, Regra de Sinais de Descartes, Polinômios Ortogonais, Polinômios Ortogonais de Jacobi, Polinômios Ortogonais de Laguerre, Desigualdades entre Zeros de Polinômios Ortogonais.*

# Abstract

The main objective of this text is the study of the Descartes' rule of signs and the generalized Descartes' rule of signs. We also present an application of the generalized Descartes' rule of signs to orthogonal polynomials. For this last result are presented two proofs, one is due to Obrechkoff and another is due to Schoenberg. Finally, we present an application of the rule to the classical orthogonal polynomials of Jacobi and Laguerre.

Keywords: *Obrechkoff's Theorem, Rule of Signs, Descartes' Rule of Signs, Orthogonal Polynomials, Jacobi Polynomials, Laguerre Polynomials, Inequalities between Zeros of Orthogonal Polynomials.*

# Lista de Siglas

RSD: Regra de Sinais de Descartes.

RSDG: Regra de Sinais de Descartes Generalizada.

SPO: Sequência de Polinômios Ortogonais.

SPOPD: Sequência de Polinômios Ortogonais com respeito ao funcional linear Positivo-Definido.

SPOC: Sequência de Polinômios Ortogonais Clássica.

RRTT: Relação de Recorrência de Três Termos.

# Sumário

**Resumo** xi

**Abstract** xiii

**Lista de Siglas** xv

**1 Introdução** 1

**2 Mudanças de Sinal** 3
2.1 Mudanças de Sinal de Sequências . . . 3
2.1.1 Propriedades e Resultados Preliminares . . . 3
2.2 Mudanças de Sinal de Polinômios . . . 6
2.2.1 Propriedades . . . 7
2.3 Zeros e Mudanças de Sinal de Funções . . . 8
2.4 Regra de Sinais de Descartes Clássica . . . 11

**3 Polinômios Ortogonais** 15
3.1 Definições . . . 15
3.2 Propriedades básicas . . . 17
3.3 Funcional de Momentos e Existência de uma SPO . . . 19
3.3.1 Definições . . . 19
3.3.2 Existência . . . 20
3.3.3 A Relação Entre $\mathcal{L}$ Ser Positivo-Definido e o Produto Interno Com Função Peso $w$ . . . 21
3.4 Relação de Recorrência de Três Termos . . . 22
3.5 Teorema de Favard . . . 24
3.6 Zeros de Polinômios Ortogonais . . . 25
3.7 Polinômios Ortogonais Clássicos . . . 26
3.7.1 Polinômios de Jacobi . . . 26
3.7.2 Polinômios de Laguerre . . . 28
3.7.3 Polinômios de Hermite . . . 28
3.7.4 Comentários sobre as SPO's Clássicas . . . 29
3.8 Sobre a relação com a RSD . . . 29

**4 Critérios Gerais** 31
4.1 Preliminares . . . 31
4.1.1 Matrizes Totalmente Positivas e de Sinal Consistente . . . 31
4.1.2 Transformações "Variation Diminishing" . . . 33
4.2 Critério de Pólya e Szegő . . . 34
4.3 Critério de Schoenberg . . . 39

**5 Sequências de Polinômios que Satisfazem a RSD** **43**
5.1 Alguns Exemplos de Sequências que Satisfazem a RSDG . . . . . . . . . . 43
5.2 Teorema de Obrechkoff . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
5.3 Teorema de Schoenberg . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

**6 Limites para zeros de Polinômios de Jacobi via Teorema de Obrechkoff** **55**
6.1 Desigualdades entre os Zeros dos Polinômios de Jacobi e Laguerre . . . . . 56
6.2 Desigualdades para os Zeros dos Polinômios de Jacobi com diferentes parâmetros . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58
6.2.1 O caso $n = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
6.2.2 O caso $j = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 60

**7 Considerações Finais** **63**

**Referências** **65**

Capítulo 1

# Introdução

Em 1637 Descartes publicou *"La Géométrie"* [1], obra famosa por unir Álgebra a Geometria, descrevendo objetos geométricos por meio de equações algébricas. Contudo, além de ser o ponto de partida para o que hoje é conhecido como Geometria Analítica, existem também contribuições acerca de polinômios. Dentre estas, foi conjecturado no início do Livro 3 desta obra, o que viria a se tornar décadas depois o resultado clássico Regra de Sinais de Descartes. Tal regra estima o número de zeros positivos ou negativos de um polinômio olhando apenas para os sinais de seus coeficientes. Nas palavras de Descartes, "Uma equação pode ter tantas raízes verdadeiras (positivas) quanto contém mudanças de sinal, de $+$ para $-$ ou de $-$ para $+$". Descartes se refere à equações algébricas/polinomiais com coeficientes reais quando escreve "equação", e as mudanças de sinal são avaliadas em seus coeficientes, na sequência do termo independente ao coeficiente que acompanha o termo de maior grau, ou na ordem inversa a esta.

O resultado foi reafirmado com mais clareza pela primeira vez por Isaac Newton em 1707 [2], mas sem demonstração até De Gua publicar uma demonstração em 1740 [3]. Iniciamos o trabalho ao dar todas as condições para uma prova do referido resultado, que será obtida por indução, como em [4].

Há classes de polinômios que podem se beneficiar deste resultado, de modo que sempre alcance o número máximo de zeros previstos na regra. Neste trabalho serão explorados os Polinômios Ortogonais. Em especial, os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi e os de Laguerre.

Seguindo para uma generalização do resultado, a Regra de Sinais de Descartes Generalizada contempla uma regra de sinais adaptada para sequência de funções quaisquer. Tal regra foi usada por Obrechkoff [5] quando ele tinha apenas 22 anos para desenvolver o Teorema que será o resultado mais explorado desta dissertação. Posteriormente, o mesmo resultado foi descoberto por Schoenberg [6], numa prova totalmente diferente e usando técnicas e ideias que alvoreceram anos após a publicação de Obrechkoff. Então, descrevemos os Critérios Gerais necessários até finalmente as provas de ambos os teoremas, explorando também sequências de polinômios que satisfazem a regra e o intervalo onde isso ocorre e explorar aplicações.

O objetivo deste levantamento bibliográfico é manter uma abordagem concisa e autocontida quanto ao estudo da Regra de Sinais de Descartes e Regra de Sinais de Descartes Generalizada, voltado às aplicações dos Teoremas de Obrechkoff e Schoenberg.

Aplicações da Regra de Sinais de Descartes Generalizada (RSDG) para combinação linear de sequências de funções ainda não foram extensivamente exploradas. Entretanto, há um trabalho desenvolvido pelo orientador deste mestrado, Fernando R. Rafaeli, juntamente com seus colaboradores em 2009 [7], que culminou no artigo de 2012 [8] onde se encontra uma bela aplicação deste resultado que mostra um elo entre os zeros dos polinômios de Jacobi e Laguerre. Disto, o levantamento bibliográfico se justifica por mostrar esta e outras aplicações dos Teoremas de Obrechkoff e Schoenberg que foram a pouco reemergidos.

Sobre a estruturação específica do trabalho, são 7 capítulos incluindo este introdutório e o capítulo onde se expressa as considerações finais do estudo. No Capítulo 2 apresentamos um breve estudo sobre mudanças de sinal de sequências numéricas e a Regra de Sinais de Descartes Clássica (RSD) seguida de um corolário importante ao texto do caso onde todos os zeros do polinômio são reais. No Capítulo 3, passamos por propriedades básicas desta classe de polinômios, os "Polinômios Ortogonais", que se mostram surpreendentes. Após, passamos por um estudo sobre o chamado "funcional de momentos" e sua relação com a ortogonalidade dos polinômios a ele associados. Em um resultado que liga o caso do funcional de momentos com uma recorrência que todo polinômio ortogonal satisfaz, a chamada Relação de Recorrência de Três Termos tem sua recíproca válida quando o funcional é positivo-definido, resultado o qual tem ligação imediata com os teoremas chaves da dissertação. Encerrando com as famílias mais célebres dessa subclasse de polinômios ortogonais, os Polinômios Ortogonais Clássicos que recebem nomes após Jacobi, Laguerre e Hermite são os casos positivos-definido que a dissertação trata. No Capítulo 4 tratamos de critérios de caracterização que serão necessários para a demonstração da contraparte de Schoenberg para o teorema de Obrechkoff, também conhecido na literatura por Teorema de Schoenberg-Obrechkoff. O Capítulo 5 se inicia por mostrar exemplos de sequências que satisfazem a RSD e logo parte para os teoremas principais do texto, onde está demonstrado as condições para uma certa sequência de polinômios satisfazer a RSDG em um certo intervalo. Enfim, são dadas as provas de Obrechkoff e Shoenberg do resultado. No Capítulo 6 aplicamos os teoremas da seção anterior aos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi e Laguerre, demonstrando uma ligação de seus zeros em forma de desigualdades e outras desigualdades entre zeros de Jacobi com diferentes parâmetros.

Capítulo 2

# Mudanças de Sinal

A fim de sermos capazes de enunciar e demonstrar a Regra de Sinais de Descartes na seção 2.4 deste capítulo, precisamos em um primeiro momento estudar mudanças e variações de sinal em sequências numéricas. Como este trabalho é focado no caso de sequências numéricas finitas, deixamos ao leitor interessado a referência [9] para buscar os casos sobre sequências numéricas infinitas, os quais podem ser usados em uma regra de sinais para séries de potências. A obra de Pólya e Szegő [9] foi base para as primeiras seções deste capítulo.

## 2.1 Mudanças de Sinal de Sequências

**Definição 2.1.** *Denotamos por* $S^{-}(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n)$ *o número de mudanças fracas de sinal na sequência* $a_0, a_1, \cdots, a_n$. *Em outras palavras, o número de termos na sequência que tem sinal oposto ao sinal do termo anterior, desconsiderando-se os termos nulos.*

Outro modo de olharmos para a definição 2.1 seria contarmos o número de pares adjacentes da forma $(+,-)$ e $(-,+)$ na sequência obtida de $a_0, a_1, \cdots, a_n$ substituindo-se todo número positivo $a_i$ por $+$, todo número negativo por $-$ e descartando-se os zeros da sequência. O número obtido é também $S^{-}(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n)$.

### 2.1.1 Propriedades e Resultados Preliminares

**P 1.** *As sequências* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *e* $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ *possuem o mesmo número de mudanças de sinal, ou seja,*

$$S^{-}(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n) = S^{-}(a_n,\, a_{n-1},\, \cdots,\, a_0).$$

**Demonstração.** Isto ocorre por consequência da demonstração. De fato, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ é simétrica a $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$, assim como $(+,-)$ é simétrica a $(-,+)$, sendo cada uma dessas últimas uma mudança de sinal. Logo, teremos a mesma quantidade de mudanças de sinal em $a_0, a_1, \cdots, a_n$ e $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$.

□

**Observação.** A menos que a ordenação seja em uma dessas duas, não podemos garantir uma quantidade igual na contagem de mudanças de sinal, visto que temos $(n+1)! - 2$ ordenações diferentes a essas e sem a garantia que todos os termos adjacentes tem sinais correspondentes ao mesmo número de mudanças de sinal. Um simples e prático contraexemplo é $S^{-}(1,\,-1,\,1) = 2 \neq S^{-}(1,\,1,\,-1) = 1$, da sequência $\{1,\,1,\,-1\}$.

**P 2.** *O número de mudanças de sinal não aumenta se alguns elementos da sequência são omitidos, isto é,*

$$S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_{m-1},\, a_{m+1},\, \cdots,\, a_n) \le S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n)\ .$$

**Demonstração.** Seja $b_0, b_1, \cdots, b_p$, $p \le n$, a sequência obtida de $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ao eliminarmos os elementos nulos. Logo,

$$S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n) = S^-(b_0,\, b_1,\, \cdots,\, b_p) = S^-(b_0, b_1) + S^-(b_1, b_2) + \cdots + S^-(b_{p-1}, b_p)\ .$$

Seja $b_l$, $l \le m$, o elemento correspondente a $a_m \ne 0$. Omitindo-se $a_m$, obtemos

$$S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_{m-1},\, a_{m+1},\, \cdots,\, a_n) = S^-(b_0,\, b_1,\, \cdots,\, b_{l-1},\, b_{l+1},\, \cdots,\, b_p) =$$

$$S^-(b_0, b_1) + S^-(b_1, b_2) + \cdots + S^-(b_{l-1}, b_{l+1}) + \cdots + S^-(b_{p-1}, b_p)\ .$$

Temos dois casos a considerar:

$(i)$ Se $S^-(b_{l-1}, b_{l+1}) = 1$, então $S^-(b_{l-1}, a_m) + S^-(a_m, b_{l+1}) = 1$.

Portanto, nesse caso,

$$S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_{m-1},\, a_{m+1},\, \cdots,\, a_n) = S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n)\ .$$

$(ii)$ Se $S^-(b_{l-1}, b_{l+1}) = 0$, então

$$S^-(b_{l-1}, a_m) + S^-(a_m, b_{l+1}) = 0 \text{ ou } S^-(b_{l-1}, a_m) + S^-(a_m, b_{l+1}) = 2\,.$$

Logo,

$$S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_{m-1},\, a_{m+1},\, \cdots,\, a_n) \le S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n)\ .$$

□

**P 3.** *Inserindo um termo nulo na sequência ou inserindo um termo com mesmo sinal de seu antecessor ou sucessor não alteramos o número de mudanças de sinal da nova sequência, isto é,*

$$S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_m,\, a_{m+1},\, \cdots,\, a_n) = S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_m,\, b,\, a_{m+1},\, \cdots,\, a_n)$$

*quando ocorre um dos seguintes*

$(i)$ $b = 0$,

$(ii)$ $sinal(b) = sinal(a_m)$,

$(iii)$ $sinal(b) = sinal(a_{m+1})$.

**Demonstração.** Se $b = 0$ então $S^-(a_m, b) + S^-(b, a_{m+1}) = S^-(a_m, a_{m+1})$.

Se $S^-(a_m, a_{m+1}) = 1$ e $sinal(a_m) = sinal(b)$ ou $sinal(a_{m+1}) = sinal(b)$ então $S^-(a_m, b) + S^-(b, a_{m+1}) = 1$.

Finalmente, se $S^-(a_m, a_{m+1}) = 0$, temos $S^-(a_m, b) + S^-(b, a_{m+1}) = 0$ quando $sinal(a_m) = sinal(a_{m+1}) = sinal(b)$.

□

**P 4.** $S^-(a_0,\, a_0 + a_1,\, a_1 + a_2,\, \cdots,\, a_{n-1} + a_n,\, a_n) \le S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n)$.

**Demonstração.** Pela propriedade P3, a sequência

$$a_0,\ a_0+a_1,\ a_1,\ a_1+a_2,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_{n-1}+a_n,\ a_n \tag{2.1}$$

possui o mesmo numero de mudanças de sinal que a sequência $a_0, a_1, \cdots, a_n$, pois $sinal(a_{k-1}+a_k) = sinal(a_{k-1})$ ou $sinal(a_{k-1}+a_k) = sinal(a_k)$ ou $a_{k-1}+a_k = 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Daí, eliminando os termos $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ em (2.1) e usando a propriedade P2, segue o reultado desejado.

□

**P 5.** *Se $p_0, p_1, \cdots, p_n$ são números reais positivos, então as duas sequências $a_0p_0, a_1p_1, \cdots, a_np_n$ e $a_0, a_1, \cdots, a_n$ possuem o mesmo número de mudanças de sinal, isto é,*

$$S^-(a_0p_0,\ a_1p_1,\ \cdots,\ a_np_n) = S^-(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)\ ,$$

*para $p_i > 0$, $i = 0, 1, \cdots, n$.*

**Demonstração.** De fato, basta notar que $sinal(a_k) = sinal(a_kp_k)$, $k = 0, 1, \cdots, n$.

□

**P 6.** $S^-(a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \cdots,\ a_0+a_1+\ \cdots + a_n) \le S^-(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)\,.$

**Demonstração.** Segue das propriedades P2 e P3 que as sequências

$$\begin{array}{llllll}
a_0\ , & a_0+a_1\ , & a_2\ , & a_3\ , & \cdots\ , & a_n \\
a_0\ , & a_0+a_1\ , & a_0+a_1+a_2\ , & a_3, & \cdots\ , & a_n \\
a_0\ , & a_0+a_1\ , & a_0+a_1+a_2\ , & a_0+a_1+a_2+a_3\ , & \cdots\ , & a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_0, & a_0+a_1\ , & a_0+a_1+a_2\ , & a_0+a_1+a_2+a_3\ , & \cdots\ , & a_0+\cdots+a_n
\end{array}$$

possuem, no máximo, $S^-(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)$ mudanças de sinal.

□

**P 7.** $S^-(a_1-a_0,\ a_2-a_1,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1}) \ge S^-(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n) - 1\,.$

**Demonstração.** Sejam $j_1+1, j_2+1, \cdots, j_p+1$, $0 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le n-1$, índices sucessivos de mudanças de sinal da sequência $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$. Então, pelo Lema 2.2 (ver seção seguinte), cada uma das $p-1$ subsequências

$$\begin{array}{llll}
a_{j_1+1}-a_{j_1} & a_{j_1+2}-a_{j_1+1} & \cdots & a_{j_2+1}-a_{j_2} \\
a_{j_2+1}-a_{j_2} & a_{j_2+2}-a_{j_2+1} & \cdots & a_{j_3+1}-a_{j_3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{j_{p-1}+1}-a_{j_{p-1}} & a_{j_{p-1}+2}-a_{j_{p-1}+1} & \cdots & a_{j_p+1}-a_{j_p}
\end{array}$$

contém pelo menos uma mudança de sinal, onde segue o resultado.

□

**P 8.** $S^-(a_0,\ a_1-a_0,\ a_2-a_1,\ \cdots,\ a_n-a_{n-1},\ -a_n) \ge S^-(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n) + 1.$

**Demonstração.** Usando a mesma notação da demonstração da Propriedade P7, temos que

$$sinal(a_0) = sinal(a_{j_1}) \neq sinal(a_{j_1+1}) = sinal(a_{j_1+1} - a_{j_1})$$

e

$$sinal(a_n) = sinal(a_{j_p+1}) \Rightarrow sinal(-a_n) \neq sinal(a_{j_p+1}) = sinal(a_{j_p+1} - a_{j_p})\,,$$

de onde segue o resultado.

□

**P 9.** $S^-\left(\alpha a_0,\, \alpha a_1 - a_0,\, \alpha a_2 - a_1,\, \cdots,\, \alpha a_n - a_{n-1},\, -a_n\right) > S^-\left(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n\right)$.

**Demonstração.** Seja $\alpha > 0$. Das Propriedades P5 e P8, temos

$$\begin{aligned} S^-&\left(a_0,\, \alpha a_1 - a_0,\, \alpha(\alpha a_2 - a_1),\, \cdots,\, \alpha^{n-1}(\alpha a_n - a_{n-1}),\, -\alpha^n a_n\right) \\ &\geq S^-\left(a_0,\, \alpha a_1,\, \cdots,\, \alpha^n a_n\right) + 1 \\ &= S^-\left(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n\right) + 1 \\ &> S^-\left(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n\right)\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Novamente de P5, concluímos que

$$\begin{aligned} S^-&\left(a_0,\, \alpha a_1 - a_0,\, \alpha(\alpha a_2 - a_1),\, \cdots,\, \alpha^{n-1}(\alpha a_n - a_{n-1}),\, -\alpha^n a_n\right) \\ &= S^-\left(\alpha a_0,\, \alpha a_1 - a_0,\, \alpha a_2 - a_1,\, \cdots,\, \alpha a_n - a_{n-1},\, -a_n\right)\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Combinando (2.2) e (2.3), obtemos a desigualdade desejada.

□

## 2.2 Mudanças de Sinal de Polinômios

Nesta seção definimos logo abaixo o que seria a quantidade de mudanças de sinal de polinômios e propriedades imediatas.

**Definição 2.2.** *Um Polinômio de grau $n$ com coeficientes reais é toda expressão da forma*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

*com $a_0, a_1, \cdots, a_n$ números reais.*

Como o trabalho trata apenas de resultados sobre polinômios com coeficientes reais reais (polinômios reais) e de grau finito, por conveniência a palavra polinômio já significará polinômio real, a menos que haja necessidade de explicitar o contrário.

**Definição 2.3.** *Definimos o número de mudanças de sinal do polinômio*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

*como sendo o número de mudanças fracas de sinal da sequência $a_0, \cdots, a_n$.*

**Notação.** $S^-(p(x);\,(0,+\infty)) := S^-(a_0+\cdots+a_nx^n;\,(0,+\infty)) = S^-(a_0,a_1,\cdots,a_n)$.

Conforme essa definição, ao escrevermos a sequência ordenada temos um modo de voltar ao polinômio se necessário, o qual é único quando fixada a ordem desejada e não descartados os termos nulos. Por exemplo, a sequência $\{1,2,0,-5\}$ está univocamente associada ao polinômio $1+2x-5x^3$, dado que a escolha da ordem foi a mesma da definição.

Note que, para fins de contagem, é necessário descartar os termos 0 ou adotar ao 0 um sinal igual ao do termo posterior ou anterior como em P3. Isso altera a volta ao polinômio original, então é sábio guardar a entrada do polinômio original quando implementar computacionalmente as mudanças de sinal de polinômios.

### 2.2.1 Propriedades

**P 10.** *Seja $\alpha > 0$. Então os polinômios $p(x)$ e $p(\alpha x)$ possuem o mesmo número de mudanças de sinal. Em outras palavras*

$$S^-(a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n) = S^-(a_0,\,\alpha a_1,\,\cdots,\,\alpha^n a_n)\,.$$

**Demonstração.** Basta observar que $sinal(\alpha) = sinal(\alpha^2) = \cdots = sinal(\alpha^n) = +1$.

□

**P 11.** *Se $M^+$ e $M^-$ denotam o número de mudanças de sinal dos polinômios $p(x)$ e $p(-x)$, respectivamente, então $M^+ + M^- \leq n$. Em outras palavras*

$$S^-(a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n) + S^-(a_0,\,-a_1,\,\cdots,\,(-1)^n a_n) \leq n\,.$$

**Demonstração.** Note que $S^-(a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n) \leq n$, e

$$S^-(a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n) = S^-(a_0,a_1) + S^-(a_1,a_2) + \cdots + S^-(a_{n-1},a_n) \leq n\,.$$

Então, se $S^-(a_j,a_{j+1}) = 1$ teremos $S^-((-1)^j a_j,(-1)^{j+1}a_{j+1}) = 0$. Portanto

$$S^-(a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n) + S^-(a_0,\,-a_1,\,\cdots,\,(-1)^n a_n) =$$
$$= S^-(a_0,a_1) + S^-(a_0,-a_1) + \cdots + S^-(a_{n-1},a_n) + S^-\big((-1)^{n-1}a_{n-1},(-1)^n a_n\big) \leq n\,.$$

□

**P 12.** *Seja $\alpha > 0$. Passando do polinômio*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

*ao polinômio*

$$(\alpha - x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \alpha a_0 + (\alpha a_1 - a_0)x + (\alpha a_2 - a_1)x^2 + \cdots - a_nx^{n+1}$$

*o número de mudanças de sinal aumenta por um número ímpar, ou seja,*

$$S^-(\alpha a_0,\,\alpha a_1 - \,a_0,\,\alpha a_2 - a_1,\,\cdots,\,-a_n) - \,S^-(a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n) = I > 0\,,$$

*onde $I$ é um número inteiro positivo.*

**Demonstração.** De P9 e P10 temos

$$S^-(\alpha a_0,\,\alpha a_1 - \,a_0,\,\alpha a_2 - a_1,\,\cdots,\,-a_n) - \,S^-(a_0,\,a_1,\,\cdots,\,a_n) = I > 0\,,$$

resta mostrar que $I$ é impar.

□

## 2.3 Zeros e Mudanças de Sinal de Funções

Apresentamos alguns resultados sobre o número de zeros de funções reais, importantes para demonstrarmos, mais adiante, a Regra de Sinais de Descartes.

**Teorema 2.1.** *Se $f(x)$ é uma função analítica em $[a, b]$ com $f(a)$ e $f(b)$ não nulos. Então o intervalo $(a, b)$ contém um número par ou nenhum de zeros de $f(x)$ se $f(a)$ e $f(b)$ possuem mesmo sinal. Por outro lado, o intervalo $(a, b)$ contém um número impar de zeros de $f(x)$ se $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos.*

**Demonstração.** Suponhamos que exista $\zeta \in (a, b)$ tal que $f(\zeta) = 0$. Temos dois casos a considerar:

$(i)$ Se $f$ não muda de sinal em $f(\zeta)$ então $\zeta$ é um zero de multiplicidade par. De fato, suponha que $\zeta$ seja um zero de multiplicidade $p$, isto é,

$$f(\zeta) = f'(\zeta) = \cdots = f^{(p-1)}(\zeta) = 0 \;\text{ e }\; f^{(p)}(\zeta) \neq 0\,.$$

Daí, para todo $h$ suficientemente pequeno tal que $f$ não muda de sinal entre $\zeta + h$ e $\zeta - h$, temos

$$f(\zeta + h) = \frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}h^p + \frac{f^{(p+1)}(\zeta + \theta_1 h)}{(p+1)!}h^{p+1}$$

e

$$f(\zeta - h) = \frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}(-h)^p + \frac{f^{(p+1)}(\zeta - \theta_2 h)}{(p+1)!}(-h)^{p+1}\,,$$

onde $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$. Logo, para $h$ suficientemente pequeno, o resíduo não influencia o sinal do lado direito das igualdades. Portanto,

$$\begin{array}{rcl}
sinal\,(f(\zeta+h)) & = & sinal\left(\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}h^p\right)\\
|| & & \\
sinal\,(f(\zeta-h)) & = & sinal\left(\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}(-h)^p\right)\,,
\end{array}$$

de onde concluímos que $p$ é par.

$(ii)$ Se $f$ muda de sinal em $f(\zeta)$ então $\zeta$ é um zero de multiplicidade ímpar. A demonstração é análoga, bastanto notar que para $h$ suficientemente pequeno

$$\begin{array}{rcl}
sinal\,(f(\zeta+h)) & = & sinal\left(\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}h^p\right)\\
\nparallel & & \\
sinal\,(f(\zeta-h)) & = & sinal\left(\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}(-h)^p\right)\,.
\end{array}$$

Portanto, de $(i)$ e $(ii)$, concluímos a demonstração.

□

**Lema 2.1.** *Sejam $a_j$ e $a_k$ diferentes de zero. Então, a sequência*

$$a_j, a_{j+1}, \cdots, a_k$$

*tem um número par ou zero (ímpar) de mudanças de sinal se $a_j$ e $a_k$ têm o mesmo sinal (sinais opostos).*

**Demonstração.** Seja a sequência $(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_k)$ com $sinal(a_j) \neq sinal(a_k)$, $a_j, a_k \neq 0$. Mostremos usando o princípio da indução finita que $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_k)$ é um número ímpar.

Para $k = j+1$ o resultado é obvio. Suponho válida a hipótese até $k = n-1 > j+1$, $n \in \mathbb{N}$, quando tivermos $sinal(a_j) \neq sinal(a_{n-1})$, ou seja, supomos que $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1})$ é um número ímpar quando $sinal(a_j) \neq sinal(a_{n-1})$.

Quando $k = n$, seja $sinal(a_j) \neq sinal(a_n)$ e a sequência $(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$. Temos

$$S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) = S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1}) + S^-(a_{n-1}, a_n)\,. \tag{2.4}$$

Daqui, temos três possibilidades:

$(i)$ $sinal(a_j) \neq sinal(a_{n-1}) \neq 0\,,$

$(ii)$ $sinal(a_{n-1}) = 0\,,$

$(iii)$ $sinal(a_j) = sinal(a_{n-1}) \neq 0\,.$

$(i)$ atende a hipótese de indução, logo $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1})$ é um número ímpar. Como temos $sinal(a_j) \neq sinal(a_{n-1}) \neq 0$, também temos $sinal(a_{n-1}) = sinal(a_n)$ e daí $S^-(a_{n-1}, a_n) = 0$, que substituindo na equação (2.4), temos que o resultado segue.

Em $(ii)$, por P3 segue que $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-2}, a_n) = S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$, e a sequência $(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-2}, a_n)$ se encaixa na hipótese de indução pela quantidade de elementos. Por isso, $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$ é um número ímpar.

A possibilidade $(iii)$ se divide em outras duas:

$(iii-1)$ $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1}) = 0\,,$

$(iii-2)$ $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1}) \neq 0\,.$

Se $(iii{-}1)$ acontece, substituindo em (2.4) temos $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n) = S^-(a_{n-1}, a_n) = 1$ pois $sinal(a_{n-1}) = sinal(a_1) \neq sinal(a_n)$. Como 1 é ímpar, por indução o resultado segue.

Por último, suponha que entre $a_{n-l-1}$ e $a_{n-l}$ , $j \leq n-l-1 < n-1 \leq n-1$, ocorra a última mudança de sinal na sequência $(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1})$, ou seja, $sinal(a_{n-l-1}) \neq sinal(a_{n-l}) = sinal(a_{n-l+1}) = \cdots = sinal(a_{n-1})$. Deste modo

$$\begin{aligned} S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1}) &= S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-l-1}, a_{n-l}) = \\ & S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-l-1}) + S^-(a_{n-l-1}, a_{n-l})\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sabemos que $sinal(a_{n-l-1}) \neq sinal(a_{n-1}) = sinal(a_j)$. Pela hipótese, $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-l-1})$ é ímpar. Substituindo este fato em (2.3) temos $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_{n-1})$ par (ímpar + 1). Como $sinal(a_n) \neq sinal(a_{n-1})$, temos $S^-(a_{n-1}, a_n) = 1$.

Substituindo estes fatos em (2.4) segue que $S^-(a_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$ é ímpar, completando a prova por indução.

A demonstração do caso $sinal(a_j) = sinal(a_k)$ é análoga.

□

**Lema 2.2.** *Sejam $j+1$ e $k+1$ índices sucessivos de mudanças de sinal da sequência $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$. Então, a sequência das diferenças*

$$a_{j+1} - a_j, a_{j+2} - a_{j+1}, \cdots, a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_k$$

*tem um número ímpar de mudanças de sinal, assim, pelo menos uma mudança de sinal.*

**Demonstração.** Como $j+1$ e $k+1$ são índices sucessivos de mudanças de sinal, temos

$$sinal(a_{j+1}) = sinal(a_{j+1} - a_j) \text{ e } sinal(a_{k+1}) = sinal(a_{k+1} - a_k)\,.$$

De $sinal(a_{j+1}) = -sinal(a_{k+1}) \neq 0$, obtemos

$$sinal(a_{j+1} - a_j) \neq sinal(a_{k+1} - a_k)\,.$$

Logo, $a_{j+1} - a_j$ e $a_{k+1} - a_k$ possuem sinais opostos e portanto, pelo Lema 2.1, a sequência

$$a_{j+1} - a_j, a_{j+2} - a_{j+1}, \cdots, a_k - a_{k-1}, a_{k+1} - a_k$$

tem um número ímpar de mudanças de sinal.

□

**Teorema 2.2** (Teorema de Rolle)**.** *Sejam $a$ e $b$ zeros consecutivos da função $f(x)$ analítica em $(a,b)$, isto é, $f(a) = f(b) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para $a < x < b$. Então a derivada $f'(x)$ possui um número ímpar de zeros no intervalo $(a,b)$ (em particular, pelo menos um zero).*

**Demonstração.** Do clássico Teorema do Valor Médio (TVM), para uma função diferenciável em $(a,b)$ existe um número $r \in (a,b)$ tal que

$$f'(r) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Como $f(a) = f(b) = 0$, temos que $r$ é um zero de $f'(x)$.

Mostremos então que $f'(x)$ possui uma quantidade ímpar de zeros em $(a,b)$.

Sejam $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$ os zeros da derivada $f'(x)$ que se encontram entre $a$ e $b$, ou seja, $a < \delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_k < b$.

Como $f$ não se anula em $(a,b)$, suponho sem perda de generalidade que para todo $x \in (a,b)$ temos $f(x) < f(a) = f(b)$.

Pelo TVM, aplicando a função sinal e usando o fato que $f(\delta_1) < f(a)$, temos

$$sinal(f'(r_1)) = sinal\left(\frac{f(\delta_1) - f(a)}{\delta_1 - a}\right) = -1\,.$$

Do mesmo modo,

$$sinal(f'(r_2)) = sinal\left(\frac{f(b) - f(\delta_2)}{b - \delta_2}\right) = +1\,.$$

Então, o Lema 2.1 garante que entre $r_1$ e $r_2$ existe uma quantidade ímpar de mudanças de sinal na função contínua $f'(x)$. Contando que um zero de multiplicidade par não forma uma mudança de sinal e que um zeros com multiplicidade ímpar é contado apenas 1 vez como mudança de sinal da função, somamos um número par à quantidade de mudanças de sinal e teremos a quantidade de zeros entre $r_1$ e $r_2$. Portanto, como $a < r_1 < \delta_1$ e $\delta_k < r_2 < b$, temos que a função $f'(x)$ possui uma quantidade ímpar de zeros em $(a,b)$.

□

**Teorema 2.3.** *Seja $f(x)$ uma função continuamente diferenciável com $N$ zeros distintos no intervalo $[a, b]$. Então a derivada $f'(x)$ possui pelo menos $N-1$ zeros neste intervalo. O intervalo pode ser aberto, semi-aberto ou degenerado ($a = b$).*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade, suponha que $f(x)$ não possua zeros múltiplos em $[a, b]$ e sejam $a \leq \zeta_1 < \zeta_2 < \cdots < \zeta_N \leq b$ seus zeros. Como $\zeta_i$ e $\zeta_{i+1}$, $1 \leq i \leq N-1$, são dois zeros consecutivos de $f(x)$, então $f(x)$ não muda de sinal em $(\zeta_i, \zeta_{i+1})$. Logo, pelo Teorema de Rolle, a derivada $f'(x)$ possui pelo menos um zero em $(\zeta_i, \zeta_{i+1})$. Considerando cada um dos $N-1$ intervalos $(\zeta_1, \zeta_2), (\zeta_2, \zeta_3), \cdots, (\zeta_{N-1}, \zeta_N)$, concluímos que existe pelo menos $N-1$ zeros de $f'(x)$ em $[a, b]$.

□

**Teorema 2.4.** *Seja $f(x)$ uma função continuamente diferenciável que possui $N$ zeros em um intervalo $(a, b)$. Se uma das duas condições*

*(i)* $sinal(f(a)) = sinal(f'(a)) \neq 0$

*ou*

*(ii)* $sinal(f(b)) = -sinal(f'(b)) \neq 0$

*for satisfeita, então $f'(x)$ possui pelo menos $N$ zeros neste intervalo. Se ambas as condições forem satisfeitas, então $f'(x)$ possui pelo menos $N+1$ zeros em $(a, b)$.*

**Demonstração.** Sejam $\zeta_1$ e $\zeta_N$ o menor e o maior zero de $f(x)$ em $(a, b)$. Assim, pelo Teorema 2.3, a derivada $f'(x)$ possui pelo menos $N-1$ zeros em $(\zeta_1, \zeta_N)$. Agora, suponhamos que a condição $(i)$ é satisfeita. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então existe $0 < \eta < \varepsilon$ tal que

$$-f(\zeta_1 - \varepsilon) = f(\zeta_1) - f(\zeta_1 - \varepsilon) = \varepsilon f'(\zeta_1 - \eta)$$

e isto implica que

$$sinal\,(f'(a)) = sinal\,(f(a)) = sinal\,(f(\zeta_1 - \varepsilon)) = -sinal\,(f(\zeta_1 - \eta))$$

e portanto, $f'(x)$ possui pelo menos mais um zero entre $a$ e $\zeta_1 - \eta$. Logo, $f'(x)$ possui pelo menos $N$ zeros em $(a, b)$. Se a condição $(ii)$ for satisfeita, usando o mesmo raciocínio anterior, $f'(x)$ terá um zero em $(\zeta_N + \gamma, b)$, para algum $\gamma > 0$. Então, se ambas as condições são satsfeitas, $f'(x)$ terá pelo menos $N+1$ zeros em $(a, b)$.

□

## 2.4 Regra de Sinais de Descartes Clássica

**Teorema 2.5** (Regra de Sinais de Descartes)**.** *Seja $Z$ o número de zeros reais positivos do polinômio*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

*e $M$ o número de mudanças de sinal da sequência de seus coeficientes. Então $M - Z$ é um número par não-negativo. Em outras palavras,*

$$S^-\,(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n) - Z = q > 0\,,$$

*onde $q$ é um número par não-negativo.*

*Sendo $Z_-$ o número de zeros reais negativos de $p(x)$, temos também*

$$S^-\,(a_0,\, -a_1,\, a_2,\, \cdots,\, -a_{n-1},\, a_n) - Z_- = q' > 0\,,$$

*onde $q'$ é um número par não-negativo.*

**Demonstração.** Sejam $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_Z$ os zeros positivos de $p(x)$. Então

$$p(x) = q(x)(\zeta_1 - x)(\zeta_2 - x)\cdots(\zeta_Z - x)\,,$$

onde $q(x)$ é um polinômio de grau $n - Z$ com coeficientes reais. Desde que o número de mudanças de sinal de $q(x)$ é maior ou igual a zero, pela propriedade P12, o número de mudanças de sinal de $q(x)(\zeta_1 - x)$ é maior ou igual a um, o de $q(x)(\zeta_1 - x)(\zeta_2 - x)$ é maior ou igual a dois,$\cdots$, o número de mudancas de sinal de $q(x)(\zeta_1 - x)(\zeta_2 - x)\cdots(\zeta_Z - x) = p(x)$ é maior ou igual a $Z$, isto é,

$$S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n) - Z \geq 0\,.$$

Mostremos agora que esta diferença é um número par. Sejam $a_j$ o primeiro e $a_k$ o último coeficiente não-nulo de $p(x)$, $j \leq k$, e

$$0 < \xi < \zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \cdots \leq \zeta_Z < \eta < \infty\,.$$

Daí,

$$sinal\,(p(\xi)) = sinal\,(a_j) \neq 0 \quad \text{e} \quad sinal\,(p(\eta)) = sinal\,(a_k) \neq 0\,.$$

Pelo Teorema 2.1, $Z$ é par (ímpar) se $p(\xi)$ e $p(\eta)$ possuem mesmo sinal (sinais opostos) e pelo Lema 2.1, $S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n)$ é par (ímpar) se $a_j$ e $a_k$ possuem mesmo sinal (sinais opostos). Como a diferença entre pares é par e a diferença entre ímpares também é par, então $S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n) - Z$ é um número par.

Para a afirmação do caso negativo, fazendo $p(-x)$, temos a reflexão do polinômio quanto ao eixo das abscissas. Avaliando os zeros positivos de $p(-x)$ estamos avaliando os zeros negativos de $p(x)$ e daí segue o resultado.

□

O teorema acima está reformulado para evitar ambiguidades, o que não é o caso da afirmação original, a qual carece de uma construção minuciosa como a deste texto. Contudo, as palavras de Descartes são coerentes com todo o interior seu texto [1] e, quem sabe, são mais amplas dada outra construção e há uma versão mais geral que fora imaginada por ele.

Smorynski [10] dá o crédito desta reformulação (Teorema 2.5) a Gauss. A primeira no entanto se deve a Newton [2] e a primeira prova a De Gua [3]. Há especulações históricas em [11], onde diz que Newton não demonstrou o resultado por julgar óbvio.

Introduzimos então um simples exemplo:

**Exemplo 2.1.** $p(x) = 5x^9 - 7x^4 + 2x^2 - 1$ *tem no máximo* $3$ *zeros reais positivos e no máximo* $2$ *zeros reais negativos*

**Prova.** Temos para $p(x)$

$$S^-(5,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, -7,\, 0,\, 2,\, 0,\, -1) = S^-(5,\, -7,\, 2,\, -1) = 3$$

e

$$S^-(-5,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, -7,\, 0,\, 2,\, 0,\, -1) = S^-(-5,\, -7,\, 2,\, -1) = 2$$

para $p(-x)$.

Pela RSD podemos ter 3 ou 1 raízes reais positivas e 2 ou 0 raízes reais negativas.

De fato, calculando os zeros, temos uma raiz real positiva próximo a $x = 1.03731$ e raízes complexas próximas a $x = -0.808052 \pm 0.649876i$, $x = -0522004 \pm 0.342177i$, $x = 0.310465 \pm 1.07436i$ e $x = 0.500936 \pm 0.342179i$.

○

Como restrição da RSD a um subconjunto do espaço vetorial dos polinômios, segue a seguinte consequência:

**Corolário 2.1.** *Seja $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio de coeficientes reais com raízes reais. Então $S^-(a_0, a_1, \cdots, a_n) - Z = 0$.*

**Demonstração.** A exemplo de [12], seja $p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ um polinômio com $n$ raízes reais, contando com suas multiplicidades e mostremos por indução que $S^- - Z \leq 0$ ($S^- := S^-(a_0, a_1, \cdots, a_n)$).

É obvio que se $n = 0$, $S^- - Z = 0 \leq 0$.

Suponhamos então que o resultado valha para polinômios de grau até $n-1$.

Temos por consequência do Teorema de Rolle, que $p'(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + \cdots + a_{n-1}^{(1)}$ tem $n-1$ zeros reais, situados cada um destes entre dois zeros consecutivos de $p(x)$ (considerando com suas multiplicidades). Da hipótese de indução,

$$S_{(1)}^- := S^-\left(a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + \cdots + a_{n-1}^{(1)}\right) \leq Z_{(1)} := Z\left(p'(x); (0, +\infty)\right) . \tag{2.6}$$

Dos $n-1$ zeros de $p'(x)$, $n - Z - 1$ estão entre as $n - Z$ raízes não positivas de $p(x)$ e daí, no máximo $Z$ raízes de $p'(x)$ são positivas, ou seja, $Z_{(1)} \leq Z$.

Então, da hipótese de indução, obtemos

$$S^- - 1 \leq S_{(1)}^- \leq Z_{(1)} \leq Z\,. \tag{2.7}$$

A igualdade $S^- - 1 = Z$ não ocorre pois, pela RSD, $S^-$ difere de $Z$ por um número par.

Logo, dado que $S^-$ e $Z$ são números inteiros,

$$S^- - 1 - Z < 0 \Rightarrow S^- - Z \leq 0\,, \tag{2.8}$$

e portanto a hipótese de indução é válida.

Desde que a RSD afirma que $S^- - Z \geq 0$ para todo polinômio de coeficientes reais, de 2.8 segue o resultado.

$\square$

O Corolário 2.1 nos diz que na presença de polinômios com todas as raízes reais, a Regra de Sinais de Descartes resulta que o número $S^-(p(x);\ (0, +\infty))$ é igual ao número de raízes positivas (e $S^-(p(-x);\ (0, +\infty))$ para as raízes negativas), e aí reside um grande potencial dessa regra. No capítulo seguinte nos voltamos a estudar uma classe de polinômios que tem, dentre outras boas propriedades, todos os zeros reais.

Capítulo 3

# Polinômios Ortogonais

Este capítulo trata da sequência de polinômios que ao atender certas condições recebe o nome de sequência de polinômios ortogonais e seus elementos, o nome de polinômios ortogonais. Eles tem, dentre outras boas propriedades, zeros reais, e disto o interesse inicial em estudá-los (satisfazem o Corolário 2.1). Também há a conexão dos polinômios ortogonais e sua subclasse mais famosa, os polinômios ortogonais clássicos, com os teoremas principais desta dissertação. Isto reforça a importância de incluir este capítulo ao texto, que por si será apenas uma breve apresentação voltada a atender os teoremas que irão se seguir. Por fim, deixo ao leitor interessado em uma introdução mais abrangente as referências [13] e [14].

Iniciamos então com as definições.

## 3.1 Definições

**Definição 3.1.** *Sejam $(a,b)$ um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e $\phi(x)$ uma função real limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em $(a,b)$. Se os momentos definidos por:*

$$\mu_r := \int_a^b x^r d\phi(x) \tag{3.1}$$

*existem para $r = 0, 1, 2, \cdots$, então $\phi(x)$ é chamada distribuição (medida positiva) em $(a,b)$. Se $d\phi(x) = w(x)dx$, então a função não identicamente nula $w(x)$ recebe o nome de função peso. Tal função é não-negativa, integrável em $(a,b)$ e $w(x) > 0$ num subconjunto de $(a,b)$ suficientemente grande de modo que*

$$\int_a^b w(x)dx > 0,$$

*isto é, $w(x) > 0$ num conjunto de medida de Lebesgue Positiva. No caso de $(a,b)$ ilimitado, nós impomos o requisito adicional de que os momentos sejam todos finitos.*

Sob essas condições, os momentos $\mu_r$ podem ser escritos na forma de integrais de Riemann

$$\mu_r = \int_a^b x^r w(x)dx\,, \qquad (r = 0, 1, \cdots)$$

e $\mu_0 > 0$.

Partindo para uma abordagem objetiva, por concordância com o texto, que explora apenas o espaço vetorial dos polinômios, pode ser mostrado para uma função peso $w$ que a expressão

$$\langle P, Q\rangle_w := \int_a^b P(x)Q(x)w(x)dx$$

define um produto interno para o espaço dos polinômios com coeficientes reais. A notação explicitando a função peso $w$ será usada quando necessário ressaltar sua ligação ao produto interno.

Um panorama diferente ao deste texto analisa para qualquer função integrável $f$, o seguinte funcional linear:

$$\mathcal{L}[f] := \int_a^b f(x)w(x)dx\,,$$

onde $\mathcal{L}[x^n] = \mu_n$. Isto pode ser encontrado, dentre outros textos, no livro de Chihara [13] e é explorado o chamado *"funcional de momentos"* $\mathcal{L}$ em formas mais generalizadas que aqui. Neste modo, usando uma sequência de números quaisquer, a chamamos sequência de momentos, podemos construir um funcional de momentos adequado à definição.

**Definição 3.2** (Sequência de Polinômios Ortogonais)**.** *Dizemos que a sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais (SPO) com relação à função peso $w(x)$ no intervalo $(a, b)$ se*

*(i)* $P_n(x)$ *é de grau exatamente* $n$, $n \geq 0$.

*(ii)* $\langle P_n, P_m\rangle_w = \displaystyle\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0\,, & se \quad n \neq m, \\ \rho_n\,, & se \quad n = m. \end{cases}$

Note que, neste caso, $\rho_n > 0$, pois $P_n^2(x)w(x) \geq 0$ em $(a, b)$.

Utilizando a notação $\delta_{ij}$ para *"delta de Kronecker"*, isto é,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & se \quad i \neq j, \\ 1\,, & se \quad i = j, \end{cases}$$

podemos escrever o item $(ii)$ acima como

$$\langle P_n, P_m\rangle_w = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{nm}\rho_n\,. \tag{3.2}$$

**Definição 3.3** (Sequência de Polinômios Ortonormais)**.** *Dizemos que uma SPO é uma sequência de polinômios ortonormais (SPO*), denotada por $\{P_k^*(x)\}_{k=0}^{\infty}$, se $\rho_k = 1$.*

**Notação:** Denotaremos os polinômios ortogonais de grau $n$, $P_n(x)$ por

$$P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0} = \sum_{i=0}^{n} a_{n,i}x^i, a_{n,n} \neq 0\,. \tag{3.3}$$

Usando esta notação e propriedades advindas do produto interno e integrais de Rieman, podemos escrever (3.2) como

$$\langle P_n, P_m\rangle_w = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{nm}\rho_n\,. \tag{3.4}$$

Deste modo, nossa definição de Polinômios Ortogonais está adequada à definição de ortogonalidade para espaços vetoriais com produto interno.

Uma das maneiras de se construir os polinômios ortogonais $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$, com relação ao produto interno $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$, onde $f, g$ são integráveis em $(a, b)$ é através do *Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt*.

Para isso, podemos tomar a base $b_k(x) = x^k$, $k \geq 1$ e calcular $P_k(x)$ da seguinte forma: Primeiro, faça

$$P_0(x) = b_0(x) = 1\,.$$

Para $k \geq 1$, faça

$$P_k(x) = x^k + \alpha_{k,0}P_0(x) + \alpha_{k,1}P_1(x) + ... + \alpha_{k,k-1}P_{k-1}(x)\,, \tag{3.5}$$

onde $\alpha_{k,i} = -\dfrac{\left\langle x^k, P_i\right\rangle_w}{\left\langle P_i, P_i\right\rangle_w}\,, \quad i = 0, 1, \cdots, k-1.$

Podemos tomar outras bases $\{b_k(x)\}$ desde que cada polinômio $b_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, seja de grau exatamente $k$.

Definidas as bases necessárias, partimos para avaliar algumas das propriedades dessas famílias de polinômios.

## 3.2 Propriedades básicas

**Teorema 3.1.** *Se $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_m(x)$ são polinômios ortogonais de uma mesma SPO, então eles são linearmente independentes.*

**Demonstração.** Sejam $c_j$, $j = 0, 1, \cdots, m$, constantes reais tais que

$$\sum_{j=0}^{m} c_j P_j(x) = 0.$$

Logo, para cada polinômio $P_k(x)$, $0 \leq k \leq m$, obtemos

$$\left\langle \sum_{j=0}^{m} c_j P_j, P_k \right\rangle_w = \langle 0, P_k\rangle_w = 0\,,$$

ou seja,

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \langle P_j, P_k\rangle_w = 0\,. \tag{3.6}$$

Por definição, $\langle P_j, P_k\rangle_w = 0$ para $j \neq k$ e $\langle P_k, P_k\rangle_w > 0$. Logo, por (3.6),

$$0 = \sum_{j=0}^{m} c_j \langle P_j, P_k\rangle_w = c_k \langle P_k, P_k\rangle_w\,.$$

Portanto, $c_k = 0$, $k = 0, \cdots, m$.

□

**Corolário 3.1.** *$P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \cdots, m$, formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a $m$, denotado por $\mathbb{P}_m$.*

**Teorema 3.2.** *Sejam $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios e $w(x)$ uma função peso no intervalo $(a, b)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*a*) $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso* $w(x)$ *em* $(a,b)$*, ou seja,* $\langle P_m, P_n\rangle_w = \delta_{mn}\rho_n$*, onde* $\rho_n \neq 0$.

(*b*) $\langle P_n, q\rangle_w = 0,\ \forall\, q(x)\ \in \mathbb{P}_{n-1},\ n \geq 1.$

(*c*) $\langle x^m, P_n\rangle_w = \displaystyle\int_a^b x^m P_n(x)w(x)dx \ = \begin{cases} 0\,, & se\ \ 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0\,, & se\ \ m = n. \end{cases}$

**Demonstração.** $(a) \Rightarrow (b)$ : Seja $q(x)$ um polinômio de grau até $n-1$. Da definição de uma SPO, temos

$$\langle P_n, P_m\rangle_w = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0\,, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Como $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, pelo Corolário 3.1, os polinômios $P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}$ formam uma base para $\mathbb{P}_{n-1}$.

Se $q(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ podemos escrever $q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x)$. Como, pelo item $(a)$, $\langle P_n, P_k\rangle_w = 0$ para $k \neq n$, então

$$\langle P_n, q\rangle_w = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k(x) \right\rangle_w = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_n, P_k\rangle_w = 0\,.$$

Agora, para $q(x) \in \mathbb{P}_n$ de grau exatamente $n$, podemos escrever $q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x)$, onde $\alpha_n \neq 0$. Pelo item $(a)$, $\langle P_n, P_k\rangle_w = 0$, $k \neq n$. Assim,

$$\langle P_n, q\rangle_w \ = \ \left\langle P_n, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k \right\rangle_w = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle P_n, P_k\rangle_w = \ \alpha_n \langle P_n, P_n\rangle_w = \alpha_n \rho_n \neq 0\,.$$

$(b) \Rightarrow (c)$ : Por hipótese $\langle P_n, q\rangle_w = 0$, $\forall q(x)$ de grau $\leq n-1$, o que implica em $\langle P_n, x^m\rangle_w = 0$ se $m < n$.

Se $m = n$, temos $q(x) = x^n \in \mathbb{P}_n$. Logo,

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j P_j(x), \quad \alpha_n \neq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_i = 0, i \neq n\,.$$

Como $\langle P_n, P_j\rangle_w = 0,\ j < n$,

$$\langle P_n, x^n\rangle_w = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle P_n, P_j\rangle_w \overset{(b)}{=} \alpha_n \langle P_n, P_n\rangle_w \neq 0\,.$$

$(c) \Rightarrow (a)$ : $(i)$ Consideremos $m < n$ ($m > n$ é análogo) e $P_m(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_{m,k}x^k$, $a_{m,m} \neq 0$. Então, como $m < n$,

$$\langle P_m, P_n\rangle_w = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} \langle x^k, P_n\rangle_w \overset{(c)}{=} 0\,.$$

$(ii)$ Se $m = n$, então

$$\langle P_n, P_n\rangle_w = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \langle x^k, P_n\rangle_w \overset{(c)}{=} a_{n,n} \langle x^n, P_n\rangle_w = a_{n,n}\tilde{\rho}_n \neq 0\,.$$

□

**Corolário 3.2.** *Duas sequências de polinômios ortogonais no intervalo $(a, b)$ com relação à função peso $w(x)$, $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, diferem apenas por uma sequência de constantes, de modo que*

$$Q_j(x) = c_j P_j(x), \quad j = 0, 1, \cdots,$$

*onde $c_j$ é uma constante que depende apenas de $j$.*

**Demonstração.** Seja $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Como $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_j(x)$ formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau até $j$, podemos escrever $Q_j(x)$ da seguinte forma:

$$Q_j(x) = \sum_{i=0}^{j} c_i P_i(x),$$

onde $c_j \neq 0$ pois assim como $P_j, Q_j$ tem grau $j$. Mas, $\langle Q_j, q \rangle_w = 0$, para todo polinômio $q(x)$ de grau até $j - 1$. Logo,

$$\langle Q_j, P_0 \rangle_w = \langle Q_j, P_1 \rangle_w = \cdots = \langle Q_j, P_{j-1} \rangle_w = 0.$$

Portanto, para $k = 0, \cdots, j - 1$,

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle_w = \sum_{i=0}^{j} c_i \langle P_i, P_k \rangle_w = c_k \langle P_k, P_k \rangle_w,$$

pois $\langle P_i, P_k \rangle_w = 0$ para $i \neq k$.

Como $\langle P_k, P_k \rangle_w > 0$, então $c_k = 0$, $k = 0, \cdots, j - 1$. Portanto,

$$Q_j(x) = c_j P_j(x).$$

□

## 3.3 Funcional de Momentos e Existência de uma SPO

Para assegurar a existência de SPO's reais definidas por um produto interno com função peso $w$ associadas aos teoremas principais deste texto, são necessários os resultados contidos nesta seção. Estes, que são construídos de maneira minuciosa no livro de Chihara [13] entre as páginas 11 e 75, estão apenas definidos, enunciados e esparsamente retirados o que for conveniente para fins de objetividade e coesão da dissertação.

### 3.3.1 Definições

**Definição 3.4.** *Se para $\mathcal{L}$, um funcional linear definido no espaço vetorial de todos os polinômios complexos de uma variável real a valores complexos, tivermos $\mathcal{L}[x^n] := \mu_n$ para a sequência numérica $\{\mu_n\}$, então chamamos a sequência $\{\mu_n\}$ de sequência de momentos de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}$ de funcional de momentos.*

É imediato da definição que, dadas constantes $c_k$'s no corpo e $x$ real,

$$\mathcal{L}\left[\ \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\ \right] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k.$$

**Definição 3.5.** *Uma sequência de polinômios $\{P_n\}$ é dita uma SPO para $\mathcal{L}$ quando*

$$\mathcal{L}[P_m(x)\, P_n(x)] = 0,\ m \neq n;\ m, n = 0,\ 1,\ 2, \cdots \tag{3.7}$$

A fim de discutirmos resultados de existência para SPO's, introduzimos os determinantes, chamados de "*determinantes de Hankel*"

$$\mathcal{H}_n = \det\left(\mu_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \tag{3.8}$$

formado pelos momentos $\mu_n$.

### 3.3.2 Existência

Aqui vamos enunciar resultados que asseguram a existência de uma SPO para um funcional de momentos $\mathcal{L}$.

**Teorema 3.3.** *Seja $\mathcal{L}$ um funcional de momentos com sequência de momentos $\{\mu_n\}$. Uma condição necessária e suficiente para existência de uma SPO para $\mathcal{L}$ é*

$$\mathcal{H}_n \neq 0\,, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$$

Dado o resultado acima, todas as propriedades que não exigem que a SPO seja composta de polinômios reais valem se $\mathcal{H}_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

**Definição 3.6.** *Um funcional de momentos $\mathcal{L}$ é dito positivo-definido se $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$ para todo polinômio $\pi(x)$ não identicamente nulo e não negativo para cada $x$ real.*

O resultado à seguir será importante para assegurar que $\mathcal{L}$ seja positivo-definido dados os determinantes $\mathcal{H}_n$ e os coeficientes dominantes dos polinômios da SPO normalizados.

**Teorema 3.4.** *Seja $\{P_n(x)\}$ uma SPO para $\mathcal{L}$. Então para qualquer polinômio $\pi_n(x)$ de grau $n$,*

$$\mathcal{L}[\pi_n(x)\,P_n(x)] = K_n\,\mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \frac{a_{n,n}\,K_n\,\mathcal{H}_n}{\mathcal{H}_{n-1}}, \quad \mathcal{H}_{-1} = 1\,, \tag{3.9}$$

*onde $K_n$ denota o coeficiente líder de $\pi_n(x)$ e $a_{n,n}$ denota o coeficiente líder de $P_n(x)$.*

Se $\mathcal{L}$ é positivo-definido, segue imediatamente

$$\mu_{2k} = \mathcal{L}[x^{2k}] > 0\,.$$

Também, de

$$0 < \mathcal{L}\left[(x+1)^{2n}\right] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mu_{2n-k}\,,$$

segue por indução que $\mu_{2k+1}$ é real.

Se $\mathcal{L}$ é definido-positivo, o processo de Gram-Schmidt garante que há uma SPO para $\mathcal{L}$. Daí,

**Teorema 3.5.** *Seja $\mathcal{L}$ positivo-definido. Então $\mathcal{L}$ tem momentos reais e existe uma SPO de polinômios reais associada a $\mathcal{L}$.*

Relacionando o funcional de momentos com a matriz simétrica composta de seus momentos (3.8), temos o seguinte:

**Teorema 3.6.** *$\mathcal{L}$ é positivo-definido se, e somente se, todos os seus momentos são reais e $\mathcal{H}_n > 0$ $(n \geq 0)$.*

**Demonstração.** Seja $\mu_n$ real, $\mathcal{H}_n > 0$ $(n \geq 0)$. De acordo com o Teorema 3.3, $\{P_n(x)\}$, uma SPO para $\mathcal{L}$ existe. Podemos assumir sem perda perda de generalidade que $P_n(x)$ é mônica.
Pelo Teorema 3.4, nós temos

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = {}^{\mathcal{H}_n}\!/\!_{\mathcal{H}_{n-1}} > 0 \,.$$

Referindo ao sistema $\mathcal{H}_n A_n = K_n$, onde $A_n$ é o vetor formado pelos coeficientes de $P_n(x)$ e $K_n$ é o vetor formado por 0 e último elemento $\tilde{\rho}$ do Teorema 3.2 vemos que $P_n(x)$ é real. Assim, se $p(x)$ é um polinômio real de grau $m$, então

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x),$$

onde todos os $a_k$ são reais e $a_n \neq 0$. Logo

$$\mathcal{L}[p^2(x)] = \sum_{j,k=0}^{m} a_j a_k \, \mathcal{L}\left[P_j(x)P_k(x)\right] = \sum_{k=0}^{m} a_k^2 \, \mathcal{L}\left[P_k^2(x)\right] > 0 \,.$$

Assim segue do Lema que $\mathcal{L}$ é positivo-definido.

Reciprocamente, suponha $\mathcal{L}$ positivo-definido, pelo Teorema 3.5 seus momentos são reais e uma SPO para $\mathcal{L}$ existe. Novamente supondo por simplicidade que $\{P_n(x)\}$ é mônica, temos como antes

$$0 < \mathcal{L}[P_n^2(x)] = {}^{\mathcal{H}_n}\!/\!_{\mathcal{H}_{n-1}} \,, \quad n \geq 0 \,.$$

□

**Corolário 3.3.** *Seja $\{P_n(x)\}$ uma SPO para $\mathcal{L}$. Se $P_n(x)$ é real e $\mathcal{L}[P_n^2(x)] > 0$, então $\mathcal{L}$ é positivo-definido.*

### 3.3.3 A Relação Entre $\mathcal{L}$ Ser Positivo-Definido e o Produto Interno Com Função Peso $w$

Iniciamos com a seguinte observação dos últimos resultados obtidos na subseção anterior:

**Observação.** *Se $\mathcal{L}$ é positivo-definido e definirmos*

$$\langle p, q \rangle = \mathcal{L}\left[p(x)q(x)\right] \tag{3.10}$$

*para todos os polinômios reais $p(x)$ e $q(x)$, então é fácil verificar que (3.10) define um produto interno no espaço vetorial de todos os polinômios em uma variável real com coeficientes reais. Em particular, se $\{P_n(x)\}$ é uma SPO para $\mathcal{L}$ então*

$$\langle P_m, P_n \rangle = \mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0 \,, \quad m \neq n \,.$$

Falta encontrarmos agora os resultados que garantem que se $\{\mu_n\}$ real então existem associados uma integral de Rieman-Stieltjes e uma distribuição não-decrescente com infinitos pontos de aumento. Deste modo, existe uma função como na Definição 3.1, e isso remete a resultados omitidos de teoria das distribuições. Em suma, temos que garantir que exista $\phi(x)$ adequada à Definição 3.1 tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n d\phi(x) = \mu_n, \quad n \geq 0\,, \tag{3.11}$$

impondo condições sobre o funcional de momentos $\mathcal{L}$.

A existência de uma $\phi$ qualquer é o mesmo que dizer que o problema de momentos de Hamburguer [15] tem solução, como levantado por Chihara em seu livro [13]. Tal fato é adequado a Definição 3.1 quando se verifica

**Teorema 3.7** (Critério de Hamburguer). *Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma distribuição $\phi(x)$ não negativa e com infinitos pontos de aumento satisfazendo* (3.11) *é que os momentos $\{\mu_n\}$ sejam reais e os determinantes $\mathcal{H}_n$, dados por* (3.8)*, sejam todos positivos.*

**Corolário 3.4.** *Uma função $\phi(x)$ com $d\phi(x) = w(x)dx$, que define um produto interno no espaço vetorial dos polinômios, é associada ao funcional de momentos com momentos reais $\mathcal{L}$ se, e somente se $\mathcal{L}$ é positivo-definido.*

O Corolário 3.4 resume a ligação do funcional de momentos com as sucessões de polinômios ortogonais reais, e daí, temos que

$$\langle P_m, P_n \rangle_w = \mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0\ , \quad m \neq n$$

quando $\mathcal{L}$ é definido positivo.

Quando for conveniente, iremos nos referir por "SPO positivo-definida" ou SPOPD quando quisermos dizer "SPO com respeito ao funcional de momentos positivo-definido".

## 3.4 Relação de Recorrência de Três Termos

Uma das mais importantes propriedades dos polinômios ortogonais diz respeito a satisfazerem uma relação de recorrência de três termos consecutivos, facilitando sua geração dentre outras boas consequências.

**Teorema 3.8** (RRTT). *Seja $\mathcal{L}$ um funcional de momentos positivo-definido e seja $\{P_n(x)\}$ a SPO real mônica correspondente. Então existem constantes $c_n$ e $\lambda_n \neq 0$ reais e $\lambda_n > 0$ para $n \geq 1$ tais que*

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x)\ , \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots\,, \tag{3.12}$$

*onde definimos $P_{-1}(x) = 0$.*

**Demonstração.** Desde que $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrever

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk}P_k(x)\ , \quad a_{nk} = \frac{\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}\,.$$

Porém, $xP_k(x)$ é um polinômio de grau $k+1$ e assim $a_{nk} = 0$ para $0 \leq k \leq n-1$. Além disso, $xP_n(x)$ é mônico, o que segue $a_{n,n+1} = 1$. Assim,

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{nn}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x)\ , \quad n \geq 1\,.$$

Substituindo $n$ por $n-1$, podemos reescrever da seguinte forma

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) + \lambda_n P_{n-2}(x)\ , \quad n \geq 2\,,$$

e isto é equivalente a (3.12) para $n \geq 2$. Mas (3.12) é válido para $n = 1$ se definirmos $P_{-1}(x) = 0$ e escolhermos $c_1 = -P_1(0)$ ($\lambda_1$ arbitrário).

Em seguida, de (3.12) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^{n-2}P_n(x)] &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - c_n\mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-1}(x)] - \lambda_n\mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)] \\ 0 &= \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - \lambda_n\mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)]\ . \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.4, obtemos para $n \geq 1$,

$$\lambda_{n+1} = \frac{\mathcal{L}[x^n P_n(x)]}{\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)]} = \frac{\mathcal{H}_{n-2}\mathcal{H}_n}{\mathcal{H}_{n-1}^2}\ , \quad (\mathcal{H}_{-1} = 1)$$

Segue que $\mathcal{L}$ é positivo-definido se $\mathcal{H}_n > 0$ ($n \geq 2$). Finalmente, a realdade de $c_n$ segue da realdade de $P_k(x)$.

□

Como consequência imediata do teorema acima, temos:

**Teorema 3.9.** *A respeito da relação de recorrência* (3.12)*, as seguintes afirmações valem para $n \geq 1$:*

(*a*) $\lambda_{n+1} = \dfrac{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]} = \dfrac{\mathcal{H}_{n-2}\mathcal{H}_n}{\mathcal{H}_{n-1}^2}$,

(*b*) $\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n+1}$ *é obtido quando definimos* $\lambda_1 = \mu_0 = \mathcal{H}_0$,

(*c*) $c_n = \dfrac{\mathcal{L}[xP_{n-1}^2(x)]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]}$,

(*d*) *O coeficiente de* $x_{n-1}$ *em* $P_n(x)$ *é* $-(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$.

**Demonstração.** A fórmula ($a$) foi obtida na demonstração do Teorema 3.8 enquanto ($b$) é imediato de ($a$). Para obter ($c$), multiplicamos ambos os lados de (3.12) por $P_{n-1}(x)$ e aplicamos $\mathcal{L}$. Por último, se $d_n$ denotam os coeficientes de $x^{n-1}$ em $P_n(x)$, então a comparação dos coeficientes de $x^{n-1}$ em ambos os lados de (3.12) mostra que $d_n = d_{n-1} - c_n$ e daí ($d$) segue.

□

**Corolário.** *Se $\lambda_n > 0$, $n \geq 2$, o funcional de momentos $\mathcal{L}$ é positivo definido.*

Não necessariamente precisamos que a SPO seja mônica para que o Teorema 3.8 valha. Como a ortogonalidade é referida ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$ e uma constante não interfere na ortogonalidade, basta fazermos $P_n(x) = a_{n,n}\widehat{P}_n$, onde $a_{n,n}$ é o coeficiente dominante de $P_n(x)$ para construirmos a SPO mônica $\{\widehat{P}_n\}$. Daí, a recorrência do Teorema 3.8 toma a forma

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \ \ n \geq 1\,, \tag{3.13}$$

onde

$$A_n = a_{n,n}^{-1}a_{n+1,n+1}, \quad B_n = -c_{n+1}a_{n,n}^{-1}, \quad C_n = \lambda_{n+1}a_{n,n}^{-1}a_{n+1,n+1}\,. \tag{3.14}$$

Em particular, $A_n \neq 0$ e $C_n \neq 0$ e a condição para que $\mathcal{L}$ ser positiva definida fica como

$$C_n A_n A_{n-1} > 0, \quad n \geq 1\,. \tag{3.15}$$

## 3.5 Teorema de Favard

O teorema à seguir é conhecido como "Teorema de Favard" e é um resultado que conecta polinômios que satisfazem uma certa relação de recorrência com o fato de poderem ser ortogonais.

Em [16] é constatado que tal resultado já havia aparecido anteriormente em outros textos sob formas similares. Já em 1939 [17], Szegő referenciou o resultado ao texto de Favard [18], de 1935, provavelmente motivado pelo teor do artigo no qual aparece pela primeira vez o termo "Polinômio Ortogonal". Chihara em seu artigo [19] de 1957, mencionou o resultado sob alcunha de Teorema de Favard pela primeira vez em uma publicação. Assim este se manteve intitulado.

Também foi, aparentemente, descoberto de forma independente por J. Shohat [20], publicado em 1936. Este fato está implicitamente contido em resultados anteriormente conhecidos da teoria de frações continuas e uma forma anterior dele remete a Stieltjes [21] (1894).

**Teorema 3.10** (Favard). *Sejam $\{c_n\}$ e $\{\lambda_n\}$, sequências numéricas reais e $\{P_n(x)\}$ uma sequência de polinômios mônicos que obedecem a seguinte relação de recorrência de três termos*

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x)\,, \quad n = 1,\, 2,\, \cdots\,, \tag{3.16}$$

*com*

$$P_{-1}(x) = 0\,, \quad P_0(x) = 1\,.$$

*Então existe um único funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que*

$$\mathcal{L}[1] = \lambda_1\,, \quad \mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0\,, \quad para \;\; m \neq n\,, \quad m, n = 0, 1, \cdots$$

*O funcional $\mathcal{L}$ é definido-positivo e $\{P_n(x)\}$ é a sequência de polinômios ortogonais real mônica correspondente se, e somente se, $\lambda_n > 0$, $n = 1,\, 2,\, \cdots$*

**Demonstração.** Definimos o funcional $\mathcal{L}$ indutivamente por

$$\mathcal{L}[1] = \lambda_1\,, \quad \mathcal{L}[P_n(x)] = 0\,, \quad para \;\; n = 1, 2, \cdots \tag{3.17}$$

Assim, definimos $\mu_1$ pela condição $\mathcal{L}[P_1(x)] = \mu_1 - c_1\mu_0 = 0$, $\mu_2$ por $\mathcal{L}[P_2(x)] = \mu_2 - (c_1 + c_2)\mu_1 + (\lambda_2 - c_1c_2)\mu_0 = 0$, etc. Reescrevendo (3.16) isolando $xP_n(x)$, temos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + c_{n+1}P_n(x) + \lambda_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{3.18}$$

e de (3.17)

$$\mathcal{L}[xP_n(x)] = 0, \quad n \geq 2\,.$$

Multiplicando ambos os lados de (3.18) por $x$ e usando a última igualdade, encontramos

$$\mathcal{L}[x^2P_n(x)] = 0, \quad n \geq 3\,.$$

Continuando dessa maneira, segue

$$\mathcal{L}[x^kP_n(x)] = 0, \quad 0 \leq k < n$$

$$\mathcal{L}[x^nP_n(x)] = \lambda_{n+1}\mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)], \quad n \geq 1\,.$$

Daí, segue para $n \neq m$, $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$, enquanto da igualdade acima segue indutivamente que, juntamente com o Corolário 3.9 que

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \mathcal{L}[x^n P_n(x)] = \lambda_{n+1}\lambda_n \cdots \lambda_1, \quad n \geq 0\,.$$

Portanto $\mathcal{L}$ é positivo-definido quando $\lambda_n > 0$, $n \geq 1$, e isto conclui a prova.

□

Como podemos também observar, o Teorema de Favard é a recíproca do Teorema 3.8, onde, usando resultados da seção anterior e impondo a condição sobre os coeficientes da relação, temos que os polinômios que a compõe são reais, ortogonais e estão relacionados à uma distribuição $\phi(x)$.

## 3.6 Zeros de Polinômios Ortogonais

Esta seção contempla dois importantes resultados sobre os zeros de polinômios ortogonais.

**Teorema 3.11.** *Seja $P_n(x)$, $n \geq 1$, uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo $(a,b)$ com relação à função peso $w(x)$. Então as raízes de $P_n(x)$ são reais, distintas e pertencem ao intervalo $(a,b)$.*

**Demonstração.** Primeiramente, suponhamos que $P_n(x)$ seja não nulo e não mude de sinal em $(a,b)$, $n > 1$. Então, sem perda de generalidade, seja $P_n(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Daí, $\int_a^b P_n(x)\, w(x) dx > 0$, o que contradiz $\int_a^b 1. P_n(x) w(x) dx = 0$, dado $P_0 = 1$ ser ortogonal a $P_n$. Assim, $P_n(x)$ deve mudar de sinal pelo menos uma vez em $(a,b)$ e por isso $P_n(x)$ tem um zero de multiplicidade ímpar em $(a,b)$.

Suponhamos que $x_{n,1}$, $x_{n,2}$, $\cdots$ , $x_{n,r}$ com $r < n$, são raízes distintas de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em $(a,b)$. Então,

$$P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r}) Q(x)\,,$$

onde $Q(x)$ é um polinômio de grau $(n-r)$ que tem raízes complexas ou raízes de multiplicidade par em $(a,b)$ ou raízes fora de $(a,b)$. Então $Q(x)$ não muda de sinal em $(a,b)$. Contudo, da relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r}) P(x) w(x) dx = 0\,,$$

pois $(x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r})$ é de grau menor que $n$, e

$$\int_a^b (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,r}) P(x) w(x) dx =$$
$$= \int_a^b (x - x_{n,1})^2 (x - x_{n,2})^2 \cdots (x - x_{n,r})^2 Q(x) w(x) dx \neq 0\,, \quad (3.19)$$

o que gera o absurdo. Logo $r = n$ e portanto $P_n(x)$ tem $n$ raízes reais em $(a,b)$, de multiplicidade ímpar, ou seja, distintas.

□

**Teorema 3.12** (Entrelaçamento dos Zeros)**.** *Seja $\{P_n(x)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais com $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$ os zeros de $P_n(x)$ e $x_{n+1,1} < x_{n+1,2} < \cdots < x_{n+1,n+1}$ os zeros de $P_{n+1(x)}$, $n \geq 1$, arranjados em ordem crescente. Então,*

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}\,. \quad (3.20)$$

*Em outras palavras, os zeros de $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$ se entrelaçam.*

**Demonstração.** Aplicando os zeros de $P_{n+1}(x)$ na célebre "Identidade de Christoffel-Darboux" [13, Teorema 4.5] segue

$$P'_{n+1}(x_{n+1,k})P_n(x_{n+1,k}) > 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n+1\,. \tag{3.21}$$

Como os zeros de $P_{n+1}(x)$ são reais e distintos, segue do Teorema 2.2 de Rolle que a derivada $P'_{n+1}(x)$ tem um zero em cada intervalo $(x_{n+1,k-1}, x_{n+1,k})$, $k = 2, 3, \cdots, n+1$. Daí $P'_{n+1}(x_{n+1,k-1})$ e $P'_{n+1}(x_{n+1,k})$ tem sinais opostos.

Como (3.21) é positiva segue que $P_n(x_{n+1,k-1})$ e $P_n(x_{n+1,k})$ também tem sinais opostos. Pelo Teorema do Valor Médio, $P_n(x)$ tem um zero em cada intervalo $(x_{n+1,k-1}, x_{n+1,k})$, $k = 2, 3, \cdots, n+1$.

□

## 3.7 Polinômios Ortogonais Clássicos

Como levantado em [22], os polinômios ortogonais clássicos são frequentemente caracterizados como soluções polinomiais do um problema de Sturm-Lioville (c.f. [23]), seguido pelo celebre resultado de Bochner [24]: uma sequência infinita de polinômios $\{P_n(x)\}$ satisfazendo a equação diferencial de segunda ordem da forma

$$p(x)P''_n(x) + q(x)P'_n(x) + r(x)P_n(x) = \lambda_n P_n(x)$$

sendo $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ polinômios de grau 2, 1 e 0 respectivamente. Se $\{P_n(x)\}$ for uma SPO ela será uma SPOPD e sob boas propriedades recebe o título de clássica, assunto muito explorado na literatura, dos quais os 3 casos contínuos dentre as 5 possíveis soluções recebem nomes após Jacobi, Hermite e Laguerre. Iremos nos referir por "SPOC" quando quisermos dizer "SPO Clássica" quando for conveniente.

À partir daí, introduzimos uma definição adequada ao nosso estudo, como visto em [14].

**Definição 3.7.** *Polinômios ortogonais com respeito ao produto interno* (3.4) *no intervalo* $(a, b)$ *são chamados de polinômios ortogonais clássicos se a função peso* $w(x)$ *satisfaz a seguinte diferencial*

$$\frac{d}{dx}\left(M(x)w(x)\right) = N(x)w(x) \tag{3.22}$$

*onde*

$$M(x) \;=\; \begin{cases} 1 - x^2, & se \;\; (a,b) = (-1,1) \\ x, & se \;\; (a,b) = (0,\infty) \\ 1, & se \;\; (a,b) = (-\infty,\infty) \end{cases}$$

*e* $N(x)$ *é um polinômio de grau* 1.

### 3.7.1 Polinômios de Jacobi

Os Polinômios de Jacobi são os polinômios definidos pela fórmula

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-2)^n (n!)^{-1} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right], \tag{3.23}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são tais que $\alpha, \beta > -1$, restritos desta forma para fins de integração. Estes polinômios são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \alpha, \beta > -1\,,$$

onde $w(x)$ satisfaz a equação diferencial (3.22), com

$$M(x) = 1 - x^2 \ \text{ e } \ N(x) = \beta - \alpha - x(\alpha + \beta + 2)\,.$$

Adotando valores para $\alpha$ e $\beta$, temos os seguintes casos conhecidos e bem explorados na literatura:

$(i)$ Os Polinômios de Legendre ($\alpha = \beta = 0$);

$(ii)$ Os Polinômios de Chebyshev de primeira espécie ($\alpha = \beta = -1/2$);

$(iii)$ Os Polinômios de Chebyshev de segunda espécie ($\alpha = \beta = 1/2$);

$(iv)$ Os Polinômios de Gegenbauer/Ultrasféricos ($\alpha = \beta = \lambda - 1/2, \ \ \lambda \neq 0$).

A fórmula (3.23) se refere à Fórmula de Rodrigues [25, Definição 3.2] para Polinômios de Jacobi.

Referindo à forma explícita dos Polinômios de Jacobi em [13, pag.144], temos,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}\,, \tag{3.24}$$

com coeficientes dominantes da forma

$$a_{n,n} = a_{n,n}(\alpha,\beta) = 2^{-n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}\,. \tag{3.25}$$

Também temos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)\,,$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}\,.$$

Associamos os polinômios de Jacobi à RRTT

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(\gamma_{n+1}^{(\alpha,\beta)}x - \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)}\right)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1\,, \tag{3.26}$$

onde

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1}^{(\alpha,\beta)} &= \frac{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}\,,\\
\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} &= \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}\,,\\
\beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} &= \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}\,,
\end{aligned}$$

$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$.

$\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ ser uma SPOPD pode ser confirmado conforme a condição (3.15) aplicada ao Teorema 3.10 de Favard em conjunto com a RRTT acima.

Além disso, os polinômios de Jacobi satisfazem a seguinte relação

$$\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]' = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\,, \tag{3.27}$$

o que garante que a derivada de todos os polinômios desta SPO formam também uma SPO ($n, \alpha$ e $\beta$ são constantes).

### 3.7.2 Polinômios de Laguerre

Os Polinômios de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$, também podem ser expressos por uma formula de tipo Rodrigues. A saber

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (n!)^{-1} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] . \tag{3.28}$$

É requerido que $\alpha > -1$ para que valham todas as relações formais. O caso que Laguerre estudou originalmente foi o caso com $\alpha = 0$. Para este caso, usamos a notação

$$L_n(x) := L_n^{(0)}(x) .$$

A fórmula explícita para $L_n^{(\alpha)}(x)$ é

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^m ,$$

obtida à partir de (3.28). Desta fórmula, obtemos os coeficientes dominantes de $L_n^{(\alpha)}(x)$, os quais são da forma

$$a_{n,n} = a_{n,n}(\alpha) = \frac{(-1)^n}{n!} .$$

$\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$ são polinômios ortogonais no intervalo $(0, \infty)$ com relação à função peso

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1 ,$$

onde $w(x)$ satisfaz a equação diferencial (3.22), com

$$M(x) = x \ \text{ e } \ N(x) = \alpha + 1 - x .$$

Também, satisfazem a RRTT da forma

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (x - 2n + \alpha + 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1 , \tag{3.29}$$

$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$. Também se verifica que $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$ é uma SPOPD assim como os polinômios de Jacobi. Ainda como os Polinômios de Jacobi, também satisfaz uma relação diferencial com outros polinômios ortogonais clássicos de Laguerre, a saber,

$$\left[L_n^{(\alpha)}(x)\right]' = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) , \tag{3.30}$$

e o mesmo comentário feito a (3.27) é válido.

### 3.7.3 Polinômios de Hermite

Os Polinômios de Hermite, $H_n(x)$ podem ser expressos por uma formula de Rodrigues na forma

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} c^{-x^2} . \tag{3.31}$$

Ambos os trabalhos de Hermite e Laguerre já haviam sido considerados por Chebyshev, como levantado por Chihara em seu livro.

A fórmula explícita é da forma

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[\![n/2]\!]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)!k!} ,$$

onde $[\![x]\!]$ denota o menor inteiro que não excede $x$.

O coeficiente dominante de $H_n(x)$ é

$$a_{n,n} = 2^n \,.$$

Os polinômios de Hermite são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à função peso

$$w(x) = e^{-x^2} \,,$$

onde $w(x)$ satisfaz a equação diferencial (3.22), com

$$M(x) = 1 \ \text{ e } \ N(x) = -2x \,.$$

Os polinômios de Hermite satisfazem uma RRTT da forma

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x), \quad n \geq 1 \,, \tag{3.32}$$

$H_0(x) = 1$ e $H_{-1}(x) = 0$ e uma relação com suas derivadas da forma

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \,. \tag{3.33}$$

Novamente, constatamos que as derivadas formam uma SPOC de Hermite. Em especial, as derivadas dos polinômios de Hermite geram a mesma SPOC.

### 3.7.4 Comentários sobre as SPO's Clássicas

Segundo Chihara [13, capítulo 5], a forma derivativa advinda de fórmulas de tipo Rodrigues das três SPOC's de caso contínuo são o principal fator de ligação com interpretações de fenômenos físicos. Também, as únicas SPOPD's que tem as propriedades desta seção (dentre outras) são as SPOC's ou são SPO's que se reduzem à uma das 3.

Outra propriedade surpreendente se deve a Hahn, que provou que uma SPOPD que tem como derivada uma SPOPD se reduz à uma das 3 clássicas, sendo a segunda forma de se caracterizar uma SPO como clássica. Há outras formas de caracterização que envolvem outra relação diferencial, funções geradoras, etc.

## 3.8 Sobre a relação com a RSD

Com essas boas propriedades, fica claro que tanto os polinômios ortogonais clássicos quanto suas derivadas atingem o número máximo da RSD, pois seus zeros são todos reais e distintos, assim como os zeros das suas derivadas, que são também SPO's. Logo, $S^- - Z = 0$ para estes. Também vale isso para outras SPO's, mas não necessariamente vale o mesmo a suas derivadas: quando garantido coeficientes reais para esta última, pelo Teorema do Valor Médio e Teorema de Rolle este fato vale.

Daí, partimos para explorar a Regra de Sinais de Descartes Generalizada, que se trata de uma regra de sinais adaptada para sequências de funções quaisquer. É possível então pressupor que as SPO's sejam sequências de funções passíveis de satsfazer este resultado, o que é um fato a ser demonstrado no capítulo 5.

Capítulo

4

# Critérios Gerais

## 4.1 Preliminares

### 4.1.1 Matrizes Totalmente Positivas e de Sinal Consistente

Nesta seção introduziremos o conceito de positividade de uma matriz. Definiremos matrizes positivas e de sinal consistente e apresentaremos alguns resultados sobre tais caracterizações. Um desses resultados é o Lema de Fekete [26] de 1912. Exemplos e mais resultados sobre o assunto podem ser obtidos em [27].

**Definição 4.1.** *Seja $A$ uma matriz de dimensões $m \times n$. Dizemos que a matriz $A$ é totalmente positiva de ordem $k$ ($TP_k$) se todos os menores de ordem $l$ de $A$, $1 \leq l \leq k$, são não-negativos, isto é,*

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_l \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_l \end{pmatrix} \geq 0\,, \quad \begin{matrix} 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq m \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leq n \end{matrix}\,, \quad 1 \leq l \leq k\,.$$

*Se a desigualdade acima for estrita para todos os menores de ordem $l$, $1 \leq l \leq k$, então dizemos que $A$ é estritamente totalmente positiva de ordem $k$ ($STP_k$). Se $A$ é (estritamente) totalmente positiva de ordem $k = min\{m, n\}$ então simplesmente dizemos que $A$ é (estritamente) totalmente positiva.*

**Definição 4.2.** *Seja $A$ uma matriz de dimensões $m \times n$. Dizemos que a matriz $A$ é sinal consistente de ordem $k$ ($SC_k$) se todos os menores de ordem $k$ de $A$ possuem mesmo sinal, isto é,*

$$\varepsilon_k A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \geq 0\,, \quad \begin{matrix} 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n \end{matrix}\,,$$

*para $\varepsilon_k = \pm 1$. Se a desigualdade acima for estrita para todos os menores de ordem $k$, então dizemos que $A$ é estritamente sinal consistente de ordem $k$ ($SSC_k$).*

A seguir, enunciaremos um resultado de Fekete [26, p. 92] de 1912.

**Lema 4.1** (Fekete, 1912). *Seja $A_{m\times n}$ uma matriz com $m \geq n$. Se todos os menores de $A$ de ordem $n-1$ formados pelas $n-1$ primeiras colunas e todos os menores de $A$ de ordem $n$ formado por linhas consecutivas são positivos então todos os menores de ordem $n$ de $A$ são positivos.*

Karlin [27, p. 59] percebeu que no Lema de Fekete, os menores não necessariamente precisam possuir mesmo sinal, mas sim, apenas os de mesmo tamanho, como veremos abaixo.

**Proposição 4.1** (Karlin, 1968). *Seja $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ uma matriz com $m \geq n$. Se todos os menores de ordem $n-1$ de $A$ formados pelas $n-1$ primeiras colunas possuem sinal estrito $\varepsilon_{n-1}$ e se todos os menores de $A$ de ordem $n$ com consecutivas linhas possuem sinal estrito $\varepsilon_n$, então todos os menores de ordem $n$ de $A$ possuem sinal estrito $\varepsilon_n$, isto é, se*

$$\varepsilon_{n-1} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} > 0\,, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \leq m\,,$$

*e*

$$\varepsilon_n A \begin{pmatrix} i+1 & i+2 & \cdots & i+n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} > 0\,, \quad i = 0, 1, \cdots, m-n\,,$$

*então*

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} > 0\,, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq m\ .$$

**Observação.** Se as duas primeiras desigualdades acima não são estritas, então a terceira desigualdade também não é estrita.

**Proposição 4.2.** *Seja $A_{m\times n}$ uma matriz com $m \geq n$. Se todos os menores de $A$ formados pelas $k$ primeiras colunas e quaisquer $k$ consecutivas linhas são positivos, $1 \leq k \leq n$, então todos os menores de ordem $n$ de $A$ são positivos, isto é, se*

$$A \begin{pmatrix} i+1 & i+2 & \cdots & i+k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} > 0\,, \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \cdots, m-k \\ k = 1, 2, \cdots, n \end{array}\,,$$

*então*

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} > 0\,, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq m\ .$$

*Mais geral ainda, se todos os menores de $A$ formados pelas $k$ primeiras colunas e quaisquer $k$ consecutivas linhas possui sinal estrito $\varepsilon_k$, $1 \leq k \leq n$, então todos os menores de ordem $n$ de $A$ têm sinal estrito $\varepsilon_n$.*

A prova desta proposição segue aplicando-se várias vezes o seguinte resultado:

**Proposição 4.3.** *Seja $A_{m\times n}$ uma matriz cujos menores de $A$ de ordem $k$ formados por linhas e colunas consecutivas tem sinal estrito $\varepsilon_k$. Então todos os menores de ordem $k$ de $A$ tem sinal estrito $\varepsilon_k$, i.e, $A$ é SSC.*

Observação: Todos esses resultados que acabamos de apresentar seguem quando as palavras linha e coluna são trocadas. A proposição 4.3 pode ser encontrada no livro [27] sob o nome de Teorema 3.3.

### 4.1.2 Transformações "Variation Diminishing"

Consideremos a transformação $y = Ax$, onde

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= x_{n-1} + x_n \\ y_n &= x_n \,. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Propriedade P4 de mudança de sinal de sequência

$$S^-(x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_{n-1} + x_n, x_n) \leq S^-(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,,$$

ou seja,

$$S^-(y = Ax) \leq S^-(x)\,.$$

Assim, obtemos esta propriedade de mudança de sinal de sequência através da transformação $A$. Isto nos motiva a seguinte definição:

**Definição 4.3** ("Variation Diminishing" Transformação)**.** *Seja*

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

*uma transformação linear a qual pode ser escrita como $y = Ax$, onde $A_{m\times n}$ é a matriz que denota esta transformação. Dizemos que esta transformação é "variation diminishing" se para cada $x$ temos*

$$S^-(y) \leq S^-(x)\,,$$

*isto é,*

$$S^-(y_1, y_2, \cdots, y_m) \leq S^-(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,.$$

Naturalmente nos perguntamos sob que condições uma transformação é "variation diminishing". Em 1930, Schoenberg [28] estabeleceu o seguinte resultado:

**Teorema 4.1** (Schoenberg, 1930). *Seja $y = Ax$ uma transformação linear, onde $A$ é a matriz que representa esta transformação. Se $A$ é totalmente positiva então esta transformação é "variation diminishing".*

Observe que ele forneceu somente uma condição de necessidade. Mais tarde, em 1936, Motzkin [29] deu condições necessárias e suficientes para que uma transformação seja "variation diminishing". Apresentaremos a seguir o resultado de Motzkin. Para isto, precisamos de algumas definições:

**Definição 4.4.** *Dizemos que uma matriz $A$ é definida se todos os seus elementos não-nulos possuem mesmo sinal.*

**Definição 4.5.** *Dizemos que uma matriz $A$ é coluna-definida se cada uma de suas colunas é uma matriz definida.*

**Definição 4.6.** *Seja $A_{m\times n}$ uma matriz de posto $r$ e seja $1 \le i \le r$. Denotamos por $A^{(i)}$ a matriz de $\binom{m}{i}$ linhas e $\binom{n}{i}$ colunas cujos elementos são os menores de ordem $i$ de $A$ sob a convenção de que todos os menores formados pelas mesmas $i$ linhas de $A$ são arranjados em uma mesma linha de $A^{(i)}$ e o mesmo segue para as colunas.*

Exemplo: Dada a matriz $A_{3\times 2}$. Então

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} A\binom{1}{1} & A\binom{1}{2} \\ A\binom{2}{1} & A\binom{2}{2} \\ A\binom{3}{1} & A\binom{3}{2} \end{pmatrix}_{\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}} \quad \text{e} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} A\binom{1\ 2}{1\ 2} \\ A\binom{1\ 3}{1\ 2} \\ A\binom{2\ 3}{1\ 2} \end{pmatrix}_{\binom{3}{2}\times\binom{2}{2}} .$$

Agora estamos em condições de formular o resultado de Motzkin [29].

**Teorema 4.2** (Motzkin, 1936). *Seja $A_{m\times n}$ uma matriz de posto $r$ e consideremos a transformação*

$$y = Ax\,.$$

*Esta transformação é "variation diminishing" se, e somente se, a matriz $A$ tem as seguintes propriedades:*

*(i) As matrizes $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(r-1)}$ são definidas;*

*(ii) A matriz $A^{(r)}$ é coluna-definida.*

A prova deste teorema proposta por Motzkin em [29] é bem elaborada. Uma prova mais simples que é devido à Schoenberg e Whitney pode ser encontrada em [30] e outras demonstrações podem ser obtidas em Gantmacher e Krein [31] e Karlin [27].

## 4.2 Critério de Pólya e Szegő

**Definição 4.7** (Regra de Sinais de Descartes Generalizada). *A sequência finita de funções $f_0, f_1, \cdots, f_n$ satisfaz à Regra de Sinais de Descartes no intervalo $(a, b)$ se o número de zeros em $(a, b)$ de qualquer combinação linear não-trivial*

$$a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)$$

*é menor ou igual ao número de mudanças de sinal da sequência $a_0, a_1, \cdots, a_n$, isto é,*

$$Z(a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)\,;\,(a, b)) \le S^-(a_0,\, a_1,\, \cdots,\, a_n)\,.$$

**Definição 4.8.** *Sejam $f_0, f_1, \cdots, f_n$ funções suficientemente suaves. O Wronskiano $W(f_0, f_1, \cdots, f_n\,;\,x)$ de $f_0, f_1, \cdots, f_n$ no ponto $x$ é definido por*

$$W(f_0, f_1, \cdots, f_n\,;\,x) = \begin{vmatrix} f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_0'(x) & f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ & & \vdots & \\ f_0^{(n)}(x) & f_1^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Uma caracterização para que sequências de funções satisfaçam à Regra de Sinais de Descartes foi dada por Pólya e Szegő [9] em 1925, que é a seguinte:

**Teorema 4.3** (Pólya & Szegő, 1925)**.** *Seja $f_1, f_2, \cdots, f_n$ uma sequência finita de funções de $C^n[a,b]$, não-identicamente nulas em $(a,b)$. Esta sequência satisfaz à Regra de Sinais de Descartes no intervalo $(a,b)$ se, e somente se, as seguintes propriedades se verificam:*

*(i)* *Se $l \in \mathbb{N}$, $1 \le l \le n$ e $i_1, i_2, \cdots, i_l$ denotam números inteiros com $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_l \le n$, então o Wronskiano $W(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_l}\,;\,x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$;*

*(ii)* *sinal $(W(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_l}\,;\,x))$ = sinal $(W(f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots, f_{j_l}\,;\,x))$ para quaisquer escolhas dos índices $i_1, i_2, \cdots, i_l$ e $j_1, j_2, \cdots, j_l$. Em outras palavras, quaisquer dois Wronskianos com o mesmo número $l$ de linhas possuem mesmo sinal para todo $l = 1, 2, \cdots, n-1$.*

Mencionamos que a ordem das funções na sequência e que a exigência de nenhuma das funções ser identicamente zero em $(a,b)$ são essenciais. Note que as condições $(i)$ e $(ii)$ são equivalentes a dizer que a matriz Wronskiana

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ & & \vdots & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

é estritamente sinal consistente de ordem $k$ $(SSC_k)$, para todo $k = 1, 2, \cdots, n$.

Para a demonstração da condição de suficiência do Teorema 4.3 de Pólya e Szegő, precisaremos do seguinte lema técnico.

**Lema 4.2.** *Seja $1 \le k \le n$. Se a sequência $f_1, f_2, \cdots, f_n$ satisfaz as propriedades $(i)$ e $(ii)$ do Teorema 4.3, então a sequência de $n-1$ funções*

$$\begin{aligned} F_1(x) &= -\left(\frac{f_1(x)}{f_k(x)}\right)', \cdots, F_{k-1}(x) = -\left(\frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)}\right)', \\ F_k(x) &= \left(\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\right)', \cdots, F_{n-1}(x) = \left(\frac{f_n(x)}{f_k(x)}\right)', \end{aligned}$$

*também satisfaz essas duas propriedades.*

**Observação.** O Lema acima está incluído em [27] assim como o Teorema 4.3 e sua demonstração segue por conta das propriedades do Wronskiano.

**Demonstração do Teorema 4.3 de Pólya e Szegő**: Provaremos primeiramente que as condições $(i)$ e $(ii)$ são necessárias para que a sequência

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$$

obedeça a Regra de Sinais de Descartes, isto é,

$$Z(a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)\,;\,(a,b)) \leq S^-(a_1, \cdots, a_n),$$

para quaisquer $a_1, \cdots, a_n$, não todos nulos. Mostremos primeiramente que para quaisquer $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n$,

$$W(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_l}\,;\,x) = \begin{vmatrix} f_{i_1}(x) & f_{i_2}(x) & \cdots & f_{i_l}(x) \\ f'_{i_1}(x) & f'_{i_2}(x) & \cdots & f'_{i_l}(x) \\ & & \vdots & \\ f_{i_1}^{(l-1)}(x) & f_{i_2}^{(l-1)}(x) & \cdots & f_{i_l}^{(l-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo $x \in (a,b)$. Para isso, suponha por absurdo que

$$W(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_l}\,;\,x_0) = 0$$

para algum $x_0$ em $(a,b)$. Daí, existem constantes $c_1, c_2, \cdots, c_l$, não todas nulas, tais que

$$\begin{pmatrix} f_{i_1}(x_0) & f_{i_2}(x_0) & \cdots & f_{i_l}(x_0) \\ f'_{i_1}(x_0) & f'_{i_2}(x_0) & \cdots & f'_{i_l}(x_0) \\ & & \vdots & \\ f_{i_1}^{(l-1)}(x_0) & f_{i_2}^{(l-1)}(x_0) & \cdots & f_{i_l}^{(l-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} c_1 f_{i_1}(x_0) & + & c_2 f_{i_2}(x_0) & + & \cdots & + & c_l f_{i_l}(x_0) & = & 0 \\ c_1 f'_{i_1}(x_0) & + & c_2 f'_{i_2}(x_0) & + & \cdots & + & c_l f'_{i_l}(x_0) & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ c_1 f_{i_1}^{(l-1)}(x_0) & + & c_2 f_{i_2}^{(l-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_l f_{i_l}^{(l-1)}(x_0) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Isto significa que $x_0$ é zero de $c_1 f_{i_1}(x) + c_2 f_{i_2}(x) + \cdots + c_l f_{i_l}(x)$ com multiplicidade pelo menos $l$, o que é absurdo, pois por hipótese

$$Z(c_1 f_{i_1}(x) + c_2 f_{i_2}(x) + \cdots + c_l f_{i_l}(x)\,;\,(a,b)) \leq S^-(c_1, c_2, \cdots, c_l) \leq l-1\,.$$

Portanto, $W(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_l}\,;\,x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ e $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n\,.$

Mostremos agora que quaisquer dois Wronskianos com o mesmo número de linhas mantém o mesmo sinal em $(a,b)$. Sejam $x_0 \in (a,b)$ e $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_l \le n$. Pelo resultado anterior

$$W(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_l}\,;\, x_0) = W \neq 0\,. \tag{4.1}$$

Daí, existem constantes $b_1, b_2, \cdots, b_l$, não todas nulas, tais que

$$\begin{cases} b_1 f_{i_1}(x_0) & + & b_2 f_{i_2}(x_0) & + & \cdots & + & b_l f_{i_l}(x_0) & = & 0 \\ b_1 f'_{i_1}(x_0) & + & b_2 f'_{i_2}(x_0) & + & \cdots & + & b_l f'_{i_l}(x_0) & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ b_1 f^{(l-2)}_{i_1}(x_0) & + & b_2 f^{(l-2)}_{i_2}(x_0) & + & \cdots & + & b_l f^{(l-2)}_{i_l}(x_0) & = & 0 \\ b_1 f^{(l-1)}_{i_1}(x_0) & + & b_2 f^{(l-1)}_{i_2}(x_0) & + & \cdots & + & b_l f^{(l-1)}_{i_l}(x_0) & = & 1 \end{cases}.$$

Isto significa que $x_0$ é zero de $b_1 f_{i_1}(x) + b_2 f_{i_2}(x) + \cdots + b_l f_{i_l}(x)$ com multiplicidade $l-1$. Por outro lado, pela hipótese

$$Z(b_1 f_{i_1}(x) + b_2 f_{i_2}(x) + \cdots + b_l f_{i_l}(x)\,;\,(a,b)) \le S^-(b_1, b_2, \cdots, b_l) \le l-1\,,$$

de onde segue que

$$S^-(b_1, b_2, \cdots, b_l) = l-1\,. \tag{4.2}$$

Agora, desenvolvendo (4.1) pela última linha, obtemos

$$\begin{aligned} W = W(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_l}\,;\, x_0) \;&=\; (-1)^{l-1} W(f_{i_2}, f_{i_3}, \cdots, f_{i_l}\,;\, x_0) f^{(l-1)}_{i_1}(x_0) + \\ & \quad\; (-1)^{l-2} W(f_{i_1}, f_{i_3}, \cdots, f_{i_l}\,;\, x_0) f^{(l-1)}_{i_2}(x_0) + \\ & \quad\; \cdots + W(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_{l-1}}\,;\, x_0) f^{(l-1)}_{i_l}(x_0) \quad , \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\beta_1}{W} f^{(l-1)}_{i_1}(x_0) + \frac{\beta_2}{W} f^{(l-1)}_{i_2}(x_0) + \cdots + \frac{\beta_l}{W} f^{(l-1)}_{i_l}(x_0) = 1\,,$$

onde

$$\beta_j = (-1)^{l-j} W(f_{i_1}, \cdots, f_{i_{j-1}}, f_{i_{j+1}}, \cdots, f_{i_l}\,;\, x_0), \quad j = 1, \cdots, l\,.$$

Desde que $b_j = \dfrac{\beta_j}{W}$, $j = 1, 2, \cdots, l$, de (4.2) temos

$$S^-\left(\frac{\beta_1}{W}, \frac{\beta_2}{W}, \cdots, \frac{\beta_l}{W}\right) = S^-(b_1, b_2, \cdots, b_l) = l-1\,,$$

de onde segue que

$$sinal\left(\frac{\beta_j}{W}\right) = -sinal\left(\frac{\beta_{j+1}}{W}\right), \quad j = 1, 2, \cdots, l-1\,,$$

e isso implica que

$$\begin{aligned} & sinal\left(W(f_{i_1}, \cdots, f_{i_{j-1}}, f_{i_{j+1}}, \cdots, f_{i_l}\,;\, x_0)\right) = \\ & sinal\left(W(f_{i_1}, \cdots, f_{i_j}, f_{i_{j+2}}, \cdots, f_{i_l}\,;\, x_0)\right) \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \cdots, l-1$. Portanto, quaisquer dois Wronskianos com o mesmo número $l$ de linhas, $1 \leq l \leq n-1$, possuem o mesmo sinal.

Prova da condição de suficiência do Teorema 4.3 de Pólya e Szegő:

Usaremos o Princípio de Indução Finita para o próximo passo. Seja

$$F(x) := a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x)\,, \tag{4.3}$$

e seja $Z$ o número de zeros de $F(x)$ em $(a, b)$.

Para $n = 1$, $F(x) = a_1 f_1(x)$. Como, por hipótese, $W(f_1\,;\,x) = f_1(x) \neq 0$ para todo $x$ em $(a, b)$, concluímos que $S^-(a_1) - Z = 0$.

Suponha que a Regra de Sinais de Descartes seja válida para qualquer sistema de $n-1$ funções que satisfaz às propriedades $(i)$ e $(ii)$ do Teorema 4.3.

Seja $k+1$ um índice de mudança de sinal. Daí, dividindo (4.3) por $f_k(x)$, obtemos

$$\frac{F(x)}{f_k(x)} = a_1 \frac{f_1(x)}{f_k(x)} + \cdots + a_{k-1}\frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)} + a_k + a_{k+1}\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} + \cdots + a_n \frac{f_n(x)}{f_k(x)}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\left(\frac{F(x)}{f_k(x)}\right)' &= a_1 \left(\frac{f_1(x)}{f_k(x)}\right)' + \cdots + a_{k-1}\left(\frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)}\right)' + a_{k+1}\left(\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\right)' \\
&\quad + \cdots + a_n \left(\frac{f_n(x)}{f_k(x)}\right)' \\
&= -a_1 F_1(x) - \cdots - a_{k-1}F_{k-1}(x) + a_{k+1}F_k(x) \\
&\quad + \cdots + a_n F_{n-1}(x) \\
&=: F^*(x)\,,
\end{aligned}$$

com

$$F_1(x) = -\left(\frac{f_1(x)}{f_k(x)}\right)', \cdots, F_{k-1}(x) = -\left(\frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)}\right)',$$
$$F_k(x) = \left(\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\right)', \cdots, F_{n-1}(x) = \left(\frac{f_n(x)}{f_k(x)}\right)'.$$

Seja $Z^*$ o número de zeros reais de $F^*(x)$ em $(a, b)$. Desde que $F^*(x) = \left(\dfrac{F(x)}{f_k(x)}\right)'$, $f_k(x) \neq 0$ para todo $x$ em $(a, b)$ e $F(x)$ possui $Z$ zeros em $(a, b)$, concluímos pelo Teorema 2.3 que

$$Z^* \geq Z - 1\,. \tag{4.4}$$

Pelo Lema 4.2, a sequência $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_{n-1}(x)$ satisfaz as propriedades $(i)$ e $(ii)$ do Teorema 4.3. Logo, pela hipótese de indução, segue que

$$Z^* \leq S^-(-a_1, \cdots, -a_{k-1}, a_{k+1}, \cdots, a_n)\,. \tag{4.5}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
S^-(-a_1,\cdots,-a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n) &= S^-(-a_1,\cdots,-a_{k-1},-a_k,a_{k+1},\cdots,a_n)\\
&= S^-(-a_1,\cdots,-a_k)+S^-(-a_k,a_{k+1})+S^-(a_{k+1},\cdots,a_n)\\
&= S^-(-a_1,\cdots,-a_k)+S^-(-a_k,a_{k+1})+S^-(a_{k+1},\cdots,a_n) \qquad (4.6)\\
&= S^-(a_1,\cdots,a_k)+S^-(a_k,a_{k+1})-1+S^-(a_{k+1},\cdots,a_n)\\
&= S^-(a_1,\cdots,a_n)-1\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (4.4), (4.5) e (4.6) concluímos que

$$
\begin{aligned}
S^-(a_1,a_2,\cdots,a_n)-Z &= S^-(a_1,a_2,\cdots,a_n)-1-(Z-1)\\
&\geq S^-(-a_1,\cdots,-a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n)-Z^* \geq 0\,.
\end{aligned}
$$

□

## 4.3 Critério de Schoenberg

Uma caracterização fundamental de sequência de polinômios que satisfaz à Regra de Sinais de Descartes Generalizada é devida a Schoenberg [6]:

**Teorema 4.4 (Schoenberg, 1934).** *A sequência de polinômios*

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= a_{00}\,,\\
p_1(x) &= a_{10}+a_{11}x\,,\\
p_2(x) &= a_{20}+a_{21}x+a_{22}x^2\,,\\
&\vdots\\
p_n(x) &= a_{n0}+a_{n1}x+\cdots+a_{nn}x^n\,,
\end{aligned}
$$

*onde* $a_{00}>0, a_{11}>0,\cdots,a_{nn}>0$ *, satisfaz à Regra de Sinais de Descartes Generalizada em* $(0,\infty)$ *se, e somente se, a matriz triangular*

$$
A=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & \cdots & a_{n0}\\ & a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}
$$

*é totalmente positiva (TP).*

**Demonstração.** ($\Leftarrow$) Seja

$$
p(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k.
$$

Então $b = Ac$ onde $b = (b_1, \cdots, b_n)$ e $c = (c_1, \cdots, c_n)$, isto é,

$$\begin{aligned} b_0 &= a_{00}c_0 + a_{10}c_1 + \cdots + a_{n0}c_n \\ b_1 &= a_{11}c_1 + \cdots + a_{n1}c_n \\ &\vdots \\ b_n &= a_{nn}c_n \,. \end{aligned}$$

Pela Regra de Sinais de Descartes

$$Z(p(x)\,;\,(0,\infty)) \leq S^-(b)\,. \tag{4.7}$$

Por outro lado, pela hipótese a matriz $A$ é totalmente positiva. Daí, pelo Teorema de Motzkin 4.2, $A$ é "variation diminishing", e portanto

$$S^-(b) \leq S^-(c)\,. \tag{4.8}$$

Assim, de (4.7) e (4.8) segue que

$$Z(p(x)\,;\,(0,\infty)) \leq S^-(c)\,,$$

ou seja, a sequência $p_0(x), \cdots, p_n(x)$ satisfaz à Regra de Sinais de Descartes Generalizada em $(0,\infty)$.

$(\Rightarrow)$ Primeiro mostraremos que para todo fixo $x$ em $(0,\infty)$, a matriz

$$W(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) & p_1(x) & \cdots & p_n(x) \\ 0 & p_1'(x) & \cdots & p_n'(x) \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & p_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

é totalmente positiva. Equivalentemente,

$$W(x) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} + a_{11}x & \cdots & a_{n0} + a_{n1}x + \cdots + a_{nn}x^n \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{n1} + \cdots + na_{nn}x^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & n!a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Desde que $p_0(x), \cdots, p_n(x)$ satisfaz à Regra de Sinais de Descartes Generalizada em $(0,\infty)$, pelo Teorema 4.3 de Pólya e Szegő, para qualquer $0 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_k \leq n$ o Wronskiano $W(p_{\nu_1}, \cdots, p_{\nu_k}; x)$ é diferente de zero em $(0,\infty)$ e quaisquer dois Wronskianos com mesmo número $k$, $1 \leq k \leq n$, de colunas possuem mesmo sinal, isto é, *sinal* $(W(p_{\nu_1}, \cdots, p_{\nu_k}\,;\,x)) =$ *sinal* $(W(p_0, \cdots, p_k; x))$. Mas, quando $x \in (0,\infty)$,

$$W(p_0, \cdots, p_k\,;\,x) = 1!\,2!\,\cdots\,k!\,a_{00}\,a_{11}\cdots a_{kk} > 0$$

para $k = 1, \cdots, n$. Daí, pelo Teorema de Pólya e Szegő segue que

$$W(p_{\nu_1}, \cdots, p_{\nu_k}\,;\, x) > 0$$

para $0 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_k \leq n$. Assim, este fato e o Lema de Fekete implicam que a matriz $W$ é totalmente positiva para $x > 0$. Portanto, fazendo $x$ tender a zero em (4.9), concluímos que $W(0) \geq 0$, isto é, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \\ 0 & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & 0 & 2!a_{22} & \cdots & 2!a_{n2} \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n!a_{nn} \end{pmatrix}$$

é totalmente positiva. Dividindo a $k$-ésima linha desta matriz por $(k-1)!$, $k = 1, \cdots, n+1$, obtemos o resultado desejado.

$\square$

Com os resultados deste capítulo seremos capazes de desenvolver a prova do teorema do próximo capítulo sob a visão de Schoenberg.

Capítulo 5

# Sequências de Polinômios que Satisfazem a RSD

A generalização da regra de Descartes que dá nome ao capítulo, foi usada pelo matemático búlgaro Obrechkoff em 1918 [5], antes mesmo de concluir sua primeira graduação na Sofia University em 1920, para desenvolver o teorema que é batizado com seu nome. Com uma carreira acadêmica invejável, Obrechkoff publicou mais de 240 artigos científicos, contemplando resultados em Análise Matemática, Álgebra, dentre outras, na universidade onde se graduou. Lá, cresceu até o mais alto posto, Chairman do departamento de Álgebra, e como pesquisador lá permaneceu até seu óbito em 1963.

Para checar a importância do resultado, inicialmente apesentamos alguns exemplos de sequências de funções que satisfazem à Regra de Sinais de Descartes Generalizada.

## 5.1 Alguns Exemplos de Sequências que Satisfazem a RSDG

Primeiro, vale observar que a Regra de Sinais de Descartes (Teorema 2.5) segue como corolário do Teorema 4.3 de Pólya e Szegő.

**Exemplo 5.1.** *A sequência de monômios* $1, x, x^2, \cdots, x^n$ *satisfaz à Regra de Sinais de Descartes Generalizada no intervalo* $(0, \infty)$.

**Demonstração.** Isto segue do fato de que o Wronskiano $W(1, x, x^2, \cdots, x^n; x)$ satisfaz as condições $(i)$ e $(ii)$ do Teorema de Pólya e Szegő no intervalo $(0, +\infty)$.

□

Um outro resultado interessante de sequência de polinômios que satisfaz a Regra de Sinais de Descartes Generalizada, segue como consequência do Teorema 4.4. O resultado diz respeito às primitivas de polinômios que obedecem à RSDG.

**Exemplo 5.2.** *Se a sequência de polinômios*

$$\begin{aligned} p_0(x) &= a_{00}\,, \\ p_1(x) &= a_{10} + a_{11}x\,, \\ p_2(x) &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2\,, \\ &\vdots \\ p_n(x) &= a_{n0} + a_{n1}x + \cdots + a_{nn}x^n\,, \end{aligned}$$

*com* $a_{00} > 0,\ a_{11} > 0,\ \cdots,\ a_{nn} > 0$, *obedece a RSDG em* $(0, +\infty)$ *então a sequência* $\{P_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, *formada por* $P_0(x) = c_0$ *e integrais* $P_k(x)$,

$$\begin{aligned} P_0(x) &= c_0\,, \\ P_1(x) &= \int_0^x p_0(t)dt \;=\; a_{00}x\,, \\ P_2(x) &= \int_0^x p_1(t)dt \;=\; a_{10}x + \frac{a_{11}}{2}x^2\,, \\ &\vdots \\ P_{n+1}(x) &= \int_0^x p_n(t)dt \;=\; a_{n0}x + \frac{a_{n1}}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{nn}}{n+1}x^{n+1}\,, \end{aligned}$$

*também obedece a Regra de Descartes em* $(0, \infty)$ *se* $c_0 > 0$.

**Demonstração.** Se $c_0 > 0$ então a matriz

$$\begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \\ & & a_{11}/2 & a_{21}/2 & \cdots & a_{n1}/2 \\ & & & a_{22}/3 & \cdots & a_{n2}/3 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{nn}/(n+1) \end{pmatrix}$$

é totalmente positiva se

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{n0} \\ & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ & & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

também é. Esta última é a transposta das matrizes $A$ do mesmo modo do Teorema 4.4, associado às sequências $P_0(x), \cdots, P_{n+1}(x)$ e $p_0(x), \cdots, p_n(x)$, respectivamente.

□

Apresentaremos agora um importante resultado de 1918 que é devido a Obrechkoff [5, 32, 33]. Ele afirma que a sequência de polinômios ortogonais $P_0, \cdots, P_n$, de modo que os coeficientes dos termos de maior grau tenham mesmos sinais, satisfaz à Regra de Sinais de Descartes Generalizada para $x > \zeta_n$, onde $\zeta_n$ é o maior zero de $P_n(x)$.

## 5.2 Teorema de Obrechkoff

**Teorema 5.1** (Obrechkoff). *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios definida pela relação de recorrência*

$$\begin{gathered} xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)\,, \quad n \geq 1\,, \\ P_{-1}(x) := 0\,,\ P_0(x) := 1\,, \end{gathered} \tag{5.1}$$

*onde $\alpha_k$, $\beta_k$ e $\gamma_k$ são reais e, além disso, $\alpha_k, \gamma_k > 0$. Se $\zeta_{n,n}$ denota o maior zero de $P_n(x)$, então a sequência de polinômios $P_0(x), \cdots, P_n(x)$ satisfaz à Regra de Sinais de Descartes em $(\zeta_{n,n}, \infty)$. Em outras palavras, para qualquer sequência $a_0, \cdots, a_n$ não identicamente nula,*

$$Z(a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \cdots + a_nP_n(x)\,;\,(\zeta_{n,n}, \infty)) \leq S^-(a_0, \cdots, a_n)\,.$$

Antes de provar este resultado, precisamos dos seguintes três lemas técnicos:

**Lema 5.1.** *Seja $\{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ com $b_1 \neq 0 \neq b_n$, uma sequência de números reais tal que $S^-(b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n) = v$, e seja $c_0, c_1, \cdots, c_n$ a sequência dada por*

$$\begin{gathered} b_{-1} := b_{n+1} := 0,\ c_k = \alpha_k\, b_{k-1} + \beta_{k+1}\, b_k + \gamma_{k+2}\, b_{k+1}\,, \\ k = 0,\, 1,\, \cdots,\, n\,, \end{gathered} \tag{5.2}$$

*onde $\alpha_k$, $\gamma_k \geq 0$ para cada $k$. Suponha que os determinantes*

$$\Delta_{ji} = \begin{vmatrix} \beta_{j+1} & \gamma_{j+2} & & & \\ \alpha_{j+1} & \beta_{j+2} & \gamma_{j+3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{j+i-1} & \beta_{j+i} & \gamma_{j+i+1} \\ & & & \alpha_{j+i} & \beta_{j+i+1} \end{vmatrix}$$

*satisfaçam $(-1)^{i+1}\Delta_{ji} > 0$, $i = 0, 1, \cdots, s$, onde $s = \min\{n-j, n-v-1\}$, e $1 \leq j \leq n$. Então, a sequência $\{b_0, c_0, c_1, \cdots, c_n, b_n\}$ possui pelo menos $v+2$ mudanças de sinal (ou um número par a mais), isto é,*

$$S(b_0, c_0, c_1, \cdots, c_n, b_n) \geq S(b_0, b_1, \cdots, b_n) + 2 + 2m$$

*com $m \in \mathbb{N} \cup \{\ 0\ \}$.*

**Demonstração.** Suponha, sem perda de generalidade, que a sequência $\{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ é da forma

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{m-1},\ b_m,\ \cdots,\ b_{j-1},\ b_j,\ \cdots,\ b_{r-1},\ b_r\ \cdots,\ b_l,\ \cdots,\ b_n\,,$$

onde

$$\begin{aligned} &b_0 > 0,\, b_1 \geq 0,\, \cdots,\, b_{m-1} > 0,\, b_m \leq 0,\, \cdots,\, b_{j-1} < 0\,, \\ &b_j \geq 0,\, \cdots,\, b_{r-1} > 0,\, b_r \leq 0,\, \cdots,\, b_l > 0,\, \cdots,\, b_n > 0\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Provaremos que pelo menos um do números

$$c_j,\ c_{j+1},\ \cdots,\ c_{r-1} \tag{5.4}$$

é negativo.

Sejam $j$ fixo e $\delta_i := \Delta_{ji}$. Vamos supor, por absurdo, que todos os números $c_j,\ c_{j+1},\ \cdots,$ $c_{r-1}$ são não-negativos. Logo, de (5.2) e (5.3), e de $c_j,\ c_{j+1} \geq 0$, segue que

$$0 \leq c_j - \alpha_j b_{j-1} = \beta_{j+1} b_j + \gamma_{j+2} b_{j+1} \Rightarrow \gamma_{j+2} b_{j+1} \geq -\beta_{j+1} b_j \tag{5.5}$$

e

$$0 \leq c_{j+1} = \alpha_{j+1} b_j + \beta_{j+2} b_{j+1} + \gamma_{j+3} b_{j+2} \Rightarrow \alpha_{j+1} b_j + \gamma_{j+3} b_{j+2} \geq -\beta_{j+2} b_{j+1}\,. \tag{5.6}$$

Multiplicando (5.5) por $\alpha_{j+1} \geq 0$ e (5.6) por $-\beta_{j+1} = -\Delta_{j0} \geq 0$ e, em seguida, somando-as, obtemos

$$-b_{j+2}\beta_{j+1}\gamma_{j+3} \geq (\beta_{j+1}\beta_{j+2} - \alpha_{j+1}\gamma_{j+2}) b_{j+1}\,,$$

ou seja,

$$-\,\delta_0 b_{j+2}\gamma_{j+3} \geq \delta_1 b_{j+1}\,. \tag{5.7}$$

Provemos então, por indução sobre $q$, que a desigualdade

$$(-1)^{i-2}\delta_{i-1}\gamma_{j+i+2} b_{j+i+1} \geq (-1)^{i-1}\delta_i b_{j+i} \tag{5.8}$$

é válida para $j + i \leq r - 1$.

Observe que (5.8) é, de fato, a desigualdade (5.7) para $i = 1$.

Como hipótese de indução, consideremos que (5.8) se verifica para um valor de $i$ tal que $j + i < r - 1$. Desde que $c_{j+i+1} \geq 0$ (por hipótese), temos de (5.12), que

$$\alpha_{j+i+1} b_{j+i} + \gamma_{j+i+3} b_{j+i+2} \geq -\beta_{j+i+2} b_{j+i+1}\,. \tag{5.9}$$

Multiplicando (5.8) por $a_{j+i+1}$ e (5.9) por $(-1)^{i-1}\delta_i$ e, somando-as, encontramos

$$(-1)^{i-1}\delta_i\gamma_{j+i+3} b_{j+i+2} \geq (-1)^i(\beta_{j+i+2}\delta_i - \alpha_{j+i+1}\gamma_{j+i+2}\delta_{i-1}) b_{j+i+1}\,. \tag{5.10}$$

Desenvolvendo $\delta_{i+1}$ com respeito aos elementos da última coluna, obtemos que

$$\delta_{i+1} = \beta_{j+i+2}\delta_i - \alpha_{j+i+1}\gamma_{j+i+2}\delta_{i-1}\,. \tag{5.11}$$

Substituindo (5.11) em (5.10), chegamos a

$$(-1)^{i-1}\delta_i\gamma_{j+i+3} b_{j+i+2} \geq (-1)^i \delta_{i+1} b_{j+i+1}\,.$$

que é a desigualdade (5.8) com $i$ substituído por $i + 1$, como queríamos demonstrar.

Agora, desde que $r - j \leq n - v$ (pelas condições impostas pela própria afirmação) então, por hipótese, $(-1)^{i-1}\delta_i > 0$, para $i = 0,\, 1,\, \cdots,\, r - j - 1$. Logo, fazendo $j + i = r - 1$ em (5.8), obtemos

$$(-1)^{r-j-2}\delta_{r-j-1} b_{r-1} \leq (-1)^{r-j-3}\delta_{r-j-2}\gamma_{r+1} b_r \leq 0$$

o que é absurdo, pois $(-1)^{r-j-2}\delta_{r-j-1}b_{r-1} > 0$. Então, pelo menos um elemento da sequência $\{c_j,\, c_{j+1},\, \cdots,\, c_{r-1}\}$ é negativo.

De maneira análoga, podemos provar, por exemplo, que a sequência $\{c_m,\, c_{m+1},\, \cdots,\, c_{p-1}\}$ correspondente à sequência $\{b_m,\, b_{m+1},\, \cdots,\, b_{j-1}\}$, onde $b_m \leq 0,\, \cdots,\, b_{j-1} < 0$, tem pelo menos um elemento que é positivo.

Portanto, concluímos que, entre os números $c_0,\, \cdots,\, c_{m-1}$ existe pelo menos um número negativo $c'_0$, entre $c_m,\, \cdots,\, c_{j-1}$ existe pelo menos um número positivo $c'_1$, entre $c_j,\, \cdots,\, c_{r-1}$ existe pelo menos um número negativo $c'_2$, e assim por diante, até que finalmente, entre $c_l,\, \cdots,\, c_n$ existe pelo menos um número negativo $c'_v$.

Assim,

$$S^-(b_0,\, c'_0,\, \cdots,\, c'_v,\, b_n) = v + 2$$

e, conseqüentemente,

$$S^-(b_0,\, c_0,\, \cdots,\, c_n,\, b_n) \geq v + 2.$$

□

**Lema 5.2.** *Seja $\{b_0, b_1, \cdots, b_n,\; b_0 \neq 0 \neq\; b_n\}$, $b_0 \neq 0 \neq b_n$, uma sequência de números reais com $v$ mudanças de sinal, e seja $c_0,\, c_1,\, \cdots,\, c_n$ a sequência dada por*

$$\begin{gathered} b_{-1} := b_{n+1} := 0,\;\; c_k = \alpha_k\, b_{k-1} + \beta_{k+1}\, b_k + \gamma_{k+2}\, b_{k+1}, \\ k = 0, 1, \cdots, n, \end{gathered} \tag{5.12}$$

*onde $\alpha_k,\, \gamma_k \geq 0$ para cada $k$. Suponha que os determinantes*

$$D_k = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_2 & & & \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{k-2} & \beta_{k-1} & \gamma_k \\ & & & \alpha_{k-1} & \beta_k \end{vmatrix}$$

*satisfaçam $(-1)^k D_k > 0$, $k = 1, \cdots, n+1$. Então, a sequência $c_0,\, c_1,\, \cdots,\, c_n,\, b_n$ tem pelo menos $v+1$ mudanças de sinal, isto é,*

$$S^-(c_0, c_1, \cdots, c_n, b_n) \geq S^-(b_0, b_1, \cdots, b_n) + 1.$$

**Demonstração.** A afirmação deste lema segue do lema anterior se provarmos que os determinantes

$$\delta_{jk} = \begin{vmatrix} \beta_j & \gamma_{j+1} & & & \\ \alpha_j & \beta_{j+1} & \gamma_{j+2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{k-2} & \beta_{k-1} & \gamma_k \\ & & & \alpha_{k-1} & \beta_k \end{vmatrix}$$

satisfazem $(-1)^{k-j+1}\delta_{jk} > 0$ para $j = 1, \cdots, k$, $k = 1, \cdots, n+1$. A demonstração é feita por indução com respeito à dimensão de $\delta_{jk}$.

Desenvolvendo $D_k$ pela última coluna, obtemos

$$D_k = \beta_k D_{k-1} - \alpha_{k-1}\gamma_k D_{k-2}$$

ou, equivalentemente,

$$(-\beta_k)(-1)^{k-1}D_{k-1} = \alpha_{k-1}\gamma_k(-1)^{k-2}D_{k-2} + (-1)^k D_k.$$

Então, $-\beta_k > 0$, ou seja, $-\delta_{kk} = -b_k > 0$. Portanto, quando $\delta_{jk}$ possui dimensão 1, temos $(-1)^{k-j+1}\delta_{jk} > 0$.

Desenvolvendo $D_k$ pela regra de Laplace com respeito às primeiras $j-1$ colunas, obtemos

$$D_k = D_{j-1}\delta_{jk} - D_{j-2}\alpha_{j-1}\gamma_j\delta_{j+1,k}$$

ou

$$\begin{aligned}(-1)^{j-1}&D_{j-1}(-1)^{k-j+1}\delta_{jk} \\ &= (-1)^k D_k + (-1)^{j-2}D_{j-2}\alpha_{j-1}\gamma_j(-1)^{k-(j+1)+1}\delta_{j+1,k}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Como hipótese de indução, suponhamos que $(-1)^{k-(j+1)+1}\delta_{j+1,k} > 0$. Então, de (5.13), segue que $(-1)^{k-j+1}\delta_{jk} > 0$ vale para $j = 1, \cdots, k,\ \ k = 1, \cdots, n+1$.

Agora, aplicando o lema anterior, concluímos que a sequência $\{b_0, c_0, c_1, \cdots, c_n, b_n\}$ tem pelo menos $v+2$ mudanças de sinal. Conseqüentemente, $S^-(b_0, c_0, c_1, \cdots, c_n, b_n) \geq v+1$.

□

**Lema 5.3.** *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios definida por $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ e pela fórmula de recorrência*

$$xP_{n-1}(x) = \alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \gamma_n P_{n-2}(x), \tag{5.14}$$

*onde $\alpha_n$, $\beta_n$ e $\gamma_n$ são reais e, além disso, $\alpha_n, \gamma_n > 0$, e seja $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x)$ um polinômio de grau $n$ com coeficientes reais. Se $\zeta$ é um número real tal que $\zeta > \zeta_{n+1,n+1}$, onde $\zeta_{n+1,n+1}$ é a maior raiz de $P_{n+1}(x)$, e*

$$\varphi(x)(x-\zeta) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k P_k(x) \tag{5.15}$$

*então, $S^-(c_0, c_1, \cdots, c_{n+1}) \geq 1 + S^-(b_0, b_1, \cdots, b_n)$.*

**Demonstração.** Comparando os coeficientes de (5.15) e utilizando a fórmula de recorrência (5.14), obtemos

$$c_k = b_{k-1}\alpha_k + b_k(\beta_{k+1} - \zeta) + b_{k+1}\gamma_{k+2}\,, \quad k = 0, 1, \cdots, n+1\,,$$
$$b_{-1} := b_{n+1} := b_{n+2} := 0\,.$$

Seja

$$\Delta_k := \begin{vmatrix} \beta_1 - \zeta & \gamma_2 & & & \\ \alpha_1 & \beta_2 - \zeta & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{k-2} & \beta_{k-1} - \zeta & \gamma_k \\ & & & \alpha_{k-1} & \beta_k - \zeta \end{vmatrix}, \quad k = 1, \cdots, n+1\,.$$

Desenvolvendo $\Delta_k$ pela última coluna, obtemos

$$\Delta_k = (\beta_k - \zeta)\Delta_{k-1} - \alpha_{k-1}\gamma_k\Delta_{k-2}. \tag{5.16}$$

Mostremos, por indução, que

$$\Delta_k = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k(-1)^k p_k(\zeta). \tag{5.17}$$

Observe que, para $k = 1$, temos de (5.17) e (5.14), que $\Delta_1 = \beta_1 - \zeta = -\alpha_1 p_1(\zeta)$. Agora, como hipótese de indução, suponhamos que $\Delta_j = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_j(-1)^j p_j(\zeta)$, $j = 1, \cdots, k-1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_k\,(-1)^k\,p_k(\zeta) &= (-1)^{k-1}\,\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_{k-1}\,[(\beta_k-\zeta)\,p_{k-1}(\zeta) + \gamma_k\,p_{k-2}(\zeta)] \\
&= \alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_{k-1}\,(-1)^{k-1}\,p_{k-1}(\zeta)\,(\beta_k-\zeta) \\
&\quad - \alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_{k-2}\,(-1)^{k-2}\,p_{k-2}(\zeta)\,\gamma_k\,\alpha_{k-1} \\
&= (\beta_k-\zeta)\,\Delta_{k-1} - \alpha_{k-1}\,\gamma_k\,\Delta_{k-2} = \Delta_k\,,
\end{aligned}$$

o que demonstra (5.17).

Desde que $\zeta > \zeta_{n+1,n+1}$, isto é, $\zeta$ é maior que todos os zeros de todos os polinômios $p_k(x)$, $1 \leq k \leq n+1$, de (5.17) concluímos que $(-1)^k\Delta_k = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k p_k(\zeta) > 0$ para $1 \leq k \leq n+1$.

Agora, do Lema 5.2 segue

$$S^-(c_0, c_1, \cdots, c_{n+1}) \geq 1 + S^-(b_0, b_1, \cdots, b_n)\,,$$

observando que $c_{n+1} = b_n\alpha_{n+1}$ e $\alpha_{n+1} > 0$.

$\square$

**Demonstração do Teorema de Obrechkoff.** Sejam $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{Z'}$ os zeros reais de $F$ que são maiores que $\zeta_{nn}$. Escrevendo

$$\frac{F(x)}{(x-\zeta_1)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)} P_k(x)$$

e usando o fato que $\zeta_1 > \zeta_{nn}$, pelo Lema 5.3, concluímos que

$$S^-(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \cdots, a_{n-1}^{(1)}) \leq S^-(a_0, a_1, \cdots, a_n) - 1\,.$$

De forma análoga, fazendo

$$\frac{F(x)}{(x-\zeta_1)(x-\zeta_2)} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k^{(2)} P_k(x)$$

e, observando que $\zeta_2 > \zeta_{n-1,n-1}$, obtemos pelo mesmo lema que

$$\begin{aligned}
S^-(a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \cdots, a_{n-2}^{(2)}) &\leq S^-(a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \cdots, a_{n-1}^{(1)}) - 1 \\
&\leq S^-(a_0, a_1, \cdots, a_n) - 2\,.
\end{aligned}$$

Continuando este processo, chegamos à seguinte desigualdade

$$S^-(a_0^{(Z')}, a_1^{(Z')}, \cdots, a_{n-Z'}^{(Z')}) \leq S^-(a_0, a_1, \cdots, a_n) - Z',$$

ou seja,

$$S^{-}(a_0, a_1, \cdots, a_n) \geq S^{-}(a_0^{(Z')}, a_1^{(Z')}, \cdots, a_{n-Z'}^{(Z')}) + Z' \geq Z',$$

como queríamos demonstrar.

□

Este resultado também foi demonstrado por Schoenberg [6] em 1934. Ele usou um argumento diferente de Obrechkoff para a demonstração, a caracterização de sequências de funções que satisfaz à Regra de Sinais de Descartes Generalizada de Pólya e Szegő, Teorema 4.3. Também, ele já clamou que os polinômios de seu teorema eram ortogonais e com isso, todas as boas propriedades que estes possuem, dado que as afirmações de Obrechkoff são equivalentes à sequência de polinômios ser uma SPOPD segundo o Teorema 3.10 de Favard (o qual é posterior à descoberta de Obrechkoff mas não à prova de Schoenberg).

## 5.3 Teorema de Schoenberg

Agora, apresentaremos a demonstração de Schoenberg para o Teorema de Obrechkoff. A idéia é usar o Lema de Fekete para provar as propriedades (i) e (ii) do Teorema de Pólya e Szegő.

Antes disso, precisamos dos seguintes lemas:

**Lema 5.4.** *Seja $\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais em um intervalo $(a,b)$, com relação à função peso $w(x)$. Então, a função*

$$F(x) = c_r P_r(x) + c_{r+1} P_{r+1}(x) + \cdots + c_{r+s} P_{r+s}(x)$$

*tem pelo menos $r$ zeros em $(a,b)$.*

**Demonstração.** De fato, suponha por absurdo, que $F$ tem $m < r$ zeros em $(a,b)$, denotados por $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_m$. Daí, podemos escrever

$$F(x) = \psi(x) \prod_{k=1}^{m} (x - \zeta_k), \tag{5.18}$$

onde $\psi(x)$ não muda de sinal em $(a,b)$. Sem perda de generalidade, assumimos que $\psi(x) > 0$. Assim, da relação de ortogonalidade, segue que

$$\int_a^b F(x) g(x) w(x) dx = 0,$$

para todo polinômio $g(x)$ de grau até $r-1$. Em particular, para o polinômio $\prod_{k=1}^{m}(x-\zeta_k)$ temos

$$0 = \int_a^b F(x) \prod_{k=1}^{m} (x - \zeta_k) w(x) dx = \int_a^b \psi(x) \prod_{k=1}^{m} (x - \zeta_k)^2 w(x) dx > 0,$$

o que é absurdo. Portanto, $F$ tem pelo menos $r$ zeros no intervalo $(a,b)$.

□

**Lema 5.5.** *A matriz*

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} & \binom{n}{1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} & \binom{n}{2} & \binom{n-1}{1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \cdots & \binom{n-1}{3} & \binom{n}{3} & \binom{n}{3} & \binom{n-1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \binom{n-1}{n-2} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \binom{n-1}{n-1} & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*é totalmente positiva.*

**Demonstração.** Sem abuso de notação, considerando que $\binom{0}{0} = 1$ e $\binom{i}{j} = 0$ para $0 \leq i < j$, a matriz $M_n$ pode ser escrita como

$$M_n = \left( \binom{k}{i} \middle| \binom{n-l}{n-i} \right), \quad i, k, l = 0, 1, \cdots, n,$$

onde $i$ denota a $(i+1)$-ésima linha, $k$ e $l$ denotam a $(k+1)$-ésima e $(n+1+l+1)$-ésima colunas, correspondentes. Provaremos, por indução, que $M_n$ é totalmente positiva. Para $n = 0$, $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ é obvio. Agora, consideremos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \binom{k}{i} & \binom{n-l}{n-i} \end{pmatrix}.$$

Assim, adicionando a primeira coluna à segunda, depois adicionando a nova segunda coluna à terceira, etc. e, finalmente, a nova $(n+1)$-ésima coluna a $(n+2)$-ésima coluna e usando a propriedade de adição de binomiais, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \binom{k+1}{i+1} & \binom{n-l}{n-i} \end{pmatrix}.$$

Além disso, duplicando a $(n+2)$-ésima coluna, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \binom{k+1}{i+1} & \binom{n+1}{i+1} & \binom{n-l}{n-i} \end{pmatrix} = \left( \binom{k'}{i'} \middle| \binom{n+1-l'}{n+1-i'} \right) = M_{n+1},$$

para $i', k', l' = 0, 1, \cdots, n+1$. Desde que essas operações elementares preservam a positividade da matriz, segue, por indução, que cada matriz $M_n$ é totalmente positiva.

□

Schoenberg [6] mostrou o seguinte resultado:

**Teorema 5.2** (Schoenber,1934). *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Assumimos, além disso, que o coeficiente do termo de maior grau de cada um* *desses polinômios é positivo. Então, para qualquer sequência* $\nu_1, \cdots, \nu_k$ *de inteiros com* $0 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_k$ *segue que*

$$W(P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \cdots, P_{\nu_k}; x) > 0, \quad x \geq \zeta_{\nu_k},$$

*onde* $\zeta_{\nu_k}$ *é o maior zero de* $P_{\nu_k}(x)$.

**Demonstração.** A idéia aqui é mostrar que a sequência $\{P_0(x), \cdots, P_n(x)\}$ de polinômios ortogonais cumpre às condições $(i)$ e $(ii)$ do Teorema 4.3 de Pólya e Szegő para $x > \zeta_{nn}$, i.e., mostraremos que para qualquer subsequência de inteiros $i_1, i_2, \cdots, i_l$, com $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n$, o Wronskiano

$$W(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_l}; x) > 0$$

para todo $x > \zeta_{nn}$.

Sem perda de generalidade, consideremos os polinômios como sendo mônicos. Definimos então

$$Q_{rs}(x) := \begin{vmatrix} P_r(x) & P_{r+1}(x) & \cdots & P_{r+s}(x) \\ P'_r(x) & P'_{r+1}(x) & \cdots & P'_{r+s}(x) \\ & & \vdots & \\ P_r^{(s)}(x) & P_{r+1}^{(s)}(x) & \cdots & P_{r+s}^{(s)}(x) \end{vmatrix}, \quad 0 \leq r < s + r \leq n. \tag{5.19}$$

Mostremos que $Q_{rs}(x) > 0$ para todo $x > \zeta_{nn}$ e $0 \leq r < s + r \leq n$.

Para $r = 0$, temos

$$Q_{0s}(x) = \begin{vmatrix} P_0(x) & P_1(x) & \cdots & P_s(x) \\ 0 & P'_1(x) & \cdots & P'_s(x) \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & P_s^{(s)}(x) \end{vmatrix} = P_0(x) P'_1(x) \cdots P_s^{(s)}(x).$$

Obviamente $Q_{0s}(x) > 0$ para todo $x$ (em particular para $x > \zeta_{nn}$) e $0 < s \leq n$.

Seja $r > 0$. Primeiramente mostraremos que $Q_{rs}(x)$ é não-nulo em $(\zeta_{nn}, \infty)$. Para este fim, suponha por absurdo que existe $\zeta > \zeta_{nn}$ tal que

$$Q_{rs}(\zeta) = \begin{vmatrix} P_r(\zeta) & P_{r+1}(\zeta) & \cdots & P_{r+s}(\zeta) \\ P'_r(\zeta) & P'_{r+1}(\zeta) & \cdots & P'_{r+s}(\zeta) \\ & & \vdots & \\ P_r^{(s)}(\zeta) & P_{r+1}^{(s)}(\zeta) & \cdots & P_{r+s}^{(s)}(\zeta) \end{vmatrix} = 0.$$

ou seja, as colunas desta matriz formam um conjunto linearmente dependente, e portanto, existem constantes $c_r$, $c_{r+1}$, $\cdots$, $c_{r+s}$ não todas nulas tais que

$$c_r P_r^{(j)}(\zeta) + c_{r+1} P_{r+1}^{(j)}(\zeta) + \cdots + c_{r+s} P_{r+s}^{(j)}(\zeta) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, s.$$

Em outras palavras, o polinômio

$$F(x) = c_r P_r(x) + c_{r+1} P_{r+1}(x) + \cdots + c_{r+s} P_{r+s}(x)$$

tem $\zeta$ como zero de multiplicidade pelo menos $s+1$. Por outro lado, pelo Lema 5.4, $F(x)$ tem pelo menos $r$ zeros em $(a,b)$. Logo, $F(x)$ tem pelo menos $r+s+1$ zeros, o que é absurdo, pois o grau deste polinômio é no máximo $r+s$. Portanto, concluímos que $Q_{rs}(x) \neq 0$ para todo $x > \zeta_{nn}$. Finalmente, mostremos que $Q_{rs}(x) > 0$ em $(\zeta_{nn}, \infty)$. Observe que podemos escrever (5.19) como

$$Q_{rs}(x) = \begin{vmatrix} x^r + q_{r-1}(x) & x^{r+1} + q_r(x) & \cdots & x^{r+s} + q_{r+s-1}(x) \\ \binom{r}{1} x^{r-1} + q'_{r-1}(x) & \binom{r+1}{1} x^r + q'_r(x) & \cdots & \binom{r+s}{1} x^{r+s-1} + q'_{r+s-1}(x) \\ 2!\,\binom{r}{2} x^{r-2} + q''_{r-1}(x) & 2!\,\binom{r+1}{2} x^{r-1} + q''_r(x) & \cdots & 2!\,\binom{r+s}{2} x^{r+s-2} + q''_{r+s-1}(x) \\ & & \vdots & \\ s!\,\binom{r}{s} x^{r-s} + q^{(s)}_{r-1}(x) & s!\,\binom{r+1}{s} x^{r-s+1} + q^{(s)}_r(x) & \cdots & s!\,\binom{r+s}{s} x^r + q^{(s)}_{r+s-1}(x) \end{vmatrix}.$$

onde $q_k(x)$, $r-1 \le k \le r+s-1$, é um polinômio de grau no máximo $k$, e convencionamos $\binom{0}{0} := 0$ e $\binom{\mu}{\nu} := 0$ quando $0 < \mu < \nu$. Colocando em evidência na $i$-ésima linha $(i-1)!\, x^{r-i+1}$, $1 \le i \le s+1$, e depois na $j$-ésima coluna $x^{j-1}$, $1 \le j \le s+1$, obtemos

$$Q_{rs}(x) = \\ = 2!\,3!\,\cdots\,s!\,x^{r(s+1)} \begin{vmatrix} 1 + \mathcal{O}(1/x) & 1 + \mathcal{O}(1/x) & \cdots & 1 + \mathcal{O}(1/x) \\ \binom{r}{1} + \mathcal{O}(1/x) & \binom{r+1}{1} + \mathcal{O}(1/x) & \cdots & \binom{r+s}{1} + \mathcal{O}(1/x) \\ \binom{r}{2} + \mathcal{O}(1/x) & \binom{r+1}{2} + \mathcal{O}(1/x) & \cdots & \binom{r+s}{2} + \mathcal{O}(1/x) \\ & & \vdots & \\ \binom{r}{s} + \mathcal{O}(1/x) & \binom{r+1}{s} + \mathcal{O}(1/x) & \cdots & \binom{r+s}{s} + \mathcal{O}(1/x) \end{vmatrix}.$$

Portanto, segue que

$$sinal\left(\lim_{x\to\infty} Q_{rs}(x)\right) = sinal\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{r}{1} & \binom{r+1}{1} & \cdots & \binom{r+s}{1} \\ \binom{r}{2} & \binom{r+1}{2} & \cdots & \binom{r+s}{2} \\ & & \vdots & \\ \binom{r}{s} & \binom{r+1}{s} & \cdots & \binom{r+s}{s} \end{vmatrix}\right).$$

Logo, pelo Lema 5.5

$$sinal\left(\lim_{x\to\infty} Q_{rs}(x)\right) = +1\,.$$

Como $Q_{rs}(x)$ não muda de sinal em $(\zeta_{nn}, \infty)$, concluímos que $Q_{rs}(x) > 0$ para todo $x > \zeta_{nn}$.

Agora estamos em condições de provar que

$$W(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_l}\,;\, x) > 0\,,$$

para todo $x > \zeta_{nn}$ e $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n$. A demonstração segue por indução sobre $l$.

Para $l = 1$,

$$W(P_{i_1}\,;\, x) > 0$$

para todo $x > \zeta_{nn}$ e $0 \leq i_1 \leq n$. Suponhamos então que

$$W(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_s}\,;\, x) > 0$$

para todo $x > \zeta_{nn}$ e $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n$. Por (5.19), temos que

$$W(P_r, P_{r+1}, \cdots, P_{r+s}\,;\, x) > 0$$

para todo $x > \zeta_{nn}$ e $0 \leq r < r + s \leq n$. Daí, pelo Lema de Fekete, segue imediatamente que

$$W(P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_{s+1}}\,;\, x) > 0$$

para todo $x > \zeta_{nn}$ e $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{s+1} \leq n$, finalizando assim a demonstração.

□

Vistas tão diferentes provas deste resultado, seguimos para apresentar uma aplicação da agora nomeada Regra de Sinais de Descartes para Polinômios Ortogonais (RSD para SPO's).

Capítulo 6

# Limites para zeros de Polinômios de Jacobi via Teorema de Obrechkoff

Os polinômios de Jacobi e Laguerre serão explorados neste capítulo sob a forma

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_2F_1\left(-n,\, n+\alpha+\beta+1;\, \alpha+1;\, \frac{1-x}{2}\right)$$

e

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_1F_1(-n;\, \alpha+1;\, x)$$

em termos de funções hipergeométricas (ver [34]),

$${}_pF_q(a_1,\cdots,a_p;\, b_1,\cdots,b_q;\, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j\cdots(a_p)_j}{(b_1)_j\cdots(b_q)_j}\frac{z^j}{j!}\,,$$

onde o símbolo de Pochhammer $(a)_j$ toma os valores $(a)_0 = 1$ e $(a)_j = a(a+1)\cdots(a+j-1)$ para $j \in \mathbb{N}$. Mais informações sobre essa abordagem em termos de funções hipergeométricas para os polinômios ortogonais clássicos pode ser encontrada em [35, pág.13].

No que se segue, denotamos por $x_{n,k}(\alpha,\beta)$ e $x_{n,k}(\alpha)$ os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ and $L_n^{(\alpha)}(x)$, respectivamente, ambos ordenados em modo decrescente. Portanto, quando $\alpha,\beta > -1$, e $\alpha > -1$, temos

$$-1 < x_{n,n}(\alpha,\beta) < x_{n,n-1}(\alpha,\beta) < \cdots < x_{n,1}(\alpha,\beta) < 1$$

e

$$0 < x_{n,n}(\alpha) < x_{n,n-1}(\alpha) < \cdots < x_{n,1}(\alpha).$$

Iremos descrever brevemente uma ideia simples motivada pela formula de convolução como vista em [36, Corolátio 3.6]

$$(x_1+x_2)^j P_j^{(a,b)}\left(\frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}\right)\frac{(-1)^j n!\, j!\, L_n^{(a+b+2j+1)}(x_1+x_2)}{(a+1)_j(n+j)!} = \sum_{\ell=0}^{n+j} Q_j(\ell;\, a,b,n+j) L_\ell^{(a)}(x_1) L_{n+j-\ell}^{(b)}(x_2)\,. \tag{6.1}$$

Se $n = 0$ então recaimos nos polinômios de Hahn $Q_j(x; \alpha, \beta, N)$, $j = 0, 1, \cdots, N$, que são definidos por (c.f. [37])

$$Q_j(x;\ \alpha,\ \beta,\ N) = {}_3F_2(-j, j+\alpha+\beta+1, -x;\ \alpha+1,\ -N;\ 1).$$

Então, pela identidade de Gauss

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

obtemos

$$\begin{aligned} Q_j(\ell; a, b, j) &= {}_3F_2(-j, j+a+b+1, -\ell; a+1, -j; 1) \\ &= {}_2F_1(j+a+b+1, -\ell; a+1; 1) \\ &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(\ell-j-b)}{\Gamma(a+1+\ell)\Gamma(-j-b)} \\ &= (-1)^{\ell}\frac{(b+1)_j}{(a+1)_j(b+1)_{j-\ell}}\,. \end{aligned}$$

Portanto, se aplicarmos (6.1) com $n = 0$, $j = n$, $\ell = k$, $x_1 = x$ e $x_2 = y$, obtemos

$$(x+y)^n P_n^{(a,b)}\left(\frac{y-x}{x+y}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(a+1)_k(b+1)_{n-k}} L_k^{(a)}(x)\ (-1)^{n-k} L_{n-k}^{(b)}(y)\,. \tag{6.2}$$

Aplicar o Teorema de Obrechkoff (Regra de Sinais de Descartes para Polinômios Ortogonais) à fórmula (6.2) para obter desigualdades para todos os zeros de $P_n^{(a,b)}(x)$ é o principal objetivo deste capítulo, que segue sob a responsabilidade de ser a aplicação explorada do Teorema 5.1. Este capítulo é baseado no artigo [8], de 2012.

## 6.1 Desigualdades entre os Zeros dos Polinômios de Jacobi e Laguerre

**Teorema 6.1.** *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $a, b > -1$ . Então as desigualdades*

$$\frac{x_{k,k}(b) - x_{n,1}(a)}{x_{k,k}(b) + x_{n,1}(a)} \leq x_{n,k}(a, b) \leq \frac{x_{n,1}(b) - x_{n-k+1,n-k+1}(a)}{x_{n,1}(b) + x_{n-k+1,n-k+1}(a)}$$

*valem para todo $k \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq n$.*

**Demonstração.** Primeiramente, devemos olhar para (6.2) considerando ambos os lados como função de $y$. Em outras palavras, (6.2) é avaliado da seguinte forma:

$$\widehat{P}_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_k(y) \tag{6.3}$$

com

$$\widehat{P}_n(y) = \frac{(x+y)^n}{(a+1)_n(b+1)_n} P_n^{(a,b)}\left(\frac{y-x}{y+x}\right),$$

$$p_k(y) = \frac{(-1)^k}{(a+1)_{n-k}(b+1)_k} L_k^{(b)}(y)\,,$$

e
$$\alpha_k = L_{n-k}^{(a)}(x)\,.$$

Agora, pelo Teorema de Obrechkoff, o número de zeros de $\widehat{P}_n(y)$ que são maiores que $x_{n,1}(b)$, não excede o número de mudanças de sinal na sequência
$$(L_0^{(a)}(x), L_1^{(a)}(x), \cdots, L_n^{(a)}(x))\,.$$

Seja agora $x = x_{k,k}(a)$, isto é, o menor zero de $L_k^{(a)}(x)$, em (6.2) ou (6.3). Devemos então contar o número de mudanças de sinal na sequência
$$\{L_j^{(a)}(x_{k,k}(a)\} = \left(L_0^{(a)}(x_{k,k}(a)), L_1^{(a)}(x_{k,k}(a)), \cdots, L_n^{(a)}(x_{k,k}(a))\right)\,.$$

Como é sabido que os polinômios $L_j^{(a)}(x)$, $j = 0, \cdots, n$, são positivos na origem e seus zeros se entrelaçam, temos
$$L_0^{(a)}(x_{k,k}(a)) > 0, L_1^{(a)}(x_{k,k}(a)) > 0, \cdots, L_{k-1}^{(a)}(x_{k,k}(a)) > 0, L_k^{(a)}(x_{k,k}(a)) = 0\,.$$
Disto segue
$$S^-(\{L_j^{(a)}(x_{k,k}(a)\}) = S^-(L_{k-1}^{(a)}(x_{k,k}(a)), L_{k+1}^{(a)}(x_{k,k}(a)), \ldots, L_n^{(a)}(x_{k,k}(a)))\,,$$
e então a sequência $\{L_j^{(a)}(x_{k,k}(a))\}$ possui no máximo $n-k$ mudanças de sinal. Observando agora a suposição de $\eta$ ser um zero de
$$\widehat{P}_n(y; x_{k,k}(a)) = \frac{(y + x_{k,k}(a))^n}{(a+1)_n(b+1)_n} P_n^{(a,b)}\left(\frac{y - x_{k,k}(a)}{y + x_{k,k}(a)}\right)\,,$$
segue que
$$\frac{\eta - x_{k,k}(a)}{\eta + x_{k,k}(a)}$$
seria um zero de $P_n^{(a,b)}(x)$. Lembrando que os zeros $x_{n,k}(a,b)$ estão dispostos em ordem decrescente e desde que $(y-x)/(y+x)$ cresce com $y$, temos que os zeros $\eta_{n,j}(a,b)$ de $\widehat{P}_n(y; x_{k,k}(a))$ estão dispostos desta mesma maneira.

Do mesmo modo que anteriormente, o teorema de Obrechkoff garante que no máximo $n-k$ dos $\eta_{n,j}(a,b)$ possam execeder $x_{n,1}(b)$.

Assim,
$$\eta_{n,n-k+1}(a,b) < x_{n,1}(b)\,. \tag{6.4}$$

Por outro lado, $\eta_{n,n-k+1}(a,b)$ é univocamente definido por
$$\frac{\eta_{n,n-k+1}(a,b) - x_{k,k}(a)}{\eta_{n,n-k+1}(a,b) + x_{k,k}(a)} = x_{n,n-k+1}(a,b)\,,$$
e isto é equivalente a
$$\eta_{n,n-k+1}(a,b) = x_{k,k}(a)\frac{1 + x_{n,n-k+1}(a,b)}{1 - x_{n,n-k+1}(a,b)}\,.$$
Ao substituir esta expressão em (6.4), obtemos a desigualdade
$$x_{n,n-k+1}(a,b) \leq \frac{x_{n,1}(b) - x_{k,k}(a)}{x_{n,1}(b) + x_{k,k}(a)}\,, \tag{6.5}$$

a qual é equivalente a

$$x_{n,k}(a,b) \leq \frac{x_{n,1}(b) - x_{n-k+1,n-k+1}(a)}{x_{n,1}(b) + x_{n-k+1,n-k+1}(a)}. \tag{6.6}$$

Invertendo os papéis de $a$ e $b$ em (6.5) e usando o fato que $x_{n,k}(a,b) = -x_{n,n-k+1}(b,a)$, nós obtemos o limite inferior

$$x_{n,k}(a,b) \geq \frac{x_{k,k}(b) - x_{n,1}(a)}{x_{k,k}(b) + x_{n,1}(a)}. \tag{6.7}$$

De (6.6) e (6.7),

$$\frac{x_{k,k}(b) - x_{n,1}(a)}{x_{k,k}(b) + x_{n,1}(a)} \leq x_{n,k}(a,b) \leq \frac{x_{n,1}(b) - x_{n-k+1,n-k+1}(a)}{x_{n,1}(b) + x_{n-k+1,n-k+1}(a)}, \tag{6.8}$$

e está provado o teorema.

□

Consequências imediatas do resultado são os casos dos zeros extremos:

Para $k = 1$,

$$\frac{x_{1,1}(b) - x_{n,1}(a)}{x_{1,1}(b) + x_{n,1}(a)} \leq x_{n,1}(a,b) \leq \frac{x_{n,1}(b) - x_{n,n}(a)}{x_{n,1}(b) + x_{n,n}(a)}, \tag{6.9}$$

e, para $k = n$,

$$\frac{x_{n,n}(b) - x_{n,1}(a)}{x_{n,n}(b) + x_{n,1}(a)} \leq x_{n,n}(a,b) \leq \frac{x_{n,1}(b) - x_{1,1}(a)}{x_{n,1}(b) + x_{1,1}(a)}. \tag{6.10}$$

E disso, concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$ e cada $k$, $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{x_{n,n}(b) - x_{n,1}(a)}{x_{n,n}(b) + x_{n,1}(a)} \leq x_{n,k}(a,b) \leq \frac{x_{n,1}(b) - x_{n,n}(a)}{x_{n,1}(b) + x_{n,n}(a)}.$$

Outras interessantes desigualdades se dão ao considerarmos o lado esquerdo de (6.9) e o lado direito de (6.10), dado que $x_{1,1}(\alpha) = \alpha + 1$, então

$$x_{n,1}(a,b) \geq 1 - \frac{2\,x_{n,1}(a)}{b + 1 + x_{n,1}(a)}$$

e

$$x_{n,n}(a,b) \leq -1 + \frac{2\,x_{n,1}(b)}{a + 1 + x_{n,1}(b)},$$

o que mostra que o maior zero de $P_n^{(a,b)}(x)$ converge para 1 conforme $b$ tende ao infinito, com velocidade de convergência da ordem $\mathcal{O}(1/b)$, enquanto o menor zero converge a $-1$ quando $a$ tende ao infinito, com velocidade de convergência da ordem $\mathcal{O}(1/a)$. Estes fatos estão ligados à interpretação eletrostática dos polinômios e mais informações podem ser obtidas em [38].

## 6.2 Desigualdades para os Zeros dos Polinômios de Jacobi com diferentes parâmetros

Agora usamos a seguinte fórmula que foi estabelecida em [36] e [39, Corolário 3.15 (i)]:

$$\begin{aligned}
&(x_1+x_2)^n P_n^{(a,b)}\left(\frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}\right) P_j^{(a+b+2n+1,c)}(1-2(x_1+x_2)) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n+j} \binom{j+n}{n} \frac{(b+1)_n(c+1)_j(a+b+c+j+n+2)_\ell}{(c+1)_\ell(b+c+\ell+1)_\ell(b+c+2\ell+2)_{j+n-\ell}} \\
&\times R_\ell(\lambda(n);b,c,-j-n-1,a+b+j+n+1) \\
&\times P_{n+j-\ell}^{(a,b+c+2\ell+1)}(1-2x_1)(1-x_1)^\ell P_\ell^{(b,c)}\left(\frac{1-x_1-2x_2}{1-x_1}\right),
\end{aligned} \tag{6.11}$$

onde os polinômios de Racah $R_\ell(\lambda(n);\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, com $\lambda(n)=n(n+\gamma+\delta+1)$, são definidos por [37, fórmula (1.2.1)].

Ao aplicarmos (6.11) nos casos em que $j=0$ ou $n=0$ teremos os seguintes teoremas:

### 6.2.1 O caso $n=0$

**Teorema 6.2.** *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $a,b,c > -1$. Então as desigualdades*

$$x_{n,k+1}(a+b+1,c) \leq \frac{1+x_{n,1}(b,c)}{2} x_{n-k,1}(a,b+c+2k+1) + \frac{1-x_{n,1}(b,c)}{2}$$

*valem para cada $k$, onde $0 \leq k \leq n-1$.*

**Demonstração.** Iniciamos por notar que

$$R_\ell(\lambda(0);b,c,-j-1,a+b+j+1) = 1\,.$$

Daí, fazendo $j=n$, $\ell=k$, $x_1=x$, $x_2=-y$ em (6.11), é obtido

$$P_n^{(a+b+1,c)}(1+2(y-x)) = \sum_{k=0}^{n} A_k P_{n-k}^{(a,b+c+2k+1)}(1-2x)\,(1-x)^k P_k^{(b,c)}\left(1+\frac{2y}{1-x}\right),$$

onde

$$A_k = \frac{(c+1)_n(a+b+c+n+2)_k}{(c+1)_k(b+c+k+1)_k(b+c+2k+2)_{n-k}} > 0\,.$$

Ao fixarmos $x$, o número de zeros de

$$\widehat{P}_n(y) = P_n^{(a+b+1,c)}(1+2(y-x))\,,$$

que é maior que o maior dos zeros de

$$P_k^{(b,c)}\left(1+\frac{2y}{1-x}\right),$$

não exede o número de mudanças de sinal na sequência

$$\left(P_n^{(a,b+c+1)}(1-2x), P_{n-1}^{(a,b+c+3)}(1-2x), \cdots, P_0^{(a,b+c+2n+1)}(1-2x)\right).$$

No artigo [40] de 2008, foi provado que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ fixado, $\alpha,\beta > -1$ os zeros de $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $P_{k-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)$ se entrelaçam. Seus coeficientes dominantes alternam de sinal, logo são todos positivos quando $x=-1$.

Considerando agora o caso que $\xi$ seja o menor valor para o qual $P_{n-k}^{(a,b+c+2k+1)}(1-2\xi)$ se anula, ou seja,

$$\xi = \frac{1 - x_{n-k,1}(a, b+c+2k+1)}{2},$$

então o número de mudanças de sinal é no máximo $k$. Portanto, o zero $\widehat{y}_{n,k+1}$ de $\widehat{P}_n(y)$, considerando que os zeros deste polinômio dispostos de maneira decrescente, não excede o maior zero de $P_n^{(b,c)}(1+(2/(1-\xi))y)$.

O maior zero $\widehat{y}$ de $\widehat{P}_n(y)$ é obtido quando $1+2(y-\xi) = x_{n,1}(a+b+1,c)$, que por sua vez resulta

$$\widehat{y}_{n,k+1} = \frac{x_{n,k+1}(a+b+1,c) - x_{n-k,1}(a, b+c+2k+1)}{2}.$$

Do mesmo modo, o maior zero de $P_n^{(b,c)}(1+(2/(1-\xi))y)$ é advindo de $1+(2/(1-\xi))y = x_{n,1}(b,c)$, o que equivale a

$$y = \frac{(x_{n,1}(b,c)-1)\ (1 + x_{n-k,1}(a, b+c+2k+1))}{4}.$$

Portanto, para $k = 0, \cdots, n-1$, nós temos

$$x_{n,k+1}(a+b+1,c) \leq \frac{1+x_{n,1}(b,c)}{2} x_{n-k,1}(a, b+c+2k+1) + \frac{1-x_{n,1}(b,c)}{2}, \tag{6.12}$$

o que conclui a prova do teorema.

$\square$

Ao notarmos que o lado direito de (6.12) pode representar uma combinação convexa de $-1$ e $x_{n,1}(a, b+c+1)$, temos o seguinte resultado:

**Corolário 6.1.** *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $a, b, c > -1$. Então as desigualdades*

$$x_{n,k+1}(a+b+1,c) \leq x_{n-k,1}(a, b+c+2k+1) \tag{6.13}$$

*valem para cada $k$, onde $0 \leq k \leq n-1$.*

Vale notar que (6.13) se reduz à igualdade quando $k = 0$ e $b = -1$, assim como (6.12).

### 6.2.2 O caso $j = 0$

**Teorema 6.3.** *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $a, b, c > -1$. Então as desigualdades*

$$\frac{1 + x_{n,k+1}(a,b)}{1 - x_{n,k+1}(a,b)} \leq \frac{1 + x_{n,1}(c,b)}{2} \leq \frac{1 + x_{n-k,1}(a, b+c+2k+1)}{1 - x_{n-k,1}(a, b+c+2k+1)}$$

*valem para todo $k$, sendo $0 \leq k \leq n-1$.*

**Demonstração.** Iniciamos por mostrar que

$$R_\ell(\lambda(n); b, c, -n-1, a+b+n+1) = (-1)^\ell \frac{(c+1)_\ell (a+1+n-\ell)_\ell}{(b+1)_\ell (a+b+c+n+2)_\ell}, \tag{6.14}$$

para $\ell \leq n$.

Isto é um fato que é devido à definição de polinômio de Racah, dadas em [37, (1.2.1)], onde

$$\begin{aligned} R_\ell(\lambda(n); b, c, -n-1, a+b+n+1) \\ &= {}_4F_3\left( \begin{array}{c} -\ell, \ell+b+c+1, -n, a+b+n+1 \\ b+1, a+b+c+n+2, -n \end{array} \middle| 1 \right) \\ &= {}_3F_2\left( \begin{array}{c} -\ell, \ell+b+c+1, a+b+n+1 \\ b+1, a+b+c+n+2 \end{array} \middle| 1 \right). \end{aligned}$$

De [34, (1.7.1)], temos

$$R_\ell(\lambda(n); b, c, -n-1, a+b+n+1) = \frac{(-c-\ell)_\ell\,(-a-n)_\ell}{(b+1)_\ell\,(-a-b-c-n-\ell-1)_\ell}\,.$$

Usando o símbolo de Pochhammer obtemos (6.14).

Daí, obtemos

$$(x+y)^n P_n^{(a,b)}\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_k P_{n-k}^{(a,b+c+2k+1)}(1-2x)\ (1-x)^k P_k^{(c,b)}\left(\frac{2y}{1-x}-1\right),$$

onde $C_k > 0$ e usando $P_k^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^k P_k^{(\beta,\alpha)}(x)$. Supondo que $x$ seja fixo, temos que o número de zeros de

$$\widehat{P}_n(y) = (x+y)^n P_n^{(a,b)}\left(\frac{y-x}{y+x}\right),$$

que é maior que o maior zero de

$$P_n^{(c,b)}\left(\frac{2y}{1-x}-1\right),$$

não excede o número de mudanças de sinal na sequência

$$\left(P_n^{(a,b+c+1)}(1-2x), P_{n-1}^{(a,b+c+3)}(1-2x), \cdots, P_0^{(a,b+c+2n+1)}(1-2x)\right),$$

assim como na seção anterior. Seguindo os mesmos passos, do [40, Theorem 2.1] segue que os zeros destes polinômios se entrelaçam, e fazendo $x=-1$ os coeficientes dominantes concordam o sinal e ainda, o menor valor de $\xi$ para os quais$P_{n-k}^{(a,b+c+2k+1)}(1-2\xi)$ se anula é

$$\xi = \frac{1 - x_{n-k,1}(a, b+c+2k+1)}{2}\,.$$

Então o número de mudanças de sinal na sequência é no máximo $k$ e assim, o zero $\widehat{y}_{n,k+1}$ de $\widehat{P}_n(y)$ não excede o maior zero $y_n$ de $P_n^{(c,b)}((2/(1-\xi))y-1)$.

O zero $\widehat{y}_{n,k+1}$ de $\widehat{P}_n(y)$ é

$$\widehat{y}_{n,k+1} = \xi\frac{1+x_{n,k+1}(a,b)}{1-x_{n,k+1}(a,b)},$$

e o maior zero de $P_n^{(c,b)}((2/(1-\xi))y-1)$ é

$$y_n = \frac{(1-\xi)(1+x_{n,1}(c,b))}{2}\,.$$

Portanto, para $k = 0, \cdots, n-1$, temos

$$\frac{1+x_{n,k+1}(a,b)}{1-x_{n,k+1}(a,b)} \le \frac{1+x_{n,1}(c,b)}{2}\ \frac{1+x_{n-k,1}(a,b+c+2k+1)}{1-x_{n-k,1}(a,b+c+2k+1)}\,. \tag{6.15}$$

□

Com observação semelhante ao do caso $n=0$, para $k=0$ e $c=-1$ temos a igualdade. De modo similar, para $k=0$ temos que (6.15) implica

$$\frac{1+x_{n,1}(a,b)}{1-x_{n,1}(a,b)} \le \frac{1+x_{n,1}(a,b+c+1)}{1-x_{n,1}(a,b+c+1)},$$

o que é também uma consequência do fato que a função $f(x) = (1+x)/(1-x)$ cresce no intervalo $(-1,1)$ e que $x_{n,1}(a,\beta)$ cresce com $\beta$.

Capítulo 7

# Considerações Finais

Em virtude dos resultados explorados no texto, vemos que o estudo da Regra de Sinais de Descartes voltada para combinações lineares reais de polinômios ortogonais no caso positivo-definido produz bons resultados e dentre esses, as desigualdades do capítulo anterior. Em consequência disso, nota-se engajamento de estudiosos da área que, sob táticas semelhantes às usadas no capítulo anterior, desenvolveram outras desigualdades, a saber, em [41, 42]. Todas tem em comum o fato de serem recentes e reemergidas a pouco, muitos anos após a demonstração de Schoenberg. Este retorno se deu início em [43], onde são avaliados o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais clássicos de Jacobi sob a RSD para Polinômios Ortogonais. Então, isto também mostra que o assunto se mantém relevante.

Ambas as apresentações do teorema principal são válidas por questão de serem abordagens muito diferentes e isso abre novas possibilidades de familiarização e interpretação por vários ramos das áreas que o resultado toca.

Nossa contribuição foi ressaltar a conexão da relação de recorrência do Teorema de Obrechkoff ser o caso de polinômios ortogonais positivo-definido, em um levantamento bibliográfico que preza por uma construção minuciosa dos resultados enquanto é envolvido no corpo do texto várias das respostas sobre perguntas que podem ser levantadas durante a leitura.

A decorrência natural do estudo que foi desenvolvido no corpo deste trabalho é a investigação de outros casos e as generalizações que foram deixadas de lado, dentre elas o caso de polinômios ortogonais quasi-definidos e uma possível versão adaptada a isto do Teorema de Obrechkoff. Também uma possível versão discreta que seja válida aos polinômios ortogonais clássicos de variável discreta (ver [35, pág.16]).

# Referências


[1] DESCARTES, R. *The geometry of René Descartes*: with a facsimile of the first edition. New York: Dover Publications, 1954. 1, 12

[2] NEWTON, I. *Universal arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution to which is added dr.* London: Halley's Method of finding the Roots of Æquations Arithmetically. J. Senex, London, édition de Raphson (traduction) et Cunn (vérification et correction), 1720. 1, 12

[3] DE GUA, A. Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires, réelles positives ou réelles négatives: Qui peuvent se trouver dans les équations de tous les degrés. *Histoire de l'Academie royale des sciences (sec. mémoires)*, p. 435–494, June 1741. 1, 12

[4] ALBERT, A. A. An inductive proof of Descartes' rule of signs. *American Mathematical Monthly*, v. 50, n. 3, Mar. 1

[5] OBRECHKOFF, N. On the distribution of zeros of algebraic equations, Annuaire Univ. *Sofia*, v. 15, n. 16, p. 1920, 1918. 1, 43, 45

[6] SCHOENBERG, I. J. Zur abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, v. 38, n. 1, p. 546–564, 1934. 1, 39, 50, 51

[7] DIMITROV, D. K.; RAFAELI, F. R. Descartes' rule of signs for orthogonal polynomials. *East J. Approx.*, v. 15, n. 2, p. 233–262, Jan. 2009. 2

[8] AREA, I.; DIMITROV, D.; GODOY, E.; RAFAELI, F. Inequalities for zeros of Jacobi polynomials via Obrechkoff's theorem. *Mathematics of Computation*, v. 81, n. 278, p. 991–1004, Apr. 2012. 2, 56

[9] PÓLYA, G.; SZEGŐ, G. *Problems and theorems in analysis ii: theory of functions, zeros, polynomials, determinants, number theory, geometry.* Berlim: Springer Science & Business Media, 1976. v. 2. 3, 35

[10] SMORYNSKI, C. *History of mathematics: a supplement.* New York: Springer Science & Business Media, 2007. 12

[11] LEVIN, S. A. Descartes' rule of signs - how hard can it be? *Preprint*, Nov. 2002. 12

[12] EIGENWILLIG, A. *Real root isolation for exact and approximate polynomials using Descartes' rule of signs.* May 2008. Tese de Doutorado - Saarland University, Department of Computer Science, International Max Planck Research School for Computer Science, Saarbrucken, May 2008. 13

[13] CHIHARA, T. S. *An introduction to orthogonal polynomials.* New York: Dover Publications, 2011. 15, 16, 19, 22, 26, 27, 29

[14] DE ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F.; RAFAELI, F. R. *Introdução aos polinômios ortogonais*. São Carlos: Soc Bras Mat Aplic e Comput, 2012. v. 64 of *Notas em Matemática Aplicada*. 15, 26

[15] HAMBURGER, H. Über eine erweiterung des stieltjesschen momentenproblems. *Mathematische Annalen*, v. 81, n. 2-4, p. 235–319, Jan. 1920. 22

[16] ALVAREZ-NODARSE, R.; MARCELLÁN, F. On the "Favard theorem" and its extensions. *Numerical Analysis 2000. Vol. V: Quadrature and Orthogonal Polynomials*, v. 127, n. 1, p. 231–254, Jan. 2001. 24

[17] SZEGŐ, G. Orthogonal polynomials. In: . Rhode Island: , c1939. v. 23. 24

[18] FAVARD, J. Sur les polynomes de Tchebicheff. *CR Acad. Sci. Paris*, v. 200, p. 2052–2053, July 1935. 24

[19] CHIHARA, T. S. On co-recursive orthogonal polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 8, n. 5, p. 899–905, Oct. 1957. 24

[20] SHOHAT, J. The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of appell. *American Journal of Mathematics*, v. 58, p. 453–464. 24

[21] STIELTJES, T. J. Recherches sur les fractions continues. In: . c1894. v. 8. p. 1–122. 24

[22] GÓMEZ-ULLATE, D.; KAMRAN, N.; MILSON, R. An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm–Liouville problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 359, n. 1, p. 352–367, 2009. 26

[23] RODTH, E. J. On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 1, n. 1, p. 245–262, Apr. 1885. 26

[24] BOCHNER, S. Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme. *Mathematische Zeitschrift*, v. 29, n. 1, p. 730–736, Dec. 1929. 26

[25] TAMBARUSSI, T. *Zeros de polinômios ortogonais gerados por uma medida perturbada*. 2013. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Departamento de Matemática e Computação, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, Presidente Prudente, 2013. 27

[26] FEKETE, M.; PÓLYA, G. Über ein problem von Laguerre. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, v. 34, n. 1, p. 89–120, May 1912. 31

[27] KARLIN, S. *Total positivity: Vol.: 1*. California: Stanford University Press, 1968. v. 81. 31, 32, 34, 36

[28] SCHOENBERG, I. Über variations vermindern de lineare transformationen. *Mathematische Zeitschrift*, v. 32, n. 1, p. 321–328, Dec. 1930. 33

[29] MOTZKIN, T. S. *Theodore s. motzkin: Selected papers*. Boston: Birkhäuser, 1983. Cap. 1, p. 1–80. 34

[30] SCHOENBERG, I. J.; WHITNEY, A. A theorem on polygons in n dimensions with applications to variation-diminishing and cyclic variation-diminishing linear transformations. *Compositio Mathematica*, v. 9, p. 141–160, 1951. 34

[31] GANTMAKHER, F. R.; KREIN, M. G. *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*: revised edition. Rhode Island: American Mathematical Soc., 2002. 34

[32] OBRECHKOFF, N. On the roots of algebraic equations, Annuaire Univ. *Sofia*, v. 19, p. 43–76, 1922. 45

[33] OBRECHKOFF, N. Über die Wurzeln von algebraischen gleichungen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, v. 33, p. 52–64, 1925. 45

[34] GASPER, G.; RAHMAN, M. *Basic hypergeometric series*. Cambridge: Cambridge university press, 2004. v. 96 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. 55, 61

[35] BENDER, C. *Monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos*. Fev. 2013. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Departamento de Matemática e Computação, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, Presidente Prudente, Fev. 2013. 55, 63

[36] VAN DER JEUGT, J. Coupling coefficients for Lie algebra representations and addition formulas for special functions. *Journal of Mathematical Physics*, Woodbury, v. 38, n. 5, p. 2728–2740, May 1997. 55, 58

[37] Koekoek, R.; Swarttouw, R. F. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. *ArXiv Mathematics e-prints*, Feb 1996. 56, 59, 60

[38] RAFAELI, F. R. *Zeros de polinômios ortogonais na reta real*. Feb. 2010. Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Campinas, Feb. 2010. 58

[39] Koelink, H. T.; Van der Jeugt, J. Convolutions for orthogonal polynomials from Lie and quantum algebra representations. In: . c1996. p. 7010. 58

[40] DRIVER, K.; JORDAAN, K.; MBUYI, N. Interlacing of the zeros of Jacobi polynomials with different parameters. *Numerical Algorithms*, v. 49, n. 1-4, p. 143–152, Feb. 2008. 59, 61

[41] AREA, I.; DIMITROV, D.; GODOY, E.; RONVEAUX, A. Zeros of Gegenbauer and Hermite polynomials and connection coefficients. *Mathematics of Computation*, v. 73, n. 248, p. 1937–1951, Mar. 2004. 63

[42] AREA, I.; DIMITROV, D. K.; GODOY, E. Convolutions and zeros of orthogonal polynomials. *Applied Numerical mathematics*, v. 61, n. 7, p. 868–878, July 2011. 63

[43] DIMITROV, D. K. Connection coefficients and zeros of orthogonal polynomials. *Journal of computational and applied mathematics*, v. 133, n. 1, p. 331–340, Aug. 2001. 63

# BibTEX

```
@MASTERSTHESIS{gtsiqueira2015,
title={Regra de sinais de {D}escartes para polin{\^o}mios ortogonais},
author={Siqueira, G. T.},
address={Presidente Prudente},
school={Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Departamento de Matem{\'a}tica e Computa\c{c}\~ao,
Programa de P\'os-Gradua\c{c}\~ao em Matem{\'a}tica Aplicada e
Computacional
},
year={2015}
}
```

# thebibliography

```
\bibitem{gtsiqueira2015}
G.~T. Siqueira.
\newblock Disserta\c{c}\~ao (Mestrado em Matemática Aplicada e
 Computacional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Departamento de
 Matem{\'a}tica e Computa\c{c}\~ao, Programa de P\'os-Gradua\c{c}\~ao em
 Matem{\'a}tica Aplicada e Computacional, PresidentePrudente, 2015.
```

# Word

```
Siqueira, G. T. itálico[Regra de sinais de Descartes para polinômios
 ortogonais]. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e
 Computacional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Departamento de
 Matemática e Computação, Programa de Pós-Graduação em
 Matemática Aplicada e Computacional, Presidente Prudente, 2015.
```