



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**O MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA
BARREIRA MODIFICADA PARA A RESOLUÇÃO DO
FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO**

Maria Cláudia Sávio Masiero

Bauru - SP

2011



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

O MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA BARREIRA MODIFICADA PARA A RESOLUÇÃO DO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Maria Cláudia Sávio Masiero

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Bauru (FEB), da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadora: Profa. Dra. Edméa Cássia Baptista

Bauru

2011

Masiero, Maria Cláudia Sávio.

O método da função Lagrangiana Aumentada Barreira
Modificada para a resolução do Fluxo de Potência Ótimo
/ Maria Cláudia Sávio Masiero, 2011.
153 f.il.

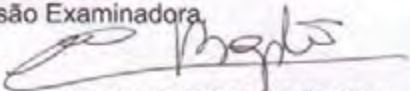
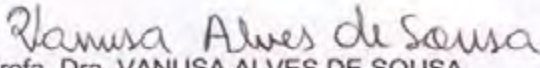
Orientadora: Edméa Cássia Baptista

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2011

1. Função barreira modificada. 2. Função
Lagrangiana aumentada. 3. Método de Newton. 4. Fluxo
de Potência Ótimo. I. Universidade Estadual Paulista.
Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE MARIA CLAUDIA SAVIO MASIERO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.

Aos 18 dias do mês de agosto do ano de 2011, às 09:00 horas, no(a) ANFITEATRO DO STI DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Profa. Dra. VANUSA ALVES DE SOUSA do(a) Centro de Ciências Exatas e Da Tecnologia / Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de MARIA CLAUDIA SAVIO MASIERO, intitulada "O MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA BARREIRA MODIFICADA PARA A RESOLUÇÃO DO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO". Após a exposição, a discente foi argüida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADA. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Profa. Dra. EDMEA CASSIA BAPTISTA
Profa. Dra. VANUSA ALVES DE SOUSA
Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO

DEDICATÓRIA

“Aos meus pais, Nilva e Moacyr: meus verdadeiros mestres, modelos reais de amor, perseverança, parceria, dedicação, paciência e ética!!! A razão do meu viver...”

“A excelência pode ser obtida se você se importa mais do que os outros julgam ser necessário; se arrisca mais do que os outros julgam ser seguro, sonha mais do que os outros julgam ser prático, e espera mais do que os outros julgam ser possível.”

Vince Lombardi

“Quando uma criatura humana desperta para um grande sonho e sobre ele lança toda a força de sua alma, todo o universo conspira a seu favor.”

Goethe

“O sucesso é um professor perverso. Ele seduz as pessoas inteligentes e as faz pensar que jamais vão cair.”

Bill Gates

“Quando recebemos um ensinamento, devemos receber como um valioso presente e não como uma dura tarefa. Eis aqui a diferença que transcende.”

Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, a DEUS e aos meus amados PAIS.

A professora Dra. Edméa Cássia Baptista, por ser mestre no sentido literal que a denominação confere. Um exemplo de amor à profissão, que conduz seus alunos e a ciência com excelência, garra, força, motivação, inspiração e muito conhecimento. Um exemplo de amor à vida, com a superação vitoriosa de uma fase difícil de sua vida que eu pude presenciar. Agradeço pela excelente orientação, compreensão, amizade, confiança, paciência e disponibilidade durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores do departamento de Matemática: Antonio Balbo, Adriana Cherri e Cristiane Lázaro pela força, incentivo e troca de idéias.

Ao professor Aguinaldo A. Pereira, ao colega Michel Braga, e principalmente, a engenheira Vanusa A. Sousa, pelo “apoio computacional”, amizade e disponibilidade.

Aos amigos do LOESP: Alessandro, André, Wesley e em especial a Edson Rezende Luciano e a Paulo Sérgio Campanha pelas trocas de idéias, pelo apoio, convivência e principalmente pela amizade.

As amigas: Giovana Camargo, Patrícia Reinato e Simone Scarpim, minha companheira de apartamento, pela convivência, amizade, incentivo e torcida.

Ao amigo Junior Santos, por toda a ajuda na formatação deste trabalho.

Aos amigos da EMEF Valdomiro Casagrande: Diretora Vera Terrabuio e Prof. Edgar Dias pela torcida, incentivo e principalmente, pela compreensão de minhas falhas e falta de colaboração na escola, devido às fases finais deste trabalho.

A todos os colegas, professores e funcionários dos departamentos de Matemática e de Engenharia Elétrica, e aos da sessão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia de Bauru, Unesp, pela colaboração e atenção.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudos.

A **TODOS** que conviveram comigo durante esse período, torcendo, apoiando, “rezando” e me compreendendo, *muito obrigada!!!*

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	viii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	x
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xii
RESUMO.....	xv
ABSTRACT.....	xvi
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 HISTÓRICO	
2.1 Apresentação do problema.....	6
2.2 Histórico do método da função barreira modificada.....	7
2.3 Histórico do método da função Lagrangiana aumentada.....	15
2.4 Histórico do problema de Fluxo de Potência Ótimo.....	33
3 REVISÃO DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	
3.1 O método de Newton-Lagrangiano.....	45
3.1.1 Algoritmo.....	47
3.1.2 Dificuldades computacionais.....	48
3.2 O método de barreira modificada.....	48
3.2.1 Algoritmo.....	52
3.2.2 Dificuldades computacionais.....	53
3.3 O método da função Lagrangiana aumentada.....	53
3.3.1 Algoritmo.....	59
3.3.2 Dificuldades computacionais.....	60

4 O MÉTODO DA NOVA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA BARREIRA MODIFICADA

4.1 Apresentação do problema.....	61
4.2 A nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada.....	63
4.3 O método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada.....	65
4.4 Algoritmo.....	69

5 O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

5.1 Definição do problema de FPO.....	70
5.2 Formulação do problema de FPO.....	71
5.3 A nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada associada ao problema de FPO.....	75
5.4 O método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada aplicado ao problema de FPO.....	77
5.4.1 Matriz Hessiana da função Lagrangiana.....	81
5.4.2 Valores iniciais das variáveis.....	81
5.5 Implementação computacional.....	82

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

6.1 Exemplo Numérico.....	87
6.2 Sistema elétrico de 3 barras.....	92
6.3 Sistema IEEE 14 barras.....	101
6.4 Sistema IEEE 30 barras.....	103
6.5 Sistema IEEE 162 barras.....	104

7 CONCLUSÕES.....108

REFERÊNCIAS.....111

APÊNDICE.....126

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Modelo utilizado para a variável <i>tap</i> do transformador.....	75
FIGURA 2 – Fluxograma do programa de FPO.....	83
FIGURA 3 – Convergência do método da nova FLABM referente à Tabela 1a.....	91
FIGURA 4 – Convergência do método da nova FLABM referente à Tabela 2a.....	92
FIGURA 5 – Sistema elétrico de 3 barras.....	93
FIGURA 6 – Sistema IEEE 14 barras.....	101
FIGURA 7 – Magnitude das tensões para o sistema IEEE 14 barras.....	103
FIGURA 8 – Sistema IEEE 30 barras.....	103
FIGURA 9 – Magnitude das tensões para o sistema IEEE 30 barras.....	105
FIGURA 10 – Magnitude das tensões para o sistema IEEE 162 barras.....	106

LISTA DE TABELAS

TABELA 1a – Convergência do método da nova FLABM aplicado ao problema (6.1) com $\mu_1 = 0,01$ e $\mu_2 = 1$	90
TABELA 1b – Valores dos multiplicadores de Lagrange.....	90
TABELA 2a – Convergência do método da nova FLABM aplicado ao problema (6.1) com $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 10$	90
TABELA 2b – Valores dos multiplicadores de Lagrange.....	91
TABELA 3 – Estado inicial do sistema de 3 barras.....	96
TABELA 4 – Limites para as tensões e reativos.....	96
TABELA 5 – Valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange.....	96
TABELA 6 – Valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange.....	96
TABELA 7 – Valores iniciais das variáveis de folga ou excesso.....	96
TABELA 8 – Variáveis do sistema de 3 barras na iteração 1.....	97
TABELA 9 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 1.....	97
TABELA 10 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 1.....	97
TABELA 11 – Variáveis de folga ou excesso na iteração 1.....	97
TABELA 12 – Variáveis do sistema de 3 barras na iteração 2.....	98
TABELA 13 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 2.....	98
TABELA 14 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 2.....	98
TABELA 15 – Variáveis de folga ou excesso na iteração 2.....	98
TABELA 16 – Variáveis do sistema de 3 barras na iteração 3.....	99
TABELA 17 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 3.....	99
TABELA 18 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 3.....	99
TABELA 19 – Variáveis de folga ou excesso na iteração 3.....	99
TABELA 20 – Variáveis do sistema de 3 barras na iteração 4.....	100
TABELA 21 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 4.....	100
TABELA 22 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 4.....	100
TABELA 23 – Variáveis de folga ou excesso na iteração 4.....	100

TABELA 24 – Processo de otimização do sistema IEEE 14 barras para o método da nova FLABM.....	102
TABELA 25 – Processo de otimização do sistema IEEE 30 barras para o método da nova FLABM.....	104
TABELA 26 – Processo de otimização do sistema IEEE 162 barras para o método da nova FLABM.....	106

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PL – programação linear;

PNL – programação não linear ;

FBM – função barreira modificada;

FBC – função barreira clássica;

FLABM – função Lagrangiana aumentada barreira modificada;

SEP – Sistema Elétrico de Potência;

FPO – Fluxo de Potência Ótimo;

KKT – Karush-Kuhn-Tucker;

MM-2 – método dos multiplicadores modificado 2;

MM-3 – método dos multiplicadores modificado 3;

NMBM – método de barreira modificada de Newton;

MBF – função barreira modificada;

MBFM – método da função barreira modificada;

PE/MBF – método da função barreira modificada/penalidade;

MBAL – método da Lagrangiana aumentada barreira modificada;

BFGS – Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno;

NPSOL – Nonlinear Programming of Systems Optimization Laboratory (Haward);

EESOR - Engineering Economic Systems and Operations Research;

PBM – método dos multiplicadores barreira/penalidade;

LANCELOTI – software de Lagrangiana aumentada;

SPG – gradiente projetado spectral;

PHR – Powell-Hestenes-Rockafellar;

MPCC – métodos para programação matemática com restrições de complementaridade;

ORPF – Fluxo de Potência Ótimo reativo;

APP – princípio de problema auxiliar;

DE – despacho econômico;

IEEE – Institute of Electrical and Electronics Engineers;
PCA – penalidade e conjunto ativo;
PD – primal dual;
BLPD – barreira logarítmica primal dual;
CESP – Companhia Energética de São Paulo;
TRALM – método da função Lagrangiana aumentada baseada na região de confiança;
SCIPM – método de ponto interior primal-dual passo controlado;
CCV – custo variável restrito;
AVR – reguladores automáticos de voltagem;
PCMBA – método de barreira modificada preditor-corretor;
AS – análise de sensibilidade;
MPID – métodos de pontos interiores coordenação-decomposição;
It. – iteração;
F. Ob. – função objetivo;
MW – Mega Watts;
NB – número de barras do sistema elétrico;
NBC – número de barras de carga;
NBCR – número de barras de controle reativo;
NT – número de transformadores com *tap* variável;
NL – número total de linhas de transmissão;
UNESP – Universidade Estadual Paulista;
FEB – Faculdade de Engenharia de Bauru.

LISTA DE SÍMBOLOS

$f(x)$ – função objetivo;

$g(x)$ – vetor das restrições de igualdade;

$h(x)$ – vetor das restrições de desigualdade do tipo “menor ou igual”;

x – vetor das variáveis primais;

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - vetor coluna;

$x^t = (x_1, \dots, x_n)$ - vetor linha;

$\mathbb{R}$ – conjunto dos números reais;

$\in$ - pertence a;

λ - vetor dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdade ;

π - vetor dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade;

u – vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à função barreira modificada;

c – parâmetro de correção;

L_a – função Lagrangiana aumentada;

L – função Lagrangiana;

∇_x - vetor gradiente com relação à x ;

μ_1 - parâmetro de barreira;

μ_2 - parâmetro de penalidade;

i, j, k, l, p – números inteiros positivos;

m, n, r, q_1, q_2 – números inteiros positivos;

H – matriz Hessiana;

∂ - operador derivada;

W - matriz Hessiana da função Lagrangiana;

s – vetor das variáveis de folga ou excesso;

α - passo;

α_p - passo primal;

α_d - passo dual;

S - matriz diagonal com elementos positivos;

s_{ii} - escalares positivos;

$\Psi(t)$ - função exponencial $e^t - 1$;

Δ - direção;

ε - perturbação;

ξ - tolerância de convergência;

$Viola(x)$ - variável que indica a violação das restrições;

J - matriz Jacobiana;

S_u, S_i - matrizes diagonais com elementos positivos;

V – vetor das magnitudes das tensões;

θ - vetor dos ângulos das tensões;

t – vetor dos *taps* dos transformadores variáveis;

P - potência ativa;

Q - potência reativa;

PV - barra de tensão controlada;

PQ - barra de carga;

ΔP_k - variação da potência ativa na barra k ;

ΔQ_k - variação da potência reativa na barra k ;

P_k^{esp} - potência ativa especificada na barra k ;

Q_k^{esp} - potência reativa especificada na barra k ;

P_k^G - potência ativa gerada na barra k ;

P_k^C - potência ativa consumida na barra k ;

Q_k^G - potência reativa gerada na barra k ;

Q_k^C - potência reativa consumida na barra k ;

V_k - tensão na barra k ;

V_m - tensão na barra m ;

$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$ - ângulo da tensão nas barras k e m, respectivamente;

Ω_k - conjunto de todas as barras vizinhas à barra k, incluindo ela mesma;

I_t, I_v, I_Q - matrizes identidades;

DI - matriz diagonal-identidade;

n - ordem da matriz W;

τ - escalar com valor empírico de 0,9995.

RESUMO

MASIERO, M. C. S. (2011). *O Método da Função Lagrangiana Aumentada Barreira Modificada para a resolução do Fluxo de Potência Ótimo*. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2011.

Este trabalho propõe uma abordagem que utiliza uma associação dos métodos de barreira modificada e da Lagrangiana aumentada para a resolução do problema de fluxo de potência ótimo. Para isso, foi realizado um levantamento bibliográfico que explicitou os métodos de Newton-Lagrangiano, de barreira modificada e da função Lagrangiana aumentada. Na abordagem proposta, as restrições canalizadas são desmembradas em duas desigualdades. Estas são transformadas em igualdades a partir do acréscimo de variáveis de folga ou de excesso positivas, as quais são tratadas pela função barreira modificada. As restrições de igualdade originais do problema são tratadas pelo método da função Lagrangiana aumentada e as igualdades restantes através da função Lagrangiana. As condições necessárias de primeira ordem são aplicadas resultando num sistema não linear o qual é resolvido pelo método de Newton. A eficiência do método foi verificada utilizando um exemplo matemático e em problemas de fluxo de potência ótimo.

Palavras-chave: função barreira modificada; função Lagrangiana aumentada; método de Newton; fluxo de potência ótimo.

ABSTRACT

MASIERO, M. C. S. (2011). *The Modified Barrier – Augmented Lagrangian Method for the Solution of Optimal Power Flow*. Dissertation (Master's degree) - Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2011.

This work proposes an approach that uses an association of the modified barrier method and augmented Lagrangian method for the solution of the optimal power flow problem. On this purpose, a bibliographical review was accomplished the methods Newton-Lagrangian, modified barrier and augmented Lagrangian function. In this approach, the bounded constraints are transformed in equalities by adding the non-negative slack variables. Those slack variables are handled by the modified barrier function. The original equality constraints of the problem are handled by the method of augmented Lagrangian function and the remaining equalities are handled by the Lagrangian function. The first order necessary conditions are applied resulting in a nonlinear system which is solved by Newton's method. The effectiveness of the proposed approach has been examined by solving a mathematical example and optimal power flow problems.

Keywords: modified barrier function; augmented Lagrangian function; Newton's method; optimal power flow.

INTRODUÇÃO

Os métodos de otimização têm como meta encontrar a melhor entre todas as possíveis soluções de um problema, para um desempenho desejado (função objetivo). Os matemáticos têm trabalhado no desenvolvimento de métodos de otimização desde Descartes e Fermat no século XVII, mesmo antes do desenvolvimento das bases do cálculo por Newton. As aplicações da otimização estendem-se a problemas de previsão e planejamento, programação de produção e estoque, automação, otimização de processos, entre outros. No entanto, antes de 1940, relativamente muito pouco tinha sido desenvolvido sobre métodos para otimização numérica de funções de muitas variáveis.

Na década de 40, após o surgimento do computador, vários métodos de otimização foram desenvolvidos. Por exemplo, em programação linear (PL), que tem como meta a otimização de funções lineares sujeitas a restrições lineares, destaca-se o método Simplex desenvolvido na década de 40, por Dantzig, com o objetivo de alocar recursos durante a segunda grande guerra mundial. Desde então, o desenvolvimento de algoritmos e programas altamente eficientes e robustos, o surgimento de computadores cada vez mais velozes, a percepção dos profissionais e pesquisadores em relação às vantagens e ao bom desempenho da modelagem matemática e análise de problemas por meio da PL, fazem da PL uma ferramenta de extrema importância.

Entretanto, muitos problemas reais não podem ser representados ou aproximados adequadamente por um problema linear devido à natureza não linear da função objetivo e/ou de qualquer das restrições. Tais problemas são tratados pela programação não linear (PNL).

Problemas de otimização não linear são encontrados nas mais diversas áreas do conhecimento, como engenharia, química, agronomia, medicina, entre outras. Como exemplos de problemas onde a PNL pode ser aplicada, podem-se citar: alocação de recursos escassos, operação e planejamento industrial, trajetória ótima de foguetes, desenhos

estruturais, desenhos mecânicos e demais problemas relacionados aos setores industriais, de negócios, militares e governamentais. Esses problemas, em geral, nem sempre possuem uma resolução fácil, devido a sua não linearidade e quantidade de variáveis. Por este motivo, uma das principais metas no desenvolvimento da PNL é a criação de algoritmos computacionais eficientes para alcançar uma convergência satisfatória na determinação de uma solução. A PNL não possui um método geral de resolução de seus problemas. Suas técnicas para resolver um problema podem ser classificadas, basicamente, pelo tipo de problema que será abordado.

Na maior parte dos problemas de otimização de sistemas reais, a solução deve satisfazer restrições do modelo descrito pelo sistema, bem como maximizar ou minimizar uma função objetivo. Problemas desse tipo são denominados problemas de otimização restritos. As restrições podem ser classificadas como restrições de igualdade ou restrições de desigualdade. Em alguns casos, porém, as restrições não estão presentes, e o problema, consistindo somente de uma função objetivo, é denominado de problema de otimização irrestrito.

Neste trabalho, dentre os métodos numéricos eficientes para resolver problemas de PNL, destacam-se os métodos da Lagrangiana aumentada e de barreira modificada para a otimização restrita.

O método da função Lagrangiana aumentada pode ser visto como uma combinação dos métodos da função penalidade e o Lagrangiano, e apresenta melhor comportamento que o método das penalidades; determina a solução de problemas, nos quais o método das penalidades não obtém sucesso; e ameniza o problema de mal condicionamento. Esta função foi introduzida por HESTENES (1969) e POWELL (1969). Em seu trabalho, Hestenes se preocupou em apresentar a 'idéia' da função Lagrangiana aumentada e da atualização dos multiplicadores, porém, não forneceu um algoritmo para o método. Em POWELL (1969), foi apresentado um algoritmo que utilizava uma regra para aumentar o fator de penalidade e demonstrou-se que, se as condições suficientes de segunda ordem para a otimalidade são satisfeitas, o algoritmo converge localmente com uma taxa linear, sem que o fator de penalidade precise tender ao infinito.

Outro método eficiente para resolver problemas de PNL é o método da função barreira modificada (FBM). A teoria de métodos da FBM foi desenvolvida por POLYAK (1992). Estes métodos combinam as melhores propriedades da função Lagrangiana clássica e da função barreira clássica, evitando os problemas que ambas enfrentam e buscando explorar as melhores propriedades de cada uma dessas funções. Em contraste com a função barreira clássica, as funções barreira modificadas são definidas na solução; são suaves na vizinhança do ótimo; não vão para o infinito quando se aproximam do ótimo e representam explicitamente os multiplicadores de Lagrange, qualidade mais importante da FBM, pois estes multiplicadores auxiliam no processo de convergência do método.

Com o objetivo de aproveitar as melhores características dos métodos citados, propõe-se, neste trabalho, o método denominado de método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada (FLABM), cujo desenvolvimento foi inspirado pelo artigo de GOLDFARB *et al.* (1999). No método proposto, ou seja, no método da FLABM, as restrições canalizadas são desmembradas em duas desigualdades. Essas desigualdades e as variáveis canalizadas são transformadas em igualdades através do acréscimo de variáveis de folga e de excesso. Desta forma, essas variáveis de folga e de excesso são tratadas pela função barreira modificada, as restrições de igualdade originais do problema passam a ser tratadas pela função Lagrangiana aumentada e as demais tratadas pela função Lagrangiana. Associa-se a esse problema uma função Lagrangiana denominada nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada. O problema restrito é então transformado em irrestrito e as condições necessárias de primeira ordem são aplicadas à função Lagrangiana, gerando um sistema de equações não lineares, o qual é linearizado e resolvido pelo método de Newton. O parâmetro de barreira é atualizado segundo MELMAN & POLYAK (1996). O parâmetro de penalidade é atualizado por um fator de correção. Os multiplicadores de Lagrange associados à Lagrangiana aumentada são atualizados pela regra de HESTENES (1969) e POWELL (1969). Os multiplicadores de Lagrange associados à barreira modificada são atualizados pela regra de POLYAK (1992).

A teoria da nova abordagem é desenvolvida e aplicada para resolução do problema de fluxo de potência ótimo (FPO). O FPO é um problema não linear, restrito, não convexo e de grande porte. É utilizado como ferramenta para determinar o melhor ponto de operação de um

sistema elétrico de potência (SEP), contribuindo para um melhor desempenho deste. Desde a sua formulação inicial proposta por CARPENTIER (1962), observou-se um crescente interesse na sua resolução, pelo fato de ser uma ferramenta útil para análises e estudos nas atividades de operação e planejamento do SEP. Por esse mesmo motivo, o problema de FPO tem sido um tema abordado por vários pesquisadores, dos quais pode-se citar HUNEAULT & GALIANA (1991), MOMOH *et al.* (1999a,b), WANG *et al.* (2007) e mais recentemente ECHEVERRI *et al.* (2010) e SOUZA *et al.* (2010), etc. Os principais trabalhos, na área de FPO, podem ser classificados, entre outros, em cinco tipos: abordagem via programação linear, método de Newton, programação quadrática sequencial, métodos paramétricos e método de pontos interiores.

O modelo de FPO considerado, neste trabalho, é o de despacho ótimo de potência reativa, no qual os controles ativos são fixados, e as variáveis de controle relacionadas com a potência reativa são otimizadas em relação à função objetivo. A função a ser minimizada é a perda de potência ativa na transmissão, e o conjunto de restrições é formado por: equações de balanço ou fluxo de potência e limites de tensão, de *tap* de transformador e de geração de potência reativa.

Este trabalho está organizado em 7 capítulos, incluindo este capítulo de introdução, além de um apêndice, os quais serão resumidamente descritos a seguir.

Primeiramente, no capítulo 2, com o objetivo de posicionar o trabalho cronologicamente, apresenta-se um histórico do método de barreira modificada, do método da função Lagrangiana aumentada e do problema de FPO.

No capítulo 3, a fim de fornecer suporte teórico para o desenvolvimento do método abordado neste trabalho, é apresentada uma revisão dos métodos: Newton – Lagrangiano, barreira modificada e da função Lagrangiana aumentada.

No capítulo 4, desenvolve-se o método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada e estabelecem-se as regras para atualização das variáveis e o algoritmo do método.

No capítulo 5, apresenta-se a formulação do problema de FPO, aplica-se o método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada ao problema de FPO e discute-se a implementação computacional do método.

No capítulo 6, apresentam-se os resultados numéricos do método proposto para um problema matemático e para alguns problemas de FPO.

No capítulo 7 apresentam-se as conclusões obtidas neste trabalho, bem como as perspectivas de continuidade deste.

No Apêndice apresentam-se os bancos de dados relativos aos sistemas elétricos utilizados neste trabalho.

CAPÍTULO 2

HISTÓRICO

Neste capítulo apresenta-se um levantamento bibliográfico sobre os métodos de barreira modificada, da função Lagrangiana aumentada e sobre o problema de FPO. Fornece-se, desse modo, uma ampla visão do desenvolvimento teórico e um posicionamento histórico para a apresentação da abordagem proposta neste trabalho, pois, essa abordagem é uma forma mista desses dois métodos e será utilizada na resolução do problema de FPO. Os trabalhos de BAPTISTA (2001) e SOUSA (2006) serviram como base para o desenvolvimento deste histórico.

2.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Este trabalho tem por interesse a resolução de problemas de programação não linear restritos, da forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad \quad \quad h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde: $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \in \mathbb{R}^m$, $h(x) \in \mathbb{R}^p$ e as funções são de classe C_2 .

Uma das estratégias utilizadas na resolução de (2.1) é a de transformá-lo em um problema irrestrito equivalente (ou uma sequência de problemas irrestritos equivalentes) em que utilizamos uma função objetivo auxiliar.

Pelo fato de a nossa abordagem seguir essa estratégia, utilizar de forma mista o método de barreira modificada e o da função Lagrangiana aumentada e ser aplicada na resolução do problema de FPO, apresentar-se-á o desenvolvimento histórico de ambos os métodos e do problema citado.

2.2 HISTÓRICO DO MÉTODO DA FUNÇÃO BARREIRA MODIFICADA

O método da função barreira, ou método de barreira, pode ser visto como um caso particular do método de penalidade, mas diferencia-se deste por exigir uma barreira interna, ou seja, por trabalhar no interior da região factível, utilizando uma função auxiliar que cresce indefinidamente próxima à fronteira e uma sequência decrescente de fatores de barreira.

A função barreira logarítmica foi estudada por FRISCH (1955) para problemas de programação convexa. Outra função barreira, denominada função barreira inversa foi proposta por CARROL (1961), sob o nome de *Created Response Surface Technique*. O método de barreira foi realmente popularizado por FIACCO & MCCORMICK (1968), que realizaram um estudo teórico mais detalhado do método e propuseram uma abordagem utilizando a função barreira e a função penalidade em uma mesma função auxiliar.

Os autores que trabalharam com o método da função barreira verificaram que ele apresenta alguns problemas, tais como: o mal condicionamento da matriz Hessiana da função Lagrangiana quando seu fator de barreira tende a zero; a dificuldade na escolha do fator de barreira e na escolha de uma solução inicial; a não existência da derivada na solução e o aumento ilimitado da função barreira na vizinhança da fronteira. Em virtude desses problemas, na década de 70, o entusiasmo no uso da função barreira diminuiu sensivelmente.

O interesse pelo método da função barreira reapareceu somente após a apresentação feita por KARMAKAR (1984), de seu método projetivo para programação linear, cujo maior mérito, como o citado em GONZAGA (1989), foi o de ter mostrado que o problema de

programação linear é, de fato, um caso particular da programação não linear e é tratável por técnicas da mesma área.

Para a resolução de problemas com restrições de desigualdade, cujo interior é não vazio, é utilizada a função barreira modificada, que é uma variante dos métodos de pontos interiores com a função barreira. Diversos autores foram responsáveis pelo desenvolvimento dos métodos de pontos interiores, na década de 80 e início da década 90, entre eles pode-se citar KARMARKAR (1984), MEHROTRA (1992) e outros autores que podem ser encontrados nos trabalhos de GONZAGA (1989) e de BOUKARI & FIACCO (1995). Em virtude do interesse despertado por KARMARKAR, e seus seguidores na década de 80, a função barreira logarítmica passou novamente a ser usada como uma ferramenta alternativa de trabalho, surgindo novos tipos de função barreira.

Seguindo essa linha, em 1992, POLYAK desenvolveu uma teoria de métodos da função barreira modificada. Estes métodos combinam as melhores propriedades da função Lagrangiana clássica e da função barreira clássica, evitando os problemas que ambas enfrentam e buscando explorar as melhores propriedades de cada uma dessas funções. Segundo o autor, a finalidade que o método de barreira modificada tem para os métodos de pontos interiores é a mesma que o método da função Lagrangiana aumentada tem para os métodos de penalidade, isto é, ajudá-lo a “driblar” suas dificuldades. Por esse motivo, o autor considera a função barreira modificada como uma Lagrangiana aumentada interior. Apresentou diferentes versões do método para o problema de programação convexa e não convexa. Tais versões consistem no trabalho com um parâmetro de barreira fixo, na alteração desse parâmetro de barreira em um determinado nível e na alteração contínua, fornecendo convergência linear e super linear.

JENSEN & POLYAK (1994) demonstraram a convergência do método de barreira modificada para programação convexa. Com base em considerações elementares, mostraram que o método da função barreira modificada, para a solução de problemas de programação convexa, converge para qualquer ajuste fixo positivo do parâmetro de barreira. Com condições amenas nas regiões primal e dual factíveis, mostraram como utilizar o método da função barreira modificada para obter a solução ótima primal e dual, mesmo na presença de

degeneração. Os autores ilustraram a prova de convergência, no caso de programação linear e, em seguida para o caso de programação convexa.

Uma comparação numérica entre o método de barreira e o método de barreira modificada para otimização restrita de grande porte foi apresentada por NASH *et. al* (1994). Quando o método de barreira clássica é aplicado para a solução de problemas de programação não linear com restrições de desigualdade, a Hessiana da função barreira torna-se cada vez mais mal-condicionada, e a solução deste problema é abordada. Como resultado, isto pode ser desejável para considerar alternativas em algoritmos numéricos. Os autores compararam o desempenho de dois métodos motivados pela função barreira. O primeiro é a forma estabilizada do método de barreira clássica, onde a aproximação numérica estável para a direção de Newton é usada, quando o parâmetro de barreira é pequeno. O segundo é o método de barreira modificada, onde a função barreira é aplicada a uma forma relaxada do problema, e os parâmetros de barreira são escalados pelas estimativas dos multiplicadores de Lagrange ótimos. Ambas as técnicas podem ser utilizadas no contexto do método de Newton e, sendo assim, podem ser aplicadas a problemas de grande porte, bem como em computadores paralelos. Neste trabalho, ambas as técnicas são aplicadas a problemas restritos sendo comparados seus comportamentos.

POWELL (1995) mostrou algumas propriedades de convergência do método de barreira logarítmica modificada para programação linear. Em cada iteração do método, um vetor de variáveis é calculado através da minimização irrestrita da função objetivo, Assim, em contraste com os métodos de pontos interiores, todos os algoritmos são finitos sempre que o vetor de variáveis é factível. O autor estudou as propriedades de convergência, a constatação de que a sequência de variáveis calculadas converge para uma solução. Além disso, os valores da função objetivo tendem a otimalidade e quaisquer violações de restrição tendem a taxas de R-linear. Estas conclusões são válidas mesmo quando há muitas soluções. Segundo o autor, a única suposição que se tem é que a região factível do problema de programação linear é limitada e não vazia, que é muito menos restritiva do que as suposições que são feitas geralmente em investigações teóricas do método de barreira modificada.

Ainda em 1995, KHOT *et. al* apresentaram o método de barreira modificada de Newton (NMBM). Este método é aplicado a problemas de otimização estrutural com um grande número de variáveis e restrições. Este algoritmo de programação matemática não linear foi baseado na teoria da função barreira modificada (MBF) e no método de Newton para otimização irrestrita. A característica distintiva do método NMBM é a taxa de convergência que é devido ao fato de que a região factível permanece na área de Newton, após cada atualização dos multiplicadores de Lagrange. Esta característica de convergência foi ilustrada pela aplicação a problemas estruturais, com um número variado de variáveis e restrições e os resultados foram comparados com os obtidos pelo critério de otimalidade.

Em 1996, baseados no trabalho de POLYAK (1992), BREITFELD & SHANNO, apresentaram o método de barreira-penalidade para problemas de programação não linear. Tiveram como objetivo o desenvolvimento, a partir dos métodos de função barreira logarítmica modificada, de um novo método, no qual os termos logarítmicos são extrapolados por aproximações quadráticas. Também foi apresentada, por eles, uma implementação detalhada desse método, incluindo a formulação da nova função, o valor inicial das variáveis e o critério de convergência. Para a otimização irrestrita, os autores apresentaram um método de Newton modificado, em que é usada uma Hessiana modificada, para uma busca linear, e os critérios de convergência do método. Os autores, nesse estudo, destacam que os resultados computacionais são promissores.

SHANNO *et al.* (1996) iniciaram seu trabalho revisando o método de barreira clássica de FRISCH (1955) e apresentaram seus principais problemas no processo de otimização, tais como a escolha do fator inicial e o mal condicionamento da Hessiana. Os autores também revisaram os métodos de barreira modificadas vistos em POLYAK (1992), ressaltando que alguns dos problemas desses métodos são o ajuste dos fatores de barreira e o uso do algoritmo de busca linear; apresentaram, a função barreira-penalidade vista em BRIETFELD & SHANNO (1996), destacando a não necessidade de um ponto inicial factível – porém, ainda podem ocorrer mal condicionamento no problema e dificuldades no uso do algoritmo de busca linear.

KRUMKE (1996) mostrou uma análise da convergência do método da função barreira modificada (MBFM) para programação linear e programação quadrática convexa. O autor

analisou as propriedades de convergência deste método. A convergência dos MBFM já havia sido estabelecida sob os pressupostos de regularidade para programas convexos em geral. Neste trabalho, o autor se concentrou em programas lineares e convexos quadráticos e em reforçar substancialmente os resultados de convergência já existentes. Para programas lineares, também analisou a velocidade de convergência da sequência dual.

MELMAN (1996) propôs um procedimento de busca linear em métodos de barreira para problemas de programação quadrática, com restrições quadráticas e convexas. Apresentou a aplicação desse procedimento de busca linear aos seguintes métodos de pontos interiores: método de trajetória central, método da função barreira de CARROL (1961) e método da função barreira modificada, vista em POLYAK (1992).

Ainda em 1996, VASSILIADIS apresentou a aplicação do método da função barreira modificada/ penalidade (PE / MBF) para solução de problemas de programação quadrática (QP) de grande porte. Uma revisão da literatura sobre os métodos de PE / MBF é apresentada e a escolha deste método para problemas QP é justificada pela experiência prévia em problemas restritos de grande porte. O algoritmo proposto realiza dois tipos de iterações: uma iteração externa em que os limites dos multiplicadores de Lagrange são ajustados, e uma iteração interna para a solução do subproblema de igualdade restrita. A iteração interna resolve um problema modificado, contendo termos de barreira modificada/penalidade e está sujeito apenas às restrições de igualdade. Estas restrições são tratadas diretamente através da utilização de novos multiplicadores de Lagrange durante a iteração interna e, assim, em vez de um problema irrestrito, a iteração interna resolve um problema restrito modificado de igualdade. As restrições de desigualdade são formuladas como igualdades através da utilização de variáveis de folga. Resultados computacionais mostraram que este método é promissor, e motivou uma investigação mais aprofundada para o caso de problemas de programação não linear gerais.

Foi apresentado por CONN *et. al* (1997) uma classe de métodos denominados métodos de barreira Lagrangianos. Esses métodos usam a mesma função barreira modificada estudada em POLYAK (1992). CONN *et. al* utilizaram uma função barreira Lagrangiana baseados nos seguintes motivos: funções barreira determinam restrições ativas na solução de

um modo mais eficiente que os métodos do conjunto ativo, sendo isto válido, também, para a função barreira Lagrangiana; os métodos de pontos interiores para programação não linear são menos sensíveis à degeneração que os métodos de restrições ativas. Experimentos numéricos indicam que esse método é superior ao da barreira clássica, evita o mal condicionamento que ocorre neste, impedindo dificuldades numéricas. Os métodos de barreira Lagrangianos são usados na resolução de problemas de grande porte, com a vantagem de evitar variáveis de folga. Os autores forneceram um algoritmo, o qual converge para um ponto em que as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) são satisfeitas. Finalmente, destacaram que seu método de barreira Lagrangiano resolveu noventa por cento dos problemas-teste.

Em 1998, VASSILIADIS & BROOKS, baseados nos trabalhos de POLYAK (1992) e BREITFELD & SHANNO (1996) apresentaram o método de barreira-penalidade para problemas de programação quadrática de grande porte. Também basearam o método na função barreira modificada e na extrapolação quadrática dos termos de barreira. Apresentaram a atualização dos parâmetros de barreira-penalidade, um algoritmo para o método e a inicialização dos multiplicadores de Lagrange via o método da função barreira logarítmica, que, além de conseguir uma aproximação, obtém-se uma solução inicial melhorada.

GOLDFARB *et al.* (1999) apresentaram e analisaram o método da Lagrangiana aumentada interior-exterior para resolver problemas de otimização restrita com restrições de desigualdade e igualdade. Este método, denominado método da Lagrangiana aumentada barreira modificada (MBAL), é uma combinação dos métodos de barreira modificada e de Lagrangiana aumentada. O trabalho é baseado na função MBAL, que trata restrições de desigualdade por barreira modificada e restrições de igualdade por Lagrangiana aumentada. O método MBAL minimiza a função MBAL no espaço primal e atualiza os multiplicadores de Lagrange. Para um grande parâmetro de penalidade/barreira fixo, o método MBAL converge Q-linearmente nas condições de otimalidade suficientes de segunda ordem. A convergência Q-superlinear pode ser obtida através do aumento do parâmetro de penalidade que ocorre após cada atualização dos multiplicadores de Lagrange. Os autores consideraram o problema dual que é baseado na função MBAL e provaram um teorema de dualidade básica para este problema. Mostraram que este teorema possui várias propriedades importantes que não mantêm relação com o dual baseado na Lagrangiana clássica. Este artigo inspirou o desenvolvimento deste trabalho.

FORSGREN *et al.* (2002) apresentaram uma revisão de um material clássico seletivo, condensado e uma pesquisa recente sobre métodos de pontos interiores para otimização restrita não linear. Começando pelo surgimento dos métodos interiores com o trabalho de KARMARKAR, mostrando todo o seu desenvolvimento e progresso. Os autores revisam os conceitos de otimização, método de barreira, método de barreira modificada e o método de barreira clássica de Newton. Destacam a bem sucedida trajetória dos métodos de pontos interiores com a função barreira logarítmica na otimização restrita.

CHEN & VASSILIADIS (2003) propuseram um método que se baseia na função barreira modificada, na função Lagrangiana aumentada, no método de Newton e nas extrapolações quadráticas. Aplicaram o método em alguns exemplos teóricos e em alguns problemas da área de Química. Ainda em 2003, os autores apresentaram outro trabalho que aborda a solução de problemas de otimização não linear gerais usando o método de barreira modificada/penalidade com o uso da Hessiana exata. As vantagens deste método são demonstrados em casos de teste que vem a partir da literatura padrão de engenharia de sistemas e processos que também envolvem problemas de controle ótimo.

ADIBI *et al.* (2003) apresentaram soluções ótimas para os *taps* dos transformadores usando o método Lagrangiana aumentada barreira modificada. Este trabalho relata a aplicação do método da Lagrangiana aumentada barreira modificada (MBAL) baseada no FPO não linear para a seleção ótima das posições dos *taps* de transformadores e dos pontos de ajuste de tensão dos geradores nos seus limites operacionais. A viabilidade do método é demonstrada através de um sistema teste 160 barras em operação em um utilitário *midAtlantic*.

SOUSA *et al.* (2006) mostraram um método de resolução de problemas não lineares e não convexos baseados na metodologia de pontos interiores. Neste método, as condições de otimalidade de primeira ordem são aplicadas à função Lagrangiana barreira modificada resultando num sistema não linear, cuja solução é determinada através da utilização do método de Newton. Uma das vantagens deste método é que o fator de barreira não tende ao infinito quando o ótimo se aproxima. Seu potencial foi mostrado na resolução de problemas

de FPO. O número de iterações do método está diretamente ligado à escolha dos fatores iniciais de barreira e seus respectivos parâmetros de correção. O método exige uma experiência prévia do sistema que será resolvido para um adequado ajuste do fator de barreira e de seu parâmetro de barreira.

KOCVARA & STINGL (2007) propuseram um algoritmo baseado na função barreira modificada e que utiliza “*solvers*” iterativos para calcular as direções de busca para problemas de programação linear de grande porte. A idéia do uso destes “*solvers*” é evitar o cálculo explícito da matriz de Newton ou por um esquema implícito no produto matriz-vetor ou por alguma fórmula de diferenças finitas. Tudo isso leva a um enorme ganho de memória computacional para o algoritmo e, além disso, para alguns problemas, a aceleração do algoritmo.

Ainda em 2007, ALBER & REEMTSEN mostraram como calcular a intensidade do planejamento de radioterapia para tratamento de câncer usando o método dos multiplicadores penalidade/barreira. Para essa finalidade, este trabalho apresenta um novo modelo biológico visto que o uso de funções não lineares para descrever efeitos biológicos está sendo muito utilizado, segundo os autores. Para a resolução deste novo modelo, são indicados vários métodos, entre eles o método da função barreira modificada de POLYAK (1992). Alguns números mostrando o desempenho numérico do algoritmo são tabelados para vários tipos de tumores e de um conjunto de 127 casos clínicos no total. Suas capacidades e comportamentos típicos também são ilustrados explicitamente por um plano de terapia computadorizada de um difícil caso clínico de tumor na laringe.

MATIOL & GONZAGA (2008) apresentaram vários tipos de funções penalidade e se concentraram na penalidade baseada na função barreira logarítmica modificada. O conjugado convexo desta penalidade induz a uma distância de Bregman e a iteração dual corresponde à iteração produzida pelo algoritmo de ponto proximal com base nesta distância. Os autores provam a convergência global da iteração dual.

Finalmente, LUKSAN *et al.* (2010), propuseram um método de ponto interior primal para otimização *minimax* de grande porte, esparsos e generalizados. Após a indicação do problema, apresentou as equações básicas do método de Newton aplicadas às condições de KKT. Descreveu o algoritmo básico dando mais detalhes da implementação da diferenciação numérica, atualização das variáveis e o decrescimento do parâmetro de barreira. Provou que este algoritmo é convergente para a função barreira logarítmica modificada. Apresentou, então, os resultados dos experimentos computacionais confirmando a eficiência do método de ponto interior primal para casos especiais de problemas de *minimax* generalizados.

2.3 HISTÓRICO DO MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA

O método da função Lagrangiana aumentada pode ser visto como uma combinação dos métodos da função penalidade e o Lagrangiano, sendo aproveitadas as melhores qualidades de ambos.

Em 1969, HESTENES apresentou um novo método para a resolução do problema (2.1), considerando uma única restrição de igualdade. Verificou que o método de penalidade apresentava problemas numéricos, como, por exemplo, o mal condicionamento da matriz Hessiana, quando o fator de penalidade tendia a infinito, e sugeriu uma mudança no método da função penalidade, o qual denominou método dos multiplicadores. Em seu método dos multiplicadores, HESTENES utilizou uma nova função auxiliar, denominada função Lagrangiana aumentada, a qual “incorpora” a função Lagrangiana clássica e um termo de penalidade quadrática. Ressaltamos que o autor se preocupou em apresentar a ‘idéia’ da função Lagrangiana aumentada e da atualização dos multiplicadores, porém, não forneceu um algoritmo para o método.

Uma das grandes vantagens desse método, quando comparado ao da função penalidade, é que o fator de penalidade não precisa ser muito grande, pois o método converge para valores moderados deste fator. Uma das dificuldades encontradas é a necessidade de uma

estimativa inicial do multiplicador λ . Hestenes sugere uma combinação entre o método das penalidades e o método dos multiplicadores para determinar uma estimativa inicial de λ . Fazendo $\lambda = 0$ na primeira iteração, trabalhamos com o método de penalidade e determinamos uma estimativa inicial para λ e, a partir da segunda iteração, passamos a aplicar o método dos multiplicadores.

Durante o mesmo período, POWELL (1969) trabalhou com o problema (2.1), considerando apenas as restrições de igualdade e apresentou uma forma equivalente do método dos multiplicadores, independentemente de HESTENES (1969). O autor forneceu um algoritmo detalhado para seu método, que funciona nos moldes do apresentado anteriormente. Diferenciou-se por adotar uma regra para aumentar o valor do fator de penalidade, com o objetivo de melhorar a convergência e garantir sempre que o resíduo máximo das equações de igualdade diminua a cada iteração.

Powell preocupou-se em apresentar alguns teoremas e provas, os quais garantem que o algoritmo apresentado é finito e converge para a solução ótima do problema, justificam a utilização da atualização dos multiplicadores de Lagrange e mostram que a taxa de convergência do método, quando este utiliza tais atualizações, é linear se as coordenadas do fator de penalidade são escolhidas suficientemente grandes. Ao final de seu artigo, citou a possibilidade de aplicar seu método a problemas com restrições de desigualdade.

Ao compararmos os dois trabalhos anteriores percebemos que HESTENES (1969) propôs somente a função Lagrangiana aumentada e uma técnica de atualização dos multiplicadores; já o trabalho de POWELL (1969) é muito mais completo.

Após a apresentação da função Lagrangiana aumentada por HESTENES e POWELL, que demonstrou ser mais eficiente que os métodos de penalidade e Lagrangianos usados separadamente, muitos pesquisadores passaram a trabalhar nessa área, a fim de aprimorá-la.

MIELE *et al.* (1972), com o objetivo de acelerar a convergência do método dos multiplicadores proposto por HESTENES (1969), apresentaram o método dos multiplicadores modificado em duas versões e utilizaram os seguintes algoritmos de primeira ordem: algoritmo do gradiente ordinário, algoritmo da quase-linearização modificado e algoritmo do

gradiente conjugado; trabalharam com o problema (2.1) considerando apenas as restrições de igualdade.

As modificações feitas por MIELE *et al.*, no método apresentado em HESTENES (1969) foram: diminuição do número de iterações e mudança na regra de atualização dos multiplicadores. Os autores denominaram o método dos multiplicadores com as modificações de método dos multiplicadores modificado 2 (MM-2). Nesse método, o valor do fator de penalidade não é alterado durante todo o processo. Comparando as estimativas dos multiplicadores, percebemos que a melhor é a terceira, pois minimiza o próprio multiplicador. Contudo, a escolha da atualização deve ser baseada na particularidade de cada algoritmo. Por meio de exemplos numéricos, concluíram que o método apresentado converge mais rápido, isto é, em um número menor de iterações, que o método de HESTENES. Tanto no método de HESTENES quanto no método de MIELE *et al.*, o número de iterações mínimo está diretamente ligado à escolha do fator de penalidade c .

Para acelerar a convergência do método MM-2, MIELE *et al.* sugeriram a inclusão de mais uma modificação e denominaram o novo método de método dos multiplicadores modificado 3 (MM-3). A modificação consiste na seleção de um fator de penalidade de modo apropriado. Observando as duas versões apresentadas do método dos multiplicadores modificado, os autores destacam que o método MM-3 mostrou-se mais eficiente em termos de convergência que o MM-2, sendo ambos mais rápidos do que o apresentado em HESTENES (1969).

ROCKAFELLAR (1973a) desenvolveu seu trabalho a partir do trabalho de HESTENES (1969), apresentando uma função Lagrangiana aumentada para problemas convexos com restrições de desigualdade e a relação dessa função com a teoria da dualidade. Considerou o problema (2.1) apenas com restrições de desigualdade, transformou-as em de igualdade, incluindo uma variável de folga positiva, e construiu a Lagrangiana aumentada vista em HESTENES (1969) associada ao novo problema; minimizou-a em função da variável de folga positiva, obtendo, então, uma nova função Lagrangiana aumentada. O autor não se preocupou, nesse trabalho, em fornecer um algoritmo particular, mas sim em dar uma forma geral de funcionamento do método.

A contribuição de ARROW *et al.* (1973) foi a apresentação de uma teoria de ponto de sela para problemas não convexos. Essa nova teoria é aplicada a uma classe de funções denominadas funções Lagrangianas modificadas, em que se inclui a função Lagrangiana aumentada apresentada em HESTENES (1969) e a proposta por ROCKAFELLAR (1973a). Anteriormente a contribuição de ARROW *et al.* (1973), somente caracterizava-se ponto de sela para problemas convexos e função Lagrangiana clássica.

Dando continuidade ao seu trabalho, ROCKAFELLAR (1973b), para o caso de restrições de desigualdade e problema convexo, forneceu a generalização do algoritmo apresentado simultaneamente por HESTENES (1969) e POWELL (1969) usando a função Lagrangiana aumentada. Garantiu, também, a convergência global de seu algoritmo para o fator de penalidade fixo, ressaltando o fato de que a minimização é aproximada, a menos que a condição *Slater* seja satisfeita. Também observou que a sequência de multiplicadores converge, mas pode existir mais de um limite, dependendo da escolha inicial do multiplicador, e deduziu algumas consequências das propriedades vistas em seu trabalho anterior para o método dos multiplicadores de HESTENES e POWELL.

Seguindo a mesma linha, em 1974, ROCKAFELLAR preocupou-se com problemas não convexos. Chamou a atenção para o caso do *gap* de dualidade que normalmente ocorre em problemas não convexos quando utilizamos a função Lagrangiana clássica. Trabalhando com o problema (2.1), somente com restrições de desigualdade, ele usou a sua função Lagrangiana aumentada para remover o *gap*. Centrou-se no desenvolvimento de propriedades gerais da nova função Lagrangiana aumentada para o caso não convexo, especialmente em relação à dualidade. Baseando-se nos resultados de ARROW *et al.* (1973) sobre ponto de sela para problemas não convexos, estendeu esses resultados e, introduzindo perturbações ao problema original, forneceu condições necessárias e suficientes (em termos da estabilidade) para a existência de um ponto de sela global da Lagrangiana aumentada.

FLETCHER (1975) retomou o trabalho de POWELL (1969) e apresentou uma função Lagrangiana aumentada para o problema (2.1), considerando somente as restrições de desigualdade. Provou que, na ausência da condição de complementaridade estrita, o algoritmo

converge para um ótimo, quando c é suficientemente grande e apresentou vários testes numéricos.

BERTSEKAS (1976a) optou por fazer uma interpretação do método dos multiplicadores para a resolução de problemas não lineares e não convexos usando o ponto de vista da função penalidade, ao invés de encará-lo como um método primal-dual. Ele desenvolveu o que denominou de algoritmo da função penalidade generalizado, no qual englobou o método da função penalidade e o método dos multiplicadores. Em seu algoritmo, a função Lagrangiana aumentada fornecida em HESTENES (1969) é minimizada para uma sequência de escalares $\{c^k\}$ e vetores $\{\lambda^k\}$, com a imposição de que a sequência $\{\lambda^k\}$ deva permanecer dentro de um conjunto arbitrário S limitado; caso não permaneça, λ não é atualizado. Os resultados de convergência com relação ao método dos multiplicadores são globais e significam uma melhoria substancial para os resultados locais existentes, ressaltando-se o fato de que o método dos multiplicadores converge mais rapidamente que o método das penalidades. Construiu uma teoria de dualidade muito parecida com a proposta em ROCKAFELLAR (1974), diferenciando-a, entretanto, pela construção da função objetivo dual, a qual é definida a partir de um problema primal perturbado. No caso de restrições de desigualdade, ele trabalhou com a mesma função Lagrangiana aumentada vista em ROCKAFELLAR (1974) e mostrou que o procedimento é similar ao desenvolvido para igualdade. Ressaltou que o processo de otimização não é exato e forneceu alguns critérios de parada.

No mesmo ano, BERTSEKAS (1976b) apresentou um estudo sobre as propriedades de convergência do método dos multiplicadores cujo objetivo foi de demonstrar a superioridade deste sobre os métodos de penalidade clássicos. Citou trabalhos de vários autores, enfocando os seguintes tópicos: a visão do método dos multiplicadores como um método de penalidade generalizado; a atualização dos multiplicadores de Lagrange como uma iteração do método do gradiente para resolver um problema dual; a forma do método dos multiplicadores para resolver problemas com restrições de desigualdade, dando destaque ao problema com restrições canalizadas e apresentando um método próprio, em que associa apenas um multiplicador a cada restrição canalizada; a análise da convergência e da taxa de convergência para programação convexa; a verificação de que a escolha da função penalidade

pode afetar significativamente o desempenho do método dos multiplicadores; as modificações no método dos multiplicadores; a apresentação de um novo resultado de convergência global utilizando o método de Newton; a citação de métodos relacionados com métodos da função Lagrangiana aumentada e, finalmente, um levantamento a respeito da aplicação do método dos multiplicadores em problemas com dimensão infinita. Apresentou alguns exemplos para comprovar a superioridade do método dos multiplicadores sobre os métodos de penalidade clássicos.

GLAD (1979) forneceu um algoritmo para a minimização de uma função Lagrangiana aumentada usando o método quase-Newton Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Examinou as propriedades de convergência do seu método dos multiplicadores para três técnicas distintas de atualização dos multiplicadores de Lagrange, utilizando uma função Lagrangiana aumentada análoga à apresentada por ROCKAFELLAR (1973a). Apresentou propriedades e teoremas de convergência local para o problema (2.1), somente com restrições de igualdade. Estendeu essas propriedades e teoremas para problemas com restrições de desigualdade. Forneceu, também, um algoritmo para garantir a convergência global. Observou que a técnica de função penalidade é usada como um último recurso para garantir a convergência, isto é, a atualização do fator de penalidade só é feita para garantir a convergência. Apresentou a aplicação das modificações a alguns exemplos numéricos.

HAN (1979) estudou o método dos multiplicadores baseando-se nos trabalhos de HESTENES (1969), POWELL (1969) e ROCKAFELLAR (1973a) e utilizou uma função Lagrangiana aumentada semelhante à apresentada por GLAD (1979). Verificou que, quando o fator de penalidade tende ao infinito, o método dos multiplicadores tem uma taxa de convergência superlinear, mas podem ocorrer instabilidades numéricas. Com o objetivo de evitar tal dificuldade e, ao mesmo tempo, encontrar uma taxa superlinear de convergência, propôs a determinação dos multiplicadores por meio da solução de subproblemas de programação quadrática restrita não negativa e utilizou para atualização dos fatores de penalidade a estratégia desenvolvida por POWELL (1969) e FLETCHER (1975). Para garantir a convergência rápida, utilizou o método quase-Newton BFGS, para aproximar a inversa da Hessiana. Provou que o método possui propriedades de convergência superlinear e local, e que o fator de penalidade permanece limitado. Mostrou que os resultados valem

quando a minimização da função Lagrangiana aumentada é inexata, isto é, não estão garantidas as condições de KKT.

DI PILLO & GRIPPO (1979) introduziram uma nova classe de função Lagrangiana aumentada para a resolução do problema (2.1) somente com restrições de igualdade. A nova classe é obtida ao adicionar-se à função Lagrangiana aumentada proposta por HESTENES (1969) um fator de penalidade sobre a condição necessária de primeira ordem aplicada à função Lagrangiana clássica. Motivados pelo método dos multiplicadores, que resolve uma sequência de problemas de minimização irrestrita, os autores mostraram que, usando a sua Lagrangiana aumentada e hipóteses adequadas, uma solução local do problema restrito e os valores correspondentes dos multiplicadores de Lagrange podem ser encontrados, fazendo-se uma única minimização local irrestrita dessa Lagrangiana em relação às variáveis x e λ , para valores finitos do fator de penalidade, não sendo utilizada a inversão de matrizes. Usaram uma função penalidade exata. Aplicaram o seu método aos exemplos de MIELE *et. al* (1972). Ressaltaram algumas desvantagens, como o aumento da dimensão do problema e a presença de derivadas de primeira ordem na sua função Lagrangiana aumentada.

BOGGS & TOLLE (1980) introduziram uma nova classe de função Lagrangiana aumentada – relacionada à proposta por DI PILLO & GRIPPO (1979) – para o problema (2.1) somente com restrições de igualdade. O objetivo dos autores era evitar as deficiências que ocorrem na função Lagrangiana clássica e nas funções Lagrangianas aumentadas até então estudadas. A nova função Lagrangiana aumentada incorpora as propriedades da função estudada por HESTENES (1969), tem um comportamento melhor com respeito ao vetor multiplicador. Os autores ressaltaram que, em alguns resultados apresentados, o valor do fator de penalidade é irrelevante; desenvolveram uma teoria de dualidade que utilizava a nova função Lagrangiana aumentada e estabeleceram relação entre os passos de Newton para a Lagrangiana clássica e para a nova Lagrangiana aumentada.

DI PILLO & GRIPPO (1982) apresentaram uma nova função Lagrangiana aumentada, desenvolvida de maneira análoga à apresentada em seu trabalho de 1979, considerando o problema (2.1) apenas com restrições de desigualdade. Neste trabalho, as restrições de desigualdade foram convertidas em de igualdade pela introdução de variáveis de folga

quadráticas. Os autores ressaltaram a possibilidade de se construir a sua função Lagrangiana aumentada continuamente diferenciável e de seu mínimo irrestrito, para um valor finito do fator de penalidade, produzir a solução para o problema restrito, e os multiplicadores associados de KKT. A partir disso, podem ser usadas técnicas de minimização irrestrita clássica, e o mínimo é encontrado por meio de uma única minimização irrestrita. Dedicaram seu trabalho a resultados teóricos sobre as propriedades da sua função Lagrangiana aumentada.

LUCIDI (1988) introduziu uma nova classe de funções Lagrangianas aumentadas exatas e continuamente diferenciáveis para o problema (2.1), em que considerou apenas as restrições de desigualdade, inspirando-se nos trabalhos de DI PILLO & GRIPPO (1979,1982). Apresentou um algoritmo com convergência global e determinou que o objetivo de seu trabalho era o de estabelecer resultados similares entre a função Lagrangiana aumentada e a sua função penalidade exata.

CONN *et al.* (1991), preocupados com a resolução de problemas de grande porte e em sanar as dificuldades encontradas nesta área, deram continuidade ao trabalho, no qual desenvolveram um algoritmo de programação restrita para problemas de grande porte, utilizando uma função Lagrangiana clássica. Foi utilizado o algoritmo dentro de uma estrutura de Lagrangiana aumentada. Esses autores afirmam que a função Lagrangiana aumentada é atrativa para problemas de grande porte, para os quais as estratégias do conjunto ativo não são apropriadas. Trabalharam, inicialmente, com uma função Lagrangiana aumentada associada ao problema (2.1) somente com restrições de igualdade; a seguir, estenderam o resultado para o caso de variáveis canalizadas e apresentaram dois algoritmos para resolver o problema (2.1). Por último, estabeleceram a convergência global para seu algoritmo.

HAGER (1993) trabalhou com o problema (2.1) apenas com restrições de igualdade. Apresentou um algoritmo de otimização irrestrita, que combina, em um esquema de otimização irrestrita, o método do gradiente conjugado, a função Lagrangiana aumentada vista em HESTENES (1969) e uma atualização do multiplicador para obter convergência quadrática global. Definiu o erro nas restrições e o erro nas condições de KKT, tentando “balancear” esses erros durante o processo, regulando o aumento ou não do fator de

penalidade e não os utilizando como um critério de parada. Tal algoritmo é baseado em uma técnica de Lagrangiana aumentada e é composto por três passos.

ROCKAFELLAR (1993) apresentou uma teoria sobre multiplicadores de Lagrange, dedicando uma parte de seu artigo à função Lagrangiana aumentada. Essa função Lagrangiana aumentada tem como base a apresentada pelo autor em 1973 e é estendida para problemas com restrições de igualdade e desigualdade. O autor definiu e demonstrou um teorema de ponto de sela, o qual é muito mais poderoso que o definido para a Lagrangiana clássica, devido ao fato de ser válido na ausência de convexidade no problema original. Ressaltou, ainda, que, apesar de todas as vantagens da Lagrangiana aumentada, ela não possui a separabilidade da Lagrangiana clássica com respeito a x , a qual é extremamente importante na resolução de problemas de grande porte.

BERTSEKAS & TSENG (1993) analisaram o método dos multiplicadores exponencial para problemas de minimização restrita convexa, os quais trabalham com o método da função Lagrangiana aumentada, utilizando uma função penalidade exponencial. A principal motivação para se usar a Lagrangiana aumentada exponencial é o fato de ela ser duas vezes diferenciável se as funções f e h também o são, podendo ser utilizado o método de Newton de modo mais eficiente e com garantia de convergência superlinear. O método destes autores também tem sido usado para resolver muitos problemas de programação linear encontrados na programação da produção de energia em sistemas de potência; um exemplo dessa utilização é encontrado em BERTSEKAS (1982) e LAUER *et al.* (1981). BERTSEKAS & TSENG forneceram também uma análise da taxa de convergência do método quando ele é aplicado a problemas lineares.

BOUKARI & FIACCO (1995) apresentaram um levantamento histórico dos métodos de programação não linear (métodos de penalidade, métodos de pontos interiores e métodos da função Lagrangiana aumentada) e uma lista de programas existentes que utilizam tais métodos. O objetivo desses autores foi, somente, o de relatar, de maneira sucinta, o que cada um dos autores citados por eles fez no período de 1968 a 1993.

PSIAKI (1995), com a finalidade de obter uma convergência global robusta e uma convergência local rápida, propôs um novo algoritmo para programação não linear, utilizando a função Lagrangiana aumentada, proposta por POWELL (1969) para problemas com restrições de igualdade, e estendida por FLETCHER (1975) para problemas com restrições de desigualdade. O autor caracterizou seu algoritmo como uma variação do algoritmo proposto por HESTENES (1969) e por POWELL (1969) e verificou que aquele tem convergência mais robusta que a do *Nonlinear Programming of Systems Optimization Laboratory (NPSOL)* – programa desenvolvido no *Department of EESOR/ Stanford University* – e velocidade similar à deste.

Observamos que, a partir dos próximos trabalhos, começaremos a encontrar métodos mistos, isto é, métodos que passam a utilizar o método da função barreira e o método da função Lagrangiana aumentada associados.

SHANNO *et al.* (1996) sugeriram, em seu trabalho, o uso de uma função mista para resolver o problema (2.1); nessa função mista as restrições de igualdade são tratadas por uma função Lagrangiana aumentada e as de desigualdade por uma função barreira-penalidade – que foi estudada em BREITFELD & SHANNO (1996).

CONN *et al.* (1997) apresentaram uma classe de métodos denominados métodos de barreira Lagrangianos. Trabalharam com o problema (2.1) somente com restrições de desigualdade do tipo maior ou igual e, ainda, acrescentaram a ele a canalização da variável primal x . Formularam, para este problema, uma nova função auxiliar com restrições de igualdade e de desigualdade do tipo maior ou igual. Essa função é denominada função Lagrangiana aumentada/barreira lagrangiana. Nela, as restrições de desigualdade e igualdade são tratadas pela função barreira e função Lagrangiana aumentada, respectivamente. Conn *et al.* destacaram que seu método de barreira lagrangiano resolveu noventa por cento dos problemas-testes e, na maioria das vezes, foi considerado mais eficiente que o da função Lagrangiana aumentada.

BEN-TAL & ZIBULEVSKY (1997) estudaram uma classe de métodos para resolver problemas convexos, baseados em uma função Lagrangiana aumentada não quadrática, para a qual os fatores de penalidade são funções dos multiplicadores. Esses métodos foram denominados métodos dos multiplicadores barreira/penalidade (PBM). Eles são especificados por uma função barreira /penalidade ϕ e uma função de atualização do fator de penalidade ω (função sublinear dos multiplicadores). Trabalharam com o problema (2.1), considerando apenas as restrições de desigualdade.

Para determinar a solução x que minimiza a sua função Lagrangiana aumentada utilizaram o método de Newton. Os autores apresentaram as atualizações dos multiplicadores de Lagrange e dos fatores de penalidade e citam três exemplos de métodos do tipo PBM: a função Lagrangiana aumentada vista em ROCKAFELLAR (1973a), o método dos multiplicadores exponencial visto em BERTSEKAS (1993) e o método de barreira modificada que utiliza uma função logarítmica perturbada. Porém, para desenvolver seu trabalho, utilizaram duas funções: uma função penalidade logarítmica-quadrática e uma função penalidade *reciprocal*-quadrática. Apresentaram, também, uma interpretação dual do método e as propriedades de convergência. Descreveram a implementação, ressaltando as funções de atualização dos fatores de penalidade.

DUSSAULT (1998), com o objetivo de analisar a taxa de convergência, trabalhou com a mesma função Lagrangiana aumentada apresentada em HESTENES (1969). Utilizou o problema (2.1) considerando apenas as restrições de igualdade. Analisou a taxa de convergência local para as variáveis primais e duais, utilizando o método com diferentes regras de atualização dos multiplicadores de Lagrange. O autor apresentou um algoritmo, garantiu sua convergência global e mostrou algumas regras para a atualização dos fatores de penalidade. Concluiu seu trabalho com a observação de que o método da função Lagrangiana aumentada pode ter uma convergência rápida por meio de uma cuidadosa atualização dos fatores de penalidade.

DOSTÁL *et al.* (1999) introduziram um algoritmo que trabalha com problemas de programação quadrática estritamente convexa com restrições de igualdade, esse algoritmo é uma modificação do visto em HESTENES (1969). Os autores utilizaram, em seu algoritmo,

um controle de precisão da solução dos problemas auxiliares, ou seja, dos problemas de minimizar a Lagrangiana aumentada com relação à variável primal x . Esse controle de precisão é caracterizado pelos autores como a principal melhora do método de HESTENES (1969) e exige que o erro do gradiente da função Lagrangiana aumentada seja menor que um escalar positivo multiplicado pelo erro nas restrições. Tal controle, bem como o algoritmo, é muito semelhante ao visto em HAGER (1993), diferenciando-se deste por ser usado como critério de parada, ao invés de indicar quando o fator de penalidade deve ser aumentado. O principal interesse na elaboração desse método é a resolução de problemas de grande porte.

GOLDFARB *et al.* (1999) apresentaram um método, denominado método da Lagrangiana aumentada barreira modificada, para resolver o problema (2.1) com restrições de igualdade e desigualdade do tipo maior ou igual. Tal método é a combinação dos métodos da Lagrangiana aumentada de HESTENES (1969) e POWELL (1969) e o da função barreira modificada de POLYAK (1992). Pode ser considerado um método de Lagrangiana aumentada interior-exterior. Utiliza uma função Lagrangiana barreira modificada, na qual as restrições de desigualdade são tratadas por meio de um termo de barreira modificada, e as restrições de igualdade, por um termo de Lagrangiana aumentada.

KREJIC *et al.* (2000) introduziram um algoritmo da função Lagrangiana aumentada, estudada em HESTENES (1969), que utilizava aproximações Gauss-Newton, da matriz Hessiana, nas iterações internas. Por meio do modelo Gauss-Newton, as aproximações quadráticas da função Lagrangiana aumentada tornam-se convexas. KREJIC *et al.* consideraram que o uso de aproximações da Hessiana, ao invés da Hessiana clássica, torna seu método mais eficiente. Apresentaram estudos comparativos utilizando o software *LANCELOT*.

MIJANGOS & NABONA (2001) apresentaram um novo método para resolução de problemas de minimização com função objetivo não linear, restrições lineares e não lineares, e variáveis canalizadas. Nesse método, o problema original é resolvido por meio de sucessivas minimizações de um problema auxiliar. O problema auxiliar minimiza uma função Lagrangiana aumentada que inclui somente as restrições não lineares; esse problema está

sujeito às restrições de igualdade e variáveis canalizadas. Os autores utilizaram a função Lagrangiana aumentada encontrada em HESTENES (1969) e POWELL (1969). O método é particularmente interessante quando as restrições lineares são equações de conservação de fluxo, pois existem técnicas eficientes para resolver problemas de rede não linear. Analisaram a viabilidade de estimar os multiplicadores das restrições não lineares pela aplicação das condições de KKT e utilizaram técnicas de redução de variáveis durante a otimização. Compararam o desempenho computacional dessa estimativa com a atualização dos multiplicadores, proposta por HESTENES e POWELL.

SHERALI *et al.* (2001) demonstraram uma investigação de três abordagens de função penalidade exterior para resolver problemas de programação linear. Estas abordagens são: método penalidade conjunto ativo I, método penalidade baseado na igualdade-desigualdade e método da função da Lagrangiana aumentada. Foram exploradas variantes particulares eficazes para cada método juntamente com comentários e experiências sobre estratégias e alternativas de algoritmos investigados empiricamente. Testes de classificação, com base na média dos resultados computacionais obtidos, foram realizados usando duas estatísticas diferentes que avaliam a velocidade de convergência e qualidade e precisão da solução. Em geral, a variante do método da função Lagrangiana aumentada foi a que rendeu o melhor desempenho no que diz respeito às duas estatísticas citadas anteriormente. No entanto, para problemas de programação linear altamente esparsos, o método penalidade conjunto ativo I pareceu ser a melhor alternativa entre os algoritmos testados. Os métodos testados foram competitivos (por vezes favorável) em alcançar uma solução definitiva (ainda que apenas perto do ideal) para problemas de programação linear de grande porte e baixa densidade.

BELTRAN & HEREDIA (2002) propuseram uma relaxação da Lagrangiana aumentada para o problema de *Unit commitment*. Afirmou que uma das principais desvantagens do método de relaxação da Lagrangiana aumentada é que o termo quadrático introduzido por este método não é separável. Foi comparado empiricamente e teoricamente dois métodos designados para lidar com a não separabilidade da função Lagrangiana: o método do problema de princípio auxiliar e o método de blocos de coordenadas descendentes. Além disso, foi usado o problema de *Unit commitment* para testar ambos os métodos. O objetivo do

problema de *Unit commitment* é otimizar a produção e distribuição de eletricidade, considerando um horizonte de planejamento de curto prazo.

ARGAEZ & TAPIA (2002) mostraram uma linha de pesquisa do método primal-dual de pontos interiores para Programação não linear introduzido por El-Bakry, Tapia, Tsuchiya e Zhang. A linha de pesquisa utilizou uma função mérito nova, que incorpora uma modificação da função Lagrangiana aumentada-padrão e uma fraca noção de centralidade. Eles estabeleceram uma teoria de convergência global e promissores experimentos numéricos foram apresentados.

MOGUERZA & PRIETO (2003) descreveram uma implementação eficiente de um algoritmo de método de pontos interiores Lagrangiana aumentada para problemas não convexos que usou direções de curvatura negativa. Essas diretrizes asseguraram a convergência de segunda ordem de KKT e melhoraram a eficiência computacional do processo. Alguns aspectos relevantes da execução foram a estratégia de combinar uma direção de curvatura negativa e uma direção de Newton modificado. Como o objetivo principal do trabalho foi a utilização prática de curvatura negativa, um conjunto de resultados numéricos em problemas testes pequenos foi apresentado. Com base nesses resultados, a relevância da utilização de direções de curvatura negativa foi discutida.

AVELINO & VICENTE (2003) contribuíram para o desenvolvimento de multiplicadores do método da função Lagrangiana aumentada para a programação não linear geral, introduzindo uma nova atualização para os multiplicadores correspondentes às restrições de desigualdade. A atualização mantém naturalmente a positividade dos multiplicadores sem a necessidade de uma projeção positiva, como resultado da verificação das condições necessárias de primeira ordem para a minimização de uma função de penalidade Lagrangiana aumentada modificada. No novo método dos multiplicadores, o papel destes são trocados: os multiplicadores correspondentes às restrições de desigualdade são atualizados de forma explícita, ao passo que os multiplicadores correspondentes às restrições de igualdade são aproximados implicitamente. Foi mostrado que as propriedades básicas da

convergência local do método tradicional dos multiplicadores são válidos também para o método proposto.

DINIZ-EHRHARDT *et al.* (2004) introduziram métodos da função Lagrangiana aumentada que utilizam o gradiente projetado espectral (SPG) para a solução das restrições convexas. O SPG é um algoritmo de grande porte vinculado à otimização com restrições e foi introduzido por Birgin, Martinez, e Raydan. O algoritmo SPG mostrou-se surpreendentemente eficaz para a solução de muitos problemas de minimização de grande porte, com restrições canalizadas. Portanto, é natural testar o seu desempenho nas resoluções dos subproblemas que aparecem em métodos de programação não linear baseados em Lagrangianas aumentadas. Os métodos propostos neste trabalho foram testados em dois conjuntos de problemas. O primeiro, composto por um subconjunto significativo de problemas restritos de grande porte não lineares, e o segundo, composto por uma família de problemas de localização na formulação minimax.

BIRGIN *et al.* (2005) introduziram algumas alternativas para o método da função Lagrangiana aumentada. O mais famoso algoritmo da Lagrangiana aumentada para minimização com restrições de desigualdade é conhecido como método de Powell-Hestenes-Rockafellar (PHR). O principal inconveniente do PHR é que a função objetivo do subproblema não é duas vezes continuamente diferenciável. Isto motivou a realização deste trabalho e a introdução de novas alternativas. Foram apresentadas interpretações interessantes e comparações numéricas entre os métodos propostos.

BAPTISTA *et al.* (2005) apresentaram uma nova abordagem para resolução do problema de FPO. Esta abordagem foi baseada no método Lagrangiana aumentada barreira Logarítmica e considerou a aplicação do método primal-dual barreira logarítmica para magnitude de tensão e os *taps* variáveis dos transformadores e as demais restrições foram tratadas através do método da função Lagrangiana aumentada. A função Lagrangiana agregou todas as restrições.

DU *et al.* (2006) mostraram uma classe de Lagrangiana aumentada para resolver problemas de otimização não linear com restrições de igualdade através de técnicas de minimização irrestrita. Os autores demonstraram que, uma solução do problema original restrito e os correspondentes valores dos multiplicadores de Lagrange, podem ser encontrados através da realização de uma única minimização irrestrita da Lagrangiana aumentada. Em particular, para problemas de programação quadrática com restrições de igualdade, o otimizador é obtido pela minimização de uma função quadrática no espaço relaxado.

Em ANDREANI *et al.* (2006) são introduzidos dois algoritmos da Lagrangiana aumentada para resolver sistemas de KKT. Os algoritmos diferem na maneira na qual os parâmetros de penalidade são atualizados. Foi provado que os pontos factíveis que satisfazem as restrições, são soluções KKT. O limitante dos parâmetros de penalidade foi estabelecido e experimentos numéricos foram apresentados.

NOLL (2007) considerou os programas de otimização não linear com restrições de desigualdade matricial, também conhecidos como programas semidefinidos não lineares, para provar a convergência local do método da função Lagrangiana aumentada que utiliza funções de penalidade. A condição de otimalidade suficiente de segunda ordem e um teorema da função implícita adequado foram utilizados para provar a convergência linear local, sem a necessidade de conduzir o parâmetro de penalidade a 0.

LUO *et al.* (2007) descreveram vários tipos de funções Lagrangiana aumentada para otimização restrita mostrando as relações entre elas e discutindo-as em termos gerais. Uma das principais contribuições deste trabalho foi mostrar que a suposição do limite dos multiplicadores de Lagrange, que parece indispensável na análise de convergência clássica, pode ser descartada se certas regras de atualização para esses multiplicadores forem apresentadas. Isso resultou em algoritmos da Lagrangiana aumentada com duas estratégias, uma de atualização do multiplicador condicional e outra de multiplicador normalizado. Resultados de convergência global de cada um desses algoritmos foram provados sem o pressuposto do limite. Essa pesquisa sugere investigações futuras, tais como a eficácia dessas regras de atualização em relação ao desempenho numérico e sob quais condições que cada um

dos algoritmos propostos de Lagrangiana aumentada modificada goza de uma taxa de convergência linear.

BIRGIN & MARTÍNEZ (2007) propuseram uma aproximação quasi-Newton com pré-condicionadores secantes, tendo em conta a estrutura da Lagrangiana aumentada que vem do trabalho popular de Powell-Hestenes-Rockafellar popular. Sugeriram um algoritmo combinado que usa o método quase-Newton ou um procedimento Newton-truncado, dependendo da existência de restrições ativas na função Lagrangiana aumentada. Métodos da função Lagrangiana aumentada para otimização em larga escala geralmente exigem algoritmos eficientes para minimização restrita.

Em 2008, novamente BIRGIN & MARTÍNEZ apresentaram uma avaliação da combinação entre duas abordagens: a Lagrangiana aumentada clássica de Powell-Hestenes-Rockafellar e a de pontos interiores. Métodos de otimização que empregam esta Lagrangiana aumentada clássica são ferramentas úteis para resolver problemas de programação não linear. Sua reputação diminuiu nos últimos 10 anos devido ao sucesso comparativo de algoritmos de pontos interiores, que são assintoticamente mais rápidos. A idéia deste trabalho foi produzir um método competitivo, mais robusto e eficiente. Além disso, um algoritmo híbrido adicional foi definido, em que o método de pontos interiores foi substituído pela resolução do sistema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) identificados pelo algoritmo da Lagrangiana aumentada.

CARVALHO *et al.* (2008) estabeleceram uma combinação do método do gradiente reduzido e o método da função Lagrangiana aumentada com barreiras, como nova abordagem para resolver o problema de FPO. Neste trabalho, também exploraram as características específicas das relações entre as variáveis do problema de FPO.

LUO *et al.* (2008) apresentaram novas propriedades de convergência dos métodos primal-dual baseados na função Lagrangiana aumentada de ROCKAFELLAR para problemas de otimização com restrições de desigualdade. Quatro diferentes estratégias algorítmicas foram consideradas para contornar a condição de limite dos multiplicadores na análise de

convergência para o método primal-dual. Convergência para uma solução ótima global do problema original foi primeiro estabelecido por um esquema básico primal-dual. As propriedades de convergência do método da função Lagrangiana aumentada usando a regra de atualização dos multiplicadores condicional foram então apresentadas. Os autores investigaram também o uso de critérios de atualização do parâmetro de penalidade e normalização dos multiplicadores nos métodos da função Lagrangiana aumentada. Por fim, apresentaram alguns resultados numéricos preliminares para as quatro estratégias de métodos da função Lagrangiana aumentada.

Ainda em 2008, MENDONÇA *et al.*, motivado pela simetria da Jacobiana de KKT dos problemas de otimização não linear, utilizou métodos quasi-Newton para resolver sistemas não lineares como aceleradores de algoritmos do método da função Lagrangiana aumentada com restrições de igualdade. Este método é uma abordagem importante para a resolução de problemas de otimização restrita. Em muitas situações, geralmente isso envolve a solução de uma série de sistemas de equações não lineares. A melhora do desempenho do método da função Lagrangiana aumentada é geralmente associada ao desenvolvimento de uma abordagem inovadora para a solução destes sistemas, no caso deste artigo, a abordagem dos métodos quasi-Newton citados acima. Correções de rank 1 foram introduzidas e a convergência e resultados numéricos foram apresentados mostrando a confiabilidade da abordagem proposta.

WU *et al.* (2009) apresentaram as propriedades de convergência global do método primal-dual usando uma classe de funções Lagrangiana aumentada para problemas de otimização não convexos com restrições de desigualdade. Construíram quatro métodos da função Lagrangiana aumentada modificada baseados em diferentes estratégias algorítmicas. Mostraram que a convergência para um ponto KKT pode ser assegurada sem a necessidade de condição de limite da sequência de multiplicadores.

WANG & LI (2009) classificaram diferentes funções Lagrangianas aumentadas em três classes unificadas. Com base em duas formulações, foram construídos, respectivamente, dois métodos da função Lagrangiana aumentada convergentes que não exigem a solvabilidade

global da relaxação Lagrangiana e cujas propriedades de convergência global, não exigem o limite da sequência de multiplicadores e a qualificação da restrição. Em particular, quando a sequência de pontos não converge, é dada uma condição necessária e suficiente para a convergência do valor objetivo dos pontos de iteração. Derivaram dois algoritmos dos multiplicadores que exigem a mesma condição de convergência e possuem as mesmas propriedades que as propostas nos métodos da função Lagrangiana aumentada convergentes. A existência de um ponto de sela global é fundamental para garantir o sucesso da pesquisa dual. Os autores generalizaram, ainda, os teoremas de existência de um ponto de sela global na literatura no âmbito das classes unificadas de funções Lagrangiana aumentada.

Em 2010, novamente LUO *et al.* apresentaram novos resultados de convergência dos métodos da função Lagrangiana aumentada para programação matemática com restrições de complementaridade (MPCC). Métodos da função Lagrangiana aumentada modificada baseados em quatro diferentes estratégias algorítmicas foram considerados para a reformulação dos MPCC em otimização não convexa restrita. Mostraram que a convergência para a solução ótima global do problema pode ser assegurada sem a necessidade da condição de limite dos multiplicadores.

IUSEM & NASRI (2010) introduziram métodos da função Lagrangiana aumentada para resolver problemas em que os conjuntos factíveis são definidos por desigualdades convexas, generalizando o método da função Lagrangiana aumentada proximal para otimização restrita. Em cada iteração, as variáveis primais são atualizadas resolvendo um problema de desigualdade variacional irrestrito, e, em seguida, as variáveis duais são atualizadas através de uma fórmula. A análise completa de convergência é apresentada e permite a solução inexata dos subproblemas.

Finalmente, ECHEVERRI *et al.* (2010) aplicaram dois métodos de decomposição matemática para resolver o FPO relativo de uma maneira coordenada e descentralizada no contexto de um sistema de energia interligado multi-área. O primeiro método é baseado em uma abordagem da Lagrangiana aumentada usando o princípio de problema auxiliar (APP). O segundo método usa as técnicas de decomposição baseadas nas condições de otimalidade de

primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). A viabilidade de cada método que foi utilizado na decomposição de multi-área ORPF foi estudada e os correspondentes modelos matemáticos são apresentados. Sistemas testes foram usados para demonstrar o funcionamento e a eficácia dos métodos de decomposição.

2.4 HISTÓRICO DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Historicamente o FPO foi originado por uma nova formulação para o problema de Despacho Econômico (DE). O DE tem sido utilizado em concessionárias de eletricidade, para determinar o quanto cada unidade geradora deve produzir de potência para atender à demanda total do sistema ao menor custo. Um sistema elétrico de potência (SEP) deve ser planejado para fornecer energia elétrica, respeitando os padrões de qualidade para esse fornecimento e garantindo a continuidade do serviço.

No início da década de 60, surgiram os primeiros trabalhos sobre FPO. Nesse período, destacamos CARPENTIER (1962), o qual propôs um modelo geral para o problema de FPO, por meio da incorporação das equações de fluxo de potência ao problema de DE, e utilizou o teorema de KKT para resolvê-lo. Seu modelo é um problema de otimização restrita, não linear, não convexo e de grande porte, cujo desenvolvimento acompanha os avanços das técnicas de otimização. Tem por objetivo determinar o ponto ótimo de operação de um sistema elétrico de potência. Pode ser caracterizado como um problema de otimizar uma função objetivo, a qual representa um desempenho do sistema, sujeito a restrições de igualdade, que representam as equações do fluxo de potência, e de desigualdade, que representam as restrições funcionais e as variáveis de estado. Sua formulação matemática é dada pelo problema (2.1).

CARPENTIER resolveu (2.1) transformando-o em um problema irrestrito por meio da função Lagrangiana clássica. O mínimo desse problema é alcançado aplicando-se as condições de otimalidade, o que resulta em um sistema não linear. Esse sistema é resolvido pelo método de Gauss-Seidel, obtendo-se, assim, a solução do problema.

Após a formulação matemática do FPO por CARPENTIER, inúmeros trabalhos com novas técnicas de otimização e/ou com mudanças na modelagem do problema aplicados ao FPO foram publicados na literatura especializada. Essas técnicas de otimização diferem entre si basicamente pela trajetória do processo de otimização e as variações na modelagem do problema, incluem o uso de outros tipos de funções objetivo e de outras restrições. A seguir será apresentado um histórico com as propostas de resolução do problema de FPO nas últimas décadas.

As primeiras propostas para resolver o problema de FPO, utilizavam técnicas do gradiente, conhecidos como métodos de primeira ordem. Um dos primeiros trabalhos nesta linha foi o de DOMMEL & TINNEY (1968), no qual propuseram uma abordagem que utilizava o método do gradiente reduzido para resolver o problema de FPO. Esse trabalho tornou-se um clássico na área. O método proposto baseia-se na procura de uma solução ótima através de um algoritmo de passo descendente. É um método no qual após mudanças nas variáveis de controle, as equações do fluxo de potência são resolvidas pelo método de Newton. Neste, as restrições funcionais de desigualdade são tratadas por parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange são usados para associar as equações do fluxo de potência à função objetivo. Utiliza-se a técnica de projeção do gradiente para as variáveis de controle que atingem um de seus limites. Para atualização das variáveis de controle utiliza-se um passo, determinado por uma busca unidimensional. O método tem uma eficiência de primeira ordem para a minimização da função objetivo. Apesar do seu rigor matemático, essa abordagem apresenta convergência lenta, “zigzagueando” próxima à solução ótima. Existem, ainda, limitações na determinação do tamanho do passo das variáveis de controle e sensibilidade quanto ao tamanho do passo do gradiente – elementos capazes de comprometer o processo de convergência.

Em 1969, SASSON apresentou uma abordagem para solução do problema de FPO, na qual utiliza dois métodos: o método de Powell, usado na resolução de problemas de otimização com restrição, e o método Fletcher-Powell, que é uma técnica de minimização irrestrita. O problema de FPO é escrito de acordo com o método de Powell, o qual torna-o um problema irrestrito. Esse método acrescenta novas variáveis ao problema, as quais são reduzidas durante o processo iterativo. Aplica-se, então o método Fletcher-Powell, que

calcula o gradiente da função gerada pelo método de Powell. As restrições de igualdade são consideradas durante todo o processo iterativo, enquanto que, somente as restrições de desigualdade violadas fazem parte do processo. Essa técnica verifica a convergência em cada estágio do processo de otimização. Embora o método funcione muito bem para sistemas pequenos, apresentou problemas de convergência com sistemas de grande porte e técnicas de decomposição devem ser usadas. Além disso, é limitado por ser incapaz de lidar com mais que duas restrições por nó.

SASSON *et al.* (1973) aplicaram o método de penalidade ao problema de FPO. Esta técnica tem o objetivo de tornar o problema restrito em irrestrito, penalizando todas as restrições de igualdade e desigualdade que são violadas. É uma técnica quadrática onde as variáveis são todas atualizadas simultaneamente, usando a matriz Hessiana da função objetivo penalizada. A cada iteração do método os valores das penalidades são aumentados, e a matriz Hessiana da função penalidade é calculada. O processo é repetido até que todas as restrições sejam satisfeitas. Técnicas de esparsidade são aplicadas à matriz Hessiana da função penalidade. À medida que, os fatores de penalidade crescem, a matriz Hessiana da função penalidade pode se tornar mal condicionada, comprometendo a convergência do processo de otimização. Este foi o primeiro trabalho a utilizar a matriz Hessiana da função Lagrangiana na resolução do FPO.

Com o objetivo de corrigir as deficiências do método proposto por DOMMEL & TINNEY (1968), RASHED & KELLY (1974) introduziram uma abordagem de segunda-ordem para atualização das variáveis de controle do problema. Nesse trabalho, o método do gradiente utilizado para resolver o subsistema formado pelas derivadas da função Lagrangiana em relação às variáveis de controle foi substituído pela matriz Hessiana da função Lagrangiana. As restrições de igualdade representadas pelas equações do fluxo de potência, são incorporadas à função Lagrangiana por meio dos multiplicadores de Lagrange enquanto que, as restrições de desigualdade são incorporadas por meio de parâmetros de penalidade. A eficiência da abordagem proposta foi examinada resolvendo um sistema de 5 barras.

SUN *et al.* (1984) apresentaram uma nova abordagem na qual utilizaram uma formulação do método de Newton e o desacoplamento do problema em dois subproblemas, denominados subproblema de potência ativa e subproblema de potência reativa. As restrições de igualdade são incorporadas à função objetivo por meio da utilização dos multiplicadores de Lagrange, e as restrições de desigualdade por meio de multiplicadores de Lagrange e fatores de penalidade, originando uma função auxiliar. As restrições são divididas em dois grupos: o grupo das restrições penalizadas e o grupo das restrições consideradas ativas na solução. As restrições ativas são incorporadas à função objetivo por meio de multiplicadores de Lagrange. O método do conjunto ativo foi utilizado para identificar as restrições ativas na solução. O ponto ótimo do problema ocorre quando as condições de otimalidade de KKT estiverem satisfeitas, e as equações do fluxo de potência tradicional estiverem dentro de uma determinada tolerância. O método de SUN *et al.* apresenta a convergência de segunda ordem e tem como desafio no desenvolvimento do algoritmo a identificação do conjunto de restrições de desigualdade ativas na solução.

SANTOS *et al.* (1988) aplicaram o método da função Lagrangiana aumentada para resolver problemas de FPO. Este método está baseado nas técnicas de programação não linear e combina aproximações duais e penalidades. A cada iteração a função Lagrangiana aumentada é minimizada em relação às variáveis primais utilizando o método de Newton. Os multiplicadores de Lagrange são aplicados às restrições de igualdade e desigualdade, sendo atualizados visando à maximização da função dual Lagrangiana aumentada associada ao problema original. Como este método controla o aumento do parâmetro de penalidade, o problema de mal condicionamento da matriz Hessiana da função Lagrangiana é evitado. Logo, esse método pode ser considerado um aperfeiçoamento do método proposto por SUN *et al.* (1984). Tem como vantagem o fato de não precisar identificar as restrições de desigualdade que são ativas na solução. A solução é obtida quando todas as restrições de igualdade e desigualdade são satisfeitas dentro de uma tolerância especificada.

COSTA *et al.* (1990) apresentaram uma nova abordagem resultante da associação dos métodos propostos por SUN *et al.* (1984) e SANTOS *et al.* (1988). Trabalharam com o método de Newton e com uma abordagem da função Lagrangiana aumentada, em que as restrições de igualdade não são penalizadas. Nesse método não há necessidade de identificar

as restrições de desigualdade ativas na solução, eliminando-se, assim, o desafio do algoritmo de SUN *et al.* (1984). As restrições de igualdade são tratadas pelo método de Newton.

Em HUNEAULT & GALIANA (1991) encontramos um amplo estudo das metodologias aplicadas na resolução do FPO desde sua formulação por Carpentier.

MONTICELLI & LIU (1992) propuseram uma nova abordagem do método de Newton para resolver problemas de FPO. Os autores combinaram os métodos dos multiplicadores de Lagrange e da função penalidade. A principal diferença deste método e do proposto por SUN *et al.* (1984), está na utilização de um movimento adaptativo da penalidade, o qual assegura que a matriz Hessiana da função Lagrangiana seja definida positiva durante o processo de solução do problema, sem que isso afete a convergência do método.

Em 1994, GRANVILLE utilizou pela primeira vez, um método de pontos interiores denominado método primal-dual barreira logarítmica. Esse método utiliza multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdade e transforma as desigualdades em igualdades utilizando variáveis de folga. Essas variáveis são incorporadas à função objetivo por meio da função barreira logarítmica e penalizadas com um fator de barreira, o qual tenderá a zero. Este algoritmo apresenta muita sensibilidade quanto à escolha do fator de barreira, podendo até mesmo divergir, em alguns casos. A solução é encontrada quando todas as restrições do problema original forem satisfeitas.

Nos estudos na área de pontos interiores, destacam-se, ainda, WU *et al.* (1994), os quais sugerem uma extensão do método primal-dual. O algoritmo é denominado método preditor-corretor, diferenciando-se do método primal-dual pela introdução de termos não lineares nas condições de otimalidade.

QUINTANA *et al.* (1995) trabalharam com o método primal-dual barreira logarítmica e apresentaram um algoritmo que resolve diretamente a minimização de perdas na transmissão (funções não lineares).

TORRES *et al.* (1998) propuseram a resolução do problema de FPO na forma retangular e não polar; dessa forma, justificaram que, tanto a função objetivo quanto as restrições são quadráticas. Aplicaram o método visto em GRANVILLE (1994) e apresentaram técnicas para a escolha do passo, para a redução do fator de barreira e para o uso de um preditor-corretor.

MOMOH *et al.* (1999a,b) apresentaram uma ampla revisão sobre técnicas para resolução do problema de FPO. Dividiram as técnicas em seis categorias: programação não linear, em que citam as técnicas de minimização sequencial irrestritas, o método de Lagrange e o método da Lagrangiana aumentada; programação quadrática, referindo-se aos métodos quase-Newton e de sensibilidade; solução das condições de otimalidade baseadas em Newton, em que são obtidas as condições de KKT; programação linear, onde comentam sobre a utilização do método simplex e do método simplex revisado; versão híbrida de programação inteira, em que apresentaram uma mistura de técnicas de programação linear e inteira; e, finalmente, os métodos de pontos interiores, no qual encontra-se a aplicação das técnicas que surgiram após a introdução do método de Karmarkar.

Em NEJDAWI *et al.* (2000) é proposto um algoritmo de programação quadrática sequencial para resolver o problema de FPO. O algoritmo é formado por um ciclo de linearização externo e um ciclo de otimização interno. O ciclo interno resolve um problema de programação quadrática reduzido e relaxado. Como a relaxação das restrições mantém o problema com uma dimensão pequena, o algoritmo é considerado, pelos autores, muito eficiente. As iterações do ciclo externo podem ser comparadas ao FPO de Newton, e as do ciclo interno, como eficientes iterações de pontos interiores. São apresentados testes computacionais para os sistemas IEEE de 30, 57, 118 e 300 barras. Os autores observaram que o número de iterações internas e externas não sofreu grandes alterações para as diferentes dimensões dos problemas.

COSTA *et al.* (2000) apresentaram uma comparação entre três abordagens de otimização para resolver o problema de FPO: penalidade e conjunto ativo (PCA), primal-dual (PD) e barreira logarítmica primal-dual (BLPD). As três abordagens são baseadas no método de Newton. O desempenho dos métodos foi comparado considerando: as perdas ativa na

transmissão, a geração de potência reativa, o número total de iterações para convergência e o tempo de processamento. Os resultados obtidos mostram que cada método tem vantagens e desvantagens e os autores recomendam uma mistura deles, explorando as qualidades de cada um. Apresentaram testes computacionais para os sistemas IEEE 30, 57 e 118 barras.

COSTA & COSTA (2000) desenvolveram uma nova abordagem com o objetivo de melhorar o desempenho do método de Newton para o problema de FPO. Nela, os multiplicadores de Lagrange são calculados diretamente do sistema linearizado, e a fatoração ocorre por elementos e não na forma da estrutura em blocos. Essa abordagem apresenta como vantagens: a diminuição do tempo de processamento e a economia de memória. Os autores apresentaram uma comparação entre o novo método e o método tradicional de Newton, proposto por SUN *et al.* (1984), e resultados computacionais para os sistemas elétricos: IEEE de 14, 30 e 118 barras e BRASIL 810 barras.

COSTA (2002) apresentou uma nova abordagem para o problema de despacho ótimo de reativos, baseado em uma função Lagrangiana aumentada do problema original. As condições de necessárias primeira ordem de KKT são resolvidas pelo método de Newton modificado. Neste método, a informação de segunda ordem do sistema original de equações é aproximada e a informação de primeira ordem é mantida intacta. O método de Newton modificado utiliza uma aproximação da matriz Hessiana considerando somente os termos da diagonal principal. Segundo o autor o método proposto requer menos memória computacional que outros algoritmos atualmente disponíveis. A eficiência da abordagem proposta foi examinada resolvendo os sistemas IEEE 30 barras e o equivalente brasileiro sul-sudeste.

ADIBI *et al.* (2003) aplicaram o método da Lagrangiana aumentada barreira modificada para a seleção ótima da posição do *tap* de transformadores e no conjunto de pontos da tensão dos geradores com seus limites de operação sobre e sub-excitado, uma variação do problema de FPO. A abordagem da Lagrangiana aumentada barreira modificada é uma combinação do método da Lagrangiana aumentada para restrições de igualdade de HESTENES (1969) e POWELL (1969) e do método da função barreira modificada de POLYAK (1992). Nessa abordagem, as restrições de desigualdade são tratadas com um termo

de barreira modificada e as de igualdade com um termo de Lagrangiana aumentada. Segundo os autores a principal dificuldade do método está relacionada com as primeiras atualizações dos multiplicadores de Lagrange. Os autores afirmam que a necessidade de encontrar uma estimativa para o mínimo irrestrito a cada passo sem um critério de parada bem fundamentado pode tornar a fase inicial do processo computacional lenta e difícil. A viabilidade do método é demonstrada usando um sistema teste de 160 barras em operação numa indústria.

SOUSA *et al.* (2003) apresentaram uma nova abordagem para solução do problema de despacho ótimo de reativos, a qual melhora o desempenho do método de Newton. O método divide as restrições de desigualdade em dois grupos: restrições tratadas por penalidade e as tratadas pelo método primal-dual barreira logarítmica. As restrições de desigualdade como as magnitudes das tensões e os *tap* dos transformadores que violam seus limites são penalizadas e associadas à função objetivo por meio de termos de penalidade. Enquanto que as do segundo grupo, as injeções de potência reativa são tratadas pelo método primal-dual barreira logarítmica. A função Lagrangiana é construída e multiplicadores de Lagrange são associados às restrições de igualdade do problema. As condições de necessárias de primeira ordem são aplicadas à função Lagrangiana, gerando um sistema de equações não lineares, o qual é resolvido pelo método de Newton e pela atualização dos termos de penalidade e de barreira. Testes foram realizados nos sistemas CESP 53 e IEEE 118 barras, nos quais se verificou a eficiência do método.

BAPTISTA *et al.* (2006) apresentaram uma nova abordagem para minimização das perdas em sistemas elétricos de potência. Esta abordagem considera a aplicação do método primal-dual barreira logarítmica para a magnitude de tensão e para os *taps* variáveis dos transformadores e as demais restrições são tratadas através do método da Lagrangiana aumentada. A função Lagrangiana agrega todas as restrições. As condições necessárias de primeira-ordem são obtidas pelo método de Newton, e pela atualização das variáveis duais e fatores de penalidade. Os resultados dos testes numéricos com os sistemas 162 barras e o brasileiro sul-sudeste mostram o bom desempenho do algoritmo.

SOUSA & COSTA (2007) propuseram uma nova abordagem para resolver o problema de despacho ótimo de reativos, com base na abordagem de Newton e o método primal-dual barreira logarítmica. Uma função Lagrangiana é associada ao problema modificado. As condições de otimalidade necessárias de primeira ordem são satisfeitas pelo método de Newton e pela atualização dos termos de penalidade e barreira. A abordagem proposta não exige que o conjunto de ligação de restrições seja identificado e pode ser utilizada a partir de um ponto de partida infactível. A eficácia da abordagem proposta foi analisada pela resolução dos sistemas BRASIL 53 e 662 barras.

WANG *et al.* (2007) afirmaram que o mercado da eletricidade desregulamentado solicita para o FPO robustas ferramentas que podem proporcionar a) uma convergência determinista; b) cálculo preciso dos preços; c) suporte de custo de uma variedade de recursos e serviços, tais como: energia real, energia reativa, suporte de tensão, etc; d) a modelagem do fluxo de potência ativo e reativo dos sistemas de grande porte. A maioria das pesquisas anteriores sobre FPO tem-se centrado em questões de desempenho no contexto dos sistemas regulados, sem dar muita ênfase às exigências a)-c). Os autores discutiram, neste trabalho, os desafios computacionais criados pela desregulamentação e tentaram resolvê-los através da introdução de novas formulações de FPO e algoritmos. O método da função Lagrangiana aumentada baseada na região de confiança (TRALM), o método de ponto interior primal-dual passo controlado (SCIPM) e custo variável restrito (CCV) foram métodos propostos para a nova formulação do FPO. As novas formulações e algoritmos, juntamente com vários outros existentes, são testadas e comparadas com modelos de sistemas de energia de grande porte.

BELATI & COSTA (2008) apresentaram uma nova abordagem para o problema de alocação de perdas na transmissão em um sistema desregulado. Esta abordagem pertence ao conjunto de métodos incrementais. Estes métodos tratam todas as restrições da rede elétrica, ou seja, controle, estado e restrições funcionais. A abordagem foi baseada no teorema ótimo de perturbação. A partir de um determinado ponto de operação ótimo, obtido pelo FPO, as cargas são perturbadas e um novo ponto de operação ótimo que satisfaça as restrições é determinada pela análise de sensibilidade. Esta solução é utilizada para obter a alocação dos coeficientes de perdas para os geradores e cargas da rede elétrica. Os resultados numéricos comparam a abordagem proposta com outros métodos obtidos aplicados à rede de transmissão

conhecida, IEEE 14 barras. Outros testes enfatizaram a importância de se considerar as restrições de operação da rede elétrica. O método foi aplicado a um sistema equivalente ao sistema BRASIL, composto de 787 barras, e o método foi comparado com a técnica utilizada em 2008, pelo Centro de Controle Brasileiro.

BELATI *et al.* (2008) propuseram uma abordagem de sensibilidade ótima aplicada no circuito terciário de controle de geração automática. A abordagem é baseada no teorema de perturbação não linear. De um ponto de operação ótimo obtido pelo FPO, o novo ponto de operação ótimo é determinado diretamente, após uma perturbação, ou seja, sem a necessidade de um processo iterativo. Este novo ponto de operação ótimo satisfaz as restrições do problema para pequenas perturbações nas cargas. Os fatores de participação e do ponto de ajuste da tensão dos reguladores automáticos de voltagem (AVR) dos geradores são determinados pela técnica de sensibilidade ótima, considerando os efeitos da minimização de perdas de potência ativa e as restrições da rede elétrica. Os fatores de participação e de ponto de ajuste da tensão dos geradores são fornecidas diretamente para um programa computacional de simulação dinâmica do controle de geração automática, nomeado por Modo de Sensibilidade de Potência. Os resultados dos testes foram apresentados para mostrar o bom desempenho desta abordagem.

SOUSA *et al.* (2009) apresentaram uma nova abordagem, barreira modificada preditor-corretor (PCMBA), para minimizar as perdas de potência ativa em estudos de planejamento de sistemas elétricos. No PCMBA, as restrições de desigualdade são transformadas em igualdades através da introdução de variáveis auxiliares positivas, que são relaxadas pelo parâmetro de barreira, e tratadas pelo método de barreira modificada. As condições necessárias de primeira ordem da função Lagrangiana são resolvidas pelo método de Newton preditor-corretor. A perturbação das variáveis auxiliares resulta em uma expansão da região factível do problema original, atingindo os limites das restrições de desigualdade. A viabilidade da abordagem proposta foi demonstrada utilizando vários sistemas teste do IEEE e um sistema de potência real de 2.256 barras correspondente ao sistema interligado Sul-Sudeste Brasileiro. Os resultados mostraram que a utilização do método preditor-corretor com a abordagem barreira modificada acelera a convergência do problema em termos de número de iterações e tempo computacional.

BELATI *et al.* (2010) mostraram uma abordagem para a alocação de perdas na transmissão ativa entre os agentes do sistema elétrico. A abordagem utiliza informações das variáveis primais e duais do FPO na estratégia de alocação das perdas. Os coeficientes de alocação são determinados através de multiplicadores de Lagrange. Este trabalho enfatizou a necessidade de considerar as restrições de operação e parâmetros dos sistemas na solução do problema. Como exemplo, foi apresentado em detalhes um sistema de 3 barras, bem como um teste comparativo com os principais métodos de alocação. O estudo do sistema IEEE 14 barras foi realizado para verificar a influência das restrições e dos parâmetros de alocação de perdas no sistema.

ECHEVERRI *et al.* (2010) aplicaram dois métodos de decomposição matemática para executar o FPO reativo de uma maneira coordenada e descentralizada no contexto de um sistema de energia interligado multi-área. O primeiro método é baseado em uma abordagem Lagrangiana aumentada usando o princípio de problema auxiliar (APP). O segundo método usa as técnicas de decomposição baseadas nas condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). A viabilidade de cada método que foi utilizado na decomposição de multi-área ORPF foi estudada e os correspondentes modelos matemáticos são apresentados. Os sistemas IEEE RTS-96, o IEEE 118 barras e um sistema didático 9 barras foram usados para demonstrar o funcionamento e a eficácia dos métodos de decomposição.

SOUZA *et al.* (2010) apresentaram estudos de caso em sistemas de potência pela Análise de Sensibilidade (AS), orientados pelo problema de FPO em diferentes cenários de operação. Os estudos de casos começam a partir de uma solução ótima obtida pelo FPO. Esta solução ótima é chamada caso-base, e a partir desta solução, novos pontos de operação podem ser avaliados pela AS quando ocorrer perturbações no sistema. A AS é baseada no teorema de Fiacco e tem a vantagem de não ser um processo iterativo. Com a finalidade de mostrar o bom desempenho dos estudos técnicos propostos, foram realizados testes nos sistemas padrão IEEE 14, 118 e 300 barras.

Finalmente, YAN *et al.* (2011) mostraram o Método de pontos interiores coordenação-decomposição (MPID) aplicado na multi-área do problema de FPO reativo. Neste método, a zona distribuída do problema de FPOR é primeiramente formada introduzindo variáveis de fronteira duplicada. Em seguida, o método não linear primal-dual de pontos interiores é diretamente aplicado no problema de FPOR no qual um sistema de Newton com (border-matrix-blocks) é formulado. O problema é resolvido nas iterações de decomposição com sistema de Newton desacoplado. A proposta do MPID herda o bom desempenho do tradicional método de pontos interiores com um recurso apropriado para cálculos distribuídos entre várias áreas. Isto pode ser facilmente estendido para outros problemas de otimização de sistemas de energia. Foram apresentados resultados numéricos de cinco sistemas teste do IEEE e foram feitas comparações com os resultados obtidos usando o tradicional método do problema de princípio auxiliar (APP) citados em ECHEVERRI *et al.* (2010). Os resultados mostraram que o MPID para a multi-área do problema de FPOR requer menos iterações e menor tempo de CPU, tem melhor estabilidade na convergência e atinge melhor otimalidade em relação ao método APP.

No próximo capítulo será apresentada uma revisão dos métodos de otimização os quais fornecem a sustentação teórica para a abordagem proposta.

CAPÍTULO 3

REVISÃO DE MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se uma revisão de métodos de otimização restrita, os quais fornecem suporte teórico para a apresentação da abordagem proposta. Serão vistos: o método de Newton-Lagrangiano, o método de barreira modificada e o método da função Lagrangiana aumentada, segundo BAZARAA (1993), os quais permitem a resolução de um grande número de problemas de programação não linear.

3.1 O MÉTODO DE NEWTON-LAGRANGIANO

Dado um problema de otimização restrita, o método de Newton para resolução de sistemas de equações, pode ser aplicado para se analisar as condições necessárias de primeira-ordem da função Lagrangiana.

Seja o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeito a : } g_i(x) = 0, & i = 1, 2, \dots, m \end{array} \quad (3.1)$$

Associada ao problema (3.1), temos a função Lagrangiana

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x), \quad (3.2)$$

em que λ_i é o multiplicador de Lagrange associado à restrição $g_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$.

O processo consiste em determinar valores, para x e λ , que satisfaçam as condições necessárias de otimalidade sobre a função Lagrangiana (3.2). Assim:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ isto é, } \nabla_x L = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \text{ isto é, } \nabla_\lambda L = 0$$

O sistema de equações não lineares (3.3) é resolvido pelo Método de Newton. Esse método utiliza a expansão em série de Taylor até primeira-ordem em torno de x^k e λ^k , gerando um sistema linearizado, com expressões da seguinte forma:

$$\nabla_x L(x^k, \lambda^k) + \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) \Delta x^k + \nabla_{x\lambda}^2 L(x^k, \lambda^k) \Delta \lambda^k = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla_\lambda L(x^k, \lambda^k) + \nabla_{\lambda x}^2 L(x^k, \lambda^k) \Delta x^k + \nabla_{\lambda\lambda}^2 L(x^k, \lambda^k) \Delta \lambda^k = 0,$$

ou ,

$$\nabla_x L(x^k, \lambda^k) + \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) \Delta x^k + \nabla_x g(x^k)^T \Delta \lambda^k = 0 \quad (3.5)$$

$$g(x^k) + \nabla_x g(x^k) \Delta x^k = 0,$$

em que $\nabla_x g(x^k)^T = (\nabla_x g_1(x), \dots, \nabla_x g_m(x))$.

O novo ponto é obtido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \Delta \lambda^k, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que $\Delta \mathbf{x}$ e $\Delta \lambda$ são denominados vetores de direções de busca.

O sistema (3.5) pode ser representado na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(\mathbf{x}^k, \lambda^k) & \nabla_x g(\mathbf{x}^k)^T \\ \nabla_x g(\mathbf{x}^k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \lambda^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L(\mathbf{x}^k, \lambda^k) \\ g(\mathbf{x}^k) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

ou, de forma simplificada:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x L \\ \nabla_\lambda L \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

em que a matriz dos coeficientes do sistema é denominada matriz Lagrangiana e encontra-se dividida em quatro submatrizes: a matriz Hessiana ($\mathbf{H}$), a matriz Jacobiana $\mathbf{J} = \nabla_{\lambda x}^2$ e sua transposta, e uma matriz nula.

O mínimo da função será atingido quando os novos valores de $\mathbf{x}$ e λ satisfizerem as condições de KKT para o problema original.

3.1.1 ALGORITMO

ALGORITMO DO MÉTODO DE NEWTON-LAGRANGIANO

- 1) Dado o problema (3.1), construa a função Lagrangiana (3.2);
- 2) Faça $k=0$ e dê uma estimativa inicial para $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ e λ^k ;
- 3) Resolva o sistema (3.7) e atualize as variáveis usando (3.6);

4) x^{k+1} e λ^{k+1} satisfazem as condições de KKT, **pare**.

Caso contrário, volte para o passo 3.

3.1.2 DIFICULDADES COMPUTACIONAIS

O método de Newton Lagrangiano exige que o ponto inicial esteja na vizinhança de x^* e λ^* , fato que, muitas vezes, pode inviabilizar o método, pois não existe garantia de convergência.

3.2 O MÉTODO DE BARREIRA MODIFICADA

POLYAK, em 1992, desenvolveu uma teoria de métodos da função barreira modificada (FBM). Estes métodos combinam a função Lagrangiana clássica e a função barreira clássica (FBC), buscando explorar as melhores propriedades de cada uma dessas funções. A FBM pode ser considerada como uma função Lagrangiana aumentada interior e é utilizada na resolução de problemas restritos. O método de barreira modificada transforma o problema restrito em um irrestrito equivalente, e resolve uma sequência de problemas irrestritos até atingir o ótimo. Uma das vantagens desse método é a obtenção de, pelo menos, uma solução factível, caso ocorra uma parada prematura do mesmo, pois esse método trabalha somente com problemas de desigualdade cujo interior é não-vazio. Assim, assume-se o problema (2.1) somente com restrições de desigualdade, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{3.9}$$

Para um melhor entendimento do método e de suas propriedades descreve-se um método de barreira modificada genérico para o problema (3.9), segundo NASH *et al.* (1994). A cada iteração principal do método de barreira modificada o problema irrestrito:

Minimizar $M(x, u, \mu)$

x

é resolvido, em que $M(x, u, \mu) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p u_j \psi(\mu^{-1} h_j(x) + 1)$,

Os parâmetros u_j , $j=1, \dots, p$, são estimativas dos multiplicadores de Lagrange na solução x^* . A função ψ é uma função monotônica, estritamente côncava e de classe C_2 definida no intervalo $(0, +\infty)$. Uma possível escolha é $\psi(\cdot) = \ln(\cdot)$, uma outra é a função inversa $\psi(\cdot) = 1/(\cdot)$.

Neste problema, a solução x^k é usada para atualizar u_j , $j=1, \dots, p$, via $u_j^{k+1} = u_j^k \psi'(\mu^{-1} h_j(x^k) + 1)$.

Se, por exemplo, $\psi(\cdot) = \ln(\cdot)$, a região factível do problema (3.9) é equivalente ao conjunto $\{x : \mu \psi(\mu^{-1} h_j(x) + 1) \geq 0, j=1, \dots, p\}$.

Desta forma, a função barreira modificada é a Lagrangiana clássica para o problema (3.9) com as restrições expressas de forma equivalente. O uso do termo de barreira $\psi(\mu^{-1} h_j(x) + 1)$ corresponde à relaxação das restrições de modo que tenham a forma $h_j(x) \geq -\mu$.

Esta relaxação representa uma expansão da região factível. Consequentemente, a “região factível” implícita para o subproblema de barreira modificada varia com o parâmetro de barreira μ .

Diferente da função barreira logarítmica clássica, a função barreira modificada e suas derivadas existem na solução x^* para qualquer parâmetro de barreira, μ , positivo. Em particular, se u^* é o vetor dos multiplicadores de Lagrange correspondente a x^* , e se $\psi(\cdot) = \ln(\cdot)$, então a função barreira modificada tem as seguintes propriedades para qualquer $\mu > 0$:

$$P1. \quad M(x^*, u^*, \mu) = f(x^*)$$

$$P2. \quad \nabla_x M(x^*, u^*, \mu) = \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^p u_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

$$P3. \quad \nabla_x^2 M(x^*, u^*, \mu) = \nabla^2 f(x^*) - \sum_{j=1}^p u_j^* \nabla^2 h_j(x^*) + \mu^{-1} \nabla h(x^*) \text{diag}(u^*)^2 \nabla h(x^*)^T$$

Quando o problema é de programação convexa, segue de P2 que

$$P4. \quad x^* = \arg \min \{M(x, u^*, \mu)\} \quad \text{para qualquer } \mu > 0.$$

Isso significa que, se os multiplicadores de Lagrange ótimos são conhecidos, pode-se resolver o problema restrito (3.9) usando um único problema de otimização irrestrito independente do valor do parâmetro de barreira. POLYAK (1992) mostrou que, para problemas convexos, se os multiplicadores de Lagrange iniciais são positivos, e os parâmetros de barreira são menores que um valor limite $\bar{\mu}$, o método converge.

Nesse mesmo trabalho, POLYAK apresenta três tipos de funções barreira modificadas: uma para a função barreira de CARROL, outra para a função barreira de FRISCH e a função barreira *Shifted*. No entanto, essas funções têm sérias desvantagens porque elas, bem como suas derivadas, não existem em x^* e essas funções vão para infinito quando $x \rightarrow x^*$. Considerando isto, POLYAK definiu as funções barreira de FRISCH e CARROL modificadas, estas funções associadas ao problema (3.9) serão mostradas a seguir.

- Função barreira de FRISCH modificada, $F(x, u, \mu)$:

$$F(x, u, \mu) = \begin{cases} f(x) - \mu \sum_{j=1}^p u_j \ln(\mu^{-1} h_j(x) + 1), & \text{se } x \in \text{int } \Omega_\mu \\ \infty, & \text{se } x \notin \text{int } \Omega_\mu, \end{cases} \quad (3.10)$$

- Função barreira de CARROL modificada, $C(x, \lambda, \mu)$:

$$C(x, u, \mu) = \begin{cases} f(x) + \mu \sum_{j=1}^p u_j \left[\left(\mu^{-1} h_j(x) + 1 \right)^{-1} - 1 \right], & \text{se } x \in \text{int } \Omega_\mu \\ \infty, & \text{se } x \notin \text{int } \Omega_\mu, \end{cases} \quad (3.11)$$

sendo: int a parte interior do conjunto e Ω_μ é o conjunto relaxado dado por:
 $\Omega_\mu = \{x : \mu^{-1} h_j(x) + 1 \geq 0, j = 1, \dots, p\}.$

Com a adição de um fator de deslocamento (de valor 1) dentro do termo logarítmico das funções barreira modificadas (3.10) e (3.11), a convergência finita nos métodos do tipo barreira foi alcançada e tais funções tornam explícito o uso do multiplicador de Lagrange, u_j . O esquema de atualização desses multiplicadores é de complexidade computacional muito baixa. O algoritmo da função barreira modificada possui uma propriedade de convergência finita ao invés de assintótica como no método da função barreira clássica (FBC). Isto significa que a solução ótima encontrada no método da FBM pode estar na fronteira da região factível, o que não acontece com a FBC, para a qual a solução somente pode estar próxima à fronteira, mas nunca alcançá-la.

Consequentemente, as restrições tratadas pela FBM podem ser nulas, diferente da FBC. Outra propriedade do método da FBM é que o parâmetro de barreira, μ , não precisa estar muito próximo de zero para alcançar a solução, desde que os multiplicadores de Lagrange corretos, u_j , sejam obtidos. Assim, o condicionamento da Hessiana é fortemente melhorado.

Neste trabalho utiliza-se a função barreira de Frisch modificada (3.10). Os passos do método de barreira modificada utilizando essa função aplicada ao problema (3.10), conforme POLYAK (1992) são:

Minimiza-se (3.10) com relação à x e satisfaz-se a condição:

$$\nabla f(x) - \sum_{j=1}^p \frac{u_j}{\mu^{-1} h_j(x) + 1} \nabla h_j(x) = 0 \quad (3.12)$$

Aplica-se o método de Newton para solucionar a equação não linear (3.12). Dessa forma, tem-se a seguinte equação:

$$\nabla^2 f(x) - \sum_{j=1}^p \frac{u_j}{\mu^{-1} h_j(x) + 1} \nabla^2 h_j - \sum_{j=1}^p \frac{u_j}{(\mu^{-1} h_j(x) + 1)^2} \nabla h_j(x) \nabla h_j(x) = 0 \quad (3.13)$$

Reescrevendo a equação (3.13) de forma simplificada, tem-se o seguinte sistema:

$$\nabla_{xx}^2 F(x, u, \mu) \Delta x = -\nabla_x F(x, u, \mu) \quad (3.14)$$

em que Δx é o vetor de correção.

Atualiza-se o vetor x por:

$$x^{k+1} = x^k + \rho \Delta x \quad (3.15)$$

sendo $\rho > 0$ o tamanho do passo o qual é encontrado através da regra de Goldstein-Armijo conforme NOCEDAL & WRIGHT (1999).

A equação (3.12) sugere a seguinte regra para atualização do vetor das estimativas dos multiplicadores de Lagrange:

$$u_j^{k+1} = \frac{u_j^k}{\mu^{(k+1)-1} h_j(x^{(k+1)}) + 1}, \quad j=1, \dots, p. \quad (3.16)$$

3.2.1- ALGORITMO

ALGORITMO DO MÉTODO DA FUNÇÃO BARREIRA MODIFICADA

- 1) Dado o problema (3.9), construa a função barreira modificada (3.10);
 - 2) Faça $k=0$, $u^0 = (1, \dots, 1)$ e dê uma estimativa inicial para x^0 , e $\mu^0 > 0$;
 - 3) Construa o sistema (3.14) e resolva-o;
 - 4) Atualize x^k utilizando (3.15) e se x^k satisfaz as condições de comprimento de passo de Goldstein, vá para o passo 5. Caso contrário, retorne ao passo 3;
 - 5) Se a norma do vetor gradiente for menor que uma precisão ε vá para o passo 6. Caso contrário volte para o passo 3;
 - 6) Se x^{k+1} satisfaz KKT, **pare**. Caso contrário, vá para o passo 7;
 - 7) Atualize o vetor das estimativas dos multiplicadores de Lagrange, u , usando (3.16) e μ utilizando uma heurística. Faça $k=k+1$ e retorne ao passo 3.
-
-

Observa-se que um ponto inicial factível não é obrigatório, mas a condição inicial $h_j(x^0) > -\mu$, $j=1, \dots, p$ deve ser satisfeita.

3.2.2- DIFICULDADES COMPUTACIONAIS

Uma das dificuldades encontradas no método de barreira modificada é o cálculo do tamanho do passo para atualização das variáveis, pois caso isso seja feito sem um critério de parada bem fundamentado, o processo computacional pode consumir tempo e até divergir. A escolha do parâmetro de barreira inicial e a sua forma de atualização também podem interferir no processo de otimização.

3.3 O MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA

O método da função Lagrangiana aumentada, ou método dos multiplicadores, foi introduzido por HESTENES (1969) e POWELL (1969) para problemas do tipo (3.1). Em 1973, ROCKAFELLAR introduziu um método para tratar as restrições de desigualdade. O método dos multiplicadores foi desenvolvido com o objetivo de amenizar os problemas de mal condicionamento que ocorrem com a função penalidade.

Iniciamos a apresentação de tal método utilizando o problema (3.1); apresentaremos, a seguir, a estratégia de ROCKAFELLAR (1973a) para restrições de desigualdade e uma modificação dessa estratégia pode ser encontrada em COSTA (1990).

Seja o problema (3.1). Associado a ele temos o problema de penalidade quadrática

$$\text{Minimizar } f(x) + c \sum_{i=1}^m g_i^2(x) \quad (3.17)$$

onde $c \geq 0$, e necessitamos $c \rightarrow \infty$ e $g_i(x) \rightarrow 0$ para obter ótimo restrito do problema original.

Com o objetivo de determinar o mínimo do problema inicial para um valor finito de c , POWELL (1969) trabalhou com o seguinte problema perturbado

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } g_i(x) = \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.18)$$

e apresentou a seguinte função auxiliar

$$La(x, c) = f(x) + c \sum_{i=1}^m (g_i(x) - \epsilon_i)^2, \quad (3.19)$$

a qual denominou função Lagrangiana aumentada, onde $c \geq 0$ é um fator de penalidade e ϵ é um vetor de perturbações.

Expandimos (3.19) e obtemos:

$$La(x, c) = f(x) + c \sum_{i=1}^m g_i^2(x) - 2c \sum_{i=1}^m g_i(x) \epsilon_i + c \sum_{i=1}^m \epsilon_i^2. \quad (3.20)$$

Denotamos $\lambda_i = -2c\epsilon_i$ e desprezamos o termo constante $c \sum_{i=1}^m \epsilon_i^2$, reescrevendo (3.20) da seguinte forma:

$$La(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + c \sum_{i=1}^m g_i^2(x), \quad (3.21)$$

a qual é a forma da Lagrangiana aumentada apresentada em HESTENES (1969), onde λ_i , $i=1, \dots, m$, são os multiplicadores de Lagrange e c é o fator de penalidade.

Em seu artigo, HESTENES sugere que o valor de c escolhido seja suficientemente grande, e, para uma estimativa λ^k de λ e x^k , minimizando $La(x, \lambda)$, temos que:

$$\nabla_x La(x^k, \lambda^k) = \nabla_x f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_x g_i(x^k) + 2c \sum_{i=1}^m g_i(x^k) \nabla_x g_i(x^k) = 0, \quad (3.22)$$

ou

$$\nabla_x La(x^k, \lambda^k) = \nabla_x f(x^k) + \sum_{i=1}^m (\lambda_i + 2cg_i(x^k)) \nabla_x g_i(x^k) = 0. \quad (3.23)$$

Assim, HESTENES propõe que a atualização dos multiplicadores seja feita por

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + 2cg_i(x^k), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.24)$$

Já POWELL (1969), apesar de apresentar uma regra de atualização semelhante, acrescenta em seu trabalho a exigência da diminuição do resíduo máximo

$$r^{\max} = \max_i \|g_i(x^k)\| \quad (3.25)$$

por um fator de quatro em cada iteração, isto é:

Se $r(x^{k+1}) \leq \frac{1}{4} r(x^k)$, atualize os multiplicadores de Lagrange;

Se $r(x^{k+1}) > \frac{1}{4} r(x^k)$, atualize o fator de penalidade.

Desta forma, os multiplicadores de Lagrange e o fator de penalidade não são atualizados simultaneamente.

A função Lagrangiana aumentada pode ser vista de duas formas:

- como a função penalidade quadrática associada ao problema

$$\text{Minimizar } \{ f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) : g_i(x) = 0 \}; \quad (3.26)$$

ou

- como a função Lagrangiana associada ao problema

$$\text{Minimizar } \{ f(x) + c \sum_{i=1}^m g_i^2(x) : g_i(x) = 0 \}; \quad (3.27)$$

Seja agora o problema (3.9), utilizando a estratégia de ROCKAFELLAR (1973a).

Transformamos as restrições de desigualdade em igualdade com o uso de uma variável de folga z_j da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } h_j(x) + z_j = 0, \quad j = 1, \dots, p. \\ &\quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (3.28)$$

O problema (3.28) pode ser transformado no seguinte problema equivalente

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & f(x) + \frac{1}{2}c \sum_{j=1}^p (h_j(x) + z_j)^2 \\ \text{sujeito a : } & h_j(x) + z_j = 0, \quad j = 1, \dots, p. \\ & z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $c \geq 0$ é o fator de penalidade.

A função Lagrangiana associada a (3.29) é definida por:

$$La(x, \pi, z) = f(x) + \sum_{j=1}^p \pi_j (h_j(x) + z_j) + \frac{c}{2} \sum_{j=1}^p (h_j(x) + z_j)^2, \quad (3.30)$$

onde π é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Minimizamos (3.30) com relação a z_j , $j = 1, \dots, p$, e aplicamos as condições necessárias de otimalidade:

$$\nabla_{z_j} La(x, \pi, z) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (3.31)$$

isto é,

$$\pi_j + c(h_j(x) + z_j) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (3.32)$$

resultando em,

$$z_j = -\frac{\pi_j}{c} - h_j(x), \quad j = 1, \dots, p. \quad (3.33)$$

Como $z_j \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, então

$$z_j = \begin{cases} -\frac{\pi_j}{c} - h_j(x), & \text{se } -\frac{\pi_j}{c} - h_j(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } -\frac{\pi_j}{c} - h_j(x) \leq 0 \end{cases}, j=1, \dots, p. \quad (3.34)$$

Substituímos (3.34) em (3.30) e obtemos a função Lagrangiana aumentada:

$$La(x, \pi) = f(x) + \sum_{j=1}^r \begin{cases} \pi_j h_j(x) + \frac{c}{2} h_j^2(x), & \text{se } h_j(x) \geq -\frac{\pi_j}{c} \\ -\frac{\pi_j^2}{2c}, & \text{se } h_j(x) \leq -\frac{\pi_j}{c} \end{cases} \quad (3.35)$$

apresentada por ROCKAFELLAR (1973a).

O Método da função Lagrangiana aumentada consiste em resolver uma sequência de problemas irrestritos, com $\bar{\pi}$ fixo, dados por

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad La(x, \bar{\pi}). \quad (3.36)$$

Para isso, adota-se uma sequência de valores para $(\bar{\pi}, \bar{c})$, minimizando-se (3.35), isto é:

$$\nabla_x La = \nabla_x f(x) + \sum_{j=1}^p \begin{cases} \pi_j \nabla_x h_j(x) + c h_j(x) \nabla_x h_j(x), & \text{se } h_j(x) \geq -\frac{\pi_j}{c} \\ 0, & \text{se } h_j(x) \leq -\frac{\pi_j}{c} \end{cases} = 0 \quad (3.37)$$

ou seja,

$$\nabla_x f(x) + \sum_{j=1}^p \begin{cases} (\pi_j + c h_j(x)) \nabla_x h_j(x), & \text{se } h_j(x) \geq -\frac{\pi_j}{c} \\ 0, & \text{se } h_j(x) \leq -\frac{\pi_j}{c} \end{cases} = 0 \quad (3.38)$$

sugerindo-se a seguinte atualização dos multiplicadores:

$$\pi_j^{k+1} = \begin{cases} \pi_j^k + c^k h_j(x^k), & \text{se } h_j(x^k) \geq -\frac{\pi_j^k}{c^k} \\ 0, & \text{se } h_j(x^k) \leq -\frac{\pi_j^k}{c^k} \end{cases}, j=1, \dots, p. \quad (3.39)$$

ROCKAFELLAR também apresentou a função Lagrangiana aumentada para o problema (2.1) com restrições de igualdade e desigualdade da seguinte forma:

$$La(x, \lambda, \pi) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + c \sum_{i=1}^m g_i^2(x) + \sum_{j=1}^p \begin{cases} \pi_j h_j(x) + \frac{c}{2} h_j^2(x), & \text{se } h_j(x) \geq -\frac{\pi_j}{c} \\ -\frac{\pi_j^2}{2c}, & \text{se } h_j(x) \leq -\frac{\pi_j}{c} \end{cases}, \quad (3.40)$$

em que λ e π são os vetores dos multiplicadores de Lagrange associados à igualdade e à desigualdade, respectivamente, e c é o fator de penalidade. Em ambos os métodos o fator de penalidade é atualizado por um parâmetro $\beta > 1$

3.3.1 ALGORITMO

ALGORITMO DO MÉTODO DA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA (POWELL (1969))

- 1) Dado o problema (3.1), construa (3.21).
- 2) Faça $k = 0$, $\lambda^0 = (1, \dots, 1)$ e escolha um fator de penalidade c^0 . Dê uma estimativa inicial para x^0 e $\beta > 1$.
- 3) Defina o resíduo $r(x^0) = \infty$, em que (3.25) é denominado violação das restrições.
- 4) Resolva o seguinte problema utilizando um método de minimização irrestrita, com $\bar{\lambda}$ fixo:

$$\underset{x}{\text{Minimizar}} \quad La(x, \lambda)$$

em que $La(x, \lambda)$ é definida em (3.21).

Admita x^{k+1} como uma solução.

Se $r(x^{k+1}) = 0$, então, **pare**.

Caso contrário,

Se $r(x^{k+1}) \leq \frac{1}{4} r(x^k)$, vá para o passo 5.

Se $r(x^{k+1}) > \frac{1}{4} r(x^k)$, atualize o fator de penalidade

$c^{k+1} = \beta c^k$ e vá para o passo 4.

- 5) Atualize os multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + c^k g_i(x^k). \text{ Vá para o passo 4.}$$

3.3.2 DIFICULDADES COMPUTACIONAIS

Uma das vantagens do método dos multiplicadores, em relação ao método das penalidades, é a não necessidade de o parâmetro de penalidade tender ao infinito para garantir a convergência. Podendo gerenciar o crescimento do fator de penalidade, o método “alivia” o

problema de mal condicionamento, porém não consegue evitá-lo totalmente. Uma dificuldade do método é a escolha inicial de fatores e parâmetros de penalidade e dos multiplicadores.

No próximo capítulo apresentaremos o método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada.

CAPÍTULO 4

O MÉTODO DA NOVA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA BARREIRA MODIFICADA

Neste capítulo propõe-se uma nova abordagem que utiliza os métodos da função barreira modificada e da Lagrangiana aumentada. Nessa abordagem, as restrições canalizadas são tratadas pela função barreira modificada apresentada por POLYAK (1992) e as restrições de igualdade são tratadas pela função Lagrangiana aumentada apresentada por HESTENES (1969) e POWELL (1969), tendo como objetivo o aproveitamento das melhores características de cada método.

4.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o problema de programação não linear

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } g_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &\quad h_{\min_j} \leq h_j(x) \leq h_{\max_j} \quad j = 1, 2, \dots, p \\ &\quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo: $x^T = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $(x_{\min})^T = (x_{\min_1}, \dots, x_{\min_n}) \in \mathbb{R}^n$; $(x_{\max})^T = (x_{\max_1}, \dots, x_{\max_n}) \in \mathbb{R}^n$.

Vários métodos podem ser utilizados na resolução do problema (4.1). Entre eles, citamos os métodos da Lagrangiana aumentada e de barreira modificada. O método da

Lagrangiana aumentada apresenta melhor comportamento que o método das penalidades; determina a solução de problemas, nos quais o método das penalidades não obtém sucesso; e ameniza o problema de mal condicionamento. O método de barreira modificada tem como qualidade mais importante, a representação explícita dos multiplicadores de Lagrange, pois estes auxiliam no processo de convergência do método. As funções barreira modificadas e suas derivadas são definidas na solução, não crescem para o infinito, a matriz Hessiana da função Lagrangiana tem melhor comportamento que a da barreira clássica e o parâmetro de barreira não necessita tender para zero durante o processo de convergência. Essa teoria foi desenvolvida para problemas convexos.

Assim, com o objetivo de aproveitar as melhores características dos métodos citados anteriormente, é proposta uma nova abordagem formada pela combinação desses métodos, a qual é denominada método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada. Essa abordagem trata as restrições de desigualdade pelo método de barreira modificada e as restrições de igualdade originais do problema pelo método da função Lagrangiana aumentada. Logo, as restrições de desigualdade e as restrições em variáveis canalizadas são transformadas em igualdades através do uso de variáveis de folga e excesso positivas. Essas variáveis são incorporadas à função objetivo através da função barreira modificada. Associa-se as restrições de igualdade originais do problema a função Lagrangiana aumentada apresentada por HESTENES & POWELL (1969) e as igualdades restantes uma função Lagrangiana, o que determina a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada. As condições necessárias de primeira ordem são aplicadas a essa nova função, resultando em um sistema não linear, o qual é resolvido pelo método de Newton. A solução pelo método de Newton fornece as direções de busca, as quais juntamente com os passos, são utilizados para atualização das variáveis duais – os multiplicadores de Lagrange associados às igualdades não originais do problema (4.1) – e as variáveis primais – o vetor x e as variáveis de folga ou excesso. O parâmetro de barreira é atualizado segundo MELMAN & POLYAK, (1996). O parâmetro de penalidade é atualizado por um fator de correção. Os multiplicadores de Lagrange associados à Lagrangiana aumentada são atualizados pela regra de HESTENES & POWELL (1969). Os multiplicadores de Lagrange associados à barreira modificada são atualizados pela regra de POLYAK (1992).

Nas próximas seções, apresentam-se a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada, seu método e seu algoritmo.

4.2 A NOVA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA BARREIRA MODIFICADA

Apresenta-se a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada, baseada nos conceitos dos métodos de barreira modificada e da função Lagrangiana aumentada apresentados no capítulo 3.

Dado o problema (4.1), desdobramos as restrições canalizadas em duas restrições de desigualdade e, posteriormente, as transformamos em igualdades através da adição de variáveis de folga e excesso positivas, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \\
 &\text{sujeito a: } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 &\quad h_j(x) - s_{1j} = h_{\min_j}, \quad j = 1, \dots, p \\
 &\quad h_j(x) + s_{2j} = h_{\max_j}, \quad j = 1, \dots, p \\
 &\quad x - s_3 = x_{\min} \\
 &\quad x + s_4 = x_{\max} \\
 &\quad s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0, s_4 \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

sendo:

$(s_1)^T = (s_{1_1}, \dots, s_{1_p})$, com $s_{1_j} \geq 0$, $(s_2)^T = (s_{2_1}, \dots, s_{2_p})$, com $s_{2_j} \geq 0$, $(s_3)^T = (s_{3_1}, \dots, s_{3_n})$, com $s_{3_r} \geq 0$, e $(s_4)^T = (s_{4_1}, \dots, s_{4_n})$, com $s_{4_r} \geq 0$, $r = 1, \dots, n$. As variáveis s_{1j} , $j=1, \dots, p$, bem como as componentes do vetor s_3 são denominadas variáveis de excesso. As variáveis s_{2j} , $j=1, \dots, p$ bem como as componentes do vetor s_4 são denominadas variáveis de folga. Denominam-se s_1 , s_2 , s_3 e s_4 de vetores auxiliares.

As variáveis de folga e de excesso vistas em (4.2) são incorporadas à função objetivo através da função barreira modificada e o seguinte problema é originado:

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } F(x,s) \\
& \text{sujeito a: } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& \quad h_j(x) - s_{1j} = h_{\min_j}, \quad j = 1, \dots, p \\
& \quad h_j(x) + s_{2j} = h_{\max_j}, \quad j = 1, \dots, p \\
& \quad x - s_3 = x_{\min} \\
& \quad x + s_4 = x_{\max}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

em que:

$$F(x,s) = f(x) - \mu_1 \left(\sum_{j=1}^p u_{1j} \ln(\mu_1^{-1} s_{1j} + 1) + \sum_{j=1}^p u_{2j} \ln(\mu_1^{-1} s_{2j} + 1) + \sum_{r=1}^n u_{3r} \ln(\mu_1^{-1} s_{3r} + 1) + \sum_{r=1}^n u_{4r} \ln(\mu_1^{-1} s_{4r} + 1) \right)$$

e u_q , $q = 1, \dots, 4$ são as estimativas dos multiplicadores de Lagrange associados à função barreira modificada, segundo POLYAK (1992).

As restrições de igualdade originais do problema (4.3) são tratadas através da função Lagrangiana aumentada e as demais pela função Lagrangiana. Desta forma, a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada (NFLABM) associada ao problema (4.3) é dada por:

$$\begin{aligned}
\text{NFLABM} = & f(x) - \mu_1 \left(\sum_{j=1}^p u_{1j} \ln(\mu_1^{-1} s_{1j} + 1) + \sum_{j=1}^p u_{2j} \ln(\mu_1^{-1} s_{2j} + 1) + \sum_{r=1}^n u_{3r} \ln(\mu_1^{-1} s_{3r} + 1) + \right. \\
& \left. + \sum_{r=1}^n u_{4r} \ln(\mu_1^{-1} s_{4r} + 1) \right) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x)) - \sum_{j=1}^p \pi_{1j} (h_j(x) - s_{1j} - h_{\min_j}) - \sum_{j=1}^p \pi_{2j} (h_j(x) + s_{2j} - h_{\max_j}) + \\
& - \sum_{r=1}^n \pi_{3r} (x_r - s_{3r} - x_{\min}) - \sum_{r=1}^n \pi_{4r} (x_r + s_{4r} - x_{\max}) + \frac{\mu_2}{2} \left(\sum_{i=1}^m (g_i(x))^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

em que:

μ_1 : parâmetro de barreira; μ_2 : parâmetro de penalidade;
 u_{1j} e u_{2j} , $j = 1, \dots, p$, u_{3r} e u_{4r} , $r = 1, \dots, n$, são as estimativas dos multiplicadores de Lagrange associados à função barreira modificada, λ_i , $i = 1, \dots, m$, é vetor dos multiplicadores de

Lagrange associados à função Lagrangiana aumentada e π_{1j} e π_{2j} , $j=1,...,p$, π_{3r} e π_{4r} , $r=1,...,n$, são os vetores dos multiplicadores de Lagrange.

Define-se, desse modo, a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada associada ao problema (4.1).

4.3 O MÉTODO DA NOVA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA BARREIRA MODIFICADA

Apresenta-se, nesta seção, o método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada (FLABM), para a resolução do problema (4.1), utilizando a função (4.4). A solução do problema (4.1) é encontrada por meio da resolução de uma sequência de problemas irrestritos. As condições necessárias de primeira-ordem são aplicadas sobre a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada (4.4), gerando um sistema de equações não lineares, como segue:

$$\text{sendo:} \quad \nabla \text{FLABM}(x, s_1, s_2, s_3, s_4, \lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \quad (4.5)$$

$$\nabla \text{FLABM} = \begin{bmatrix} \nabla_x f(x) - J(x)^T \lambda - J_1(x)^T \pi_1 - J_1(x)^T (\pi_2) - (\pi_3) - (\pi_4) + \mu_2 g(x)^T J(x) \\ -\frac{u_{1j}}{\mu_1^{-1} s_{1j} + 1} + \pi_{1j}, \quad j=1,...,p \\ -\frac{u_{2j}}{\mu_1^{-1} s_{2j} + 1} - \pi_{2j}, \quad j=1,...,p \\ -\frac{u_{3r}}{\mu_1^{-1} s_{3r} + 1} + \pi_{3r}, \quad r=1,...,n \\ -\frac{u_{4r}}{\mu_1^{-1} s_{4r} + 1} - \pi_{4r}, \quad r=1,...,n \\ - (g(x)) \\ - (h(x) - s_1 - h_{\min}) \\ - (h(x) + s_2 - h_{\max}) \\ - (x - s_3 - x_{\min}) \\ - (x + s_4 - x_{\max}) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

em que:

$J(x)^T = (\nabla_x g_1(x), \dots, \nabla_x g_m(x))$ e $J_1(x)^T = (\nabla_x h_1(x), \dots, \nabla_x h_p(x))$ são denominadas matrizes

Jacobianas.

O sistema de equações não lineares (4.5) é solucionado utilizando o método de Newton. A aplicação do método de Newton gera as direções de busca $\Delta d^T = (\Delta x, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta s_4, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2, \Delta \pi_3, \Delta \pi_4)$, as quais serão usadas para a atualização das variáveis do sistema, e resulta num sistema matricial, que, pode ser representado de forma simplificada como:

$$W \Delta d = -\nabla F_{LABM} \quad (4.7)$$

em que:

$$W = \begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 F_{LABM} & 0 & 0 & 0 & 0 & -J(x)^T & -J_1(x)^T & -J_1(x)^T & -I & -I \\ 0 & \mu_1^{-1} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1^{-1} S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1^{-1} S_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^{-1} S_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ -J(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1(x) & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1(x) & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz Hessiana da função Lagrangiana e as submatrizes S_1, S_2, S_3 e S_4 são dadas por:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{u_{11}}{(\mu_1^{-1} s_{11} + 1)^2} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \frac{u_{1p}}{(\mu_1^{-1} s_{1p} + 1)^2} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{u_{21}}{(\mu_1^{-1} s_{21} + 1)^2} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \frac{u_{2p}}{(\mu_1^{-1} s_{2p} + 1)^2} \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} \frac{u_{31}}{(\mu_1^{-1} s_{31} + 1)^2} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \frac{u_{3n}}{(\mu_1^{-1} s_{3n} + 1)^2} \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} \frac{u_{41}}{(\mu_1^{-1} s_{41} + 1)^2} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \frac{u_{4n}}{(\mu_1^{-1} s_{4n} + 1)^2} \end{pmatrix};$$

$$\nabla_{xx}^2 \text{FLABM} = \nabla_{xx}^2 f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{xx}^2 g_i(x) - \sum_{j=1}^p \pi_{1j} \nabla_{xx}^2 h_j(x) - \sum_{j=1}^p \pi_{2j} \nabla_{xx}^2 h_j(x) + \mu_2 (J(x)^T J(x) + g(x)^T \nabla_{xx}^2 g(x));$$

$\Delta d^T = (\Delta x, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta s_4, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2, \Delta \pi_3, \Delta \pi_4)$; ∇FLABM é dado em (4.6).

Os vetores das variáveis x , s e v são atualizados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= x^t + \alpha_p \Delta x^t; \\ s_1^{t+1} &= s_1^t + \alpha_p \Delta s_1^t; \\ s_2^{t+1} &= s_2^t + \alpha_p \Delta s_2^t; \\ s_3^{t+1} &= s_3^t + \alpha_p \Delta s_3^t; \\ s_4^{t+1} &= s_4^t + \alpha_p \Delta s_4^t; \\ \lambda^{t+1} &= \lambda^t + \alpha_d \Delta \lambda^t; \\ \pi_1^{t+1} &= \pi_1^t + \alpha_d \Delta \pi_1^t; \\ \pi_2^{t+1} &= \pi_2^t + \alpha_d \Delta \pi_2^t; \\ \pi_3^{t+1} &= \pi_3^t + \alpha_d \Delta \pi_3^t; \\ \pi_4^{t+1} &= \pi_4^t + \alpha_d \Delta \pi_4^t \end{aligned} \tag{4.8}$$

em que α_p e α_d são os passos utilizados na atualização das variáveis primais e duais, respectivamente.

Neste trabalho adotou-se para o cálculo do passo máximo a estratégia utilizada por GRANVILLE (1994), QUINTANA *et al.* (1995), entre outros. O passo primal é obtido encontrando o menor elemento entre o mínimo tamanho de passo de todos os componentes dos vetores das variáveis auxiliares positivas. Este menor elemento é comparado ao valor 1 e escolhe-se o menor entre eles. O objetivo do passo primal é manter as variáveis primais dentro dos seus limites. O passo dual é calculado de forma que cada componente dos vetores duais v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 permaneçam com seus respectivos sinais. Isto se traduz por:

$$\alpha_p^{\max} = \min \left\{ \frac{-s_{1j}}{\Delta s_{1j}} : \Delta s_{1j} < 0, j=1, \dots, p, \frac{-s_{2j}}{\Delta s_{2j}} : \Delta s_{2j} < 0, j=1, \dots, p, \frac{-s_{3r}}{\Delta s_{3r}} : \Delta s_{3r} < 0, r=1, \dots, n, \frac{-s_{4r}}{\Delta s_{4r}} : \Delta s_{4r} < 0, r=1, \dots, n \right\} \tag{4.9a}$$

$$\alpha_p = \min \{ \tau \alpha_p^{\max}, 1 \} \tag{4.9b}$$

$$\alpha_d^{\max} = \min \left\{ \left(\min_{\Delta\pi_{1j} < 0 \text{ e } \pi_{1j} > 0} \frac{\pi_{1j}}{|\Delta\pi_{1j}|}, j=1, \dots, m, \min_{\Delta\pi_{2j} > 0 \text{ e } \pi_{2j} < 0} \frac{-\pi_{2j}}{|\Delta\pi_{2j}|}, j=1, \dots, m, \min_{\Delta\pi_{3r} < 0 \text{ e } \pi_{3r} > 0} \frac{\pi_{3r}}{|\Delta\pi_{3r}|}, r=1, \dots, p, \min_{\Delta\pi_{4r} > 0 \text{ e } \pi_{4r} < 0} \frac{-\pi_{4r}}{|\Delta\pi_{4r}|}, r=1, \dots, p \right) \right\} \quad (4.10a)$$

$$\alpha_d = \min \left\{ \tau \alpha_d^{\max}, 1 \right\} \quad (4.10b)$$

em que o escalar $\tau \in (0,1)$ é um valor determinado empiricamente e dado por $\tau = 0,9995$. De acordo com WRIGHT (1995), pode ser derivado da fórmula $1 - 1/9\sqrt{z}$ onde z é o número de restrições do problema.

Os multiplicadores de Lagrange u_q^{t+1} da função barreira modificada são atualizados de acordo com a regra de POLYAK, (1992):

$$u_q^{t+1} = \frac{u_q^t \mu_1^{t+1}}{s_q^{t+1} + \mu_1^{t+1}}, \quad q = 1, \dots, 4. \quad (4.11)$$

Os multiplicadores de Lagrange λ^{t+1} da função Lagrangiana aumentada são atualizados de acordo com a regra de HESTENES (1969) e POWELL (1969):

$$\lambda^{t+1} = \lambda^t - \mu_2 g(x^{t+1}), \quad (4.12)$$

O parâmetro de barreira μ_1 é atualizado conforme MELMAN & POLYAK, (1996):

$$\mu_1^{t+1} = \mu_1^t \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{r}} \right), \quad (4.13)$$

em que r é o número de restrições de desigualdade do problema e $\alpha = \max \left(\frac{1}{\mu_1^{-1} s_q + 1} \right), q = 1, \dots, 4$, para $s_q > 0$.

O parâmetro de penalidade μ_2 é atualizado por:

$$\mu_2^{t+1} = k_1 \mu_2^t, \quad (4.14)$$

em que $k_1 > 1$.

4.4 ALGORITMO

A abordagem do método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada pode ser apresentada pelo seguinte algoritmo:

ALGORITMO DO MÉTODO DA FLABM

- 1) Dado o problema (4.1), construa a função (4.4). Faça $t=0$, calcule uma estimativa inicial para $d^T = (x^t, s_1^t, s_2^t, s_3^t, s_4^t, \lambda^t, \pi_1^t, \pi_2^t, \pi_3^t, \pi_4^t)$, u_1^t , u_2^t , u_3^t , u_4^t , λ^t , μ_1^t e μ_2^t que satisfaça as condições propostas;
- 2) Determine o sistema (4.7) e resolva-o;
- 3) Atualize d^T utilizando (4.8);
- 4) Se a norma do vetor gradiente for menor que uma precisão ε vá para o passo 5. Caso contrário volte para o passo 2;
- 5) Se as condições de KKT são satisfeitas então **pare**. Caso contrário vá para o passo 6;
- 6) Atualize μ_1 utilizando (4.13), μ_2 utilizando (4.14), os multiplicadores de Lagrange u_q^{t+1} usando (4.11) e λ^{t+1} usando (4.12). Faça $t=t+1$ e retorne ao passo 2.

Ressalta-se que, um ponto inicial estritamente factível não é obrigatório, mas a condição $s > -\mu_1 e$, em que $e^T = (1, \dots, 1)$, deve ser satisfeita em todos os pontos. O processo de otimização termina quando as condições de KKT são satisfeitas.

Observa-se que o algoritmo apresentado é eficiente e sua convergência está diretamente ligada à escolha dos fatores iniciais de barreira e penalidade. Tal escolha pode ser difícil e faz-se necessário o uso de regras especiais para a correção dos fatores, vistas em (4.13) e (4.14).

No próximo capítulo, será apresentada a aplicação do método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada ao problema de FPO.

CAPÍTULO 5

O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO

Neste capítulo apresenta-se o modelo do problema de FPO e aplica-se a abordagem do método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada, apresentada no capítulo 4, a este modelo. Uma breve discussão sobre a implementação computacional realizada é apresentada.

5.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE FPO

O problema de FPO tem por finalidade encontrar um ponto de operação otimizado para o sistema elétrico, o qual satisfaz todas as restrições físicas e operacionais e ainda minimiza uma função objetivo. Essa função pode ser de perdas ativa no sistema de transmissão, de custo na geração de energia, de alocação de reativos, entre outras. As restrições são formadas pelas equações de balanço de potência ativa e reativa em cada barra, pelos limites operativos dos equipamentos que compõem a rede elétrica e outras restrições inerentes à operação de um sistema elétrico. O problema de FPO não é simples, pois a solução encontrada deve respeitar todas essas restrições, limites e minimizar uma função objetivo.

O FPO tem aplicação em vários problemas de planejamento, programação e operação e de operação em tempo-real, tais como:

- Despacho econômico e seguro (operação em tempo-real, otimização do despacho em estudos de planejamento da operação e expansão);
- Redespacho preventivo e corretivo (operação em tempo-real);
- Minimização de perdas;
- Alocação de fontes de potência reativa (planejamento da expansão do suporte de reativos);
- Avaliação da confiabilidade composta de sistemas geração e transmissão;
- Planejamento da expansão de sistemas de transmissão;
- Tarificação de serviços de transmissão;
- Determinação de preços nodais de energia.

O FPO é um termo genérico que envolve uma classe de problemas, em que se destaca o problema de despacho ótimo de potência reativa, o qual é o modelo do problema de FPO utilizado neste trabalho e será apresentado na próxima seção.

5.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE FPO

O FPO é um problema de otimização restrita, não linear, não convexo e de grande porte; determina o melhor ponto de operação do sistema através da otimização de uma função objetivo que representa um dado desempenho do sistema, satisfazendo as restrições de operação.

Sua formulação pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \\
 &\text{sujeito a: } g_i(x) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 &\quad \underline{h}_j \leq h_j(x) \leq \overline{h}_j \quad j = 1, 2, \dots, p \\
 &\quad \underline{x} \leq x \leq \overline{x}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que :

$x = (V, \theta, t) \in \mathbb{R}^n$: vetor das variáveis de controle e de estado;

$f(x)$: função objetivo que representa o desempenho do sistema (função escalar);

$g(x)$: vetor das restrições de igualdade formado pelas equações de fluxos de potência ativo e reativo;

$h(x)$: vetor das restrições funcionais de desigualdade;

$\underline{h}$, $\underline{x}$, e $\bar{h}$, $\bar{x}$: vetores dos limites inferiores e superiores, de $h(x)$ e x , respectivamente;

O vetor das variáveis de controle e de estado, x , representa o vetor de magnitude das tensões (V), os ângulos das tensões (θ) e os *taps* dos transformadores (t). A função objetivo, $f(x)$ pode ser as perdas de potência ativa na transmissão, o custo na geração, entre outras. Neste trabalho, adota-se as perdas de potência ativa na transmissão. As restrições de igualdade $g(x)$ são as equações do fluxo de potência ativas e reativas obtidas impondo-se as Leis de *Kirchoff* em cada barra da rede. As restrições de desigualdade $h(x)$ representam as restrições funcionais como: limites sobre a potência reativa nas barras de controle de reativos e sobre a potência ativa na barra *slack*, limites nos fluxos ativos e reativos nas linhas de transmissão, entre outras.

As variáveis do problema de FPO podem ser caracterizadas como:

- Variáveis dependentes:

- tensão nas barras de carga do sistema;
- ângulo em todas as barras do sistema menos a de referência angular;
- potência reativa nas barras com controle de reativo e referência;
- potência ativa na barra de referência.

- Variáveis de controle:

- tensão nas barras de controle de reativos do sistema;
- *tap* dos transformadores;

- bancos de capacitores.

Neste trabalho, não utilizamos bancos de capacitores.

Ao reescrever (5.1) utilizando as equações do fluxo de potência, a função objetivo e as demais restrições, conforme MONTICELLI (1983), tem-se o seguinte problema de FPO:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(t, V, \theta) = \sum_{km=1}^{NL} f_{km}(t, V, \theta) \\ \text{sujeito a:} \quad & \Delta P_i(t, V, \theta) = 0 \quad i = 1, \dots, NB-1 \\ & \Delta Q_j(t, V, \theta) = 0 \quad j = 1, \dots, NBC \\ & \underline{Q}_w \leq Q_w(t, V, \theta) \leq \overline{Q}_w \quad w = 1, \dots, NBCR \\ & \underline{t}_o \leq t_o \leq \overline{t}_o \quad o = 1, \dots, NT \\ & \underline{V}_p \leq V_p \leq \overline{V}_p \quad p = 1, \dots, NB \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que:

- V e θ são os vetores da magnitude e fase da tensão, respectivamente;
- t são os *taps* dos transformadores;
- $f_{km}(t, V, \theta)$ é a função de perdas de potência ativa na transmissão na linha km , dada por:

$$f_{km}(t, V, \theta) = \sum_{km=1}^{NL} g_{km} (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \quad (5.3)$$

- as equações de balanço do sistema elétrico são dadas por:

a) Potência ativa para as barras de carga e de controle de reativo:

$$\Delta P_k(t, V, \theta) = P_k^G - P_k^C - \sum_{m \in \Omega_k} P_{km}(t, V, \theta); \quad (5.4)$$

$$P_{km}(t, V, \theta) = (t V_k)^2 g_{km} - (t V_k) V_m (g_{km} \cos \theta_{km} + b_{km} \sin \theta_{km})$$

b) Potência reativa para as barras de carga:

$$\Delta Q_k(t, V, \theta) = Q_k^G - Q_k^C - \sum_{m \in \Omega_k} Q_{km}(t, V, \theta); \quad (5.5)$$

$$Q_{km}(t, V, \theta) = -(t V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (t V_k) V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \sin \theta_{km})$$

- Limite na geração de potência reativa para as barras de controle de reativo:

$$Q_k(t, V, \theta) = \sum_{m \in \Omega_k} -(t V_k)^2 (b_{km} + b_{km}^{sh}) + (t V_k) V_m (b_{km} \cos \theta_{km} - g_{km} \sin \theta_{km}) \quad (5.6)$$

- g_{km} , b_{km} e b_{km}^{sh} são a condutância, a susceptância e a susceptância *shunt* da linha km, respectivamente;
- P_k^G e P_k^C são as potências ativas, geradas e consumidas na barra k, respectivamente;
- Q_k^G e Q_k^C são as potências reativas, geradas e consumidas na barra k, respectivamente;
- $\underline{Q}_k$ e $\overline{Q}_k$ são os limites mínimos e máximos de geração de potência reativa na barra k;
- $\underline{V}_p$ e $\overline{V}_p$ são os limites mínimos e máximos das magnitudes das tensões na barra p;
- $\underline{t}_i$ e $\overline{t}_i$ são os limites mínimos e máximos do *tap* variável do transformador relacionado ao ramo i;
- Ω_k é o conjunto de todas as barras vizinhas à barra k, incluindo ela mesma;
- NL é o número total de linhas de transmissão;
- NB é o número de barras do sistema elétrico;
- NBC é o número de barras de carga;
- NBCR é o número de barras de controle de reativo;
- NT é o número de transformadores com *tap* variável.

A variável de controle *tap* de transformador foi considerada de forma contínua, como as demais restrições. O modelo utilizado para essa variável está representado na Figura 1. Neste modelo o *tap* está ligado à tensão da barra inicial da linha.

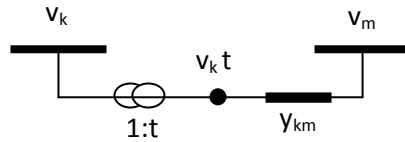


FIGURA 1 - Modelo utilizado para a variável *tap* do transformador

O problema de FPO apresentado é conhecido como despacho ótimo de reativo, ou simplesmente, FPO reativo. O aspecto reativo em um sistema de energia está relacionado principalmente ao controle da tensão nas barras. No FPO reativo, as variáveis associadas com a potência ativa estão todas fixas e as variáveis de controle estão associadas com a potência reativa. A função objetivo em (5.2) são as perdas ativas nas linhas de transmissão. Essa função é não separável e não permite simplificações. Esse fato dificulta a solução do problema de FPO, segundo MONTICELLI & LIU (1992).

Nas próximas seções, apresenta-se o método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada aplicado ao problema de FPO. Este método é uma combinação dos métodos da Lagrangiana aumentada e de barreira modificada.

5.3 A NOVA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA BARREIRA MODIFICADA ASSOCIADA AO PROBLEMA DE FPO

Apresenta-se, nesta seção, a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada, aplicada ao problema de FPO. Dado o problema (5.2), transformam-se todas as desigualdades em igualdades utilizando variáveis auxiliares. Adiciona-se à função objetivo: a condição de não negatividade das variáveis auxiliares, referentes às variáveis de estado, através da função barreira modificada. Desta forma, obtém-se um problema equivalente a (5.2) e, seguindo o

desenvolvimento matemático apresentado no capítulo 4, tem-se a seguinte nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada associada:

$$\begin{aligned}
L(t, V, \theta, s, \lambda, \pi) = & f(t, V, \theta) - \mu_1 \left(\sum_{p=1}^{NB} u \underline{V}_p \ln(\mu_1^{-1} s \underline{V}_p + 1) + \sum_{p=1}^{NB} u \overline{V}_p \ln(\mu_1^{-1} s \overline{V}_p + 1) \right) + \\
& - \mu_1 \left(\sum_{w=1}^{NT} u \underline{t}_w \ln(\mu_1^{-1} s \underline{t}_w + 1) + \sum_{w=1}^{NT} u \overline{t}_w \ln(\mu_1^{-1} s \overline{t}_w + 1) + \sum_{m=1}^{NBCR} u \underline{Q}_m \ln(\mu_1^{-1} s \underline{Q}_m + 1) \right) + \\
& - \mu_1 \sum_{m=1}^{NBCR} u \overline{Q}_m \ln(\mu_1^{-1} s \overline{Q}_m + 1) - \sum_{i=1}^{NB-1} \lambda P_i \Delta P_i(t, V, \theta) - \sum_{j=1}^{NBC} \lambda Q_j \Delta Q_j(t, V, \theta) + \\
& - \sum_{p=1}^{NB} \pi \underline{V}_p (V_p - s \underline{V}_p - \underline{V}_p) - \sum_{p=1}^{NB} \pi \overline{V}_p (V_p + s \overline{V}_p - \overline{V}_p) - \sum_{w=1}^{NT} \pi \underline{t}_w (t_w - s \underline{t}_w - \underline{t}_w) + \\
& - \sum_{w=1}^{NT} \pi \overline{t}_w (t_w + s \overline{t}_w - \overline{t}_w) - \sum_{m=1}^{NBCR} \pi \underline{Q}_m (Q_m - s \underline{Q}_m - \underline{Q}_m) - \sum_{m=1}^{NBCR} \pi \overline{Q}_m (Q_m + s \overline{Q}_m - \overline{Q}_m) + \\
& + \frac{\mu_2}{2} \left(\sum_{i=1}^{NB-1} (\Delta P_i(t, V, \theta))^2 + \sum_{j=1}^{NBC} (\Delta Q_j(t, V, \theta))^2 \right) \tag{5.7}
\end{aligned}$$

em que:

μ_1 - parâmetro de barreira;

μ_2 - parâmetro de penalidade;

$s \underline{V}$ - vetor das variáveis de excesso associadas à canalização de V ;

$\overline{s V}$ - vetor das variáveis de folga associadas à canalização de V ;

$s \underline{t}$ - vetor das variáveis de excesso associadas à canalização de t ;

$\overline{s t}$ - vetor das variáveis de folga associadas à canalização de t ;

$s \underline{Q}$ - vetor das variáveis de excesso associadas à equação da variável canalizada Q ;

$\overline{s Q}$ - vetor das variáveis de folga associadas à equação da variável canalizada Q ;

λP - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação ΔP ;

λQ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação ΔQ ;

$\pi \underline{V}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação inferior de V ;

$\pi \overline{V}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação superior de V ;

$\pi \underline{t}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação inferior de t ;

$\pi \overline{t}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação superior de t ;

$\pi \underline{Q}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação inferior de Q ;

$\pi \overline{Q}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange associados à equação superior de Q ;

$u \underline{V}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange da barreira modificada associados à equação inferior de $s \underline{V}$;

$u \overline{V}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange da barreira modificada associados à equação superior de $s \overline{V}$;

$u \underline{t}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange da barreira modificada associados à equação inferior de $s \underline{t}$;

$u \overline{t}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange da barreira modificada associados à equação superior de $s \overline{t}$;

$u \underline{Q}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange da barreira modificada associados à equação inferior de $s \underline{Q}$;

$u \overline{Q}$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange da barreira modificada associados à equação superior de $s \overline{Q}$.

5.4 O MÉTODO DA NOVA FUNÇÃO LAGRANGIANA AUMENTADA BARREIRA MODIFICADA APLICADO AO PROBLEMA DE FPO

Apresenta-se o método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada, para a resolução do problema de FPO, utilizando a função (5.7).

Aplicam-se as condições de otimalidade à nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada (5.7), em relação ao vetor das variáveis $d^T = (t, V, \theta, s\underline{V}, s\underline{t}, s\underline{Q}, s\underline{\bar{V}}, s\underline{\bar{t}}, s\underline{\bar{Q}}, \lambda P, \lambda Q, \pi\underline{V}, \pi\underline{t}, \pi\underline{Q}, \pi\underline{\bar{V}}, \pi\underline{\bar{t}}, \pi\underline{\bar{Q}})$ e obtém-se o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\nabla_{(t,v,\theta)} f^T - \lambda P^T J_P - \lambda Q^T J_Q - \pi \bar{V}^T - \pi \bar{t}^T - \pi \bar{Q}^T J_{Q_m} - \pi \underline{V}^T - \pi \underline{t}^T - \pi \underline{Q}^T J_{Q_m} + \mu_2 (\Delta P^T J_P + \Delta Q^T J_Q) = 0 \quad (5.8a)$$

$$-\frac{u \underline{V}_p}{\mu^{-1} s \underline{V}_p + 1} + \pi \underline{V}_p = 0, p = 1, \dots, NB \quad (5.8b)$$

$$-\frac{u \underline{t}_w}{\mu^{-1} s \underline{t}_w + 1} + \pi \underline{t}_w = 0, w = 1, \dots, NT \quad (5.8c)$$

$$-\frac{u \underline{Q}_m}{\mu^{-1} s \underline{Q}_m + 1} + \pi \underline{Q}_m = 0, m = 1, \dots, NBCR \quad (5.8d)$$

$$-\frac{u \bar{V}_p}{\mu^{-1} s \bar{V}_p + 1} - \pi \bar{V}_p = 0, p = 1, \dots, NB \quad (5.8e)$$

$$-\frac{u \bar{t}_w}{\mu^{-1} s \bar{t}_w + 1} - \pi \bar{t}_w = 0, w = 1, \dots, NT \quad (5.8f)$$

$$-\frac{u \bar{Q}_m}{\mu^{-1} s \bar{Q}_m + 1} - \pi \bar{Q}_m = 0, m = 1, \dots, NBCR \quad (5.8g)$$

$$-(\Delta P_i) = 0, i = 1, \dots, NB - 1 \quad (5.8h)$$

$$-(\Delta Q_j) = 0, j = 1, \dots, NBC \quad (5.8i)$$

$$-(V_p - s \underline{V}_p - \underline{V}_p) = 0, p = 1, \dots, NB \quad (5.8j)$$

$$-(t_w - s \underline{t}_w - \underline{t}_w) = 0, w = 1, \dots, NT \quad (5.8k)$$

$$-(Q_m - s \underline{Q}_m - \underline{Q}_m) = 0, m = 1, \dots, NBCR \quad (5.8l)$$

$$-(V_p + s \bar{V}_p - \bar{V}_p) = 0, p = 1, \dots, NB \quad (5.8m)$$

$$-(t_w + s \bar{t}_w - \bar{t}_w) = 0, w = 1, \dots, NT \quad (5.8n)$$

$$-(Q_m + s \bar{Q}_m - \bar{Q}_m) = 0, m = 1, \dots, NBCR \quad (5.8o)$$

em que:

$$\mathbf{J}_P^T = (\nabla \Delta P_1, \dots, \nabla \Delta P_{NB-1}),$$

$$\mathbf{J}_Q^T = (\nabla \Delta Q_1, \dots, \nabla \Delta Q_{NBC}) \text{ e}$$

$$\mathbf{J}_{Q_m}^T = (\nabla \Delta Q_1, \dots, \nabla \Delta Q_{NBCR}).$$

A aplicação do método de Newton ao sistema (5.8) resulta no sistema matricial, o qual, em sua forma simplificada, é representado por:

$$\mathbf{W} \Delta \mathbf{d} = -\nabla \mathbf{L} \quad (5.9)$$

em que:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \nabla_{(t,v,\theta)}^2 \mathbf{L} & 0 & 0 & -\mathbf{J}_P^T & -\mathbf{J}_Q^T & -\mathbf{DIJ}^T & -\mathbf{DIJ}^T \\ 0 & \mu^{-1} \mathbf{S}_i & 0 & 0 & 0 & \mathbf{DI} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{-1} \mathbf{S}_u & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{DI} \\ -\mathbf{J}_P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{J}_Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{DIJ} & \mathbf{DI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{DIJ} & 0 & -\mathbf{DI} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

com:

$\mathbf{DIJ}^T = (\mathbf{I}_v, \mathbf{I}_t, \mathbf{J}_Q^T)$; em que $\mathbf{J}_Q$ é a matriz Jacobiana;

$$\mathbf{DI} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_v & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_Q \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I}_t, \mathbf{I}_v \text{ e } \mathbf{I}_Q: \text{ são matrizes identidade;}$$

$$\mathbf{S}_u = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{S}\mathbf{V}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{S}t} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{S}Q} \end{pmatrix}, \quad \text{com } \mathbf{S} \overline{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \frac{u \overline{\mathbf{V}}_1}{(\mu^{-1} \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{V}}_1 + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u \overline{\mathbf{V}}_{NB}}{(\mu^{-1} \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{V}}_{NB} + 1)^2} \end{pmatrix},$$

$$S \bar{t} = \begin{pmatrix} \frac{u \bar{t}_1}{(\mu^{-1} \bar{s} t_1 + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u \bar{t}_{NT}}{(\mu^{-1} \bar{s} t_{NT} + 1)^2} \end{pmatrix} \text{ e } S \bar{Q} = \begin{pmatrix} \frac{u \bar{Q}_1}{(\mu^{-1} \bar{s} Q_1 + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u \bar{Q}_{NBC}}{(\mu^{-1} \bar{s} Q_{NBC} + 1)^2} \end{pmatrix};$$

$$S_i = \begin{pmatrix} S \underline{V} & 0 & 0 \\ 0 & S \underline{t} & 0 \\ 0 & 0 & S \underline{Q} \end{pmatrix}, \quad \text{com } S \underline{V} = \begin{pmatrix} \frac{u \underline{V}_1}{(\mu^{-1} s \underline{V}_1 + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u \underline{V}_{NB}}{(\mu^{-1} s \underline{V}_{NB} + 1)^2} \end{pmatrix},$$

$$S \underline{t} = \begin{pmatrix} \frac{u \underline{t}_1}{(\mu^{-1} s \underline{t}_1 + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u \underline{t}_{NT}}{(\mu^{-1} s \underline{t}_{NT} + 1)^2} \end{pmatrix} \text{ e } S \underline{Q} = \begin{pmatrix} \frac{u \underline{Q}_1}{(\mu^{-1} s \underline{Q}_1 + 1)^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{u \underline{Q}_{NBC}}{(\mu^{-1} s \underline{Q}_{NBC} + 1)^2} \end{pmatrix};$$

$$\Delta d^T = (\Delta t, \Delta V, \Delta \theta, \Delta s \underline{V}, \Delta s \underline{t}, \Delta s \underline{Q}, \Delta s \bar{V}, \Delta s \bar{t}, \Delta s \bar{Q}, \Delta \lambda P, \Delta \lambda Q, \Delta \pi \underline{V}, \Delta \pi \underline{t}, \Delta \pi \underline{Q}, \Delta \pi \bar{V}, \Delta \pi \bar{t}, \Delta \pi \bar{Q}) \quad \text{é o}$$

vetor dos incrementos;

$$\text{com: } \in \mathbb{R}^{6NB+4NBCR+NBC+5NT-6}, \text{ e}$$

$$\nabla L = \begin{bmatrix} \nabla_{(t,v,\theta)} f^T - \lambda P^T J_P - \lambda Q^T J_Q - \pi \bar{V}^T - \pi \bar{t}^T - \pi \bar{Q}^T J_{Q_m} - \pi \underline{V}^T - \pi \underline{t}^T - \pi \underline{Q}^T J_{Q_m} + \mu_2 (\Delta P^T J_P + \Delta Q^T J_Q) \\ -\frac{u \underline{V}_p}{\mu^{-1} s \underline{V}_p + 1} + \pi \underline{V}_p, p = 1, \dots, NB \\ -\frac{u \underline{t}_w}{\mu^{-1} s \underline{t}_w + 1} + \pi \underline{t}_w, w = 1, \dots, NT \\ -\frac{u \underline{Q}_m}{\mu^{-1} s \underline{Q}_m + 1} + \pi \underline{Q}_m, m = 1, \dots, NBCR \\ -\frac{u \bar{V}_p}{\mu^{-1} s \bar{V}_p + 1} - \pi \bar{V}_p, p = 1, \dots, NB \\ -\frac{u \bar{t}_w}{\mu^{-1} s \bar{t}_w + 1} - \pi \bar{t}_w, w = 1, \dots, NT \\ -\frac{u \bar{Q}_m}{\mu^{-1} s \bar{Q}_m + 1} - \pi \bar{Q}_m, m = 1, \dots, NBCR \\ -(\Delta P_i) = 0, i = 1, \dots, NB - 1 \\ -(\Delta Q_j) = 0, j = 1, \dots, NBC \\ -(V_p - s \underline{V}_p - \bar{V}_p), p = 1, \dots, NB \\ -(t_w - s \underline{t}_w - \bar{t}_w), w = 1, \dots, NT \\ -(Q_m - s \underline{Q}_m - \bar{Q}_m), m = 1, \dots, NBCR \\ -(V_p + s \bar{V}_p - \underline{V}_p), p = 1, \dots, NB \\ -(t_w + s \bar{t}_w - \underline{t}_w), w = 1, \dots, NT \\ -(Q_m + s \bar{Q}_m - \underline{Q}_m), m = 1, \dots, NBCR \end{bmatrix}$$

com:

$$\nabla L^T \in \mathbb{R}^{6NB+4NBCR+NBC+5NT-6}.$$

Definidos o vetor gradiente ∇L em (5.8), a matriz Hessiana da função Lagrangiana, W , em (5.10), o sistema (5.9) é resolvido usando o método de Newton e determina-se o vetor de direções de busca Δd . A atualização das variáveis associadas ao método de Newton, é realizada conforme (4.8), utilizando o vetor das direções de busca juntamente com os passos primais e duais, apresentados em (4.9) e (4.10). Os multiplicadores associados à função barreira modificada, são atualizados conforme (4.11), os da Lagrangiana

aumentada conforme (4.12) e os parâmetros de penalidade e barreira de acordo com (4.13) e (4.14), respectivamente.

5.4.1- MATRIZ HESSIANA DA FUNÇÃO LAGRANGIANA

A matriz Hessiana da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada (W) do sistema (5.9) possui poucos elementos não nulos, ou seja, é esparsa, e esta característica é explorada no processo de solução do sistema. Sua dimensão é dada por:

$$\text{Dimensão} = 6NB + 4NBCR + NBC + 5NT - 6$$

As matrizes identidades e as sub-matrizes referentes às variáveis de folga ou excesso presentes na matriz W possuem elementos somente na diagonal principal, isto é um atrativo na implementação do algoritmo.

5.4.2- VALORES INICIAIS DAS VARIÁVEIS

As equações de balanço do fluxo de potência do problema (5.2) não precisam ser satisfeitas no início do processo iterativo. As variáveis de folga ou excesso ($s_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) podem ser calculadas inicialmente utilizando as equações (5.8j), (5.8k), (5.8l), (5.8m), (5.8n) e (5.8o), respectivamente. O algoritmo terá dificuldades com os passos se os valores iniciais das variáveis magnitudes das tensões e *taps* dos transformadores e das restrições de gerações de reativos não estiverem dentro de seus limites preestabelecidos, pois as variáveis auxiliares assumirão valores nulos ou negativos. Os valores iniciais dos parâmetros de barreira μ_1 e de penalidade μ_2 são determinados pelo usuário. Os vetores das estimativas dos multiplicadores de Lagrange, u , associados com a função barreira modificada são iniciados com valor 1 ou outro valor maior que zero. Os vetores dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de igualdades, λ , são sempre iniciados com o valor nulo e são irrestritos quanto ao sinal, podendo ser negativos ou positivos. Após calcular os valores iniciais dos vetores referentes às

variáveis de folga ou excesso e obtido o parâmetro de barreira e as estimativas dos multiplicadores de Lagrange, u , os vetores dos multiplicadores de Lagrange (π_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) podem ser calculados inicialmente utilizando as equações (5.8b), (5.8c), (5.8d), (5.8e), (5.8f) e (5.8g), respectivamente.

5.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional do método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada apresentada neste trabalho, aplicada ao exemplo matemático, foi realizada utilizando o software Matlab R2010a (<http://www.mathworks.com>) em um microcomputador com processador Intel i5 M430 de 2.27GHz, 4 Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 7 de 64 bits do Laboratório de Otimização e Estudos Econômicos de Sistemas de Potência (LOESP), da Faculdade de Engenharia, da Unesp de Bauru.

A implementação computacional do método, aplicado ao problema de FPO, foi realizada em linguagem de programação FORTRAN. O programa foi desenvolvido inicialmente por SOUSA (2006) e adaptado para o nosso problema, em um microcomputador com processador Intel Core 2 Duo de 2.2 GHz e 3,7 GB de memória RAM. Na implementação utilizou-se dupla precisão aritmética.

Para uma melhor visualização e entendimento da estrutura do programa de FPO, segue o fluxograma mostrado na Figura 2.

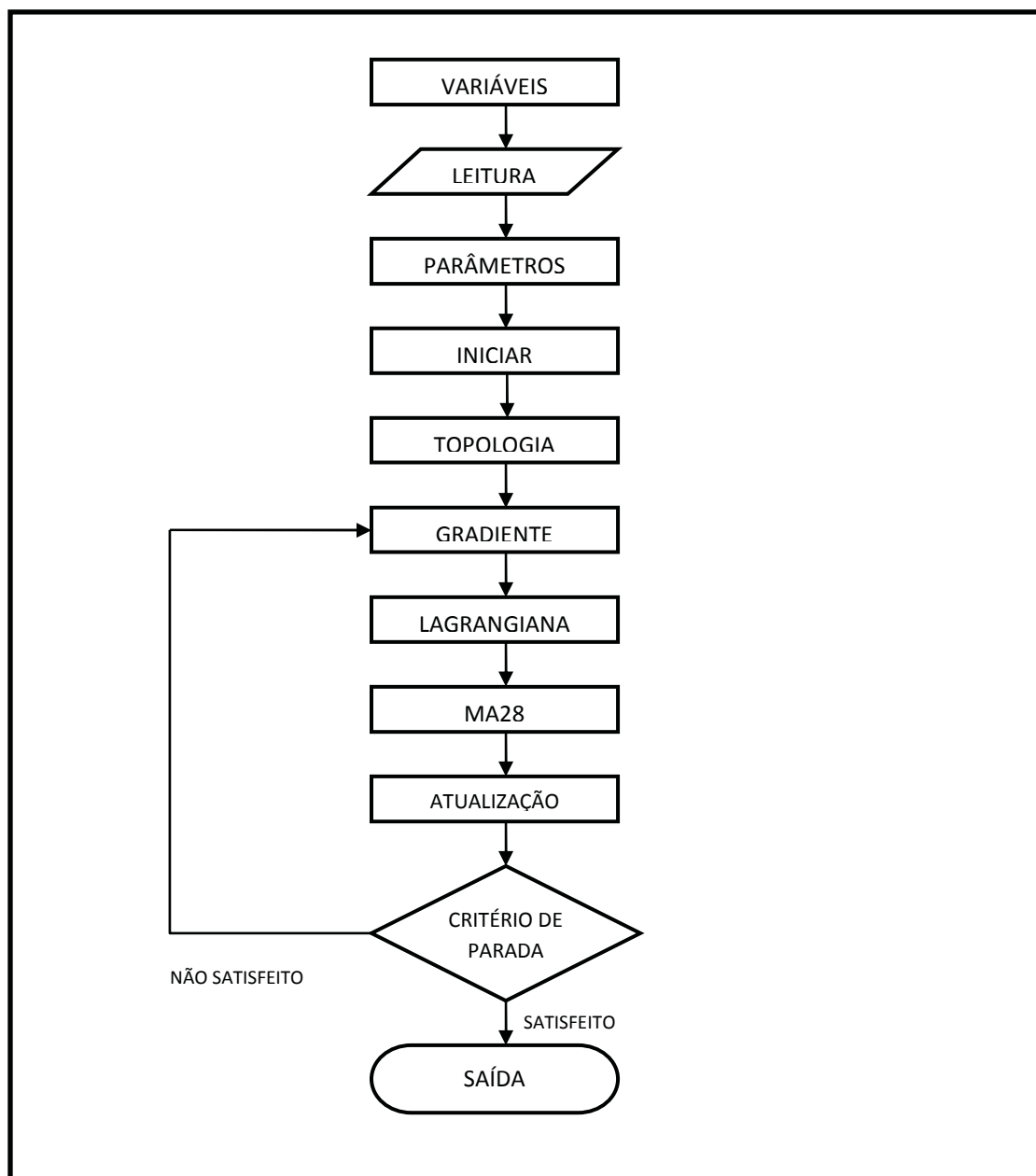


FIGURA 2 - Fluxograma do programa de FPO

A seguir tem-se uma breve descrição das sub-rotinas implementadas, que formam o programa de FPO:

Variáveis - faz a declaração das variáveis utilizadas no programa (variáveis globais).

Leitura - rotinas responsáveis pela leitura dos dados de barras, das linhas de transmissão e dos limites de tensão. Estas informações estão contidas em bancos de dados que fornecem os dados iniciais da rede elétrica.

Parâmetros - faz a leitura dos parâmetros de barreira μ , bem como de seus fatores de correções β . O valor inicial dos parâmetros deve ser fornecido pelo usuário para cada sistema a ser resolvido.

Iniciar - rotinas responsáveis pelo cálculo dos valores iniciais das variáveis de folga e dos multiplicadores de Lagrange.

Topologia - fornece a topologia da rede, ou seja, descreve as ligações existentes entre as barras do sistema. É de fundamental importância para a criação do vetor gradiente e da matriz Lagrangiana.

Gradiente - constrói o vetor gradiente da função Lagrangiana.

Lagrangiana - rotinas responsáveis pela construção da matriz Hessiana da função Lagrangiana, construída em um formato vetorial.

MA28ad - rotina responsável pela fatoração LU. Na chamada desta rotina, fornece-se como informação a matriz Hessiana da função Lagrangiana no formato vetorial.

MA28cd - rotina responsável pela solução do sistema de equações resultante da aplicação do método de Newton. Na chamada desta rotina, é fornecido como informação a matriz Hessiana da função Lagrangiana e o vetor gradiente.

Atualização - rotinas responsáveis pela atualização das variáveis do problema de FPO e do parâmetro de barreira.

Saída - gera o arquivo de saída que contém os resultados obtidos pelo programa, ou seja, os valores das magnitudes de tensão, ângulos, *taps* e reativos.

O critério de parada do programa de FPO é satisfazer as equações do fluxo de potência dentro de uma tolerância e as condições de KKT, minimizando a função objetivo.

Observa-se, no sistema (5.9), que a matriz Hessiana da função Lagrangiana (W) tem uma estrutura esparsa. Verifica-se que, em sistemas reais, o “grau de esparsidade” dessa matriz, cresce com o aumento das dimensões da rede elétrica. Em virtude da sua esparsidade, o armazenamento de W foi realizado de forma compacta, isto é, somente os elementos diferentes de zero foram armazenados - com o auxílio do módulo Topologia. Aplica-se a técnica de esparsidade fornecida pela rotina MA28.f, desenvolvida pelo Grupo de Algoritmos Numéricos do Laboratório de *Harwell*, do *United Kingdom Atomic Energy Authority*. Essa rotina determina a solução de sistemas lineares esparsos, utilizando uma variante da eliminação de Gauss para esses sistemas, conforme DUFF & REID (1979). Os principais parâmetros utilizados na sub-rotina MA28 são:

n - ordem da matriz Hessiana da função Lagrangiana (W);

nz - número de elementos diferentes de zero da matriz W ;

a - vetor contendo os elementos diferentes de zero da matriz W ;

irn - vetor contendo a posição da linha dos elementos diferentes de zero da matriz W ;

$lirn$ - dimensão do vetor irn , $lirn \geq nz$

icn - vetor contendo a posição da coluna dos elementos diferentes de zero da matriz W ; $licn$ - dimensão do vetor a e do icn , $licn \geq 2nz$;

x - vetor contendo os elementos do vetor gradiente; após a solução do sistema linear o vetor x retorna da rotina MA28.f com os elementos do vetor direção de busca Δd do sistema (5.9):
 $W \Delta d = -\nabla L$.

A rotina MA28.f faz a fatoração LU de uma matriz simétrica em estrutura. Essa rotina realiza todo o processo numérico para a solução do sistema com duas matrizes: uma triangular superior e outra inferior. A matriz Hessiana da função Lagrangiana gerada no processo de solução do problema de FPO é simétrica de valor e de posição, portanto não existe a necessidade de trabalhar com essa matriz completa. Pode-se usar apenas uma matriz triangular superior ou inferior, com isso, economiza-se em memória e tempo de processamento, uma vez que o número de elementos é bem menor. Logo, a rotina MA28.f não é a ideal para o problema, porém era a melhor rotina que estava à disposição durante a execução do trabalho de SOUSA (2006).

No próximo capítulo apresentar-se-ão os resultados numéricos obtidos a partir da aplicação do método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada a um exemplo matemático e a problemas de FPO, discutindo seu desempenho.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, para verificar a eficiência da abordagem do método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada, resolve-se um exemplo numérico clássico extraído de BAZARAA (1993) e adaptado por PEREIRA (2007) e alguns problemas de FPO. Os sistemas elétricos de potência estudados foram o de 3 barras, proposto por DOMMEL & TINNEY (1968) e os do IEEE 14, 30 e 162 barras obtidos no sítio (<http://www.ee.washington.edu/research/pstca> acessado em: 13/07/11). Em todos os testes, a função objetivo a ser minimizada foi de perdas de potência ativa na transmissão, tendo como restrições de igualdade as equações do fluxo de potência, como variáveis canalizadas os *taps*, as magnitudes de tensão e as restrições canalizadas de geração de reativos nas barras de controle de reativo. Em todos os sistemas elétricos utilizados a potência base foi de 100 MVA.

6.1 EXEMPLO NUMÉRICO

Seja o problema de otimização adaptado por PEREIRA (2007):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ &\text{sujeito a } \quad x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ &\quad \quad \quad -1 \leq x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ &\quad \quad \quad 1,5 \leq x_2 \leq 2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

A nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada associada ao problema (6.1) é:

$$\begin{aligned} \text{FLABM} = & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 - \mu_1 u_1 \ln(\mu_1^{-1} s_1 + 1) - \mu_1 u_2 \ln(\mu_1^{-1} s_2 + 1) + \\ & - \mu_1 u_3 \ln(\mu_1^{-1} s_3 + 1) - \mu_1 u_4 \ln(\mu_1^{-1} s_4 + 1) - \lambda(x_1 + x_2 - 3) - \pi_1(x_1^2 - x_2 - s_1 + 1) + \\ & - \pi_2(x_1^2 - x_2 + s_2) - \pi_3(x_2 - s_3 - 1, 5) - \pi_4(x_2 + s_4 - 2) + \frac{\mu_2}{2}(x_1 + x_2 - 3)^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

As condições necessárias de primeira-ordem são aplicadas à nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada (6.2), gerando um sistema de equações não lineares, como segue:

$$\nabla \text{FLABM}(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, \lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0, \quad (6.3)$$

sendo:

$$\nabla \text{FLABM} = \begin{bmatrix} 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2x_2) - \lambda - 2x_1\pi_1 - 2x_1\pi_2 + \mu_2(x_1 + x_2 - 3) \\ -4(x_1 - 2x_2) - \lambda + \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 - \pi_4 + \mu_2(x_1 + x_2 - 3) \\ -\frac{u_1}{\mu_1^{-1}s_1 + 1} + \pi_1 \\ -\frac{u_2}{\mu_1^{-1}s_2 + 1} - \pi_2 \\ -\frac{u_3}{\mu_1^{-1}s_3 + 1} + \pi_3 \\ -\frac{u_4}{\mu_1^{-1}s_4 + 1} - \pi_4 \\ -(x_1 + x_2 - 3) \\ -(x_1^2 - x_2 - s_1 + 1) \\ -(x_1^2 - x_2 + s_2) \\ -(x_2 - s_3 - 1, 5) \\ -(x_2 + s_4 - 2) \end{bmatrix}$$

O método de Newton é aplicado ao sistema de equações não lineares (6.3) para determinar as direções de busca das variáveis, isto é, $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta s_4, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2, \Delta \pi_3$ e $\Delta \pi_4$, o que resulta em:

$$W\Delta d = -\nabla \text{FLABM},$$

em que: $\Delta d^T = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \Delta s_4, \Delta \lambda, \Delta \pi_1, \Delta \pi_2, \Delta \pi_3 \text{ e } \Delta \pi_4)$ e W a matriz Hessiana da função Lagrangiana, dada por:

$$W = \begin{bmatrix} \nabla_{x_1 x_1}^2 \text{FLABM} & \nabla_{x_1 x_2}^2 \text{FLABM} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2x_1 & -2x_1 & 0 & 0 \\ \nabla_{x_2 x_1}^2 \text{FLABM} & \nabla_{x_2 x_2}^2 \text{FLABM} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-\mu^{-1}u_{s_1}}{(\mu^{-1}s_{s_1}+1)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu^{-1}u_{s_2}}{(\mu^{-1}s_{s_2}+1)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu^{-1}u_{s_3}}{(\mu^{-1}s_{s_3}+1)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu^{-1}u_{s_4}}{(\mu^{-1}s_{s_4}+1)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2x_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2x_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2_{x_1 x_1} \text{FLABM} = 12(x_1 - 2)^2 + 2 - 2\pi_1 - 2\pi_2 + \mu_2 ;$$

$$\nabla^2_{x_1 x_2} \text{FLABM} = \nabla^2_{x_2 x_1} \text{FLABM} = -4 + \mu_2 ;$$

$$\nabla^2_{x_2 x_2} \text{FLABM} = 8 + \mu_2$$

O vetor solução de Newton $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, \lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ é atualizado usando (4.7). Os vetores dos multiplicadores de Lagrange, u e λ , são atualizados utilizando (4.10) e (4.11), respectivamente. O parâmetro de barreira μ_1 e o parâmetro de penalidade μ_2 são atualizados utilizando (4.12) e (4.13), respectivamente.

As Tabelas 1a, 1b, 2a e 2b apresentam o processo de convergência do método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada aplicado ao problema (6.1), para diferentes fatores de correção e parâmetros de penalidade e barreira, partindo do mesmo ponto inicial. O método pára quando as condições de KKT são satisfeitas.

Na Tabela 1a, observa-se que o processo convergiu em 6 iterações, utilizando como valores iniciais: o ponto $x^T = (1, 1; 1, 9)$; parâmetro de barreira $\mu_1 = 0,01$; parâmetro de penalidade $\mu_2 = 1$, sendo $k_1 = 2$ seu parâmetro de correção; as variáveis de folga e excesso foram tomadas iguais a 1, os multiplicadores de Lagrange u_1, u_2, u_3 e u_4 foram tomados iguais a 2 e $\lambda, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ e π_4 tomados iguais a 1.

A Tabela 1b mostra os valores dos multiplicadores de Lagrange durante todo o processo de otimização.

TABELA 1a – Convergência do método da nova FLABM aplicado ao problema (6.1) com $\mu_1 = 0,01$ e $\mu_2 = 1$

t.	F.Obj.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	μ_1	μ_2	α_p	α_d
0	7,946	1,100	1,900	1,000	1,000	1,000	1,000	0,010	1	-	-
1	6,852	1,159	1,840	1,142	0,782	0,955	0,992	0,0099	2	0,795	1,800
2	6,082	1,205	1,794	1,258	0,612	0,924	0,989	0,0098	4	0,568	1,354
3	5,526	1,240	1,759	1,350	0,479	0,902	0,987	0,0097	8	0,432	1,231
4	5,119	1,267	1,732	1,423	0,375	0,885	0,986	0,0096	16	0,320	1,156
5	4,817	1,288	1,711	1,481	0,293	0,873	0,985	0,0094	32	1,000	0,992
6	4,589	1,304	1,695	1,526	0,230	0,863	0,985	0,0092	64	1,000	1,000

TABELA 1b – Valores dos multiplicadores de Lagrange

It.	u_1	u_2	u_3	u_4	λ	π_1	π_2	π_3	π_4
0	2,000	2,000	2,000	2,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,006	1,000	0,025	0,019	1,008	0,924	0,918	0,927	0,923
2	0,004	1,000	0,019	0,012	0,995	0,870	0,864	0,873	0,869
3	0,003	1,000	0,015	0,009	0,977	0,829	0,824	0,832	0,828
4	0,001	1,000	0,009	0,007	0,960	0,797	0,793	0,800	0,797
5	1,0e-5	1,000	0,005	0,004	0,944	0,774	0,769	0,776	0,773
6	1,0e-6	1,000	0,001	0,002	0,931	0,755	0,751	0,758	0,755

Na tabela 2a, observa-se que para o mesmo problema, o processo convergiu em 3 iterações, utilizando como valores iniciais: o ponto $x^T = (1,1;1,9)$; parâmetro de barreira $\mu_1 = 1$; parâmetro de penalidade $\mu_2 = 10$, sendo $k_1 = 10$ seu parâmetro de correção; as variáveis de folga e excesso e os multiplicadores de Lagrange foram tomados iguais a 1. Observa-se que o valor da função objetivo no ponto inicial, para as duas tabelas, é 7,946.

A Tabela 2b mostra os valores dos multiplicadores de Lagrange durante todo o processo de otimização.

TABELA 2a – Convergência do método da nova FLABM aplicado ao problema (6.1) com $\mu_1 = 1$ e $\mu_2 = 10$

It.	F.Obj.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	μ_1	μ_2	α_p	α_d
0	7,946	1,100	1,900	1,000	1,000	1,000	1,000	1	10	-	-
1	5,814	1,223	1,776	1,270	0,531	0,846	0,945	0,673	100	0,795	1,800
2	4,581	1,304	1,693	1,443	0,282	0,803	0,940	0,436	1000	1,000	1,000

TABELA 2b – Valores dos multiplicadores de Lagrange

It.	u_1	u_2	u_3	u_4	λ	π_1	π_2	π_3	π_4
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,019	0,083	0,041	0,034	0,945	0,878	0,810	0,882	0,828
2	0,0000	0,005	0,0003	0,0001	0,921	0,795	0,718	0,791	0,754

Nas Figuras 3 e 4, apresenta-se uma comparação do processo de convergência referentes às Tabelas 1a e 2a, respectivamente. Lembramos que estamos partindo da mesma solução factível. Como podemos verificar nas Figuras 1 e 2, dado o ponto inicial, o método proposto procura um ponto no interior da região factível e, aproxima-se da solução ótima do problema, mantendo satisfeitas a restrição de igualdade e a restrição canalizada da variável x_2 durante todo o processo de otimização. Na Tabela 2 observamos que, para um bom ajuste nos fatores e parâmetros de penalidade e barreira, podemos obter o mesmo resultado da Tabela 1, em um número menor de iterações, utilizando a mesma precisão de 10^{-3} .

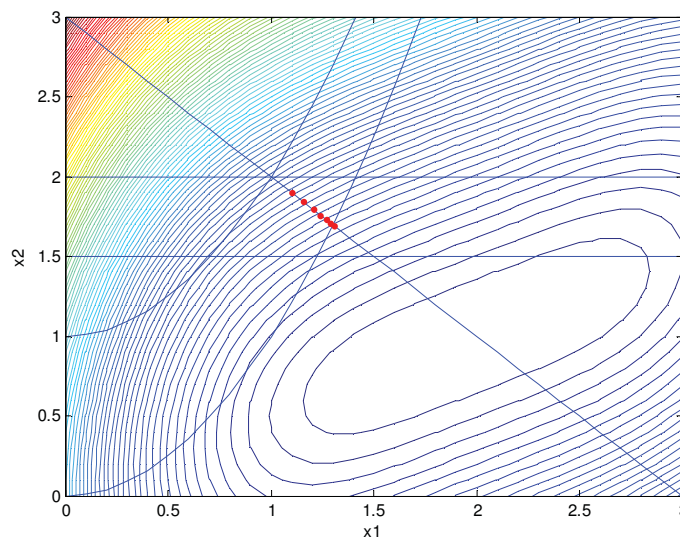


FIGURA 3: Convergência do método da nova FLABM referente à Tabela 1a

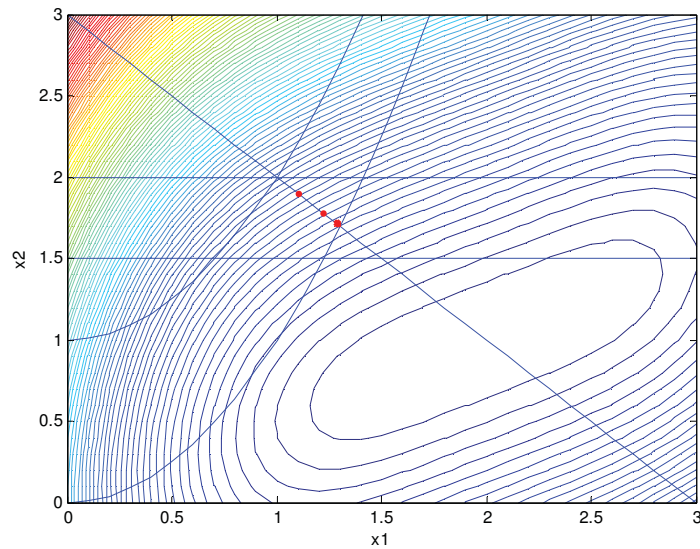


FIGURA 4: Convergência do método da nova FLABM referente à Tabela 2a

Nas próximas seções analisaremos o sistema TESTE, de 3 barras, proposto por DOMMEL & TINNEY (1968); e os sistemas elétricos: IEEE 14, 30 e 162 barras.

6.2 SISTEMA ELÉTRICO DE 3 BARRAS

Este exemplo foi proposto por DOMMEL & TINNEY (1968) e tem como finalidade exemplificar a aplicação do método da nova FLABM. O sistema de 3 barras, da Figura 5, possui as seguintes características:

- 1 barra de referência (*Slack* - SL) – barra 1;
- 1 barra de controle de reativo (CR) – barra 2;
- 1 barra de carga (CG) – barra 3;
- 2 linhas de transmissão.

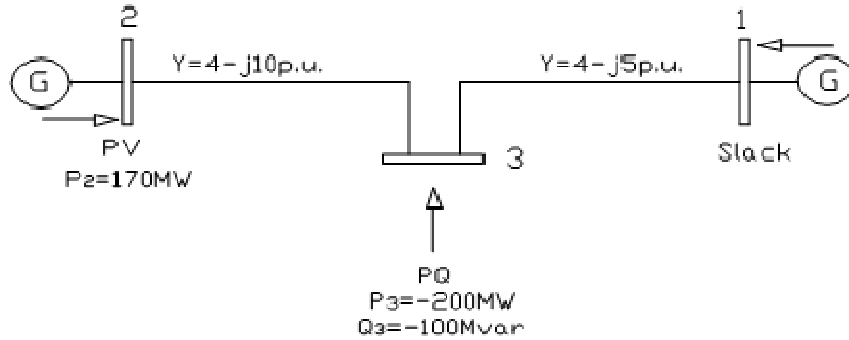


FIGURA 5 - Sistema elétrico de 3 barras

Na formulação do problema de FPO associado ao sistema da figura 5, tem-se para a barra de controle de reativo, uma equação de balanço da rede (ΔP_2). Para a barra de carga têm-se duas equações de balanço da rede (ΔP_3 e ΔQ_3). Para a barra de controle de reativo, tem-se a restrição canalizada de geração de potência reativa ($Q_2(V, \theta)$). Todas as tensões são canalizadas, possuindo limites mínimos e máximos. Neste exemplo, não consideramos a potência reativa na barra 1.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(V, \theta) \\
 &\text{sujeito a.: } \Delta P_2 = 0 \\
 &\quad \Delta P_3 = 0 \\
 &\quad \Delta Q_3 = 0 \\
 &\quad \underline{Q}_2 \leq Q_2(V, \theta) \leq \overline{Q}_2 \\
 &\quad \underline{V}_1 \leq V_1 \leq \overline{V}_1 \\
 &\quad \underline{V}_2 \leq V_2 \leq \overline{V}_2 \\
 &\quad \underline{V}_3 \leq V_3 \leq \overline{V}_3
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

sendo:

$$f(V, \theta) = g_{23}(V_2^2 + V_3^2 - 2V_2V_3 \cos \theta_{23}) + g_{31}(V_3^2 + V_1^2 - 2V_3V_1 \cos \theta_{31})$$

$$\Delta P_2 = P_2^G - P_2^C - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{2i} \cos \theta_{2i} + B_{2i} \sin \theta_{2i})$$

$$\Delta P_3 = P_3^G - P_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \cos \theta_{3i} + B_{3i} \sin \theta_{3i})$$

$$\Delta Q_3 = Q_3^G - Q_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \sin \theta_{3i} - B_{3i} \cos \theta_{3i})$$

$$Q_2(V, \theta) = V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{2i} \sin \theta_{2i} - B_{2i} \cos \theta_{2i})$$

A resolução do problema (6.4) pelo método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada exige que as restrições canalizadas sejam desdobradas em duas restrições de desigualdade e, posteriormente, transformadas em igualdades através da adição de variáveis de folga e excesso positivas. Estas variáveis são incorporadas à função objetivo através da função barreira modificada. Desta forma (6.4) passa a ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } F(V, \theta) \\ &\text{sujeito a : } \Delta P_2 = 0 \\ &\quad \Delta P_3 = 0 \\ &\quad \Delta Q_3 = 0 \\ &\quad (Q_2(V, \theta) - \overline{Q_2} + s_{12}) = 0 \\ &\quad (Q_2(V, \theta) - \underline{Q_2} - s_{22}) = 0 \\ &\quad (V_1 - \overline{V_1} + s_{31}) = 0 \\ &\quad (V_1 - \underline{V_1} - s_{41}) = 0 \\ &\quad (V_2 - \overline{V_2} + s_{32}) = 0 \\ &\quad (V_2 - \underline{V_2} - s_{42}) = 0 \\ &\quad (V_3 - \overline{V_3} + s_{33}) = 0 \\ &\quad (V_3 - \underline{V_3} - s_{43}) = 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

em que:

$$F(V, \theta) = f(V, \theta) - \mu u_{12} \ln(\mu^{-1} s_{12} + 1) - \mu u_{22} \ln(\mu^{-1} s_{22} + 1) - \mu \sum_{i=1}^3 u_{3i} \ln(\mu^{-1} s_{3i} + 1) - \mu \sum_{i=1}^3 u_{4i} \ln(\mu^{-1} s_{4i} + 1)$$

Ao problema (6.5) associa-se a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada. Para cada restrição do problema tem-se um multiplicador de Lagrange correspondente. A nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada é dada por:

$$\begin{aligned}
\text{FLABM} = & f(V, \theta) - \mu u_{12} \ln(\mu^{-1} s_{12} + 1) - \mu u_{22} \ln(\mu^{-1} s_{22} + 1) - \mu \sum_{i=1}^3 u_{3i} \ln(\mu^{-1} s_{3i} + 1) - \mu \sum_{i=1}^3 u_{4i} \ln(\mu^{-1} s_{4i} + 1) + \\
& - \lambda p_2 (P_2^G - P_2^C - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{2i} \cos \theta_{2i} + B_{2i} \sin \theta_{2i})) - \lambda p_3 (P_3^G - P_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \cos \theta_{3i} + B_{3i} \sin \theta_{3i})) + \\
& - \lambda q_3 (Q_3^G - Q_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \sin \theta_{3i} - B_{3i} \cos \theta_{3i})) - \pi_{12} (Q_2(V, \theta) + s_{12} - \bar{Q}_2) + \\
& - \pi_{22} (Q_2(V, \theta) - s_{22} - \bar{Q}_2) - \pi_{31} (V_1 + s_{31} - \bar{V}_1) - \pi_{41} (V_1 - s_{41} - \bar{V}_1) - \pi_{32} (V_2 + s_{32} - \bar{V}_2) + \\
& - \pi_{42} (V_2 - s_{42} - \bar{V}_2) - \pi_{33} (V_3 + s_{33} - \bar{V}_3) - \pi_{43} (V_3 - s_{43} - \bar{V}_3) + \\
& + \frac{\mu_2}{2} ((P_2^G - P_2^C - V_2 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{2i} \cos \theta_{2i} + B_{2i} \sin \theta_{2i}))^2 + (P_3^G - P_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \cos \theta_{3i} + B_{3i} \sin \theta_{3i}))^2 + \\
& + (Q_3^G - Q_3^C - V_3 \sum_{i=1}^3 V_i (G_{3i} \sin \theta_{3i} - B_{3i} \cos \theta_{3i}))^2) \tag{6.6}
\end{aligned}$$

As condições necessárias de primeira-ordem são aplicadas em (6.6), gerando um sistema de equações não lineares, o qual será resolvido pelo método de Newton obtendo-se as direções de busca para a atualização das variáveis do sistema. Os parâmetros de barreira e de penalidade foram atualizados por (4.12) e (4.13), respectivamente.

A seguir, apresenta-se passo a passo o processo de convergência do método destacando-se o valor de todas as variáveis do problema, dos multiplicadores de Lagrange e dos valores das potências ativas e reativas nas barras. A magnitude da tensão na barra 3 é fixa e igual a 1.0 p.u., como proposto por DOMMEL & TINNEY (1968).

Estado Inicial do Sistema

O estado inicial do sistema e os limites utilizados para o nível de tensão e geração de reativos são mostrados nas Tabelas 3 e 4, respectivamente. Os valores iniciais e as estimativas dos multiplicadores de Lagrange e os valores iniciais das variáveis de folga ou excesso são

apresentados nas Tabelas 5, 6 e 7, respectivamente. Os valores iniciais atribuídos foram: parâmetro de barreira $\mu_1=1,0$, parâmetro de penalidade $\mu_2=1,001$ e o multiplicador de Lagrange $u=1$.

TABELA 3 – Estado inicial do sistema de 3 barras

Barra k	Tipo	V_k (p.u.)	Ang_k (°)	P_k^g (MW)	P_k^c (MW)	Q_k^g (MVar)	Q_k^c (MVar)
1	SL	1,00	0,00	-	-	-	-
2	CR	1,00	-2,00	170	0	-	-
3	CG	1,00	-5,00	0	200	0	100

TABELA 4 – Limites para as tensões e reativos

Barra K	$\underline{V}_k$ (p.u.)	$\overline{V}_k$ (p.u.)	$\underline{Q}_k$ (MVar)	$\overline{Q}_k$ (MVar)
1	0,95	1,10	-9999	9999
2	0,95	1,20	-9999	9999
3	1,00	1,00	-	-

TABELA 5 – Valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange

Barra	λ_p	λ_q	π_1	π_2	π_3	π_4
1	-	-	-	-	-0,91	0,95
2	0,0	-	-0,0001	0,0001	-0,83	0,95
3	0,0	0,0	-	-	-1,00	1,00

TABELA 6 – Valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange

Barra	u_1	u_2	u_3	u_4
1	-	-	1,00	1,00
2	1,00	1,00	1,00	1,00
3	-	-	1,00	1,00

TABELA 7 – Valores iniciais das variáveis de folga ou excesso

Barra	s_1	s_2	s_3	s_4
1	-	-	0,1	0,05
2	100,19	99,79	0,2	0,05
3	-	-	0,00	0,00

Perdas de potência ativa inicial do sistema = 4,14 MW.

Iteração 1

A Tabela 8 mostra as variáveis do sistema de 3 barras e as Tabelas 9, 10 e 11 os valores e as estimativas dos multiplicadores de Lagrange e das variáveis de folga ou excesso respectivamente na iteração 1.

TABELA 8 – Variáveis do sistema de 3 barras na iteração 1

Barra	Tipo	V (p.u.)	Ang (°)	ΔP (p.u.)	ΔQ (p.u.)	$Q(V,\theta)$ (p.u.)
1	SL	1,07	0,00	-	-	-
2	CR	1,13	6,10	-0,157	-	0,96
3	CG	1,00	-0,30	0,003	0,032	-

TABELA 9 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 1

Barra	λ_p	λ_q	π_1	π_2	π_3	π_4
1	-	-	-	-	-0,97	0,89
2	-1,19	-	-0,01	0,01	-0,93	0,80
3	1,15	1,65	-	-	-1,00	0,99

TABELA 10 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 1

Barra	u_1	u_2	u_3	u_4
1	-	-	1,00	1,00
2	1,00	1,00	1,00	1,00
3	-	-	1,00	1,00

TABELA 11 – Variáveis de folga ou excesso na iteração 1

Barra	s_1	s_2	s_3	s_4
1	-	-	0,03	0,12
2	98,98	101,00	0,07	0,22
3	-	-	0,00	0,00

Perdas de potência ativa do sistema: 13,47 MW.

Iteração 2

A Tabela 12 mostra as variáveis do sistema de 3 barras e as Tabelas 13, 14 e 15 os valores e as estimativas dos multiplicadores de Lagrange e das variáveis de folga ou excesso respectivamente na iteração 2.

TABELA 12 – Variáveis do sistema de 3 barras na iteração 2

Barra	Tipo	V (p.u.)	Ang (°)	ΔP (p.u.)	ΔQ (p.u.)	Q(V,θ) (p.u.)
1	SL	1,10	0,00	-	-	-
2	CR	1,13	5,30	-0,006	0,001	0,86
3	CG	1,01	-0,60	0,006	-	-

TABELA 13 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 2

Barra	λ_p	λ_q	π_1	π_2	π_3	π_4
1	-	-	-	-	-1,00	0,86
2	0,14	-	-0,01	0,01	-0,92	0,80
3	0,06	0,11	-	-	-1,01	0,99

TABELA 14 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 2

Barra	u_1	u_2	u_3	u_4
1	-	-	1,00	1,00
2	1,00	1,00	1,00	1,00
3	-	-	1,00	1,00

TABELA 15 – Variáveis de folga ou excesso na iteração 2

Barra	s_1	s_2	s_3	s_4
1	-	-	0,03	0,12
2	98,98	101,00	0,07	0,22
3	-	-	0,00	0,00

Perdas de potência ativa do sistema: 12,83 MW.

Iteração 3

A Tabela 16 mostra as variáveis do sistema de 3 barras e as Tabelas 17, 18 e 19 os valores e as estimativas dos multiplicadores de Lagrange e das variáveis de folga ou excesso respectivamente na iteração 3.

TABELA 16 – Variáveis do sistema de 3 barras na iteração 3

Barra	Tipo	V (p.u.)	Ang (°)	ΔP (p.u.)	ΔQ (p.u.)	Q(V,θ) (p.u.)
1	SL	1,07	0,00	-	-	-
2	CR	1,13	6,10	-0,000	0,001	1,02
3	CG	1,00	-0,30	-0,002	-	-

TABELA 17 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 3

Barra	λ_p	λ_q	π_1	π_2	π_3	π_4
1	-	-	-	-	-0,97	0,86
2	-0,02	-	-0,01	0,01	-0,92	0,77
3	0,09	0,06	-	-	-1,01	0,99

TABELA 18 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 3

Barra	u_1	u_2	u_3	u_4
1	-	-	1,00	1,00
2	1,00	1,00	1,00	1,00
3	-	-	1,00	1,00

TABELA 19 – Variáveis de folga ou excesso na iteração 3

Barra	s_1	s_2	s_3	s_4
1	-	-	0,03	0,12
2	98,98	101,00	0,07	0,22
3	-	-	0,00	0,00

Perdas de potência ativa do sistema: 12,77 MW.

Iteração 4

A Tabela 20 mostra as variáveis do sistema de 3 barras e as Tabelas 21, 22 e 23 os valores e as estimativas dos multiplicadores de Lagrange e das variáveis de folga ou excesso respectivamente na iteração 4.

TABELA 20 – Variáveis do sistema de 3 barras na iteração 4

Barra	Tipo	V (p.u.)	Ang (°)	ΔP (p.u.)	ΔQ (p.u.)	Q(V, θ) (p.u.)
1	SL	1,07	0,0	-	-	-
2	CR	1,13	4,3	0,000	0,000	131,34
3	CG	1,00	-1,3	-0,000	-	-

TABELA 21 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 4

Barra	λ_p	λ_q	π_1	π_2	π_3	π_4
1	-	-	-	-	-0,96	0,85
2	-0,02	-	-0,01	0,01	-0,91	0,75
3	0,09	0,06	-	-	-1,00	0,99

TABELA 22 – Multiplicadores de Lagrange na iteração 4

Barra	u_1	u_2	u_3	u_4
1	-	-	0,96	0,83
2	0,01	0,01	0,89	0,73
3	-	-	1,00	0,99

TABELA 23 – Variáveis de folga ou excesso na iteração 4

Barra	s_1	s_2	s_3	s_4
1	-	-	0,03	0,12
2	98,98	101,00	0,07	0,22
3	-	-	0,00	0,00

Perdas de potência ativa do sistema: 12,82 MW.

O sistema convergiu em 4 iterações. O ponto de operação obtido atingiu a mesma solução do método proposto por DOMMEL & TINNEY (1968), com uma precisão de 10^{-4} p.u. Na solução do problema, as restrições de igualdade e desigualdade e as condições de KKT estão satisfeitas.

Nas próximas seções apresentam-se os sistemas elétricos IEEE 14, 30 e 162 barras e o estado final de cada um deles.

6.3 SISTEMA IEEE 14 BARRAS

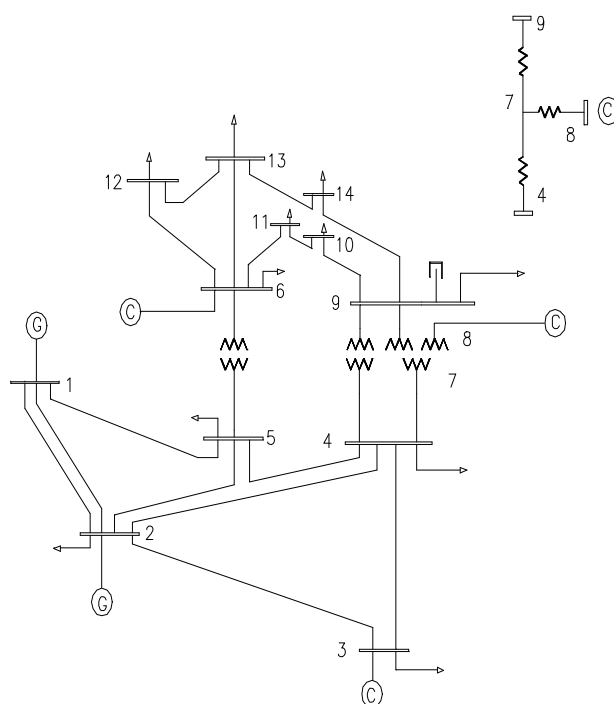


FIGURA 6 – Sistema IEEE 14 barras

A Figura 6 apresenta o sistema elétrico IEEE 14 barras, que possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 4 barras de controle de reativos;
- 9 barras de carga;

- 17 linhas de transmissão;
- 3 transformadores com *tap* fixos.

Os parâmetros iniciais para o sistema IEEE 14 barras foram $\mu_1=0,0001$, $\mu_2=1,001$ e $u=1$. O processo convergiu em 10 iterações com um total de geração de potência reativa de 80,20 MVar e um total de perdas de potência ativa de 13,30 MW. O processo de otimização está resumido na Tabela 24. O tempo de processamento foi de 0,03 segundos.

TABELA 24 – Processo de otimização do sistema IEEE 14 barras para o método da nova FLABM

ITERAÇÕES	PERDAS (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVar)
0	13,45	23,52	5,64
1	13,32	11,75	12,79
2	13,33	8,94	12,12
3	13,31	4,27	1,58
4	13,30	2,24	0,53
5	13,30	11,12	0,26
6	13,30	0,56	0,13
7	13,30	0,28	0,06
8	13,30	0,14	0,03
9	13,30	0,07	0,02
10	13,30	0,03	0,01

Na Figura 7 tem-se a magnitude das tensões na última iteração. Todas as tensões estão dentro dos limites predefinidos na solução

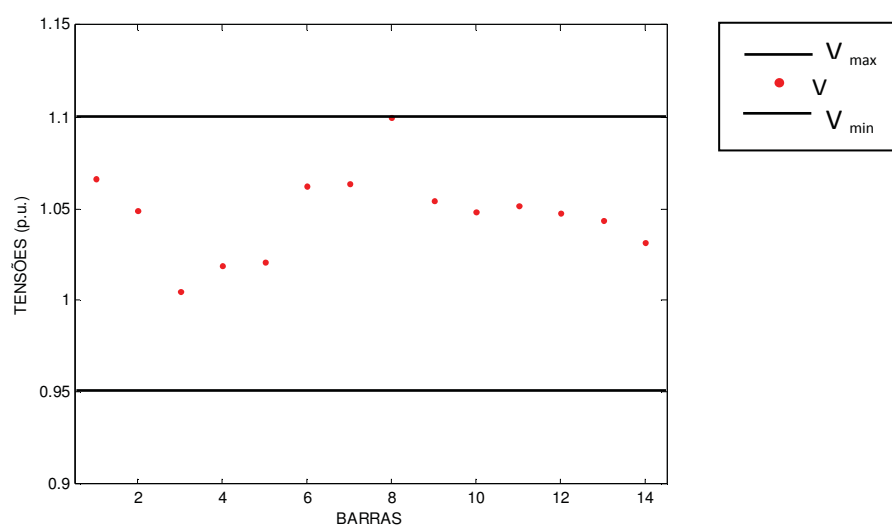


FIGURA 7 – Magnitude das tensões para o sistema IEEE 14 barras

Os pontos de operação encontrados para o sistema IEEE 14 barras, pelo método da nova FLABM, obedeceram a todas as restrições do sistema, satisfazendo as condições de KKT com uma precisão de 10^{-3} p.u.

6.4 SISTEMA IEEE 30 BARRAS

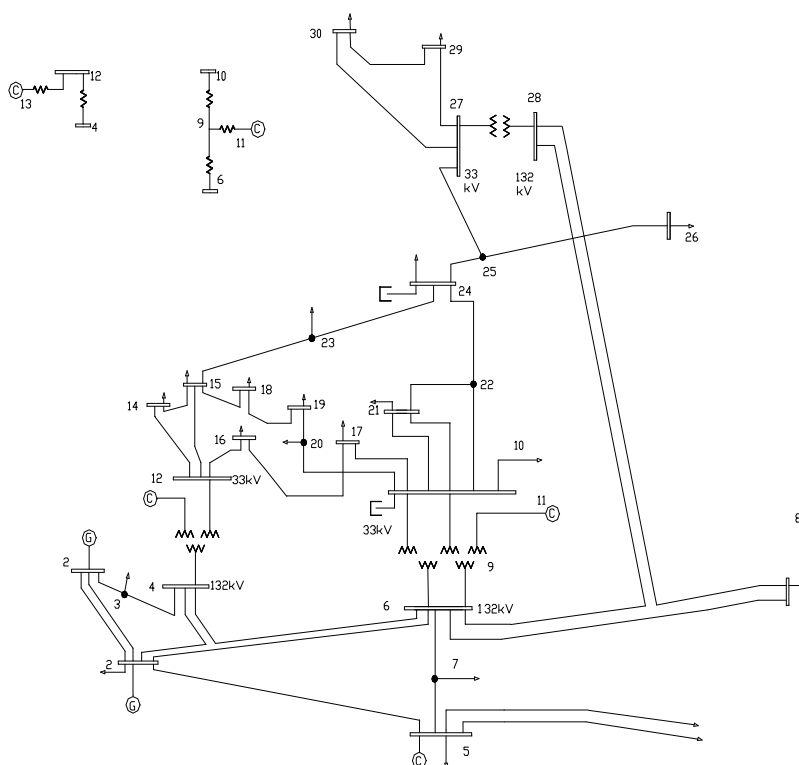


FIGURA 8 - Sistema IEEE 30 barras

A Figura 8 apresenta o sistema elétrico IEEE 30 barras, que possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 5 barras de controle de reativos;
- 24 barras de carga;
- 41 linhas de transmissão;
- 4 transformadores com *tap* fixos.

Os parâmetros iniciais para o sistema IEEE 30 barras foram $\mu_1=0,0001$, $\mu_2=1,001$ e $u=15$. O processo de otimização convergiu em 11 iterações com um total de geração de potência reativa de 160,84 MVar e um total de perdas de potência ativa de 17,29 MW. O processo de otimização está resumido na Tabela 25. O tempo de processamento foi de 0,09 segundos.

TABELA 25 – Processo de otimização do sistema IEEE 30 barras para o método da nova FLABM

ITERAÇÕES	PERDAS (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVar)
0	17,84	47,40	75,20
1	17,08	23,76	36,80
2	17,03	17,40	26,83
3	17,10	8,73	13,31
4	17,18	4,37	6,63
5	17,24	2,18	3,31
6	17,26	1,10	1,66
7	17,28	0,55	0,83
8	17,28	0,27	0,41
9	17,28	0,14	0,21
10	17,29	0,08	0,12
11	17,29	0,04	0,05

Na Figura 9 tem-se a magnitude das tensões na última iteração. Todas as tensões estão dentro dos limites predefinidos na solução.

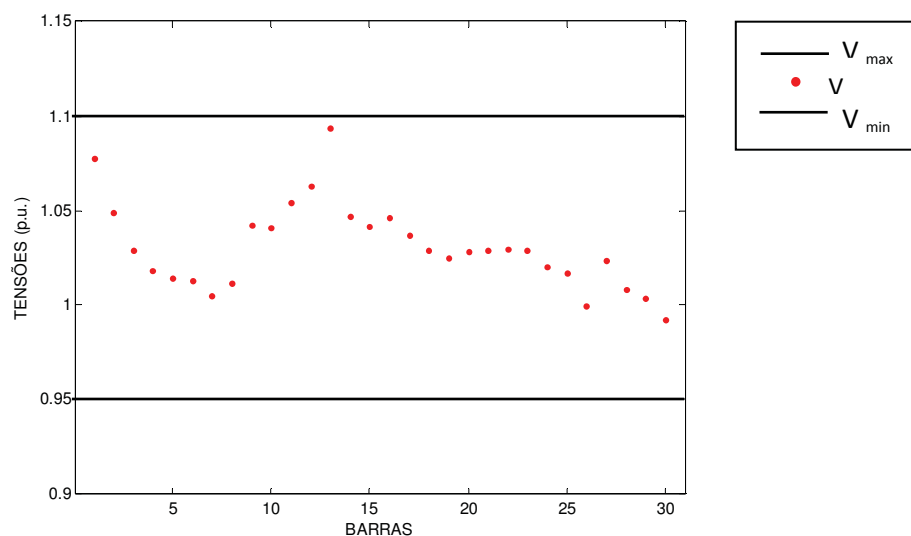


FIGURA 9 – Magnitude das tensões para o sistema IEEE 30 barras

Os pontos de operação encontrados para o sistema IEEE 30 barras, pelo método da nova FLABM, obedeceram a todas as restrições do sistema, satisfazendo as condições de KKT com uma precisão de 10^{-3} p.u.

6.5 SISTEMA IEEE 162 BARRAS

O sistema elétrico IEEE 162 barras possui as seguintes características:

- 1 barra de geração (*slack*);
- 11 barras de controle de reativo;
- 150 barras de carga;
- 280 linhas de transmissão;
- 43 transformadores com o *tap* fixos.

Esse teste foi executado com as condições iniciais propostas em (www.sor.princeton.edu/~rvdb/ampl/nlmodels/power/IEEE162a.bus acessado em: 13/07/2011) para o método da nova FLABM.

Os parâmetros iniciais para o sistema IEEE 162 barras foram $\mu_1=0,01$, $\mu_2=1,01$ e $u=1$. O processo convergiu em 14 iterações com um total de geração de potência reativa de 1026,77 MVar e um total de perdas de potência ativa de 163,05 MW. O processo de otimização está resumido na Tabela 26. O tempo de processamento foi de 4,27 segundos.

TABELA 26 – Processo de otimização do sistema IEEE 162 barras para o método da nova FLABM

ITERAÇÕES	PERDAS (MW)	ΔP (MW)	ΔQ (MVar)
0	166,89	526,00	124,98
1	163,74	262,81	61,61
2	163,12	140,34	32,72
3	163,04	70,24	16,32
4	163,08	35,14	8,15
5	163,12	17,59	4,07
6	163,14	8,80	2,04
7	163,15	4,40	1,02
8	163,15	2,20	0,51
9	163,14	1,10	0,26
10	163,13	0,55	0,13
11	163,12	0,28	0,07
12	163,10	0,14	0,03
13	163,08	0,07	0,03
14	163,05	0,03	0,02

Na Figura 10 tem-se a magnitude das tensões na última iteração. Todas as tensões estão dentro dos limites predefinidos na solução.

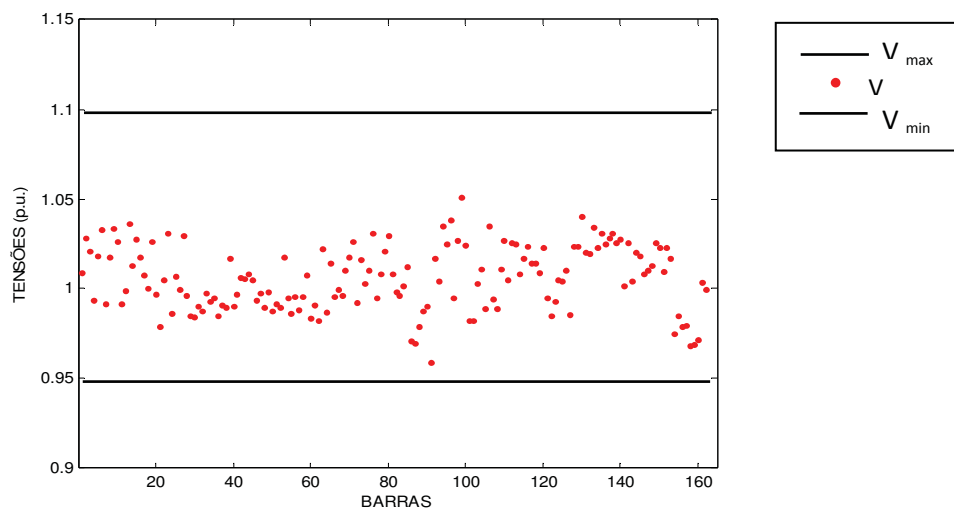


FIGURA 10 – Magnitude das tensões para o sistema IEEE 162 barras

Os pontos de operação encontrados para o sistema IEEE 162 barras, pelo método da nova FLABM, obedeceram a todas as restrições do sistema, satisfazendo as condições de KKT com uma precisão de 10^{-3} p.u.

No apêndice, mostra-se o banco de dados dos parâmetros dos sistemas de 3 barras e os do IEEE 14, 30 e 162 barras.

Observa-se através dos resultados obtidos neste capítulo que o método da nova FLABM, deduzido no capítulo 4, resolveu todos os problemas propostos. Como quase todo método de otimização não linear restrita, na escolha e no ajuste de parâmetros deve-se ter uma boa “afinidade” com o problema.

No próximo capítulo apresentam-se as conclusões e as perspectivas de continuidade deste trabalho.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta uma nova abordagem, construída a partir de GOLDFARB *et al.*(1999), para a resolução do problema de FPO baseada na associação dos métodos da Lagrangiana aumentada e de barreira modificada. Essa abordagem foi denominada de método da nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada.

Inicialmente, apresentou-se um histórico da função barreira modificada, da função Lagrangiana aumentada e do problema de FPO, e a revisão de alguns métodos de otimização, os quais forneceram um suporte teórico para o desenvolvimento da nova abordagem proposta. Formulou-se a nova função Lagrangiana aumentada barreira modificada, na qual as restrições de desigualdade e variáveis canalizadas são transformadas em igualdades através do uso de variáveis de folga e excesso positivas. Essas variáveis são incorporadas à função objetivo através da função barreira modificada. Associa-se as restrições de igualdade originais do problema a função Lagrangiana aumentada e as igualdades restantes uma função Lagrangiana. O algoritmo foi baseado na solução de uma seqüência de problemas de minimização irrestrita, parametrizados pelo fator de barreira, pelo fator de penalidade, pelos multiplicadores de Lagrange associados à função barreira modificada e pelos multiplicadores de Lagrange associados à função Lagrangiana aumentada. Esse algoritmo envolve iterações internas (Newton) e externas (Lagrangiana aumentada barreira modificada). A cada iteração externa, os parâmetros de barreira, de penalidade, os multiplicadores de Lagrange da função barreira modificada e os multiplicadores de Lagrange da função Lagrangiana aumentada são atualizados. A iteração interna corresponde a um processo para minimização de um problema irrestrito em que os parâmetros de barreira, de penalidade e as estimativas dos multiplicadores de Lagrange estão fixos. As variáveis primais e duais são atualizadas pelos fatores de correção, originados da iteração interna, e pelos passos primais e duais respectivamente.

Para validação dos resultados, aplicou-se o método a um exemplo matemático e ao problema de FPO. Para resolução do mesmo, utilizou-se o programa computacional desenvolvido por SOUSA (2006) e realizou-se a adaptação para o nosso método. Os resultados obtidos pelo exemplo matemático e pelos testes utilizando os sistemas de 3 barras e os do IEEE 14, 30 e 162 barras apresentados neste trabalho evidenciam o potencial da abordagem proposta para a resolução do problema de FPO e para problemas de PNL. O número de iterações do método está diretamente ligado à escolha dos fatores iniciais de barreira e penalidade e seus respectivos parâmetros de correção.

A matriz Lagrangiana W tem uma estrutura esparsa, característica, que foi explorada na implementação computacional. Em virtude de sua esparsidade, o armazenamento da matriz Lagrangiana foi feito de forma compacta, isto é, somente os elementos diferentes de zero foram armazenados. Aplicou-se a técnica de esparsidade fornecida pela rotina MA28. Essa rotina utiliza uma variação da eliminação de Gauss para sistemas esparsos e apesar de não ser a rotina ideal para o problema de FPO, demonstrou um bom desempenho nos testes realizados, obtendo ganho de memória e redução no tempo de processamento.

As contribuições deste trabalho podem ser resumidas em dois aspectos: na área de Matemática contribuiu-se com o desenvolvimento de uma nova abordagem da função Lagrangiana aumentada barreira modificada e seu método para a resolução de problemas de PNL restritos; na área de Engenharia Elétrica, acrescentou-se uma abordagem do tipo primal-dual ao conjunto dos métodos aplicados na resolução do problema de FPO, o qual é de grande interesse para os estudos realizados no planejamento e na programação de operação de sistemas de energia elétrica.

A pesquisa desenvolvida leva-nos a uma seqüência de trabalhos futuros enunciados a seguir:

- Desenvolvimento de um sistema em linguagem C para aplicações no setor energético e em problemas de grande porte;
- Regras especiais para a inicialização e correção dos parâmetros de penalidade e barreira;

- Proposta de novas regras de ajuste nos passos primais e duais utilizados;
- Realização de testes mais elaborados com sistemas elétricos maiores;
- Estudo do comportamento geométrico do método.
- Comparação do desempenho do método com o de outros já existentes;
- Modelagem do problema com a inclusão de outras funções objetivos.

REFERÊNCIAS

ADIBI, A.M.; POLYAK, R.A.; GRIVA, I.A.; MILI, L.; AMMARI, S. (2003). Optimal transformer tap selection using modified barrier-augmented lagrangian method. *IEEE transactions on power systems*, v. 18, p. 251-257.

ALBER, M.; REEMTSEN, R. (2007). Intensity modulated radiotherapy treatment planning by use of a barrier-penalty multiplier method. *Optimization Methods & Software*, v. 22, p. 391-411.

ANDREANI, R.; BIRGIN, E.G.; MARTÍNEZ, J.M.; SCHUVERDT, M.L. (2006). Augmented Lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification. *Mathematical Programming*, v. 111, p. 234-252.

ARGAEZ, M.; TAPIA, R.A. (2002). On the global convergence of a modified augmented Lagrangian linesearch interior-point Newton method for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 114, p. 1-25.

ARROW, K.J.; GOULD, F.J.; HOWE, S.M. (1973). A General Saddle Point for Constrained Optimization. *Mathematical Programming*, v. 5, n. 1, p. 225-234.

AVELINO, C.P.; VICENTE, L.N. (2003). Updating the multipliers associated with inequality constraints in an augmented Lagrangian multiplier method. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 119, p. 215-233.

BAPTISTA, E.C.; BELATI, E.A.; COSTA, G.R.M. (2005). Logarithmic barrier-augmented Lagrangian function to the optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 27, p. 528-532.

BAPTISTA, E. C.; BELATI, E.; SOUZA V.; COSTA, G.R.M. (2006). Primal-Dual Logarithmic Barrier and Augmented Lagrangian Function to the Loss Minimization in Power Systems. *Electric Power Components and Systems Lexington – USA*, v. 34, n. 7, p. 775-784.

BAPTISTA, E.C.; BELATI, E.; SOUZA, V.; COSTA, G.R.M. (2009). Loss minimization by the predictor corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research (Print)*, v. 79, p. 803-808.

BAPTISTA, E. C. (2001). *Método da função Lagrangiana aumentada-barreira logarítmica para a solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo*. São Carlos. 175p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D.; SHETTY, C.M. (1993). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 2 ed. New York, John Wiley.

BELATI, E.A.; COSTA, G.R.M. (2008). Transmission loss allocation based on optimal power flow and sensitivity analysis. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 30, p. 291-295.

BELATI, E.A.; ALVES, D.A.; COSTA, G.R.M. (2008). Na approach of optimal sensitivity applied in the tertiary loop of the automatic generation control. *Electric Power Systems Research*, v. 78, p. 1553-1560.

BELATI, E. A.; DE SOUZA, A. M.; COSTA, G.R.M. (2010). Influence of the Operational Constraints in the Active Transmission Losses Allocation via Lagrange Multipliers. *IEEE Latin America Transactions*, v. 8, p. 58-64.

BELTRAN, C.; HEREDIA, F.J. (2002). Unit commitment by augmented Lagrangian relaxation: Testing two decomposition approaches. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 112, p. 295-314.

BEN-TAL, A.; ZIBULEVSKY, M. (1997). Penalty/Barrier Multiplier Methods For Convex Programming Problems. *SIAM Journal of Optimization*, v. 7, n. 2, p.347-366.

BERTSEKAS, D.P. (1976a). On Penalty and Multiplier Methods for Constrained Minimization. *SIAM Journal Control and Optimization*, v.14, n. 2, p. 216-235.

BERTSEKAS, D.P. (1976b). Multiplier Methods: A Survey. *Automática*, v. 12, n. 2, p.133-145.

BERTSEKAS, D.P. (1982). *Constrained Optimization and Lagrange Methods*. 1.ed. Londres, Academic Press.

BERTSEKAS, D.P.; TSENG, P. (1993). On the Convergence of the Exponential Multiplier Method for Convex Programming. *Mathematical Programming*, v. 60, n. 1, p. 1-19.

BIRGIN, E.G.; CASTILLO, R.A.; MARTINEZ, J.M. (2005). Numerical comparison of Augmented Lagrangian algorithms for nonconvex problems. *Computational Optimization and Applications*, v. 31, p. 31-55.

BIRGIN, E.G.; MARTINEZ, J.M. (2007). Structured minimal-memory inexact quasi-Newton method and secant preconditioners for augmented Lagrangian optimization. *SIAM Journal on Optimizatio*, v. 12, p. 1112-1130.

BIRGIN, E.G.; MARTINEZ, J.M. (2008). Improving ultimate convergence of an augmented Lagrangian method. *Optimization Methods & Software*, v. 23, p. 177-195

BOGGS, P.T.; TOLLE, J.W. (1980). Augmented Lagrangians Which Are Quadratic in the Multiplier. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 31, n. 1, p. 17-26.

BOUKARI, D.; FIACCO, A.V. (1995). Survey of Penalty, Exact-Penalty and Multiplier Methods From 1968 to 1993. *Optimization*, v. 32, p.301-334.

BREITFELD, M.G.; SHANNO, D.F. (1996). Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming. *Annals of Operations Research*, v. 62, p. 439-463.

CARPENTIER, J. L. (1962). Contribution a L'etude du Dispatching Economique. *Bull-Soc. Fr Elec.*, Ser. B3, p. 431 – 447.

CARROL, C.W. (1961). The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems. *Operations Research*, v. 9, p. 169-184.

CARVALHO, E.P.; SANTOS, A. MA, T.F. (2008). Reduced gradient method combined with augmented Lagrangian and barrier for the optimal power flow problem. *Applied Mathematics and Computation*, v. 200, p. 529-536.

CHEN, T.W.C.; VASSILIADIS V.S. (2003). Solution of general nonlinear optimization problems using the penalty/modified barrier method with the use of exact Hessians. *Computer and Chemical Engineering*, v. 27, p. 501-525.

CONN, R.A.; GOULD, N.I.M.; TOINT, P.L. (1991). A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization With General Constraints and Simple Bounds. *SIAM Journal Numerical Analysis*, v. 28, n. 2, p. 545-572.

CONN, A.R.; GOULD, N.; TOINT, P.L. (1997). A Globally Convergent Lagrangian Barrier Algorithm for Optimization With General Inequality Constraints and Simple Bounds. *Mathematics of Computation*, v. 66, n. 217, p. 261 –288.

COSTA, G.R.M. (1990). *O Método Dual-Newton Aplicado ao Fluxo de Carga Ótimo*, Campinas. 235 p. Tese (Doutorado) – FEE/DSCE, Unicamp.

COSTA, G.R.M. (2002). Modified Newton Method for Reactive Dispatching. *Electrical Power & Energy Systems*, v. 24, p. 815-819.

COSTA, G.R.M; COSTA, C.E.U; SOUZA, A.M. (2000). Comparative studies of optimization methods for the optimal power flow problem. *Electric Power Systems Research*, v. 56, n. 3, p. 249-254;

COSTA, G.R.M.; COSTA, C.E.U. (2000). Improved Newton method for optimal power flow problem. *Electrical power and Energy Systems*, v. 22, p. 459-462.

DINIZ-EHRHARDT, M.A.; GOMES-RUGGIERO, M.A.; MARTINEZ, J.M.; SANTOS, S.A. (2004). Augmented Lagrangian algorithms based on the spectral projected gradient method for solving nonlinear programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 123, p. 497-517.

DI PILLO, G. A.; GRIPPO, L. (1979). New Class of Augmented Lagrangians in Nonlinear Programming. *SIAM Journal Control and Optimization*, v. 17, n. 5, p.618-628.

DI PILLO, G.; GRIPPO, L. (1982). A New Augmented Lagrangian Function for Inequality Constraints in Nonlinear Programming Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 36, n.4, p. 495-519.

DOMMEL, H.W.; TINNEY, W.F. (1968). Optimal Power Flows Solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 87, n. 10, p. 1866- 1876.

DOSTAL, Z.; FRIEDLANDER, A.; SANTOS, S.A. (1999). Augmented Lagrangians with Adaptive Precision Control for Quadratic Programming with Equality Constraints. *Computational Optimization and Applications*, v. 14, p. 37-53.

DU, X.W.; ZHANG, L.S.; GAO, Y.L. (2006). A class of Augmented Lagrangians for Equality Constraints in Nonlinear Programming Problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 172, p. 644-663.

DUFF, I.S.; REID, J.K. (1979). Some Design Features of a Sparse Matrix Code-Aere Harwell, *ACM Transaction on Mathematical Software*, v. 5, n° 1, p. 18-35.

DUSSAULT, J.P. (1998). Augmented Penalty Algorithms. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 18, p. 355-372.

ECHEVERRI, M.G.; FLORES, M.J.R.; MANTOVANI, J.R.S. (2010). Two Decomposition Approaches Applied to the Multi-Area Optimal Reactive Power Flow Problem. *Dyna-Colombia*, v. 66, p. 303-312.

FIACCO, A.V.; McCORMICK, G.P. (1968). *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. New York, John Wiley & Sons.

FIACCO, A.V.; McCORMICK, G.P. (1990). *Nonlinear Programming – Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Philadelphia. SIAM. (Classics in Applied Mathematics, v. 4).

FLETCHER, R. (1975). Ideal Penalty for Constrained Optimization, *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, v. 15, n. 3, p. 319-342.

FORSGREN, A.; GILL, P.E.; WRIGHT, M.H. (2002). Interior Methods for Nonlinear Optimization. *SIAM REVIEW*, v.44, n. 4, p. 525-597.

FRISCH, K. R. (1955). *The Logarithmic Potential Method of Convex Programming*. University Institute of Economics(manuscript). Oslo, Norway.

GLAD, S.T. (1979). Properties of Updating Methods for the Multipliers in Augmented Lagrangians. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.28, n. 2, p. 135-156.

GOLDFARB, D.; POLYAK, R.A.; SCHEINBERG, K.; YUZEFOVICH, I. (1999). A modified Barrier-Augmented Lagrangian Method for Constrained Minimization, *Computational Optimization and Applications*, v. 14, p. 55-74.

GONZAGA, C.C. (1989). Algoritmos de Pontos Interiores para Programação Linear. In:17^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA-CNPQ.

GRANVILLE, S. (1994). Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, p. 136-146.

HAGER, W.W. (1993). Analysis an Implementation of a Dual Algorithm for Constrained Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.79, n. 3, p.427-462.

HAN, S.P. (1979). Penalty Lagrangian Methods Via a Quasi-Newton Approach. *Mathematics of Operations Research*, v. 4, n. 3, p.291-302.

HESTENES, M.R. (1969). SURVEY PAPER – Multiplier and Gradient Methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 4, n.5, p.303-320.

HUNEALT, M.; GALIANA, F.D. (1991). A Survey of the Optimal Power Flow Literature. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 6, p. 762-770.

IUSEM, A.N.; NASRI, M. (2010). Augmented Lagrangian Methods for Variational Inequality Problems. *Rairo-Operations Research*, v. 44, p. 5-25.

JENSEN, D.; POLYAK, R.A. (1994). The Convergence of a Modified Barrier Method for Convex-Programming. *IBM Journal of Research and Development*, v.38, p. 307 – 321.

KARMAKAR, N. (1984). A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorics*, v. 4, p. 373-395.

KHOT, N.S.; POLYAK, R.A.; SCHNEUR, R.; BERKE, L. (1995). Structural optimization using the Newton modified barrier method. *Structural Optimization*, v.10, p. 209-216.

KOCVARA, M.; STINGL, M. (2007). On the solution of large-scale SPD problems by modified barrier method using iterative solvers. *Math. Program. Ser. B*, 109, p. 413-444.

KREJIK, N.; MARTINEZ, J.M., MELLO, M.; PILLOTTA, E.A. (2000). Validation of an augmented lagrangian algorithm with a Gauss-Newton Hessian approximation using a set of hard-spheres problems. *Computational Optimization and Applications*, v. 16, n. 3, p. 247-263.

KRUMKE, S.O. (1996). On the convergence of a modified barrier function method for convex quadratic and linear programming. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, v. 76, p. 485-486.

LUCIDI, S. (1988). New Results on a Class of Exact Augmented Lagrangians. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 58, n. 2, p. 259-282.

LUKSAN, L.; MATONOHARA, C.; VICEK, J. (2010). Primal Interior Point Method for Minimization of Generalized Minimax Functions. *Kybernetika*, v.46, p. 697-721.

LUO, H.Z.; SUN, X.L.; LI, D. (2007). On the convergence of augmented Lagrangian **methods** for constrained global optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 18, p.1209-1230.

LUO, H.Z.; SUN, X.L.; WU, H.X. (2008). Convergence properties of augmented Lagrangian methods for constrained global optimization. *Optimization Methods & Software*, v. 23, p. 763-778.

LUO, H.Z.; SUN, X.L.; XU, Y.F.; WU, H.X. (2010). On the convergence properties of modified augmented Lagrangian methods for mathematical programming with complementarity constraints. *Journal of Global Optimization*, v. 46, p. 217-232.

MATSIOL, L.C.; GONZAGA, C.C. (2008). A new family of penalties for augmented Lagrangian methods. *Numerical Linear Algebra with Applications*, v. 15, p. 925-944.

MEHROTRA, S. (1992). On implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, v.2, p. 575-601.

MELMAN, A. (1996). Line search procedure in barrier methods for some convex programming problems. *SIAM Journal on Optimization*, v. 6, n. 2, p. 283-298.

MELMAN, A.; POLYAK, R.A. (1996). The Newton Modified Barrier Method for QP Problems. *Annals of Operations Research*, v. 54, 465-519.

MENDONÇA, L.F. (2008). Quasi-Newton acceleration for equality-constrained minimization. *Computational Optimization and Applications*, v. 40, p. 373-388.

MIELE, A.; MOSELEY, P.E.; CRAGG, E.E. (1972). On the Method of Multipliers for Mathematical Programming Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 10, n. 1, p.1- 33.

MIJANGOS, E.; NABONA, N. (2001). On the first-order estimation of multipliers from Kuhn-Tucker systems. *Computers & Operations Research*, v. 28, n. 3, p.243-270.

MOGUERZA, J.M.; PRIETO, F.J. (2003). An augmented Lagrangian interior-point method using directions of negative curvature. *Mathematical Programming*, v. 95, p. 573-616.

MOMOH, J.A; EL-HAWARY, M.E.; ADAPA, R. (1999.a). A review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 – Part I: NonLinear and Quadratic Programming Approaches. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n.1, p.96-104.

MOMOH, J.A; EL-HAWARY, M.E.; ADAPA, R. (1999.b). A review of Selected Optimal Power Flow Literature to 1993 – Part II: Newton, Linear Programming and Interior Point Methods. *IEEE Transactions on Power Systems* , v. 14, n.1, p.105-111.

MONTICELLI, A.J. (1983). Fluxo de carga em redes de Energia Elétrica. São Paulo, Edgard Blücher.

MONTICELLI, A.J.; LUI, W.H.E. (1992). Adaptive Movement Penalty Method for Newton Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v.7, n.1, p.334-341.

NASH, S.G.; POLYAK, R.A.; SOFER A. (1994). A numerical Comparison of Barrier and Modified-Barrier Methods for Large-Scale Bound-Constrained Optimization. *Large Scale Optimization: State of the Art*, p. 319-338.

NEJDAWI, I.M.; CLEMENTS, K.A.; DAVIS, P.W. (2000). Na Efficient Interior Point Method for Sequential Quadratic Programming Based Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, n. 4, p. 1179-1183.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. (1999). Numerical Optimization. New York: Springer-Verlag.

NOLL, D. (2007). Local convergence of an augmented Lagrangian method for matrix inequality constrained programming. *Optimization Methods & Software*, v. 22, p. 777-802.

PEREIRA, A. A. (2007). *O Método da Função Lagrangiana Barreira Modificada/ Penalidade*. São Carlos. 114p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

POLYAK, R. A. (1992). Modified barrier functions. *Mathematical Programming*, v. 54, n. 2, p. 177-222.

POWELL, M.J.D. (1969). A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems. In: FLETCHER, R. *Optimization*, New York, Academic Press, p.283-298.

POWELL, M.J.D. (1995). Some Convergence Properties of the Modified log Barrier Method for Linear-Programming. *SIAM Journal on Optimization*, v. 5, p. 695-739.

PSIAKI, M.L.; PARK, K. (1995). Augmented Lagrangian Nonlinear Programming Algorithm That Uses SQP and Trust Region Techniques. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 86, n. 2, p. 311-325.

QUINTANA, V.H.; GOMEZ, A.; MARTINEZ, J.L. (1995). Nonlinear Optimal Power Flows by Logarithmic-Barrier Primal-Dual Algorithm. *IEEE NAPS Meeting*.

RASHED, A.M.H.; KELLY, D.H. (1974). Optimal Load Flow Solution Using Lagrangian Multipliers and the Hessian Matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 93, n. 5, p. 1292-1297.

ROCKAFELLAR, R.T. (1973a). A Dual Approach to Solving Nonlinear Programming Problems by Unconstrained Optimization. *Mathematical Programming*, v. 5, p.354-373.

ROCKAFELLAR, R.T. (1973b). The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 12, n. 6, p. 555-562.

ROCKAFELLAR, R.T. (1974). Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming. *SIAM Journal of Control*, v. 12, n. 2, p.268-285.

ROCKAFELLAR, R.T. (1993). Lagrange Multipliers and Optimality. *SIAM Review*, v.35, n. 2, p. 183-238.

SANTOS, A.; DECKMAN, S.; SOARES, S. (1988). A Dual Lagrangian Approach for Optimal Power Flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, p. 1020-1025.

SASSON, A.M. (1969). Combined Use of the Powell and Fletcher-Powell Nonlinear Programming Methods for Optimal Load Flow, *IEEE Trans. on PAS*, v. 88, p. 1530- 1537.

SASSON, A.M.; VILORIA, F.; ABOYTES, F. (1973). Optimal Load Flow Solutions Using the Hessian Matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 92, p. 31-41.

SHANNO, D.F.; BREITFELD, M.G.; SIMANTIRAKI, E.M. (1996). Implementing Barrier Methods for Nonlinear Programming, in: *Interior Point Methods of Mathematical Programming*. Netherlands. Kluwer Academic Publishers, p. 399-414.

SHERALI, H.D.; OZDARYAL, B.; ADAMS, W.P.; ATTIA, N. (2001). On using Exterior Penalty approaches for solving Linear Programming Problems. *Computers & Operations Research*, v. 28, p. 1049-1074.

SOUSA, V.A.; NUNES, L.C.T.; BELATI, E.A., COSTA, G.R.M. (2003). A New Approach Type- Newton for Optimal Reactive Dispatch Problem. *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, ISBN 0-77803-7990-x. Toronto, Canadá.

SOUSA, V.A.; BAPTISTA, E.C.; COSTA, G.R.M. (2004). Modified Barrier Method for Optimal Power Flow Problem. *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, CD Rom ISBN 0-7803-8466-0. Denver-CO, USA.

SOUSA, V. A. (2006). *Resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo reativo via método da Função Lagrangiana Barreira Modificada*. São Carlos. 141p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SOUSA, V.A.; COSTA, G.R.M.; BAPTISTA, E.C. (2006). A Função Barreira Modificada e o Problema de Fluxo de Potência Ótimo. *TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 7, n. 2, p. 21-30.

SOUSA, V.A.; COSTA, G.R.M. (2007). Optimal reactive dispatch problem via improved Newton approach. *Electric Power Components and Systems*, v. 35, p. 319-336

SOUSA, V.A.; BAPTISTA, E.C.; COSTA, G.R.M. (2009). Loss minimization by the predictor-corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research*, v. 79, p. 803-808.

SOUZA, A. M.; SOUSA, V. A.; COSTA, G. R. M. (2010). Studies of cases in Power systems by Sensitivity Analysis oriented by OPF. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 32, p. 969-974.

SUN, D.I.; ASHLEY, B.; HUGUES,A.; TINNEY, W.F. (1984). Optimal Power Flow by Newton Approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. pas 103, n. 10, p. 2864-2875.

TORRES, G. L.; QUINTANA, V.H.; TORRES, G.L. (1998). Optimal Power Flow in Rectangular Form via an Interior Point Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 4, p. 1211-1218.

VASSILIADIS, V.S. (1996). Application of the modified barrier method in large-scale quadratic programming problems. *Computers & Chemical Engineering*, v. 20, p. 243-248.

VASSILIADIS, V.S.; BROOKS, S.A. (1998). Application of the modified barrier method in large-scale quadratic programming problems. *Computer and Chemical Engineering* , v. 22, p. 1197-1205.

WANG, H.Y.; MURILLO-SANCHEZ, C.E.; ZIMMERMAN, R.D.; THOMAS, R.J. (2007). On computational issues of market-based optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 22, p. 1185-1193.

WANG, C.Y.; LI, D. (2009). Unified theory of augmented Lagrangian methods for constrained global optimization. *Journal of Global Optimization*, v. 44, p. 433-458.

WRIGHT, M. H. (1995). Why a pure primal Newton barrier step may be infeasible. *SIAM Journal on Optimization*, v. 5, n. 1, p. 1-12.

WU, Y.; DEBS, A.S.; MARSTEN, R.E. (1994). A Direct Nonlinear Predictor Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, p. 876-883.

WU, H.X.; LUO, H.Z.; LI, S. L. (2009). The global convergence of augmented Lagrangian methods based on NCP function in constrained nonconvex optimization. *Applied Mathematics and Computation*, v. 207, p. 124-134

YAN, W.; WEN, L.; LI, W.; CHUNG, C. Y.; WONG, K. P. (2011). Decomposition-coordination interior point method and its application to multi-area optimal reactive power flow. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 33, p. 55-60.

LEITURAS COMPLEMENTARES

LUENBERGER, D.G. (1984). Linear and Nonlinear Programming. Addison – Wesley Publishing Company Inc., Second Edition.

MASIERO, M.C.S.; BAPTISTA, E.C. (2010). O Método da Função Lagrangiana Aumentada Barreira Modificada para resolução do problema de Fluxo de Potência Ótimo. *In: IEEE/PES Transmission and Distribution Latin America, Anais do IEEE/PES Transmission and Distribution Latin America*, ISBN 978-85-99916-03-2, São Paulo, v. 1T1047. p. 1-6.

MASIERO, M.C.S.; BAPTISTA, E.C.; PEREIRA, A.A.; SOUSA, V.A. (2011). Uma variação da função Lagrangiana Aumentada Barreira Modificada para resolução de problemas de Programação Não Linear. *In: Investigation Operativa (IO) 2011*, Livro de Actas do 15º Congresso da Associação Portuguesa de Investigação Operacional IO 2011, ISBN 978-989-95055-4-4, Coimbra, Portugal, p. 1-12.

MONTICELLI, A.; GARCIA, A. (2000). Introdução a sistemas de Energia Elétrica. Editora Unicamp.

APÊNDICE

BANCO DE DADOS DOS SISTEMAS ELÉTRICOS

Banco de dados do sistema TESTE

1	1	barra1	1000	0.	0.0	0.0-9999	9999	0.0	0.0
2	-1	barra2	1000	-2.	170	0.0-9999	9999	0.0	0.0
3	0	barra3	1000	-5.	0.0	0.0		200.	100.
9999									
2		3		3.44838.	6206				
3		1		9.756112.	195				
9999									
1	0.95		1.10						
2	0.95		1.20						
3	1.00		1.00						
9999									
			900						
9999									

Sistema Elétrico IEEE 14 barras

1	1	barra1	1060	0.	0.0	0.0-9999	9999	0.0	0.0
2	-1	barra2	1045	-5.	0.0	0.0	-40 50	-18.3	12.7
3	-1	barra3	1010	-13.	0.0	0.0	0 40	94.2	19.0
4	0	barra4	1019	-10.	0.0	0.0		47.8	-3.9
5	0	barra5	1020	-8.8	0.0	0.0		7.6	1.6
6	-1	barra6	1070	-14.	0.0	0.0	-6 24	11.2	7.5
7	0	barra7	1062	-13.	0.0	0.0		0.0	0.0
8	-1	barra8	1090	-13.	0.0	0.0	-6 24	0.0	0.0
9	0	barra9	1056	-15.	0.0	0.0		29.5	16.6
10	0	barra10	1051	-15.	0.0	0.0		9.0	5.8
11	0	barra11	1057	-15.	0.0	0.0		3.5	1.8
12	0	barra12	1055	-15.	0.0	0.0		6.1	1.6
13	0	barra13	1050	-15.	0.0	0.0		13.5	5.8
14	0	barra14	1036	-16.	0.0	0.0		14.9	5.0

9999						
1	2	1.938	5.917	5.28		900
1	5	5.403	22.304	4.92		900
2	3	4.699	19.797	4.38		900
2	4	5.811	17.632	3.74		900
2	5	5.695	17.388	3.40		900
3	4	6.701	17.103	3.46		900
4	5	1.335	4.211	1.28		900
4	7		20.912	0.978	0.9501.050	900
4	9		55.618	0.969	0.9501.050	900
5	6		25.202	0.932	0.9501.050	900
6	11	9.498	19.890			900
6	12	12.291	25.581			900
6	13	6.615	13.027			900
7	8	0.001	17.615			900
7	9		11.001			900
9	10	3.181	8.450			900
9	14	12.711	27.038			900
10	11	8.205	19.207			900
12	13	22.092	19.988			900
13	14	17.093	34.802			900
9999						
	0.95	1.10				
9999						
		100				
9999						

Sistema Elétrico IEEE 30 barras

1	1	BARRA1	SLACK	1053	.0	-9999	9999	0.	0.	
2	-1	BARRA2	GERA.	1032	-.09	-40.	50.	-18.3	12.7	
3	0	BARRA3	CARG.	1018	-.14			2.4	1.2	
4	0	BARRA4	CARG.	1010	-.17			7.6	1.6	
5	-1	BARRA5	C.RE.	1010	-.25	-40.	40.	94.2	19.0	
6	0	BARRA6	CARG.	1004	-.20			.0	.0	
7	0	BARRA7	CARG.	998	-.23			22.8	10.9	
8	-1	BARRA8	C.RE.	1010	-.21	-10.	40.	30.0	30.0	
9	0	BARRA9	CARG.	1017	-.26			.0	.0	
10	0	BARRA10	CARG	1015	-.29			5.8	2.0	19.
11	-1	BARRA11	C.RE	1072	-.26	-6.	24.	.0	.0	
12	0	BARRA12	CARG	1019	-.27			11.2	7.5	
13	-1	BARRA13	C.RE	1057	-.27	-6.	24.	.0	.0	
14	0	BARRA14	CARG	1005	-.29			6.2	1.6	
15	0	BARRA15	CARG	1001	-.29			8.2	2.5	
16	0	BARRA16	CARG	1010	-.29			3.5	1.8	
17	0	BARRA17	CARG	1008	-.29			9.0	5.8	
18	0	BARRA18	CARG	994	-.30			3.2	0.9	
19	0	BARRA19	CARG	992	-.31			9.5	3.4	
20	0	BARRA20	CARG	997	-.30			2.2	0.7	
21	0	BARRA21	CARG	1003	-.30			17.5	11.2	
22	0	BARRA22	CARG	1004	-.29			.0	.0	

[illegible]

Sistema Eléctrico IEEE 162 barras

108	2	G	1000-28.	551.	156.	-999999999.	0.	0.	0.
1	0	3	3 1032-25.	0.	0.	0.	0.	0.	-100.
2	0	3	3 1022-30.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
3	0	2	1 999-32.	2000.	0.	0.	0.	2370.	97.
4	0	3	3 1019-34.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
5	0	3	3 1033-25.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
6	1	G	1000-19.	794.	181.	-200.	400.	0.	0.
7	0	3	3 1018-30.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
8	0	7	1 1034-34.	-398.	-19.	0.	0.	0.	0.
9	0	3	3 1026-28.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
10	0	4	2 992-36.	-226.	11.	0.	0.	0.	0.
11	0	4	2 999-32.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
12	0	7	1 1037-34.	-193.	6.	0.	0.	0.	0.
13	0	3	3 1014-31.	-204.	-37.	0.	0.	0.	0.
14	0	5	1 1027-31.	-381.	-56.	0.	0.	0.	0.
15	0	4	2 1018-25.	1500.	6.	0.	0.	1420.	0.
16	0	5	1 1014-30.	54.	-27.	0.	0.	0.	0.
17	0	5	1 1005-29.	116.	-45.	0.	0.	0.	0.
18	0	5	1 1035-34.	0.	0.	0.	0.	34.	12.
19	0	5	1 999-38.	-64.	-4.	0.	0.	0.	0.
20	0	8	979-33.	0.	0.	0.	0.	38.	12.
21	0	5	1 1008-30.	70.	-23.	0.	0.	0.	0.
22	0	5	1 1033-38.	0.	0.	0.	0.	17.	5.
23	0	5	1 988-35.	-63.	-21.	0.	0.	0.	0.
24	0	5	1 1009-33.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
25	0	3	3 1001-29.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
26	0	3	3 1032-21.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
27	0	3	3 997-30.	1500.	0.	0.	0.	1824.	58.
28	0	5	1 988-36.	0.	0.	0.	0.	38.	13.
29	0	5	1 987-38.	0.	0.	0.	0.	28.	9.
30	0	5	1 997-40.	0.	0.	0.	0.	101.	33.
31	0	5	1 990-37.	-72.	3.	0.	0.	0.	0.
32	0	5	1 1004-41.	0.	0.	0.	0.	53.	15.
33	0	5	1 998-43.	0.	0.	0.	0.	45.	15.
34	0	5	1 998-43.	0.	0.	0.	0.	14.	5.
35	0	5	1 989-44.	0.	0.	0.	0.	54.	15.
36	0	5	1 995-43.	0.	0.	0.	0.	32.	9.
37	0	3	3 986-31.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
38	0	5	1 1018-38.	0.	0.	0.	0.	15.	4.
39	0	3	3 987-33.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
40	0	5	1 999-42.	0.	0.	0.	0.	53.	18.
41	0	5	1 1007-40.	0.	0.	0.	0.	39.	13.
42	0	3	3 1003-33.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
43	0	5	1 1011-36.	-41.	17.	0.	0.	0.	0.
44	0	5	1 1007-36.	0.	0.	0.	0.	16.	4.
45	0	5	1 995-36.	0.	0.	0.	0.	20.	5.
46	0	5	1 998-39.	0.	0.	0.	0.	65.	22.
47	0	5	1 990-42.	0.	0.	0.	0.	5.	2.
48	0	5	1 999-41.	60.	30.	0.	0.	94.	23.
49	0	5	1 988-42.	0.	0.	0.	0.	7.	2.
50	0	2	1 996-39.	-100.	23.	0.	0.	0.	0.
51	0	5	1 991-38.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

52	0	5	1	1014-39.	0.	0.	0.	0.	218.	43.	0.
53	0	5	1	995-31.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
54	0	5	1	988-38.	24.	9.	0.	0.	94.	30.	0.
55	0	5	1	995-30.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
56	0	5	1	991-40.	0.	0.	0.	0.	25.	7.	3.
57	0	5	1	997-38.	0.	20.	0.	0.	48.	16.	0.
58	0	4	2	1008-29.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
59	0	4	2	984-33.	0.	0.	0.	0.	84.	27.	0.
60	0	7	1	992-34.	-244.	-26.	0.	0.	0.	0.	0.
61	0	4	2	983-31.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
62	0	4	2	1023-18.	866.	71.	0.	0.	0.	0.	0.
63	0	4	2	988-30.	-59.	3.	0.	0.	0.	0.	0.
64	0	3	3	1015-29.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
65	0	3	3	996-25.	26.	-116.	0.	0.	0.	0.	0.
66	0	3	3	1000-31.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
67	0	5	1	999-42.	0.	0.	0.	0.	23.	7.	6.
68	0	5	1	1013-40.	0.	0.	0.	0.	40.	13.	12.
69	0	5	1	1020-39.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
70	0	5	1	1026-24.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
71	0	5	1	992-32.	0.	0.	0.	0.	30.	12.	12.
72	0	5	1	1016-31.	-427.	-110.	0.	0.	0.	0.	0.
73	1	G		1000-18.	447.	86.	-72.	267.	0.	0.	0.
74	0	3	3	1011-34.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
75	0	3	3	1029-25.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
76	1	G		1000-16.	1055.	136.	-170.	605.	0.	0.	0.
77	0	5	1	1011-40.	0.	0.	0.	0.	26.	9.	5.
78	0	5	1	1022-38.	0.	0.	0.	0.	79.	0.	0.
79	0	5	1	1031-36.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
80	0	5	1	1009-38.	0.	0.	0.	0.	16.	5.	3.
81	0	8		1000-46.	0.	0.	0.	0.	51.	17.	22.
82	0	5	1	998-42.	0.	0.	0.	0.	62.	20.	10.
83	0	T	1	1003-41.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
84	0	5	1	1009-38.	0.	0.	0.	0.	38.	9.	3.
85	0	5	1	970-41.	0.	0.	0.	0.	41.	11.	12.
86	0	5	1	969-45.	0.	0.	0.	0.	51.	13.	12.
87	0	7	1	979-44.	0.	0.	0.	0.	17.	4.	0.
88	0	8		988-45.	0.	0.	0.	0.	61.	4.	0.
89	0	7	1	990-46.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
90	0	7	1	961-49.	0.	0.	0.	0.	50.	17.	10.
91	0	5	1	1012-37.	0.	0.	0.	0.	51.	13.	0.
92	0	5	1	1002-38.	0.	0.	0.	0.	36.	9.	0.
93	0	5	1	1029-33.	0.	0.	0.	0.	104.	35.	0.
94	0	5	1	1026-37.	0.	0.	0.	0.	164.	6.	0.
95	0	7	1	1029-37.	0.	0.	0.	0.	117.	39.	0.
96	0	7	1	1001-45.	0.	0.	0.	0.	119.	0.	0.
97	0	7	1	1026-37.	0.	0.	0.	0.	23.	6.	0.
98	0	7	1	1044-35.	0.	30.	0.	0.	151.	50.	0.
99	1	G		1000-31.	131.	5.	-61.	76.	0.	0.	0.
100	0	7	1	987-46.	0.	0.	0.	0.	23.	7.	3.
101	1	G		1000-40.	82.	30.	-24.	39.	0.	0.	0.
102	0	5	1	1003-37.	0.	0.	0.	0.	17.	4.	0.
103	0	5	1	1014-35.	-322.	46.	0.	0.	0.	0.	0.
104	0	7	1	992-45.	0.	0.	0.	0.	32.	10.	6.
105	0	7	1	1033-39.	0.	0.	0.	0.	25.	6.	2.
106	0	5	1	994-43.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
107	0	5	1	990-44.	0.	0.	0.	0.	35.	5.	0.
109	0	3	3	1013-33.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
110	0	5	1	1027-30.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
111	0	5	1	1005-34.	0.	0.	0.	0.	65.	17.	0.

112	0	3	3	1027-27.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-50.
113	0	5	1	1025-31.	-33.	95.	0.	0.	0.	0.	0.
114	1	G		1000-24.	131.	22.	-25.	33.	0.	0.	0.
115	0	5	1	1017-36.	0.	0.	0.	0.	17.	3.	0.
116	0	5	1	1024-37.	0.	0.	0.	0.	56.	11.	0.
117	0	5	1	1014-38.	0.	0.	0.	0.	102.	20.	0.
118	1	G		1000-34.	173.	60.	-44.	100.	0.	0.	0.
119	0	3	3	1009-35.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
120	0	3	3	1023-27.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
121	1	G		1000-20.	620.	151.	-120.	250.	0.	0.	0.
122	0	5	1	988-46.	0.	0.	0.	0.	47.	9.	0.
123	0	5	1	999-46.	-165.	55.	0.	0.	0.	0.	0.
124	0	3	3	1008-31.	2571.	0.	0.	0.	2000.	91.	0.
125	1	0	3	1019-29.	2388.	-23.	-10999900.		2000.	0.	0.
126	0	3	3	1010-27.	2467.	64.	0.	0.	2000.	0.	0.
127	0	3	3	984-30.	53.	-65.	0.	0.	0.	0.	0.
128	0	3	3	1023-27.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
129	0	3	3	1024-27.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
130	1	G		1029-19.	455.	123.	-144.	288.	0.	0.	0.
131	1	G		1018-20.	575.	95.	-265.	320.	0.	0.	0.
132	0	5	1	1019-30.	-159.	-36.	0.	0.	0.	0.	0.
133	0	8		1035-32.	0.	0.	0.	0.	30.	6.	0.
134	0	5	1	1023-31.	0.	0.	0.	0.	17.	3.	0.
135	0	8		1031-32.	0.	0.	0.	0.	20.	4.	0.
136	0	8		1025-32.	0.	0.	0.	0.	20.	4.	0.
137	0	8		1029-32.	0.	0.	0.	0.	20.	4.	0.
138	0	8		1031-31.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
139	0	8		1026-32.	0.	0.	0.	0.	10.	2.	0.
140	0	8		1028-32.	0.	0.	0.	0.	14.	3.	0.
141	0	5	1	1002-34.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
142	0	8		1027-41.	0.	0.	0.	0.	27.	5.	0.
143	0	8		1005-39.	0.	0.	0.	0.	21.	4.	0.
144	0	8		1021-36.	0.	0.	0.	0.	12.	2.	0.
145	0	8		1018-34.	0.	0.	0.	0.	11.	2.	0.
146	0	8		1009-40.	0.	0.	0.	0.	21.	4.	0.
147	0	5	1	1010-39.	0.	0.	0.	0.	216.	43.	0.
148	0	8		1013-40.	0.	0.	0.	0.	120.	24.	0.
149	0	5	1	1025-24.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
150	0	5	1	1023-24.	0.	0.	0.	0.	5.	2.	0.
151	0	5	1	1009-27.	0.	0.	0.	0.	24.	8.	0.
152	0	5	1	1023-27.	-6.	3.	0.	0.	0.	0.	0.
153	0	8		1017-26.	0.	0.	0.	0.	4.	2.	0.
154	0	8		974-32.	0.	0.	0.	0.	28.	10.	6.
155	0	8		985-30.	0.	0.	0.	0.	12.	4.	0.
156	0	8		978-32.	0.	0.	0.	0.	8.	2.	0.
157	0	8		980-33.	0.	0.	0.	0.	32.	10.	0.
158	0	8		968-33.	0.	0.	0.	0.	16.	6.	3.
159	0	8		968-33.	0.	0.	0.	0.	8.	2.	0.
160	0	8		971-33.	0.	0.	0.	0.	14.	5.	3.
161	0	5	1	1003-28.	0.	0.	0.	0.	32.	10.	0.
162	0	5	1	1000-29.	0.	0.	0.	0.	20.	6.	0.
9999											
1	2			0.35	3.2154.	3800.	0000.	0000.	0000.	0.	
1	3			0.34	3.2672.	2400.	0000.	0000.	0000.	0.	
1	4			0.64	6.2198.	7000.	0000.	0000.	0000.	0.	
1	5			0.11	1.1920.	1200.	0000.	0000.	0000.	0.	
1	6			0.00	1.33	0.0001.	0510.	9001.	1.100	0.	
2	7			0.14	1.2521.	2200.	0000.	0000.	0000.	0.	
2	13			0.46	4.1770.	5800.	0000.	0000.	0000.	0.	

3	14	23.61101.22	0.0000.0000.0000.000	0.
3	50	3.89 16.99	0.0000.0000.0000.000	0.
3	103	10.74180.23	0.0000.0000.0000.000	0.
3	123	28.83167.19	0.0000.0000.0000.000	0.
3	124	1.40 64.83	0.0000.0000.0000.000	0.
3	125	0.84 11.39	0.0000.0000.0000.000	0.
4	112	0.59 5.6892.5000.0000.0000.000	0.	0.
4	115	0.00 1.85 0.0001.0000.9001.100	0.	0.
4	119	0.14 1.1920.5000.0000.0000.000	0.	0.
5	120	0.22 2.2437.9200.0000.0000.000	0.	0.
5	129	0.22 2.6846.1200.0000.0000.000	0.	0.
5	131	0.00 1.27 0.0001.0240.9001.100	0.	0.
7	8	0.04 1.89 0.0000.9750.9001.100	0.	0.
7	9	0.17 1.6928.7200.0000.0000.000	0.	0.
8	10	45.91107.03 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
8	12	1.06 5.74 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
8	13	12.74 47.84 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
8	14	4.73 39.56 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
8	15	50.35174.33 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
8	132	2.52 28.80 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
9	75	0.13 1.5026.8200.0000.0000.000	0.	0.
10	11	0.51 3.70 7.1600.0000.0000.000	0.	0.
10	13	12.99 62.20 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
10	15	12.75 70.33 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
10	60	25.25122.42 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
11	15	2.85 17.9334.8400.0000.0000.000	0.	0.
11	46	1.42 12.2518.7600.0000.0000.000	0.	0.
11	58	1.70 10.7020.7400.0000.0000.000	0.	0.
11	59	0.71 4.71 8.5200.0000.0000.000	0.	0.
12	2	0.08 3.77 0.0001.0250.9001.100	0.	0.
12	13	10.38 31.37 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
12	14	15.98 64.15 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
12	132	44.86157.73 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
13	15	4.40 32.27 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
13	62	0.98 12.21 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
14	72	1.07 8.28 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
14	113	0.63 3.82 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
14	132	0.57 3.74 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
15	58	1.15 7.3214.2000.0000.0000.000	0.	0.
15	60	39.07167.53 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
15	62	0.84 5.88 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
15	63	17.04145.55 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
16	17	60.17143.73 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
16	18	2.97 10.70 5.4600.0000.0000.000	0.	0.
16	27	15.74 88.71 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
16	126	10.53 51.32 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
16	127	9.58 52.76 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
17	18	2.13 10.13 6.4200.0000.0000.000	0.	0.
17	19	23.14 76.78 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
17	21	4.71 26.65 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
17	127	2.87 26.37 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
18	30	2.07 10.88 5.2000.0000.0000.000	0.	0.
18	32	2.34 12.20 5.8200.0000.0000.000	0.	0.
18	37	0.00 4.56 0.0001.0990.9001.100	0.	0.
19	21	38.67190.05 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
19	38	2.39 12.50 5.9600.0000.0000.000	0.	0.
19	43	6.03 25.72 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
19	127	10.74 68.09 0.0000.0000.0000.000	0.	0.
20	53	0.00 11.40 0.0001.0000.9001.100	0.	0.

20	157	1.13	2.79	0.0400.0000.0000.000	0.
21	22	3.12	16.29	7.7800.0000.0000.000	0.
21	127	1.05	64.14	0.0000.0000.0000.000	0.
22	38	1.40	5.40	2.5000.0000.0000.000	0.
22	39	0.00	4.93	0.0001.0980.9001.100	0.
22	40	1.88	7.17	3.2800.0000.0000.000	0.
22	41	1.72	8.50	4.0400.0000.0000.000	0.
23	24	1.74	5.11	2.3000.0000.0000.000	0.
23	60	6.60	30.93	0.0000.0000.0000.000	0.
24	25	0.00	3.40	0.0001.0210.9001.100	0.
24	28	2.49	7.25	2.0200.0000.0000.000	0.
24	45	1.37	7.25	3.4000.0000.0000.000	0.
25	26	0.59	5.8393	0.0200.0000.0000.000	0.
25	27	0.44	4.1083	8.8400.0000.0000.000	0.
26	74	0.63	6.0793	0.0000.0000.0000.000	0.
26	75	0.30	3.2250	3.8000.0000.0000.000	0.
26	76	0.00	0.82	0.0001.0400.9001.100	0.
27	31	1.01	12.73	0.0000.0000.0000.000	0.
27	62	1.73	58.10	0.0000.0000.0000.000	0.
27	65	1.05	27.64	0.0000.0000.0000.000	0.
27	125	3.50168	4.45	0.0000.0000.0000.000	0.
27	126	0.22	2.25	0.0000.0000.0000.000	0.
27	127	15.06143	5.55	0.0000.0000.0000.000	0.
28	29	2.40	9.65	4.4400.0000.0000.000	0.
29	30	3.80	15.00	6.9600.0000.0000.000	0.
29	31	2.06	8.33	3.8400.0000.0000.000	0.
30	32	2.49	10.05	4.5800.0000.0000.000	0.
32	33	1.14	4.48	2.0800.0000.0000.000	0.
33	34	2.80	11.40	5.2000.0000.0000.000	0.
33	35	2.16	10.70	5.1000.0000.0000.000	0.
33	36	1.02	5.36	2.5400.0000.0000.000	0.
34	40	3.97	15.17	6.9000.0000.0000.000	0.
34	77	2.35	8.96	4.0800.0000.0000.000	0.
35	40	2.71	13.41	6.3800.0000.0000.000	0.
36	67	1.76	9.24	4.4000.0000.0000.000	0.
37	39	0.39	3.7967	0.0000.0000.0000.000	0.
37	126	0.40	3.8167	0.0000.0000.0000.000	0.
37	127	0.40	4.0368	3.2000.0000.0000.000	0.
39	42	0.20	1.8632	0.0000.0000.0000.000	0.
40	81	3.00	34.50	0.3800.0000.0000.000	0.
40	82	0.40	1.90	1.0800.0000.0000.000	0.
41	81	3.70	37.20	0.5800.0000.0000.000	0.
41	83	0.52	2.56	1.2400.0000.0000.000	0.
41	84	0.57	5.80	2.9200.0000.0000.000	0.
42	109	0.19	1.9633	3.3000.0000.0000.000	0.
43	44	1.88	7.51	3.4800.0000.0000.000	0.
43	103	3.24	17.02	0.0000.0000.0000.000	0.
43	124	2.93	17.66	0.0000.0000.0000.000	0.
43	125	14.49	65.09	0.0000.0000.0000.000	0.
44	102	1.30	5.00	2.3600.0000.0000.000	0.
44	103	1.27	5.10	2.4400.0000.0000.000	0.
45	54	1.08	5.70	2.7200.0000.0000.000	0.
46	47	3.10	13.78	6.2200.0000.0000.000	0.
47	48	2.51	11.14	5.0200.0000.0000.000	0.
47	49	0.30	1.20	0.5400.0000.0000.000	0.
48	50	3.36	16.60	7.8000.0000.0000.000	0.
48	51	4.20	13.00	5.7000.0000.0000.000	0.
48	52	5.40	16.80	7.4000.0000.0000.000	0.
49	87	1.40	6.80	2.6600.0000.0000.000	0.

50	51	3.00	9.00	4.1000.0000.0000.000	0.
50	123	40.71185.43	0.0000.0000.0000.000	0.	
50	125	13.37 60.31	0.0000.0000.0000.000	0.	
51	141	3.23 10.00	4.4200.0000.0000.000	0.	
52	79	6.23 21.26	9.4000.0000.0000.000	0.	
52	106	2.31 7.17	3.1400.0000.0000.000	0.	
52	116	0.60 4.87	2.5600.0000.0000.000	0.	
52	117	1.17 4.93	2.3000.0000.0000.000	0.	
52	118	0.00 5.20	0.0001.0420.9001.100	0.	
53	11	0.05 2.00	0.0001.0000.9001.100	0.	
53	54	2.75 19.61	9.5600.0000.0000.000	0.	
53	55	0.05 0.26	0.2200.0000.0000.000	0.	
54	56	1.74 9.10	4.3000.0000.0000.000	0.	
54	57	2.50 12.37	5.8800.0000.0000.000	0.	
55	57	4.62 17.63	8.0200.0000.0000.000	0.	
55	149	1.53 6.71	3.1200.0000.0000.000	0.	
55	162	0.40 1.89	0.9800.0000.0000.000	0.	
56	67	1.70 8.94	4.2400.0000.0000.000	0.	
57	80	2.72 10.37	4.7200.0000.0000.000	0.	
58	61	1.33 10.1818.4200.0000.0000.000	0.		
59	61	1.06 7.0612.1000.0000.0000.000	0.		
60	61	0.27 6.53-0.2201.0250.9001.100	0.		
60	61	0.20 3.93 0.0001.0250.9001.100	0.		
60	62	36.74 96.40 0.0000.0000.0000.000	0.		
60	65	10.41 41.44 0.0000.0000.0000.000	0.		
60	126	53.67182.95 0.0000.0000.0000.000	0.		
61	62	2.96 22.7539.9600.0000.0000.000	0.		
61	63	0.43 4.22 7.6400.0000.0000.000	0.		
62	63	1.58 17.02 0.0000.0000.0000.000	0.		
62	65	0.40 7.40 0.0000.0000.0000.000	0.		
62	126	0.44 29.69 0.0000.0000.0000.000	0.		
63	65	24.09196.00 0.0000.0000.0000.000	0.		
64	65	0.50 5.7190.9800.0000.0000.000	0.		
64	66	0.33 3.8160.6600.0000.0000.000	0.		
65	126	0.31 15.36 0.0000.0000.0000.000	0.		
66	11	0.00 1.18 0.0001.0000.9001.100	0.		
67	68	1.93 10.13 4.8200.0000.0000.000	0.		
68	69	0.68 3.53 1.6800.0000.0000.000	0.		
69	77	0.98 3.74 1.7000.0000.0000.000	0.		
69	78	1.14 4.34 1.9600.0000.0000.000	0.		
69	79	0.52 4.33 2.2000.0000.0000.000	0.		
70	73	0.00 1.97 0.0001.0390.9001.100	0.		
70	149	0.02 0.18 0.1000.0000.0000.000	0.		
70	149	0.02 0.18 0.1000.0000.0000.000	0.		
71	85	3.04 15.06 7.1600.0000.0000.000	0.		
71	150	1.96 9.70 4.6200.0000.0000.000	0.		
72	113	0.22 1.30 0.0000.0000.0000.000	0.		
72	132	0.28 1.68 0.0000.0000.0000.000	0.		
72	152	3.85 18.00 0.0000.0000.0000.000	0.		
74	119	0.31 3.1048.2200.0000.0000.000	0.		
75	128	0.08 0.8716.6000.0000.0000.000	0.		
75	130	0.04 2.42 0.0001.0240.9001.100	0.		
78	79	0.51 3.36 1.8200.0000.0000.000	0.		
78	80	2.44 9.30 4.2200.0000.0000.000	0.		
79	74	0.00 1.80 0.0001.0240.9001.100	0.		
82	83	0.53 2.49 1.3000.0000.0000.000	0.		
84	93	1.25 8.26 4.1400.0000.0000.000	0.		
85	86	2.11 10.46 4.9800.0000.0000.000	0.		
86	87	2.80 11.20 5.3800.0000.0000.000	0.		

86	88	4.40	22.80	10.90	0000.0000.0000.0000	0.
88	96	7.40	25.00	1.42	0000.0000.0000.0000	0.
88	106	0.79	4.68	2.32	0000.0000.0000.0000	0.
89	86	0.00	5.70	0.00	01.0250.9001.100	0.
89	90	6.90	13.40	1.40	0000.0000.0000.0000	0.
90	96	18.37	35.90	3.70	0000.0000.0000.0000	0.
91	92	1.56	8.19	3.76	0000.0000.0000.0000	0.
91	93	1.43	8.95	4.50	0000.0000.0000.0000	0.
91	94	1.45	9.57	4.80	0000.0000.0000.0000	0.
92	102	1.50	6.10	2.92	0000.0000.0000.0000	0.
93	42	0.00	2.60	0.00	01.0240.9001.100	0.
93	108	0.00	1.54	0.00	01.0500.9001.100	0.
94	103	2.27	13.33	6.60	0000.0000.0000.0000	0.
94	107	6.13	18.91	8.36	0000.0000.0000.0000	0.
94	109	0.00	3.50	0.00	01.0240.9001.100	0.
95	91	0.54	4.58	-0.36	01.0200.9001.100	0.
95	96	8.70	21.20	8.60	0000.0000.0000.0000	0.
95	97	12.89	28.09	3.34	0000.0000.0000.0000	0.
95	98	0.71	4.30	2.24	0000.0000.0000.0000	0.
95	99	0.00	6.85	0.00	01.0290.9001.100	0.
96	100	6.90	16.10	1.86	0000.0000.0000.0000	0.
96	101	0.00	10.31	0.00	01.0290.9001.100	0.
97	44	0.51	10.07	-0.25	01.0250.9001.100	0.
98	93	0.06	2.14	-3.41	01.0250.9001.100	0.
98	105	14.85	29.30	3.10	0000.0000.0000.0000	0.
100	104	6.20	14.50	1.66	0000.0000.0000.0000	0.
103	123	18.20	75.10	0.00	0000.0000.0000.0000	0.
103	124	0.02	1.67	0.00	0000.0000.0000.0000	0.
103	125	2.79	19.72	0.00	0000.0000.0000.0000	0.
104	34	0.80	6.37	-0.33	01.0000.9001.100	0.
105	38	0.00	11.60	0.00	01.0250.9001.100	0.
106	107	1.96	6.11	2.68	0000.0000.0000.0000	0.
107	122	1.30	6.21	2.96	0000.0000.0000.0000	0.
109	119	0.60	5.77	92.90	0000.0000.0000.0000	0.
109	124	0.20	2.22	37.82	0000.0000.0000.0000	0.
109	125	0.70	6.20	100.00	0000.0000.0000.0000	0.
110	111	2.30	9.90	4.60	0000.0000.0000.0000	0.
110	112	0.00	1.85	0.00	01.0000.9001.100	0.
110	114	0.00	7.68	0.00	01.0390.9001.100	0.
110	134	0.32	2.56	1.34	0000.0000.0000.0000	0.
110	141	2.10	6.49	2.88	0000.0000.0000.0000	0.
111	115	5.27	22.15	10.30	0000.0000.0000.0000	0.
112	120	0.05	0.44	7.20	0000.0000.0000.0000	0.
112	121	0.00	1.90	0.00	01.0490.9001.100	0.
113	132	4.59	29.11	0.00	0000.0000.0000.0000	0.
113	134	0.08	0.72	0.38	0000.0000.0000.0000	0.
115	117	0.19	1.54	3.30	0000.0000.0000.0000	0.
116	117	0.48	3.91	2.14	0000.0000.0000.0000	0.
116	119	0.00	0.90	0.00	01.0240.9001.100	0.
116	147	0.35	2.86	1.56	0000.0000.0000.0000	0.
117	147	0.22	1.75	1.00	0000.0000.0000.0000	0.
120	14	0.03	1.88	0.00	00.9750.9001.100	0.
120	128	0.04	0.51	10.00	0000.0000.0000.0000	0.
120	129	0.03	0.38	6.52	0000.0000.0000.0000	0.
122	123	1.75	8.35	3.98	0000.0000.0000.0000	0.
123	125	4.23	24.41	0.00	0000.0000.0000.0000	0.
124	125	1.13	15.85	0.00	0000.0000.0000.0000	0.
124	126	5.77	82.56	0.00	0000.0000.0000.0000	0.
125	126	2.01	59.15	0.00	0000.0000.0000.0000	0.

126	127	8.77	70.49	0.0000.0000.0000.000	0.
128	72	0.04	1.80	0.0001.0000.9001.100	0.
129	132	0.04	1.98	0.0001.0000.9001.100	0.
133	134	0.00	4.10	0.0001.0240.9001.100	0.
133	135	1.09	2.59	0.0400.0000.0000.000	0.
133	136	3.90	9.90	0.1600.0000.0000.000	0.
133	137	1.34	5.04	0.1000.0000.0000.000	0.
135	138	4.66	11.82	0.2000.0000.0000.000	0.
136	139	2.60	6.50	0.1000.0000.0000.000	0.
137	140	0.41	1.56	0.0400.0000.0000.000	0.
138	110	0.00	4.10	0.0001.0000.9001.100	0.
138	139	2.60	6.50	0.1000.0000.0000.000	0.
138	140	2.51	9.41	0.1800.0000.0000.000	0.
138	145	9.23	23.38	0.3800.0000.0000.000	0.
142	51	0.00	17.28	0.0001.0700.9001.100	0.
142	143	15.82	39.19	0.6800.0000.0000.000	0.
142	146	16.18	38.61	0.7000.0000.0000.000	0.
143	144	9.27	23.22	0.2000.0000.0000.000	0.
144	141	0.00	8.20	0.0001.0240.9001.100	0.
144	145	8.90	22.10	0.3200.0000.0000.000	0.
144	146	6.80	29.06	0.5800.0000.0000.000	0.
148	116	0.00	4.10	0.0001.0000.9001.100	0.
149	26	0.00	3.86	0.0001.0000.9001.100	0.
149	26	0.00	3.86	0.0001.0000.9001.100	0.
149	150	0.10	0.85	0.2000.0000.0000.000	0.
149	151	0.39	2.62	1.3800.0000.0000.000	0.
149	152	2.53	11.68	5.4400.0000.0000.000	0.
151	161	0.21	1.38	0.7400.0000.0000.000	0.
153	70	0.00	9.16	0.0001.0000.9001.100	0.
153	70	0.00	9.16	0.0001.0000.9001.100	0.
153	154	7.10	28.41	0.5400.0000.0000.000	0.
153	155	4.30	18.56	0.3800.0000.0000.000	0.
154	156	1.55	3.79	0.0800.0000.0000.000	0.
154	160	1.02	4.29	0.1000.0000.0000.000	0.
155	156	1.76	8.22	0.1400.0000.0000.000	0.
156	157	5.30	12.73	0.2200.0000.0000.000	0.
157	55	0.00	8.27	0.0001.0000.9001.100	0.
157	158	4.89	14.04	0.2800.0000.0000.000	0.
158	159	3.39	6.64	0.1200.0000.0000.000	0.
159	160	1.90	8.11	1.2000.0000.0000.000	0.
161	162	0.22	1.03	0.5400.0000.0000.000	0.
9999					
	0.95	1.1			
9999					
		900			
9999					