

Flávia Zechineli Fernandes

Sobre a Teoria Geral das Equações
Diferenciais Parciais Lineares



1910000983



Universidade Estadual Paulista
Câmpus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

**Sobre a Teoria Geral das Equações
Diferenciais Parciais Lineares**



Flávia Zechineli Fernandes

T983/01

Orientador
Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática / Ibilce / Unesp como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas - Área de Concentração: Matemática.

São José do Rio Preto - SP
Maio - 2001

Resumo

À minha família,
dedico

Resumo

Neste trabalho provamos, com o auxílio da Teoria de Hörmander, a existência de solução fraca para a equação diferencial $Au = f$, onde $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ é um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada. Estudamos também, regularidade de solução de equação elíptica.

Palavras-chave: Convoluções, Espaço de Sobolev, Solução Fraca, Operadores Elípticos, Desigualdade de Hörmander.

Abstract

In this work we shall prove, using Hörmander's Theory, the existence of weak solution for a differential equation $Au = f$, where $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ is a linear partial differential operator with constant coefficients, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a limited domain and the function $f \in L^2(\Omega)$ is given. We also study regularity of a solution from an elliptic equation.

Keywords: Convolutions, Sobolev Space, Weak Solution, Elliptic Operators, Hörmander Inequality.



Agradecimentos

Gostaria de expressar a minha gratidão às seguintes pessoas:

Ao Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos, pela orientação deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp - S. J. do Rio Preto, em especial ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio.

Aos meus pais e ao meu irmão pelo incentivo e carinho que sempre dedicaram.

Aos amigos Juliana e Julio pelos ótimos momentos que passamos juntos.

À Capes pelo auxílio financeiro.

À Deus.



Índice

Introdução	1
1 Alguns Conceitos Fundamentais	3
1.1 Notações	3
1.2 Convoluções e Seqüências Regularizantes	5
1.3 Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev	9
2 Existência de Solução Fraca	20
2.1 Operadores Diferenciais Lineares	20
2.2 Uma Condição para Existência de Solução Fraca	23
2.3 Operadores Diferenciais com Coeficientes Constantes	28
3 Operadores Elípticos	36
3.1 Uma Estimativa a Priori	36
3.2 Regularidade	41
Bibliografia	47



Introdução

Neste trabalho estudamos equações diferenciais parciais lineares. Tal equação em geral envolve uma função desconhecida $u(x_1, \dots, x_n)$ e pode ser escrita na forma:

$$Au = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n \leq m} a_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_n} u}{\partial^{\mu_1} x_1 \dots \partial^{\mu_n} x_n} = f(x_1, \dots, x_n).$$

onde f é uma função dada. O resultado principal deste trabalho é o estabelecimento de solução fraca da referida equação.

Descreveremos brevemente, a seguir, o conteúdo deste trabalho.

No Capítulo 1 expomos os pré-requisitos que serão de grande importância para o desenvolvimento dos demais capítulos. Destaca-se, ainda no primeiro capítulo, a noção de Espaço de Sobolev e o Lema da Desigualdade de Sobolev.

No segundo capítulo, definimos a noção de solução fraca de uma equação diferencial parcial linear em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e investigamos condições necessárias e suficientes para a existência de tais soluções para operadores diferenciais lineares. Como resultado principal deste capítulo observamos que, para um domínio



limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a equação $Au = f$ tem solução fraca para qualquer $f \in L^2(\Omega)$.

Este resultado se baseia em algumas desigualdades de Hörmander.

Finalmente, no terceiro capítulo, introduziremos a noção de operador elíptico e como resultado principal deste capítulo provamos o Teorema da Regularidade de Solução Fraca, ou seja, se A é um operador elíptico, então, toda solução fraca de $Au = f$ com $f \in C^\infty(\Omega)$ satisfaz $u \in C^\infty(\Omega)$, isto é, u é uma solução clássica.



Capítulo 1

Alguns Conceitos Fundamentais

Neste capítulo estabelecemos a notação e os pré-requisitos que serão utilizados nos demais capítulos. Destacamos em particular a noção de Espaço de Sobolev e o Lema da Desigualdade de Sobolev.

1.1 Notações

Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Denotaremos por $C^m(\Omega)$ o conjunto de todas as funções definidas numa vizinhança de cada ponto de Ω e que tenha todas as derivadas de ordem menor ou igual a m contínuas em Ω . Se uma função u está em $C^m(\Omega)$ para todo m , então ela é infinitamente diferenciável e dita ser $C^\infty(\Omega)$.

Seja u uma função definida em Ω que assume valores complexos, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Chamamos de **suporte de u** e denotaremos $\text{supp}(u)$ o menor conjunto fechado



(relativamente a Ω) que contém $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. O conjunto $C_0^m(\Omega)$ é o conjunto das funções de $C^m(\Omega)$ cujo suporte é um compacto em Ω e por $C_0^\infty(\Omega)$ denotamos o conjunto das funções $C^\infty(\Omega)$ cujo suporte é compacto em Ω . Chamamos o conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ de conjunto das funções-teste em Ω .

Seja Ω como definido anteriormente e p satisfazendo $1 \leq p < \infty$. Então $L^p(\Omega)$ denota a coleção das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Lebesgue mensuráveis, tais que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

Dizemos que uma função mensurável u em Ω é localmente integrável em Ω se $\int_K |u(x)| dx < \infty$ para todo compacto $K \subset \Omega$. Designamos por $L_{loc}^1(\Omega)$ o conjunto de todas as funções localmente integráveis em Ω .

De forma análoga se define os espaços $L_{loc}^p(\Omega)$.

Entre os espaços $L^p(\Omega)$, destacamos o $L^2(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v) \equiv \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$$

e norma

$$\|v\|_2^2 = \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx.$$



1.2 Convoluções e Seqüências Regularizantes

Definição 1.2.1 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funções mensuráveis tais que para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ a função*

$$y \in \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x - y)g(y) \in \mathbb{C}$$

*é integrável. Neste caso chamamos de **convolução de f com g** e denotamos por $f * g$ a função definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Quando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ a convolução $f * g$ é bem definida e satisfaz

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Outras condições em f e g também permitem definir $f * g$. Na medida em que algum dos fatores de f ou g possui regularidade, o produto $f * g$ também desfrutará de tal regularidade.

Neste parágrafo D^α com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ representa a derivada parcial

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

A seguir citamos propriedades de regularidade do produto $f * g$, que serão úteis neste trabalho.



Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, então

(P1) $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}(f * g) \subset (\text{supp}(f) + \text{supp}(g))$.

(P2) Se $g \in C^m_0(\mathbb{R}^n)$ então $f * g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ e

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g), \quad \text{para } |\alpha| \leq m.$$

(P3) Se $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in C^m(\mathbb{R}^n)$ e

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \quad \text{para } |\alpha| \leq m.$$

(P4) Se $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^r_0(\mathbb{R}^n)$, então

$$f * g \in C^{m+r}(\mathbb{R}^n) \quad \text{e}$$

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g) \quad \text{para } |\alpha| \leq \min\{m, r\}.$$

(P5) Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $g \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, então $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em Giglioli [5].

Vamos agora considerar a seguinte função:

$$j(x) = \begin{cases} a \exp[(|x|^2 - 1)^{-1}] & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

onde $a = \left\{ \int_{|x|<1} \exp[(|x|^2 - 1)^{-1}] dx \right\}^{-1}$.

Então $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} j(x) dx = 1$.

Para cada $\epsilon > 0$ seja

$$j_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} j\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Então

$$j_\epsilon(x) \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

$$j_\epsilon(x) = 0 \quad \text{para } |x| \geq \epsilon$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(x) dx = 1, \quad \text{isto é,} \quad \|j_\epsilon\|_1 = 1.$$

Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $u * j_\epsilon$ satisfaz

$$\|u * j_\epsilon\|_2 \leq \|j_\epsilon\|_1 \|u\|_2 = \|u\|_2.$$

Uma propriedade importante da convolução $u * j_\epsilon$ é a seguinte:

Teorema 1.2.1 Para $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|u * j_\epsilon - u\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração: Ver Brezis [2], página 71. ■



Também são importantes as seguintes propriedades:

$$(a) \ u * j_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ para } u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$(b) \ (u * j_\epsilon, v) = (u, v * j_\epsilon) \text{ para } u, v \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$(c) \ D_k(u * j_\epsilon) = j_\epsilon * D_k u \quad 1 \leq k \leq n, \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Vejamos agora um resultado referente a aproximação de funções contínuas por funções C^∞ .

Lema 1.2.1 *Sejam Ω_1 e Ω_2 domínios limitados em $\mathbb{R}^n$ tais que $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Seja u uma função contínua em Ω_2 . Então existe uma seqüência $\{v_k\}$ de funções em $C^\infty(\Omega_2)$ que converge uniformemente para u em Ω_1 .*

Demonstração: Restringindo Ω_2 , assumimos u contínua em $\overline{\Omega_2}$. Seja:

$$\hat{u} = \begin{cases} u & \text{em } \Omega_2 \\ 0 & \text{em } \Omega_2^c. \end{cases}$$

Como u é uniformemente contínua em $\overline{\Omega_2}$, dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|u(x - z) - u(x)| < \eta \quad \text{para } |z| < \delta.$$

Seja $d = \text{dist}(\overline{\Omega_1}, \partial\Omega_2)$.

Se $\epsilon < \min(\delta, d)$, temos:



$$\begin{aligned}
|\hat{u} * j_\epsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(z) |u(x-z) - u(x)| dz \leq \\
&\leq \eta \int_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(z) dz = \eta \quad \forall x \in \Omega_1.
\end{aligned}$$

Portanto $\{\hat{u} * j_\epsilon\}$ converge uniformemente para u em Ω_1 .

Uma vez que $\hat{u} * j_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, a prova está completa. ■

1.3 Transformada de Fourier e Espaços de Sobolev

Para cada $k = 1, \dots, n$ seja $D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Denotamos por D o vetor $D = (D_1, \dots, D_n)$.

Seja α um multi-índice;

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \text{ tal que}$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e definimos

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que para cada natural k e cada multi-índice μ a função

$$(1 + |x|)^k |D^\mu v(x)|$$

é limitada em $\mathbb{R}^n$.

A **transformada de Fourier** de $v \in \mathcal{S}$ é definida por

$$\hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi, x)} v(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde (ξ, x) denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Diferenciando a equação acima sob o sinal de integração obtemos

$$D^\mu \hat{v}(\xi) = (-1)^{|\mu|} \widehat{(x^\mu v)}.$$

Por outro lado, se integrarmos por partes a seguinte equação

$$\widehat{(D^\mu v)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi, x)} D^\mu v(x) dx$$

, obtemos $\widehat{(D^\mu v)} = \xi^\mu \hat{v}$.

Temos, portanto, as identidades

$$\begin{cases} D^\mu \hat{v}(\xi) = (-1)^{|\mu|} \widehat{(x^\mu v)} \\ \widehat{(D^\mu v)} = \xi^\mu \hat{v} \end{cases}$$

A transformada de Fourier possui várias propriedades. Destacaremos agora duas que serão bastante usadas neste trabalho; a primeira é a fórmula da inversão:

$$v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(\xi, x)} \hat{v}(\xi) d\xi, \quad v \in \mathcal{S},$$

e a outra é a identidade de Parseval:

$$\int v(x)\bar{w}(x)dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{v}(\xi)\overline{\hat{w}(\xi)}d\xi, \quad v, w \in \mathcal{S}.$$

No que segue usaremos a Transformada de Fourier para definir Espaços de Sobolev.

Para qualquer número real s , sejam

$$(v, w)_s \equiv \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} \hat{v} \overline{\hat{w}} d\xi \quad \text{e}$$

$$|v|_s^2 \equiv (v, v)_s.$$

Pode-se verificar sem dificuldades que $(\cdot, \cdot)_s$ é produto interno em $\mathcal{S}$ e, portanto, $|\cdot|_s$ define uma norma em $\mathcal{S}$.

A identidade de Parseval acarreta a seguinte identidade:

$$(v, w) = (2\pi)^{-n} (v, w)_0.$$

Agora, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em

$$(v, w)_0 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^s \hat{v}(\xi) (1 + |\xi|)^{-s} \overline{\hat{w}(\xi)} d\xi$$

obtemos

$$|(v, w)_0| \leq |v|_s |w|_{-s}.$$

Segue, da desigualdade anterior, que

$$|v|_s \geq \frac{|(v, w)_0|}{|w|_{-s}}, \quad 0 \neq w \in \mathcal{S}.$$

Mais precisamente, vale o seguinte lema:

Lema 1.3.1 $|v|_s = \sup_{w \in \mathcal{S}, w \neq 0} \frac{|(v, w)_0|}{|w|_{-s}}, \quad v \in \mathcal{S}, \quad s \text{ real}.$

Demonstração: A desigualdade $\geq$ é óbvia. Vejamos a outra.

Se $v \in \mathcal{S}$ então $(1 + |\xi|)^{2s} \hat{v}$ também está em $\mathcal{S}$. Então pela fórmula da inversão existe $v_0 \in \mathcal{S}$ tal que

$$\hat{v}_0 = (1 + |\xi|)^{2s} \hat{v}.$$

Para a função v_0 temos

$$|v_0|_s^2 = \int (1 + |\xi|)^{-2s} (1 + |\xi|)^{4s} |\hat{v}|^2 d\xi = |v|_s^2 \quad \text{e}$$

$$(v, v_0)_0 = |v|_s^2.$$

$$\text{Logo } \frac{|(v, v_0)_0|}{|v_0|_{-s}} = \frac{|v|_s^2}{|v|_s} = |v|_s, \text{ o que prova o lema.} \blacksquare$$

Usando a desigualdade $|\xi^\mu|^2 \leq (1 + |\xi|)^{2|\mu|}$ e a identidade $\widehat{(D^\mu v)}(\xi) = \xi^\mu \hat{v}(\xi)$ obtemos a seguinte desigualdade

$$|D^\mu v|_s \leq |v|_{s+|\mu|}, \quad v \in \mathcal{S}.$$

Podemos, agora, definir os Espaços de Sobolev.

Definição 1.3.1 *Seja $s \in \mathbb{R}$ um número real qualquer. Chamamos de espaço de Sobolev de ordem s e denotamos por $H^s(\mathbb{R}^n)$, ou simplesmente H^s ao completamento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em relação a norma $|\cdot|_s$.*

Como a norma $|\cdot|_s$ é proveniente de um produto interno, segue que H^s é um espaço de Hilbert. Assim sendo, H^s possui todas as propriedades dos espaços de Hilbert, em particular destacamos a validade do Lema de Banach-Sacks que afirma que “toda seqüência limitada de elementos de H^s possui subsequência cujas médias aritméticas convergem em H^s .”

Passemos agora ao resultado principal deste parágrafo que é a Desigualdade de Sobolev.

Teorema 1.3.1 *(Desigualdade de Sobolev) Sejam k um número natural e s um número real tal que*

$$s - k > \frac{n}{2}.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\mu| \leq k} |D^\mu v(x)| \leq C |v|_s \quad \text{para toda } v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Sejam $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e μ um multi-índice tal que $|\mu| \leq k$. Usando a fórmula da inversão temos

$$\begin{aligned}
D^\mu v(x) &= D^\mu \left[(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi, x)} \hat{v}(\xi) d\xi \right] = \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi, x)} \xi^\mu \hat{v}(\xi) d\xi = \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi, x)} \xi^\mu (1 + |\xi|)^{s-k} \hat{v}(\xi) (1 + |\xi|)^{k-s} d\xi.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
|D^\mu v(x)|^2 &= (2\pi)^{-2n} \left| (e^{i(\xi, x)} \xi^\mu (1 + |\xi|)^{s-k} \hat{v}(\xi) (1 + |\xi|)^{k-s}) \right|^2 \leq \\
&\leq (2\pi)^{-2n} \left\| e^{i(\xi, x)} \xi^\mu (1 + |\xi|)^{s-k} \hat{v} \right\|_2^2 \left\| (1 + |\xi|)^{k-s} \right\|_2^2 = \\
&= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\mu|^2 (1 + |\xi|)^{2(s-k)} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(k-s)} d\xi.
\end{aligned}$$

Agora, observando que $|\xi^\mu|^2 \leq |\xi|^{2|\mu|} \leq (1 + |\xi|)^{2k}$ para todo μ com $|\mu| \leq k$, obtemos

$$|D^\mu v(x)|^2 \leq (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2k} (1 + |\xi|)^{2(s-k)} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(k-s)} d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(k-s)} d\xi = \\
&= \left((2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(k-s)} d\xi \right) |v|_s^2.
\end{aligned}$$

Como $s - k > \frac{n}{2}$ segue que a última integral é finita, logo, fazendo $C_1 = (2\pi)^{-2n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(k-s)} d\xi \right]^{\frac{1}{2}}$ obtemos

$$|D^\mu v(x)| \leq C_1 |v|_s, \quad x \in \mathbb{R}^n, |\mu| \leq k.$$

Agora somando em μ , $|\mu| \leq k$ e tomando-se o supremo em $\mathbb{R}^n$ obtemos a desigualdade

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\mu| \leq k} |D^\mu v(x)| \leq C |v|_s$$

para uma constante C conveniente. ■

Corolário 1.3.1 *Sejam k um número natural, s um número real tal que $s - k > \frac{n}{2}$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ uma função. Suponha que existe uma seqüência $\{v_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$|v_n|_s \leq C,$$

$$\|v_n - u\|_2 \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Então u coincide com uma função de $C^k(\mathbb{R}^n)$ em quase todo ponto.

Demonstração: Como $\{v_n\}$ é uma seqüência limitada no espaço de Hilbert H^s então, pelo Lema de Banach-Sacks, $\{v_n\}$ possui uma subsequência cujas médias aritméticas convergem em H^s . Por conveniência de notação assumiremos que $\{v_n\}$ já é a subsequência e denotaremos

$$w_n = \frac{v_1 + \dots + v_n}{n}.$$

Logo $|w_m - w_n|_s \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$.

Como $\|v_n - u\|_2 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ segue que

$$\|w_n - u\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Segue, da desigualdade de Sobolev, que

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\mu| \leq k} |D^\mu [w_m(x) - w_n(x)]| \leq C |w_m - w_n|_s$$

mostrando, com isso, que $\{w_n\}$ converge uniformemente para alguma função $w \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

Agora afirmamos que $u = w$ quase sempre. De fato, para todo $R > 0$ temos

$$\begin{aligned} \int_{|x| < R} |u(x) - w(x)|^2 dx &\leq 2 \left(\|u - w_n\|_2^2 + \int_{|x| < R} |w_n(x) - w(x)|^2 dx \right) \leq \\ &\leq 2\|u - w_n\|_2^2 + C_R \max_{|x| < R} |w_n(x) - w(x)|^2. \end{aligned}$$



Como o lado direito tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ e o lado esquerdo não depende de n , obtemos

$$\int_{|x| < R} |u(x) - w(x)|^2 dx = 0, \quad \forall R > 0.$$

Logo $u = w$ em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$. ■

Veremos agora mais um resultado que será de grande utilidade no Capítulo 3.

Lema 1.3.2 *Se $v \in \mathcal{S}$, então para cada real s existe uma constante C_s tal que*

$$|v * j_\epsilon|_s \leq C_s, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Demonstração: Seja k um inteiro tal que $k \geq s$. Vale a seguinte desigualdade

$$(1 + |\xi|)^s \leq C \sum_{|\mu| \leq k} |\xi^\mu|$$

para alguma constante C conveniente.

Assim

$$\begin{aligned} |v * j_\epsilon|_s &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{v * j_\epsilon}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(C \sum_{|\mu| \leq k} |\xi^\mu| \right)^2 |\widehat{v * j_\epsilon}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\mu| \leq k} |\widehat{\xi^\mu(v * j_\epsilon)}(\xi)| \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= C \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\mu| \leq k} |\widehat{D^\mu(v * j_\epsilon)}(\xi)| \right)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq C \sum_{|\mu| \leq k} |\widehat{D^\mu(v * j_\epsilon)}|_0 = \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} C \sum_{|\mu| \leq k} \|D^\mu(v * j_\epsilon)\|_2 = \\
&= C' \sum_{|\mu| \leq k} \|j_\epsilon * D^\mu v\|_2 \leq \\
&\leq C'' \sum_{|\mu| \leq k} \|D^\mu v\|_2 = C_s. \blacksquare
\end{aligned}$$

Por último ressaltamos duas fórmulas conhecidas que serão usadas no estudo dos operadores diferenciais parciais. A primeira é conhecida como Fórmula de Leibniz e a segunda é a Fórmula de Hörmander:

$$D^{\alpha}(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^{\beta}u D^{\alpha - \beta}v$$

e

$$P(D)(uv) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} P^{(\beta)}(D)v D^{\beta}u.$$

Capítulo 2

Existência de Solução Fraca

Neste capítulo definiremos a noção de solução fraca de uma equação diferencial parcial linear em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e investigaremos condições necessárias e suficientes para a existência de tais soluções para operadores diferenciais lineares.

2.1 Operadores Diferenciais Lineares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo e com a fronteira $\partial\Omega$ suave por partes. Seja m um inteiro positivo e seja $\{a_\mu \in C^m(\bar{\Omega}); \mu \in \mathbb{N}^n, |\mu| \leq m\}$ uma coleção de funções de classe C^m em $\bar{\Omega}$ tomando valores complexos.

Um **operador diferencial linear de ordem m** é um operador definido em $C^m(\Omega)$ pela seguinte expressão

$$[A(D)u](x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad u \in C^m(\Omega)$$



onde

$$D^\alpha \equiv (D_1, \dots, D_n)^\alpha \equiv \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e para algum α com $|\alpha| = m$ se tem $a_\alpha \neq 0$.

Usaremos a notação simplificada

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u.$$

Ao operador A associamos o operador A' , definido em $C^m(\Omega)$ por

$$[A'(D)u](x) = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha (\bar{a}_\alpha(x) u(x)),$$

ou simplesmente

$$A'u = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha (\bar{a}_\alpha(x) u).$$

Se $\varphi \in C_0^m(\Omega)$, $u \in C^m(\Omega)$, então, vale a identidade

$$\int_{\Omega} Au \, \bar{\varphi} dx = \int_{\Omega} u \, \overline{A'\varphi} dx,$$

ou ainda, usando produto interno de $L^2(\Omega)$ temos

$$(Au, \varphi) = (u, A'\varphi).$$

O operador A' é chamado **adjunto formal de A** e pode ser escrito como

$$A'u = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha(x) D^\alpha u$$

onde os coeficientes b_α dependem dos coeficientes de A bem como de suas derivadas.

Seja f uma função de $C(\bar{\Omega})$ e $u \in C^m(\bar{\Omega})$ uma função tal que

$$[A(D)u](x) = f(x) \quad x \in \Omega$$

ou simplesmente

$$Au = f \text{ em } \Omega. \quad (2.1)$$

Tal função u é dita ser uma **solução clássica** da equação diferencial parcial (2.1).

Seja $u \in C^m(\bar{\Omega})$ uma solução clássica de (2.1) e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função teste.

Multiplicando ambos os lados de (2.1) por φ e integrando em Ω obtemos

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= (Au, \varphi) \\ &= (u, A'\varphi). \end{aligned}$$

Logo

$$(u, A'\varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.2)$$

Definição 2.1.1 *Seja $f \in L^2(\Omega)$. Uma função $u \in L^2(\Omega)$ é **solução fraca** da equação*

$$Au = f \text{ em } \Omega$$

se $(u, A'\varphi) = (f, \varphi)$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Uma consequência imediata da definição anterior é que se $u \in C^m(\bar{\Omega})$ é solução clássica de (2.1) então u é também solução fraca de (2.1). Todavia a recíproca, em geral, não é válida. O que vale é o seguinte, se $u \in L^2(\Omega)$ é solução fraca e suficientemente derivável (de classe C^m) então u é solução clássica. Isto segue da densidade de $C_0^\infty(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

2.2 Uma Condição para Existência de Solução Fraca

Neste parágrafo estabeleceremos uma condição necessária e suficiente sobre o operador A para que a equação $Au = f$ admita solução fraca em Ω .

Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in L^2(\Omega)$ uma solução fraca de

$$Au = f \quad \text{em } \Omega.$$

Então para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

$$(f, u) = (u, A'\varphi).$$

Como φ tem suporte compacto e os coeficientes de A' são contínuos, segue que $A'\varphi \in L^2(\Omega)$. Logo usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz de $L^2(\Omega)$ obtemos

$$|(f, \varphi)| = |(u, A'\varphi)| \leq \|u\|_2 \|A'\varphi\|_2.$$



Portanto, se $Au = f$ tem solução fraca então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|(f, \varphi)| \leq C \|A' \varphi\|_2 \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.3)$$

Na verdade a desigualdade (2.3) não é só uma condição necessária para existência de solução fraca mas também uma condição suficiente como mostra o seguinte:

Teorema 2.2.1 *Seja $f \in L^2(\Omega)$. Uma condição necessária e suficiente para que a equação $Au = f$ tenha uma solução fraca é que a desigualdade (2.3) valha para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

Demonstração: Basta mostrar que tal condição é suficiente. Suponhamos que exista $C > 0$ tal que

$$|(f, \varphi)| \leq C \|A' \varphi\|_2$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Seja W o subconjunto de $L^2(\Omega)$ composto por todas as funções $w \in L^2(\Omega)$ para as quais a equação adjunta

$$A' \varphi = w$$



possui solução $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Isto é

$$W = \{w \in L^2(\Omega); \exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } A'\varphi = w\}$$

Claramente W é um subespaço de $L^2(\Omega)$.

Definamos agora em W a seguinte função

$$Fw = (\varphi, f)$$

onde φ é uma função qualquer em $C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo $A'\varphi = w$.

Vejamos que F é bem definida. Sejam φ_1 e $\varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ tais que $A'\varphi_1 = w$, $A'\varphi_2 = w$. Logo

$$|(f, \varphi_1 - \varphi_2)| \leq C\|A'(\varphi_1 - \varphi_2)\| = C\|0\| = 0,$$

isto é, $(f, \varphi_1) = (f, \varphi_2)$.

Assim F não depende da escolha da solução φ de $A'\varphi = w$.

Sejam $w_1, w_2 \in W$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Consideremos $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ tais que

$$A'\varphi_1 = w_1 \qquad A'(\lambda\varphi_2) = \lambda w_2.$$

Da linearidade de A' temos

$$A'(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) = w_1 + \lambda w_2,$$

ou seja, $F(w_1 + \lambda w_2) = (\varphi_1 + \lambda\varphi_2, f) = F(w_1) + \lambda F(w_2)$.



Portanto F é um funcional linear.

Também:

$$|Fw| = |(\varphi, f)| \leq C \|A'\varphi\|_2 = C \|w\|,$$

logo F é um funcional linear limitado.

Do Teorema de Hahn-Banach, F pode ser estendido como funcional linear em todo $L^2(\Omega)$. Continuamos denotando por F tal extensão.

O Teorema da Representação de Riesz fornece um elemento $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$Fw = (w, u)$$

$$\|u\|_2 = \|F\| \leq C.$$

A função u é uma solução fraca de $Au = f$. De fato: se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ então $A'\varphi \in W$. Seja $w \equiv A'\varphi$;

$$(u, A'\varphi) = (u, w) = \overline{Fw} = (f, \varphi).$$

Portanto $(f, \varphi) = (u, A'\varphi)$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ como queríamos demonstrar. ■

Vale observar que a solução fraca $u \in L^2(\Omega)$ fornecida no teorema acima satisfaz a desigualdade

$$\|u\|_2 \leq C$$

onde C é oriundo da desigualdade $|(f, \varphi)| \leq C \|A'\varphi\|_2$.



Vamos terminar esta seção exibindo um exemplo de uma equação que possui solução fraca que não é uma solução clássica.

Seja Ω a faixa ilimitada

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |y| \leq R\}.$$

Considere a equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Neste caso, $f \equiv 0$, $A = \frac{\partial}{\partial x}$ e $A' = -\frac{\partial}{\partial x}$. Seja $g = g(y)$ uma função real de uma variável real contínua em $|y| \leq R'$, onde $R' > R$ e com derivadas descontínuas. Pelo Lema 1.2.1 existe uma seqüência de funções infinitamente deriváveis convergindo uniformemente para g em $|y| \leq R$.

Agora seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função teste. Então

$$(g_n, A'\varphi) = -\left(g_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial g_n}{\partial x}, \varphi\right) = (0, \varphi) = (f, \varphi).$$

Agora fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$(g, A'\varphi) = (f, \varphi),$$

ou seja, g é solução fraca de $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ em Ω , todavia g não é solução clássica uma vez que sua derivada em relação a y não é contínua.



2.3 Operadores Diferenciais com Coeficientes Constantes

Um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes é um operador diferencial da forma

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u$$

onde cada coeficiente a_α , $|\alpha| \leq m$ é uma constante complexa.

Neste parágrafo mostraremos que para um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a equação $Au = f$, onde A é um operador diferencial a coeficientes constantes, tem solução fraca para qualquer $f \in L^2(\Omega)$. Isto será feito estudando algumas desigualdades de Hörmander [6] e usando a condição necessária e suficiente obtida no parágrafo anterior.

Antes de iniciarmos a discussão que levará a tal resultado convém fazer algumas observações. Observe que neste caso o adjunto formal de A é o operador dado por

$$A'u = \sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha D^\alpha u$$

e, portanto, também tem coeficientes constantes.

Ao operador A associamos seu símbolo, que é o polinômio

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$$



da variável $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Aqui usamos a notação $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$.

Assim o operador A pode ser escrito como $Au = P(D)u$ se substituirmos $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ por $(D_1, \dots, D_n)$.

O símbolo $\bar{P}(\xi)$ do adjunto A' é o conjugado de P , isto é, $\bar{P}(\xi) = \overline{P(\xi)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha \xi^\alpha$. Analogamente $A'u = \bar{P}(D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha D^\alpha$.

Agora seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \|A'\varphi\|_2^2 &= \|\bar{P}(D)\varphi\|_2^2 = (\bar{P}(D)\varphi, \bar{P}(D)\varphi) = \\ &= (\varphi, P(D)\bar{P}(D)\varphi) = \\ &= (\varphi, \bar{P}(D)P(D)\varphi) = \\ &= (P(D)\varphi, P(D)\varphi) = \\ &= \|P(D)\varphi\|_2^2 = \\ &= \|A\varphi\|_2^2, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|A'\varphi\|_2 = \|A\varphi\|_2, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Passemos agora à discussão de alguns resultados que levarão à demonstração do resultado principal desta seção.

Lema 2.3.1 (Hörmander [6]). *Seja Ω um domínio contido na faixa $|x_k - a| \leq \frac{M}{2}$ e seja $P^{(k)}(\xi) = \frac{\partial P}{\partial \xi_k}(\xi)$. Então*

$$\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2 \leq mM\|P(D)\varphi\|_2 \quad (2.4)$$



para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Podemos admitir sem perda de generalidade que $a = 0$.

A demonstração é feita por indução sobre m , onde m é a ordem do operador

A. Vamos admitir por um momento (e demonstrar depois) que a desigualdade

$$\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2^2 \leq \|P(D)\varphi\|_2 [M\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2 + \|P^{(kk)}(D)\varphi\|_2] \quad (2.5)$$

seja válida para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Aqui usamos $P^{(kk)}(\xi) = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi_k^2}(\xi)$.

Quando $m = 1$, temos $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi_k^2} \equiv 0$. Logo (2.5) acarreta

$$\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2 \leq M\|P(D)\varphi\|_2, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Logo, o resultado vale quando o grau do polinômio é 1. Agora suponha que

$$\|Q^{(k)}(D)\varphi\|_2 \leq (m-1)M\|Q(D)\varphi\|_2 \quad (2.6)$$

seja válida para todo polinômio $Q = Q(\xi)$ de grau menor ou igual a $m-1$ e seja P um polinômio de grau m . O polinômio $P^{(k)}$ tem grau menor ou igual a $m-1$, logo (2.6) pode ser aplicada em $P^{(k)}$ fornecendo

$$\|P^{(kk)}(D)\varphi\|_2 \leq (m-1)M\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2,$$

que aplicada em (2.5) fornece,



$$\begin{aligned} \|P^{(k)}(D)\varphi\|_2^2 &\leq \|P(D)\varphi\|_2 [M\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2 + (m-1)M\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2] = \\ &= \|P(D)\varphi\|_2 m M \|P^{(k)}(D)\varphi\|_2, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2 \leq m M \|P(D)\varphi\|_2$$

como queríamos. Logo, o resultado vale para todo operador diferencial a coeficientes constantes.

Agora demonstraremos (2.5). Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e observe que pela fórmula de Hörmander temos

$$P(D)(x_k\varphi) = x_k P(D)\varphi + P^{(k)}(D)\varphi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|P^{(k)}(D)\varphi\|_2^2 &= (P(D)(x_k\varphi) - x_k P(D)\varphi, P^{(k)}(D)\varphi) = \\ &= (P(D)(x_k\varphi), P^{(k)}(D)\varphi) - (x_k P(D)\varphi, P^{(k)}(D)\varphi) = \\ &= (\bar{P}^{(k)}(D)(x_k\varphi), \bar{P}(D)\varphi) - (P(D)\varphi, x_k P^{(k)}(D)\varphi) = \\ &= (x_k \bar{P}^{(k)}(D)\varphi + \bar{P}^{(kk)}(D)\varphi, \bar{P}(D)\varphi) - (P(D)\varphi, x_k P^{(k)}(D)\varphi). \end{aligned}$$

Agora observe que a expressão da última linha é um número real positivo. Portanto tal expressão iguala-se ao seu módulo. Assim, usando a desigualdade triangular temos

$$\|P^{(k)}(D)\varphi\|_2^2 \leq |(x_k \bar{P}^{(k)}(D)\varphi + \bar{P}^{(kk)}(D)\varphi, \bar{P}(D)\varphi)| + |(P(D)\varphi, x_k P^{(k)}(D)\varphi)|.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos:

$$\begin{aligned} \|P^{(k)}(D)\varphi\|_2^2 &\leq \|\bar{P}(D)\varphi\|_2 \|x_k \bar{P}^{(k)}(D)\varphi + \bar{P}^{(kk)}(D)\varphi\|_2 + \\ &\quad + \|P(D)\varphi\|_2 \|x_k P^{(k)}(D)\varphi\|_2 \leq \\ &\leq \|P(D)\varphi\|_2 (\|x_k \bar{P}^{(k)}(D)\varphi\|_2 + \|\bar{P}^{(kk)}(D)\varphi\|_2) + \\ &\quad + \|P(D)\varphi\|_2 \|x_k P^{(k)}(D)\varphi\|_2 \leq \\ &\leq \|P(D)\varphi\|_2 \left(\frac{M}{2} \|P^{(k)}(D)\varphi\|_2 + \|P^{(kk)}(D)\varphi\|_2 \right) + \\ &\quad + \|P(D)\varphi\|_2 \frac{M}{2} \|P^{(k)}(D)\varphi\|_2 = \\ &= \|P(D)\varphi\|_2 [M \|P^{(k)}(D)\varphi\|_2 + \|P^{(kk)}(D)\varphi\|_2], \end{aligned}$$

e assim (2.5) está verificada. ■

Corolário 2.3.1 *Se Ω está contido na região $|x_k - a_k| \leq \frac{M_k}{2}$, $k = 1, \dots, n$, então, para qualquer multi-índice μ tem-se*

$$\|P^{(\mu)}(D)\varphi\|_2 \leq \frac{m!}{(m - |\mu|)!} M^\mu \|P(D)\varphi\|_2, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

onde $M = (M_1, \dots, M_n)$ e $M^\mu = M_1^{\mu_1} \dots M_n^{\mu_n}$.

Demonstração: A demonstração consiste em aplicar consecutivamente o Lema 2.3.1.

Observe que

$$P^{(\mu)}(D)\varphi = \frac{\partial^{|\mu|} P}{\partial \xi_1^{\mu_1} \dots \partial \xi_n^{\mu_n}}(D)\varphi = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\partial^{|\mu|-1} P}{\partial \xi_1^{\mu_1-1} \partial \xi_2^{\mu_2} \dots \partial \xi_n^{\mu_n}} \right) (D)\varphi,$$

logo, pelo Lema 2.3.1, temos

$$\|P^{(\mu)}(D)\varphi\|_2 \leq M_1(m - (|\mu| - 1)) \left\| \frac{\partial^{|\mu|-1} P}{\partial \xi_1^{\mu_1-1} \dots \partial \xi_n^{\mu_n}}(D)\varphi \right\|_2.$$

Prosseguindo o raciocínio, eliminamos as derivadas em relação a ξ_1 , obtendo, com isso,

$$\|P^{(\mu)}(D)\varphi\|_2 \leq M_1^{\mu_1}(m - (|\mu| - 1)) \dots (m - (|\mu| - \mu_1)) \left\| \frac{\partial^{|\mu|-\mu_1} P}{\partial \xi_2^{\mu_2} \dots \partial \xi_n^{\mu_n}}(D)\varphi \right\|_2.$$

Fazendo o mesmo para $\xi_2, \dots, \xi_n$ obtemos a fórmula desejada. ■

Uma consequência imediata deste corolário é o seguinte:

Teorema 2.3.1 *Seja A um operador diferencial linear com coeficientes constantes e Ω um domínio limitado. Então existe uma constante $C > 0$ dependendo de Ω e da ordem de A tal que*

$$\|\varphi\|_2 \leq C \|A\varphi\|_2 \quad (2.7)$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Tome um multi-índice μ tal que $P^{(\mu)}(\xi) = \text{constante} \neq 0$. Se $P^{(\mu)}(\xi) = k$ então

$$P^{(\mu)}(D)\varphi = k\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim, do Corolário 2.3.1, temos

$$\|k\varphi\|_2 \leq \frac{m!}{(m - |\mu|)!} M^\mu \|P(D)\varphi\|_2.$$

Tomando $C = \frac{1}{k} \frac{m!}{(m - |\mu|)!} M^\mu$ e observando que $P(D)\varphi = A\varphi$ obtemos

$$\|\varphi\|_2 \leq C \|A\varphi\|_2. \blacksquare$$

Terminamos este capítulo com o teorema principal;

Teorema 2.3.2 *Sejam $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ um operador diferencial a coeficientes constantes, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $f \in L^2(\Omega)$ uma função dada. Então a equação diferencial*

$$Au = f$$

admite uma solução fraca.

Demonstração: De acordo com o Teorema 2.2.1 da seção anterior, basta verificar a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$|(f, \varphi)| \leq C \|A' \varphi\|_2,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Observe que $A' = \sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha D^\alpha$ é operador com as mesmas características de A , logo, do Teorema 2.3.1, segue que existe $C' > 0$ dependendo de m e Ω tal que

$$\|\varphi\|_2 \leq C' \|A' \varphi\|_2.$$

Como $|(f, \varphi)| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2$, segue

$$|(f, \varphi)| \leq \|f\|_2 (C' \|A' \varphi\|_2) = C \|A' \varphi\|_2,$$

isto é,

$$|(f, \varphi)| \leq C \|A' \varphi\|_2$$

como queríamos demonstrar. ■



Capítulo 3

Operadores Elípticos

Neste capítulo introduziremos a noção de operador elíptico e provaremos que se A é elíptico então toda solução fraca da $Au = f$ com $f \in C^\infty(\Omega)$ satisfaz $u \in C^\infty(\Omega)$.

3.1 Uma Estimativa a Priori

Seja $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ um polinômio na variável $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ com coeficientes complexos com $a_\alpha \neq 0$ para algum α tal que $|\alpha| = m$. Assim o operador diferencial

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \quad (3.1)$$

é um operador diferencial parcial linear a coeficientes constantes. Chamamos **parte principal** de $P(D)$ ao operador diferencial dado por

$$p(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha. \quad (3.2)$$



Observe que o símbolo de $p(D)$ é o polinômio homogêneo de grau m , onde

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha} \xi^{\alpha}.$$

Definição 3.1.1 O operador diferencial da equação (3.1) é um operador elíptico se a única solução real de $p(\xi) = 0$ é $\xi = 0$.

Lema 3.1.1 O operador dado por (3.1) é elíptico se, e somente se existir uma constante $M > 0$ tal que

$$|\xi|^m \leq M|p(\xi)|. \quad (3.3)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Sendo $p(\xi)$ homogêneo de grau m , então $p\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) = \frac{1}{|\xi|^m} p(\xi)$ para todo $\xi \neq 0$.

Se P é elíptico então $p(\xi) \neq 0$ na esfera unitária $|\xi| = 1$. Logo $\frac{1}{p(\xi)}$ é contínua em $|\xi| = 1$. Se M é o máximo de $\left|\frac{1}{p}\right|$ em $|\xi| = 1$, então temos que:

$$\frac{1}{p\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)} \leq M \quad \xi \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Logo $|\xi|^m \leq M p(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

A recíproca é imediata. ■

O operador $P(D) - p(D)$ é operador de ordem menor do que m e tem símbolo

$$P(\xi) - p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m-1} a_{\alpha} \xi^{\alpha}. \text{ Logo,}$$

$$|P(\xi) - p(\xi)| \leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} |a_\alpha| |\xi^\alpha|.$$

Agora observando que $|\xi^\alpha| \leq |\xi|^{|\alpha|} \leq |\xi|^{m-1} < (1 + |\xi|)^{m-1}$ sempre que $|\alpha| \leq m - 1$, obtemos

$$|P(\xi) - p(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-1} \quad (3.4)$$

para alguma constante C conveniente.

Terminamos esta seção com o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 (*Estimativa a priori*) *Seja $P(D)$ um operador elíptico de ordem m .*

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|v|_s \leq C (|P(D)v|_{s-m} + |v|_{s-1}) \quad (3.5)$$

para toda $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Começamos observando que existe uma constante k tal que

$$(1 + |\xi|)^{2m} \leq k(1 + |\xi|^{2m}) \quad (3.6)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

De fato, quando $|\xi| \geq 1$ temos

$$(1 + |\xi|)^{2m} \leq (2|\xi|)^{2m} = 2^{2m} |\xi|^{2m}.$$

Como $|\xi|^{2m} \leq 1 + |\xi|^{2m}$ segue

$$(1 + |\xi|)^{2m} \leq 2^{2m}(1 + |\xi|^{2m}), \quad |\xi| \geq 1.$$

Agora, a função de ξ dada por $\frac{(1 + |\xi|)^{2m}}{1 + |\xi|^{2m}}$ é limitada no compacto $|\xi| \leq 1$.

Portanto existe k tal que para todo ξ se tem

$$\frac{(1 + |\xi|)^{2m}}{1 + |\xi|^{2m}} \leq k,$$

ou seja, a desigualdade (3.6) é válida.

Passemos a verificação de (3.5). Sejam M a constante da elipticidade de $P(D)$, dada em (3.3), e seja k a constante fornecida por (3.6). Então,

$$(1 + |\xi|)^{2m} \leq k(1 + |\xi|^{2m}) \leq k(1 + M^2|p(\xi)|^2).$$

Agora, usando a desigualdade

$$|p(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-1} + |P(\xi)|$$

fornecida por (3.4), obtemos

$$(1 + |\xi|)^{2m} \leq k[1 + 2M^2|P(\xi)|^2 + 2M^2C^2(1 + |\xi|)^{2m-2}] \leq$$

$$\leq k[2M^2|P(\xi)|^2 + (2M^2C^2 + 1)(1 + |\xi|)^{2m-2}] \leq$$



$$\leq K [|P(\xi)|^2 + (1 + |\xi|)^{2m-2}] .$$

Ou seja, $(1 + |\xi|)^{2m} \leq K [|P(\xi)|^2 + (1 + |\xi|)^{2m-2}]$.

Multiplicando ambos os lados da última desigualdade por $(1 + |\xi|)^{2(s-m)}|\hat{v}(\xi)|^2$ obtemos

$$(1 + |\xi|)^{2s}|\hat{v}(\xi)|^2 \leq (1 + |\xi|)^{2(s-m)}|\hat{v}(\xi)|^2 K [|P(\xi)|^2 + (1 + |\xi|)^{2m-2}]$$

que integrada em relação a ξ , nos dá:

$$|v|_s^2 \leq K \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(s-m)} |P(\xi)|^2 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi +$$

$$+ K \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(s-1)} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= K \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(s-m)} |\widehat{P(D)v}(\xi)|^2 d\xi +$$

$$+ K \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2(s-1)} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi,$$

ou seja,

$$|v|_s^2 \leq K [|P(D)v|_{s-m}^2 + |v|_{s-1}^2] \leq$$

$$\leq K [|P(D)v|_{s-m} + |v|_{s-1}]^2.$$

Fazendo $C = \sqrt{K}$, obtemos

$$|v|_s \leq C [|P(D)v|_{s-m} + |v|_{s-1}]$$

como queríamos demonstrar. ■

3.2 Regularidade

Esta seção é dedicada ao principal teorema deste capítulo que é o seguinte

Teorema 3.2.1 *Seja $P(D)$ um operador elíptico com coeficientes constantes e seja Ω um domínio qualquer em $\mathbb{R}^n$. Se $f \in C^\infty(\Omega)$ então toda solução fraca de $P(D)u = f$ está em $C^\infty(\Omega)$.*

Demonstração: A idéia da demonstração é a seguinte; tomamos um ponto y arbitrário em Ω e uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \equiv 1$ num compacto contendo y em seu interior. Em seguida, para cada $k \in \mathbb{N}$, tomamos $s \in \mathbb{N}$; $s > k + \frac{n}{2}$ e exibimos uma família $\{v_\epsilon\}_{\epsilon>0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|v_\epsilon|_s \leq C \quad \forall \epsilon > 0 \quad \text{e}$$

$$\|v_\epsilon - \varphi u\|_2 \longrightarrow 0$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Daí, usando o Corolário 1.3.1 (da Desigualdade de Sobolev) concluímos que $\varphi u \in C^k(\mathbb{R}^n)$. Como k é arbitrário e $\varphi \equiv 1$ próximo de y segue que u é infinitamente derivável em todo $y \in \Omega$.

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Defina φu nula fora de Ω , assim $\varphi u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e tem suporte em Ω . A convolução $(\varphi u) * j_\epsilon$ está em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e será a função v_ϵ do comentário inicial. Do Teorema 3.1.1(Estimativa a Priori) temos

$$|(\varphi u) * j_\epsilon|_s \leq C [|P(D)((\varphi u) * j_\epsilon)|_{s-m} + |(\varphi u) * j_\epsilon|_{s-1}]. \quad (3.7)$$

Procuremos uma estimativa para $|P(D)(\varphi u) * j_\epsilon|_{s-m}$; se $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então

$$(P(D)(\varphi u * j_\epsilon), v) = (u, \varphi[(\bar{P}(D)v) * j_\epsilon]) =$$

$$= \left(u, \varphi \left[\left(\sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha D^\alpha v \right) * j_\epsilon \right] \right) =$$

$$= \left(u, \varphi \sum_{|\alpha| \leq m} \bar{a}_\alpha D^\alpha (v * j_\epsilon) \right) =$$

$$= (u, \varphi \bar{P}(D)(v * j_\epsilon)).$$

Agora, usando a fórmula de Hörmander para $\bar{P}(D)[\varphi(v * j_\epsilon)]$, obtemos

$$\begin{aligned} (P(D)(\varphi u * j_\epsilon), v) &= \\ &= (u, \bar{P}(D)[\varphi(v * j_\epsilon)]) - \sum_{|\mu|>0} \frac{1}{\mu!} (u, \bar{P}^{(\mu)}(D)(v * j_\epsilon) D^\mu \varphi) = \\ &= (P(D)u, \varphi(v * j_\epsilon)) - \sum_{|\mu|>0} \frac{1}{\mu!} (u D^\mu \varphi, (\bar{P}^{(\mu)}(D)v) * j_\epsilon) = \\ &= (f, \varphi(v * j_\epsilon)) - \sum_{|\mu|>0} \frac{1}{\mu!} ([u D^\mu \varphi] * j_\epsilon, \bar{P}^{(\mu)}(D)v) = \\ &= ((\varphi f) * j_\epsilon, v) - \sum_{|\mu|>0} \frac{1}{\mu!} ([u D^\mu \varphi] * j_\epsilon, \bar{P}^{(\mu)}(D)v). \end{aligned}$$

No que segue tomaremos o módulo em ambos os lados desta igualdade, usaremos a desigualdade triangular, a identidade de Parseval e a definição de $(\cdot, \cdot)_0$ para obter:

$$|(P(D)(\varphi u * j_\epsilon), v)| \leq$$



$$\leq (2\pi)^{-n} |(\varphi f * j_\epsilon, v)_0| + \sum_{|\mu| > 0} \frac{(2\pi)^{-n}}{\mu!} |((uD^\mu \varphi) * j_\epsilon, \bar{P}^{(\mu)}(D)v)_0|.$$

Lembrando que para quaisquer $v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tem $|(v, w)_0| \leq |v|_s |w|_{-s}$ sendo assim,

$$|(P(D)(\varphi u * j_\epsilon), v)_0| \leq$$

$$|(\varphi f * j_\epsilon)|_{s-m} |v|_{m-s} + \sum_{|\mu| > 0} \frac{1}{\mu!} |(uD^\mu \varphi) * j_\epsilon|_{s-1} |\bar{P}^{(\mu)}(D)v|_{1-s}.$$

Observando que $\bar{P}^{(\mu)}$ tem ordem menor ou igual a $m-1$, que $|D^\mu v|_s \leq |v|_{s+|\mu|}$ para todo $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e que $|v|_s < |v|_{s'}$ quando $s < s'$ temos

$$|D^\mu v|_s \leq |v|_{s+|\mu|} \leq |v|_{s+m-1}$$

para $|\mu| \leq m-1$, e portanto,

$$|\bar{P}^{(\mu)}(D)v|_{1-s} \leq C \sum_{0 < |\mu| \leq m-1} |D^\mu v|_{1-s} \leq$$

$$\leq C \sum_{0 < |\mu| \leq m-1} |v|_{1-s+m-1} = K |v|_{m-s}.$$

Assim,

$$|P(D)(\varphi u * j_\epsilon, v)_0| \leq K_1 |v|_{m-s} \left(|(\varphi f * j_\epsilon|_{s-m} + \sum_{0 < |\mu| \leq m} |(uD^\mu \varphi) * j_\epsilon|_{s-1}) \right)$$

para algum $K_1 > 0$ conveniente. Logo

$$\frac{|(P(D)(\varphi u * j_\epsilon), v)_0|}{|v|_{m-s}} \leq K_1 \left(|(\varphi f) * j_\epsilon|_{s-m} + \sum_{0 < |\mu| \leq m} |(uD^\mu \varphi) * j_\epsilon|_{s-1} \right).$$

Usando o Lema 1.3.1 temos que:

$$|P(D)(\varphi u * j_\epsilon)|_{s-m} \leq K_1 \left(|(\varphi f * j_\epsilon|_{s-m} + \sum_{0 < |\mu| \leq m} |(uD^\mu \varphi) * j_\epsilon|_{s-1}) \right). \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.7) obtemos

$$|(\varphi u) * j_\epsilon|_s \leq C' \left(|(\varphi f * j_\epsilon|_{s-m} + \sum_{|\mu| \leq m} |(uD^\mu \varphi) * j_\epsilon|_{s-1}) \right).$$

Agora, pelo Lema 1.3.2 existe uma constante C_s tal que $|(\varphi f) * j_\epsilon|_{s-m} \leq C_s$,

logo

$$|(\varphi u) * j_\epsilon|_s \leq C' \left(C_s + \sum_{|\mu| \leq m} |(uD^\mu \varphi) * j_\epsilon|_{s-1} \right).$$

Considere agora a seguinte afirmação: Para cada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ existe uma constante $C_\psi > 0$ tal que

$$|(\psi u) * j_\epsilon|_{s-1} \leq C_\psi.$$

Se isto for válido então existirá $C''_{\varphi} > 0$ tal que

$$\sum_{|\mu| \leq m} |(u D^{\mu} \varphi) * j_{\epsilon}|_{s-1} \leq C''_{\varphi}$$

pois $D^{\mu} \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Assim, teremos que

$$|(\varphi u) * j_{\epsilon}|_s \leq C'(C_s + C''_{\varphi}). \equiv .C_{\varphi}. \quad (3.9)$$

Isto mostra que se a afirmação anterior valer para $s - 1$, então valerá para s .

Para $s = 1$ temos

$$|(\psi u) * j_{\epsilon}|_0 = k' \|(\psi u) * j_{\epsilon}\|_2 \leq k' \|\psi u\|_2. \equiv .C_{\psi},$$

isto é, a afirmação é válida para $s = 1$. Logo, por indução a afirmação é válida para $s = 2, 3, \dots$

Em particular (3.9) é válida. Temos provado que $v_{\epsilon}. \equiv .(\varphi u) * j_{\epsilon}$ é uniformemente limitado em H^s relativamente ao parâmetro ϵ .

Para concluir a demonstração do teorema, observamos que

$$\|(\varphi u) * j_{\epsilon} - \varphi u\|_2 \longrightarrow 0$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$ conforme o Teorema 1.2.1. ■



Bibliografia

- [1] Aliprantes, C. D.; Burkinshaw, O. *Principles of Real Analysis*. Academic Press, Second Edition, USA, 1990.
- [2] Brezis, H.; *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [3] Dautray, R.; Lions, L. J.; *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol II. Springer-Verlag, Germany, 1990.
- [4] Folland, G. B.; *Lectures on Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, India, 1983.
- [5] Giglioli, A.; *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*. X Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1975.
- [6] Hörmander, L.; *On the Theory of General Partial Differential Operators*, Acta Mathematica, vol 94, pp 161 - 248, 1955.



- [7] Kesavan, S.; *Topics in Functional Analysis and Applications*. India-John Wiley & Sons, India, 1989.
- [8] Schechter, M.; *Modern Methods in Partial Differential Equations*. Mc Graw-Hill, NY, 1976.
- [9] Wheeden, R. L., Zygmund, A.; *Measure and Integral - An Introduction to Real Analysis*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.



