Walter Julio Cortez Morales

G - Comportamento dos Matchings, Matróides e Fluxos

unesp

Walter Julio Cortez Morales

G-COMPORTAMENTO DOS MATCHINGS, MATRÓIDES E FLUXOS

Tese apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista - São José do Rio Preto como parte dos requisitos para obtenção do Título de Livre-Docente.

São José do Rio Preto - SP.
julho de 1998.

Inst. de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP
BIBLIOTECA
S. J. Rio Preto

922/00

G-Comportamento dos Matchings, Matróides e Fluxos

Walter Julio Cortez Morales

unesp

Resumo da Dissertação

Os problemas clássicos de determinar o fluxo e matching máximos em grafos bipartidos arbitrários, foram tratados em particular por Ford-Fulkerson [33] e König [49], respectivamente e uma classe de matróide transversal foi introduzido por Rado [80]. Edmonds e Fulkerson [31], tem demonstrado que o matróide matching abstratamente é o mesmo que o transversal, quando o grafo considerado for um bígrafo. Nesta dissertação apresenta-se uma solução para o seguinte problema: Dado um grafo bipartido G e um inteiro não negativo δ, quantas arestas precisam-se ser adicionadas (ou diminuidas) a G tal que, o grafo aumentado (ou reduzido) G_δ (resp. $G_{\delta\bullet}$) possue deficiência δ. E para que valores de δ, o grafo G_δ é munido de matching ou fluxo ou transversal, tal que, os três entes possuem um G-comportamento no G_δ. Usamos a expressão G-comportamento para significar que se existe um deles, então as três terminologias existem e possuem o mesmo tamanho (ou valor ou o rank do matróide).

Na literatura, existe uma caracterização para os grafos G_δ para $\delta = 0$, é o relevante teorema de casamento de Hall. Um resultado equivalente a este teorema de Hall é apresentado no sexto capítulo deste trabalho. Também estuda-se os comportamentos dos matchings e transversais no bigrafo G. A existência de um deles, implica a existência do outro do mesmo tamanho (ou rank do matróide transversal), e enuncia-se o teorema: **Se G é um bígrafo, então G tem um matching de tamanho s se, e somente se, G possuir uma transversal de tamanho s.** Resultado que tem sua origem nos trabalhos de Rado e de Edmonds-Fulkerson, como tem influenciado também os teoremas de Hall-Ore e de tipo Hall. O teorema de Hall-Ore, é uma variante da generalização do teorema de casamento, obtido por Ore, o qual visa uma condição necessária e suficiente para um sistema possuir uma transversal parcial de certo tamanho, isto é, um sistema $\mathcal{A} = (A_u/u \in U)$ possui uma transversal parcial de tamanho t se, e somente se, $|\bigcup_{i\in K} A_i| \geq |K| + t - |U|$. Paralelo a este teorema, é o seguinte resultado, conhecido como o tipo Hall: **Um bígrafo possui matching de tamanho s se, e somente se,** $|\Gamma(X)| \geq |X| + s - |A|$; $\forall X \subseteq A$, e apresenta-se uma demonstração completa do mesmo, e defina-se a deficiência de um bígrafo via arestas e usando esta definição obtem-se uma nova alternativa para o teorema de Hall: **Um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ tem matching**

completo de A em B se, e somente se, G possui um fator H com $\mathbf{def}^a(H) = 0$.

Agora, admita-se o fato que o grafo bipartido dado $G = (A \cup B, E)$ pode ser interpretado como um sistema (associado $\mathcal{A}$) ou representa uma rede (associada $\mathcal{N}$) e pelo abuso de notação escreve-se $G \equiv \mathcal{A} \equiv \mathcal{N}$. Consegue-se que se, a deficiência de G for positiva, o problema em questão, trata do número mínimo de arestas que precisam ser adicionadas a G, para obter-se um bígrafo sem deficiência e o grafo G resulta ser um subgrafo própio (ou isomorfo a algum subgrafo próprio) deste novo grafo denomindo $\delta-$**aumentado** G_δ. Daí, o resultado interessante obtido neste trabalho, que se M é um matching máximo de tamanho $\nu(G_\delta)$, $M_T = (A, \mathcal{F})$ um matróide transversal com rank $r = r(M_T)$ e φ um fluxo viável com valor máximo v no G_δ, então $v = r(M_T) = \nu(G_\delta)$, expressão conhecida como o **teorema** G**-comportamento.**

Abstract of the Dissertation

The classic problems in determining the maximum flux and matching in arbitrary bipartite graphs were particulary studied by Ford-Fulkerson [33] and König [39] respectively and a class of matroid transversal was introduced by Rado [80]. Edmonds and Fulkerson have shown that the matroid matching abstractly is like the transversal when the graph is a bipartite. In this dissertation we will study in details the solution for the following problem: Given a bigraph G and a non-negative integer δ, how many edges need to be added (or diminished) to G so that the increased (or reduced) bigraph G_δ (resp. $G_{\delta\bullet}$) has a deficiency δ. An so that the value of δ the bigraph G is supplied with the concepts of matching and flux (for the existence of the matching matroid means the existence of the transversal and vice-verse) so that the three beings have the same behavior in G_δ we will us the $G-$behavior expression to mean that the three terminologies have the same size or rank.

The proposed subject is far from the extendible graphs problem which are developed upon the arbitrary graphs and it's theorically considered that the given graphs own some perefect matching, therefore the study of the behavior of the matching, transversal and flux terminologies in not the same as the goals of the class of n-extendible graphs.

In the literature there is a caracterization for the G_δ graphs being $\delta = 0$, which is one of the relevante works by Hall. A similar result as Hall's is shown in the sixth chapter of this work.

If G is a bigraph, then G has s size matching if, and only if, G has transversal matroid with rank s. This result has its origins in the works by Rado and Edmonds-Fulkerson as they have also influenced the Hall-Ore theorem and the Hall type. The Hall-Ore theorem is a variation of the generalization of the wedding theorem, obtained by Ore, which has in view a sufficient and necessary condition for the system has partial transversal of a certain size, that is, that a system $\mathcal{A} = (A_u \ / u \in U)$ has an t sized partial transversal if, and only if, $|\cup_{i\in K} A_i| \geq |K| + t - U$. Parallel to this theorem, following is resulted, known as the type of the Hal theorem: A bigraph has an s sized matching if, and only if, $|\Gamma(X) \geq |X| + s - |A|$; $\forall\ X \subseteq A$, and a complete demonstration of it is shown and we define a bigraph deficiency via edges

and using this definition a new alternative for the Hall's theorem as follows: A bipartite graph $G = (A \cup B, E)$ has a complete matching of A in B if, and only if, G possess an H factor with $def^a(H) = 0$.

Now, is based on the fact that a given $G = (A \cup B, E)$ can be interpreted as a system (associated $\mathcal{A}$) or represents a network (associated $\mathcal{N}$) and by the abuse of notation is written $G \equiv \mathcal{A} \equiv \mathcal{N}$. If the deficiency in G is positive, the problem in question is about the minimum number of edges that need to be added to G in order to get a bigraph with no deficiency and as to the given G graph ends up being a proper subgraph (or isomorphic to some proper subgraph) of this new $\delta-$augmented graph G_δ. So the graph that is obtained, besides verifying the Hall's theorem, holds the three items: matching, matroid and flux, which have the $G-$behavior of being equicardinais, that is, if M is a maximum matching $\nu(G_\delta)$ size, $M_T = (A, \mathcal{F})$ a transversal matroid with rank $r = r(M_T)$ and φ a feasible flux with maximum value v in G_δ, then $v = r(M_T) = \nu(G_\delta)$, expression known under the G-**behavior** theorem.

Dedicatória

À memória de minha mãe,
Sra. Rufina Morales
de Cortez
À memória do amigo e colega,
Prof. Dr. Pedro Humberto Rivera Rodriguez
À memória do amigo e colega,
Prof. José Aires Vieira Amorelli

Agradecimentos

Tenho a grande satisfação de expressar meus mais sinceros agradecimentos, à aqueles que deram-me apoio total e confiança:

*- Dr. Peter L., Hammer, pelo convite para o Programa de Pós-Doutorado junto à Rutgers University (1991-1993)-USA.

*- Drs. Nelson Maculan F^o. e Clóvis Caesar Gonzaga, pela confiança e orientação, no Programa de Doutorado junto à Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ (1981-1985)-RJ.

*- Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros, pelo apoio e incentivo para os Programas de Pós-Graduação: Nível Mestrado junto à Universidade de Brasilia (1970-1973) e nível Doutorado junto à Universidade Federal de Rio de Janeiro (1978-1980)-RJ.

*- Dr. Djairo Guedes de Figueiredo, pelos primeiros passos na Pós-Graduação e orientador a nível mestrado junto à UnB (1971-1973)- Brasilia D.F.

*- Drs. Ruy Madsen Barbosa e Antônio Espada F^o. pelos primeiros contatos e permanência no IBILCE-UNESP.

Manifesto minha gratidão a todas as pessoas que, de uma forma direta ou indireta, auxiliaram-me não somente durante o desenvolvimento deste modesto trabalho, mas sim também, na minha formação seja na Graduação, Pós-Graduação e Pós-Doutoramento.

Meus agradecimentos às Instituções que me deram o suporte financiero:

**- CNPq: Níveis Doutorado, Pesquisador PQ, e Pós-doutoramento.

**- CAPES: Nível Mestrado.

**- OEA: Para o Programa de Doutorado.

**- FUNDUNESP: Passagens para Congressos e Reuniões Científicas.

Introdução e Terminalogia

A dissertação se compõe de duas partes, na primeira apresentamos uma revisão mais ampla possível sobre algumas definições e terminalogias como alguns resultados clássicos e recentes, visando as teorias de grafos, dígrafos, redes e matróides, dando o suporte a segunda parte.

As definições que foram esquecidas sobre os conceitos do grafo-teórico, dígrafos e matróides e as quais são mencionados no presente trabalho, podem ser encontradas nas referências: [9], [13], [15], [16], [55], [67], [72], [82], [83], [91], [96], [102], [107], [113] e [119].

Na forma específica, os resultados de algumas classes de grafos e dos matróides gráficos, são fundamentais para as intensões deste trabalho no propósito de encontrar a maneira de munir um grafo G os conceitos de matchings, fluxos e matróides transversais e obter uma conclusão de que os assuntos em questão, abstratamente tem os mesmos comportamentos. Nas últimas décadas tem-se desenvolvido novas definições e muitos resultados desde o ponto de vista teórico e como também a elaboração de novos algoritmos, seja em forma intrínseca ou visando algum relacionamento entre estes tópicos em conexão com outros resultados.

Aqui citamos alguns textos principais e uma visão geral dos artigos, os quais também contém uma estensã bibliográfica.

Para a teoria dos matchings em grafos arbitrários e bipartidos, vide as referências: [2], [29], [Vol. Parte I, Pág. 179-232; [36]], [53], [54], [Caps. 1, 3, 4, 5 e 6 [55]], [64], [66], [77], [78], [85] e [Cap. 2, 2.4 [125]]. Para um estudo dos matchings e a medida de Haar, vide referência [Vol II. Parte IV, p. 2039-2082; [36]].

Para os grafos orientados, vide as referências: [6], [Cap. 10 [15]], [40] e [60].

Para os matróides, em particular para os matróides gráficos, vide as referências: [11], [Vol. Parte I, Págs. 481-527; [36]], [41], [53], [68],[69], [70], [71], [Caps. 1, 2, 3, 4, 5 e 12 [72]], [89], [94], [95], [96], [100], [107], [116] e [117].

Para a teoria das redes de tránsito ou de fluxos, vide as referências: [12],

[Cap. 11, [15]], [Cap. III, [16]], [28], [33], [35], [Vol. Parte I, Págs.111-178; [36]], [43], [Cap. 2 [55]], [87], [97] e [123].

Para a teoria das transversais, vide referências: [61], [62] e [63].

Através desta dissertação indicaremos a completa ou ausência de uma demonstração pelo símbolo □.

Listam-se as notações que serão usadas com mais frequência nesta dissertação, entretanto outras terminalogias aparecem no contexto:

$\subseteq$	subconjunto de
$\subset$	subconjunto próprio de
$\cup$	união
$\cap$	interseção
$\|X\|$	a cardinalidade do conjunto X
$A - B$	diferença de dois conjuntos (não é necessáriamente $B \subseteq A$).
$\forall x$	para todo x
$\rightarrow$	aplica a
$\Leftrightarrow$	se, e somente se,
$\equiv$	equivalente
N (N^+)	conjunto de inteiros não negativos (positivos)
$i = \overline{1,n}$	i tomando valores de 1 até n
uv ou $\{u,v\}$	aresta ligando os vértices u e v
$G[S]$	subgrafo induzido (ou gerado) por S
$\bar{G}$	complemento do grafo G
$G - v$	remoção do vértice v e as arestas que cobrem v
$G - e$	remoção da aresta e
G/e	contração atravéz da aresta e
$(A \cup B, E)$	grafo bipartido com conj. de vértices A e B
$\chi(G)$ $(\chi'(G))$	núm. cromático vértice (aresta) de G
$X \prec M$	conj. vértices X intersepta M ou $X \subseteq V(M)$
$\mathcal{D}(G)$	dígrafo (associado) com grafo fundamental G
$(S; \mathcal{A}(\mathcal{I}))$	sistema (ou família)
$\mathcal{N}(D)$	rede (associada) com dígrafo fundamental D
$\varphi^-(x)$ $(\varphi^+(x))$	fluxo que entra (sai) no x
$v(\varphi)$	valor do fluxo φ na rede $\mathcal{N}$
$S(\mathcal{M})$	conj. fundamental do matróide $\mathcal{M}$
$U_{m,k}$	matróide uniforme sobre m-conjunto e $\text{rank}(U_{m,k}) = k$.

Esta segunda parte é constituida pelos dois últimos capítulos, seis e sete, os quais contêm o desenvolvimento da nossa meta principal. Os detalhes das exposições tentaram obedecer a seguinte sequência:

a) Além de apresentarmos uma demonstração alternativa do teorema de Edmonds e Fulkerson, obtemos um enunciado equivalente ao teorema de Hall, seguido de uma prova completa em detalhes do mesmo.

b) Além do estudo sobre o comportamento dos matchings e transversais em um grafo bipartido, é introduzido a noção da deficiência via arestas de um bígrafo, e enunciamos um resultado alternativo do teorema de casamento de Hall.

c) Introdução dos grafos bipartidos $\delta-$aumentados como uma extensão minimal dos grafos bipartidos com deficiência $\delta > 0$. O termo minimal é no sentido de ser o menor e único grafo que verifica o teorema de Hall (salvo o isomorfismo), e tal que o grafo dado é um subgrafo próprio deste $\delta-$aumentado. O conjunto de arestas deste novo grafo está formado pelas duas classes arestas, originais e cópias. Nestas situações o grafo dado, com deficiência positiva, é chamado $\delta-$*reduzido* e cada matching máximo deste é parcial para o grafo G_δ.

d) Para os matchings no bígrafo G, o tamanho do matching máximo é igual à cardinalidade de algum subconjunto X de A, e como X possui elementos distintos, ou seja, X é um conjunto representativo distinto de algum sistema associado ao sub-bígrafo de G, conclui que X é um conjunto independente (base) de um matróide sobre A.

e) E finalmente, o tamanho do matching máximo é igual à capacidade de um corte mínimo no bígrafo G_δ, o qual é o valor do fluxo máximo.

E um apêndice, contendo uma lista de algumas similitudes que oferecem os vértices e arestas de um grafo arbitrário.

Índice

Resumo da Dissertação i
Abstract of the Dissertation iii
Dedicatória v
Agradecimentos vi
Introdução vii

I Alguns Resultados Clássicos e Recentes **1**

1 Teoria Dos Grafos **2**
1.1 *Conjuntos* 2
1.2 *Grafos e Subgrafos* 3
1.3 *Cadeia, Trilha, Caminho e Ciclo* 7
1.4 *Vértice-Conectividade e Aresta-Conectividade* 10
1.5 *Árvores e Florestas* 13
1.6 *Grafos: Euleriano e Hamiltoniano* 17
1.7 *Grafos Homeomorfos a G* 18

2 Grafos Orientados ou Dígrafos **22**
2.1 *Introdução* 22
2.2 *Orientação de Grafos* 22
2.3 *Semicadeias, Caminhos e Ciclos no Dígrafo* 24

3 Teoria de Matchings **29**
3.1 *Introdução* 29
3.2 *Relação "max A= min B"* 31
3.3 *Grafos Bipartidos ou Bígrafos* 34
3.3.1 Matchings em Grafos Bipartidos 36
3.3.2 Deficiência de um Grafo Bipartido 39

3.4 *Deficiência de um Grafo Arbitrário* 42
3.5 *Grafos n-extendíveis* 43
3.6 *Sistema de subconjuntos e Transversais* 44
3.6.1 Teorema de Existência da Transversal 47
3.6.2 Teorema de Hall-Ore 48

4 Teoría Das Redes **49**
4.1 *Introdução* 49
4.2 *Valor do Fluxo Viável e a Capacidade do Corte* 50
4.3 *Teorema de Fluxo-Máximo e Corte-Mínimo* 52
4.4 *Algumas Aplicações* 61

5 Teoria de Matróides **66**
5.1 *Introdução* 66
5.2 *Algumas Definições* 67
5.3 *Alguns Exemplos de Matróides* 72
5.4 *Conexão Entre Matróides e Grafos* 74
5.4.1 Matróide Vértice: *Matróide Matching* 74
5.4.2 Matróides-arestas: *Gráfico e Co-gráfico* 75
5.5 *Matróide Dual* 80
5.6 *Matróides Bígrafos:* Matróide Transversal 82
5.7 *Teoria de Matróides e Função Submodular* 86

II G-Comportamento: Matching-Matróide-Fluxo **87**
5.8 **Introdução** 88

6 G-Comportamento de Matchings e Matróides **89**
6.1 *Sistema e Rede Associados a um Bígrafo* 89
6.2 *Demonstração Alternativa do Teorema Edmonds-Fulkerson* . . 90
6.3 *Um Teorema de Tipo Hall* 91
6.4 *G-Comportamento dos Matróides Matching e Transversal* . . . 94
6.5 *Deficiência Aresta de um Bígrafo* 95
6.5.1 *Uma Alternativa do Teorema de Hall* 96

7 Grafos $\delta-$Aumentado e δ-Reduzido **97**
7.1 *Conjuntos* 97
7.2 *Grafos $\delta-$Aumentados, G_δ* 98

7.3 *Grafos G_δ e Saturado* 100
7.4 *Interpretação Geómetrica de G_δ* 100
7.5 *Existência de Conjuntos Críticos em Bígrafos* 102
7.6 *Grafos $\delta-$Reduzidos, $G_{\delta\bullet}$* 103
7.7 *Vértices Copiáveis* 106
7.8 *A Existência do Grafo $\delta-$aumentado* 108
7.9 *G-Comportamento de Matchings, Transverais e Fluxos* 109

8 Conclusões **112**

A Algumas Similitudes Entre Vértice e Aresta **114**

BIBLIOGRAFIA **116**

Parte I

Alguns Resultados Clássicos e Recentes

Capítulo 1

Teoria Dos Grafos

1.1 *Conjuntos*

Sejam A, B e C três conjuntos finitos arbitrários. As três leis de transformações chamadas *dualidade*
a) Cada $\cup$ substituir por $\cap$ e cada $\cap$ substituir por $\cup$
b) $\emptyset$ substuir por A e A substuir por $\emptyset$
c) Cada $\subseteq$ substituir por $\supseteq$ e cada $\supseteq$ substituir por $\subseteq$.

Exemplo 1.1.1 *$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ e seu dual $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ($\bar{X}$ é o complemento de X) são as leis de D'Morgan.*

A *diferência* de A e B é denotado por $A-B$ é definido por $A-B = A \cap \bar{B}$, significa o conjunto formado por todos os elementos de A que não pertencem a B. tem-se as seguintes propriedades:

P1) $(A \cup \bar{B}) \cap \bar{C} = A \cup \overline{B \cup C)}$ é equivalente à $(A-B)-C = A-(B \cup C) = A - B - C$

P2) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap B)$

P3) Se $A \subseteq B$ então $|B - A| = |B| - |A|$.

Teorema 1.1.1 *(Teorema de equivalência) Dados dois conjuntos. Se cada conjunto é equivalente a um subconjunto de outro, então os dois conjuntos são equivalentes.*

A primeira demonstração pertence a F. Bernstein, para o qual ele introduziu o seguinte resultado: " Se f aplica A em B e f' de B em A, então existe uma aplicação de A sobre B ". Para uma reformulação deste teorema de Bernstein, vide matróides bígrafos, e também vide [Cap. 7 [9]].

Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_i^n$ uma coleção finita de subconjuntos de um conjunto fundamental X. Então $\mathcal{A}$ é *independente* se, para cada conjunto de índices $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ (incluindo o conjunto vazio) $C(\mathcal{A}, J) \equiv \bigcap_{i \in J} A_i \cap \bigcap_{i \notin J} \overline{A_i} \neq \emptyset$. Para mais detalhes, vide referência [65].

1.2 *Grafos e Subgrafos*

Formalmente um grafo G é um par ordenado de conjunos $G = (V, E)$, onde V é um conjunto não vazio de pontos, chamado *vértices* e E é um conjunto de pares de elementos não ordenados de V chamado *arestas* , isto é, $E \subseteq \binom{V}{2}$, onde $\binom{V}{2}$ denota uma coleção de dois elementos do conjunto V.

Se G é um grafo, $V(G)$ e $E(G)$, denotarão os conjuntos de vértices e arestas de G, respectivamente. Os números (cardinalidade) $|V(G)|$ e $|E(G)|$, são denominados *ordem* e *tamanho* respectivamente do grafo G. O termo tamanho também será usado para qualquer subconjunto de arestas de G.

Usaremos $v \in G$ para indicar que $v \in V(G)$. Denotaremos por uv, a aresta identificada pelos vértices distintos u e v, ou por qualquer letra, por exemplo $e = uv$, e u e v são os *extremos* de e e escrevemos $u, v \in e$. Também uma aresta e é definida como uma combinação de dois elementos, i.é, $e = \{u, v\}$.

Dois vértices $u, v \in G$, são *adjacentes,* se existe uma aresta e que os liga, ou seja $e = uv$. Por conseguinte, dizemos que a aresta $e = uv$, *incide* (ou *cobre*) nos vértices u e v, e os vértices u e v são incidentes (ou cobertos por) com e.

É usual representar os grafos através de traçados ou desenhos, denominados *diagramas.* Consequêntemente, poderemos referirmos a um grafo pelo

diagrama associado. Sem dúvida haverá mais que um digrama representando o mesmo grafo.

Como se definiu vértices adjacentes, dizemos que duas arestas são *adjacentes,* se elas possuim um vértice em comum. Em outras palavras, um par de arestas distintas $e = \{x, y\}$ e $w = \{u, v\}$ de um grafo $G = (V(G), E(G))$ são *adjacentes* em G, se $e \cap w$ é um conjunto unitário, (e e w incidem em um vértice comum). Caso contrário as arestas e e w são *independentes.* Há muitas similitudes que se conservam entre o vértice e a aresta, em um grafo, vide apêndice.

Um grafo G é *simples,* se G não possui laços (laço é uma aresta com extremos idênticos) e cada par de vértices distintos são ligados no máximo por uma aresta.

Um grafo G é *multigrafo*, se G não possui laços, mas sim cada par de vértices podem estar ligados por mais de uma aresta.

Um grafo G é finito, se os conjuntos de vértices $V(G)$ e arestas $E(G)$ são finitos. Nesta dissertação todos os grafos serão finitos, e geralmente consideraremos grafos simples.

Consideremos o grafo $G = (V(G), E(G))$. Desde que, cada vértice v de G, é o extremo de pelo menos de uma aresta de G. Se denotarmos por $d_G(v)$ o número total de arestas que incidem em v, que na verdade d_G é uma função (com respeito a G) de $V(G)$ em N tal que a cada v de $V(G)$, d_G associa com um inteiro não negativo $d_G(v)$, chamado o *grau* do vértice v de G, (também vide $f-$fator).

Para cada vértice $x \in V(G)$, o conjunto $N(x) = \{y \in V(G)/xy \in E(G)\}$, é uma *vizinhança aberta* de x em G, e sua cardinalidade é o grau de x, i.é., $d_G(x) \equiv d(x) = |N(x)|$.

A vinhança *fechada* do vértice x no grafo G, é definido como $N[x] = N(x) \cup \{x\}$. Se $A \subseteq V(G)$, a vizinhança aberta (ou fechada) de A é dado por $N(A) = \bigcup_{x \in A} N(x)$ (resp. $N[A] = N(A) \cup A$).

A não vizinhança aberta do vértice x em G, denotada por $\bar{N}_G(x)$, é dada por $\bar{N}_G(x) = N(G) - N_G(x) - x$, e usando a propriedade $P1$ podemos escrever $\bar{N}_G(x) = N(G) - N_G[x]$.

Um vértice x de um grafo G, é *ímpar* (ou *par*) se, o grau de x, $d_G(x)$, for

ímpar (ou par).

O grau *mínino* e *máximo* do grafo G, denatado por $\delta(G) \equiv \delta$ e $\Delta(G) \equiv \Delta$ são dados por $\delta(G) = \min \{d_G(x)/x \in V(G)\}$, e $\Delta(G) = \max \{d_G(x)/x \in V(G)\}$, respectivamente.

O grafo G é *r-regular* se, e somente se, $\delta(G) = \Delta(G) = r$.

Um vértice u é chamado *menor*, se $d_G(u) = \delta(G)$, analogamente, o vértice v é chamado *maior*, se $d_G(v) = \Delta(G)$. Um vértice $x \in V(G)$ é *isolado* se, $N(\{x\}) = \emptyset$.

Um grafo *simples* onde cada par de vértices distintos são adjacentes, é chamado grafo *completo*. Alternativamente, um grafo G com n vértices, é completo se, e somente se, $d_G(x) = n - 1$ para cada vértice $x \in V(G)$. Um grafo completo de ordem n, se denota por K_n.

Exemplo 1.2.1 *Alguns grafos completos: i) um vértice isolado, ii) um segmento (ou uma folha) $[a, b]$, é uma cópia de K_2, iii) um triângulo, é uma copia de K_3 e iv) um quadrilátero com suas duas diagonais, é uma copia de K_4.*

Dois grafos $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$ são *isomorfos* se, existe uma bijeção entre $V(G)$ e $V(H)$ preservando a relação de arestas.

Exite o isomorfismo (generalizado), devido a Whitney [122] sob o nome *2-isomorfismo* e uma caracterização é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.2.1 *Sejam os grafos G e H sem vértices isolados. Se existe uma correspondência biunívoca entre as arestas dos dois grafos tais que os circuitos se correspondem em circuitos, então os grafos G e H são 2-isomorfos.*

Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é um *subgrafo* de G, (escrevemos $H \subseteq G$), se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se for $V(H) \subset V(G)$ ou $E(H) \subset E(G)$, então H é dito próprio e escrevemos $H \subset G$.

Um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ de G é chamado um subgrafo *gerador* de G, se $V(H) = V(G)$.

Um $k-$*fator* de G é um subgrafo gerador F de G tal que F é $k-$regular.

Exemplo 1.2.2 *Para $k = 1$, um 1-fator (ou matching perfeito) de G, é um matching de tamanho $\frac{|V(G)|}{2}$. Pela definição, um 1-fator H de $K_{n,n}$ tem $|V(H)| = 2n$ vértices e $d_H(v) = 1$ para cada $v \in V(H)$. Sem perda da generalidade, sejam x_i, y_i; $i = \overline{1,n}$ os vértices de $K_{n,n}$, logo para cada vértice x_1 há n vértices adjacentes, se escolhermos y_1 tal que $x_1, y_1 \in V(H)$ e $x_1y_1 \in E(H)$. Para x_2 existem $n-1$ vértice adjacentes, escolha y_2 tal que $x_2, y_2 \in V(H)$ e $x_2y_2 \in E(H)$, assim por diante e finalmente para x_n há um único vértice y_n tal que $x_n, y_n \in V(H)$ e $x_n, y_n \in E(H)$, e H é um 1-fator de $K_{n,n}$. Portanto pelo principio multiplicativo, $n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$ é o número total de 1-fatores de $K_{n,n}$. Também vide seção Grafos $n-$extendíveis.*

Exemplo 1.2.3 *Para $k = 2$, um 2-fator de um grafo G é um subgrafo gerador F de G tal que F é 2-regular. Por conseguinte, um 2-fator de G é uma coleção de ciclos disjuntos pelo vértice que cobrem todos os vértices de G.*

Um grafo G é dito 2-fatorável *se, G possui um 2-fator.*

Um subgrafo $H = (W, F)$ é um subgrafo *induzido pelo vértice* (ou *gerado pelo subconjunto de vértices*) de $G = (V, E)$, se $W \subseteq V$ e $F = E \cap \binom{W}{2}$.

Neste caso referimos a H como $G[W]$, isto é, $H = G[W]$. Em outras palavras, um subgrafo *induzido* (ou *gerado*) por um subconjunto $X \subseteq V(G)$ é o grafo $G[X]$ com $V(G[X]) = X$ e com conjunto de arestas $E(G[X]) = \{\{x, y\} = e \in E(G)/x, y \in X \text{ ou } e \subseteq X\}$.

Para $F \subseteq E(G)$, denotamos por $G[F]$, o subgrafo *induzido pela aresta* ou *gerado* pelo subconjunto F de arestas de G, cujo conjunto de arestas é $E(G[F]) = F$ e o conjunto de vértices é dado por $V(G[F]) = \{v \in V(G)/v \in e$ para alguma aresta e de $F\}$.

Exemplo 1.2.4 *Sejam F e H dois subgrafos de um grafo G, a diferença simétrica de F e H, denotado por $F\Delta H$, é o subgrafo de G induzido pelo conjunto de arestas $[E(F) \cup E(H)] - [E(F) \cap E(H)] = E(F)\Delta E(H)$, i.é., $F\Delta H = G[E(F)\Delta E(H)]$. Além disso se verifica: $d_{F\Delta H}(v) = d_F(v) + d_H(v)$ para todo vértice v de G tal que $v \notin V(F) \cap V(H)$.*

Consideremos o grafo simples $G = (V(G), E(G))$. O grafo *complemento* de G, denotado por $\bar{G}$, é o grafo simples com o mesmo conjunto de vértices que G, e qualquer dois vértices são adjacentes em $\bar{G}$ se, e somente se, não são adjacentes em G.

Se H é um subgrafo de G então o *complemento* de H em G, denotado por $\bar{H}$ é o subgrafo $\bar{H} = (V(\bar{H}), E(\bar{H}))$ cujo conjunto de vértices $V(\bar{H}) = V(G)$ e arestas $E(\bar{H}) = E(G) - E(H)$.

Um *clique* ou *grafo universal* de um grafo simples G é um subconjunto S de vértices de G tal que o subgrafo $G[S]$ é completo. Um clique é *maximal* no grafo G, se não está contido estritamente em um outro clique de G.

Um vértice x é *simplicial* em G se, $N(x)$ é um clique, e y é um vértice *estrelha* se, $N(y) = V(G) - \{y\}$.

Um *coclique* de um grafo simples G, é um subconjunto $\mathcal{O}$ de vértices de G tal que dois elementos quaisquer de $\mathcal{O}$ não são adjacentes em G. A cardinalidade de um coclique máximo é o *número coclique* de G, denotado por $\alpha(G)$.

1.3 *Cadeia, Trilha, Caminho e Ciclo*

As seguintes definições também tem sentido nos dígrafos sob alguns cuidados quanto à orientação das arestas. Para mais detalhes o interessado pode consultar, entre outras, as referências [6], [9], [13], [40], [60] e [83].

Consideremos o grafo $G = (V(G), E(G))$. Uma *cadeia* em G é uma sequência finita alternada de vértices e arestas $\Gamma = v_o e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$, onde cada v_i é um vértice e cada e_i é uma aresta ligando v_{i-1} e v_i. Os vértices v_o e v_n são os extremos da cadeia Γ, e dizemos que Γ liga os vértices v_o e v_n. O comprimento da cadeia Γ, é o número de arestas que pertencem à cadeia, e é denotado por $\ell(\Gamma)$.

Uma *trilha* (alguns autores, denominam caminho) em G, é uma cadeia com todas as arestas distintas (não necessariamente os vértices são distintos), i.é., $T = v_o e_1 v_1 e_2 \dots e_r v_r$ cujos termos são vértices e arestas alternadamente, com $e_i = v_{i-1} v_i$ $(1 \leq i \leq r)$ e as arestas são distintas. T é *fechada* se $v_o = v_r$. Uma trilha é chamada (u, v)-trilha se $v_o = u$ e $v_r = v$. Uma trilha T é

chamado trilha *geradora* se $V(T) = V(G)$ e T é chamado trilha *dominante* se, $E(G - V(T)) = \emptyset$, i.é., o subgrafo $G - V(G)$ não tem arestas.

Um *caminho,* em G, é uma trilha com todos os vértices distintos. (Muitos autores adotam o termo caminho simples ou elementar). Em outras palavras, um caminho é uma sequência de vértices distintos e arestas distintas; $W := x_o, \{x_o, x_1\}, x_1, \{x_1, x_2\}, x_2, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}, x_n$, (ou denotado pela sequência de seus vértices, $W = (x_o, x_1, \ldots, x_n)$), é um subgrafo com conjunto de vértices $V(W) = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, e com conjunto de arestas $E(W) = \{\{x_i, x_{i+1}\} : 0 \leq i \leq n\}$.

Os vértices x_o e x_n, são os extremos do caminho W, enquanto os outros vértices são denominados *interiores.* Escrevemos $W_{[x_o,x_n]}$ e dizemos que W, é um $x_o x_n-$caminho. Também se denota por $x_o W x_n$ para identificar que x_o e x_n são os extremos do caminho W.

Um caminho W de G é chamado *linha (thread)* de G se todos os vértices interiores de W são de grau 2 e o grau dos vértices extremos são $\neq 2$ em G. Uma linha sem vértices interiores (isto é, apenas com uma aresta) é uma *aresta-linha.*

Dois ou mais $x_o x_n$-caminhos são *disjuntos internamente* se, seus conjuntos de vértices interiores forem disjuntos.

Os caminhos $P_{[x_o,x_k]} = (x_o, x_1, \ldots, x_k)$ e $Q_{[y_o,y_r]} = (y_o, y_1, \ldots, y_r)$ são *disjuntos* (mais precisamente disjuntos pelo vértice), se seus conjuntos de vértices forem disjuntos, i.é., $\{x_o, x_1, \ldots, x_k\} \cap \{y_o, y_1, \ldots, y_r\} = \emptyset$.

Um *pseudo-ciclo* no grafo G é uma cadeia fechada, cujos vértices inicial e final da cadeia coincidem. Em outras palavras, um pseudo-ciclo no grafo G, é um conjunto de arestas que cobrem a cada vértice em um número par de vezes, cujas arestas não são necessariamente distintas.

Um *ciclo* é uma cadeia onde os extremos da cadeia coincidem e nenhuma aresta se repete mais que uma vez (os vértices não necessariamente são distintos).

Um *ciclo minimal* é um ciclo (pela inclusão), que não está contido estritamente em um outro ciclo.

Um ciclo de comprimento n, é denotado por C_n. O ciclo C_n, é par ou ímpar, se o inteiro n for par ou ímpar.

O ciclo de comprimento 1 é exatamente um laço (ciclo ímpar) e um subgrafo de G que consiste de de dois laços com um único vértice ou de dois vértices e um par de arestas paralelas que ligam estes dois vértices, é um ciclo par.



Um *ciclo elementar* ou *polígono* (também é denominado circuito, mas para evitar confusão, preservaremos o termo circuito para um conjunto dependente minimal, de um matróide, vide Teoria de Matróides) é um ciclo (uma sequência de arestas) $C = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ tal que para todo $i < k$ o extremo final da aresta e_i é o extremo inicial de e_{i+1}, em outras palavras, um polígono é um conjunto de arestas de um subgrafo conexo e 2-regular de G.

Um *tríade* de um grafo G é um conjunto de três arestas, as quais interceptam um vértice de grau três.

Na literatura, o conceito de ciclo (em um grafo) é uma cadeia fechada ou é uma trilha fechada, vide [5] e [6], inclusive circuitos são frequêntemente chamados ciclos, vide referência [Vol.I Parte I, p10 [35]]. Nós tentamos seguir as definições mais abrangentes possíveis, por exemplo via referências [9] e [15].

Consideremos os grafos $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$. Uma aplicação $f : V(G) \to V(H)$ é um *homomorfismo* de G para H se, f preserva a adjacência de vértices, isto é, se $xy \in E(G)$ implica que $f(x)f(y) \in E(H)$. Se existe um tal homomorfismo, então dizemos que G aplica em H.

A *girth*[1] de um grafo (dígrafo) G, denotado por $g(G)$, é dado por:

$$g(G) = \begin{cases} \text{n} & \text{se } n \text{ é o menor inteiro para } C_n \text{ em } G, \\ \infty & \text{se } G \text{ não tem ciclos} \end{cases}$$

Circunferência, $c(G)$, de G é o comprimento de qualquer ciclo de maior comprimento possível.

Corda, radio e diámetro de G

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo conexo com $|V(G)| = n$. Para qualquer vértices $x, y \in V(G)$, denota-se por $d_G(x, y)$ a distância entre x e y, i.é., $d_G(x, y)$ =min $\{\ell(W_{[x,y]}) \ / W_{[x,y]}$ caminho entre x e y em $G\}$. O diámetro, diam G e radio, rad G de G são definidos como

$$diamG = \max_{x,y \in V(G)} d_G(x, y),$$

$$radG = \min_{x \in V(G)} \max_{y \in V(G)} d_G(x, y).$$

[1]existe tradução equivalente no português, cintura vide [13]

O seguinte resultado é devido a Erdös-Pach-Pollack-Tuta.

Teorema 1.3.1 *Seja G um grafo conexo com n vértices, então*
i) $diam\ G \leq [\frac{3n}{\delta+1}] - 1$.
ii) $rad\ G \leq \frac{3n-3}{2\delta+1} + 5$.

Vide [Radius, Diameter, and Minimum Degree *J. Combin. Theory Ser.* B 47,73-79 (1989)].

Uma *corda* de um ciclo no grafo G, é uma aresta de G, que liga dois vértices não consecutivos do ciclo. Cada ciclo de comprimento maior ou igual a 4, pode ter corda.

Um grafo com dois vértices e três arestas paralelas é chamado grafo *teta*, θ, em palavras outras, o grafo teta é um grafo não-separável exatamente com dois vértices não adjacentes de grau três.

G é um grafo **corda,** se cada ciclo de G de comprimento pelo menos 4, tem uma corda.

O grafo **roda** (ou **"wheel"**) denotado por W_p de ordem p, é um grafo que consiste de um ciclo C_{p-1} conjuntamente com um vértice y tal que $y \notin C_{p-1}$ e y liga pelo menos por uma aresta a cada vértice do ciclo.

Para os ciclos C_n e C'_n com os conjunto de vértices $V(C_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $V(C'_n) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ respectivamente. O **grafo $n-$prisma**, denotado por $P_n(C_n, C'_n)$, é um grafo cujos conjuntos vértices e arestas são dados por $V(P) = (C_n \cup C'_n)$ e $E(P) = \{x_i y_i \ / i = \overline{1,n}\}$, respectivamente.

O **grafo ciclo**, $C(G)$ de G, é um grafo cujo conjunto de vértices são os ciclos sem corda de G, e dois vértices de $C(G)$ são adjacentes se os correspondentes ciclos sem cordas possuim uma aresta em comum. Para mais detalhes, vide [92]. Existe uma vasta classes de grafos, vide por exemplo [27], [23] e [93].

1.4 *Vértice-Conectividade e Aresta-Conectividade*

A conectividade de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é um tópico intituivo da teoria dos grafos, que extende os conceitos de vértice-corte e aresta-corte, denominados *vértice-conectividade*, (ou *conectividade*) e *aresta-conectividade*, para outros detalhes, vide [Cap. 3 [15]], [27], [67], [69].

Dois vértices distintos u e v de G são *conexos*, se existe um caminho ligando os vértices u e v em G.

G é um grafo *conexo* se cada par de vértices são conexos. Em outras palavras, o grafo G é *conexo* se, e somente se, existe um caminho entre qualquer par de vértices, caso contrário, G é *desconexo*. Se G for desconexo, então cada subgrafo maximal (no sentido de inclusão) conexo, é uma *componente conexa* (ou simplesmente *componente*) de G.

$w(G)$ denota o número de componentes de G. Usaremos $w_o(G)$ e $w_1(G)$, para *componentes pares e ímpares*, i.é., número de componentes que possuem um número par ou ímpar de vértices, respectivamente.

Em um grafo não simples (ou dígrafo) $G = (V, E)$, um vértice $v \in V$ é chamado *vértice-corte* (os termos[2]), se E pode ser particionado em dois subconjuntos não vazios E_1 e E_2, tal que, os grafos $G[E_i]$, $i = 1, 2$ possuem extamente o vértice comúm v.

Se o grafo (ou dígrafo) $G = (V, E)$ não possuir laços, então o vértice v é um vértice-corte se, e somente se, $w(G - v) > w(G)$.

Um grafo conexo G é um *bloco* se, G não possuir vertices-cortes.

Lema 1.4.1 *Se o vértice $v \in G$ e G é um grafo conexo e sem laços, então v é um vértice-corte se, e somente se, existe dois vértices $x, y \in G$ tal que cada caminho que liga (ou tem extremos) x e y atravessam v.*

Para $X \subseteq V(G)$ em G, escrevemos por $G-X$ e dizemos *X-remoção* vértice se, cada vértice de X conjuntamente com as arestes incidentes, foram retirados ou removidos. Se $X = \{v\}$ for um conjunto unitário então, ao invés de $G - \{v\}$, escreveremos simplesmente $G - v$.

A *conectividade* ou *vértice-conectividade*, $\kappa(G)$ de um grafo conexo G, é definido como um número mínimo de vértices, cuja remoção desconecta G ou reduz a um único vértice ou buquê de laços, isto é, uma família de laços com um único vértice.

Para G completo, $\kappa(G) = |V(G)| - 1$ e $\kappa(G) = 0$, se G for um grafo trivial ou desconexo.

Para G conexo, um subconjunto $S \subset V(G)$ é conjunto de *articulação ou vértice-corte* de G, se $w(G - S) > w(G)$.

[2] "cut-vertex, cut-node or separation point" são equivalentes

Em outras palavras, um grafo (ou dígrafo) G se diz ser $k-$*vértice conexo* se, para cada par de vértices u e v existe pelo menos $k-$caminhos (dirigidos) disjuntos pelo vértice entre u e v.

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é chamado *2-conexo,* se:

(1) G não tem laços,

(2) para $|V(G)| = 2$, G tem arestas paralelas, e

(3) para $|V(G)| \geq 3$, o grafo $G - v$ é conexo, para cada vértice $v \in V(G)$, ou seja, que nenhum vértice de G, é um-vértice-corte de G.

Um grafo G é chamado *3-conexo* se:

1) G é simples e possui pelo menos 4 vértices, e

2) o grafo $G\backslash\{u, v\}$ é conexo para qualquer par de vértices de G, e também o grafo $G - v$, é conexo qualquer que seja vértice v de G,ou seja que cada subconjunto X de dois vértices ou de um vértice de $V(G)$, X não é vértice-corte de G.

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples com $|V(G)| \geq \kappa(G) + 1$ e n um inteiro positivo, G é *n-conexo,* se $n \leq \kappa(G)$, ou seja que o grafo $G - X$, é conexo, para qualquer subconjunto $X \subset V(G)$ com $|X| \leq n - 1$, em outras palavras, é imposível desconectar G pela remoção de um número menor ou igual a $n - 1$ vértices.

Um subconjunto de arestas $F \subseteq E(G)$ no grafo conexo G, é um *aresta-corte* ou *co-ciclo,* se existe um subconjunto $X \subseteq V(G)$ de vértices de G, tal que, F consiste daquelas arestas de G que possuim exatamente um extremo em X e outro extremo em $V(G)-X$, e denotamos por $F \equiv F(X) = F(V(G)-X)$. Por conseguinte, para cada subconjunto $X \subseteq V(G)$, o correspondente aresta-corte ou co-ciclo consiste das arestas $xy \in E(G)$ com $|X \cap \{x, y\}| = 1$.

Se G não é trivial e F é um co-ciclo, então $G-F$ é desconexo. Um aresta-corte ou um co-ciclo de k elementos é chamado *k-aresta-corte* ou k-co-ciclo.

$F = \emptyset$ é um co-ciclo se, e somente se, G for desconexo.

F ($F \subseteq E(G)$ no grafo conexo G) é um *bond* se, F for um co-ciclo não vazio minimal, ou seja que, F é um bond se, o grafo $G\backslash F$ é desconexo, e para qualquer $P \subset F$, $G\backslash P$ é conexo.

Uma aresta e é uma *ponte* de um grafo conexo G se, o grafo $G - e$ resulta ser desconexo, ou seja que, uma ponte é um co-ciclo com uma única aresta. Em outras palavras, um grafo (dígrafo) G é diz ser $k-$*aresta conexo* se para cada par de vértices u e v existe pelo menos k caminhos (dirigidos) disjuntos pela aresta entre u e v. Um tal menor inteiro k é chamado *aresta*



conectividade de G e denota-se por $\chi'(G)$.

1.5 *Árvores e Florestas*

Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico (isto é, sem ciclos).

Proposição 1.5.1 *Um grafo conexo G é uma árvore se, e somente se, cada aresta de G é uma ponte.*

Um subgrafo conexo e acíclico T (de um grafo conexo $G = (V(G), E(G))$) e máximal com respeito à esta propriedade, é chamado uma *árvore* de G. Se $V(T) = V(G)$, então T é uma *árvore geradora* de G.

Proposição 1.5.2 *Todo grafo conexo possue pelo menos uma árvore geradora.*

Um subconjunto de arestas F de G que não contém co-ciclos e máximal com respeito à esta propriedade é, chamada uma *co-árvore* de G.

Uma *floresta* é um grafo desconexo, onde cada componente é uma árvore. Uma *floresta geradora* (também usá-se o termo floresta *principal*) de G é o conjunto de árvores geradoras (das componentes) de G.

Teorema 1.5.1 *Seja o grafo $G = V(G), E(G))$ de ordem $|V(G)| = n > 2$. Então as seguintes afirmações são equivalentes (e cada afirmação caracteriza árvore):*

1) G é conexo e não possui ciclos,

2)G tem $n-1$ arestas e não possue ciclos,

3) G é conexo e contém exatamente $n-1$ arestas,

4) G não possui ciclos, e se uma aresta é adicionada a G, se forma exatamente um único ciclo,

5) G é conexo e para cada aresta $w \in E(G)$, o grafo $G - w$, é desconexo,

6) Cada par de vértices em G, é ligado exatamente por um único caminho.

Para uma demonstração vide [Cap. 2, [9]] □.

Lema 1.5.1 *Seja $T \subseteq E(G)$ no grafo conexo $G = (V(G), E(G))$*

i) T é uma árvore geradora se, e somente se, T não contêm ciclos e o

complemento de T denotado por $\bar{T}$ não contêm co-ciclos.

ii) Se T é uma árvore geradora de G, então $\bar{T}$ é uma co-árvore de G.

iii) Se T é uma árvore geradora, então para cada $x \in \bar{T}$ o ciclo denotado por $C_x \equiv C(x,T)$ e definido como $\{e \in F / F \subseteq E(T)\} \cup \{x\}$, é chamado ciclo fundamental *de x em G com respecto à T.*

iv) Se T_i; $i = 1,2$ são árvores geradoras de G, então $|T_1| = |T_2|$. (Para uma generalização dos itens iii) e iv) vide seção, definição do Matróide vía Bases).

Lema 1.5.2 *Consideremos o grafo arbitrário G, então:*

i) Cada co-ciclo de G possui uma aresta comum com cada floresta geradora de G.

ii) Cada ciclo de G possui uma aresta em comum com o complemento de qualquer floresta geradora.

Em ambos casos, um demonstração é via contradição □.

Lema 1.5.3 *Se os ciclos C_i, $i = 1,2$ (resp. C_i^*, $i = 1,2$) contém a aresta e (resp. w) em comum, então $C_1 \cup C_2$ (resp. $C_1^* \cup C_2^*$) contém um ciclo (rep. co-ciclo) o qual não contém e (resp. w).*

Para uma demonstração, vide [Cap. 3, [83]] □.

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo simples e $\mathcal{C}$ um conjunto cujos elementos são cores. Uma função $f : V(G) \to \mathcal{C}$, é chamada uma *coloração própria* o simplemente uma *coloração de vértices* de G, se $f(u) \neq f(v)$, para cada par de vértices distintos u e v de $V(G)$ com aresta $uv \in E(G)$.

Se $|\{f(u)/u \in V(G)\}| = T$, a coloração f é também chamada uma *T-coloração.* Uma T-coloração de grafos é uma generalização do problema de coloração de vértices em conexão com o problema de designação de canais de comunicação. Uma formulação grafo-teórico deste problema é atribuido a Hale, vide as referências [14] e [93].

O número *cromático* de vértices de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro positivo T, para o qual existe uma coloração f de G, tendo como o conjunto de cores $\mathcal{C}$, com $|\mathcal{C}| = T$. Em outras palavras, $\chi(G)$ é o número mínimo de cores necessários para colorir todos os vértices de G de tal maneira que dois vértices não adjacentes recebem a mesma cor e com $\chi(G) - 1$ cores é impossível colorir o grafo G, e neste caso ponha $k = \chi(G)$ e G é dito k-cromático.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Um grafo G é *critical* se, para cada subgrafo próprio H de G se verifica $\chi(H) < \chi(G)$. Diz-se que G é $k-$critical se G for critical e $k-$cromático.

Exemplo 1.5.1 *Todo grafo completo k_n é critical para cada n*

Lema 1.5.4 *Consideremos um grafo simples G:*
i) Se G é critical, então G é conexo.
ii) Se G é $k-$cromático, então G possui um subgrafo $k-$critical.

Dem.

i) A partir da hipótese e da definição de $\chi(G)$, segue que G possui uma $k-$coloração e consequentemente, G é conexo. Se não for conexo, então admite pelo menos duas componentes, H e F. Desde que, $H \subset G$, de onde não será consequentemente $\chi(H) < \chi(G)$ ou seja, $\chi(H) \geq \chi(G)$, e sendo H subgrafo próprio o que contradiz a G critical. Logo G deve ser conexo.

ii) Pela hipótese, o conjunto de vértices $V(G)$ de G admite uma partição, $V(G) = \{V_1, \ldots, V_k\}$. Consideremos o subgrafo H cujo conjunto de vértices, $V(H) = \{x_i / x_i \in V_i \forall\, i = \overline{1,k}\}$ e a aresta $x_i x_j \in E(G)$ é de H se, e somente se, $x_i \in V_i$ e $x_j \in V(H)$. De onde H possui uma $k-$coloração e $\chi(H) = k$ e qualquer subgrafo próprio F de H verifica $\chi(F) < \chi(H)$ e o lema esta provado. □

Teorema 1.5.2 *Se o grafo G é $k-$critical, então $\delta \geq k-1$, onde $\delta = min$ $\{d_G(x) / x \in V(G)\}$.*

Dem.

Admite que existe um grafo G k-critical com $\delta < k-1$ e seja $v \in V(G)$ tal que $\delta = d_G(v)$. O subgrafo $G - v$ possui uma $(k-1)$-coloração, portanto consideremos a partição $\{V_1, \ldots, V_{k-1}\}$ de vértices de $G - v$.

Desde que, $\delta = d_G(v)$, então existem δ vértices adjacentes a v, de onde v não deve ser adjacentes aos vértices de alguns v_i, digamos aos de V_j, por conseguinte no conjunto $V_j \cup \{v\}$, v recebe a mesma cor que os elementos de V_j, o que acarreta que $\{V_1, \ldots, V_j \cup \{v\}, \ldots, V_{k-1}\}$, é uma $(k-1)$-coloração de G, o qual é uma contradição ao fato G possui $(k-1)$-coloração. Portanto deve ser $\delta \geq k-1$ e o teorema esta provado □.

Corolário 1.5.1 *Cada grafo k−cromático possui pelo menos k vértices e cada um deles tem grau pelo menos* $k-1$.

A demonstração segue teorema anterior. □

Uma *k-coloração de arestas* de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma função $g : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que, $g(e) \neq g(w)$ para qualquer par de arestas adjacentes e e w. Se $g(e) = j$, para $e \in E(G)$, então diz-se que a aresta e é colorida da cor j.

O índice (ou número) *cromático de arestas* $\chi'(G)$ é o menor valor de k para o qual existe uma k-coloração de G.

Um resultado clássico devido a V. G. Vizing (cap. 8, [15]), posteriormente generalizado por Berge [10], estabelece a seguinte desigualdade

$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Se $\chi'(G) = \Delta(G)$, então diz-se que G é de classe 1, e no outro caso G é de classe 2.

A aplicação $\theta : V(G) \cup E(G) \to C$, é chamada uma coloração *total própria* de G, se dois elementos não adjacentes ou não incidentes no mesmo elemento são designados a mesma cor a partir do conjunto de cores C. O número *cromático total*, denotado por $\chi''(G)$, é o menor inteiro positivo para o qual existe uma coloração total própria de G.

Behzad tem conjecturado que $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Chetwynd-Hilton-Cheng demonstraram que a conjectura é verdadeira para os grafos de ordem par e cujo grau menor $\delta(G) \geq \frac{3}{4}|V(G)|$ e para qualquer grafo de ordem ímpar e cujo grau menor $\delta(G) \geq \frac{5}{6}|V(G)|$. Mas tarde este resultado foi refinado por Hilton-Hind [41], no sentido que a conjectura vale para todos os grafos G, tal que, seu grau máximo $\Delta(G) \geq \frac{3}{4}|V(G)|$.

Para qualquer grafo não nulo $G = (V(G), E(G))$, existem dois inteiros positivos associados a G, são o *"rank"* ou *posto* (contudo usaremos o termo "rank", vide seção Teoria de matróides) e o número *ciclomático*, $c_i(G)$. O "rank" de G denotado por $r(G)$, é dado por $r(G) = |E(T_G)| = |V(G)| - k$ (onde $E(T_G)$ é o conjunto de arestas de uma floresta (ou árvore) geradora de G), e o número *ciclomático* $c_i(G) = |E(G)| - |E(T)|$. Ou seja que, é o número de ciclos independentes isto é, é a cardinalidade de uma base do subespaço ciclo de G vide seção Espaço Vetorial Grafo. Ainda, este número é igual ao número de arestas da co-floresta $\bar{T}$ (onde T é uma *floresta maximal ou*

geradora, isto é, T, não esta incluido em uma outra floresta) em G, vide a referência [Cap. 2.3 [125]].

1.6 *Grafos: Euleriano e Hamiltoniano*

Esta seção se baseia nas referências [11], [22], [27] e [90]. O nome específico destes grafos, se deve em honra a dois grandes matemáticos, são eles, Leonhard Euler (1707-1783) e William Rowan Hamilton (1805-1865).

Leonhard Euler, matemático mais produtivo e o melhor nos tempos modernos, segundo a literatura consultada.

Foi quem usou pela primeira vez o termo grafo, para descrever o problema das sete pontes de Königsberg por meio de um diagrama, e problema da vida real formula-se como um problema que consiste em passar a ponta de lápis, iniciando em qualquer ponto (que representam as ilhas e parte litoral das ilhas) do diagrama e atrevessar a cada aresta (que representam as pontes) somente uma vez (sem tirar o lápis do papel), e voltar ao ponto de partida. somente uma vez e voltar ao ponto de partida. Euler provou que o problema não tem solução.

Denota-se por $i(G) = \{$ vértices de G de grau ímpar $\}$ e $p(G) = \{$ vértices de G de grau par $\}$, os conjuntos de vértices de graus ímpares e pares, respectivamente do grafo G.

O grafo G é chamado *par*, se $p(G) \neq \emptyset$ e $i(G) = \emptyset$, e se, $i(G) \neq \emptyset$ e $p(G) = \emptyset$, então G é *ímpar*.

As seguintes definições são válidas nos dígrafos, vide capítulo 2.

Uma trilha (ou *passeio*) de Euler é uma trilha fechada que contém todas as arestas de G. Uma *trilha de Euler aberta*, é uma trilha aberta que contém todas as arestas do grafo.

Um grafo G é chamado *euleriano* se, G é conexo e G é par, ou equivalentemente, um grafo conexo G é de *Euler* (ou G é um grafo *euleriano*), se G contém uma trilha fechada de Euler. Se o grafo G possui uma trilha fechada geradora T i.é., $V(T) = V(G)$, então G é chamado *supereuleriano*.

Teorema 1.6.1 *Um grafo conexo G é de Euler se, e somente se, $d_G(x)$ é*

um inteiro par, para cada vértice $x \in V(G)$.

Um circuito *Hamiltoniano* Γ em um grafo conexo $G = (V(G), E(G))$ é um ciclo que contém todos os vértices de G, i.é., $V(\Gamma) = V(G)$.

Um caminho Hamiltoniano no grafo conexo G é um caminho que contém todos os vértices de G. Se um grafo G contém um circuito (resp. caminho) Hamiltoniano, então dizemos que G é *Hamiltoniano* (resp. *determinável*). E além disso G é *conexo-hamiltoniano* se, G contêm $(x - y)$-caminho hamiltoniano para cada par de vértices x e y de G.

Cabe fazer a seguinte observação. Todo grafo Hamiltoniano possui caminho de Hamilton, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira. Isto é, se um grafo conexo que possui um caminho de Hamilton não é necessariamente um grafo Hamiltoniano.

Um problema fundamental na teoria de grafos é determinar quando um grafo é hamiltoniano. Nas últimas décadas tem-se dado énfasis ao termo vizinhança, contudo não foi revelado alguma condição necessária e suficiente, mas sim, foram revelados algumas condições suficientes para que, um grafo seja hamiltoniano.

1.7 *Grafos Homeomorfos a G*

Consideremos os grafos $G = (V(G), E(G))$, e $H = (V(H), E(H))$. Uma correspondência f que associa a cada elemento (aresta ou vértice) x de $V(G) \cup E(G)$ com um único elemento $fx(= y)$ de $V(H) \cup E(H)$ tal que

i) se $x \in V(G)$ então $fx \in V(H)$, e

ii) para $e = uv \in E(G)$, então $fu = fe = fv$ (um laço) ou fe é uma aresta de H com extremos fu e fv, então f é chamada uma *aplicação* de $G \to H$.

A plicação $f : G \to H$, é chamada *sobre* se para cada y de elemento y de $V(H) \cup E(H)$ existe elemento $x \in V(G) \cup E(G)$ tal que $fx = y$.

Para a aplicação $f : G \to H$, a correspondência *inversa* f^{-1} que associa cada elemento y de $V(H) \cup E(H)$ com elemento x de $V(G) \cup E(G)$ tal que $fx = y$. De um geral f^{-1} não é necessariamente uma aplicação. Se a plicação $f : G \to H$ for sobre, então existe a correspondência inversa f^{-1}. De um geral f^{-1} associa um y de $V(H) \cup E(H)$ com muitos elementos x de G tal que $fx = y$, portanto f^{-1} não é necessariamente uma aplicação. Desde que f é

uma aplicação sobre G, então cada elemento de G é imagem de pelo menos de um elemento x sob f^{-1}.

Escreve-se $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ para significar $(gf)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$, que a imagem sob $(gf)^{-1}$ do elemento z são as imágines sob f^{-1} das imágines sob g^{-1} de z.

Uma aplicação $f : G \to H$ é chamada *contractiva* se f verifica:

i) Se $w \in E(H)$, então exite única aresta $e \in E(G)$ tal que $fe = w$, e

ii) se $x \in V(G)$, então existe $f^{-1}[x]$, onde $[x]$ significa um grafo com único vértice x e sem nehuma aresta.

A operação *subdivisão* de uma aresta $e = uv$ $(u \neq v)$ ou ao longo da aresta e no grafo G, consiste em inserir um novo vértice z de grau 2 e duas novas arestas uz e zv. Em outras palavras, consiste em substituir a aresta $e = uv$ por um caminho cujos extremos sejam os vértices u e v. Se a aresta e for um laço, substituir por um ciclo.

Se o caminho que substitui a aresta, tem comprimento ímpar, então trata-se de uma subdivisão *ímpar*. Similarmente se define subdivisão *par*.

Dizemos que o grafo H *contém topológimente* G (ou que G é um *menor tológico* de H), se algum subgrafo de H é uma subdivisão de G. Em outras palavras, o grafo H é chamado *uma subdivisão* do grafo G e escrevemos $H = TopG$ (notação introduzida em [47]), se H pode ser obtido a partir de G por uma sequência de subdivisões de (algumas) arestas de G e os laços por ciclos.

A operação recíproca, é a *junção*, que consiste substituir duas arestas adjacentes por uma aresta, se o vértice comum das arestas adjacentes for de grau 2. Se o grafo H for obtido a partir de G por uma sequência finita de junções (cada duas arestas adjacentes substituidas por uma aresta), dizemos que H é uma junção de G e escrevemos $H = junG$.

Um grafo H é *homeomorfo a partir* de G se $H = G$ ou $H = TopG$ (H=junG).

Os grafos G e H são homeomorfos, se os grafos subdivisões (junções) G' e H' respectivamente de G e H, são isomorfos. Para um estudo mais detalhado dos grafos homeomorfos e afins, vide referências [23], [46].

Para $F \subseteq E(G)$, entendemos por *F-remoção* aresta (ou simplesmente F-remoção) a retirada de todas as arestas de F a partir de G. Ao grafo obtido pela $F-$remoção denotamos por $G\backslash F$, em particular para $F = \{e = xy\}$ tem-se $G\backslash e$. A operação remoção tem importantes aplicações, em especial na construção de subgrafos de um grafo, por exemplo, no reconhecimento de

grafos planares (para os grafos planares, vide as referências [5], [47], [48] e [120]).

A operação *contração ao longo de uma aresta* $w = uv$ ou simplesmente *contração* significa remover a aresta $w = uv$ e identificar os extremos $u = v$. Então o grafo obtido pela contração da aresta w, é denotado por G/w. De um modo geral, a operação contração gera laços ou arestas múltiplas, as quais muitas vezes são desconsideradas, se houver, porque não influência nas propriedades intrínsecas da mesma. Por exemplo, as propridades de planaridade, são inalteráveis com a presência de alguns laços ou arestas múltiplas.

Um grafo G é *contractivél* a H, se o grafo H for obtido a partir de G por uma sequência de contrações, as vezes denota-se $H = contrG$. O grafo obtido a partir de G, pela contração ao longo de uma aresta, $e = xy$, e desconsiderarmos os possíveis laaos ou as arestas múltiplas, (que podem se formar após da operação contraçao,) G/e, é chamado *contração elementar* de G.

Para todos os subconjuntos A e B de arestas de G, as operações remoção e contração, são comutativas, i.é., $(G/A)\backslash B = (G\backslash B)/A$.

Um grafo H é *menor* do grafo G, se H é obtido a partir de G, por uma sequência das operações de remoção e/ou contração de algumas arestas de G, (após de desconsiderar todos os vértices isolados, se houver).

Uma aresta e em um grafo G 3-conexo é chamado *contractível* se o grafo contração G/e é ainda 3-conexo. Para outros detalhes vide [Wu, H., On contractible and vertically contractible elements in 3-connected matroids and graphs,*Discrete math.* 179 (1998) 185-203].

Para $n \geq 2$, um grafo $G = (V(G), E(G))$ $n-$conexo é chamado *n-conexo minimal* se:

i) G é n-conexo, e

ii) para cada aresta $e \in E(G)$, o grafo $G\backslash e$ deixa de ser $n-$conexo.

Exemplo 1.7.1 *Para $n = 2$, todos os polígonos (ou ciclos elementares) são 2-conexos minimais.*

É obvio que a aresta a ser removida (para destroir $n-$conexo de um grafo) intercepta a um vértice de grau n. De fato deve haver muitos véritces de grau n. Este número é dado pelo seguinte resultado.

Teorema 1.7.1 *Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo $n-$conexo minimal, onde*

$n =\geq 2$, então o número de vértices de grau n em G é pelo menos

$$\frac{(n-1)|V(G)| + 2n}{2n-1}.$$

Para mais detalhes, vide [p.158 [17]]. Também [Dirac, G.A. at Aarhus, Minimally 2-connected graphs, *J. Reine and Angewandte Mathematik*, vol. 228 (1967) 204-216].

Existem arestas especiais, por exemplo, em um grafo G 3-conexo minimal, seja e uma aresta de G. Diz-se que e é *não-essencial* se, e somente se, G/e é a vez 3-conexo e simples, e dizemos que e é *essencial* se, e somente se, $G - e$ não for 3-conexo nem simples.

Capítulo 2

Grafos Orientados ou Dígrafos

2.1 *Introdução*

Neste capítulo, apresentamos uma breve introdução aos grafos *dirigidos,* também denominados, *dígrafos.* Alguns resultados como definições ou terminalogias, que não foram mencionados, o interessado pode consultar, entre outras, as referências [6], [cap. 10 [15]], [40] e [60].

2.2 *Orientação de Grafos*

Consideremos o grafo $G = (V(G), E(G))$ e a aresta $a = \{u, v\}$ de G. Dizemos que a aresta $a = \{u, v\}$ é *orientada* de u para v se, a aresta a tem direção designada de *vértice cauda*, u (ou *vértice cauda* v) para *vértice cabeça* v (ou *vértice cabeça* u). Geralmente uma aresta $a = \{u, v\}$ orientada é denomindo *arco* e denota-se por $\vec{a} = \overrightarrow{\{u, v\}}$ ou $\vec{a} = (u, v)$. Por conseguinte, o arco (v, u) será diferente do arco $\vec{a}$ (ou de (u, v)).

Dados dois vértices distintos u e v, exitem quatro possibilidades e quatro tipos de arcos:

i) não existe arco orientado entre u e v, então escrevemos $u|v$ e é um arco *nulo*,

ii) existe o arco orientado (u, v) (ou $\overrightarrow{\{u, v\}}$), mas não existe (v, u), então

trata-se de um arco simples,

iii) exite o arco orientado (v,u) ou $(\overleftarrow{\{u,v\}})$, mas não exite o arco (u,v), então trata-se de um arco simples, e

iv) existem ambos arcos orientados (u,v) (ou $\overrightarrow{\{u,v\}}$) e (v,u) (ou $\overleftarrow{\{u,v\}}$) e se denota por $u \leftrightarrow v$, trata-se de arco duplo.

Neste trabalho adotaremos ao invés de $\overrightarrow{\{u,v\}}$ a notação (u,v), quando existir o arco orientado.

Uma *orientação* de um grafo G é uma substituição de cada aresta de G pelo arco nulo, simples ou duplo.

Um grafo orientado ou dígrafo, denotado por $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(G) = (V(D), A(D))$ é um grafo G munido de uma orientação, sendo o grafo G chamado *fundamental* e $\mathcal{D}(G)$ o dígrafo correspondente ao grafo fundamental G.

Um dígrafo é chamado *grafo orientado* se entre dois vértices distintos u e v existe ao mais um arco ordenado, isto é, possíveis de arcos simples ou arcos nulos. Um dígrafo é chamado *grafo não orientado* se entre dois vértices distintos existe arco duplo ou nulo. Um dígrafo é chamado *semicompleto* se entre dois vértices distintos existe pelo menos um arco ordenado, neste caso os arcos possíveis são os simples ou duplos. Contudo no contexto referênciaremos como dígrafo a todo dígrafo semicompleto.

Seja $a = (u,v)$ um arco arbitrário de $\mathcal{D}$. O vértice cauda u é *predecessor* de v e o vértice cabeça v, é o *sucessor* de u. Alternativamente, dizemos que u *domina* v, ou seja que,u é *adjacente a* v, e o vértice v é *dominado* por u, ou seja, v é *adjacente a partir de* u.

Um dígrafo $\mathcal{D}(G)$ correspondente a G é dito *asssociado* ao grafo G, se cada aresta de G é susbtituida pelas duas orientações ou direções possíveis, por exemplo, a aresta $e = \{x,y\}$ é substituida pelos dois arcos possíveis (x,y) e (y,x).

Um grafo G é *orientável como um torneio,* se existe um dígrafo correspondente $\mathcal{D}(G)$, tal que, seja um torneio local, para mais detalhes vide [43].

Um grafo dado possui várias orientações, ou seja, que há vários dígrafos correspondentes ao mesmo grafo. Também, a um dígrafo corresponde um grafo, basta desconsiderar a orientação de cada aresta.

Uma orientação de G é qualquer um dos $2^{|E(G)|}$ grafos orientados $\mathcal{D}$,



$(V(\mathcal{D}) = V(G),\ E(\mathcal{D}) = E(G))$, e cada arco de $\mathcal{D}$, liga os mesmos vértices em $\mathcal{D}$ como em G.

Consideremos a aresta $a = \{u, v\}$ do grafo fundamental G, se $u = v$, então a aresta orientada (u, u) é um laço no digrafo $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(G)$. Analogamente, os arcos: $a_1 = (u, v), a_2 = (u, v), \ldots, a_n = (u, v)$ no dígrafo $\mathcal{D}$, são os arcos paralelos no $\mathcal{D}$.

Seja $\mathcal{D} = (V(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}))$ um dígrafo. As cardinalidades $V(\mathcal{D})$ e $E(\mathcal{D})$ são *ordem* e *tamanho* respectivamente. O tamanho de qualquer dígrafo $\mathcal{D} = (V(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}))$ verifica: $0 \leq |E(\mathcal{D})| \leq 2\binom{|V|}{2}$.

Os conjuntos: $N^-(u) = \{x \in V(\mathcal{D})/(x, u) \in A(\mathcal{D})\}$ e $N^+(u) = \{y \in V(\mathcal{D})/(u, y) \in A(\mathcal{D})\}$, são os conjuntos de vértices *predecessores* e *sucessores*, do vértice u, respectivamente no dígrafo $\mathcal{D}$.

O grau *interior* de um vértice u no dígrafo $\mathcal{D}$, denotado por $d^-_{\mathcal{D}}(u)$ ou simplesmente $d^-(u)$, é a cardinalidade de $N^-(u)$, isto é: $d^-_{\mathcal{D}}(u) = |N^-(u)|$. Análogamente, o grau *exterior* do vértice u, denotado por $d^+_{\mathcal{D}}(u)$ ou $d^+(u)$, é o número de vértices que são adjacentes a partir de u, ou seja, $d^+(u) = |N^+(u)|$.

Um dígrafo $\mathcal{F} = (\mathcal{V}(\mathcal{F}), \mathcal{A}(\mathcal{F}))$ é um *subdígrafo* do dígrafo $\mathcal{D} = (V(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}))$, se $V(\mathcal{F}) \subseteq V(\mathcal{D})$ e $A(\mathcal{F}) \subseteq A(\mathcal{D})$.

O grau interior mínimo de $\mathcal{D}$, denotado por δ^-, é menor valor de todos os vértices de grau interior, e o grau exterior mínimo, denotado por δ^+, é o menor valor de todos os vértices de grau exterior.

O grau mínimo de $\mathcal{D}$, é $\delta(D) \equiv \delta = min\{\delta^+, \delta^-\}$.

O grau máximo de $\mathcal{D}$, é $\Delta(D) \equiv \Delta = max\{\delta^+, \delta^-\}$.

Um digrafo $\mathcal{D}$, é *r-regular*, se cada vértice u verifica $d^+(u) = d^-(u) = r$.

2.3 *Semicadeias, Caminhos e Ciclos no Dígrafo*

Sejam u e v dois vértices (não consequentemente distintos) no dígrafo $\mathcal{D}$. Por uma *semicadeia* no $\mathcal{D}$, entendemos uma seqüência alternada finita de vértices e arcos (não necessariamente distintos):

$$\gamma : u = u_o, a_1, u_1, a_2, \ldots, u_{n-1}, a_n, u_n = v,$$

iniciando no vértice u e terminando no vértice v, tal que os $a_i = (u_{i-1}, u_i)$ ou $a_i = (u_i, u_{i-1})$ são os arcos de $\mathcal{D}$, e o inteiro positivo n é o comprimento, ou seja é o número de arcos da semicadeia e escrevemos $\ell(\gamma) = n$.

Os arcos da forma $a_i = (u_{i-1}, u_i)$ e $a_i = (u_i, u_{i-1})$ são denominados *direito* e *contrário* de γ. Conseqüentemente, podemos identificar uma semicadeia γ com um subconjunto de arcos de $\mathcal{D}$, particionado em subconjunto de arcos direitos, γ^+, e subconjunto de arcos contrários, γ^-, e escrevemos:

$$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-.$$

Se $\gamma = \gamma^+$, com $\gamma^- = \emptyset$ (ou $\gamma = \gamma^-$, com $\gamma^+ = \emptyset$,) diz-se que γ é uma *cadeia.*

Um *caminho* entre os vértices u e v, no dígrafo $\mathcal{D}$, é uma semicadeia com todos os arcos distintos (alguns autores preferem o termo *trilha* , ao invés de caminho).

Se todos os vértices de um caminho forem distintos, então diz-se que o caminho é *simples.*

Um *ciclo* é um caminho fechado, isto é, os vértices inicial e final do caminho coincidem. Por um ciclo com n arcos, entendemos como um subconjunto de arcos, C_n, de $\mathcal{D}(G)$ e dizemos que o ciclo C_n é um *n-ciclo.* O ciclo C_n é *par* ou *ímpar*, se n for um inteiro par ou ímpar.

Consideremos o caminho W entre os vértices u e v, i.é.,

$$W : u = u_o, a_1, u_1, a_2, \ldots, u_{k-1}, a_k, u_k = v.$$

W^+ denota o conjunto de arcos direitos, $a_i = (u_{i-1}, u_i)$, de W, e o conjunto de arcos contrários, $a_i = (u_i, u_{i-1})$, é denotado por W^-, portanto podemos escrever

$$W = W^+ \cup W^-.$$

Analogamente, um ciclo $C_n = C^+_{n_1} \cup C^-_{n_2}$, onde $n_1 + n_2 = n$.

Um dígrafo $\mathcal{D}$ tem *discrepância* k, se para cada ciclo C_n em $\mathcal{D}$, o número de arcos direitos e o número de arco contrários difierem no máximo em k unidades, i.é., $||C_{n_1}| - |C_{n_2}|| \leq k$. Vide [A.M.H., Gerards: An Orientation Theorem for Graphs, *J. Combinatorial Theory Ser.*B 62, 199-212 (1994)].

Um caminho $W = W^+ \cup W^-$ é *dirigido* no dígrafo $\mathcal{D}$, se $W^+ = \emptyset$ ou $W^- = \emptyset$ mas não ambas, por exemplo: $W = W^+ : u = u_o, (u_o, u_1), u_1, \ldots, (u_{k-1}, u_k), u_k = v$, com $W^- = \emptyset$, diz-se que W é um caminho dirigido de u a v e escrevemos $(u, v)-$caminho W, ou $W_{[u,v]}$.

O ciclo Γ é um ciclo dirigido ou um circuito, se $\Gamma = \Gamma^+$, com $\Gamma^- = \emptyset$ (ou $\Gamma = \Gamma^-$, com $\Gamma^+ = \emptyset$).

Denotemos por $W_{p[u,v]}$, (ou $p(u, v)-$caminhos) a família de p caminhos dirigidos de u a v. Uma família $W_{p[u,v]}$, de p caminhos no dígrafo $\mathcal{D}$, são *arco-disjuntos*, se cada par de caminhos não possuim arcos em comum.

Se o conjunto de vértices, $V(W)$, de um caminho W for igual ao conjunto de vértices de $V(\mathcal{D})$, dizemos que W gera o dígrafo $\mathcal{D}$.

Consideremos u e v dois vértices arbitrários de $\mathcal{D}$. Se existe o caminho $W_{[u,v]}$, então diz-se que v é *atingível* a partir de u. Se dois vértices u e v se atingem mutuamente, i.é., existem caminhos $W_{[u,v]}$ e $W_{[v,u]}$, dizemos que u e v são *diconexos*. Sendo o diconexo é uma relação de equivalência sobre o conjunto de vértices do dígrafo $\mathcal{D}$, então o dígrafo é *diconexo* se a relação diconexo induz uma única classe de equivalência.

Um dígrafo $\mathcal{D}(G)$ é *conexo* (ou *fracamente conexo*), se seu grafo fundamental G for conexo. Se, cada par de vértices se atingem mutuamente no dígrafo $\mathcal{D}$, então diz-se que o dígrafo é *forte* (ou *fortemente conexo*).

Um dígrafo $\mathcal{D}(G)$ é *k-arco conexo* se para cada subconjunto próprio $S \subset V(\mathcal{D}(G))$ se verifica: $|(S, V(\mathcal{D}(G)) - S| \geq k$.

Consideremos o dígrafo $\mathcal{D}$ e seja $\Omega \subseteq A(\mathcal{D})$, então os vértices u e v são $\Omega-$*arcos separados* em $\mathcal{D}$, se o subdígrafo $\mathcal{D} - \Omega$ não contém nenhum (u, v)-caminho.

Teorema 2.3.1 *Em todo dígrafo $\mathcal{D} = (V(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}))$, a soma dos vértices de grau interior é igual à soma dos vértices de grau exterior, e o valor comum é o número de arcos, em outras palavras,*

$$\Sigma_{u \in V(\mathcal{D})} \delta^+(u) = |A(\mathcal{D})| = \Sigma_{u \in V(\mathcal{D})} \delta^-(u).$$

A demonstração é imediata. □

Os dígrafos $\mathcal{D} = (V(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}))$ e $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), A(\mathcal{H}))$ são *isomorfos*, se exite uma aplicação injetiva φ definida em $V(\mathcal{D})$ e com valores em $V(\mathcal{H})$, tal

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

que preserva a orientação dos arcos.

Teorema 2.3.2 *No dígrafo conexo $\mathcal{D} = (V(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}))$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\mathcal{D}$ possui um passeio (i.é., caminho dirigido fechado que contem todas as arestas) de Euler,

ii) $\delta^+(u) = \delta^-(u)$, para cada vértice $u \in V(\mathcal{D})$, e

iii) $\mathcal{D}$ é a união de alguns ciclos dirigidos disjuntos pelo arco.

Teorema 2.3.3 *Consideremos o dígrafo conexo e não trivial $\mathcal{D} = (V(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}))$. Se $\mathcal{D}$ contêm dois vértices x e y tal que*

$\delta^+(x) - \delta^-(y) = p = \delta^-(y) - \delta^+(y)$, *e* $\quad \delta^+(u) = \delta^-(u)\ \forall u \in V(\mathcal{D}) - \{x, y\}$.

Então existem exatamente uma família $W_{p[xy]}$ de caminhos dirigidos e arcos disjuntos em $\mathcal{D}$.

Teorema 2.3.4 *Seja o dígrafo $\mathcal{D}(G)$ associado ao grafo fundamental G, então:*

i) existe uma correspondência biunívoca entre os caminhos de G e os caminhos dirigidos do dígrafo $\mathcal{D}(G)$, e

ii) $\mathcal{D}(G)$ é $k-$arco conexo se, e somente se, G é $k-$aresta conexo.

Teorema 2.3.5 *Demonstrar que um dígrafo $\mathcal{D}(G) = (V(\mathcal{D}), A(\mathcal{D}))$ com o grafo fundamental G, contém um caminho dirigido de comprimento $\chi(G)-1$.*

Dem.

Consideremos S o conjunto mínimo de arcos $\mathcal{D}(G)$ tal que o subdígrafo $H \equiv \mathcal{D}(G) - S$ não possui ciclos dirigidos, k =max $\{\ell(W)/W$ é o caminho dirigido em $H\}$ e sejam as cores $1, \ldots, k, k+1$ disponíveis para colorir os vértices de H.

O vértice v de H receve a coloração i, $i = \overline{1, k+1}$, se o comprimento do maior caminho direcionado em H com vértice inicial em v, for $i - 1$.

Denotemos com V_i, o conjunto de vértices munidos com a coloração i, i.é., $V_i = \{x \in V(H)/x$ possui a cor $i\}$.

Provemos que $(V_1, \ldots, V_k, V_{k+1})$ é uma $(k+1)-$coloração própia de $\mathcal{D}(G)$. Pela coloração dos vértices de H segue-se que, os extremos de qualquer caminho direcionado em H, possuim distintas cores.

Agora provemos que os extremos de qualquer arco no $\mathcal{D}$ possuim cores distintas. Se o arco $(u,v) \in A(\mathcal{D}))$, pertence a H, esta provado.Se $(u,v) \notin A(H)$, então $(u,v) \in S$. Pela hipótese, $H \cup \{(u,v)\}$, contém um ciclo Ω, daí $\Omega - \{(u,v)\}$ é um caminho dirigido em H portante os vértices u e v recebem cores distintas, de onde $\{V_1, \ldots, V_k, V_{k+1}\}$ é uma colorção própia de $\mathcal{D}$ e pela definição de número cromático concluimos que $\chi(G) \leq k+1$ e o teorema esta provado $\square$.

Capítulo 3

Teoria de Matchings

3.1 *Introdução*

Para um tratamento mais completo deste assunto, vide referências [1], [2], [26], [50], [51], [53], [Caps. 1, 2, 3 [55]], [77], [85] e [Cap. 2, 2.3, [125]].

A noção de uma função bijetiva entre dois conjuntos finitos disjuntos não vazios, é equivalente formar casais (ligados pela amizade) a partir dos conjuntos de garotos e garotas. Este conceito no grafo abstracto, é uma coleção de amizades (arestas disjuntas) coleção chamada um *matching*[1], nós usaremos o termo matching e algumas vezes o termo emparelhado.

Vimos que, se a aresta e incide no vértice x no grafo $G = (V(G), E(G))$, ou seja que, x é um extremo de e, então diz-se que e *cobre* x e a vizinhança aberta de x não é vazia, i.é., existe pelo menos um vértice y tal que $y \in N(x)$. Em outras palavras, um conjunto de arestas disjuntas duas e duas e tais arestas emparelham dois subconjuntos disjuntos de $V(G)$, formam um matching. As vezes um matching é também denominado *conjunto independente de arestas* em G. Ainda um subconjunto $M \subseteq E(G)$, é um matching em G se, e somente se, cada vértice do subgrafo $G[M]$, induzido por M tem grau menor

[1] existem traduções equivalentes em português, acoplamento ou emparelhamento vide referências [13] e [91]

ou igual a 1.

Um *vértice-cobrimento* ou *suporte* em G, é um subconjunto de vértices S de $V(G)$, tal que intercepta (ou cobre) a cada aresta de G. A cardinalidade mínima de um vértice-cobrimento (ou suporte), é o número *vértice-cobrimento* ou número *suporte*, $\tau(G)$ de G.

Um vértice v de V(G), é *saturado* (o termo saturado, também será usado quando nos refeirmos, fluxos na rede, espero que não haverá confusão) ou *coberto* pelo matching M se, algum elemento de M, incide em v, caso contrário, diz-se que v é *não-saturado* ou *não-coberto*. Um subconjunto $X \subseteq V(G)$ se dize interceptar ou esta contido no matching M (no grafo $G = (V(G), E(G))$) se cada vértice de X é extremo de um (único) elemento de M, deve haver vértices que não estão em X que são extremos das arestas de M. Neste caso usa-se a notação $X \prec M$, vide a seção de Matroide Transversal.

Um matching M em G é *máximo* se, não existe outro matching N em G tal que, $|N| > |M|$.

Um matching N em G é *maximal*, se não existe outro matching P em G tal que contenha propriamente a N, i.é, $P \supset N$. Em particular, N é maximal do matching Q se, e somente se, não existe outro matching S de G tal que $Q \subseteq S \subseteq N$.

O número matching, $\nu(G)$, de G é o número de elementos de qualquer matching máximo em G ou brevemente: $\nu(G) = \max\{|M|/M \text{ matching em } G\}$.

Um fator M no grafo G é *matching perfeito* ou *1-fator* G se, se todas as arestas de $E(M)$ são independentes. Em outras palavras, um matching M em G, é chamado *perfeito* ou *1-fator* de G se, todos os vértices de G são cobertos por M. Equivalentemente o matching M é perfeito em G se, e somente se, a cardinalidade de M é igual a metade do número de vértices de G, $|M| = \frac{1}{2}|V(G)|$.

Desde que, existe uma função $f : V(G) \to N$, tal que f designa a cada vértice v de G um inteiro $f(v)$. Então um $f-fator$ é qualquer subgrafo (ou fator) F de G tal que f é dado por $f(v) = d_F(v)$. Por exemplo se, f é uma função constante, i.é., $f(v) = k = d_F(v)$, neste caso ao invés de $f-$fator, di-

zemos F é $k-fator$ de G. Ainda para $k=1$ F é um matching (ou perfeito) de G.

Alguns resultados sobre o matching ortogonal e transversal, foi obtido por Anstee-Caccette [Orthogonal matchings, *Discrete Math.* 179 (1998) 37-47]. Se $\mathcal{M}$ é um conjunto de todos os k-fatores (i.é., de subgrafos geradores $k-$regulares) de $G=(V(G),E(G))$, ou seja $\mathcal{M}=\{F_i\ /F_i;\ i=\overline{1,m}$, é um $k-$fator de $G\}$, (onde $|V(G)|>mk$ e G é simples). Se exite um matching P de m arestas, tal que cada aresta e_i exatamente pertence a F_i, então P é dito um matching *ortogonal.* Para o grafo bipartido Km,n, o matching cuja aresta é obtido a partir de cada fator, corresponde a um transversal.

Um grafo $G=(V,E)$ é *crítical*, se para qualquer vértice $v\in V(G)$, o subgrafo $G-\{v\}$ é fatorizável. Existêm outras definições alternativas, como matching *quase-perfeito* (ou *matching perfeito módulo* v no grafo G), é um matching que satura a cada vértice de G, menos um (resp. o) vértice (resp. v). Para outras extensões vide [1].

Exemplo 3.1.1 *Cada matching perfeito de G, é um matching máximo em G. É claro que nem todo matching máximo de um grafo é um 1-fator (ou matching perfeito).*

3.2 *Relação "max A= min B"*

O objetivo desta seção é rever alguns resultados da teoria de dualidade e alguns exemplos. Para mais informações em especial, visando dígrafos e a programção matemática, vide [19], [38] e [56].

A literatura da otimização combinatorial e os assuntos relacionados, tal como a teoria dos grafos, está cheio de numerosos exemplos ilustrando os teoremas da dualidade e de suas aplicações, em outras palavras muitos problemas de otimização combinatorial são caracterizados pela relação max-min (ou min-max), no sentido que o valor máximo de um problema de otimização combinatorial é igual ao valor mínimo de algum outro problema de otimização. Entre os exemplos clássicos relevantes, podemos citar: Na teoria dos matchings, é o teorema de König [49], que aborda uma condição

necessária e suficiente para os matchings em grafos bipartidos. Na teoria de conexidade, é o teorema de Menger [59], talvez seja o mais importante no meio da teoria dos grafos; o qual expressa que o mínimo de alguma coisa é igual ao máximo de outro. Na teoria de fluxos em redes, é o teorema de fluxo-máximo e corte mínimo, de Ford e Fukerson [33]. Esta teoria de fluxos na rede tem um estreito relacionamento com os grafos bipartidos. E finalmente na teoria de matróides é devido a Rado [80].

Consideremos o grafo (ou dígrafo) $G = (V, E)$, e sejam os subconjuntos X e Y vértices de G.

Por um $XY-$caminho, entendemos um caminho (dirigido) de $x \in X$ para algum $y \in Y$, mas não contendo nenhum outro vértice de X ou de Y (se $u \in X \cap Y$, então o mesmo vértice u, é um $XY-$caminho).

Sejam X, Y e S os subconjuntos de vértices de $V(G)$, então dizemos que S *separa* X de Y, o simplesmente que S, é um XY*-separador*, se cada $XY-$caminho intercepta o conjunto S, ou seja removido S a partir de G, os conjuntos X e Y estão em diferentes componentes de $G - S$.

Dizemos que X eY são *finitamente separavel* em G, se X e Y, são separados por algum conjunto finito de vértices de G.

Na literatura o teorema de Menger, tem várias variantes e generalizações para algumas classes de grafos e para matróides, por exemplo vide as referências [32], [79], [86], [101] e [121]. E a versão considerada é como segue:

Teorema 3.2.1 *(Teorema de Menger) Consideremos um inteiro positivo k, e sejam X e Y dois subconjuntos de vértices (não vazios) do grafo (ou dígrafo) G. Então existêm k $XY-$caminhos disjuntos (pelo vértice) em G se, e somente se, o $XY-$separador contém pelo menos k vértices.*

Além da demonstração dado pelo autor, existe uma outra prova dado por Pym [79]. □

Whitney [121], obteve a seguinte caracterização para os grafos n-conexos via o teorema de Menger.

Teorema 3.2.2 *Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| \geq n + 1$ vértices. Então G é n-conexo se, e somente se, para todo subconjunto de vértices $\Omega \subseteq V(G)$ com a cardinalidade $|\Omega| \leq n - 1$, o grafo $G - \Omega$ é conexo.*

Para uma demonstração usando o teorema de fluxo-máximo e corte-mínimo, é apresentada na seção Algumas Aplicações, no capítulo das redes.

Assumamos que H seja um matching perfeito (ou 1-fator) de G. Para $S \subseteq V(G)$, F seja uma componente do grafo $G - S$, então para as arestas de H contidas em F, a componente F contém en um número par de vértices de H, e outros vértices de F são os extremos das arestas de H que ligam um vértice de F com um vértice de S. Em particular, para cada componente ímpar F de $G - S$, existe uma aresta de H, ligando um vértice de F com um vértice de S. Desde que as arestas de H, são não adjacentes dois a dois, segue que o grafo $G - S$, tem no máximo $|S|$ componentes ímpares, uma componente para cada vértice de S., e reciprocamente.

Este excelente resultado que trata a rigor da existência de matching perfeito ou 1-fator em grafos, é devido a Tutte [98].

Teorema 3.2.3 *(Teorema de Tutte) O grafo $G = (V(G), E(G))$ possui matching perfeito (ou 1-fator) se, e somente se, para cada subconjunto $S \subseteq V(G)$ se verifica $w_1(G-S) \leq |S|$, onde $w_1(G-S)$ denota o número de componentes conexas de $G - S$ e cada das quais tem um número ímpar de vértices.*

Além da demonstração original dada pelo autor, exitem outras demonstrações, por exemplo vide [4] e [vol. I, p.189 [36]].

Corolário 3.2.1 *Um grafo $G = (V(G), E(G))$ contém um subconjunto de arestas independentes cobrindo todos os vértices menos e no máximo d vértices se, e somente se, $w_1(G - S) \leq |S| + d$, para cada subconjunto $S \subseteq V(G)$.*

O teorema de Tutte, deu origem ao um novo conceito denominado *barreira*, mais formalmente, um subconjunto $B \subset V(G)$, é chamado *barreira* se verifica $w_1(G - B) = |B|$.

Exemplo 3.2.1 *Se o grafo G for bipartido, então ambas classess de cores de G são conjuntos barreiras de G. Para mais informações, vide referência [Cap. 3 [55]].*

O seguinte resultado é conhecido como uma generalização do teorema de Tutte, dado por Berge.

Teorema 3.2.4 *(Berge[8] e Tutte[98]) Se $G = (V(G), E(G))$ é um grafo com $|V(G)| = n$ e M um matching máximo de G, $|M| = \frac{n-d}{2}$ onde $d = max\{w_1(G-S) - |S| \ / S \subset V(G)\}$.*

3.3 *Grafos Bipartidos ou Bígrafos*

Um grafo $G = (V, E)$ bipartido é definido como um grafo, cujo conjunto de vértices V é particionado em duas classes disjuntas e não vazias A e B, tal que dois vértices não adjacentes pertencem à mesma classe. Uma partição (A, B) de V, é denominda uma *bipartição* do grafo bipartido se cada aresta de G tem exatamente um extremo em A e outro em B, portanto $\kappa(G) \leq 2$, e G é frequêntemente referido como o grafo *bicolorável* ou *bígrafo* .

Usaremos a notação $G = (A \cup B, E)$, para indicar um grafo bipartido (com a bipartição (A, B)) com conjunto de vértices $A \cup B$ e o conjunto de arestas $E \equiv E(G)$. Nas seções seguintes, entenderemos por grafos bipartidos, como aqueles bígrafos sem vértices isolados, salvo alguma uma especificação.

Algumas vezes escreveremos $v \in G$ para indicar $v \in A \cup B$.

Um grafo bipartido é *simples* se, não possui arestas paralelas nem laços.

O grafo bipartido complemento $\bar{G}$, de um grafo bipartido simples $G = (A \cup B, E)$, é o grafo $\bar{G} = (A \cup B, \{\{x, y\}/\{x, y\} \notin E, \forall x \in A \text{ e } y \in B\})$.

Um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, é completo se, G é simples e cada vértice de A é ligado a cada vértice de B exatamente por uma aresta, e denota-se por $k_{n,m}$, onde $|A| = n$ e $|B| = m$, ou seja que, escrevemos $k_{n,m}$, um grafo bipartido completo com classes de cores de tamanhos m e n.

Teorema 3.3.1 *Um grafo G é bipartido se, e somente se, G não contém circuito ímpar.*

Para uma demonstração, vide [Cap. 2, [15]] □.

Para uma outra caracterização dos grafos bipartidos vía os grafos *quasi-dobradiços*, vide referência [20].

A partir do teorema acima, a condição de que G não contém ciclos ímpares, é equivalente à capacidade de particionar o conjunto de vértices de G em duas partes de modo que cada aresta de G intercepte examente em um único vértice a cada parte, de onde surgiu o teorema de König (vide na seguinte seção).

Uma outra alternativa da definição do grafo bipartido é, a identificação com uma relação binária. Consideremos sem pérda da generalidade, dois conjuntos finitos e disjuntos A e B e R uma relação binária entre os conjuntos A em B, (chamados o *dominio* e o *contradominio*, respectivamente), ou seja que, R é um subconjunto de $A \times B$ e escrevemos $R \subseteq A \times B$.

Como A e B são finitos, podemos representar a relação R por meio de setas (diagrama), fazendo-se a seguinte convenção; um elemento x de A é ligado por uma seta com o elemento y de B se, e somente se, xRy (ou $(x, y) \in R$). Consequêntemente, à relação binária R, podemos associar um grafo bipartido (orientado), cujo conjunto de vértices são os elementos de $A \cup B$, e cujas arestas (orientadas) são os pares ordenados que pertencem à relação, i.é., $\{x, y\}$ é uma aresta (ou arco (x, y)) determinadas pelos vértices x e y se, e somente se, x está em relação com y, ou seja, $(x, y) \in R$ e portanto $G = (A \cup B, R)$.

Recíprocamente, se $G = (A \cup B, E)$ é um grafo bipartido, então basta definir a relação binária R como o conjunto E ,isto é, $\{x, y\} \in E$ se, e somente se, xRy. Por conseguinte temos:

Lema 3.3.1 *A cada grafo bipartido (sem vértices isolados) é associado uma relação binária, e reciprocamente.*

Para qualquer vértice $x \in A \cup B$, o conjunto vizinhança (aberta) de x, podemos denotar por $\Gamma(x)$ (ao invés de $N(x)$), então escrevemos $\Gamma(x) = \{y \in A \cup B / (x, y) \in E\}$, $\Gamma^{-1}(x) = \{y \in A \cup B / (y, x) \in E\}$, e para qualquer $X \subseteq A \cup B$ escrevemos
$\Gamma(X) = \bigcup_{u \in X} \Gamma(u)$ e $\Gamma^{-1}(X) = \bigcup_{u \in X} \Gamma^{-1}(u)$.

E para qualquer subconjunto $S \subseteq A \cup B$, a vizinhança aberta de S é definido como o conjunto $\Gamma(S) = \bigcup_{x \in S} \Gamma(x)$. Em particular, se $S \subseteq A$, então $\Gamma(S)$, é o subconjunto de vértices de B, os quais estão ligados pelo menos por uma seta (aresta) a S. E $\Gamma[x] = \Gamma(x) \cup \{x\}$ e $\Gamma[S] = \Gamma(S) \cup S$, definem a vinhança fechada do vértice x e do conjunto S, respectivamente.

Lema 3.3.2 *Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$. Para todo os subconjuntos $X, Y \subseteq A$ se verifica que:*

a) Se $X \subseteq Y$ então $\Gamma(X) \subseteq \Gamma(Y)$,
b) $\Gamma(X \cup Y) = \Gamma(X) \cup \Gamma(Y)$, e
c) $\Gamma(X \cap Y) \subseteq \Gamma(X) \cap \Gamma(Y)$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Dem.

a) Desde que, $X \subseteq Y$ então $Y = Y \cup X$ e porconseguinte $\Gamma(Y) = \Gamma(X \cup Y) = \bigcup_{x \in X \cup Y} \Gamma(x) = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x) \cup \bigcup_{t \in Y} \Gamma(t) \supseteq \bigcup_{x \in X} \Gamma(x) = \Gamma(X)$.

b) usando o itém a) temos

$$\Gamma(X) \cup \Gamma(Y) \subseteq \Gamma(X \cup Y). \tag{3.1}$$

Por outro lado,

$$\Gamma(X) \cup \Gamma(Y) = \bigcup_{x \in X} \cup \bigcup_{t \in Y} \supseteq \bigcup_{s \in X \cup Y} \Gamma(s) \tag{3.2}$$

Portanto, de 3.1) e 3.2) obtemos o resultado desejado.

c) Como $X \cap Y \subseteq X$ (resp Y), usando a) obtemos $\Gamma(X \cap Y) \subseteq \Gamma(X)$ e $\Gamma(X \cap Y) \subseteq \Gamma(Y)$, de onde concluímos que $\Gamma(X \cap Y) \subseteq \Gamma(X) \cap \Gamma(Y)$ e o lema esta demonstrado □.

3.3.1 Matchings em Grafos Bipartidos

Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido associado à relação $R \equiv E$, se podemos encontrar um subconjunto ou uma subrelação $S \subseteq R$, tal que S é um grafo de uma função biunívoca de A em B, dizemos que R possui um matching. Em outras palavras, um *matching* em um grafo bipartido $G = (V(G), E(G))$ é uma escolha de arestas de $E(G)$ tal que defina uma correspondência biunívoca entre os vértices de um subconjunto X de A com um subconjunto Y de B, ou seja que as arestas escolhidas emparelham os conjuntos X e Y no grafo bipartido G.
Se existe um matching M em G tal que sature a cada elemento de A (e talvez não necessariamente B), então dize-se que M é um *matching completo* (ou simplesmente) de A em B.

Um co-ciclo de $G = (A \cup B, E)$ é um subconjunto de vértices $S \subseteq A \cup B$ de G, tal que S intercepta a cada aresta de G.

Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ e sejam $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, e denota $Q = (X, Y)$ o número de arestas incidentes em X e Y.

Lema 3.3.3 *O grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ tem $h \equiv h(G)$ o número de matchings disjuntos (cada um de tamanho t) se, e somente se, $Q(X,Y) \geq h(t - |A - X| - |B - Y|)$ para todo $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.*

Para uma demonstração vide [Cap. 2 [55]]. Também vide [Cap. 2; 2.4, [125]] □.

Teorema min-max de König [49]

O teorema min-max de König para os grafo bipartidos, se refere que o número mínimo de vértices, tal que cada aresta é incidente com pelo menos com um destes vértices, é finito, e este número é igual ao número máximo de arestas, as quais não são adjacentes duas a duas, em outras palavras:

Teorema 3.3.2 *Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido. Então o número máximo de arestas independentes $\nu(G)$ de G é igual ao número mínimo de vértice-cobrimento $\tau(G)$ (ou tamanho minimal de um co-ciclo), i.é., $\nu(G) = \tau(G)$.*

Para uma demonstração vide [85] e [Cap. 5, [83]] □.

Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$. Um *conjunto separador* S de G, é um conjunto de vértices de G tal que, para cada aresta $e = \{x, y\} \in E$, tem-se $x \in S$ ou $y \in S$.

Se $S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$ é um separador do grafo bipartido G, então não há arestas de G que ligem (ou unem) um vértice de $A - A \cap S$ com um vértice de $B - B \cap S$. Usando o térmo separador, o teorema de König tem a seguinte reformulação.

Teorema 3.3.3 *A cardinalidade máxima de um matching do grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, é igual à cardinalidade mínima de um conjunto separador de G.*

Seja o bígrafo $G = (A \cup B, E)$. Para todo $X \subseteq A$, o conjunto $\Gamma(X) \cup (A - X)$ é um conjunto separador de G. Análogamente, para qualquer

$Y \subseteq B$, $\Gamma(Y) \cup (B - Y)$ é um conjunto separador de G. Agora, se Z é conjunto separador de G com $Z_1 = Z \cap A$ e $Z_2 = Z \cap B$. Para $X = A - Z_1$, ocorre que $\Gamma(X) \subseteq Z_2$ e por conseguinte $\Gamma(X) \cup (A - X)$ é um conjunto separador de G contido em Z, em vista desta observação, o teorema acima tem o seguinte enunciado alternativo:
"Se $\mathcal{H}$ denota a família de matchings de $G = (A \cup B, E)$, então $\max \{|M|/M \in \mathcal{H}\} = \min \{|\Gamma(X)| - |A - X| \ / X \subseteq A\}$."

Além de ter influênciado com ênfasis na origem do matróide transversal (veja mais adiante), provavelmente a versão mais usada de todos os tratamentos alternativos e equivalentes, ao teorema de min-max de König, é devido a Philip Hall [37]. Este resultado dado por Hall (abaixo), pode-se interpretar como um caso em que, m moças conhecem a $m - 1$ rapazes e a partir deste conjunto de rapazes e mças é impossivel arranjar casamentos, sem alguem ficar solitário, o qual é equivalente dizer, se existe um matching completo de A em B, então para cada $X \subseteq A$, existe pelo menos $|X|$ vértices de B adjacentes a um vértice em X, isto é, $\Gamma(X) \geq |X|$, e ainda podemos significar que X está contido no conjunto de vértices de algum matching N (de X em $\Gamma(X)$, e também vale a recíproca e formalmente é como segue.

Teorema 3.3.4 *(Teorema de casamento de Hall). Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido. Então G possui um matching de A em B se, e somente se, $\Gamma(X) \geq |X|$, para cada subconjunto $X \subseteq A$.*

Existem três demonstrações, duas delas usam o teorema de Menger e para uma terceira vide no capítulo das redes, seção Algumas Aplicações.

Uma forma equivalente a este resultado foi dado por König-Egerváry [85], antes de enunciarmos, lembremos que um co-ciclo em um grafo bipartido, é um subconjunto de vértices tal que intercepta a cada aresta do bígrafo.

Teorema 3.3.5 *(Teorema de König-Egerváry). Em um grafo bipartido G, a cardinalidade mínima de um co-ciclo de G é igual ao tamanho de um conjunto de arestas independentes (i. é., a cardinalidade de um matching máximo) de G.*

Para uma demonstração via o teorema de Menger, vide referência [85] □.

Muitas vezes este resultado, é referido como o teorema de casamento, contudo na maioria da literatura, o teorema de Hall é de casamento, para

mais detalhes vide [85] e [112].

3.3.2 Deficiência de um Grafo Bipartido

A noção de deficiência (vértice) para os grafos bipartidos foi introduzido por Ore [66]. Vide também para outros detalhes [51].

Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ e X um subconjunto de A. Relembramos que a vizinhança (aberta) de X denotado por $\Gamma(X)$ é o conjunto de vértices de B que são adjacentes aos vértices de X, i.é.,: $\Gamma(X) = \{y \in B/(x,y) \in E, \text{ para algum } x \in X\}$.

A deficiência do conjunto X no grafo G, denotado por $\text{def}_G(X)$ ou $\text{def}(X)$, e definido como $\text{def}_G(X) = \text{def}(X) = |X| - |\Gamma(X)|$.

Observamos que a deficiência de um conjunto pode ser um inteiro positivo, zero ou um inteiro negativo, i. é., $def(X) \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} 0$.

A deficiência do grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ denotado por $\text{def}(G)$ é dado por $\text{def}(G) \equiv \text{def}(A \bigcup B, E) = \max \{|X| - |\Gamma(X)|/X \subseteq A\}$.

Desde que, o conjunto vazio $\emptyset$ é um subconjunto de A e $|\emptyset| = |\Gamma(\emptyset)| = 0$, temos $\text{def}(G) \geq 0$.

A deficiência $\text{def}(G)$ de G significa, o número de vértices não saturados por um matching máximo em G, ou seja, a $\text{def}(G)$ denota o número mínimo de vértices que removidos, o grafo resultante tem deficiência não positiva, em outras palavras, o número máximo de arestas independentes que G contêm é igual à $\frac{1}{2}(|A \cup B|\text{-def}(G))$.

O teorema de König em termos da deficiência é devido a Ore [66] e é como segue.

Teorema 3.3.6 *Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido. O número máximo de vértices de A que pode ser emparelhado em algum subconjunto de B, é igual à $|A| - def(G)$.*

Para uma demonstração usando o teorema de fluxo-máximo e corte-mínimo, vide [Cap. 7, [9]].

A partir da definição de deficiência de um grafo G ou seja a expressão $\max\{|X| - |\Gamma(X)|/X \subseteq A\}$, significa que existe um valor máximo entre as deficiências dos subconjuntos de A e cujo conjunto associado é denominado *crítico ou apertado* (o termo apertado, com é usado com frequência na referência [55], enquanto o termo crítico é usado por Ore [66]), o qual é um subconjunto S de A tal que def(S) =def(G). Contudo usaremos o ambos termos indistintamente se, não houver confusão.

Se X_o é um conjunto crítico, tal que $X_o \subseteq X$, para todo conjunto crítico X de A, então X_o é *crítico minimal* de G, e analogamente se existe um conjunto crítico Y_o tal que contenha a todos os subconjuntos críticos de A, então Y_o é chamado *crítico maximal* de G.

Dizemos que um subconjunto S de A é um conjunto *sem deficiência,* se todo subconjunto de S não tem deficiência positiva, isto é, $\text{def}_G(X) \leq 0$, qualquer que seja $X \subseteq S$. Em particular, o conjunto A é sem deficiência se, e somente se, def(G) = 0.

O oposto do termo deficiência, é o *excesso.* O excesso de um subconjunto X de A no grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, denotado por $\sigma(X) \equiv \sigma_G(X)$ e definido como $\sigma(X) \equiv \sigma_G(X) = |\Gamma(X)| - |X| = -\text{def}(G)$. E o *excesso* do grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, é dado por $\sigma(G)$ =min $\{\sigma(X)/X \subseteq A$ e $X \neq \emptyset\}$, e consequentemente def(G) =max $\{0, -\sigma(G)\}$. Para mais detalhes, vide [Cap. 3 [55]].

Lema 3.3.4 *Para dois subconjuntos X e Y arbitrários de A (no grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$) se verifica:*

a) $def(X \cup Y) + def(X \cap Y) \geq def(X) + def(Y)$,*e*

b) $\sigma(X \cup Y) + \sigma(X \cap Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y)$.

Uma demonstração segue pelo lema 3.3.4 e conjuntamente do fato que $|X \bigcup Y| = |X| + |Y| - |X \bigcap Y|$ □.

Lema 3.3.5 *Se F é uma família não vazia de subconjuntos críticos de G, então $X_o = \bigcap_{X \in F} X$ e $Y_o = \bigcup_{X \in F} X$ são também os críticos de G.*

Dem.

Em vista do conjunto A ser finito, podemos supor $|F|$=n, e demonstremos por indução sobre n.

Para dois conjuntos críticos X e Y, usando o lema 3.2.4 obtemos a desigualdade

$$cdef(X \cup Y) + def(X \cap Y) \geq 2def(G) \tag{3.3}$$

Desde que, def$(X \cup Y) \leq def(G)$ e def$(X \cap Y) \leq def(G)$, também temos def$(X \cup Y) \leq def(Y)$ $(def(X))$ e def$(X \cap Y) \leq def(Y)$ $(def(X))$, por conseguinte obtemos a seguinte desigualdade

$$cdef(X \cup Y) + def(X \cap Y) \leq 2def(G) \tag{3.4}$$

E a partir de 3.3) e 3.4) obtemos a equação

$$def(X \cup Y) + def(X \cap Y) = 2def(G)$$

De onde resulta:

$$\begin{aligned} \text{def}(X \cap Y) &= 2def(G) - def(X \cup Y) \\ &\geq 2def(G) - def(Y) \\ &= def(Y). \end{aligned}$$

Analogamente obtemos, def$(X \cup Y) \geq def(Y)$ e conjuntamente com as desigualdades 3.3) e 3.4) concluímos que os conjuntos $X \cup Y$ e $X \cap Y$ são também críticos, isto é, $def(X \cup Y) = def(G) = def(X \cap Y)$ e o lema esta demonstrado □.

Agora suponhamos que o lema seja verdadeiro para $n-1$ conjuntos críticos e provemos para n conjuntos críticos, $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$.

Pela hipótese de indução, os conjuntos

$$A = \bigcap_{i=1}^{n-1} X_i \text{ e } B = \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i$$

são críticos.

Por outro lado, os conjuntos A , B e X_n são críticos (já demonstrado para o caso de dois conjuntos críticos) de onde os conjuntos

$$X_o = A \cap X_n \text{ e } Y_o = B \cap X_n,$$

são também críticos o qual completa a demonstração do lema □.

3.4 *Deficiência de um Grafo Arbitrário*

Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$ e seja M um matching máximo em G. Se M for perfeito, então pela definição segue que cada vértice de G é coberto exatamente por um elemento de M. Nem sempre um matching máximo M será perfeito, o qual implica que haverá vértices de G, não saturados por matching M de G, ou seja que M tem o defeito de não cobrir alguns vértices de G. Formalmente dizemos que um matching N em G tem *defeito* d, se existem d vértices de G que não são cobertos por nenhum elemento de N.

O conceito da deficiência para os grafos bipartidos de Ore, tem tido extendido para os grafos arbitrários, o que segue a continuação.

A *deficiência* , $\delta(G)$, de um grafo $G = (V(G), E(G))$, é definido como sendo o número mínimo de vértices de G, tal que removidos a partir de G, o grafo resultante, é fatorizável, ou seja que, o número máximo de arestas independentes de G, é $\frac{1}{2}(|V(G)| - \delta(G))$.

Lema 3.4.1 *Seja $G = (V(G), E(G))$ e X um subconjunto arbitrário de $V(G)$. Então $\delta(G - X) \leq \delta(G) + |X|$.*

Se existe algum subconjunto X de $V(G)$, tal que verifica a igualdade do lema, i.é., $\delta(G - X) = \delta(G) + |X|$, então o conjunto X é denominado *extremo* em G. Para mais detalhes, vide referêrncia [52].

Ainda a deficiência de G, esta dada explícitamente pela seguinte expressão $\text{def}(G) = |V(G)| - 2\nu(G) = \Sigma_{x \in V(G)}(\Delta(G) - d_G(x))$.

Uma fórmula para $\delta(G)$, (análogo à fórmula de Ore) foi obtido por Berge [8], como uma generalização natural do teorema de Tutte.

Teorema 3.4.1 *(Fórmula de Tutte-Berge). Para um grafo $G = (V(G), E(G))$, a deficiência de G é dado por $\delta(G) = max\{w_o(G - X) - |X| / X \subseteq V(G)\}$.*

Para uma demonstração, vide [8], [64] e [Cap. 3, [55]] □.

Corolário 3.4.1 *Se G é um grafo plano com $def(G) \geq 3$ e $|V(G)| \geq 10$. Então $\nu(G) \geq \frac{1}{3}(|V(G)| + 2)$.*

Sobre o matching relacionado con deficiência em grafos arbitrários, foi desenvolvido independentemente por Gallai e Edmonds. Para mais informações, vide referências [52] e [Cap. 3 [55]].

Se D_G, denota o conjunto de aqueles vértices de G, que não são cobertos

por cada matching; A_G o conjunto de vértices de $V - D_G$, que são adjacentes pelo menos um vértice de D_G, em G, e o conjunto $C_G = V(G) - A_G - D_G \equiv V(G) - A_G \cup D_G$, então temos:

Teorema 3.4.2 *(Gallai-Edmonds) Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo arbitrário, então*

a) As componentes de $G[C_G]$ são fatorizaveis, as componentes de $G[D_G]$ são críticos;

b) o número de componentes de $G[D_G]$ é $\delta(G) + |A_G|$, e

c) se M é qualquer matching máximo de G, então M contém um matching quase-perfeito de cada componente de D_G, um matching perfeito de cada componente de C_G liga todos os pontos de A_G com os pontos que pertencem a distintas componentes de D_G.

d) $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| - W(G[D_G]) + |A_G|$.

Para uma demonstração, vide [29] e [Cap. 3, [55]] □.

3.5 *Grafos n-extendíveis*

Enquanto o problema da existência de matching perfeito em grafos foi saneado por Tutte, por outro lado surge o problema de determinar o maior limitante inferior sobre o número de diferentes matchings perfeitos que um grafo pode conter. Como uma causa da busca de uma solução, para este problema, surgiu uma nova classe de grafos chamados grafos *n-extendíveis.*

O conceito de n-extendibilidade em grafos de ordem p, foi introduzido por Plummer [76], pela década de 80, em seu artigo *On n-extendable graphs.*

Um grafo arbitrário G, é *n-extendível*, se:

1.- G é conexo,

2.- G possui um matching perfeito, e

3.- cada matching de cardinalidade n está contido em um matching perfeito de G.

Um grafo fatorizável é chamado *0-extendível.*

Um grafo conexo G, é chamado *matching-coberto* ou *1-extendível,* se cada aresta de G está contido em um matching perfeito.

O maior inteiro positivo n para o qual G é n-extendível, é chamado o número de *extendibilidade, ext*(G), de G.

Os grafos n-extendíveis, tem relacionamento com os grafos hamiltonianos e os grafos planares por exemplo, vide referências [58], [77], [78] e [90].

3.6 *Sistema de subconjuntos e Transversais*

Para o conjunto finito $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \equiv \{x_i \ / i \in L\}$ seja $\mathcal{A}(I) = (A_1, \ldots, A_m) \equiv (A_j / j \in I)$ uma coleção de subconjuntos não vazios A_j (não necessariamente são distintos) de S indexados por I tal que $S = \bigcup_{i \in I} A_i = \mathcal{A}(I)$.

Em particular para $J \subseteq I$, $\mathcal{A}(J) = \bigcup_{j \in J} A_j = X$, é um subconjunto de S.

Chamamos um *sistema* (ou simplesmente uma *família*) ao par ordenado $(S; \mathcal{A}(I))$ ou $\mathcal{A}(I))$.

O conjunto $T = \{x_1, \ldots, x_m\} \equiv \{x_i \ / i \in U \subseteq L\}$ de elementos de S e denominado um *sistema de distintos representativos* ou uma *transversal* de $\mathcal{A}(I)$ se:

$x_i \in A_i$ para $i = \overline{1, m}$, e

$x_i \neq x_s$ para $i, s \in I$ com $i \neq s$.

Em outras palavras, T é uma transversal de $\mathcal{A}(I)$ se, existe uma bijeção $\varphi : T \to I$ tal que $x \in A_{\varphi(x)}$ para $x \in T$.

Um subconjunto $P = \{t_j \ / j = \overline{1, k}\} \subseteq S$ é uma transversal *parcial* de $\mathcal{A}(I)$ se existe uma subfamília $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$ de $\mathcal{A}(I)$ tal que $t_j \in A_{ij}$ $(1 \leq j \leq k)$. Dizemos que t_j representa A_{ij} em P.

Portanto uma transversal parcial de $\mathcal{A}(I)$ é uma transversal de uma subfamília $\mathcal{A}(J) = (A_j \ / j \in J)$, para algum $J \subseteq I$.

Uma transversal parcial T é *máximal* se, T não está contido propriamente em uma outra transversal parcial.

A família de transversais parciais máximais constitui as bases de um matróide, denotado por $T(S, \mathcal{A})$, e chamado *matróide transversal*, e dizemos que o sistema $\mathcal{A}$ é uma *representação* de $T(S, \mathcal{A})$. Este resultado foi observado por Edmonds e Fulkerson [31], vide seção Matróides Bígrafos: Matróide Transversal.

Grafos Bipartidos e Sistemas

Desde que qualquer família $\mathcal{A}(I)$ de subconjuntos de um conjunto finito dado S (indexados pelo conjunto de índices I), da origem a uma relação binária $R \subseteq S \times I$, definida por $(s,i) \in R$ se, e somente se, $s \in A_i$.

Pelo lema 3.3.1, o grafo bipartido induzido pela relação R é $G = (S \cup I, R)$ o qual é associado a $\mathcal{A}(I)$ e denota-se por $G_{\mathcal{A}(I)} = (S \cup \mathcal{A}(I), R)$.

Reciprocamente, para o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ (simples e sem vértices isolados) exite um sistema associado.

Basta tomarmos como o conjunto de índices $B = \{y_1, \ldots, y_m\} \equiv \{1, 2, \ldots, m\} = I$. Desde que, G não tem vértices isolados, então para cada $y_j \in B$ (ou $j \in I$) haverá algum elemento $x_i \in A$ tal que existe a aresta $\{x_i, A_j\}$ de G, onde A_j é a vizinhança de x_i, em outras palavras, $\Gamma(y_j) = \{x \in A / \{x, y_j\} \in E\}$, é um subconjunto não vazio de A. Sendo I é finito, logo os conjuntos $A_j = \Gamma(j)$, para $y_j \in B$ com $j \in I$, forma o sistema $(\Gamma(j)/j \in I)$. Em consequência temos o seguinte lema.

Lema 3.6.1 *A cada grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ corresponde um sistema $\mathcal{A}(I)$, e recíprocamente, e pelo abuso de notação podemos escrever $G \equiv \mathcal{A}(I)$.*

Em virtude do lema acima, podemos transportar todos os conceitos introduzidos para os grafos bipartidos para o sistema, e recíprocamente.

Lema 3.6.2 *Um subconjunto de uma transversal parcial, é também uma transversal parcial.*

Pela convenção, o conjunto vazio $\emptyset$ é uma transversal (ou parcial) de qualquer sistema.

Exemplo 3.6.1 *Para o conjunto $S = \{a, b, c, d, f, g\}$, seja o sistema $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ onde $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{a, b, d\}$, $A_3 = \{a, b, c, f\}$, $A_4 = \{a, b, c, d, f\}$ e $A_5 = \{a, b, c, d, g\}$.*

Queremos escolher cinco elementos distintos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 a partir do sistema $\mathcal{A}$, tal que os elementos escolhidos sejam distintos, por exemplo, podemos tomar $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = f$, $x_4 = c$, $x_5 = d$. Portanto o conjunto $\{a, b, c, d, f\}$ é uma transveral (de cardinalidade 5) para o sistema $\mathcal{A}$.

Agora, para o sistema $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, com $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{a, b\}$, $A_3 = \{a, b\}$, $A_4 = \{c, d, f, g\}$, e $A_5 = \{c, d, f, g\}$. É impossivel

escolhermos cinco elementos distintos do sistema, em vista de que não podemos tomar tres elementos distintos a partir de A_1, A_2, A_3 a causa de que cada um destes conjuntos contém apenas dois elementos entre a e b. Portanto o sistema não tem transversal, mas sim possui transversais parciais, por exemplo $\{a\}$, também o conjunto $\{a, c\}$ é outro tantos mais de transversal parciais. Por conseguinte uma transversal parcial é uma combinação simples. Se n for o número de objetos de uma coleção e escolhermos menor ou igual a k objetos a partir destes n elementos ($k \leq n$), então

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{k=0}^{n} n \\ k \end{pmatrix},$$

será o número de transversais parciais que podemos de tamanho (até) k?. Como sabermos, dadas k−combinações, ($0 \leq k$ e sendo fixado k), qual é a transversal parcial que associa a cada k−combinação ou seja que, em que condições uma k−combinação é uma tranversal?. Seja como for o caso, pelo momento deixaremos de lado estas questões.

De uma maneira análoga, se define o conjunto *transversal* de um grafo arbitrário $G = (V(G), E(G))$ como sendo um subconjunto $T \subseteq V(G)$ tal que cada aresta de G tem pelo um extremo em T. Uma reformulação equivalente do teorema de König, é o seguinte:

Teorema 3.6.1 *Em qualquer grafo bipartido G, o número máximo de arestas em um matching é igual ao número mínimo de vértices de um conjunto transversal de G.*

Uma demonstração segue apartir da definição de conjunto transversal conjuntamente com o teorema de König. □

Consideremos a família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de A, e seja d um inteiro não negativo.

Dizemos que o subconjunto $X \subset A$ é uma transversal parcial (de $\mathcal{A}$) com *defeito d*, se existe um subconjunto índice $K \subseteq I$ verificando $|I - K| = d$ e tal que X é uma transversal da subfamília $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = (A_j / j \in K)$ de $\mathcal{A}$. Em outras palavras, X é uma transversal parcial de $\mathcal{A}$ com defeito d se, X é um representativo distinto de todos os membros de $\mathcal{A}$ menos dos d membros da mesma família.

Liu-Zhou [50], introduziram a noção da transversal *forte*, ou seja o conjunto $T = \{x_1, \ldots, x_m\}$, é chamado um *sistema forte de distintos representativos* para $(S, \mathcal{A}(I))$ se:

$$x_i \in A_i - \bigcup_{j \neq i} A_j, i = \overline{1, m}.$$

A partir de uma coleção finita de subconjuntos de um conjunto finito dado S, eles formularam dois problemas interesantes, para maiores detalhes, vide a referência [50].

3.6.1 Teorema de Existência da Transversal

Em 1935, Philip Hall [37], obteve um resultado básico sobre a existência da transversal em um sistema de subconjuntos. Uma motivação, podería considerar-se em n garotas agrupadas em m subconjuntos $A_1, \ldots, A_m$, ou seja que, $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ e sejam $b_1, \ldots, b_m$, m garotos. Se pudermos escolher uma garota de cada A_j, $1 \leq j \leq m$, para formarmos uma primeira coleção de m casais, então cada garota escolhida representa seu grupo junto a $\mathcal{A}$ e estas garotas formam um conjunto chamado *transvsersal* de $\mathcal{A}$. Isto acarreta uma condição necessária para a existencia de representativos distintos, e a condição suficiente, seria que quando, qualquer união dos k conjuntos A_i contenha pelo menos k elementos distintos. Em outras palavras, uma reformulação do teorema de casamento de Hall, expressa a existência de uma transversal.

Teorema 3.6.2 *Seja A um conjunto finito de n elementos e $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_m)$ uma família de subconjuntos não vazios de A. Então $\mathcal{A}$ tem uma transversal se, e somente se, a união de qualquer k membros A_i de $\mathcal{A}$ contém pelo menos k elementos distintos ($1 \leq k \leq m$) i.é., $|\bigcup_{i=1}^{k} A_i| \geq k$.*

Para uma demonstração inductiva, vide [Cap. 2 [62]] □.

O seguinte resultado, é uma ligeira variante do teorema anterior.

Teorema 3.6.3 *A família $\mathcal{S}$ tem uma transversal contendo um subconjunto A se, e somente se,*

i) A família $\mathcal{S}$ contém uma transversal, e

ii) o conjunto A é uma transversal parcial de $\mathcal{S}$.

A técnica de demonstração é similar ao do teorema anterior. □

3.6.2 Teorema de Hall-Ore

Se X é uma transversal parcial do sistema $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$, então o *defeito* de X é definido como o número inteiro $d = m - |X| = |\mathcal{A}| - |X|$.

O seguinte é uma variante da geralização do teorema de casamento, devido a Ore, que da uma condição necessária e suficiente para um sistema possuir uma transversal parcial de certo tamanho.

Teorema 3.6.4 *(Hall-Ore) Seja o sistema $\mathcal{A} = (A_u/u \in U)$ de subconjuntos de S indexados pelo conjunto U, e $1 \leq t \leq |U|$. Então $\mathcal{A}$ possui uma transversal parcial de tamanho t se, e somente se, $|\bigcup_{i \in K} A_i| \geq |K| - d$, $\forall K \subseteq U$ e $d = |\mathcal{A}| - \sqcup$.*

Uma demonstração é via o processo de adjunção, vide referência [Cap. 3 [62]] e [66]. □

Corolário 3.6.1 *Sob as hipótesis do teorema 3.6.4, seja $X \subset A$, então X contém transversal parcial de $\mathcal{A}$ de tamanho t se, e somente se, para cada subconjunto $J \subset \{1, \ldots, m\}$ se verifica $|(\bigcup_{j \in J}) \cap X| \geq |J| - d$.*

Uma demonstração, é uma aplicação direta do teorema acima. □

Capítulo 4

Teoría Das Redes

4.1 *Introdução*

No presente capítulo, apresentamos uma breve introdução sobre à teoria das redes, contudo para mais detelhes vide as referências [28], [33], [35], e [36].

Uma *rede* ou *rede de transporte* ou de *fluxo,* é um dígrafo denotado por $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(D) = (N, A, X, Y, c)$ sem laços, conexo e com dois conjuntos disjuntos chamados *distinguidos* X e Y, cujos elementos são vértices, chamados *fontes* (ou centros de produção ou de abastecimentos) e *destinos* (ou centros de consumos) respectivamente, da rede. Os elementos de N e A, são denominados nós, pontos ou vértices e arcos respectivamente, e qualquer outro vértice ou ponto da rede $\mathcal{N}$ que não pertencem a X nem a Y, são os pontos *intermediários* ou de *tránsito* da rede, e $c \equiv (c_1, c_2, \ldots, c_{|A|})$ é uma função definida sobre A com valores no conjunto de números inteiros (ou reais), Z ($\Re$,). Em outras palavras, a função c_i associa o arco $a = (x, y)$ de A com um número inteiro (ou real), i.é., o valor da componente c_i no arco a de A, é denotado por $c_i(a) \equiv c_a$, o escrevemos simplesmente $c(a)$, chamado a capacidade do arco $a = (x, y)$ e c é a função *capacidade* da rede $\mathcal{N}$, muitas vezes a função c é referida como o vetor-peso da rede. Consideraremos a função capacidade com valores inteiros positivos o qual acarreta a existência de um fluxo ótimo com valor inteiro.

O dígrafo $\mathcal{D}$, é o dígrafo *fundamental* da rede de transporte (ou de fluxo) $\mathcal{N}$.

Neste trabalho, usaremos o termo rede para refirirnos, rede de transporte ou de fluxo.

A capacidade $c(a) \equiv c(x,y)$ (de um arco $a = (x,y)$ de A,) pode ser interpretada como uma representação da quantidade máxima de algum produto (ou material) que possa ser enviado ou transportado de um ponto x para outro nó y, ao longo dos arcos ou atraves dos arcos $a = (x,y)$ da rede, por unidade de tempo e em uma situação estática, por exemplo, óleo, agua, chamadas telefónicas, energia elétrica, quantidade de carros ou pedaços de informações, etc.

Exemplo 4.1.1 *Consideremos o dígrafo sem laços e conexo $\mathcal{D}$, cujos arcos são os oleodutos (ou tubos de conexão), e os pontos são deteminados pelas interseções dos oleodutos (ou tubos), então temos a rede $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(D) = (N, A, X, Y, c)$, sendo $X = \{s\}$ a orígem dos oleodutos (ou da tubulação) e $Y = \{t\}$ é a chegada dos oleodutos (ou final da tubulação), e queremos transportar ou enviar outro tanto possível de oleo (ou qualquer outro material) desde o lugar s até o ponto t através do sistema de oleodutos (ou da tubulação) sujeito algumas restrições relativo a capacidade total de rendimentos dos oleodutos (ou tubos), por exemplo o diámetro dos oleodutos (ou dos tubos), se refiere a área seccional do oleoduto (ou do tubo).*

4.2 *Valor do Fluxo Viável e a Capacidade do Corte*

Consideremos a rede $\mathcal{N} = (N, A, X, Y, c)$ onde os dois subconjuntos distinguidos de vértices são unitários, $X = \{s\}$ e $Y = \{t\}$.

Um *fluxo* (ou fluxo estático) Φ na rede $\mathcal{N}$ é uma função definida em A com valores em N (ou é uma função vetorial com $|A|$ componentes), $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{|A|})$, tal que em cada arco $a = (x,y)$ de A, o valor da componente φ_i é $\varphi_i(a) \equiv \varphi_a$ ou simplesmente $\varphi(a)$, o qual significa o valor do vetor fluxo Φ sobre o arco a, em outras palavras, é a quantidade de produto (ou mercaduría) que circula (ou flui) no arco $a = (x,y)$, sob o fluxo Φ, sendo seu valor, um número inteiro não negativo ou seja que, $\varphi(a) \in N$.

Um fluxo Φ na rede $\mathcal{N}$ é *viável* se, e somente se, suas componentes φ verificam às seguintes condições:

i) $0 \leq \varphi(a) \leq c(a)$, para cada arco $a = (x,y)$ de A (restrição de capaci-

dade). Em outras palavras, é o número de unidade de produto ou material que flui ao longo de cada arco sem exceder a capacidade do arco.

ii) O fluxo total de mercadoria ou algum líquido que sai da fonte s, o qual se denota por $v \equiv v(\varphi)$, é o mesmo que o valor negativo do fluxo total que entra no destino t, enquanto o total de fluxo que entra em cada nó intermediário deve ser igual ao total de fluxo que sai do mesmo nó, conhecida como a equação de Kirchhoff ou equação de conservação. Brevemente:

$$\Sigma_y \varphi(x,y) - \Sigma_y \varphi(y,x) = \begin{cases} v & \text{if, } x = s \\ -v & \text{if, } x = t \\ 0 & \text{if, } x \neq s,t \end{cases}$$

Os fluxos viáveis na rede $\mathcal{N}$, ás vezes são referidos como o fluxo de X para Y ou um (X,Y)-fluxo.

Toda rede $\mathcal{N}$ possui pelo menos um fluxo, é o fluxo nulo ou zero, isto é, $\varphi(a) = 0$, para cada arco $a = (x,y) \in A$.

Se não houver confusão o vetor fluxo Φ ou a componente φ serão referidos indistintamente, como fluxo viável na rede $\mathcal{N}$.

Consideremos a rede $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(D) = (N, A, s, t, c)$ munido do vetor fluxo Φ (ou fluxo componente viável φ).

Vimos no capítulo 1, que um conjunto corte (ou co-ciclo) de um grafo, é um subconjunto de arestas tal que removidas a partir do grafo, o grafo resultante tem mais componentes que o grafo dado, enquanto o corte na rede é um subconjunto de arestas, cuja remoção destroi o fluxo na rede, no seguinte sentido.

O subconjunto $(P, \bar{P})$ $(\bar{P} = N - P)$ de A, é um *corte de separação* ou simplesmente *corte*, se o nó s (fonte) pertence à P e o nó $t \in \bar{P}$ e tal que a $(P, \bar{P})$-remoção destroi todos os (s,t)-caminhos mesmo que existam caminhos formados pelos arcos contrários entre s e t, deste modo não há produto fluindo de s a t, em outras palavras, toda mercaduria que sai do centro de produção s não chega ao mercado do consumo t. Observe-se que o subdígrafo $\mathcal{D} - (P, \bar{P})$, necessariamente não tem mais componentes que o dígrafo $\mathcal{D}$.

Se o conjunto $(P, \bar{P}) = \{a = (x,y) \in A / x \in P, y \in \bar{P}\}$ é um corte da rede, isto é, o conjunto $(P, \bar{P})$ está formado por todos os arcos cuja cauda pertence a P e cuja cabeça está no complemento de P, então cada caminho dirigido de um nó de P a um nó de $\bar{P}$ contém um arco que pertence a $(P, \bar{P})$, e consequentemente os cortes $(P, \bar{P})$ e $(\bar{P}, P)$ são geralmente distintos ,i.é.,

$(P, \bar{P}) \neq (\bar{P}, P)$.

4.3 *Teorema de Fluxo-Máximo e Corte-Mínimo*

Consideremos a rede $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(D) = (N, A, X, Y, c)$ e o fluxo viável φ na rede $\mathcal{N}$.

O fluxo φ é *máximo*, se não existe outro fluxo viável Ψ na rede, tal que seu valor seja maior que o valor de φ, em outras palavras não ocorre $v(\Psi) > v(\varphi)$.

O problema clássico de fluxos em redes, consiste em determinar um fluxo viável que seja máximo. Por exemplo, maximizar o número de telefonemas possíveis entre Belo Horizonte e São Paulo, através de uma rede interesdual de comunicações, entre os dois estados.

A busca de um fluxo viável máximo numa rede arbitrária $\mathcal{N}$ se reduz apenas ao caso em que a rede $\mathcal{N}$ tenha os seus conjuntos fonte e destino unitários, em virtude da existência de uma correpondência biunívoca entre as redes com os conjuntos distinguidos não unitários e unitários, no seguinte sentido.

Observação.- Dada uma rede $\mathcal{N} = (N, A, X, Y, c)$, onde os conjuntos X e Y fonte e destino, respectivamente não são unitários, construamos a nova rede N' da seguinte maneira:

i) incluir dois novos vértices s e t a rede $\mathcal{N}$, ou seja que, o novo conjunto de nós é, $N \cup \{s, t\}$,

ii) ligar cada vértice u de X com s e cada arco (s, u) tem capacidade infinita, isto é, $c(s, u) = \infty$, para cada $u \in X$, e

iii) ligar cada vértice v de Y com t e o arco que se forma tem capacidade infinita, ou seja $c(v, t) = \infty$, para cada $v \in Y$.

Assim, a nova rede N' possui conjuntos distinguidos unitários.

E recíprocamente o problema é também verdadeiro, logo há uma correspondência biunívoca, entre uma rede com conjuntos distinguidos não unitários, e a rede com conjuntos distinguidos unitários, em virtude deste fato, podemos considerar todas as redes $\mathcal{N}$, daqui pra frente com conjuntos distinguidos

unitários, em outras palavras com uma única fonte, s, e único destino, t, ao menos que surga alguma especificação conveniente.

Lema 4.3.1 *i) Em cada rede $\mathcal{N} = (N, A, s, t, c)$ existe um fluxo máximo e um fluxo mínimo (isto é, o fluxo nulo, $\psi(a) = 0$ para todo arco da rede $\mathcal{N}$).*

ii) Conjuntamente com a observação acima, podemos conceituar uma rede como um dígrafo com dois vértices especiais e não existe nenhum arco ligando estes dois véritices.

Para uma demonstração deste lema vide a referencia [Cap. 2 [55]] □.

A continuação tratamos da relação entre o valor do fluxo máximo com o valor da capacidade do corte mínimo numa rede, ou seja que o valor do fluxo máximo não excede à capacidade do corte mínimo.

Consideremos a rede $\mathcal{N} = (N, A, s, t, c)$ munido do fluxo viável φ.

Um corte $\mathcal{C}$ na rede $\mathcal{N}$ é um corte *mínimo,* se não existe outro corte $\mathcal{K}$ na rede, tal que sua capacidade seja menor que a capacidade de $\mathcal{C}$.

Lema 4.3.2 *Sejam $(P, \bar{P})$ e $(Q, \bar{Q})$ cortes mínimos na rede $\mathcal{N}$. Então os cortes $(P \cup Q, \overline{P \cup Q})$ e $((P \cap Q, \overline{P \cap Q})$ são também minimais.*

Lema 4.3.3 *Seja $\mathcal{N} = (N, A, s, t, c)$ uma rede arbitrária, então max $\{v(\varphi)/\varphi$ fluxo na rede $\mathcal{N}\} \leq$ min $\{c(P, \bar{P})/(P, \bar{P})$ corte de $\mathcal{N}\}$.*

Dem.
Seja $\mathcal{C} = (P, \bar{P})$ um corte máximo na rede $\mathcal{N}$ e φ o fluxo viável no $\mathcal{N}$, então:

$v(\varphi) = \Sigma_y \varphi(s, y) - \Sigma_y \varphi(y, s) = \Sigma_{s \neq x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(x, y) + \Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(x, y) - [\Sigma_{x \in P, t \neq y \in \bar{P}} \varphi(y, x) + \Sigma_{x \in P, y \notin \bar{P}} \varphi(y, x)] = \Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(x, y) - \Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(y, x) + \Sigma_{s \neq x \in P y \in \bar{P}} \varphi(x, y) - \Sigma_{x \in P, t \neq y \in \bar{P}} \varphi(y, x)$,

Desde que, φ é viável, então
$\Sigma_{s \neq x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(x, y) - \Sigma_{x \in P, t \neq y \in \bar{P}} \varphi(y, x) = 0$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Logo o valor do fluxo φ é dado por
$v(\varphi) = \Sigma_{x\in P, y\in \bar{P}}\varphi(x,y) - \Sigma_{x\in P, y\in \bar{P}}\varphi(y,x)$.

Como $\Sigma_{x\in P, y\in \bar{P}}\varphi(y,x)$ é sempre um inteiro não negativo, e $\varphi(x,y) \leq c(x,y)$ ou $\Sigma\varphi(x,y) \leq \Sigma c(x,y)$, então $v(\varphi) \leq \Sigma_{x\in P, y\in \bar{P}}$, pois $\Sigma\varphi(x,y) \leq \Sigma c(x,y) = c(P,\bar{P})$.

Por conseguinte, temos: $v(\varphi) \leq c(\mathcal{C})$, para cada fluxo φ e cada corte $\mathcal{C}$, na rede $\mathcal{N}$.

Agora, se fixarmos o fluxo φ e variarmos o valor $c(\mathcal{C})$ sobre todos os cortes $\mathcal{C}$ na rede $\mathcal{N}$, temos

$$v(\varphi) \leq min\{c(\mathcal{C})/\mathcal{C}\ qualquercorte\ \mathcal{C}\},$$

e finalmente variando φ sobre todos os fluxos viáveis na rede $\mathcal{N}$, obtemos

$$max\{v(\varphi); paraqualquer\varphi\} \leq min\{c(\mathcal{C}); paraqualquercorte, \mathcal{C}\}.$$

A demonstração do lema esta concluida □.

Para outro resultado interessante, vide o teorema 4.3.1 (abaixo).

Consideremos a rede $\mathcal{N}$ munido do fluxo viável φ. Um arco $a = (x,y)$ da rede $\mathcal{N}$, é $\varphi-saturado$ ou simplesmente *saturado,* se $\varphi(a) = c(a)$ ou $\varphi(a) = 0$, no outro caso dizemos que o arco $a = (x,y)$, é $\varphi-não\ saturado$ se, $\varphi(a) < c(a)$ ou $\varphi(a) > 0$.

Seja

$$W \equiv W_{[x_1,x_n]} : x_1, (x_1,x_2), x_2, \ldots, (x_{n-1},x_{n-2}), x_{n-1}, (x_{n-1},x_n), x_n,$$

um caminho na rede $\mathcal{N}$, onde os extremos x_1 e x_n do caminho $W_{[x_1,x_n]}$, não necessariamente coincidiram com s e t, respectivamente.

Um caminho W é φ-*aumentado* se, para todos os arcos direitos $a = (x,y)$ de W, temos $\varphi(a) < c(a)$, enquanto para os arcos contrários de W, tem-se $\varphi(a) > 0$.

Seja o caminho $W_{[x_1,x_k]}$: $s = x_1, (x_1, x_2), x_2, \ldots, x_{k-1}, (x_{k-1}, x_k), x_k$, o vértice x_k não necessariamente coincidirá com o destino t.

Associemos o inteiro não-negativo $\lambda(W)$ dado por

$$\lambda(W) = min\{\lambda(a)/a \in A(W)\},$$

onde

$$\lambda(a) = \begin{cases} c(a) - \varphi(a) & \text{se, } a \in W^+ \\ \varphi(a) & \text{se, } a \in W^- \end{cases}$$

Se $\lambda(W) > 0$, então o valor $v(\varphi)$ de φ fica aumentado ao longo do W em $\lambda(W)$ unidades, caso contrário, isto é, se $\lambda(W) = 0$, W é saturado.

Às vezes, um caminho W é φ-não saturado incompleto se, W for φ-não saturado e seu extremo terminal, x_k, for distinto do destino, t, e no caso que $x_k = t$, isto é, os extremos do caminho W foram s e t, então W é φ-aumentado.

A existência de um caminho W, φ-aumentado na rede $\mathcal{N}$, significa que φ não é um fluxo maximal, o qual implica que podemos incrementar seu valor $v(\varphi)$, em $\lambda(W)$ unidades ao longo dos arcos de W e obtendo-se um novo fluxo Φ, cujas componentes serão dadas por

$$\phi(a) = \begin{cases} \varphi(a) + \lambda(W) & \text{se, } a \in W^+ \\ \varphi(a) - \lambda(W) & \text{se, } a \in W^- \\ \varphi(a) & \text{em outros casos} \end{cases}$$

e o valor do fluxo $v(\Phi) = v(\varphi) + \lambda(W)$.

Anteriormente vimos que o valor máximo do fluxo viável nunca excede à capacidade de um corte mínimo na rede. Aqui apresentaremos que o valor de um fluxo máximo é igual à capacidade do corte mínimo. Este resultado é conhecido, como o teorema de *fluxo-máximo e corte-mínimo*, sendo este um dos resultados centrais e o mais importante ocorrido nos estudos da teoria dos fluxos na rede e mencionado dentre os exemplos dos teoremas minimais. Foi desenvolvido por L.R. Ford e D.R. Fulkerson, pela década de 50. Antes



de apresentar a demonstração deste teorema, precisamos provar alguns resultados.

Lema 4.3.4 *Para qualquer fluxo viável φ, e para qualquer corte $\mathcal{C} \equiv (P, \bar{P})$ e $\bar{\mathcal{C}} = (\bar{P}, P)$ na rede $\mathcal{N}$, verifica-se*
$v(\varphi) = \varphi^+(P) - \varphi^-(P) = \varphi(P, \bar{P}) - \varphi(\bar{P}, P) = \varphi(\mathcal{C}) - \varphi(\bar{\mathcal{C}})$.

Em outras palavras, o valor do fluxo máximo da fonte, s, ao destino, t, é igual ao mínimo da capacidade do corte que separa s e t.

Dem.

Como $\varphi(x, N) = \Sigma_{y \in N} \varphi(y, x)$, indica a soma dos fluxos que estão saindo do nó x Análogamente, $\varphi(N, x) = \Sigma_{y \in N} \varphi(y, x)$, indica a soma dos fluxos que estão entrando no nó, x. Também pela viábilidade de φ temos (lei de conservação)
$\varphi(x, N) - \varphi(N, x) = 0$, para todos $x \in P - \{s\}$, (onde x, é nó intermediario da rede), ou seja,

$$c\Sigma_{x \in P - \{s\}}(\varphi(x, N) - \varphi(N, x)) = 0 \tag{4.1}$$

e sabemos também que

$$c\varphi(s, N) - \varphi(N, s) = v. \tag{4.2}$$

Agora, somando convenientemente 4.1) e 4.2) temos,

$$\begin{aligned} v \equiv v + 0 &= \varphi(s, N) - \varphi(N, s) + \Sigma_{x \in P - \{s\}}[\varphi(x, N) - \varphi(N, x)] \\ &= \Sigma_{x \in P}[\varphi(x, N) - \varphi(N, x)] \\ &= \varphi(P, N) - \varphi(N, P) \\ &= \varphi(P, P \cup \bar{P}) - \varphi(P \cup \bar{P}, P). \end{aligned}$$

Pelo princípio de inclusão e exclusão, temos

$$\begin{aligned} \varphi(P, P \cup \bar{P}) &= \Sigma_{u \in P, v \in P \cup \bar{P}} \varphi(u, v) \\ &= \Sigma_{u \in P, v \in P \supset P \cap \bar{P}} \varphi(u, v) + \Sigma_{u \in P, v \in \bar{P} \supset P \cap \bar{P}} \varphi(u, v) - \Sigma_{u \in P, v \in P \cap \bar{P}} \varphi(u, v). \end{aligned}$$

Agora podemos escrever usando a definição

$$c\varphi(P, P \cup \bar{P}) = \varphi(P, P) + \varphi(P, \bar{P}) - \varphi(P, P \cap \bar{P}), \tag{4.3}$$

Análogamente, temos que

$$c\varphi(P \cup \bar{P}, P) = \varphi(P, P) + \varphi(\bar{P}, P) - \varphi(P \cap \bar{P}), \tag{4.4}$$

Concluímos de 4.3) de 4.4) e observando que $P \cap \bar{P} = \emptyset$.

$\mathrm{v}\varphi = \varphi(P, P \cup \bar{P}) - \varphi(P \cup \bar{P}, P) = \varphi(P, P) + \varphi(P, \bar{P}) - \varphi(P, P \cap \bar{P}) - [\varphi(P, P) + \varphi(\bar{P}, P) - \varphi(P \cap \bar{P}, P)] = \varphi(P, P) + \varphi(P, \bar{P}) - \varphi(P, P \cap \bar{P}) - \varphi(P, P) - \varphi(\bar{P}, P) + \varphi(P \cap \bar{P}, P) = \varphi(P, \bar{P}) - \varphi(\bar{P}, P) - \varphi(P, P \cap \bar{P}) + \varphi(P \cap \bar{P}, P)$.

Finalmente, obtemos o resultado desejado

$$\mathrm{v}(\varphi) = \varphi(P, \bar{P}) - \varphi(\bar{P}, P) = \varphi^+(P) - \varphi^-(P) = \varphi(P, \bar{P}) - \varphi(\bar{P}, P) \square.$$

Teorema 4.3.1 *Se φ é um fluxo e $\mathcal{C}$ é um corte na rede $\mathcal{N}$, então o valor do fluxo é menor ou igual a capacidade do corte, i.é., $v(\varphi) \leq c(\mathcal{C})$.*
Além disso, $v(\varphi) = c(\mathcal{C})$ se, e somente se, cada arco do corte $\mathcal{C}$ for $\varphi-$saturado.

Dem.
Desde que, $\varphi(x, y) \leq c(x, y)$, para todo arco $a = (x, y)$, com $x \in P$ e $y \in \bar{P}$ (onde $\mathcal{C} = (P, \bar{P})$), então

$$\Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(x, y) \leq \Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} c(x, y)$$

ou seja, que $\varphi^+(P) \leq c(\mathcal{C})$.

Sendo o fluxo φ é viável, temos para todos os arco $a = (x, y)$, $\varphi(y, x) \geq 0$, portanto,

$$\Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(y, x) \geq 0,$$

ou seja, que

$$\varphi^-(P) \geq 0.$$

Usando o lema, temos que

$$v(\varphi) = \varphi^+(P) - \varphi^-(P) \leq c(\mathcal{C}) - 0 = c(\mathcal{C}).$$

Consideremos o arco $a = (x, y)$ (um arco do corte $\mathcal{C}$) $\varphi-$ saturado, e daí, temos

$$\Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(x, y) = \Sigma_{c \in P, y \in \bar{P}} c(x, y),$$

e como cada arco $b = (y, x) \in (\bar{P}, P)$ é $\varphi-$zero, isto é, $\varphi(b) = 0$, ou seja, que

$$\Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(y, x) = 0.$$

Concluímos que $v(\varphi) \leq c(\mathcal{C})$. □

Corolário 4.3.1 *Se φ é um fluxo e $\mathcal{C}$ é um corte na rede $\mathcal{N}$, tal que $v(\varphi) = c(\mathcal{C})$, então, φ é um fluxo máximo e $\mathcal{C}$, é corte mínimo .*

Dem.
Consideremos que o fluxo θ seja máximo e $\mathcal{H}$ um corte mínimo na rede, então pelo teorema , temos

$$v(\theta) \leq c(\mathcal{H}).$$

Desde que, θ é um fluxo máximo e $\mathcal{H}$ um corte mínimo, obtemos a seguinte desigualdade

$$v(\varphi) \leq v(\theta) \leq c(\mathcal{H}) \leq c(\mathcal{C}),$$

quaisque que seja o fluxo φ e o corte $\mathcal{H}$, na rede.

Pela hipótese temos $v(\varphi) = v(\theta)$ e também que $c(\mathcal{H}) = c(\mathcal{C})$
o qual implica que φ é um fluxo máximo e $\mathcal{C}$ é um corte mínimo na rede, e o corolário esta demonstrado. □

Na teoria de matchings, é bem conhecido o resultado, que se refere que a presença de um caminho aumentado, impede a existência de um matching máximo, vide [Cap. 7 [9]], ocorre paralelamente na teoria das redes, o qual a continuação veremos.

Teorema 4.3.2 *Consideremos a rede $\mathcal{N}$ com s, a fonte e t o destino. Então, o fluxo φ é máximo se, e somente se, não existe nenhum caminho W que seja $\varphi-$aumentado.*

Dem.

Suponhamos que φ seja o fluxo máximo e provemos que a rede $\mathcal{N}$ não possui nenhum caminho $\varphi-$aumentado.

Assumamos que $\mathcal{N}$ possui um caminho W que seja $\varphi-$aumentado, então, o valor do fluxo φ pode ser aumentado, ao longo dos arcos do caminho W,

em outras palavras, podemos encontrar um fluxo Φ cujo valor seja maior do que φ, o que contradiz à hipotese, que φ é máximo, esta contradição se deve ao admitir que a rede $\mathcal{N}$ possui um caminho $\varphi-$aumentado. Portanto, a rede $\mathcal{N}$ não possui nenhum caminho φ-aumentado para algum fluxo máximo φ.

Recíprocamente, se a rede $\mathcal{N}$ não possui nenhum caminho W que seja $\varphi-$aumentado (para todo fluxo), provemos que o fluxo φ é máximo.

Definamos o subconjunto $P \subset N$ (de nós da rede) com $s \in P$ como o conjunto de todos os vértices da rede, os quais são ligados a s por caminhos $\varphi-$não saturados (incompletos) ,i.é.,
$P = \{x \in N/W : s = x_1, x_2, \ldots, x_k$, caminho $\varphi-$não saturado incompleto $\}$.

Desde que, a rede $\mathcal{N}$ não possui nenhum caminho que $\varphi-$ aumentado, temos que $t \in \mathcal{P} = N - P$, o qual implica a existência do corte $(P, \bar{P})$, na rede $\mathcal{N}$.

Provemos que cada arco direito (ou contrário) de $(P, \bar{P})$ é $\varphi-$saturado (resp. $\varphi-$zero).

Consideremos o arco direito $a = (x, y)$ ($x \in P$, e $y \in \mathcal{P}$). como $x \in P$, então existe um caminho Q, $\varphi-$não saturado incompleto de s para x.

Se o arco $a = (x, y)$ for não saturado, então podemos estender o caminho Q pelo arco a, até atinguir o vértice y, obtendo-se um outro caminho Q', $\varphi-$saturado de s a y, o que acarreta que $y \in P$, sendo impossível, pois $y \in \mathcal{P}$. Por conseguinte, o arco direito a é $\varphi-$saturado, sendo a um arco arbitrário, concluímos que todo arco direito, é $\varphi-$saturado.

Por um raciocinio análogo concluiremos que todos os arcos contrários do corte são $\varphi-$zero.

Pelo lema e do fato que $\varphi(u, v) = 0$, temos que o valor do fluxo φ é igual à
$\varphi^-(P) - \varphi^+(P) = \varphi(P, \bar{P}) - \varphi(\bar{P}, P) = \Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(x, y) - \Sigma_{v \in P, u \in \mathcal{P}} \varphi(u, v) =$
$\Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \varphi(x, y) = c(P, \bar{P})$.
e usando o lema, concluímos que o fluxo φ é maximo, e a demonstrção esta completa, $\square$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Teorema 4.3.3 *(*Fluxo-máximo e corte-mínimo.*) Seja $\mathcal{N}$ uma rede e sejam φ e $\mathcal{C}$ um fluxo máximo e corte mínimo na rede. Então, $v(\varphi) = c(\mathcal{C})$.*

Dem.

Pelo corolário 4.3.1, é suficiente estabelecer a existencia de um fluxo φ e um corte $\mathcal{C} \equiv (P, \bar{P})$, tal que os inteiros v($\varphi$) e $c(\mathcal{C})$ sejam iguais.

Consideremos o fluxo maximal ϕ (não consequentemente máximo), e definamos o subconjunto $P \subset N$, onde
i) o vértice fonte s pertence à P,
ii) se $x \in P$ e $\phi(x, y) < c(x, y)$, então $y \in P$.
ii) Se $x \in P$ e $\phi(x, y) > 0$, então $y \in P$, em outras palavras, $P = \{x \in N /$ existe caminho $\phi-$aumentado de s a $x\}$, ($\bar{P} = N - P$).

Afirmamos que $t \in \bar{P}$. Se não for, isto é, se $t \in P$, então pela definição de P, existe um caminho $W : s = x_1, x_2, \ldots, x_n = t$, tal que $\phi(x_i, x_{i+1}) < c(x_i, x_{i+1})$ para todo arco direito (x_i, x_{i+1}) de W e $\phi(x_{+1}, x_i) > 0$, para todo arco contrário (x_{i+1}, x_i) de W.

Tomemos
$\varepsilon_1 = \min \{c(a) - \phi(a)/a$ é um arco direito de $W\}$, e
$\varepsilon_2 = \min \{\phi(a) > 0$, e a, é um arco contrário de $W\}$,
portanto,
$\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$.

Definamos o fluxo φ, pondo
$\varphi(a) = \phi(a) + \varepsilon$, para os arcos direitos de W,
$\varphi(a) = \phi(a) - \varepsilon$,, para todos os arcos contrários de W, e
$\varphi(a) = \phi(a)$, para todos os arcos $a \in A - W$.
Desde que, φ é viável, e v(φ)¿v(ϕ), implica que ϕ não é máximal, o qual contradiz a escolha de fluxo maximal ϕ, portanto t pertence à $\mathcal{P}$.

Como $t \in \bar{P}$, então para todos os arcos de P para $\bar{P}$, temos
$\phi(x, y) = c(x, y)$, ou seja, que $\Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} \phi(x, y)$

Também para os arcos contrários, temos $\phi(u, v) = 0$, onde $u \in \bar{P}$ e $v \in P$.

Se existir um arco contrário (u, v) para o qual se verifica $\phi(u, v) > 0$, então existe um caminho $\phi-$aumentado incompleto de s para v, e este caminho podemos estender até v, o qual implica $u \in P$ (pela def. de P), que é impossível, pois $u \in \bar{P}$. Portanto para todos arcos contrários também temos $\phi(u, v)=0$, ou seja, que $\Sigma_{u\in\bar{P},v\in P}\phi(u, v) = 0$.
Conseqüentemente temos que
$v(\phi) = \Sigma_{x\in P,y\in\bar{P}}\phi(x, y)-\Sigma_{v\in P,u\in\bar{P}}\phi(u, v) = \Sigma_{x\in P,y\in\bar{P}}\phi(x, y) = \Sigma_{x\in P,y\in\bar{P}}c(x, y)$.

Logo temos que o valor do fluxo ϕ e o corte mínimo $\mathcal{C}$, são iguais, e o teorema esta demonstrado. □

4.4 *Algumas Aplicações*

Como aplicações do teorema de fluxo-máximo e corte-mínimo, apresentaremos as demonstrações alternativas dos teoremas de Hall, além da prova alternativa do teorema de Menger versão aresta. Para outras aplicações, vide as referências [12], [123],

Uma demonstração alternativa do teorema de casamento de Hall.

A cada aresta do grafo bipartido dado $G = (A \cup B, E)$, designemos a orientação de A em B, i. é., o arco $(x, y) \in E$ se, e somente se, x pertence A (i.é., x dever ser cauda) e y deve ser a cabeça ($y \in B$). A cada arco (x, y) do dígrafo $\mathcal{D}(G)$ associemos a capacidade k, onde k é um inteiro positivo maior ou igual $|A|$. Anexemos dois novos vértices s e t a fonte e o destino, respectivamente (ao dígrafo), tal que $d^+(s) = |A|$, $d^-(s) = 0$ e cada arco (s, x), tém capacidade igual à unidade para $\forall x \in A$, e analogamente, $d^+(t) = 0$, $d^-(t) = |B|$, e os arcos (y, t) tém capacidade a unidade, para cada vértice $y \in B$.

Por conseguinte, obtemos a rede $\mathcal{N}[D(G)] = (A \cup B \cup \{s, t\}, E^*, s, t)$.
onde o conjunto de arcos $E^* = E \cup \bigcup_{x\in A}(s, x) \bigcup_{y\in B}(y, t)$.

Agora, o problema de encontrar um matching completo de A em B, é equivalente a deteminar um fluxo máximo na rede $\mathcal{N}$, de valor igual à $|A|$. Provemos que existe um fluxo máximo de valor $|A|$ se, e somente se, $|X| \leq$

$|\Gamma(X)|\ \forall X \in A$.

Se exite um $U \subseteq A$ tal que $|U| > |\Gamma(X)|$, então podemos considerar o corte $(P, \bar{P})$, onde $s \in P$, $U \subset P$ e $\Gamma(U) \subset P$.

Desde que, não há arco de U em $B - \Gamma(U)$, então a capacidade do corte $c(P, \bar{P}) = \Sigma_{x \in P, y \in \bar{P}} c(x, y) = |A - U| + |\Gamma(U)|$, daí $c(P, \bar{P}) < |A|$ e pelo o teorema de fluxo-máximo e corte-mínimo, não existe fluxo máximo de valor igual $|A|$, na rede, e por conseguinte não existe matching completo no grafo G.

Agora, assumamos que seja $|U| \leq |\Gamma(U)|\ \forall U \in A$, e consideremos $s \in P$, $U \subset P$ e $Y \equiv \Gamma(U) \subset P$, para os subconjuntos arbitrários $U \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ e provemos que o corte $(P, \bar{P})$ tém capacidade igual a $|A|$.

Se existe pelo menos um arco (u, v) para $u \in U$ e $v \in B - Y$, então é evidente que $c(P, \bar{P}) \geq k$.
Agora, se não existe nenhum arco de U em $B - Y$ então, $c(P, \bar{P}) = |A - U| + |Y| \geq |A| - |\Gamma(U)| + |Y| = |A|$.

Sendo o corte $(P, \bar{P})$ arbitrário e sua capacidade é maior igual a $|A|$, então existe um matching completo de A em B e o teorema esta demonstrado. □

Teorema 4.4.1 *Se $G = (A \cup B, E)$ é um grafo bipartido arbitrário, então $G \equiv \mathcal{N}$.*

Uma demonstração segue a partir do processo da prova alternativa do teorema de Hall □.

Para uma demonstração do resultado sobre o grafo n-conexo obtido por Whitney [121], i. é.,

Teorema 4.4.2 *Seja $G = (V, E)$ um grafo com $|V| \geq n + 1$ vértices. Então G é n-conexo se, e somente se, para todo subconjunto de vértices $\Omega \subseteq V(G)$ com a cardinalidade $|\Omega| \leq n - 1$, o grafo $G - \Omega$ é conexo.*

Para uma demonstração usando o teorema de fluxo-máximo e corte-mínimo, vide referência [7]. □

Lema 4.4.1 *Seja* $\mathcal{N}(D) = (N, A, s, t, c)$ *com o vetor capacidade unitária,* $C(A) = (1, 1, \ldots, 1)$ *ou seja que* $c(a) = 1$ *para todo arco* $a = (u, v) \in A$. *Então:*

i) $v(\Phi) = m_{s,t}$, *onde* Φ *é o fluxo máximo na rede e* $m_{s,t}$, *o número máximo de* (s,t)*-caminhos dirigidos e arco disjuntos na* $\mathcal{N}$, *e*

ii) $c(\mathcal{C}) = n_\Omega$, *onde* $\mathcal{C}$ *é o corte mínimo e* $n_\Omega = min\ \{|\Omega|/\Omega \in A$, *tal que* $\mathcal{N} - \Omega$ *não contém nenhum* $(s,t)-$*caminho* $\}$.

Dem.

Consideremos o vetor viável máximo $\Phi = (\varphi_1, \ldots, .\varphi_{|A|})$ na rede, e denotemos por D^* o dígrafo obtido a partir de D pela remoção de todos os arcos com fluxo nulo, $D^* = (V(D), A^*)$, onde $A^* = A - \{a \in A(D)/\varphi(a) = 0\}$.
Pela definição temos

$$v(\varphi) = \Sigma_{y \in V(D^*)} \varphi(s, y) - \Sigma_{y \in V(D^*)} \varphi(y, s)$$

Pela hipótese as componentes do vetor fluxo Φ são inteiros, $\varphi(a) = 1$ para todo arco $a \in A^*$, então ocorre:
$\varphi^+(s) = d^+(s)$ e $\varphi^+(t) = d^+(t)$, também $\varphi(s)^- = d^-(s)$ e $\varphi^-(t) = d^-(t)$, de onde temos $\Sigma\varphi(s, y) - \Sigma\varphi(y, s) = \mathrm{v}(\Phi) = \Sigma\varphi(t_i) - \Sigma\varphi(t,) - \varphi(, t)$ ou equivalentemente $\varphi^+(s) - \varphi^-(s) = \mathrm{v}(\Phi) = \varphi^-(t) - \varphi^+(t)$ e consequentemente, obtemos $d^+(s) - d^-(s) = \mathrm{v}(\phi) = d^-(t) - d^+(t)$.
Desde que, $d^+(v) = d^-(v)$ e $\varphi^+(v) = \varphi^-(v)$, para todo $v \in V(D^*) - \{s, t\}$ e pelo lema, há $\mathrm{v}(\Phi)$ (s,t)-caminhos em D^*, e sendo $m_{s,t}$ é o número máximo de (s,t)-caminhos, portanto

$$cv(\Phi) \leq m_{s,t} \tag{4.5}$$

Sejam $W_1, \ldots, W_{m_{s,t}}$, os $m_{s,t}$-caminhos na rede. Definamos a função vetorial $F : \mathcal{N} \to Z$, onde cada componente f de F é dado por

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{se, } a \in \bigcup_{i=1}^{m_{s,t}} W_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desde que, existem exatamente $m_{s,t}$-caminhos e sendo F um vetor-fluxo viável na rede, então seu valor $\mathrm{v}(F) = m_{s,t}$.

A partir da hipótese que Φ é máximo segue

$$cv(F) \leq v(\Phi) \text{ ou } m_{s,t} \leq v(\Phi) \tag{4.6}$$

De 4.5) e 4.6) concluímos que $v(\Phi) = m_{s,t}$.

Agora demonstremos a parte ii)

Desde que, $\mathcal{C} = (S, \bar{S})$ é o corte mínimo, então nenhum vértice de $\bar{S}$ é atinguido a partir de algum vértice de S na subrede $\mathcal{N} - \mathcal{C}$. De onde $\mathcal{C}$ é um conjunto de arcos cuja remoção a partir de $\mathcal{N}$ destroi todos os $(s,t)-$caminhos e com capacidade $c(\mathcal{C}) = \Sigma_{u \in S, v \in \bar{S}} c(u,v) = \Sigma_{u \in S, v \in \bar{S}} 1 = |\mathcal{C}|$, e pela hipótese, n_Ω é o número mínimo de arcos cuja remoção a partir de $\mathcal{N}$, destroi todos os arcos (s,t)-caminhos, então

$$c(\mathcal{C}) \geq n_\Omega. \tag{4.7}$$

Consideremos U de vértices $V(\mathcal{D})$ da forma $U = \{u \in N \ / \ \exists (s,u) - \text{caminhos em } \mathcal{N} - \Omega\}$, onde Ω é o conjunto mínimo de $n_{|\Omega|)}$ arcos cuja remoção destroi todos os $(s,t)-$caminhos.

Como $s \in U$ e $t \in \bar{U}$, portanto o conjunto $K = (U, \bar{U})$ é um corte na rede $\mathcal{N}$ com capacidade $c(K) = n_\Omega = |K|$ e sendo $\mathcal{C}$ o corte minimal na rede $\mathcal{N}$, então

$$c(\mathcal{C}) \leq c(K) \leq n_\Omega \tag{4.8}$$

Concluimos de 4.7) e de 4.8) que $c(\mathcal{C}) = n_\Omega$, e o lema esta demonstrado. □

Teorema 4.4.3 *Se s e t são dois vértices arbitrários de um dígrafo $\mathcal{D}$. Então o número máximo $m_{s,t}$, (s,t)-caminhos dirigidos (arcos disjuntos em $\mathcal{D}$), é igual ao número mínimo n_Ω de arcos cuja remoção a partir de $\mathcal{D}$ destroi a todos os $(s,t)-$caminhos em $\mathcal{D}$.*

Dem.

Seja o conjunto de $W_1, \ldots, W_{m_{s,t}}$, (s,t)-caminhos dirigidos e arco disjuntos na rede $\mathcal{N}$ i. é. $m_{s,t} = \text{máx}\{|W|/W$ é o conjunto de (s,t)-caminhos dirigidos e arco disjuntos na rede $\}$, e seja Ω o conjunto mínimo de arcos em $\mathcal{D}$, tal que $\mathcal{D} - \Omega$ não contém nenhum caminho (s,t)-caminho. Provemos que

$m_{s,t} = n_\Omega$, onde $|\Omega| = n_\Omega$.

Consideremos a rede $\mathcal{N}(D) = (N, A, s, t, c)$, onde $N = V(\mathcal{D})$ e $A = A(\mathcal{D})$ com vértices fonte e sumidouro s e t, respectivamente e a capacidade de cada arco igual a unidade, $c(a) = 1$ para cada arco $a = (u, v) \in A$, e seja o vetor fluxo viável $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{|A|})$, onde

$$\varphi_i(a) = \begin{cases} 1 & \text{se, } a \in \bigcup_{i=1}^{m_{s,t}} W_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo o lema Y concluímos que $\mathrm{v}(\Phi) = m_{s,t}$.
Desde que Ω conjunto mínimo de arcos tal que o subdígrafo $D - \Omega$, não contém nenhum arco (s,t)-caminho, e dai se $\mathcal{C}$ é o corte mínimo, então pelo lema Y, temos $c(\mathcal{C}) = n_\Omega = v(\Phi)$.

Finalmente concluímos que $n_{s,t} = n_\Omega$ e qual completa a demonstração do teorema. □

Teorema 4.4.4 *(Teorema de Menger versão aresta) Consideremos G um grafo arbitrário e sejam s e t dois vértices de G. Então o número máximo de (s,t)-caminhos arestas disjuntos em G, é igual à cardinalidade do conjunto mínimo de arestas Ω de G tal que a remoção de Ω a partir de G destroi todos os (s,t)-caminhos em G.*

Dem.
Pelo lema 4.4.1, o dígrafo $D(G)$ associado ao grafo dado G, possui os vértices s e t como fonte e sumidouro. Usando o teorema 4.4.2, o número máximo de $(s,t)-$caminhos dirigidos arcos disjuntos de $D(G)$ corresponde ao número máximo de $(s,t)-$caminhos arestas disjuntos de G e teorema esta demonstrado □.

Capítulo 5

Teoria de Matróides

5.1 *Introdução*

Segundo a literatura consultada, a teoria de matróides foi dado a conhecer pela primeira vez, por Van der Waerden [106] e formalizado sob o nome *matróide* por Whitney [123], pela década de 1930. Contudo ficou esquecido, até que, pela década de 50, surgem os trabalhos sobre os matróides de Tutte e independentemente de Rado. Desde então, o assunto matróides passou a tomar um acentuado interesse, de modo que na atualidade, existem mais de meia duzia de textos básicos sobre este assunto e suas aplicações com mais de dezenas e centenas de artigos publicados. Também existem trabalhos tratando o relacionamento entre matróides, redes e grafos planares, vide referências [45], [109] e [124].

Acontinuação apresentamos, além de algumas e entre as várias e diferentes definições axiomáticas de matróide, alguns resultados sobre os matróides gráfico (co-gráfico), bicircular, matching e transveral. Dos teoremas de Hall e Ore, que tratam das transversais, Rado que trata da família de transversasis parciais como uma coleção de conjuntos independentes de um matróide e Edmonds e Fulkerson, observando que para cada matching de um grafo G, (G não é necessariamente bipartido), os vértices saturados por aqueles matchings, ou seja a família de conjunto de vértices que estão contidos em algum matching, formam uma coleção independente para o matróide matching, e se G for um grafo bipartido com bipartição (A, B), então os matróides mat-

chings são os matróides transversais sobre A (ou B).

As demonstrações das equivalências das definições e como alguns resultados recentes, podem ser encontradas no artigo de Whitney, [17], [18], [45], [107], [113] e [119].

5.2 *Algumas Definições*

Definição de matróide via Axiomas de Independência

Consideremos o conjunto finito e não vazio S. Um matróide sobre o conjunto S, é um par ordenado de conjuntos $(S, \mathcal{F})$, onde S é o conjunto *fundamental* e $\mathcal{F}$, uma família de subconjuntos de S (chamados conjuntos *independentes*, os quais são modelados sobre as propriedades de independência linear de espaço vetorial), que verifica as seguintes propriedades:

F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

F2) Se $X \in \mathcal{F}$ e $Y \subset X$, então $Y \in \mathcal{F}$,

F3) Se $X, Y \in \mathcal{F}$ e $|Y| = |X| + 1$, então $X \cup \{a\} \in \mathcal{F}$, para algum $a \in Y - X$.

A esta propriedade é equivalente a seguinte

$F'3$) Para cada subconjunto A de S, todos os subconjuntos independentes máximais de A, tém a mesma cardinalidade.

O par ordenado $(S, \mathcal{F})$, é geralmente denotado pela letra $\mathcal{M}$ isto é, $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$, e dizemos que $\mathcal{M}$ é o matróide sobre o conjunto fundamental $S(\mathcal{M})$ (ou simplesmente sobre S), e os elementos de $S(\mathcal{M})$ são os *pontos* ou *celas* do matróide $\mathcal{M}$. As vezes usa-se a notação $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ para a família de conjuntos independentes.

Escrevemos $X \in \mathcal{M}$ para significar $X \in \mathcal{F}$.

Um subconjunto X de S é um conjunto *independente* do matróide $\mathcal{M}$, se $X \in \mathcal{F}$, caso contrário, X é um conjunto *dependente* de $\mathcal{M}$.

Um conjunto independente maximal de $\mathcal{M}$, é chamado uma *base* do matróide $\mathcal{M}$. A noção base de um matróide, é análogo à base de um espaço vetorial.

A família de todas as bases é denotado por $\mathcal{B}$,
$\mathcal{B} = \{X \subseteq S / X \in \mathcal{F}, \text{ e } \forall t \in S - X, X \cup t \notin \mathcal{F}\}$.

Um conjunto dependente minimal (com respeito a inclusão) é chamado um *circuito*. Por exemplo o circuito com três elementos é chamado *triângulo*. Os circuitos são também denominados *átomos* do matróide $\mathcal{M}$. A família de circuitos (ou átomos) de $\mathcal{M}$, se denota por $C(\mathcal{M})$ ou simplesmente por $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \{X \subseteq S / X \notin \mathcal{F} \, e \, \forall x \in X, \, X - x \in \mathcal{F}.\}$$

Para cada subconjunto A de S, todos os subconjuntos independentes maximais de A, têm a mesma cardinalidade, então a esta cardinalidade comum é denominado *rank*[1] de A, e denotado por $r(A)$, ou seja que:

$$r(A) = \max \{|X| / X \subseteq A; X \in \mathcal{F}\} = \max \{|A \cap X| / X \in \mathcal{F}\}.$$

O rank do matróide $\mathcal{M}$, denotado por $r(\mathcal{M})$, é a cardinalidade do conjunto independente maximal Y em S, isto é, $r(\mathcal{M}) = |Y|$.

Um elemento (ou *cela*) $x \in S$ é um *laço* do matróide $\mathcal{M}$ se, e somente se, $\{x\}$ de $\mathcal{M}$. Um par de elementos distintos x e y de S são *paralelos* em $\mathcal{M}$ se, e somente se, $\{x, y\}$ é um circuito de $\mathcal{M}$.

Lema 5.2.1 *Consideremos o matróide $\mathcal{M}(S, \mathcal{F})$, então*
i) $x \in S$ é um laço se, e somente se, $r(\{x\}) = 0$
ii) $x, y \in S$ são paralelos $\Leftrightarrow r(\{x\}) = r(\{y\}) = r(\{x, y\}) = 1$.

Uma demonstração do lema, segue da definição de laço e dos elementos paralelos do matróide.

Exemplo 5.2.1 *Se B é uma base de um matróide $\mathcal{M}$, então o rank de $\mathcal{M}$ esta dado pela cardinalidade de B, i.é., $r(\mathcal{M}) = |B|$.*

Exemplo 5.2.2 *Seja $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ onde o rank do matróide é m i.é., $r(\mathcal{M}) = m$. Um circuito C de $\mathcal{M}$ é* cheio, *se $|C| = m + 1$. Consideremos o grafo conexo $G = (V(G), E(G))$ e o matróide $M(G) = (E(G), F)$ definido sobre o conjunto de arestas $E(G)$, e a família de conjuntos independentes F, seja*

[1] tradução em portugês é posto, contudo nós usaremos rank (de Whitney)

dada pelo conjuntos de arestas dos subgrafos acíclicos de G.

Um circuito C do matróide M(G) será um circuito cheio *se, e somente se, C for o conjunto de arestas de um ciclo Hamiltoniano em G, daí* $|C| = m+1$ *(onde m é o número de arestas de uma árvore geradora de G).*

Desde que, o matróide gráfico $M(G)$ é binário, portanto pode ser representado por uma matriz de incidência vértice-aresta, $A(G) = (a_{ij})$, onde as linhas de $A(G)$ correspondem aos vértices de G, as columnas às arestas de G e o elemento $a_{ij} = 1$ se, e somente se, vértice x_i é incidente com a aresta e_j e outras vezes $a_{ij} = 0$.

Lema 5.2.2 *Seja* $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ *um matróide, então para todo* $A \subseteq S$ *se verifica:*

a) $r(A) = |B|$*, onde B é uma base arbitrária de A,*

b) $r(A) \leq |A|$ *e* $r(A) = |A|$ *se, e somente se, A é independente.*

A demonstração do item a) segue da definição, enquanto b) é uma implicação de a).

Uma função f é dita *função-conjunto* (sobre X), se f for definida sobre o conjunto potência 2^X (onde, X é um conjunto finito não vazio), com valores inteiros, i.é., $f : 2^X \rightarrow N$ (se não houver confusão, ao invés da função-conjunto, diremos simplesmente que f é uma *função* sobre X).

Um subconjunto $A \subseteq S$ se diz *abarcar* o elemento t (ou cela $t \in S$) ou t *depende* de A, no matróide $\mathcal{M}$, se $r(A \cup t) = r(A)$.

O conjunto de todos os elementos abarcados por A incluindo o próprio A, denota-se por $cl(A)$ ou simplesmente por $\bar{A}$, é denomindo *fecho* ou *gerador* de A em $\mathcal{M}$ ou brevemente:

$$cl(A) \equiv \bar{A} = \{t \in S / r(A \cup t) = r(A)\}.$$

En outras palavras, o fecho de qualquer subconjunto $A \subseteq S$, $cl(A)$, é um subconjunto maximal D de S, contendo A tal que $r(D) = r(A)$.

Exemplo 5.2.3 *Se B é uma base de um matróide* $\mathcal{M}$*, então o fecho de B é o próprio conjunto fundamental S, isto é,* $cl(B) = cl(S)$ *(pois,* $r(B) = r(S)$*). Consequêntemente, o fecho de um conjunto é único.*

O conjunto A é *fechado* em $\mathcal{M}$, se A não consegue abarcar nenhum outro elemento (ou cela) de $S - A$, ou seja que verifica:
$r(A \cup x) = r(A) + 1$, para todo elemento de $x \in S - A$. Ou alternativamente, o subconjunto A de S, é fechado em $\mathcal{M}$ se, e somente se, não existe elemento de S, que possa ser adicionado a A, sem alterar o rank de A.

O conjunto A é fechado em $\mathcal{M}$ se, e somente se, $\bar{A} = A$ ou $cl(A) = A$. Os conjuntos fechados também são chamados *"flats"*.

Consideremos o matróide $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$, A um subconjunto de S, e $H \subseteq A$.

O subconjunto $H \subseteq A$ é *gerador* de A se, $\bar{H} = A$ ou $cl(H) = A$. H é gerador de $\mathcal{M}$ se, $\bar{H} = S$.

Definição de matróide via Axiomas de Bases

Um matróide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{B})$, é um conjunto finito de pontos S conjuntamente com uma coleção de subconjuntos $\mathcal{B}$ de S chamados *bases*, tal que:

B1) A coleção $\mathcal{B}$ não é vazia.

B2) Todos os membros de $\mathcal{B}$, são equicardinais, e

B3) Se A e B são elementos de $\mathcal{B}$, e se x é elemento de A, então existe um elemento y em B, tal que $(A - x) \cup y$ é também um membro de $\mathcal{B}$.

A cardinalidade comum das bases, é o rank de $\mathcal{M}$ i.é., $r(\mathcal{M}) = |\mathcal{B}|$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Um subconjunto $X \subseteq S$ é *independente* em $\mathcal{M}$, se X está contido em alguma base de $\mathcal{B}$. Qualquer subconjunto de S que não é independente é *dependente*, e os conjuntos dependentes minimais são os *circuitos* de $\mathcal{M}$.

Exemplo 5.2.4 *Para uma base B do matróide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{B})$ e para um elemento x de $S - B$, existe um único circuito $\Gamma_x \equiv \Gamma(B; x)$ contido em $B \cup x$. Este circuito Γ_x, é o circuito* fundamental *de x em B. O conjunto $C_B = \{\Gamma_x / x \in S - B\}$ é a família fundamental de circuitos de B em $\mathcal{M}$.*

Lema 5.2.3 *Seja $\mathcal{B}$ uma familía de subconjuntos de S. Então $\mathcal{B}$ é a coleção de bases de um matróide sobre S se, e somenete se, $\mathcal{B}$ satisfaz as seguintes condições:*

b1.- $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

b2.- Se B_1 e B_2 são membros de $\mathcal{B}$ e $x \in B_1 - B_2$, então existe um elemento y de $B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Definição de Matróide via Axiomas de Circuitos

A conexão entre a teoria de matróides e teoria de grafos, pode ser vista a partir da definição de matróide em termos de seus circuitos.

Consideremos o matróide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$, definido via axiomas indepedentes. Desde que, um conjunto independente maximal é uma base do matróide então aproveitando este fato obtemos uma outra definição (equivalente) de matróide. A propriedade $F2$, acarreta que qualquer subconjunto de um conjunto independente, é também independente, do mesmo modo vale para conjuntos dependentes, no seguinte sentido, sejam $X, Y \subset S$, tal que $X \subset Y$ e se X é dependente, então Y também é dependente. A além disto um circuito Γ de um matróide é um conjunto dependente minimal, ou seja que, um subconjunto F de S, é um circuito do matróide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$, se $F \notin \mathcal{F}$, mas $N \in \mathcal{F}$, para cada subconjunto próprio de F, i.é., $N \subset F$. Assim, se F é um circuito do matróide $\mathcal{M}$, temos que $|F| - 1 = r(F)$, e obtemos a seguinte definição alternativa de matróide em termos de circuitos.

Seja S um conjunto finito e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos (chamados circuitos) de S, então o par ordenado $(S, \mathcal{C})$, é um matróide (podemos denotar com a mesma letra $\mathcal{M}$ se, não há confusão, e os elementos C de $\mathcal{C}$, são os circuitos de $\mathcal{M}$) se, $\mathcal{C}$ verifica as seguintes condições:

C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$,

C2) Nenhum circuito esta contido em um outro circuito, i.é., se $\Gamma_i; i = 1, 2$ são elementos arbitrários de $\mathcal{C}$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, então $\Gamma_1 = \Gamma_2$, e

C3) Se $X, Y \in \mathcal{C}$ e existe um elemento $a \in X \cap Y$, então existe um circuito Z tal que $Z \subseteq X \cup Y - \{a\}$.

Lema 5.2.4 *Seja Λ uma coleção de subconjuntos de S. Então Λ é a família de circuitos de um matróide sobre S se, e somente se, Λ verifica as condições $C1$), $C2$) e $C3$).*

Um subconjunto F de S é independente no matróide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{C})$, se $F \notin \mathcal{C}$, mas $F \cup \{t\}$ contém algum circuito de $\mathcal{C}$, para $t \in S - F$. Por conseguinte, $r(X) = |X| - 1$, se X for um circuito. O subconjunto X de S é

independente no matróide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{C})$ se, e somente se, $r(X) = |X|$.

Definição de Matróide via Função Rank

A noção rank de um conjunto (no matróide $\mathcal{M}$) induz uma função-conjunto sobre S, mais precisamente a função $r : 2^S \rightarrow Z^+$, é chamada *função rank*[2] do matróide $\mathcal{M}$ se, r verifica as seguintes condições:

r1) r associa um inteiro não negativo a cada subconjunto de S.

r2) $0 \leq r(X) \leq |X|$, para todo subconjunto X de S, propriedade subcardinal.

r3) Para todo, $X, Y \in 2^S$, $X \subseteq Y$ implica $r(X) \leq r(Y)$, propriedade monotona, e

r4) verifica a propriedade submodular $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$, para todo $X, Y \in 2^S$.

Reciprocamente, consideremos S um conjunto finito e seja g uma função que verifica as propriedades $r1, r2, r3$, e $r4$, então existe um matróide $\mathcal{M}$ com função g. Ponha $r = g$ e o matróide $\mathcal{M}$ é determinado por r e escrevemos $\mathcal{M} = (S, r) \equiv (S, \mathcal{F}(r))$, onde $\mathcal{F}(r) = \{X \subseteq S / r(X) = |X|\}$ i.é., $\mathcal{F}(r)$ é a coleção de conjuntos independentes do matróide $\mathcal{M}$ e a função rank r.

Dois matróides $M_i = (S_i, F_i); i = 1, 2$, são *isomorfos* se existe uma bijeção $\phi : S_1 \rightarrow S_2$, a qual preserva independência, bases, circuitos, função rank, etc. Escrevemos $M_1 \simeq M_2$.

5.3 *Alguns Exemplos de Matróides*

Exemplo 5.3.1 *Consideremos um espaço vetorial V e seja S um subconjunto finito de V. Consideremos a família $\mathcal{F}$ formada por todos os subconjuntos X de S, tal que os vetores que pertencem a X, são linearmente independentes em V, então o par $(S, \mathcal{F})$, é um matróide* vetorial, *denota-se por M_V. O rank de um conjunto A de M_V, é definido como a dimensão do subespaço gerado por A (o qual se denota por $< A >$), $r(A) = dim < A >$.*

[2]pode ser traduzido como função posto

Exemplo 5.3.2 *Consideremos a matriz A cujos elementos são números reais, e S indexa as columnas de A. Seja a família* $\mathcal{F}(\rho) = \{X/\rho(X) = post(X)$, *onde post(X) é o posto da matriz formada pelas columnas de X, então o par* $(S, \mathcal{F}(r))$, *é um matróide sobre S com função rank* ρ.

Exemplo 5.3.3 *Seja* $G = (A \cup B, E)$ *um grafo bipartido e definamos a família* $\mathcal{F} = \{X \subseteq A$ *tal que existe um matching M de G que satura a cada vértice de X*$\}$. *A função* $t(X)$ *denota o número máximo de vértices de X, que são saturados por algum matching de G, i.é.,* $t(X) = \nu(G - (A - X)) \equiv \nu\langle(G - A) \cup (G \cap X)\rangle$. *Então o par* $(A, \mathcal{F})$ *é um matching e sua função rank é t.*

Exemplo 5.3.4 *Seja* $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *e consideremos a família* $\mathcal{F}$, *consistindo de todos os subconjuntos X de S com* $|X| \leq k \leq n$.
Então o par $(S, \mathcal{F})$, *é o matróide* uniforme. *A função rank para o matróide uniforme é dado por:*

$$r(X) = \begin{cases} |X|, & se\ |X| \leq k \\ k, & se\ |X| > k \end{cases}$$

E as famílias de bases e circuitos são dados por $\mathcal{B} = \{B/|B| = k\}$, *e* $\mathcal{C} = \{C/|C| = k + 1\}$, *respectivamente, e obtemos que* $r(B)$ *(ou* $r(C)) = k$, *para todos* $B \in \mathcal{B}$ *(ou* $C \in \mathcal{C}$*).*

Para $k = n$, *cada subconjunto de S é independente, então o matróide é chamado* livre *ou* discreto.

Exemplo 5.3.5 *Consideremos o grafo bipartido simples* $G = (A \cup B, E)$ *e seja* $\mathcal{F}$ *a família formada por todos os subconjuntos de arestas de G, tal que, não contenha ciclos de G, portanto o par* $N = (S, \mathcal{F})$ *(onde* $S = E(G)$*) é um matróide (circuito), no qual os únicos circuitos do matróide N são os ciclos pares (ou subgrafos Eulerianos) e daí N é matróide* bipartido.

Definição de Matróide via Função Fecho

A noção fecho de um conjunto em um matróide $\mathcal{M}$, da origem à uma função denotado por *cl* (ou por uma "barra"), definida sobre 2^S e com valores em 2^S. Esta função *cl* é a função *fecho* do matróide $\mathcal{M}$.

O par (S, cl) é um matróide, quando a função *cl* satisfaz as seguintes propriedades.

cl1) $A \subseteq cl(A)$, para todo $A \in 2^S$,
cl2) Se $X, Y \in 2^S$ tal que $X \subseteq Y$, então $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$, e
cl3) Seja $A \in 2^S$ e $x, y \in S$. Se $x \in \overline{A \cup \{y\}}$, então $y \in \overline{A \cup \{x\}}$.

O matróide $\mathcal{M} = (S, cl)$ assim definido, muitas vezes é denominado *pre-geometria,* e quando $\mathcal{M} = (S, cl)$ for simples, $\mathcal{M}$ se diz ser uma *geometria.*

5.4 *Conexão Entre Matróides e Grafos*

A conexão entre as teoria de matróides os grafos, pode ser visto a partir de matróides definidos sobre $V(G)$, $E(G)$ e $V(G) \cup E(G)$, para algum grafo $G = (V(G), E(G))$. Estes matróides são chamados *matróide-vértice*, *matróide-aresta* e *matróide-total*, sobre G, respectivamente. Conseqüentemente todo grafo arbitrário fica associado a um matróide, contudo a recíproca não é necessariamente verdadeira, por exemplo, o matróide uniforme $U_{[4,2]}$ não é associado a nenhum grafo. Além disso, todo matróide possui seu dual ao conatrário dos grafos, que somente a classe de grafos planares possuim dual. Por estos fatos, muitos autores, consideram matróides como uma extensão natural da teoria dos grafos, vide as referências [68], [69], [70], [71], [73], [88], [94], [95], [100], [110] [111], [114], [115], [116] e [117].

Nesta seção reveremos alguns matróides-vértice e matróides-aresta, e ao invés do matróide-total, trataremos do matróide bicircular. Na seção 5.6 serão considerados os matróides associados aos grafos bipartidos.

5.4.1 Matróide Vértice: *Matróide Matching*

Um exemplo de matróide-vértice, é o *matróide matching,* esta classe de matróide se origina a partir dos matchings considerados em grafos arbitrários, enquanto a classe de matróide transversal esta estritamente ligado aos matchings em grafos bipartidos.

Consideremos o grafo simples e conexo $G = (V(G), E(G))$, (G não é consequentemente um grafo bipartido). Tomemos como o conjunto S, o conjunto de vértices $V(G)$ de G e denotamos por F, a família formada por todos os

subconjuntos $X \subseteq S$ tal que X satura (intersepta) algum matching de G i.é., $X \in F$ se, e somente se, X esta contido no conjunto de vértices extremos das arestas de algum matching M em G e indicamos pelo símbolo $X \prec M_X$. Então o par $M_G = (S, F)$, é o matróide matching.

Em vista de que as condições $F1$ e $F2$ são simples de verificar, verifiquemos a condição $F'3$.

Tomemos o subconjunto $A \subset S$ e sejam $T, U \in F$ dois subconjuntos máximais de A e que interseptam os matching N e M, i.é., $T \prec N_T$ e $U \prec M_U$, contudo para simplificar a notação escrevamos $N \equiv N_T$ e $M \equiv M_U$ respectivamente.

Seja H o subgrafo induzido por $N\Delta M = (N - M) \cup (M - N)$ i.é., $H = N\Delta M$. As componentes conexas de H são caminhos abertos ou caminhos fechados (circuitos) alternados, porque cada vértice de H pertence a N ou M. Por outro lado, o conjunto $T\Delta U = (T - U) \cup (U - T)$ consiste exatamente dos vértices extremos dos caminhos de H que pertence A. $T - U$ são os vértices de A que intersepta N mas não M, analogamente $U - T$ são os vértices de A que são extremos dos elementos de M mas não de N.

Suponhamos que a cardinalidade de U seja maior que de T, portanto $U - T$ tem mais elementos que $T - U$. Neste caso alguma componente de H deve ser um caminho aberto, digamos W, então W tem um extremo x em $U - T$ e outro extremo não pertence a $T - U$.

Agora, considerando W como o conjunto de arestas, temos o matching $N\Delta W$. Mas este matching intersepta a T em A e além disso $x \in A$. O que contradiz à hipótese que T não é subconjunto máximal de A o qual intersepta ao matching. Por conseguinte, os subconjuntos T e U tem a mesma cardinalidade e logo M_G é um matróide.

5.4.2 Matróides-arestas: *Gráfico e Co-gráfico*

Entre os matróides-aresta, podemos considerar os matróides gráfico e co-gráfico, e veremos que dois grafos não sendo isomorfos ou seja grafos 2-isomorfos têm seus matróides isomorfos. Em [21] introduzemos o conceito de *subdivisão* vértice e baseado neste obtemos uma caracterização para os conjuntos dependentes do matróide *bicircular*, o qual expresamos abaixo sob

uma proposição.

Matróide Gráfico: *Matróide Circuito*

Tomemos como o conjunto finito S, o conjunto das arestas do grafo $G = (V(G), E(G))$ e seja $\mathcal{C}(G)$ o conjunto de ciclos de G.

Definamos a família $\mathcal{F}$, como $\mathcal{F} = \{X \subseteq S / X$ não contém ciclo de G, i.é., as componentes de $G[X]$ são florestas (ou árvores) de $G\}$.

O par $M(G) = (S, \mathcal{F})$ é um matróide chamado matróide *circuito* (ou *polígono*) de G.

Uma definição alternativa do matróide circuito, é a seguinte. Consideremos a função fecho, $cl : 2^S \to 2^S$, definida para $A \subseteq S$, o $cl(A)$ como o conjunto $cl(A) = \{e = uv /$ os vértices u e v de $V(G)$, pertencem à mesma componente do subgrafo $G[A]\}$. Então o par (S, cl), é também denomindo o matróide *circuito* (ou *polígono*) de G.

Um conjunto de arestas F de G é chamado um conjunto em dependente de $M(G)$ se, e somente se, F contem um ciclo de G. Consequentemente, $X \in M(G)$ é um *circuito* se, X for um conjunto *dependente minimal* (no sentido da inclusão de conjuntos).

Um matróide P é chamado *gráfico* ou *grafical*, se existe um grafo G tal que o matróide P é isomorfo ao matróide circuito $M(G)$.

Lema 5.4.1 *Seja $M(G)$ um matróide circuito, então*

i)o subconjunto $X \subset S$, é um conjunto independente se, e somente se, o subgrafo induzido por X, $G[X]$ é uma floresta (ou árvore) de G.

ii) O subconjunto $B \subset S$, é uma base de $M(G)$, se $G[B]$, é uma floresta (ou árvore) geradora de G.

iii) C um subconjunto de S, é um circuito se, e somente se, C é um ciclo (ou polígono) de G.

iv) Para cada $A \subseteq S$ o de A, i.é., $r(A) = |V(G[A])| - k(G[A])$, onde $k(G[A])$ denota o número de componentes do grafo $G[A]$.

Matróide Co-gráfico: *Matróide Co-circuito*

consideremos a família denotada por $\mathcal{F}^*$ cujos membros são todos os subconjuntos de S, que não contém nenhum co-ciclo de G, então o par $(S, \mathcal{F}^*)$ é um matróide *co-ciclo* ou *co-circuito* e se denota por $M^*(G)$. Os circuitos de $M^*(G)$ são exatamente os co-ciclos do grafo G.

Um matróide N é *co-gráfico* ou *co-grafical*, se existe um grafo G tal que o matróide N é isomorfo a $M^*(G)$.

Os co-circuitos de $M(G)$ possuim a seguinte propriedade.

Lema 5.4.2 *Um conjunto A de arestas de um grafo conexo G, é um co-circuito de $M(G)$ se, e somente se, existe uma partição $\{X_1, X_2\}$ de $V(G)$, tal que $A = [X_1, X_2]$ e $G[X_i]$ é conexo para $i = 1, 2$.*

(Dados dois subconjuntos (ou subgrafos) X e Y de G, $[X, Y]$ denota o conjunto de todas as arestas de G, que ligam X e Y).

Teorema 5.4.1 *(Teorema de Whitney de 2-isomorfismos [122]) Sejam G e H dois grafos sem vértices isolados. Então $M(G)$ e $M(H)$ são isomorfos se e somente se G e H são 2-isomorfos.*

Para uma demonstração vide [p.147 [72]]. □

Consideremos o matróide $\mathcal{M}$ sobre o conjunto finito $S \equiv S(\mathcal{M})$. Um conjunto $A \subseteq S$ é dito *não-separável* se, qualquer $X \subseteq A$ verifica $r(X) + r(A \backslash X) = r(A)$, temos $X = \emptyset$ ou $X = A$.

O matróide $\mathcal{M}$ é *conexo* ou *não-separável* se, $|S| \geq 2$ e para qualquer par de elementos x e y de S, existe um circuito Γ em $\mathcal{M}$ tal que $\{x, y\} \subseteq \Gamma$.

O qual é equivalente a: $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ é conexo se não existe subconjunto próprio $A \subset S$ tal que $r(A) + r(S - A) = r(S)$, em outras palavras, M é conexo se, e somente se, para todo subconjunto $A \subset S$ se verifica $r(A) + r(S - A) > r(S)$. Ainda esta definição é equivalente à seguinte.

Seja $\sim$ uma relação binária sobre S definida (para qualquer x e y de S) $x \sim y$ se, $x = y$ ou existe um circuito Γ de $\mathcal{M}$ contendo ambos x e y. Esta relação é uma relação de equivalência sobre S, dai $\mathcal{M}$ é conexo se S é única

classe de equivalência segundo a relação $\sim$.

Para um inteiro positivo k e o matróide $\mathcal{M}$ sobre S com função rank r, a partição (X, Y) de S é uma $k-$separação para a matróide $\mathcal{M}$ se:
i) $\min\{|X|, |Y|\} \geq k$, e
ii) $r(X) + r(Y) \leq k - 1$.
Se a igualdade vale na desigualdade ii), trata-se de uma $k-$separação *exata.*

Para $n \geq 2$, $\mathcal{M}$ é $n-$conexo se para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\mathcal{M}$ não possui $k-$separação. Por conseguinte $\mathcal{M}$ é 2-conexo, quando $\mathcal{M}$ for conexo. Também $\mathcal{M}$ é conexo se, e somente se, dual M^* for conexo.

Uma ligação entre o grafo e matróide, esta contido no seguinte resultado.

Proposição 5.4.1 *Para $n \geq 2$, seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo sem vértices isolados com $|V(G)| \geq n + 1$. Então o matróide grafical $\mathcal{M}(G)$ é $n-$conexo se, e somente se, G for $n-$conexo e G não possui ciclos de comprimento menor que n arestas.*

Um co-ciclo K de um matróide $\mathcal{M}$ é dito um *co-ciclo-não-separação* de $\mathcal{M}$ se, $\mathcal{M}\backslash K$ é um matróide conexo.

Um co-ciclo K é referido como um *vértice* de $\mathcal{M}$ se:
K é um co-ciclo-não-separação, e
$|C \cap K| \leq 2$, para qualquer ciclo de $\mathcal{M}$, isto é, $|C \cap K| = 0$ ou $|C \cap K| = 2$.
Os conceitos de um vértice de um co-ciclo-não-separação são invariáveis pelo isomorfismo de matróides.

Um vértice e um co-ciclo-não-separação) de um matróide dual M^* são referidos como um co-vértice e ciclo-não-separação respectivamente de M.

No caso que o matróide pode ser decomposto em suas componentes conexas, então o matróide dado é expresso como uma soma direta de suas componentes, formalmente. Consideremos os matróides $M_i = (S_i, F_i)$, $i = 1, 2$ com $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, então a *soma direta* dos matróides $M_i, i = 1, 2$, é o matróide denotado por $M_1 \bigoplus M_2$ sobre $S_1 \cup S_2$, os conjuntos independentes são todos os conjuntos $\{X \cup Y \ / X \in F_1,\ Y \in F_2\}$. Equivalentemente os conjuntos circuitos de $M_1 \bigoplus M_2$, é exatamente a união dos conjuntos circuitos de M_1 e de M_2.

É evidente que $r(M_1 \bigoplus M_2) = r(M_1) + r(M_2)$ e um matróide desconexo é exatamente a soma direta de suas componentes.

Matróide Bicircular

Um *biciclo* é um grafo conexo, o qual é uma subdivisão de um dos seguintes grafos: de teta θ, ou de algemas (ou duas circunferências tangentes) ∞ ou de grafo *haltere*, (para os grafos halteres vide [21]). Alternativamente, um biciclo do grafo G é um subgrafo conexo de G homeomorfo a um dos três grafos: teta, algemas ou haltere.

Um biciclo é *ímpar* se todos seusciclos são ímpares.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $\mathcal{I}$ seja a família definida como $\mathcal{I} = \{F \subseteq E$ /cada componente de $G[F]$ possui no máximo um ciclo $\}$. Esta familia $\mathcal{I}$ é a coleção de conjuntos independentes de um matróide sobre E, e qual tem como circuitos aos biciclos de G, é chamado matróide *bicircular* e denota-se por $B(G)$.

Alternativamente, um subconjunto $A \subseteq E(G)$ é *independente* em $B(G)$ se cada componente de $G[A]$ for uma árvore ou um uniciclo (isto é, contem exatamente um ciclo) e A é *dependente* se, $G[A]$ for um biciclo de G.

Eixtem muitos fatos sobre o matróide bicircular, que inicialmente foi estudado por Simões-Pereira, [On Subgraphs as Matroid Cells, *Math. Z.* 127, 315-322(1972)], onde biciclo A é visto como subgrafos $G[A]$ de G que são homeomorfos a partir de um triângulo, ou de dois triângulos que tem um vértice comum ou de dois triângulos ligados por uma ponte (os extremos da ponte são os vértices dos triângulos), seguido por Matheus [Bicircular Matroids, *Quart. J. Math. Oxford* (2), 28 (1977),213-228]. Também vide [18].

No [21], demonstra-se que os grafos teta θ e haltere são homeomorfos a apartir do grafo algemas ∞, e reciprocamente. Usando este resultado obtem-se a seguinte caracterização para a família de conjuntos dependentes de $B(G)$.

Proposição 5.4.2 *Um subconjunto A de $E(G)$ é um circuito de $B(G)$ se, e somente se, $G[A]$ é uma divisão do grafo algemas ∞.*

Consequêntemente, um subconjunto de arestas $F \subseteq E(G)$, é um biciclo do grafo $G = (V, E)$ se, $G[F]$ for homeomorfo a partir do grafo algemas ∞.

Se denotamos por β o conjunto de todos os biciclos de um grafo G, então, o biciclo com menor número de arestas é o grafo algemas (ou duas circun-

ferências tangentes) ∞, o qual apenas é um par de laços com um único vértice (ou um 2-buquês), e daí o maior limitante inferior de β é o grafo algemas. Em consequência $B(G)$ não tem laços, e dois elementos x e y são paralelos em $B(G)$ se, e somente se, eles são laços (no sentido gráfico) em um vértice de G. Podemos enfatizar que os laços de G não são laços de $B(G)$ e que as arestas paralelas de G não são elementos paralelos de $B(G)$.

Se o grafo conexo G for uma árvore ou um uniciclo, então $B(G)$ é o matróide discreto de rank $r(B(G)) = |E(G)|$, no qual cada subconjunto de $E(G)$ é independente.

Um conjunto independente A é uma base para $B(G)$ se, A é máximal, isto implica que A é incidente com cada vértice de G e que cada componente de $G[A]$ é uniciclo. Portanto as bases de $B(G)$ não necessariamente forma um subgrafo conexo de G, em contraste com a situação do matróide grafical. O rank de um subconjunto $A \subseteq E$, rank(A) (A é um elemento de $B(G)$) é definido como o número $|V(G[A])| - |T(G[A])|$, onde $|V(G[A])|$ é o número de vértices incidentes com as arestas de A e $T(G[A])$ é o conjunto de componentes acíclicas de $G[A]$. Assim o rank do matróide $B(G)$ é $|V(G)|$. Um co-circuito de $B(G)$ é um conjunto minimal de arestas F tal que o grafo $G - F$ tem mais componentes acíclicas que G, onde um vértice isolado é contado como uma componente acíclica.

5.5 *Matróide Dual*

Consideremos o matróide $M = (S, \mathcal{F})$, e sejam X e Y dois subconjuntos de S. Dizemos que X e Y são *ortogonais* se $|X \cap Y| \neq 1$.

Agora consideremos a família $\mathcal{G} = \{Y \subseteq S$, tal que, Y seja ortogonal a cada X de $\mathcal{F}$ e Y é mínimal com respeito á esta propriedade, i.é., nenhum subconjunto próprio $U \subset Y$ verifica $|X \cap U| \neq 1\}$. Se a família $\mathcal{G}$ verifica as seguintes condições:

1) Nemgum membro de $\mathcal{G}$ contém outro membro da família $\mathcal{G}$, i.é., se $A \in \mathcal{G}$ e $B \subset A$, então $A = B$, e

2) Se $A, B \in \mathcal{G}$, $x \in A \cap B$ e $y \in A - (A \cap B)$, então existe $Z \in \mathcal{G}$ tal que $y \in Z \subseteq (A \cup B) - \{x\}$, então o par ordeanado $(S, \mathcal{G})$ denotado por

$M^* = (S, \mathcal{G})$, é um matróide chamado *dual* (ou *ortogonal*) do matróide M. (O termo ortogonal, é diferente da ortogonalidade de espações vetoriais).

Cada matróide possui sempre seu *dual* (ou *ortogonal)*, a diferença dos grafos, que nem sempre exite o dual de um grafo arbitrário, apenas os grafos planares possum seu dual.

A operação dual sobre os matróides é simétrica, i.é., $(M^*)^* = M$.

Seja r a função rank do matróide M, então a função r^* dado por $r^*(S - X) = |S - X| - r(S) + r(X)$, para todo $X \subseteq S$, é denominado função rank do matróide M^* (r^* é dual relativo a r). A função rank r^* de M^*, é chamado *corank* de M e verificam que $r^*(S) + r(S) = |S|$.

Os elementos de B^* são chamados *cobases* de M, e os circuitos de M^*, são chamados *cocircuitos* de M.

Exemplo 5.5.1 *Desde que a interseção de um ciclo e um co-ciclo não podem ter exatamente apenas um elemento no grafo $G = (V(G), E(G))$) concluímos que os matróides circuito (ou ciclo) $M(G)$ e co-cricuito (ou co-ciclo) $M^*(G)$ são mutuamente duais (ou ortogonais).*
Análogo, ao triângulo definido como um circuito com três elemento, se define um "triad" como um co-circuito com três elementos.

Se o grafo G possui k componentes, então o do matróide ciclo, i.é., para qualquer $A \in E(G)$,

O do conjunto A , $r(A) = |E(T_{G[A]})| = |V(G[A])| - k$,
onde $E(T_{G[A]})$ é o conjunto de arestas da floresta (ou árvore) geradora de $G[A]$.

Enquanto o corank R de $M(G)$, i.é., o R de M^d, é dado por
$R(A) = C_i(G[A]) = |E(G[A])| - |V(G[A])| + k$.

Conseqüentemente se verifica $r(S) + R(S) = |E(G)|$.

Representabilidade de Matróides

Este é uns dos tópicos mais explorados, e continua sendo na atualidade, para mais detalhes, vide referências [17], [18] e [108].

Um matróide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{F})$ se diz ser representável sobre o corpo arbitrário F se, existe uma aplicação $f : S \to F^r$ (onde $r = r(\mathcal{M})$ tal que o subconjunto $A \subseteq S$ é independente em $\mathcal{M}$ se, e somente se, f/A (onde f/A denota a função f restrita ao conjunto A) é injectiva e $f(A)$ é linearmente independente no espaço vetorial F^r sobre o corpo F.

5.6 *Matróides Bígrafos:* Matróide Transversal

Nesta seção e em todas as seções e capítulos seguintes, consideremos grafos bipartidos simples e sem vértices isolados, salvo alguma indicação específica.

Relembremos (sem perda da generalidade), para o $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \equiv \{x_i \ / \ i \in L\}$ seja $\mathcal{A}(I) = (A_i, \ i \in I)$ uma família de subconjuntos de S indexados por I.

Um subconjunto $T = \{x_i \ / \ i \in U \subseteq L\}$ de elementos de S é uma transversal (ou sistema de distintos representativos) de $\mathcal{A}(I)$ se, $x_i \in A_i$ e $x_i \neq x_j$ para $i, j \in I$ com $i \neq j$.

Um subconjunto $P \subseteq S$, é uma transversal parcial de $\mathcal{A}(I)$ se, existe uma injeção $\phi : P \to I$ tal que $x \in A_{\phi(x)}$, para cada x de P. Logo uma transversal parcial de $\mathcal{A}(I)$ é uma transversal de uma subfamília de $\mathcal{A}(J) = (A_i \ / \ i \in J)$ para algum $J \subseteq I$.

Agora, seja o grafo bipartido $G_{\mathcal{A}(I)} = (S \cup \mathcal{A}(I), E)$, associado a $\mathcal{A}(I)$. Os vértices x, $(x \in S)$ e A_i, $(A_i \in \mathcal{A}(I))$ são ligados pela aresta xA_i $(xA_i \in E)$ se, e somente se, $x \in A_i$.

Para $J \subseteq I$, o subconjunto $P \subseteq S$ é uma transversal (parcial) da subfamília $\mathcal{A}(J)$ se, e somente se, existe um matching M em $G_{\mathcal{A}}$ tal que, M emparelha J com P, isto é, J indexa os elementos de P tal que $x_j \in A_i$, com $x_j \neq x_s$ para $j \neq s$, $j, s \in J$. Então o matching matróide de $G_{\mathcal{A}(I)}$ restrito a S, denotado por $M_{\mathcal{A}(I)}(S, \mathcal{T})$, (onde $\mathcal{T}$ é a família de conjuntos independentes, que são os transversais parciais de $\mathcal{A}(I)$), e chamado matróide *transversal.* A função rank deste matróide esta dada pela seguinte proposição.

Proposição 5.6.1 *Seja $G_{\mathcal{A}(I)} = (S \cup \mathcal{A}(I), E)$ o grafo bipartido associado à $\mathcal{A}(I)$ família de subconjuntos de S indexados pelo I, então a função rank de $M_{\mathcal{A}(I)}(S, \mathcal{T})$ está dado por $r(X) = min\{|A(J) \cap X| + |I - J| \ / \ J \subseteq I$ (onde $A(J) = \bigcup_{s \in J} A_s$), para todo $X \subseteq S$.*

Vimos que o teorema de Hall, i.é., um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ tem um matching o qual cobre cada vértice de A se, e somente se, $\Gamma(X) \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$. Contudo nos grafos bipartidos que não satisfaz o teorema de Hall, existem subconjuntos de A com deficiência positiva. Estes subconjuntos possuiem algum privilegio com respeito a outros subconjuntos, que não são saturados por nenhum matching máximal de G. Em outras palavras, o subconjunto X de A, é emparelhado com um subconjunto $Y \subseteq B$ se, existe uma bijeção entre X e Y e a correspondência biunívoca de vértices é dada pela aresta, tal que as arestas que determinam a bijeção são independentes. Este conjunto de arestas de G é denotado por M_X e é chamado matching *parcial*, e também dizemos que X esta *contido* no matching M_X e escrevemos $X \prec M_X$, ou simplesmente $X \prec M$.

Uma reformulação do teorema de Bernstein, da uma condição necessária e suficiente de existência de um matching que satura simultáneamente X e Y.

Teorema 5.6.1 *Em um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, uma condição necessária e suficiente para que exista um matching que sature a ambos X e Y, é que:*

a) X deve ser emparelhado em B, isto é, $|\Gamma(U) \geq |U|$, $\forall U \subseteq X$, e
b) Y deve ser emparelhado em A, isto é, $|\Gamma(T) \geq |T|$, $\forall T \subseteq Y$,

Dem.
Para uma demonstração, vide [Cap. 7, [9]] □.

Para algum subconjunto $X \subseteq A$ o matching parcial M_X, é dito *próprio* se, o subgrafo denotado por $G_X = ((A - X), E - E(G[M_X]))$ satisfaz o teorema de Hall.

Exemplo 5.6.1 *Para cada X subconjunto próprio de A, o matching que satura a X no grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ sem deficiência positiva, é um matching parcial próprio de G.*

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Lema 5.6.1 *No grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, cada matching parcial próprio é um subconjunto de um matching maximal de G.*

Dem.

Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ e para o subconjunto próprio $X \subset A$ seja P_X um matching parcial próprio. De onde o grafo G_X é sem deficiência, logo pelo teorema de Hall, possui um matching N de $A - X$ em $E - M_X$.

Desde que, $A - X \neq \emptyset$ segue que $|N| \neq 0$. Por conseguinte o subconjunto de arestas $M = P_X \cup N$ de G é um matching completo de G e o matching máximal M contem estritamente a P_X, i.é., $P_X \subset M$ e esta completa a demonstração do lema. □

Existem vários resultados da teoria de transversal que são simplificados via matróides, assim uma generalização da versão transversal do teorema de Hall, é um resultado obtido por Rado [80], sobre uma condição necessária e suficiente da existência de um matróide transversal associada a uma familia de subconjuntos de um conjunto finito dado.

Teorema 5.6.2 *(Teorema de Rado) Seja $\mathcal{A}(I) = (A_i \; i \in I)$ uma família de subconjuntos de S e $M(S, \mathcal{F})$ um matróide sobre S com a função rank r. Então $(A_i \; i \in I)$ tem uma transversal o qual é independente em $M(S, \mathcal{F})$ se, e somente se, $r(\bigcup_{j \in J} A_j) \geq |J|$ para todo $J \subseteq I$.*

Dem.

Para uma demonstação, vide [80] e [Cap. 7, [113]] □.

Para outras aplicações e generalizações deste teorema, vide as referências [57], [75] e [104]. Também, vide [111].

Teorema 5.6.3 *(Uma variante do teorema de Rado) Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ e seja F a família formado pelos subconjuntos de A contidos em alguns matchings de G, i.é., $\mathcal{F} = \{X \subset A / X \prec N_X$, em $G\}$. então o par $T = (A, \mathcal{F})$, é um matróide chamado* transversal.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17

Dem.

A condição $F1$ se verifica, isto é, $\emptyset \in \mathcal{F}$.

A propriedade $F2$, se $X \in \mathcal{F}$ e $Y \subseteq X$, desde que o $X \prec N$, para algum matching N, também Y esta contido em algum subconjunto de N, portanto $Y \in \mathcal{F}$.

Verificar a propriedade $F3$, significa determinar um elemento $a \in X - Y$ (onde $X, Y \in \mathcal{F}$ com $|X| = |Y| + 1$) e provar que exite um matching N, tal que, $Y \cup \{a\} \prec N$.

Pela hipótese, exitem matchings denotados por M_X e N_Y tais que $X \prec M_X$ e $Y \prec N_Y$.

Consideremos o subgrafo H induzido pelo $M_X \Delta N_Y \subseteq E$, i.é., $H = G[M_X \Delta N_Y]$. É evidente que H é um subgrafo bipartido de G. Cada vértice $x \in H$ tem grau exatamente 1 ou 2, de onde todas as componentes de H são caminhos (disjuntos pelo vértice) ou circuitos pares.

Desde que, $X \prec M_X$, $Y \prec N_Y$ e $|M_X| = |N_Y| + 1$ então o grafo bipartido H tem tamanho ímpar. Pois, $|M_X \Delta N_Y| = |M_X \cup N_Y - M_X \cap N_Y| = |M_X \cup N_Y| - |M_X \cap N_Y| = |M_X| + |N_Y| - 2|M_X \cap N_Y|$.

Usando a igualdade acima, concluímos que $|E(H)| = |M_X \Delta N_Y| = 2(|N_Y| - |M_X \cap N_Y|) + 1$.

Como todos os circuitos de H são pares, então haverá um número ímpar de caminhos de tamanho ímpar. Tomemos (uma componente) $W_{[t_o,t_s]}$ o caminho ímpar de maior comprimento possível, e as arestas de M_X e de N_Y pertencem alternadamente ao caminho. É evidente que os extremos t_o e t_s do caminho não são extremos de nenhuma das arestas de N_Y, $(t_o, t_s \notin Y)$ e também pertencem a diferentes classes de cores de H (ou de G) e a aresta $t_o t_s$ não é adjacente a nenhuma aresta de N_Y.

Suponha que t_o seja um vértice de A. Por conseguinte o subconjunto $Y \cup \{t_o\}$ esta contido no matching $N_Y \cup \{t_o t_s\}$. Concluímos que existe um matróide sobre o conjunto A tendo como a família de subconjuntos independentes à $\mathcal{F}$, e o teorema está demonstrado. □

5.7 *Teoria de Matróides e Função Submodular*

A teoria de matróides esta estritamente relacionada com a teoria de funções submodulares. Esta conexão foi inciada implícitamente por Dilworth [24], e daram continuidade outros pesquisadores, entre eles por exemplo Nash-Williams e Edmonds-Fulkerson. Também, vide [25] e [73].

Uma função-conjunto $f : 2^S \to Z^+$ com as seguintes propriedades:

a) f é *normalizada*, i.é., $f(\emptyset) = 0$,

b) f é *monótona*, i.é., $A \subseteq B$ implica $f(A) \leq f(B)$, e

c) f é *submodular*,i.é., $f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B)$,

para todo os elementos $A, B \in 2^S$, f é chamada função *polimatroidal.*

Exemplo 5.7.1 *Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$. Para cada $X \subseteq A$ e $\Gamma(X)$ vizinhança de X então a função $f : 2^A \to Z^+$ dada por $f(X) = |\Gamma(X)|$, é uma função polimatroidal. Toda função rank de um matróide é polimatroidal, mas a recíproca não é consequentemente verdadeira. A função $R(X) = \{\rho(X) + |X - Y|\ \}$, é uma função rank de algum matróide se, a função $\rho(X)$ for polimatroidal (resultado obtido por Nas-Williams vide referência [83, cap.13].*

Teorema 5.7.1 *(Edmonds e Fulkerson) Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido com classes de cores A e B, e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos U de A para o qual existe um matching de G que satura U, i. é., $\mathcal{F} = \{U \subseteq A \,/ \exists M$ matching de G; $U \prec M\}$. Então $(A, \mathcal{F})$ é um matróide transversal sobre A. Análogamente induz um matróide sobre B.*

A partir do exemplo 5.7.1, podemos construir outra função submodular sobre o conjunto potência de A (ou de B), $g : 2^A \to N$, dada por $g(S) = \min \{|S - W| + |\Gamma(W)| \ / \ \forall W \subseteq S\}$. Pelo teorema de König, a função g da o número máximo de vértices em X, os quais podem ser emparelhados com algum subconjunto de B, por algum matching de G. De onde g é a função rank do matróide transversal sobre A (ou B), no grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$.

Para uma demonstração deste teorema, vide referências [31] e [89]. Para outra demonstração alternativa, vide parte II, capítulo 6.□

Parte II

G-Comportamento: Matching-Matróide-Fluxo

5.8 Introdução

Relembra-se que, o problema dos grafos $n-$extendíveis, são desenvolvidos sobre os grafos arbitrários e sob a hipótese de que o grafo em consideração possue algum matching perfeito, contudo o grafo bipartido completo $K_{n+1,n+1}$ é extendível, para mais detalhes vide [Gvozdjak, P. e Nešetřil, J., High girth and extendability, *Discrete Math.* 154 (1996) 77-84], mas a meta do problema formulado é diferente dos objetivos da classe dos grafos $n-$extendíveis.

Refére-se como o problema proposto o seguinte: Para um grafo bipartido dado $G = (A \cup B, E)$ e um inteiro não negativo δ, quantas arestas são necessários adicionar (resp. remover) a G tal que, o grafo aumentado G_δ (resp. reduzido G_δ^*) tenha deficiência igual a δ, e para que valores de δ, o grafo G_δ é munido de matchings, tal que o matróide matching, fluxos na rede e o matróide transversal abstratamente coincidem no grafo G_δ salvo a estrutura de formação. Para refirirmos este fato usaremos a expressão G-comportamento, que também abrange o significado de que, a existência de um matching máximo M de tamanho $\nu(G)$, $M_T = (A, \mathcal{F})$ um matróide transversal com rank $r = r(M_T)$ e fluxo com valor máximo v são iguais ou seja que, $v = r(M_T) = \nu(G)$, o qual é chamado o *teorema G-comportamento.*

Na literatura, para $\delta = 0$, os grafos G_δ possuem matchings completos de tamanho igual $|A|$. Esta caracterização é conhecido como o teorema de casamento de Hall, e um resultado equivalente apresenta-se conjuntamento sua demontração. Também apresentam-se outros resultados.

Capítulo 6

G-Comportamento de Matchings e Matróides

6.1 *Sistema e Rede Associados a um Bígrafo*

Relembremos que, para qualquer sistema $(S; \mathcal{A}(I))$ de subconjuntos de um conjunto dado S, existe uma relação binária $R \subseteq S \times I$, dada por $(s, i) \in R$ se, e somente se, $s \in A_i$, tal que $S = \bigcup_{i \in I} A_i = \mathcal{A}(I)$.

O grafo bipartido associado a $\mathcal{A}(I))$ é $G = (S \cup I, R)$, o qual é o mesmo que o grafo $G_{\mathcal{A}(I)} = (S \cup \mathcal{A}(I), E)$, desde que, $sRi \Leftrightarrow s \in A_i \Leftrightarrow$ existe a aresta sA_i de E.

Agora, um subconjunto $X \subseteq S$ é uma transversal parcial de $\mathcal{A}(I)$ se, e semente se, X é transversal de uma subfamília $\mathcal{A}(J)$ de $\mathcal{A}(I)$, ou seja que X pode ser coberto (ou interceptado) por algum matching M de G, tal que M emparelha X com $\mathcal{A}(J)$, então o matróide matching de $G_{\mathcal{A}}(I) = (S \cup \mathcal{A}(I), E)$ restrito a S é o matróide transversal cujos conjuntos independentes, são as transversais parciais de $\mathcal{A}(I)$, e também vale a reciproca, dado matróide transversal é um matróide matching, no grafo bipartido G, vide seção 6.4.

Agora, conjuntamente com os lemas 2.1.3, 3.6.1 e 4.3.1 e os teoremas,

3.6.2 e 5.7.1, tem-se a seguinte conclusão.

Teorema 6.1.1 *Consideremos $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido, e sejam um sistema, $\mathcal{A}(I)$, e uma rede $\mathcal{N}$ associados a G. Então estes três conceitos são equivalêntes, e por um abuso de notação, podemos escrever: $G \equiv \mathcal{A}(I) \equiv \mathcal{N}$.*

6.2 *Demonstração Alternativa do Teorema Edmonds-Fulkerson*

Uma demonstração alternativa do teorema de Edmonds e Fulkerson, é visualizar o matróide transversal como um matróide induzido por uma função polimatróidal, em outras palavras, para o grafo bipartido dado $G = (A \cup B, E)$, prova-se para uma relação definida no produto cartesiano $A \times B$, exite uma função polimotroidal o qual induz um matróide sobre A. Analogamente para uma relação contida no produto $B \times A$.

Pelo lema 3.3.2, consideremos a relação binária $\Gamma \subseteq A \times B$. A partir desta relação, definamos a função conjunto $f : 2^A \to N$, tal que, para cada subconjunto $S \subseteq A$, f associa o número inteiro positivo, i.é., $f(S) = |\Gamma(S)|$.

Pelo exemplo 5.7.1, f é uma função polimatroidal, além disso, f também verifica:

$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ e também $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.

Agora, denotemos por T_f todos os subconjuntos S de A com a propriedade $|\Gamma(Y)| \geq |Y|$ $\forall Y \subseteq S$. Ou seja que $S \in T_f$ se, e somente se, $|\Gamma(Y)| \geq |Y|$ $\forall Y \subseteq S$. É evidente que o par $(A, T_f) \equiv (A, f)$ é um matróide induzido pela função f. O matróide (A, T_f) é chamado *transversal* sobre o conjunto finito fundamental A.

Por outro lado, o teorema 3.3.5 conjuntamente com o lema 5.6.1, exite matching M em G o qual satura exatamente (algum) membro X da família



de conjuntos independentes do matróide (A, f) i.é., $X \prec M_X$.

A partir do lema 3.6.1, para o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ exite um sistema $(A; \mathcal{A}) \equiv (A; A_1, a_2, \ldots, A_m) \equiv (A; \{A_i \ / \ i = \overline{1,m}\})$. Desde que, $S \subseteq A$, é uma transversal parcial de $\mathcal{A}$ se, e somente se, existe uma função biunívoca $g : S \to I$ (onde $I = \{1, \ldots, m\}$ é conjunto de índices do sistema $\mathcal{A}$) tal que para todo $s \in S$, $s \in A_{g(s)}$. Por conseguinte os membros do T_f são exatamente os transversais das subfamilías de $\mathcal{A}$. E a função rank do matróide é obtido como um caso particular do exemplo 5.7.1, e está completa a demonstração do teorema. □

6.3 *Um Teorema de Tipo Hall*

Vimos na seção 3.3 da primeira parte desta dissertação, que a deficiência de um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, pode ser um inteiro não positivo ou positivo.

Se exite um $X \subseteq A$ máximal, tal que, $|X| > |\Gamma(X)|$, então o inteiro positivo $d = |X| - |\Gamma(X)|$, indica o número de vértices de A que não são saturados por nenhum matching máximo de G, de onde pode ocorrer dois fatos:

A primeira, é quando retirarmos d vértices de X conjuntamente as arestas incidentes, o subgrafo $G - X$ satisfaz o teorema de Hall, ou seja que, G possui um matching máximo de tamanho menor do que $|A|$, o qual, é um resultado de tipo do teorema de Hall,é o teorema 6.3.1 (abaixo), e segundo caso, é que o grafo $G - X$ tém deficiência positiva. Contornar este caso, significa tentar refinar o conjunto X, por exemplo no caso que X seja um conjunto crítico. E o tema que a continuação estudaremos.

No caso que a deficiência de G for um enteiro não positivo, ou seja que, G verifica o teorema de Hall. Neste caso, se verifica as hipóteses do teorema Matching-matróide-fluxo máximo, vide este resultado no seguinte capítulo.

Lema 6.3.1 *Se o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ não possui matching que satura A, então haverá pelo menos um subconjunto U de A tal que não veri-*

fica a desigualdade $|U| \leq |\Gamma(U)|$. *Equivalentemente o grafo* G *não verifica o teorema de Hall.*

A seguir, tem-se um teorema de tipo Hall, em vista que o teorema torna-se de Hall, se o tamanho do matching for igual à cardinalidade do conjunto A.

Teorema 6.3.1 *Um grafo bipartido* $G = (A \cup B, E)$ *tem um matching* M *de tamanho* s, *(i,é.,* $|M| = s$, $s < |A|$*) se, e somente se,* $|\Gamma(X)| \geq |X| + t - |A| = s - |A - X|$, *para todo* $X \subseteq A$.

Dem.
Provemos a condição necessária, admitamos que o grafo bipartido G possui um matching, digamos M de tamanho s, então existe um subconjunto U de A tal que não é saturado por M, daí a cardinalidade de U é igual a $|A| - s = r$, ou seja que, existem exatamente r vértices de A não saturados.

Adicionemos r novos vértices a B e tais que sejam adjacentes a cada vértice de A, e novo grafo bipartido denotado por $G' = (A \cup [B \cup B_r], E \cup E_r)$, tendo $A \cup B \cup B_r$ e $E \cup E_r$ como conjuntos vértices e arestas, respectivamente, em particular tem $|E \cup E_r| = r|A|$.

Desde que cada vértice x no grafo G', tem grau igual a $d_G(x) + r$, então $|T| \leq |\Gamma(T)|$, quaisquer que seja T subconjunto de A (no grafo bipartido G').

Por outro lado, $\Gamma_{G'}(T) = \Gamma_G(T) \cup E_u$, onde E_u é o subconjunto de $B \cup B_r$, com p vértices, para algum $1 \leq p \leq r$, ou seja que, $|\Gamma_{G'}(T)| \leq |\Gamma_G(T)| + r$.

Por conseguinte, $|\Gamma_{G'}(T)| \leq |\Gamma_G(T)| + |A| - s$, e como $|T| \leq |\Gamma_{G'}(T)|$ para todo $T \subseteq A$, concluímos que $|\Gamma_G(T)| \geq |T| + s - |A| = s - |A - T|$.

Agora, provemos a condição suficiente, suponhamos $\Gamma(X) \geq |X| + s - |A|$ para todo $X \subseteq A$ e s é um inteiro positivo fixado tal que $s \leq |A|$.

Se $s = |A|$, então $|\Gamma(X) \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$, logo pelo teorema de Hall, existe um matching de tamanho s.

Para $s < |A|$, existe um matching de tamanho s, equivale provar que existe um subconjunto W de A de cardinalidade s que esta em corres-

pondência biunívoca com algum subconjunto de B.

Desde que, $|A| > s$ então haverá subconjunto W em A tal que, $\Gamma(W) + |A| \geq |W| + s$. Daí o subconjunto W tem deficiência positiva.

Se for $\text{def}(W) > |A| - s$, então temos $|W| > |\Gamma(W)| + |A| - s$.

Pela hipótese, para $W \subseteq A$ se verifica $|\Gamma(W)| + |A| - s > |W|$, de onde temos $|\Gamma(W)| + |A| - s > |\Gamma(W)| + |A| - s$ o qual é um absurdo, isto se deve ao supor que $\text{def}(W) = |W| - |\Gamma(W)| > |A| - s$, logo deve ser $\text{def}(W) = |W| - |\Gamma(W)| \leq |A| - s$.

Agora, se $\text{def}(W) = |W| - |\Gamma(W)| \leq |A| - s$, então podemos escolher o subconjunto Y a partir de W com elementos menor o igual a $|A| - s$ e daí o subgrafo $G_1 = ((A - Y) \cup B, E_1)$ resulta sem deficiência. E aplicando o teorema de Hall, o grafo G_1 possui um matching M de tamanho maior ou igual a $|A - Y| = |A| - |Y| = |A| - |A| + s$ ou seja que, $M \geq s$, e o teorema esta demonstrado.

Agora, consideremos o subconjunto $W \subseteq A$ com $|W| \geq s$ e tal que $|W| \leq |\Gamma(W)|$, então o subgrafo $G_2 = ((A - (A - W)) \cup B, E_2)$ onde E_2 é o conjunto de tadas as arestas de G menos as que incidem em $A - W$, assim o G_2 verifica o teorema de Hall, logo G_2 possui um matching M de tamanho $|A - (A - W)| = |A| - |A| + |W| = |W| \geq s$, ou seja que, $|M| \geq s$ e M é um matching de G.

Se o grafo G não possuir matching de tamanho s equivalentemente, nenhum subconjunto de A de tamanho s é emparelhado com algum subconjunto de B, isto implica que $|T| > |\Gamma(T)|$ quaisquer que seja T o subconjunto de A.

Tomemos o $T \subseteq A$ com $|T| = s$, portanto a deficiência de $\text{def}(T) > 0$ ou seja que, $|T| > |\Gamma(T)|$ e conjuntamente com a hipótese implica que $|T| > |\Gamma(T)| \geq |T| + s - |A|$ de onde temos que $|T| > |A|$, e esta completa a demonstração do teorema .□

A demonstração da condição necessária deste teorema nós influencia ao estudo mais detalhado sobre possivel existência de um grafo $\delta-$aumentado com deficiência não positiva, tópico a ser desenvolvido no seguinte capítulo.

6.4 *G-Comportamento dos Matróides Matching e Transversal*

Dado o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, ou $G \equiv \mathcal{A}$. Estuda-se que, se para algum subconjunto de pontos independentes de A existe uma família de arestas independentes, ou seja que, se uma coleção de pontos constitui um subconjunto de distintos representativos de algum sistema, então existe um matching de mesmo tamanho que a cardinalidade do conjunto de distintos representativos, em outras palavras, à família de subconjuntos independentes de um matróide corresponde outra família de matchings, de onde os matróides transversal e matching são abstratamente o mesmo, apenas se diferenciam na estrutura, isto é, no tipo de elementos que eles possuem.

Denomina-se este assunto como um G-comportamento de matchings e transversais. Este resultado têm sua origem nos trabalhos de Rado e de Edmonds-Fulkerson, como também têm influenciado os teoremas de Hall-Ore e o teorema de tipo Hall.

Definição 6.4.1 *Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido simples. Dizemos que G possui uma transversal parcial de cardinalidade s em A, se existe um subconjunto de s arestas independentes de G, tal que satura pelo menos um conjunto de distintos representativos de algum sistema associado à G.*

A partir dos resultados anteriores e conjuntamente com a definição temos o seguinte teorema.

Teorema 6.4.1 *Um grafo bipartido G possui uma transversal parcial de cardinalidade s se, e somente se, G possui um matching de tamanho s.*

Dem.

Admita-se o bigrafo dado G identificado com algum sistema $\mathcal{A}$.

Assumamos que G possui transversal parcial de tamanho s então pelo teorema de Rado, existe um subconjunto independente X de A com $|X| = s$,

no matróide transversal $M_{\mathcal{T}} = (A, \mathcal{T})$.

Pelo teorema de Edmonds-Fulkerson, $r(X) = \min\{|X - W| + |\Gamma(W)| / W \subseteq X\} = |X| + \min\{|\Gamma(W)| - |W| / W \subseteq X\} = |X| + \max\{|W| - |\Gamma(W)| / W \subseteq X\}$.

Desde que, X é independente então $\max\{|W| - |\Gamma(W)| / W \subseteq X\} = 0$, daí $|W| - |\Gamma(W)| \leq 0; \forall W \subseteq X$.

Pelo teorema de Hall, o grafo $G[X]$ possui um matching completo M de X em algum subconjunto de B, e sendo $G[X]$ o subgrafo de G resulta, M um matching de tamanho s, em G.

Agora, suponhamos que G possui um matching M de tamanho s e seja $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ o subconjunto de A saturado por M.

Consideremos o sistema $\mathcal{A} = (A_i; i \in B)$ (indexado pelo conjunto $B \equiv \{1, 2, \ldots, m\}$) e A_i dado por $\Gamma(i)$ para cada $i = \overline{1, m}$.

Desde que, os elementos de U são distintos, podemos escolher uma subfamília $\mathcal{A}_1 = (\Gamma(1), \ldots, \Gamma(s))$ de $\mathcal{A}$ tal que $x_i \in \Gamma(i)$ para $i = \overline{1, s}$. De onde U é um conjunto representativo distinto da subfamília $\mathcal{A}_1$. Logo U é uma transversal parcial de $\mathcal{A}$. Por conseguinte pelo teorema de Rado, U é um conjunto independente do matróide transversal sobre A. Como o sistema $\mathcal{A}$ é associado a G, resulta que U é uma transversal parcial indenpendente de tamanho s em G, e a demonstração do teorema está completa .□

6.5 *Deficiência Aresta de um Bígrafo*

Para enunciar uma nova alternativa do teorema de casamento de Hall, introduzemos a noção de *deficiência aresta* de um grafo bipartido, via o termo aresta a diferença da definição de deficiência (vértice) de um bígrafo de Ore.

Definição 6.5.1 *Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ e $F \subseteq E$. A deficiência de subconjunto de arestas F de E em G, denotado por $def^a_G(F)$*

ou $def^a(F)$, *é definido como* $def^a_G(F) = |E(G[F])| - |M_F|$, *onde* M_F *é o matching máximo no subgrafo* $G[F]$. *Desde que,* $|E(G[F])| \geq |M_F|$, *segue que a deficiência de* F *é não negativa, i.é., maior ou igual a zero para todo* $F \subseteq E$.

A deficiência (aresta) do grafo G *denotado por* $def^a(G)$ *é definida por* $def^a(G) = max\ \{\ def^a(F)/F \subseteq E\} \equiv max\ \{|E(G[F])| - |M_F|\ /\ \forall F \subseteq E\}$.

Quando o grafo bipartido G verificar o teorema de Hall, i.é., existe uma função bijetora entre A e algum subconjunto de B, ou que equivale a dizer que existe um fator H de G tal que $def^a(H) = 0$. Por conseguinte a busca de um matching máximo é equivalente determinar um fator de G com a deficiência-aresta zero, o qual acarreta o seguinte teorema.

6.5.1 *Uma Alternativa do Teorema de Hall*

Teorema 6.5.1 *Um grafo bipartido* $G = (A \cup B, E)$ *tém matching completo de* A *em* B *se, e somente se,* G *possui um fator* H *com* $def^a(H) = 0$.

Capítulo 7

Grafos $\delta-$Aumentado e δ-Reduzido

7.1 *Conjuntos*

Dado um conjunto A finito. Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ (i.é., cujos membros são conjuntos não vazios) *cobre* A se, e somente se, $A = \bigcup X_{X \in \mathcal{F}}$, e uma família $\mathcal{F}$ que cobre A é *disjunta* se, e somente se, os membros da família são disjuntos dois a dois.

Se existe uma família não necessariamente disjunta tal que cobre um conjunto finito A, então a partir desta família podemos substrair uma família disjunta que cobre A mais formalmente.

Teorema 7.1.1 *Se $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que cobre A, então existe uma família disjunta de n membros, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tal que cobre a A, isto é, $A = \bigcup_{i=1}^{n} B_{i=1}$.*

Dem.

Se a família $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ for disjunta, então o teorema está provado. No outro caso definamos os conjuntos:

$B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, (podemos assumir $B_1 \neq \emptyset$)

$$B_2 = \bigcup_{1\leq i_1<i_2\leq n}(A_{i_1} \cap A_{i_2} - B_1),$$

$$B_3 = \bigcup_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} - B_1 \cup B_2),$$

$$\vdots$$

$$B_t = \bigcap_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_t\leq n}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_t} - \bigcup_{j=1}^{t-1} B_j),$$

$$\vdots$$

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n}(A_k - \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j).$$

Agora, provemos que os conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, são disjuntos dois a dois.

Admitamos que existem índices s e r tal que $B_s \cap B_r \neq \emptyset$, podemos supor sem perda da generalidade que $s < r$, então existe um elemento $x \in B_s \cap B_r$, de onde $x \in B_s$ e $x \in B_r$.

Desde que, $s < r$ (de onde $s \leq r-1$), então pela definição, B_r é da forma $B_r = \bigcup_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_r\leq n}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_{s-1}} \cap A_{j_s} \cap A_{j_{s+1}} \cap \ldots \cap A_{j_r} - B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{s-1} \cup B_s \cup B_{s+1} \cup \ldots \cup B_{r-1})$.

Pela hipótese (de suposição) x é elemento de B_r de onde $x \notin B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{s-1} \cup B_s \cup B_{s+1} \cup \ldots \cup B_{r-1}$, em particular $x \notin B_s$, o qual contradiz ao fato de $x \in B_s$. Isto se deve ao supor que os conjuntos B_s e B_r não são disjuntos. Portanto, a família de conjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são disjuntos dois a dois.

É evidente que $A = \cup_{i=1}^{n} B_i$, e esta concluida a demonstração do teorema. □

7.2 *Grafos $\delta-$Aumentados, G_δ*

Definição 7.2.1 *Dado o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ com deficiência $def(G) = \delta > 0$, o grafo denotado por $G_\delta = (A \cup B, E \cup E_\delta)$ (onde E_δ é o*

conjunto mínimo de arestas anexadas a G), é denomindo $\delta-$aumentado *ou simplesmente* G_δ *de* G *se:*

i) G_δ *é minimal e único contendo como o subgrafo a* G *(ou seja que* $V(G) \subseteq V(G_\delta)$ *e* $E(G) \subseteq E(G_\delta)$*) e que verifica o teorema de Hall,*

ii) se exite outro grafo bipartido H *com mínimo número de arestas tal que verifica o teorema de Hall e* G *é subgrafo ou isomorfo a um subgrafo de* H*, então* G_δ *é um subgrafo ou isomorfo a um subgrafo de* H*, e*

iii) cada matching máximo de G *é um matching parcial de* G_δ*. Se não houver confusão, diremos indistamente grafo* $G_\delta-$*aumentado ou simplesmente* G_δ*. As vezes, usaremos o termo aumentável para os grafos com* $def(G) > 0$*.*

Lema 7.2.1 *Suponha que cada componente do grafo bipartido* $G = (A \cup B, E)$*, tem pelo dois vértices em* A*. Se* $G = (A \cup B, E)$ *é uma floresta (ou árvore) tal que todas as raizes pertencem à* A*, então* G *é aumentával, e a recíproca não é necessariamente verdadeira.*

Cada árvore tém pelo menos duas raizes e pela hipótese se o subconjunto $X \subseteq A$ contem as raizes, então $|X| > |\Gamma(X)|$, e daí concluimos que $\text{def}(G) > O$ e o lema esta demonstrado. □

Um grafo bipartido H é aumentado de G se, e somente se, H é isomorfo a G_δ, onde δ é a deficiência do grafo G.

Lema 7.2.2 *Um grafo bipartido aumentável possui um único grafo aumentado, ao menos o isomorfismo.*

A demonstração segue da definição. □

Lema 7.2.3 *Se o grafo* $G = (A \cup B, E)$ *é aumentável então sua deficiência é dada por:*

i) Para $|A| \neq |B|$*,* $def(G) = 2|A| + r - \nu(G)$ *ou* $def(G) = 2|B| + s - \nu(G)$ *(onde* r *e* s *são inteiros positivos) ou*

ii) def(G) = 2|A| − 2ν(G) (ν(G) denota o número máximo de arestas independentes em G).

A demonstração segue do fato que $\nu(G) = \frac{1}{2}(|A \cup B| - def(G))$. □

7.3 *Grafos G_δ e Saturado*

Como o grafo G_δ−aumentado é o menor grafo sem deficiência (positiva) que têm como um subgrafo próprio G, onde δ=def$(G) > 0$, em enquanto o grafo H *saturado* ou de Lovász [53], é um grafo simples fatorizavel H, tal que adicionando uma nova aresta a G, o número de seus 1-fator aumenta, i.é., a nova aresta adicionda torna-se numa aresta permitida (uma aresta w de H é *permitido* se w pertence a algum matching maximal de H, caso contrário, dizemos que w é *esquecido*). Em outras palavras, um grafo G com um matching perfeito, é saturado se, adicionando uma aresta qualquer aumenta o número de matchings perfeitos em G. Portanto o estudo sobre os grafos δ−aumentados está distante do problema da classe dos grafos n−estendíveis.

922/00

Suponhamos que o problema de saturar por um matching a todos os elementos de A (num grafo bipartido dado $G = (A \cup B, E)$ com def$(G) > 0$) for possível, então o grafo G_δ verifica o teorema de Hall (e sabemos que é uma das metas da presente dissertação). Agora, questionamos o problema recíproco, que a priori, também é verdadeiro, no seguinte sentido, removendo todas (ou algumas) arestas permitidas (conjuntamente os vértices incidentes) a partir de G_δ, podemos obter um grafo com deficiência positiva, o qual será isomorfo ao grafo dado G?. Contudo este processo não é uma visão imediata, por isso deixaremos de lado este problema, e nos faremos um estudo com a conjectura que, o processo inverso seja verdadeiro, em outras palavras, o subgrafo (obtido pela remoção de $\delta - 1$ vértices conjutamente com todas as arestas incidentes nestes vértices), seja isomorfo ao grafo dado.

7.4 *Interpretação Geómetrica de G_δ*

Inst. de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP
BIBLIOTECA
S. J. Rio Preto

Consideremos o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ com $\text{def}(G) = \delta > 0$, seja S o único subconjunto crítico minimal de G, e ponha $|S| - |\Gamma(S)| = \delta$, de onde existem δ vértices não saturados por matching completo de G.

Denotemos por $X_\delta = \{x_1, \ldots, x_\delta\}$ o conjunto de vértices de S que não são saturados por matching de G. Podemos assumir sem perda da generalidade que $\Gamma(X_\delta)$ seja conjunto unitário, $\{y\}$, e as arestas que ligam X_δ com $\{y\}$ sejam, $a_1 = x_1y, a_2 = x_{2y}, \ldots, a_{\delta-1} = x_{\delta-1}y, a_\delta = x_\delta y$ Agora, suponhamos que estas arestas, representem δ tubos e todos eles têma mesma dimensão como também do mesmo diámetro, e os vértices $x_1, \ldots, x_{\delta-1}, x_\delta$ representam as fontes (de algum líquido) do fluxo e o vértice y o receptor. O receptor y, tém capacidade de recever examente o fluxo de uma das δ tubulações, por conseguinte os $\delta - 1$ fluxos (ou tubulações) não possuiem alguma recepção (ou saida). Admíta-se também a impossibilidade de incrementar a capacidade do receptor y.

Desde que, para o fluxo cujo valor máximo é igual à capacidade de uma das δ tubulações, não há problema, mas sim para os fluxos máximos restantes e sendo uma solução, é a construção de $\delta - 1$ tubulações (desde que, não se pode mexer os $\delta - 1$ tubulações exitentes, entre os δ tubulações dados) iguais a $a_1 = x_1y, a_2 = x_{2y}, \ldots, a_{\delta-1} = x_{\delta-1}y$ e conjuntamente com seus receptores, $\delta - 1$ receptores iguais à y, o que significa literalmente *copiar* y, isto é, $y^1, y^2, \ldots, y^{\delta-1}$ e adicionar $\delta - 1$ novas arestas (tubulações) que são da forma: $x_1y^1, x_2y^2, \ldots, x_{\delta-1}y^{\delta-1}$ e obtemos o grafo $\delta-$aumentado, e pela construção o grafo G_δ, verifica o teorema de Hall.

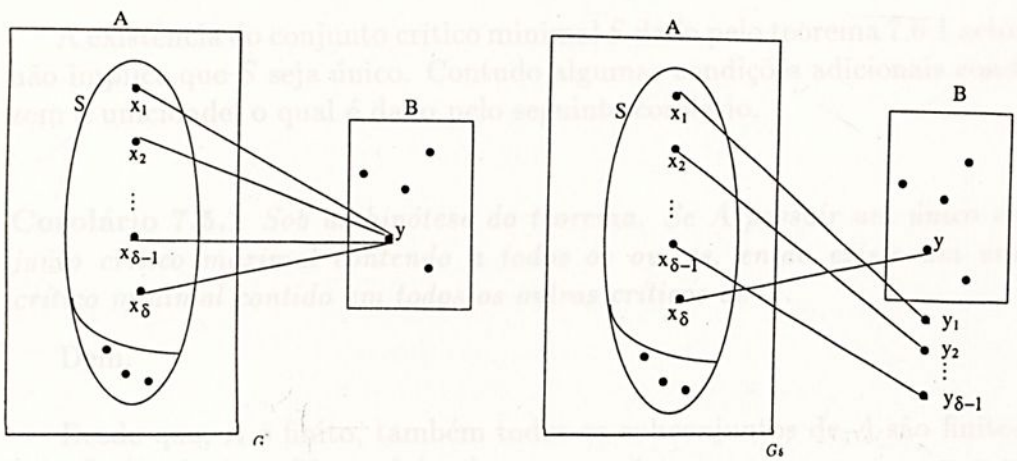


Fig.: O grafo G e o grafo δ-aumentado G_δ.

7.5 *Existência de Conjuntos Críticos em Bígrafos*

A seguir trataremos da existência de um conjunto crítico minimal em G, quando o grafo bipartido considerado $G = (A \cup B, E)$, tenha deficiência positiva, antes provaremos o seguinte resultado.

Teorema 7.5.1 *Se o grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$ é aumentável, então existe um subconjunto crítico minimal em G.*

Dem.

Pela hipótese, a família $F = \{X \subseteq A / def(X) = def(G)\}$ não é vazia e usando o lema 3.3.4, o conjunto S, dado por $S = \bigcap_{X \in F} X$, é crítico de G.

Se S for minimal, o teorema estará provado. Caso contrário, assumamos que U seja minimal. Desde que, U é crítico, então $U \in F$ e pela definição de S segue que $S \subseteq U$, o que contradiz que U não é minimal e o teorema esta provado. □

A existência do conjunto crítico minimal S dado pelo teorema 7.6.1 acima, não implica que S seja único. Contudo algumas condições adicionais conduzem à unicidade, o qual é dado pelo seguinte corolário.

Corolário 7.5.1 *Sob as hipótese do teorema. Se A possuir um único conjunto crítico máximal contendo a todos os outros, então existe um único crítico minimal contido em todos os outros críticos de G.*

Dem.

Desde que, A é finito, também todos os subconjuntos de A são finitos e seja S o conjunto crítico máximal.

Se F é uma família de subconjuntos críticos de G, então pelo lema 3.3.4 e conjuntamente com o teorema 7.6.1, segue que os conjuntos

$$X_o = \bigcap_{X \in F} X \text{ e } Y_o = \bigcup_{X \in F} X$$

são críticos minimal e máximal, respectivamente de G e o corolário esta provado. □

Teorema 7.5.2 *Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido aumentável e X um subconjunto não vazio de A.*

Se X é um conjunto crítico minimal de G, então para cada $y \in \Gamma(X)$ existem pelo menos dois elementos (distintos) s e t de X tal que $sy, ty \in E$.

Dem.

Desde que, G é aumentável e X é crítico temos $\text{def}(G) = |X| - |\Gamma(X)| > 0$.

Por absurdo, assumamos que exista um elemento b de $\Gamma(X)$ tal que o vértice b seja exatamente único estremo da aresta e (isto é, $e = (a, b)$), a qual incidente no vértice a de X, em outras palavras b é o único vértice (ou vizinho) adjacente de a em G, portanto $\Gamma(\{a\}) = \{b\}$. De onde a remoção do vértice a conjuntamente a única aresta incidente e, não altera a deficiência de G, (pelo principio de inclusão e exclusão) ou seja que

$$\begin{aligned} \text{def}(X) = \text{def}(G) &= |X| - |\Gamma(X)| \\ &= |X| - 1 - (|\Gamma(X)| - 1) \\ &= |X - a| - |\Gamma(X - a)| \\ &= def(X - a). \end{aligned}$$

De onde resulta que, $X - a$ é um conjunto crítico de G e desde que, $X - a \subset X$, o conjunto X não pode ser conjunto crítico minimal, o qual é uma contradição, isto se deve ao admitir que existe um elemento b de $\Gamma(X)$ com grau um. Por conseguinte cada vértice t de $\Gamma(X)$ tem grau pelo menos 2, i.e. $d_G(t) \geq 2$ em G, e o qual completa a demonstração do teorema. □

7.6 *Grafos $\delta-$Reduzidos, G_{δ^*}*

Definição 7.6.1 *Seja o grafo bipartido $G = (A \bigcup B, E)$ com $def(G) = \delta > 0$ e o subconjunto crítico minimal $S \subseteq A$ de G que contém δ vértices não saturados por matching máximo de G. O grafo denotado por $G_{\delta^\bullet}$ e definido como $G_{\delta^\bullet} = (A_\delta \cup B, E_\delta) \equiv G - \{a_1, \ldots, a_\delta\}$ (onde $A_\delta = A - \{a_1, \ldots, a_\delta\}$ e $E_\delta = E - \{$conjunto de arestas incidentes nos δ vértices de $A\}$) chama-se o grafo δ-reduzido de G se, $G_{\delta^\bullet}$ verifica o teorema de Hall, e o matching completo de A_δ em B (em $G_{\delta^\bullet}$), denotado por M_δ é chamado matching* interior *de G.*

Um grafo bipartido H é chamado grafo δ-reduzido, se H for isomorfo a $G_{\delta^\bullet}$.

Um grafo bipartido G é chamado *completo* se, existem os grafos G_δ e $G_{\delta^\bullet}$ tal que, $G_{\delta^-} \subset G \subset G_\delta$.

A seguir trataremos quando um grafo bipartido com deficiência positiva contém um subgrafo cuja deficiência é menor pelo menos em uma unidade da deficiência do grafo dado, mas antes provaremos o seguinte

Teorema 7.6.1 *Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo bipartido e S um subconjunto não vazio de A.*

Se S for um único crítico minimal e $\bar{S} = A - S$ um conjunto sem deficiência, então o conjunto $S - a$ é crítico minimal de $G - a$ se, $a \in S$.

Dem.

Para algum $a \in A$ o subconjunto $S - a$ não consequentemente será crítico no grafo $G - a \equiv ((A - a) \bigcup B, E)$. Pois $a \in A$ não implica que $a \in S$.
Na hipótese que $S - a$ seja crítico, então segue do fato que S é único e o conjunto $\bar{S}$ é sem deficiência positiva, que o conjunto $S - a$ é crítico minimal e único no grafo $G - a$.

Se $S - a$ não for único, e seja U conjunto crítico minimal de $G - a$. Consideremos $(S - a) \bigcap U \neq \emptyset$, então pelo lema 4.2.5, o conjunto $(S - a) \bigcap U$ é também crítico. Se $(S - a) \bigcap U \subset (S - a)$, então $(S - a) \bigcap U$ é minimal, o qual contradiz a $S - a$ minimal, portanto deve ser $(S - a) \bigcap U = S - a$, de onde $S - a = U$.

Agora, se for $(S - a) \bigcap U = \emptyset$. De onde $U \subset \overline{S - a}$ e como $S - a \subset S$ temos que $\bar{S} \subset \overline{S - a}$.

Do fato que os conjuntos U e $\bar{S}$ estão contidos no mesmo conjunto $\overline{S-a}$ e pela hipotesis $\text{def}(\bar{S}) \leq 0$, então concluímos que $U \not\subseteq \bar{S}$.

Por outro lado se ocorrer $\bar{S} \subset U \subseteq \overline{S-a}$, então $S-a \subset \bar{U}$ e por conseguinte $a \in U$.

Sendo os conjuntos $S-a$ e U disjuntos então $U = \{a\}$ ou $U = \{a\} \cup T$, onde $T = \{x \in A / x \notin S\}$ é algum subconjunto de $\bar{S}$.

Se for $U = \{a\}$, então $\text{def}(U) = 0$ o qual é impossivel.

Agora, consideremos o conjunto $U = \{a\} \bigcup T$ e pela definiço de deficiência do conjunto temos

$$0 \leq def(U) = def(U) = 1 + |T| - |\Gamma(a)| - |\Gamma(T)| + |\Gamma(a) \bigcap \Gamma(T)|$$

ou seja que,

$$def(T) = def(U) + |\Gamma(a)| - |\Gamma(a) \bigcap \Gamma(T)| - 1.$$

Desde que, $\Gamma(a) \bigcap \Gamma(T) = \emptyset$, concluímos que $\text{def}(T) = def(U) > 0$, o qual é impossivel pois, $\text{def}(\bar{S}) \leq 0$. Por conseguinte o conjunto crítico minimal $S-a$ é único e o teorema esta provado .□

O seguinte teorema garante, que um grafo bipartido com deficiência $\delta > 0$, possui um subgrafo com deficiência igual a $\delta - 1$ se o vértice removido pertence ao único conjunto crítico minimal.

Teorema 7.6.2 *Seja o grafo bipartido $G = (A \bigcup B, E)$, com def$(G) = \delta > 0$ e a um vértice de A.*

Se S for um único conjunto crítico minimal de A, então a deficiência do grafo $G_1 \equiv G - a$ é menor em uma unidade de δ se $a \in S$ e o conjunto $S-a$ é crítico no G_1. No outro caso δ é inalterável.

Dem.

Pela hipótese temos $|S| - |\Gamma(S)| = \delta$. É evidente que a deficiência dos grafos G e $G_1 \equiv G - a$, permanecem inalterados se $a \notin S$, pois $S = S - a$ e

$\Gamma(S) = \Gamma(S - a)$.

Agora, suponhamos que o vértice $a \in S$. Sendo $S - a$ crítico no grafo $G_1 = ((A - a) \cup B, E)$, então

$$def(G_1) = def(S - a) = |S| - |\Gamma(S)| + |\Gamma(a) - |\Gamma(S - a) \cap \Gamma(a) - 1.$$

Desde que,

$$\Gamma[(S - a) \cap a] \subset \Gamma(S - a) \cap \Gamma(a) \subset \Gamma(a),$$

segue-se que $|\Gamma(a) - |\Gamma(S - a) \bigcap \Gamma(a)| = 0$. Concluimos que $\text{def}(G_1) = \delta - 1$, e o teorema esta demonstrado .□

Corolário 7.6.1 *Sob a hipótese do teorema 7.6.2, seja o grafo bipartido* $G = (A \cup B, E)$ *com* $def(G) = \delta > 0$ *e* S *único conjunto crítico minimal de* G *e* $\bar{S} = A - S$ *o conjunto sem deficiência, então a deficiência do grafo* $G_i = G - \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ *é menor em* i *unidades que o* δ *se* $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\} \subset S$, *i.é.,* $defG_i = defG - \{a_1, a_2, \ldots, a_i\} = \delta - i$.

A demonstração é uma repetição do argumento do teorema 7.6.2, .□

7.7 *Vértices Copiáveis*

Definição 7.7.1 *Consideremos o grafo bipartido* $G = (A \cup B, E)$ *e suponha que exite algum subconjunto de vértices* S *de* A *tal que* $def(S) = def(G) = \delta > 0$.

Um vértice t *em* G *é* copiável *se para algum inteiro positivo* k *existe uma aplicação bijetiva* $\phi : N(t) \cap S \to t \cup \{k$ *vértices cópias de* $t\}$ *(com* $N(t) \cap S \neq \emptyset$ *e tal correspondência biunívoca é estabelecida por algumas arestas de* G *e pelas arestas* incidentes *em* G. *Uma aresta* e *é* incidente *em* G, *se* $e \notin E(G)$ *e pelo menos um dos seus extremos é uma cópia de algum vértice de* G.

Exemplo 7.7.1 *Seja* $N(t) \cap S = \{x_1, \ldots, x_s\}$ *para algum* S *crítico de* G) *e o conjunto* $t \cup \{s - 1$ *cópias de* $t\} \equiv \{t, t^1, \ldots, t^{s-1}\}$, *então as arestas*

$x_1t^1, x_2t^2, \ldots, x_{s-1}t^{s-1}$, *são incidentes em* G, *enquanto a aresta* x_st *não é incidente em* G.

Lema 7.7.1 *Todo grafo bipartido aumentado possui duas classes de arestas, uma formada pelas arestas do bigrafo dado* G *e a outra formada pelas arestas incidentes em* G.

Dem.

Seja $G_\delta-$aumentado do grafo bipartido de $G = (A \cup B, E)$, então existe pelo menos um $X \subseteq A$ tal que $|X| > |\Gamma(X)|$. Sem perda da generalidade podemos admitir que existe exatamente o único conjunto crítico X de G. Se os δ vértices de X são adjacentes ao vértice y de B, então pelo teorema 7.8.1, exite pelo menos $\delta - 1$ cópias de y e tal que os conjuntos X e $\Gamma(X) \cup Y'$ (Y' denota o conjunto das $\delta - 1$ cópias de y) são equicardinais, logo temos uma família E_δ com $\delta - 1$ arestas incidentes em G.

Consequêntemente G_δ tém como classes de arestas E (de G) e E_δ e o lema esta demonstrado. □

Teorema 7.7.1 *Seja* $G = (A \cup B, E)$ *o grafo bipartido com deficiência* $def(G) = \delta > 0$.

Suponhamos que existe um único conjunto critico minimal S *de* G *tal que* $\bar{S} = A - S$ *é sem deficiência. Então existe pelo menos* $|\Gamma(S)|$ *vértices copiáveis em* G.

Dem.

Desde que, $|S| - \delta > 0$ (onde $\text{def}(G) = |S| - |\Gamma(S)| = \delta$), podemos considerar o conjunto $\Gamma(S) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Pelo teorema 7.6.2, $d_G(t_i) \geq 2$ $i = \overline{1,n}$ e daí as vizinhancas $N(t_i)$ para cada índice $i = \overline{1,n}$ interceptam a S.

Agora, pelo teorema 7.2.1, podemos cobrir a S com uma família de conjuntos disjuntos dois a dois, $S = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$. (A família $\{Y_i / i = \overline{1,n}\}$ é obtida a partir de $\{N(t_i) \cap S;\ i = \overline{1,n}\}$, quando os membros desta família não foram disjuntos dois a dois).

Tomemos $|Y_1| - 1$ cópias do vértice t_1, $|Y_2| - 1$ cópias do vértice t_2, assim por diante até que finalmente o vértice t_n é copiado $|Y_n| - 1$ vezes.

Para cada índice fixado $j = 1, 2, \ldots, n$, denotemos por $t_j^{|Y_j|-1}$ o conjunto formado pelos $|Y_j| - 1$ cópias de vértice t_j isto é,

$$t_j^{|Y_j|-1} = \{t_j^k \; ; \; k = 1, \ldots, |Y_j| - 1\} \equiv \{t_j^1, t_j^2, \ldots, t_j^{|Y_j|-1}\},$$

e a demonstração do teorema esta completa. □

7.8 *A Existência do Grafo δ−aumentado*

Teorema 7.8.1 *Seja $G = (A \cup B, E)$ um bigrafo conexo com def$(G) = \delta > 0$.*

Se S é um único conjunto crítico minimal tal que $\bar{S}$ é sem deficiência, então existe um conjunto W para o qual há uma aplicação bijetiva do conjunto $Q \cup W$ sobre A (onde Q é um subconjunto de B contendo $\Gamma(S)$).

Além disso, o grafo $H = (A \cup Q \cup W, E \cup E')$ (onde E' é o conjunto de arestas cópias) é o grafo δ-aumentado de G, ou seja que, $H = G_\delta$.

Dem.

Pela hipótese, para o $\Gamma(S) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, podemos escrever $S = \bigcup_{i=1}^n Y_i$, onde os Y_i são obtidos como no teorema anterior.

Escolhemos x_i de Y_i tal que existe $(x_i, t_i) \in E$, e daí há uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.

Como, $S = \bigcup_{i=1}^n Y_i$, então obtemos,

$|S| - n = \Sigma_{i=1}^n |Y_i - \{x_i\}| = \Sigma_{i=1}^n |Y_i| - n$

$$= (|Y_1| - 1) + (|Y_2| - 1) + \ldots + (|Y_n| - 1)$$

$$= |t_1^{|Y_1|-1}| + |t_2^{|Y_2|-2}| + \ldots + |t_n^{|Y_n|-1}|, \text{ em outras palavras}$$

$$|S| - |\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}| = |\{t_1^{|Y_1|-1}, t_2^{|Y_n|-1}, \ldots, t_n^{|Y_n|-1}\}|.$$

Consideremos o conjunto W formado pelas $|Y_i| - 1$ cópias de y_i, para $i = \overline{1, n}$, ou seja que,

$$W = t_1^{|Y_1|-1} \cup t_2^{|Y_2|-1} \cup \ldots \cup t_n^{|Y_n|-1}.$$

Desde que, $\bar{S}$ é sem deficiência, então existe um subconjunto de vértices $D \subseteq B$, tal que $\bar{S}$ e D estão em correspondência biunívoca i.é., $|\bar{S}| = |D|$ e temos que

$|A| = |\bar{S}| + |S - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}| + |\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}| = |D| + |W| + |\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}|$.

Pondo $Q = D \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subseteq B$, e temos uma bijeção entre os conjuntos A e $Q \cup W$, e concluimos que os conjuntos A e $Q \cup W$ tem o mesmo número de elementos.

A partir da construção do conjunto $Q \cup W$ obtem-se o grafo $H = (A \cup Q \cup W, E \cup E')$ onde E' é conjunto de $\bigcup_{i=1}^{n} |Y_i|$ ou seja que, H é grafo $\delta-$aumentado de G e $H = G_\delta$ e a demonstração do teorema esta completa. □

Corolário 7.8.1 *Todo grafo bipartido desconexo $G = (A \cup B, E)$ com def$(G) = \delta > 0$, admite o grafo $\delta-$aumentado, G_δ.*

Dem.
Basta aplicar o teorema 7.9.1, na componente com deficiência positiva de G.
□

7.9 *G-Comportamento de Matchings, Transverais e Fluxos*

A busca de um matching máximo, fluxo máximo e da base do matróide transversal em um grafo bipartido arbitrário, são problemas equivalentes e consequêntemente eles possuem um G-comportamento no grafo G_δ, onde δ é deficiência de algum bígrafo G.

Teorema 7.9.1 *(Teorema G-comportamento) Se $G = (A \cup B, E)$ é um grafo bipartido arbitrário, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) G possui um matching M com tamanho $|A|$,

ii) existe um fluxo máximo φ com valor igual a $|A|$,

iii) existe um matróide transversal sobre A, com a base de cardinalidade igual ao valor do fluxo máximo φ.

Dem.

A partir do teorema 6.1.1 podemos considerar o grafo bipartido dado $G = (A \cup B, E)$ identificado com uma rede e um sistema, i.é., $G \equiv \mathcal{A}(I) \equiv \mathcal{N}$.

Primeiramente admita-se G sem deficiência.

i) implica ii).

Se M é um matching de tamanho $|A|$ então conjuntamente com o processo da demonstração alternativa via fluxos do teorema de Hall, exite um fluxo máximo de tamanho $|A|$.

ii) implica iii).

A existência de fluxo máximo como valor $|A|$, acarreta a existência de um corte mínimo $c(P, \mathcal{P}) = |\mathcal{A}|$ (na rede $\mathcal{N}$), de onde $|X| \leq |\Gamma(X)|$ para todo $X \subseteq A$, em particular para cada subconjunto S fixado de A, verifica-se $|U| \leq |\Gamma(U)|$ $\forall U \subseteq S$. Logo, conjuntamente com os teorema 3.3.4 e 5.7.1, exite um matróide sobre A, cujos conjuntos independentes são os subconjuntos de A que interseptam algum matching de G. Mas, cada um destes subconjuntos de A são as transversais parciais de de algum sistema $\mathcal{S}$, e o transversal máximal tem cardinalidade de A, ou seja, A é o conjunto de distintos representativos do sistema. Por outro lado, o conjunto A resulta ser uma base para o matróide, e daí $|A|$ é o rank do matróide deste matróide transversal.

iii) implica i).

Se X é uma base de um matróide transversal sobre o conjunto A, conjuntamente com o teorema (de equicardinalidade de matching e transversal parcial) implica que que existe um matching de tamanho $|X|$. A partir da hipótese G é sem deficiência segue que o matching é completo de A em B.

Agora, finalmente se, G for um grafo bipartido com deficiência positiva,



então pelo teorema 7.9.1, G possui o grafo $G_\delta - aumentado$ e G_δ verifica o teorema de casamento de Hall e porconseguinte o problema reduz-se ao caso anterior, e a demonstração do teorema está completa. □

Capítulo 8

Conclusões

Em vista de que, a um grafo bipartido dado G fica associado uma relação binária, corresponde um sistema e também uma rede, portanto podemos escrever pelo principio de abuso de notação na forma: $G \equiv R \equiv \mathcal{A} \equiv \mathcal{N}$. Expressão que facilitou o caminho do desenvolvimento de nossa meta proposta. Em particular, a demonstração alternativa de Edmonds-Fulkerson, foi simples e elegante, graças a esta obsrvação.

Por outro lado, a colocação e a demonstração do teorema de tipo Hall nós provindenciu uma informação valiosa, no sentido de que há pelo menos um subconjunto de A, o qual esta em correspondência biunívoca com algum subconjunto de B, e que esta correspondência é estabelecida por uma familía de arestas independentes de tamanho conhecido, o qual mais tarde foi relacionado com os conjuntos independentes de um matróide transversal.

O teorema 6.4.1 trata da equicardinalidade dos matchings e transversais em um grafo bipartido dado, pelo uso dos teoremas de Rado e de Edmonds-Fulkerson, além do teorema de tipo Hall e o teorema 7.10.1, apresenta uma caracterização do comportamento desde o ponto de vista da existência e equicardinalidade que oferecem os matchings de tamanho $\nu(G)$, os matróides transversais de rank r e os fluxos máximais φ com valor $v(\varphi)$, sobre o bígrafo G_δ, onde δ é a deficiência de algum grafo bipartido não trivial G.

Contudo hà muitas questões abertas:

i) Exite uma demonstração simples, para o teorema 6.5.1

ii) Que relação hà entre os transversais de tamanho k e as k-combinações, sobre um conjunto fundamental de n elementos.

iii) Conhecido o grafo G_δ, como obtermos a grafo (dado) G.

iv) Como extender o teorema G-comportamento para os grafos não bi-partidos.

Apêndice A

Algumas Similitudes Entre Vértice e Aresta

A continuação mencionamos algumas similitudes que há entre vértice e aresta em um grafo arbitrário G, no sentido que o vértice possui propriedade (ou definição) P, e dizemos o *vértice-P* em G, e similarmente é possivel aresta possuir propriedade (ou definição) P, e dizemos a *aresta-P* em G.

Vértice	*Aresta*
- Defina-se *grau* de um vértice.	Se define o grau de uma aresta.
- Defina-se *adjacência* de vértices.	Se define adjacencia de arestas.
- Defina-se vértice *isolado*.	Se define aresta isolada.
- Defina-se que um vértice *domina* outro.	Se define que uma aresta domina outra, vide [34]
- Defina-se *vizinhança* de vértice.	Se define a vizinhança de uma aresta, vide [90].
- Defina-se *coloração*-vértice.	Se define coloração-aresta.
- Defina-se *remoção* de vértice.	Se define remoção de aresta.
- Defina-se *separação* de vértice.	Se define da separação de aresta.
- Defina-se *vértice corte*.	Se define aresta corte.
- Defina-se vértice-*cobrimento*.	Se define aresta-cobrimento.
- Defina-se conj. vértices *indepen*.	Se define conj. arestas indepen.
- Defina-se caminhos *disjuntos* vért.	Se define caminhos disjuntos aresta.
- Defina-se *isomorfismo*-vértice.	Se define isomorfismo-aresta.
- Defina-se *Esp. vetorial* vértice.	Se define esp. vetorial aresta.
- Defina-se *passeio* de vértices distintos (Grafo de Euler).	Se define passeio de aresta distintas (Grafo de Hamilton).
- Defina-se *versão*-vértice do teorema de Menger.	Se define versão-aresta

Tabela A.1: Similitudes

Bibliografia

[1] Ananchuen, N. e Caccetta, L., Matching extension and minimum degree, *Discrete Mathamtics* 170 (1997) 1-13.

[2] Aigner, M. e Dowling, T. A., Matching Theory for Combinatorial Geometries, *Trans. Am. Math. Soc.* 158 (1971) 231-245.

[3] Akkari, S. e Oxley, J., some extremal connectivity results for matroids. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B* 52, 301-320 (1991).

[4] Anderson, I. Perfect matchings of a graph, *J. combinatorial theory Ser. (B)* 10 (l971), l83-l86.

[5] Archdeacon, D. S., Bonnington, C.P., e Little, Ch. H.C., An algebraic characterization of planar graphs, *Journal of Graph Theory* Vol.19, No. 2, 237-250 (1995).

[6] Bachem, A. e Kern, W., *Linear Programming Duality: An Introduction to Oriented Matroids,* Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg, New York, 1992.

[7] Balinski, M. L., On The Graph Structure of Convex Polyhedra in n-Space. *Pacific J. of Mathematics*, vol. 11 (1961) 431-434.



[8] Berge, C. Sur le couplage maximum d'um graphe, *C. R. Acad. Sciences,* 247 (1958), pp 258-259.

[9] —, *Graphs.* North-Holland, Amsterdam-London, 1995.

[10] —, On two conjectures to generalize Vizing's theorem. *Research Report RRR,* # -87, RUTCOR, Rutgers University, New Brunswuik, N.J. March 1987.

[11] Biggs, N. L., Lloyd, E. K. e Wilson, R. J. *Graph Theory 1736-1936* Clarendon Press, Oxford University, 1976.

[12] Bixby, R.E. e Rajan, A., A short proof of the Truemper-Tseng theorem on max-flow min-cut matroids. *Linear Algebra Appl.* 114/1115, (1989), 277-292.

[13] Boaventura Netto, P. O., *Grafos: Teoría, Modelos e Algoritmos.* E. Blucher, São Paulo, 1996.

[14] Bonias, I. *T-colorings of Complete Graphs.* Ph.D. Thesis, Department of Mathematics. Northeastearn University Boston, Massachusetts, July 1991.

[15] Bondy, J. A. e Murty, U. S. R., *Graph Theory with Applications,* American Elsevier, New York, and MacMillan, London, 1976.

[16] Bollobás, B., *Graph Theory. An Introductory Course,* Graduate Texts in Mathematics, 63, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[17] Bonin, J. E., Oxley, J. G. e Servatius, B. (editores) *Matroid Theory* American Mathematical Society, (Contemporary Mathematics, 197) AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference on Matroid Theory,

University of Washington, 1995.

[18] Coullard, C. R., del Greco, J. G. e Wagner D. K., Representations of Bicircular Matroids, *Report CC-87-21 Computational Combinatorics,* Purdue University, May 1987.

[19] Cortez-Morales, W. J., Pseudo-regular Programming, *Rev. Mat. Estat.,* São Paulo, 12: 69-84, 1994.

[20] —, A characterization of bipartite graphs, *Rev. Mat. Estat.,* São Paulo, 14: 97-102, 1996.

[21] —, Matróide Bicircular Transversal, *aparecer.*

[22] Chen, G. e Schelp, R. H., Hamilton Graphs with Neighborhood Intersecttuions, *Journal of Graph Theory* vol. 18, No.5 497-513 (1994).

[23] Daphne, L. Der-Fen., *Graph Homomorphisms and The Channel Assignment problem.* Ph.D. Dissetation, Department of Mathematics, University of South Carolina, May 1991.

[24] Dilworth, R. P., Dependence relations in a semimodular lattice. *Duke Math. J.* 11 (1944), 575-587.

[25] —-, A decomposition theorem for partially ordered sets, *Ann. of Math.,* 51 (1950), 161-166.

[26] Ding, G., Stable sets versus independent sets, *Discrete Mathematics,* 117 (1993) 73-87.

[27] Dirac, G.A., Some theorems of abstract graphs, *Proc. London Math. Soc., Series* 3, Vol.II (1952), 69-81.

[28] Dolan, A. e Aldous, J., *Network and Algorithms: An Introductory approach.* John Wiley & Sons, Chichester, New York, 1993.

[29] Edmonds, J., Paths, trees and flowers, *Can. J. Math.* 17, (1965b) 449-467.

[30] —, Submodular functions, matroids and certain polyhedra, *Combinatorial Structures and Their Applications,* Gordon and Breach, New York, (1970)69-87.

[31] Edmonds, J. e Fulkerson, D. R., Transversal and Matroid Partition, *JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-B69.* Mathematics and Mathematical Physics, (1965) 147-153.

[32] Egawa, Y., Kaneko, e Matsumoto,M., Notes a mixed version of Menger'theorem, *Combinatorica* 11 (1) (1991) 71-74.

[33] Ford, L. R. e Fulkerson, D. R., Maximal flow through a network, *Canadian J. Mathematics* Vol. 8 (1956), 399-404.

[34] Frederecksón, G. N. e Hambrusch, S. E., Planar Linear Arrangements of Outerplanar Graphs, *Computational Combinatorics,* Departament of Computer Science, Purdue University, CC-87-7 (March 1987).

[35] Fulkerson, D. R., Flow Networks amd Combinatorial Operations Research, *American Mathematical Montly,* 73 (1966) 115-138.

[36] Graham, R. L.,Grötschel, M. e Lovász, L. (editores) *Handbooks of Combinatorics* vols I and II. North-Holland, Elsevier Science B.V., Amsterdam-New York, 1996

[37] Hall, P., On Representatives of Subsets. *J. London Mathematical Society.* 10 (1935), 26-30.

[38] Hartsfield, N. e Ringel G., *Perlais* in *Graph Theory: A Comprehensive Introduction*, Academic Press, Inc., San Diego, CA 1994.

[39] Hartvigsen, D. e Zemel E., Is Every Cycle Basis Fundamental? *Journal of Graph Theory* vol. 13, No.1, 117-137 (1989).

[40] Harary, F., Norman, R. Z. e Cartwright, D., *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs.* John Wiley & Sons, Inc., New York. London. 1965.

[41] Hilton, A.J.W. e Hind, H.R., The total chromatic number of graphs having large maximum degree, *Discrete Mathematics* 117 (1993) 127-140.

[42] Huang, J. On the Structure of Local Tournaments, *J. Comb. Theory Ser. B,* 63, 200-221 (1995)

[43] Ingleton, A. W. e Piff, M. J., Gammoids and Transversal Matroids, *J. Comb. Theory Ser. B,* 15, (1973), 51-68.

[44] Kelmans, A. K., The concept of a vertex in a matroid, the non-separating cycles and a new criterion for graph planarity, In *Algebraic Methods in Graph Theory,* Vol. 1, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, (Szeged, Hungary, 1978) North-Holland 25 (1981), 345-388.

[45] —, Matroids and the theorems of Whitney on 2-isomorphism and planarity of graphs *Uspehi Matematiceskih* 43 (5) (1988), 239-241.

[46] —, On Edge Bijections of Graphs, *DIMACS Technical Report* , 93-41, Rutgers University, 1993, 1-27.

[47] —, Graph planarity and related topics. *Research Report RRR,* 28-92, RUTCOR, Rutgers University, New Brunswick, N.J., September 1992.

[48] Kenndy, J. W.; Quintas, L. V. e Sylo, M. M., Note: The Theorem on Planar Graphs, *Historia Mathematica* 12 (1985), 356-368.

[49] König, D., Graphen und Matrizen, *Mat. Fiz. Lapok* 38, 116-119 (1931).

[50] Liu, J. e Zhou, H., Note: Maximum induced matchings in graphs. *Discrete Mathematics* 1170 (1997) 277-281.

[51] Little, H. C., Grant, D. e Holton, D. A., On Defect-d Matchings in Graphs, *Discrete Mathematics* 13 (1975) 41-54.

[52] Lovász, L., On the structure of factorizable graphs.*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.* 23 (1972), 179-195.

[53] —, Matroid Matching and Some Applications, *J. Comb. Theory Ser. B* 28 (1980b), 208-236.

[54] —, Matching Structure and the Matching Lattice, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B* 43, 187-222 (1987).

[55] Lovász, L. e Plummer, M. D., *Matching theory,* Annals of Discrete Mathematics (29), North-Holland Mathematics Stydies, 121 (1986).

[56] Lucchesi, C. L. e Younger, D. H., A mininax theorem for directed graphs. *J. London Math. Soc.* (2) 17 (1978), 369-374.

[57] McDiarmid, C., Rado's Theorems for Polymatroids, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 78, (1975) 263-281.

[58] Maschlanka, P. e Volkmann, L., Independence number in n-extendable graphs. *Discrete Mathematics* 154 (1996) 167-178.

[59] Menger, k., Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae.* 10 (1927), 96-115.

[60] Minty, G. J., On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming. *Journal of Mathematics and Machanies.* 15 (1966), 485-520.

[61] Mirsky, L. Transversal of Subsets, *Quart. J. Math. (Oxford)* (2), 17 (1966), 58-60.

[62] — *Transversal Theory.* Academic Press, London. 1971.

[63] Mirsky, L. e Perfect, H., Applications of the Notion of Independence to Problems of Combinatorial Analysis, *Journal of Combinatorial Theory* 2, 327-357 (1967).

[64] McCarthy, P. J., Matchings in Graphs. *Bull. Austral. Math. Soc.* 9 (1973), 141-143.

[65] Naiman, D. Q. e Wynn, H. P., Independence number and the complexity of families of sets. *Discrete Mathematics* 154 (1996) 203-216.

[66] Ore, O., Graphs and Matching Theorems, *Duke Math. J.* 22, 1955, 625-639.

[67] —, Graphs and Subgraphs. *Transactions of American Mathematical society.* vol. 84 (1957), 109-136.

[68] Oxley, J. G., On cographic regular matroids. *Discrete Math.* 25 (1979), 89-90.

[69] —, On connectivity in matroids and graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* 265 (1981a), 47-58.

[70] —, On the numbers of bases and circuits in simple binary matroids. *European J. Combin.* 4 (1983), 169-178.

[71] —, On the intersections of circuits and cocircuits in matroids. *combinatorica* 4 (1984a), 187-195.

[72] —, *Matroid Theory*, Oxford University Press. Oxford New York (1992)

[73] —, Connectivity of submodular functions, *Discrete Mathematics* 105 (1992) 173-184.

[74] Oxley, J. e Whittle, G., A note on the non-spanning circuits of a matroid. *European J. combin.* 12 (1991), 159-261.

[75] Perfect, H., Independence spaces and combinatorial problems. *Proc. London Math. Soc.* 3, 19 (1969), 17-30.

[76] Plummer, M. D., On n-extendable graphs, *Discrete Math.* 31 (1980) 201-210.

[77] —, A theorem on matchings in the plane,*Graph Theory in Memory of G. A. Dirac.* Ann. Discrete Math., North-Holland, Amsterdam (1987) 347-354.

[78] —, Extending matchings in planar graphs V. *Discrete Math.* 150 (1996), 315-324.

[79] Pym, J. S., A proof of Menger's theorem.*Monatsh. Für Math.* 73 (1969), 81-83.

[80] Rado, R., A theorem on independence relations. *Quart. J. Math. Oxford Ser.,* 13 (1942), 83-89.

[81] Radhakrishnan, J., *Graph entropy and formula complexity.* Ph.D. Thesis, New Brunswick, New Jersey, October 1991.

[82] Randon, R V. *Introduction to the Theory of Matroids.* Springer, Berlin-Heidelberg, New York, 1975.

[83] Recski, A., *Matroid theory and its applications in electrical network theory and in statics.* Springer-Verlag, Berlin. 1989.

[84] Rosenstiehl, L. e Read, R. C., On the principal edge tripartition of a graph. *Annals of Discrete Mathematics* 3 (1978), 195-226.

[85] Rota, G.-C. e Harper, L. H., Matching theory, an introduction, *Advances in Probability Theory and Related Topics,* Ed.: P. Ney I, Marcel Dekker, New York, (1971) 169-215.

[86] Sampathkumar, E., A generalization of Menger'theorem for certain unicyclic graphs, *Graphs and combinatorics* (1992) 8: 377-380.

[87] Seymour, P. D., The Matroids with the Max-flow Mini-cut Property, *J. Combin. Theory Ser. B* 23 (1977), 189-222.

[88] Schrijver, A., Matroids and linking systems, *J. Combin. Theory Ser. B* 26 (1979), 349-369.

[89] —, Min-Max Results in Combinatorial Optimization, in A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte (eds), *Mathematical Programming, The State of the Art,* Springer, Berlin, (1983), 439-500.

[90] Shen, R. e Tian F., Neighborhood unions and hamiltonicity of graphs, *Discrete Mathematics* 141 (1995), 213-225.

[91] Szwacfiter, J. L., *Grafos e Algoritmos Computacionais.* Campus, Rio de Janeiro, 1984.

[92] Tan, E. L., Some notes on cycle graphs, *Discrete Mathematics* 105 (1992) 221-226.

[93] Tesman, B. A., *T-colorings, List T-colorings, and Set T-colorings of graphs.* Ph.D. Dissertation, Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, N.J. 1989.

[94] Truemper, K., A decomposition theory for matroids. I. General results. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B* 39, (1985a), 43-76.

[95] —, A decomposition theory for matroids. II. Minimal violation matroids. *J. Combin. Theory Ser. B* 39 (1985b), 282-297.

[96] —, *Matroid Decomposition.* Academic Press, Boston. (1992c).

[97] Tseng, F. T. e Truemper, K., A decomposition of the matroids with the max-flow min-cut property. *Discrete Appl. Math. 15* (1986), 329-364.

[98] Tutte, W.T., The factorization of linear graph. *J. London Math. Soc.* 22 (1947), 107-111.

[99] —, The 1-factors of oriented graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4 (1953), 922-931.

[100] —, Matroids and graphs,*Transaction Am. Math. Society,* Vol. 90, (1959), 527-552.

[101] —, Menger's Theorem for Matroids *JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards-B Mathematics and Mathematical Physics* vol. 69B, 1-2, (1955) 49-53.

[102] —, Lectures on matroids, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect* 69B (1965), 1-47.

[103] —, Connectivity in matroids, *Canadian J. Math.* 18 (1966b), 1301-1324.

[104] Tverberg, H., A Generalization of Rado's theorem, *J. London Math. Soc.* 41, (1966) 123-128.

[105] —, On the decomposition of K_n into complete bipartite graph, *J. Graph Theory* 6 (1982) 493-494.

[106] van der Waerden, B.L., *Moderne Algebra* Vol.1 Second Edition. Springer-Verlag, Berlin. (1937).

[107] von Randow, R., *Introduction to the theory of matroids.* Springer, Berlin, (1976).

[108] Wagner, D. K., Equivalent Factor Matroids of Graphs, *Report School of Industrial Engineering cc*-86-17, Purdue University, 1986.

[109] Wang, H., On the Maximum Number of Independent Cycles in a Bipartite Graph, *J. Comb. Theory Ser. B* 67, 152-164 (1996).

[110] Welsh, D. J. A., Euler and bipartite matroids, *J. Combin. Theory Serv. B* 6 (1969c) 313-316.

[111] —, On Matroid Theorems of Edmonds and Rado, *J. London Math. Soc. Ser.* (2) 2, (1970), 251-256.

[112] —, Generalized versions of Hall's Theorem, *J. Comb. Theory Ser. B* 10, No. 2 (1971), 95-101.

[113] —, *Matroid theory.* Academic Press, London. (1976).

[114] —, Matroids and combinatorial optimization, in: *Matroid Theory and Applications,* ed. A. Barlotti, Centr. Int. Mat. Estivo 3, (1982), 323-417.

[115] Woodall, D. r., An exchange theorem for bases of matroids. *J. Combin. Theory Ser. B* 16 (1974), 227-228.

[116] —, The Induction of Matroids by Graphs, *J. London Math. Soc.* (2), 10 (1975), 27-35.

[117] —, Cycles lengths and circuit matroids of graphs, *Discrete Mathematics,* 105 (1992) 269-273.

[118] White, N., ed., *Theory of matroids.* Cambridge University Press, Cambridge. (1986).

[119] —, *Matroid applications.* Cambridge University Press, Cambridge. (1992).

[120] Whitney, H., Non separable and planar graphs, *Transactions of the American Mathematical Society,* Vol.34 (1932), pp. 339-362.

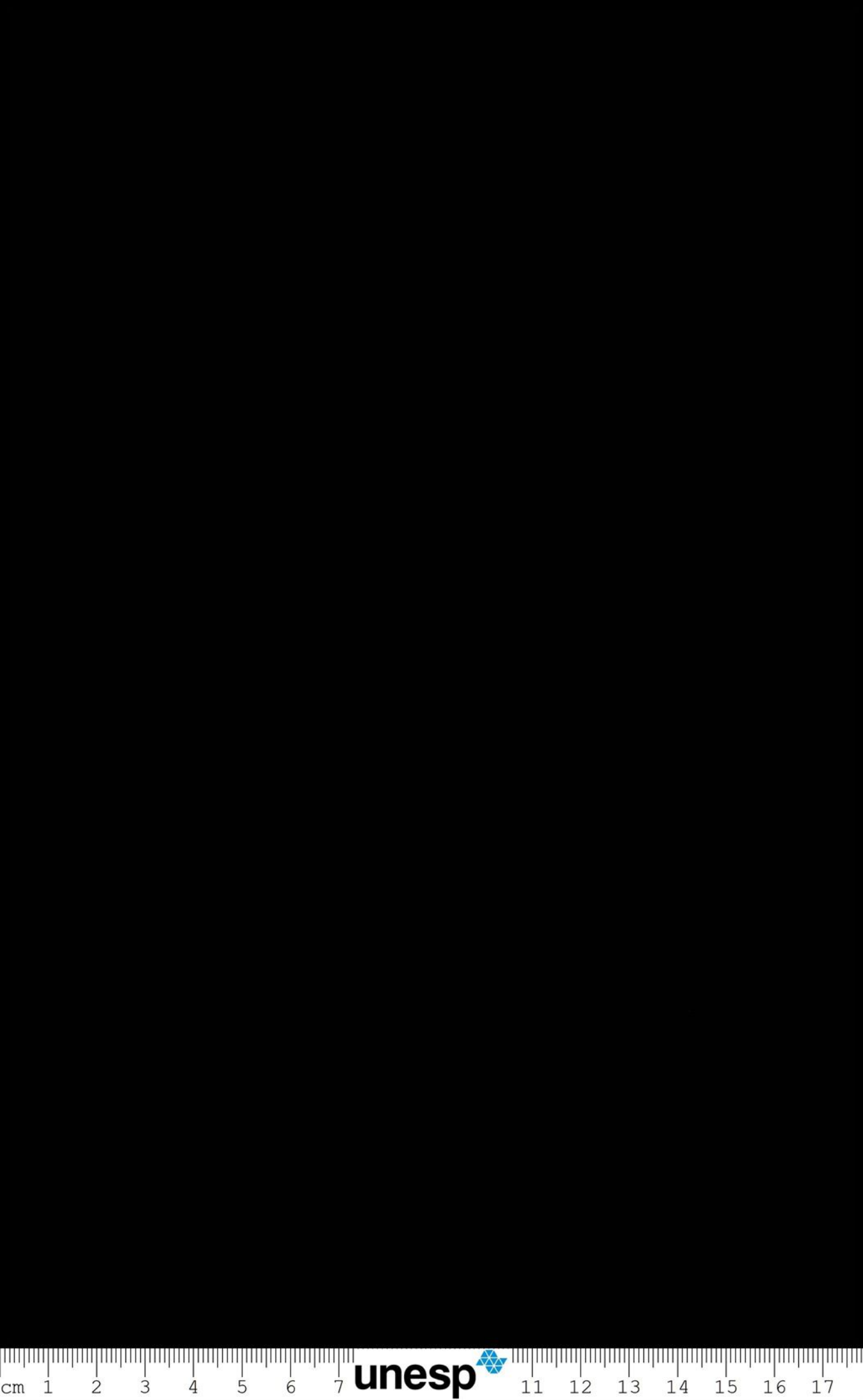
[121] —, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.,* 54 (1932), 150-168.

[122] —, 2-isomorphic graphs, *Amer. J. Math.* 55, (1933), 245-254.

[123] —, On the abstract properties of linear dependence, *American Journal of Mathematics,* 57 (1935), 509-533.

[124] Youngs, J. W. T., Minimal imbeddings and the genus of a graph, *Journal Mathemtics and Mechanics,* 12, No.2 (1963) 303-315.

[125] Zykov, A. A., *Fundamentals of graph theory,* BCS Associate, Moscow, Idaho USA, 1990.


cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17