

ANA CARLA DE PAULA LEITE ALMEIDA

Demonstração com tecnologia: um estudo sobre o número de diagonais de um prisma

Ana Carla de Paula Leite Almeida

Demonstração com tecnologia: um estudo sobre o número de diagonais de um prisma

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Elisângela Pavanelo

A447d	Almeida, Ana Carla de Paula Leite Demonstração com tecnologia: um estudo sobre o número de diagonais de um prisma / Ana Carla de Paula Leite Almeida – Guaratinguetá, 2018. 78 f. : il. Bibliografia: f. 72-75 Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018. Orientadora: Elisangela Pavanelo 1. Geometria. 2. Tecnologia educacional. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Título. CDU 514
-------	--

ANA CARLA DE PAULA LEITE ALMEIDA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“**GRADUADO EM MATEMÁTICA**”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA


Prof.^a Dr.^a VIVIAN MARTINS GOMES
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof.^a Dr.^a ELISANGELA PAVANELO
Orientador/UNESP-FEG

 
Prof.^a Dr.^a ROSA MONTEIRO PAULO
UNESP-FEG


Prof.^a Dr.^a ROSEMEIRE DE FATIMA BATISTELA
UEFS/BA

Dezembro/2018

Dedico este trabalho de modo especial, à minha família, aos meus mestres e aos amigos que sempre confiaram em meu trabalho e me apoiaram nos momentos de maiores dificuldades.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a *Deus*, fonte da vida e da graça. Se não fosse por Tua vontade, eu não estaria aqui. Obrigada por me conduzir pelo caminho do bem, por me proteger, me abençoar e me presentear com minha vida, meus amigos e com meus familiares;

a minha orientadora, *Prof.^a Dr.^a Elisangela Pavanelo* que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível. Foi um ano conturbado, sei que não foi fácil passar por tantas coisas, mas mesmo com tantos obstáculos, você foi exemplo de força, dedicação, coragem, fé e esperança;

aos meus pais *Célia e Benedito*, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivaram meus estudos, dando exemplo de fé e esperança. Passamos por longas lutas nesse período, algumas internações, alguns imprevistos, mas sempre conseguimos superar essas barreiras. Agradeço a Deus por ter me presenteado com pais tão maravilhosos. Me espelho em você mãe, que não teve as mesmas oportunidades que eu tive, mas mesmo assim nunca perdeu a bondade, a esperança e o sorriso no rosto, me incentivando nos estudos e nas escolhas que tenho feito ao longo da vida;

aos amigos que ganhei de presente dentro da UNESP: *Bia, Dai, Joe e Karina*, levarei vocês para toda minha vida. Sem vocês o curso não teria o mesmo brilho, a mesma alegria, vocês tornaram minha permanência na faculdade uma experiência incrível, mostrando através de gestos singelos o carinho, companheirismo, paciência e a amizade;

aos meus irmãos *Mateus e Rafael*, que me inspiram e me incentivam a lutar, não desistir diante das adversidades, me dando exemplo de perseverança, resiliência e da alegria de viver a vida de maneira plena, vocês são parte essencial de mim;

aos meus amigos de longa data *Diego, Fernando, Janaína, Maria Isabel, Maurício, Patrícia e Tiago*, obrigada pelo carinho, força e por não desistirem de mim, vocês são como minha família, amo vocês;

a aqueles que foram minha inspiração sem saberem: algumas pessoas passam por nossas vidas por um breve momento, mas parece que sempre estiveram ali, como fonte de inspiração ou como um pedaço nosso, parece estranho, mas algumas pessoas marcam demais algum momento de nossa existência, agradeço a você *Bruno*, você foi um exemplo para mim. Cada etapa da sua vida foi conquistada pela sua coragem de arriscar, sua dedicação e nunca perdendo sua essência, não ter medo do desconhecido é uma característica fundamental,

admiro por você voar tão longe, mas tão longe... mostrando que a perseverança, o estudo e os sonhos podem nos levar a lugares inimagináveis;

a você *Felipe*, por me incentivar e me apoiar, mesmo nos momentos que eu estava desmotivada e sem muita paciência, você sempre acreditou no meu potencial e sempre me deu força para eu não desistir dos meus sonhos, obrigada por todo o carinho e por me mostrar que a bondade existe e vale a pena acreditarmos nas pessoas;

às funcionárias da Biblioteca do Campus de Guaratinguetá pela dedicação, presteza e principalmente pela vontade de ajudar;

aos funcionários da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá pela dedicação e alegria no atendimento, em especial ao *Formiga*, sempre prestativo e atencioso com todos que chegam ao Campus, você é uma lenda viva dessa universidade;

a todos os professores por me proporcionar o conhecimento, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

“Só sabemos com exatidão quando sabemos pouco; à medida que vamos adquirindo conhecimento, instala-se a dúvida.”

Goethe

RESUMO

Esta pesquisa apresenta uma investigação acerca da maneira como os professores compreendem a dedução da demonstração de uma propriedade que diz respeito ao número de diagonais de um prisma a partir de um trabalho com tecnologia digital. Nosso intuito volta-se à análise a partir da gravação dos encontros realizados com os professores de Matemática de uma escola estadual de Aparecida – SP. As gravações geradas foram transcritas e, a análise desses resultados volta-se para a contribuição que as tecnologias podem dar durante o processo de dedução de demonstração de situações do contexto da geometria. Desse modo, investigamos como o GeoGebra favorece no trabalho de visualização e generalização de propriedades em Geometria, através da exploração e investigação de elementos matemáticos. Iniciamos este trabalho destacando algumas considerações teóricas acerca de demonstrações e do uso de tecnologias digitais. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo, desenvolvida segundo um estudo de caso, que se utiliza de uma análise fenomenológica através de dois momentos: as análises Ideográfica e Nomotética. Essa análise permitiu perceber como os professores deduzem a demonstração da propriedade geométrica ao se trabalhar com tecnologia digital.

PALAVRAS-CHAVE: Dedução. Geometria. Tecnologia digital.

ABSTRACT

This research presents an investigation into how teachers understand the deduction of the demonstration of a property that relates to the number of diagonals of a prism from a work with digital technology. Our intention is based on the recording of the meetings held with the Mathematics teachers of a state school in Aparecida - SP. The generated recordings were transcribed and the analysis of these results turns to the contribution that the technologies can give during the process of deduction of demonstration of situations of the context of the geometry. In this way, we investigate how GeoGebra favors in the work of visualization and generalization of properties in Geometry, through the exploration and investigation of mathematical elements. We start this work by highlighting some theoretical considerations about demonstrations and the use of digital technologies. It is a qualitative research, developed according to a case study, which uses a phenomenological analysis through two moments: the Ideographic and Nomothetic analyzes. This analysis allowed us to see how teachers deduce the demonstration of geometric property when working with digital technology.

KEYWORDS: Deduction. Geometry. Digital technology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Janelas de Visualização 2D e 3D	45
Figura 2: Prisma	46
Figura 3: Elementos do Prisma.....	46
Figura 4: Diagonais da base	66
Figura 5: Diagonais do prisma.....	66
Figura 6: Diagonais da face do prisma	66
Figura 7: Construções das diagonais	66
Figura 8: Arestas	68
Figura 9: Prisma e seus elementos.....	69
Figura 10: Processo de generalização.....	69
Figura 11: Polígono da base x prisma.....	69

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Análise Ideográfica	51
Quadro 2: Análise Nomotética – 1ª Redução	59
Quadro 3: Análise Nomotética – 2ª Redução	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PNE	Plano Nacional de Educação

LISTA DE SÍMBOLOS

$\geq$	maior ou igual
$\sum$	somatório
$\times$	multiplicação
A	número de arestas
n	número de lados do polígono da base
d	número de diagonais do polígono da base
D	número de diagonais do prisma
V	número de vértices
$C_{v,2}$	combinação entre número de vértices
$\therefore$	portanto
$\#$	como queríamos demonstrar

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
2	DEMONSTRAÇÃO.....	17
2.1	O SENTIDO DA DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA.....	17
2.2	O USO DE DEMONSTRAÇÃO NA BNCC.....	21
2.3	A DEMONSTRAÇÃO COM TECNOLOGIAS DIGITAIS.....	22
2.4	DEMONSTRAÇÃO NO CONTEXTO DO ENSINO DE GEOMETRIA.....	24
3	O TRABALHO COM TECNOLOGIAS DIGITAIS.....	27
3.1	RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA.....	27
3.2	PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO.....	29
3.3	OS PROFESSORES E AS TECNOLOGIAS INFORMÁTICAS.....	31
4	GEOMETRIA DINÂMICA.....	33
4.1	GEOMETRIA DINÂMICA E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	33
4.2	GEOGEBRA.....	34
4.3	CONJECTURAS, HIPÓTESES E DEMONSTRAÇÃO ATRAVÉS DO GEOGEBRA.....	35
5	METODOLOGIA.....	38
5.1	PESQUISA QUALITATIVA.....	38
5.3	PROCEDIMENTOS DA PESQUISA.....	40
5.3.1	Estudo de caso.....	40
5.4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	41
5.4.1	Primeiro encontro.....	42
5.4.2	Segundo encontro.....	43
5.4.3	Terceiro encontro.....	43
5.4.4	Quarto encontro.....	43
5.4.5	Quinto encontro.....	44
5.4.6	Sexto encontro.....	44

5.4.7	Sétimo encontro.....	44
5.5	A DEMONSTRAÇÃO FORMAL.....	45
6	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	49
6.1	FENOMENOLOGIA.....	49
6.1.1	Análise ideográfica.....	50
6.1.2	Análise nomotética.....	59
6.2	DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS.....	62
6.2.1	Primeira categoria: visualização espacial.....	63
6.2.2	Segunda categoria: movimentação.....	64
6.2.3	Terceira categoria: generalização.....	67
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	71
	REFERÊNCIAS.....	73
	APÊNDICE A – TRANSCRIÇÕES.....	77

1 INTRODUÇÃO

Na busca por compreender como os professores que lecionam Matemática em uma escola estadual de Aparecida – SP, entendem, discutem (ou mesmo desenvolvem) a dedução da demonstração de uma propriedade geométrica a partir de um trabalho realizado com tecnologias digitais, realizamos uma pesquisa qualitativa, pensada na perspectiva de um estudo de caso com viés fenomenológico.

Para obter os dados da pesquisa, utilizamos o programa computacional GeoGebra devido ao seu dinamismo e por ser de fácil acesso, sendo possível utilizar em computadores ou celulares.

Demonstrar uma proposição significa justificá-la, ou seja, exprimi-la de modo que ela seja capaz de convencer não só a nós, mas também aos outros, de maneira racional (DOMINGUES, 2002). A compreensão da prova de um teorema muitas vezes nos causa dúvidas devido ao seu processo de construção. Dessa forma, a utilização de tecnologia pode atuar como uma aliada nesse processo.

Mod (2016, p. 90) salienta que “a riqueza da demonstração de um teorema não reside somente na prova da tese nele contida, mas na Matemática que é desenvolvida pelas tentativas de demonstração”. Assim, este trabalho procura dizer como os professores dessa escola estadual de Aparecida expõe o processo de construção da demonstração de um teorema com recurso das tecnologias digitais.

Pretende-se, portanto, envolver os docentes num processo de dedução com o GeoGebra, a fim de que eles possam explorar os recursos do programa para formar conjecturas resultando em suas próprias conclusões a respeito da atividade proposta.

A construção dos dados para o referencial teórico aqui apresentado se deu pela realização de um estudo bibliográfico em pesquisas (trabalhos de mestrado e doutorado), produzidos em universidades públicas e privadas, que tratassem do trabalho com computadores no ensino de Matemática, principalmente no que se refere a demonstrações em Geometria e, também em artigos publicados sobre a temática.

Inicialmente, foi realizado um levantamento na Universidade Estadual Paulista - UNESP, verificando a quantidade de trabalhos que apresentavam a temática “*Uso de computadores para o ensino de Demonstrações Matemáticas*”.

Para tal, foi feita uma pesquisa no banco de teses e dissertações da instituição, selecionando os títulos que interessavam para a pesquisa, e, nos casos que o título nos deixava em dúvida quanto à abordagem ou não do tema, era feita a leitura de seu resumo a fim de

obtermos esclarecimentos. Os procedimentos realizados não nos permitiram localizar trabalhos que tratassem da temática estudada, conseguimos localizar alguns trabalhos que tratavam sobre *Uso de Tecnologias no ensino de Matemática* ou sobre *Demonstração*, entretanto, sobre a junção das duas ideias não obtivemos resultados.

Diante da insuficiência de trabalhos localizados quando efetuamos a busca na UNESP, realizamos também a procura através da *Plataforma Sucupira*, mantida pela CAPES, no Domínio Público, *site* que apresenta um banco de teses e dissertações mantido pelo governo federal, além de artigos de revistas da área de Matemática e livros.

Este trabalho foi estruturado da seguinte forma: inicialmente, definiremos o que são as demonstrações matemáticas, demonstrações com tecnologias, demonstrações na geometria, na sequência abordaremos a temática envolvendo o uso de tecnologias nas aulas de matemática, assim como uma breve discussão sobre o GeoGebra. E, por fim, explicitaremos a atividade central deste trabalho, que é a dedução da demonstração da propriedade referente ao número de diagonais de um prisma e a análise dos resultados obtidos a partir das análises Ideográfica e Nomotética.

2 DEMONSTRAÇÃO

Santos (2015) salienta o quanto é crucial que o professor desenvolva com os alunos atividades que contribuam para indagar e para o pensar sobre suas respostas, levando o aluno a questionar se os resultados encontrados na resposta de determinados problemas são plausíveis com o que foi perguntado ou não. Dessa forma, o aluno tem a oportunidade de realizar seus trabalhos com maior autonomia, confiança e compreendendo o que lhe foi proposto, estimulando, assim, o desenvolvimento do seu conhecimento matemático e o raciocínio dedutivo. Porém, porque será que as demonstrações são pouco utilizadas como recursos didáticos? Como será que ela é compreendida pelo professor que leciona Matemática?

Sobre provas e argumentações matemáticas, Santos nos diz:

Que o uso desses elementos matemáticos contribui para uma compreensão melhor desta área de conhecimento, incentivando e despertando o interesse e o raciocínio dedutivo dos alunos, dando-lhes condições para a evolução de seus desenvolvimentos cognitivos bem como atribuindo sentido e coesão às fórmulas matemáticas, fazendo-os perceber o verdadeiro sentido de sua existência e aplicação (SANTOS, 2015, p. 22).

No decorrer deste capítulo abordaremos como alguns autores discutem o que é demonstração em Matemática e, como um trabalho com tecnologias ou com o computador, pode auxiliar no seu desenvolvimento.

2.1 O SENTIDO DA DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Quando pensamos em demonstração, imaginamos intuitivamente a busca de uma verdade. Na Matemática, ela é compreendida como a validação de ideias matemáticas. Entretanto, para tratarmos do objeto desse trabalho, pretende-se expor como assumiremos o que é demonstração, a partir do sentido de demonstração que foi possível constituir pelas leituras realizadas.

Para Fossa (2009), o matemático tem pelo menos dois motivos para demonstrar todos os teoremas: o primeiro diz que as demonstrações asseguram a verdade dos teoremas e, a segunda é de que a Matemática é um tipo de conhecimento e, para se conhecer uma coisa o fato de acreditar nela não é o suficiente.

Conhecer, então, é saber o porquê. E o porquê de um teorema matemático é a sua demonstração. Portanto, o matemático sempre quer demonstrar os seus teoremas

porque ele quer conhecê-los, e conhecê-los a fundo. Desta maneira, a matemática não é meramente uma atividade interessante com algumas aplicações práticas, mas faz parte daquela busca da verdade que é o grande empreendimento do homem (FOSSA, 2009, p. 46-47).

Na Matemática, diferente de outras ciências como Física, Biologia, cujos resultados geralmente são estabelecidos e aceitos por meio da observação, experimentação ou análise de dados, os resultados precisam ser demonstrados, indo além da observação. Assim, a demonstração matemática é a responsável por garantir a veracidade de tais resultados (MORAIS FILHO, 2012).

Morais Filho (2012) define demonstração como:

[...] um ato de persuasão, de convencimento, baseado em argumentações lógico-dedutivas, por isso é tão importante (também) saber redigi-las. Ninguém deve acreditar em um fato matemático, mas deve ser convencido por meio de uma demonstração de que isso é válido (MORAIS FILHO, 2012, p. 208).

Loureiro e Bastos (2002) referem-se à demonstração como sendo um tipo de prova matemática, onde seguem regras bem definidas e aceitas em determinado grupo. Desse modo, a demonstração é comparada com a prova matemática, buscando verdades capazes de sustentar o que se pretende demonstrar.

Uma verdade matemática, segundo Batistela, Barbariz e Lazari (2016), significa manifestar uma afirmação verdadeira para alguma proposição. Essas afirmações são expostas na forma de demonstração e são criadas através de uma investigação e do uso do método axiomático dedutivo.

De acordo com Bicudo, “demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas” (BICUDO, 2002, p. 80). Porém, ainda segundo o autor, existem algumas proposições que não são possíveis de serem demonstradas e, para essas são estabelecidas algumas “arquiteturas das teorias matemáticas: que as consideram como sendo conceitos primitivos (axiomas) e conceitos derivados (teoremas)” (BICUDO, 2002, p. 80).

Um axioma ou postulado é uma sentença matemática que não é uma definição e não precisa ser demonstrada. Bem diferente do que ocorre com os teoremas – que precisam de demonstração –, os axiomas ou postulados não precisam ser demonstrados e são apresentados realmente como decretos. Entretanto, como as noções primitivas, esses “decretos” não surgem de opiniões pessoais isoladas, são frutos da experiência, da observação e, também, de certo “consenso coletivo” (MORAIS FILHO, 2012, p.164).

Todavia, alguns pesquisadores fazem distinção entre a demonstração formal, demonstração aceitável e o ensino de demonstração.

Historicamente falando, o formalismo se fez necessário para que as evidências intuitivas e fatos sustentados somente pelo julgamento humano fossem eliminados. Essa eliminação de evidências oriundas de fontes não ligadas ao formalismo, poderiam ser vistos como "fontes potenciais de erros graves" (HANNA, 1990 *apud* LOUREIRO e BASTOS, 2002, p. 107)¹.

Demonstração formal: a demonstração como conceito teórico da lógica formal (ou meta-lógica), que pode ser encarado como o ideal do qual a prática matemática apenas se aproxima.

Demonstração aceitável: a demonstração como conceito normativo que define o que é aceitável para os matemáticos profissionais.

O ensino da demonstração: a demonstração como uma atividade matemática escolar que serve para esclarecer ideias que vale a pena tornar conhecidas dos alunos (THURSTON, 1994, p. 171 *apud* LOUREIRO e BASTOS, 2002, p. 109)².

Nagafuchi e Batista (2008) pontuam que muitas vezes as palavras *prova* e *demonstração* são tomadas como sinônimos, porém, alguns dicionários retratam esses termos como sendo distintos. Para Abbagnano (2007):

DEMONSTRAÇÃO[...] do ponto de vista lógico evidenciou-se o caráter de dedução formal a partir de premissas (Descartes, Leibniz), o que distingue a D. (cujo tipo ou ideal continua sendo a D. matemática) de outros gêneros de prova. Na Lógica contemporânea, o termo D. não é muito usado: em geral designa uma sequência de enunciados tais que cada um deles é um enunciado primitivo ou então é diretamente derivável de um ou mais enunciados que o precedem na sequência[...] (ABBAGNANO, 2007, p. 239).

PROVA (gr. TEKüiptOV; lat. Probatio; in. Proofjr. Preuve, aí. Beweis; it. Prova). Procedimento apto a estabelecer um saber, isto é, um conhecimento válido. Constitui P. todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: mostrar uma coisa ou um fato, exhibir um documento, dar testemunho, efetuar uma indução são P. tanto quanto as demonstrações da matemática e da lógica. Portanto, esse termo é mais extenso que demonstração (v.): as demonstrações são P., mas nem todas as P. são demonstrações. (ABBAGNANO, 2007, p. 805).

Dessa maneira, a ideia de *demonstração* vai ao encontro ao definido por Morais Filho (2012), por se tratar de uma dedução formal a partir de premissas, ou seja, que permitem argumentações lógico-dedutivas enquanto a *prova* pode ser entendida como “uma espécie de

¹ HANNA, G. **Some Pedagogical Aspects of Proof**. São Paulo: Cortez & Morais, 2000 *apud* LOUREIRO, C.; BASTOS, R. Demonstração—uma questão polêmica. **Ensino e Aprendizagem da Geometria**, Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE), p. 105-128, 2002.

² THURSTON, W. P. On proof and progress in mathematics. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 30, nº 2, p. 161 – 177, 1994 *apud* LOUREIRO, C.; BASTOS, R. Demonstração—uma questão polêmica. **Ensino e Aprendizagem da Geometria**, Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE), p. 105-128, 2002.

demonstração, usada para demonstrar que um fato ou afirmação são verdadeiros, e ainda pode incluir o significado de demonstração matemática” (NAGAFUCHI e BATISTA, 2008).

Balacheff (2000 *apud* MOD, 2016)³ defende a ideia de que os verbos explicar, provar e demonstrar são considerados sinônimos em várias abordagens, mas isso pode se tornar um obstáculo, pois sem a correta distinção é possível que não haja uma compreensão do que está sendo feito.

A *explicação* garante a validade de determinada proposição baseada em nível de quem a produz, podendo ser aceita, discutida ou rejeitada, é baseada em conhecimentos próprios e sem regras; uma *prova* não tem um papel definitivo, pode ser aceita ou rejeitada por determinada comunidade, podendo ser alterada com o avanço dos saberes e, ao provar, percebe-se certa formalidade; a *demonstração* é vista como uma sequência de enunciados que são organizados com um conjunto definido de regras (BALACHEFF, 2000 *apud* MOD, 2016)⁴.

Bicudo diz que “demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas” (BICUDO, 2002, p. 80). Sendo assim, podemos entender a demonstração como um conjunto de enunciados que seguem uma regra a fim de se obter um resultado. O autor entende a demonstração como um sistema formal, contendo uma linguagem com expressões e símbolos apropriados, axiomas e regras de inferência (hipóteses e conclusões).

Villiers (2002 *apud* MOD, 2016)⁵ evidencia, em seu trabalho, a função de uma demonstração, dizendo que ela “não tem como único resultado verificar a conjectura que se está tentando provar. Mais do que isso, uma demonstração pode conduzir os matemáticos por caminhos que possibilitarão a criação de novos conceitos e teorias” (VILLIERS, 2002 *apud* MOD, 2016, p. 41)⁶.

Mod (2016, p. 90) salienta que “a riqueza da demonstração de um teorema não reside somente na prova da tese nele contida, mas na Matemática que é desenvolvida pelas tentativas

³ BALACHEFF, N. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomantanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra**, 2000 *apud* MOD, L.F.A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomantanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra**. 2016

⁴ Idem 4.

⁵ VILLIERS, M. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomantanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra**, 2002 *apud* MOD, L.F.A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomantanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra**. 2016.

⁶ Idem 6

de demonstração”, portanto conclui-se que, mesmo que a demonstração seja um conjunto de enunciados de maneira organizada que seguem determinadas regras, como defendido por Bicudo (2002), o caminho para se chegar até ela é importante, tão importante quanto o resultado final e, os recursos tecnológicos podem ajudar nesse processo de construção,, conduzindo para que a demonstração atinja sua função. A dedução mediada pelo GeoGebra pode contribuir como uma estratégia didática para a construção, auxiliando na percepção de elementos através do dinamismo oferecido pelo *software*.

2.2 O USO DE DEMONSTRAÇÃO NA BNCC

Santos (2015) descreve que na educação brasileira o ato de provar ou demonstrar matematicamente vem diminuindo com o passar dos anos e, para enfatizar esse fato, Garbi (2010 *apud* SANTOS, 2015)⁷ acrescenta que estamos presenciando um processo regressivo, pois, há tempos atrás, a demonstração era muito trabalhada nas escolas e hoje não se demonstra quase nada, ele ainda pontua que “estamos regredindo para uma Matemática empírica desenvolvida pelos povos antigos para resolver seus problemas práticos e estamos desvalorizando a preciosa contribuição dos gregos em tornar a Matemática uma ciência abstrata e complexa” (GARBI, 2010 *apud* SANTOS, 2015, p. 24)⁸, salientando que, dessa forma, não estamos permitindo que os alunos sejam levados a pensar.

As demonstrações matemáticas devem ser abordadas mediante um caráter pedagógico, tornando-se um objeto de ensino e este pode ser incorporado às aulas de Matemática. Neste caminhar, faz-se necessário que o professor elabore atividades matemáticas que enfatizem menos o aspecto dedutivista euclidiano, valorize mais a criatividade e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos (SANTOS, 2015, p.24).

“A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (BNCC, 2017, p. 07), de modo que está em conformidade com o que prescreve o Plano Nacional de Educação (PNE). A BNCC apresenta em seu texto as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio e, dentre elas, a demonstração é tratada na competência nº 5:

⁷ GARBI, G.G. **C.Q.D. Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. São Paulo: Editora da Física, 2010 *apud* SANTOS, M.C. **Investigando provas e demonstrações matemáticas por alunos do ensino médio: realidades e necessidades**. 2015.

⁸ Idem ⁷

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, 2017, p. 523).

Ainda segundo a BNCC:

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos que podem emergir de experiências empíricas. Os estudantes deverão ser capazes de fazer induções por meio de investigações e experimentações com materiais concretos, **apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais**. Assim, ao formular conjecturas, mediante suas investigações, eles deverão buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não precisa ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve incluir também argumentos mais “formais”, sem que haja necessidade de chegarem à demonstração de diversas proposições (BNCC, 2017, p.532, grifo nosso).

Assim, acredita-se que ao se inserir um trabalho com demonstrações em sala de aula, os alunos poderão ter uma compreensão significativa do conteúdo, além de despertar a criatividade e o seu raciocínio lógico, mas para esse objetivo ser atingido é necessário que o professor compreenda a demonstração, pois se ele não souber realiza-la, como irá ensinar aos seus alunos? Nesse sentido, destaca-se a relevância deste trabalho que se propõe a entender a maneira pela qual os professores compreendem determinada demonstração geométrica.

2.3 A DEMONSTRAÇÃO COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

Em seu estudo, Batistela, Barbariz e Lazari (2016) falam da relação de proximidade existente entre o computador e a Matemática, ressaltando que “a Matemática utiliza-se do computador e a Computação utiliza-se da Matemática”. Dessa maneira, os autores falam de uma colaboração mútua na qual a Matemática contribui para o aperfeiçoamento da computação e a computação auxilia o processo de ensino e aprendizagem da matemática, além da resolução de problemas.

O computador pode servir ao matemático na verificação de passagens em demonstrações matemáticas. Ele é capaz de oferecer ferramentas de cálculos, resoluções, simulações, explorações e esboços, por exemplo. Ele, o computador, é importante para o trabalho do matemático se tomado como ferramenta que pode ser utilizada nesse processo de demonstração, no entanto, para ser utilizado precisa ser programado pelo próprio homem para fazer operações localizadas nas partes da argumentação da demonstração (BATISTELA, BARBARIZ e LAZARI, 2016, p. 207)

Lourenço (2002, p. 104) afirma que em algumas situações o uso de figuras e construções “podem ser ilusórias e não conduzir o raciocínio para deduções corretas”. Porém, o autor lembra que quando bem conduzidas, as construções, figuras e esboços de gráficos mostram resultados corretos e são capazes de sugerir caminhos que permitem o desenvolvimento de raciocínio lógico e, com isso germinam o processo de demonstração, pois podem incentivar o levantamento de hipóteses e teses.

Construções dinâmicas, que hoje se fazem nos computadores, se tornam de tal forma claras e sugestivas, que permitem testes de hipóteses e simulações que, em alguns casos, ultrapassam a imaginação mais fértil. Construções inteligentes mostram, muitas vezes, resultados surpreendentes e incentivam a busca de resultados, a pesquisa e a elaboração de “teorias” que comprovem ou desmintam os fatos observados (LOURENÇO, 2002, p.104).

A utilização de programas computacionais que envolvem conteúdos matemáticos, como o GeoGebra, objeto de estudo deste trabalho, permite a interatividade e o dinamismo, podendo ser um estímulo para investigações a partir de suas observações e percepções. Lourenço (2002) defende a ideia de que os programas computacionais permitem a realização de construções geométricas capazes de induzir uma demonstração formal para proposições Matemáticas, principalmente aquelas de nível elementar. Para o autor, “uma construção que pode ser alterada em sua aparência, conservando as propriedades Matemáticas da figura, quando bem direcionada, pode sugerir caminhos para trabalho teórico tendente à demonstração formal” (LOURENÇO, 2002, p.105), dessa forma pode-se concluir que através de construções dinâmicas os estudantes, professores e os matemáticos podem chegar a resultados, desenvolver e elaborar novas demonstrações de acordo com sua percepção que, sem a utilização dessas construções, seriam de difícil compreensão e realização.

Além de servir, de maneira clara, para a exploração de resultados e para o incentivo de investigações, os softwares educacionais podem sugerir caminhos para a realização de demonstrações desconhecidas, propondo artifícios que, muitas vezes, em demonstrações formais são necessários e de difícil compreensão (LOURENÇO, 2002, p. 106).

Ainda, segundo Lourenço (2002, p. 107), “a demonstração de uma proposição adquire grande credibilidade quando é apoiada em fatores visuais”. Ele justifica essa afirmação explicitando que o uso de imagens é “capaz de convencer até mesmo observadores que não têm grande habilidade em Matemática e pouca familiaridade com artifícios e sutilezas de demonstrações formais”. Assim, acredita-se que por meio da observação e manipulação de

imagens ou modelos que permitem maior flexibilidade de dados, o processo de construção matemática se torna mais interessante, incentivando novas investigações.

As provas no sentido usual e baseadas somente no formalismo causam repulsa por grande parte dos discentes. Isso é sustentado pelo fato da dificuldade no entendimento do formalismo, que acabam não convencendo os estudantes, fazendo com que eles decorem a sequência de palavras, traços e argumentos necessárias para sua justificativa sem que isso tenha um significado para ele (LOURENÇO, 2002). Com isso, acredita-se que a partir de diferentes métodos de ensino, como o uso de tecnologias, o aluno seja despertado e incentivado pela busca de saberes, investigando possibilidades, desenvolvendo sua criatividade e a autonomia diante de situações diversas.

“O computador abre novas formas de se fazer matemática, contudo no que tange à tarefa de demonstrar, ele pode estar presente nessa atividade, no entanto isso não exige a presença da criatividade e intuição do matemático” (BATISTELA, BARBARIZ e LAZARI, 2016, p. 214). Portanto, mesmo que o uso de tecnologias esteja presente, o professor, o aluno ou quem quer que seja, ainda sim, fará uso de criatividade e a intuição para a demonstração da questão proposta.

2.4 DEMONSTRAÇÃO NO CONTEXTO DO ENSINO DE GEOMETRIA

A demonstração por/com o apoio de tecnologias, acrescenta aos discentes uma nova percepção de como um teorema pode ser fundamentado, ou seja, os recursos tecnológicos podem propiciar a construção de entes geométricos na perspectiva de que auxilia na construção de argumentos a respeito do teorema investigado, ou mesmo dando apoio no processo de visualização do que se pretende observar, a partir da movimentação desses entes geométricos. Villiers (1997 *apud* LOUREIRO e BASTOS, 2002, p. 123)⁹ propõe a demonstração como "uma parte da atividade matemática que os alunos devem experimentar, e argumenta que os programas de geometria dinâmica são recursos adequados a esta atividade". Em consequência dessa proposta, a demonstração deixa de ser exposta como um resultado pronto, passando a ser explorada de maneira dinâmica, onde os alunos passam a discutir e descobrir conhecimentos. “[...] o ensino e a aprendizagem da geometria, as aplicações práticas

⁹ De Villiers, Michael (1997). The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections. King, J. et al. (eds) - Geometry Turned On - Dinamic Software in Learning, p. 15 – 24, 1997 *apud* LOUREIRO, C.; BASTOS, R. Demonstração—uma questão polêmica. **Ensino e Aprendizagem da Geometria**, Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE), p. 105-128, 2002.

e processos dedutivos se fazem importantes para a abertura de horizonte.” (MOCROSKY, BAUMANN e MONDINI, 2009, p. 1189)

O equilíbrio entre a prática e a teoria, a intuição e a formalização talvez sejam o fio condutor do ensino da geometria. A versatilidade no ensino e a diversificação de estratégias podem ser fortes aliadas para a compreensão que supere a utilização das técnicas, que muitas vezes se apresentam desconectadas da realidade (MOCROSKY, BAUMANN e MONDINI, 2009, p.1189).

Santos (2015, p. 53) defende que:

O ensino da Geometria deve ocupar o seu lugar de destaque no ensino e na aprendizagem de Matemática. Os professores não podem privar o aluno de ter acesso a esta área de conhecimento e, sim, propor situações que enalteçam o uso dos conceitos geométricos e levem os alunos a viajar para um mundo de descobertas, explorando todas as suas potencialidades e enriquecendo as aulas de Matemática para que elas despertem nos alunos, o gosto em estudar Matemática (SANTOS, 2015, p. 53).

Ferreira, Soares e Lima (2009) pontuam algumas dificuldades quando pensamos em demonstração, principalmente na passagem do conhecimento empírico para o conhecimento formal. Os autores evidenciam que essa transição do empírico para o formal pode ser minimizada ou superada quando se trabalha em ambientes que propiciem o experimentar, visualizar, conjecturar e o deduzir em ambientes de geometria dinâmica.

Neste sentido, Hanna (2000, p. 5-6 *apud* ZULATTO, 2002, p.27)¹⁰ aponta que, “na sala de aula, o papel-chave da demonstração é a promoção do entendimento matemático e, assim, nosso mais importante desafio é encontrar caminhos mais efetivos de usar a demonstração com este propósito” e, um desses caminhos pode ser através de recursos visuais que possibilitam um maior entendimento a respeito do assunto e, mecanismos que possibilitem maior dinamismo, aumentando a compreensão do comportamento dos objetos geométricos com a variação de sua dimensão, por exemplo.

Caminhar nesta direção, levantando hipóteses, fazendo explorações, testando pelo arrastar, pode ser uma alternativa para o uso de softwares de Geometria Dinâmica. Porém, para que seu uso não seja um obstáculo à demonstração, é preciso não mais enfatizar o convencimento, que é adquirido, muitas vezes, com o manuseio do software, e sim, instigar os alunos a explicarem o porquê da veracidade de suas conjecturas, evitando, assim, deixar as demonstrações esquecidas, relegadas a segundo plano (ZULATTO, 2002, p. 29).

¹⁰ HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, 2000 *apud* ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. 2002.

Com um trabalho a partir de programas de geometria dinâmica, como o GeoGebra, é possível criar um ambiente favorável à aprendizagem por meio da investigação, pois ele proporciona interatividade entre a relação homem/máquina. Nesse processo, o aluno se transforma de expectador, para um agente do processo educativo (FERREIRA, SOARES e LIMA, 2009). Já o professor tem um papel fundamental nesse processo, proporcionando aos alunos um ambiente de reflexão e autonomia na construção do conhecimento.

3 O TRABALHO COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

A informática e a educação tem sido foco de recorrentes discussões, principalmente quando se trata sobre os perigos que o uso indevido da informática poderia trazer para os alunos. Essa preocupação se dá devido ao medo que muitos educadores têm do aluno deixar de ser o condutor do pensamento lógico e passar a ser um mero repetidor de comandos, esse fato é elucidado por Borba e Penteado (2016, p.8) quando eles dizem que “[...] para aqueles que concebem a matemática como a matriz do pensamento lógico” o medo decorre de “se o raciocínio lógico passa a ser realizado pelo computador, o aluno não precisará raciocinar mais e deixará de desenvolver sua inteligência”.

3.1 RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

Borba e Penteado (2016, p. 8) defendem que a relação entre informática e matemática deve ser pensada “como transformação da prática educativa”, isso porque, assim como o medo de alguns professores é ressaltado, há aqueles que defendem a ideia de que o uso de computadores pode ser a solução para os problemas. Portanto, as tecnologias podem assumir o papel de vilãs ou salvadoras, dependendo do posicionamento de quem conduz a atividade.

Para Villarreal (2012), a construção do conhecimento é, e sempre foi mediada pela presença de diferentes tecnologias e a atividade escolar foi transformada com a chegada delas. Cada uma dessas novas tecnologias influencia na maneira como o conhecimento é produzido.

Borba e Villarreal (2005, *apud* VILLARREAL, 2012, p. 79)¹¹ acrescentam que os recursos tecnológicos transformam as práticas educacionais, o conteúdo e os modos de conhecer. Os autores entendem que o sujeito epistêmico é um coletivo constituído por seres humanos com as mídias, assumindo mídia como sendo os diferentes recursos tecnológicos.

Villarreal (2012) defende que a relação de seres humanos com a mídia evidencia duas ideias centrais importante: a primeira diz que a cognição é um fator social (por isso o uso do termo humanos) e a segunda diz que a cognição inclui o uso de ferramentas. Para a autora, essas ferramentas são os meios pelos quais se produz conhecimento e elas não devem ser interpretadas como algo auxiliar ou suplementar, mas como essencial para a produção de conhecimento.

¹¹ BORBA, M.; VILLARREAL, M. **Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. New York: Springer Science+business Media, 2005 *apud* VILLARREAL, M. E. Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. **Virtualidad, Educación y Ciencia**, v. 3, n. 5, p. 73-94, 2012.

Esta posición epistemológica que coloca a los medios en una situación de coautor en la producción del conocimiento brinda una perspectiva que nos permite comprender el papel de la tecnología en la escuela con un carácter potenciador y reorganizador en lugar de supresor del raciocínio (VILLARREAL, 2012, p. 79).

Consequentemente, as tecnologias informáticas são compreendidas como sendo coautoras na produção de conhecimento e nos permite entender o papel da tecnologia na escola como sendo um personagem potenciador e reorganizador em vez de inibidor da lógica, porém depende muito da maneira como seu uso é realizado pelo professor.

Segundo Balacheff (1994 *apud* MOD, 2016)¹², é necessário um repensar sobre o trabalho com tecnologias no ambiente escolar para que ele não seja apenas mais um elemento na educação, mas sim um diferencial, ou seja, os recursos tecnológicos devem ser trabalhados de modo que promova um ganho, pois não faz sentido utilizar a tecnologias sem compreensão do que está sendo desenvolvido. .

Em sua teoria, intitulada Transposição Informática, Balacheff (1994 *apud* MOD, 2016) afirma que:

Um ambiente informático apresenta três aspectos: “o universo interno”, que é constituído pelos componentes que permitem o funcionamento do dispositivo informático; a “interface”, que compreende a tela do dispositivo que permite a comunicação com o usuário e na qual são observadas as representações dos conteúdos matemáticos que estão sendo estudados; e o “universo externo”, que é constituído pelos usuários e seus conhecimentos mobilizados pela interação com o dispositivo informático (BALACHEFF, 1994 *apud* MOD, 2016, p. 34)¹³.

Batistela; Barbariz e Lazari (2016) evidenciam o caráter que o computador tem no processo demonstrativo, servindo ao matemático “na verificação de passagens em demonstrações matemáticas” (BATISTELA; BARBARIZ E LAZARI, 2016, p. 207). Ainda segundo os autores, embora o computador seja importante, se tomado uma ferramenta no processo de demonstração, ele “precisa ser programado pelo próprio homem para fazer operações localizadas nas partes da argumentação da demonstração” (BATISTELA; BARBARIZ E LAZARI, 2016, p. 207). Portanto, o trabalho com computadores e outras tecnologias auxiliam no processo dedutivo e em demonstrações, mas para que isso ocorra é

¹² BALACHEFF, N. La transposition informatique: note sur un nouveau problème pour la didactique.. In: ARTIGUE, Michèle et. al (Ed.). **Vingt ans de didactique des mathématiques em France**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994 *apud* MOD, L.F.A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomantanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra**. 2016.

¹³ Idem anterior

necessário que haja a interferência do homem para que a demonstração seja concluída ou retomada sobre outras perspectivas caso o resultado esperado não seja alcançado. Isso significa que através do dinamismo dos ambientes tecnológicos é possível explorar os entes geométricos de diferentes formas, percebendo algumas relações e propriedades existentes entre eles, porém, para que essas relações resultem na dedução ou demonstração de propriedades é fundamental que haja a interferência do homem, pois é ele quem vai conduzir o processo dedutivo, podendo concluir esse processo quando o resultado esperado é atingido ou retomado posteriormente, caso ainda não tenha sido concretizado. Ambientes como o GeoGebra permitem os entes geométricos sejam movimentados e que suas características sejam alteradas, permitindo que uma mesma construção seja reutilizada e investigada sobre outras perspectivas,

Assim, os autores explicitam que:

[...] o computador, dada sua funcionalidade é uma máquina que permite ao matemático, frente a um problema, testar suas hipóteses iniciais obtendo resultados lógicos/numéricos que constituem novas evidências. Esses resultados podem satisfazer ou não o objetivo do matemático. No caso de satisfazerem, a tarefa demonstrativa avança. Em caso negativo, a partir dos resultados obtidos, o matemático reelabora suas conjecturas e a dinâmica de criação e verificação de hipóteses se reinicia na procura de vias de demonstração. Assim, computador e matemático, juntos, constituem um sistema que produz resultados que seriam inviáveis de se obter se não houvesse essa parceria (BATISTELA; BARBARIZ E LAZARI, 2016, p. 207).

Portanto, os autores concluem que “[...] fazer matemática é um processo que não é matemático, que envolve julgamentos do que é interessante, do que é útil” (BATISTELA; BARBARIZ e LAZARI, 2016, p. 214). Enfatizam que a intuição colabora no processo dedutivo, quando o foco é a demonstração matemática. A intuição, nesse caso, é posta em comparação “[...] como uma capacidade de ajustar coisas aos padrões que estão dados, a partir do reconhecimento de semelhança entre aspectos de problemas e/ou ideias [...]” (p. 214) e, consequentemente as tecnologias que permitem esse dinamismo a partir do arrastar do mouse, ou do toque dos dedos, de cores diferentes, da visualização corroboram no processo de demonstração e entendimento do que foi proposto.

3.2 PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Muito se vem discutindo sobre a maneira com que a tecnologia interfere nos estudos, especificamente quando tratamos de softwares educacionais. A dúvida que concerne esta

pesquisa é como o uso do Geogebra, em particular pelos professores, pode contribuir para a dedução da demonstração de uma propriedade geométrica a partir de um trabalho realizado com tecnologias digitais.

De acordo com Batistela, Barbariz e Lazari (2016), o uso de computadores fazem com que novas formas de se fazer matemática sejam consideradas.

O computador abre novas formas de se fazer matemática, contudo no que tange à tarefa de demonstrar, ele pode estar presente nessa atividade, no entanto isso não exige a presença da criatividade e intuição do matemático. O computador fomenta o processo demonstrativo, que envolve uma dinâmica de iniciar e do reiniciar, num jogo de conjecturar e avançar” (BATISTELA; BARBARIZ E LAZARI, 2016, p. 214).

Acredita-se que as possibilidades experimentais dessas mídias podem ser exploradas, podendo-se chegar a elaboração de conjecturas bem como a sua verificação. Desse modo, é possível estabelecer uma importante discussão acerca das possibilidades da inclusão de softwares no contexto educacional em seus diferentes níveis (BORBA, 2011, p. 03).

Villarreal (2012) salienta que a chegada de uma nova tecnologia no campo educacional causa certa desconfiança, gerando, de certa forma, medo do desconhecido. Para a autora, esta reação pode levar o educador à não utilização de novas tecnologias ou novos métodos em atividades que são apresentadas ao aluno. É evidenciado em seu trabalho que, em particular, nas classes de matemática, o uso de computadores e até mesmo o uso da calculadora, como meios para construir conhecimento matemático não é tão freqüente.

Hay quienes opinan que el empleo de la computadora o la calculadora impide que el alumno razone e indican que antes de utilizarla los alumnos deben primero manejar los contenidos matemáticos. Sin embargo, pocos cuestionarían que un alumno utilice lápiz y papel para resolver un ejercicio matemático o demostrar un teorema sin percibir, quizás, que su raciocinio y su propia producción matemática están siempre mediados por los dispositivos o medios que emplea para desarrollarlos (VILLARREAL, 2012, p. 82).

A partir dessa observação, conclui-se que embora o uso de computadores seja cada vez mais comum, ainda há pessoas que julgam que seu uso ou de outras tecnologias, como a calculadora, impedem o raciocínio e que antes de utilizarem esses recursos, deve-se primeiro lidar com os conteúdos matemáticos. Entretanto, a autora relata que poucos questionam sobre o uso de lápis e papel para resolver um exercício ou demonstrar um teorema, sem perceber, que o raciocínio e a produção matemática são sempre mediadas por dispositivos.

Nesse contexto, encaramos que os softwares educacionais podem ser alternativas que

possuem um papel importante ao ensino de matemática por proporcionar à visualização e o dinamismo no ensino de matemática, onde uma nova relação entre os atores do processo educacional é estipulada. Os professores, alunos, mídia e conteúdos matemáticos trabalham em conjunto na construção do saber, diante disso o professor deixa de ser visto como o detentor do saber, mas age mutuamente com seu aluno, pensando e aprendendo juntos.

Os computadores possibilitam representar e testar ideias ou hipóteses que levam à criação de um mundo abstrato e simbólico, ao mesmo tempo que introduzem diferentes formas de atuação e de interação entre as pessoas. Essas novas relações, além de envolverem a racionalidade técnico-operatória e lógico-formal, ampliam a compreensão sobre aspectos sócio afetivos e tornam evidentes fatores pedagógicos, psicológicos, sociológicos e epistemológicos (ALMEIDA, p.12).

3.3 OS PROFESSORES E AS TECNOLOGIAS INFORMÁTICAS

O uso de tecnologias informáticas é cada vez mais comum no cotidiano e isso não é diferente no cenário educacional. As salas ambientes de informática, aliado com algumas práticas escolares, possibilitam uma mudança nas aulas, oferecendo possibilidades de trabalhar as diferentes disciplinas, incluindo a matemática. Porém, embora as tecnologias sejam capazes de impulsionarem as aulas,

[...] a qualidade de sua utilização depende muito da forma como as propostas são interpretadas e colocadas em prática pelos professores. É importante salientar que, se os professores não se sentirem preparados, corre-se o risco de que ocorra apenas uma ‘troca’ de mídia, deixando de se utilizar lápis e papel para usar o computador, como um caderno eletrônico, sem qualquer mudança ou reorganização na forma como tradicionalmente vem sendo feito ou, em outra hipótese, os computadores nem serão utilizados (BORBA, 1996 *apud* ZULATTO, 2002, p.8-9)¹⁴.

Dessa maneira, os professores devem estar preparados a essa nova demanda e, para isso, algumas mudanças no modo com que as aulas e as atividades são preparadas devem ser revistas, de forma que as atividades em ambientes tecnológicos vão além do que é feito no lápis e papel. As tecnologias devem ser aliadas no processo de construção do conhecimento, todavia, as escolas também devem oferecer uma estrutura capaz de suprir as necessidades do professor, assim como oferecer uma formação continuada onde o professor terá um preparo

¹⁴ BORBA, M.C. Informática trará mudanças na educação brasileira? *Zetetiké*, Campinas, v.4, n.6, p.123-4, 1996 *apud* ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. 2002.

para que assim seja capaz de planejar uma aula capaz de atender o proposto.

A autora conclui afirmando a necessidade de um suporte técnico e pedagógico para o docente, ela entende o técnico, no sentido de “possibilitar uma manutenção dos laboratórios de Informática”, como pedagógico, “para que ele possa trocar experiências, discutir sobre suas dificuldades e sentir-se seguro na sala de aula, ao trabalhar com a Informática” (ZULATTO, 2002, p.9).

As tecnologias devem ser encaradas como uma maneira de criar condições de ensino, dessa forma, o professor continua tendo um papel essencial na sala de aula, passando a ser “o criador de ambientes de aprendizagem e o facilitador do processo de desenvolvimento intelectual do aluno” (Valente, 1993a: 6 *apud* ALMEIDA, p. 16)¹⁵.

Zulatto (2002) complementa que:

[...] é necessário que o professor se sinta estimulado a fazer uso da TI, tenha a oportunidade de lidar com sua insegurança, seu medo, e até mesmo com sua falta de conhecimento técnico, através de um suporte periódico, tanto para questões técnicas quanto para questões de dimensão pessoal; que sua escola lhe ofereça os recursos necessários para o desenvolvimento de seu trabalho; e que tenha acesso a uma formação continuada, em que sejam “protagonistas ativos nas diversas fases dos processos de formação: na concepção e no acompanhamento, na regulação e na avaliação (Nóvoa, 1995, p.30 *apud* ZULATTO, 2002, p. 13)¹⁶.

Porém, apesar disso, Villarreal (2002) discute alguns aspectos que levam o professor a ter certa resistência no que se refere ao uso de tecnologias:

A pesar de estos resultados de investigación, la resistencia al uso de tecnología en ambientes educativos continúa. Las causas son variadas: temor a lo desconocido, temor a la pérdida del poder en el aula, desconocimiento del uso de diversos softwares educativos y sus posibilidades para el aula, etc (VILLARREAL, 2002, p. 83).

Para a autora as causas são variadas: medo do desconhecido, o medo da perda de poder na sala de aula, a ignorância do uso de vários softwares educacionais e suas possibilidades para a sala de aula, etc.

¹⁵ VALENTE, J. A. **Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador**. In: BRASIL. Tecnologia, currículo e projetos. Ministério da educação. p. 23 – 31, 2003 *apud* ALMEIDA, M.E. **Informática e formação de professores**. Secretaria de Educação à Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, v.1 e 2, 2000.

¹⁶ NÓVOA, A. **A formação de professores e profissão docente**. In: NÓVOA, A. (Org) Os professores e a sua formação. 2 ed., Lisboa: Dom Quixote, 1995, p.13-33 *apud* ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. 2002

4 GEOMETRIA DINÂMICA

Esclarecemos neste capítulo como utilizaremos o *software* GeoGebra para compreender uma demonstração específica. No caso desta pesquisa, trata-se de demonstrar que o número de diagonais de um prisma é igual ao dobro do número de diagonais de uma de suas bases. O trabalho com o GeoGebra teve como objetivo, nesta pesquisa, fomentar o processo demonstrativo, proporcionando uma dinâmica de iniciar e do reiniciar, num jogo de conjecturar e avançar (BATISTELA; BARBARIZ E LAZARI, 2016, p. 214), auxiliando na visualização e na dinamicidade já que se trata de um *software* de Geometria Dinâmica.

4.1 GEOMETRIA DINÂMICA E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Os softwares de Geometria Dinâmica articulam diversos recursos com os quais os professores podem realizar construções geométricas que usualmente seriam elaboradas com régua e compasso (ZULATTO, 2002). Uma vantagem que justifica a utilização de novas metodologias, como tecnologias digitais é a de que o dinamismo e a movimentação permitem que essas análises e construções sejam feitas de forma mais interativa e rápidas. Construções a partir de régua e compasso levariam mais tempo para serem confeccionados e, para cada análise diferente que se queira fazer, os traços teriam que ser feitos novamente. Já com o uso do GeoGebra, um controle deslizante possibilitaria inúmeras possibilidades na mesma construção.

Para Villiers (2001 *apud* MOD, 2016):

Softwares dinâmicos de Geometria possibilitam que os alunos elaborem conjecturas a partir de verificações indutivas. Se a verificação não for o suficiente para motivar a busca de uma demonstração, o desafio de tentar explicar o porquê de um resultado específico ser verdadeiro pode despertar a curiosidade para a construção de uma demonstração (VILLIERS, 2001 *apud* MOD, 2016, p. 45)¹⁷.

Com isso, programas computacionais como, por exemplo, o GeoGebra permite a visualização do processo de resolução para que não se tenha apenas o resultado final. Ferreyra e Castro (2016 *apud* MOD, 2016)¹⁸ relatam que as demonstrações com o auxílio de recursos

¹⁷ VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com Sketchpad. **Educação e Matemática – APM**, Portugal, n. 62, p. 31-36, 2001 *apud* MOD, L.F.A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomantanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra**. 2016.

¹⁸ FERREYRA, N.; CASTRO, N. **Geogebra como ponto de partida de um processo de validacion** *apud* MOD, L.F.A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomantanus: um estudo de suas demo**

tecnológicos são vistas como um rompimento entre as provas pragmáticas, ou seja, aquelas elaboradas pela observação, e as provas intelectuais, que utilizam o rigor matemático.

Zulatto (2002) articula que:

No que tange à exploração, o aluno pode formular suas próprias conjecturas e tentar verificar se elas são válidas. Ou seja, o próprio aluno irá realizar a verificação e validação da conjectura que formulou. Isso é possível devido aos recursos dos softwares, como o arrastar, que possibilita a simulação de diferentes casos da figura, como se o aluno estivesse verificando “todos” os casos possíveis de uma mesma família de configuração (ZULATTO, 2002, p. 21).

As considerações feitas pela autora em relação aos alunos podem ser estendidas aos professores. A partir do GeoGebra o professor pode verificar conjecturas e validá-las, possibilitando realizar demonstrações, pontuando suas dificuldades e explorando recursos visuais, que podem auxiliar no processo de identificação e interpretações das diversas informações que as construções geométricas¹⁹ trazem em si.

Abar (2011) atenta ao cuidado a ser tomado quanto à utilização de figuras em demonstrações, pois apesar de contribuírem para a construção do conhecimento e clarear os argumentos de uma demonstração se a figura for mal elaborada, ela pode levar a dedução de resultados absurdos e também a elaboração de hipóteses erradas. Isso acontece no sentido de que, com a precisão dos traçados no processo de construção, os invariantes geométricos podem ser notados com mais facilidade e, algumas propriedades podem ser validadas de maneira interativa através da experimentação.

Os invariantes geométricos são as propriedades geométricas da figura, são o que não variam, como o próprio nome remete. Em construções dinâmicas, podemos caracterizar esses invariantes quando observarmos as particularidades que não se alteram quando manipulamos a construção. Quando o usuário utiliza corretamente as propriedades geométricas na construção, a dinâmica dos movimentos possibilita que ele perceba o que permanece invariante, alertando-o para determinados padrões e motivando-o a fazer conjecturas e a testar suas convicções (GRAVINA, 1996).

4.2 GEOGEBRA

Abar e Almeida (2017, p. 138) destacam que há algumas décadas, “têm-se discutido muito sobre as razões, do ponto de vista do ensino e da aprendizagem da geometria, que

¹⁹ Referimos a construções geométricas devido esse ser o objeto de estudo do nosso trabalho, porém o GeoGebra permite o desenvolvimentos de atividades variadas e não só as relacionadas a Geometria.

apontam para o uso dos ambientes de geometria dinâmica (AGD) como elemento facilitador da aprendizagem”. Também, nesse mesmo período os autores esclarecem que surgiram outros programas de geometria dinâmica, porém eles eram categorizados como sendo de código fechado e alguns apresentavam interesses comerciais por detrás deles, como os programas Cabri-Géomètre e o The Geometer’s Sketchpad. Entretanto, no final do séc XX, houve um movimento para a proliferação de programas de códigos abertos, como é o caso do GeoGebra (ABAR e ALMEIDA, 2017).

O caso do GeoGebra é ímpar, pois, desde a ideia inicial de Markus Hohenwarter, em 2001, o software foi para além da geometria plana, possibilitando o trabalho da geometria tridimensional, por meio de uma tela de cálculo integrada que possibilita utilizar cálculo algébrico e simbólico. O GeoGebra é um instrumento privilegiado para se aprender e ensinar matemática em todos os graus de ensino. A filosofia Opensource passou a ser um novo paradigma do século XXI, e o GeoGebra, pensado nessa filosofia, passou a ser desenvolvido e aplicado no seio de uma rede internacional, na qual os institutos GeoGebra têm um papel fundamental na divulgação do software, das suas aplicações, na reflexão sobre as suas aplicações educativas e, finalmente, na integração de novas capacidades que permitem se chegar a praticamente todas as áreas da matemática (ABAR e ALMEIDA, 2017, p.138).

Os autores complementam elucidando que “a utilização do software GeoGebra não é apenas mais um recurso tecnológico, mas também um recurso que colabora no desenvolvimento de conceitos matemáticos, uma vez que, por si só, o software não faz matemática” (ABAR e ALMEIDA, 2017, p. 139), assim, o GeoGebra pode ser explicitado como sendo um programa que possibilita uma gama de atividades que englobam conceitos matemáticos, mas que permitem uma interação significativa entre a pessoa que manipula seus recursos e a própria máquina fazendo com que conceitos matemáticos sejam compreendidos a partir da visualização e movimentação dos objetos, permitindo uma investigação de uma forma que dificilmente o caderno/lápis ou giz/lousa conseguiria.

Para Abar e Almeida (2017), o uso do GeoGebra vem se expandindo devido sua capacidade “de integrar novas funcionalidades matemáticas” (p.138) que “colocam esse software na vanguarda da investigação educacional e, não menos importante, na investigação de novos resultados matemáticos” (p. 138). Atualmente o GeoGebra está disponível quase em todas as plataformas digitais, além de dispositivos móveis.

4.3 CONJECTURAS, HIPÓTESES E DEMONSTRAÇÃO ATRAVÉS DO GEOGEBRA

Não é de hoje que a visualização é utilizada em demonstrações, principalmente no

âmbito da geometria. Na Grécia Antiga, os recursos visuais eram utilizados no processo demonstrativo, esse fato é retratado por Miguel (1995) que descreve o quanto os antigos pitagóricos consideravam a geometria inseparável da visão.

Euclides utiliza-se da Lógica estrita na construção de suas demonstrações porque em sua época a validade de um teorema era mostrada por meio da Lógica. Aquilo que ele queria dizer por ‘demonstratio’ (‘desenvolvimento’) era expresso em grego pelo verbo **δείκνυμι** (deiknymi). Consequentemente, esse verbo em Euclides é o termo técnico para ‘desenvolvimento lógico’. Mas como os gregos interpretavam a ‘**demonstratio**’ antes dessa época? Por meio de vários argumentos. Szabó conclui que a técnica de demonstração na Matemática grega antiga era a simples **visualização**. Diz que os antigos pitagóricos consideravam a Geometria como *ιστορία*, isto é, como uma ciência inseparável da visão e que, por volta da época de Platão, os gregos ainda tinham consciência do antigo significado do verbo **δείκνυμι**, **isto é, ‘concretamente visível’**. Disso decorre imediatamente que a passagem da concepção primitiva para a concepção euclidiana da ‘demonstratio’ deve ter sido provocada por uma tendência anti-ilustrativa e anti-empírica da ciência grega (MIGUEL, 1995, p.17).

Assim como na antiguidade a visualização trazia uma perspectiva favorável no processo de dedução e demonstração, hoje em dia diferentes tipos de materiais, como os tecnológicos, contribuem na construção do conhecimento, por proporcionar uma proximidade com a pessoa quem está interagindo, muitas vezes tornando palpável o que era abstrato ou difícil de se imaginar.

Batistela; Barbariz e Lazari (2016, p.210), refletem que “o computador tem se mostrado importante para o trabalho dos matemáticos na averiguação de provas que levam anos para serem verificadas depois de terem sido provadas”, um exemplo disso é o Teorema das quatro cores²⁰. Assim, compreende-se que os recursos que o computador oferece, é capaz de auxiliar no processo de levantamento e validação de hipóteses, conjecturar e demonstrar propriedades e teoremas. Esse caráter exploratório que muitos programas, como o GeoGebra, trazem em si podem despertar a criatividade e o processo de raciocínio lógico a partir de intuições e percepções.

Apesar dos computadores oferecem diversos recursos, o trabalho do matemático ainda é essencial para que a demonstração seja concluída, dessa forma podemos concluir que “[...] o que o computador pode fazer pelo matemático no processo de demonstração é somente o que o matemático programa para que ele faça. Para isso, o matemático se vale de seu conhecimento científico, de sua intuição e de sua criatividade” (BATISTELA; BARBARIZ E LAZARI, 2016, p. 213).

²⁰ Formulação do teorema das quatro cores: Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma a que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor. Detalhe: as regiões que só se tocam num ponto não são consideradas vizinhas.

Segundo Zulatto (2002), fazer o levantamento de hipóteses, através de explorações e manipulação dos objetos, como o arrastar ou rotacionar, pode ser uma alternativa para o uso de softwares de Geometria Dinâmica, neste caso o GeoGebra. “Porém, para que seu uso não seja um obstáculo à demonstração, é preciso não mais enfatizar o convencimento, que é adquirido, muitas vezes, com o manuseio do software, e sim, instigar os alunos a explicarem o porquê da veracidade de suas conjecturas” (ZULATTO, 2002, p. 29).

5 METODOLOGIA

5.1 PESQUISA QUALITATIVA

Gil (2007, p. 17) descreve pesquisa como “o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos”, assim, pode-se entender a pesquisa como sendo uma investigação sobre determinado objeto, ambiente ou fenômeno, ou seja, pesquisa é o ato de buscar a resposta para uma determinada pergunta.

Quando estamos realizando uma pesquisa, estamos interessados em conhecer nosso objeto de estudo e, para isso sempre nos apoiamos em uma interrogação que procuraremos responder ao longo da pesquisa (GERHARDT e SILVEIRA, 2009).

A interrogação, segundo Bicudo (2012) direciona as perguntas e nos mostra caminhos que serão tomados durante uma pesquisa, ou seja, é através dela que se tem um esclarecimento a respeito de algo que, vai além de só perguntar. A interrogação, ainda segundo Bicudo, tem a função de interrogar o mundo, “não o mundo em sua generalidade vazia, mas aspectos específicos do mundo que se mostram em suas fisicalidades pragmáticas, teóricas, tecnológicas, ideológicas” (BICUDO, 2012, p. 20).

O termo qualitativo, em uma pesquisa, remete a ideia de se trabalhar com qualidade, ou seja, características do objeto de estudo (Bicudo, 2012), implicando em um processo de partilha entre o pesquisador e o objeto de estudo, onde a partir desse primeiro contato são gerados significados que são percebidos após um olhar sensível a respeito da pergunta norteadora da pesquisa (CHIZZOTTI, 2003).

Dessa maneira, a pesquisa qualitativa não está preocupada com os aspectos numéricos, mas sim com as qualidades do objeto de estudo. Gerhardt e Silveira (2009) dizem que:

Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-numéricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens (GERHARDT E SILVEIRA, 2009, p. 32).

A partir dessa concepção percebemos o caráter transdisciplinar de uma pesquisa qualitativa, pois durante a investigação nos preocupamos com questões que envolvem as ciências humanas e sociais, podendo adotar vários métodos para se chegar ao resultado almejado, como por exemplo, a fenomenologia, estudo de casos, etnografia, entre outros (CHIZZOTTI, 2003).

5.2 PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O campo de pesquisa da Educação Matemática é muito amplo e o pesquisador deve tomar cuidado para que durante o processo de investigação ele não se afaste muito da Matemática, focando somente na Educação, para isso é importante realizar uma reflexão sobre como sua ação contribui para a Educação Matemática, de modo que não se restrinja a reproduzir o que já é produzido, mas abrangendo também o novo (BICUDO, 1999).

A educação é “um processo dinâmico de transformação, no qual se procura, num enfoque transdisciplinar, entender a condição humana, as condições da sociedade e da economia, sugerindo medidas para atingir a paz total, nas suas dimensões cósmica, planetária, social e individual” (D’AMBROSIO et. al, 2011, p.115-116), para os autores, na transdisciplinaridade “o saber absoluto é substituído pela humildade da busca incessante. A adoção de comportamentos incontestados e soluções finais é rejeitada, adotando, assim, uma atitude de respeito, solidariedade e cooperação” (D’AMBROSIO et. al, 2011, p. 222).

D’Ambrósio (1996) descreve sobre a dificuldade encontrada em motivar os alunos no processo de ensino de matemática, para o autor, “[...] do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico” (p. 31). Muito se fala em contextualização, mas ainda existe muita dificuldade em se trabalhar situações atuais baseando-se em situações que causam estranheza aos alunos, por ser criada e desenvolvida em outros tempos. D’Ambrósio ainda acrescenta que muito se diz sobre a matemática estar viva, isso é elucidado pela fala:

Muitos dirão: mas a matemática está viva, está se produzindo mais matemática nestes últimos 20 anos do que em toda a história da humanidade. Sem dúvida. Mas essa produção é produto de uma dinâmica interna da ciência e da tecnologia e da própria matemática. Naturalmente muito intensa, mas não como fonte primária de motivação. Interessa à criança, ao jovem e ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas (D’AMBRÓSIO, 1996, p. 31).

Tratando-se de Educação Matemática, Bicudo (1999) supõe que:

A Educação Matemática toma como ponto de partida o cuidado com o aluno, considerando sua realidade histórica e cultural e possibilidades de vir-a-ser; cuidado com a Matemática, considerando sua história e modos de manifestar-se no cotidiano e na esfera científica; cuidado com o contexto escolar, lugar onde a educação escolar se realiza; cuidado com o contexto social, onde as relações entre pessoas, entre grupos, entre instituições são estabelecidas e onde a pessoa educada também de um ponto de vista matemático é solicitada a situar-se, agindo como cidadão que participa das decisões e que trabalha participando das forças produtoras (BICUDO, 1999, p. 258).

Assim, uma pesquisa qualitativa permite colocar o sujeito da pesquisa em evidência, olhando-o não de maneira isolada, mas de maneira contextualizada social e culturalmente, tendo assim uma visão holística sobre a pesquisa. Portanto, a qualidade é percebida mediante a percepção e reflexão do observador, porém, o pesquisador deve atentar-se para não de influenciar por visões particulares que ele possa ter acerca da sua interrogação (BICUDO, 2012).

Esse tipo de pesquisa se torna relevante na área de Educação Matemática devido ao fato dela estar constituída entre a Educação e a Matemática e formam uma realidade única, Bicudo (2012, p. 24) diz à realidade que as duas áreas dialogam “oferecem-se ao trabalho da produção do conhecimento buscado”, ou seja, para a autora elas não podem ser colocadas de maneira isolada, pois uma está entrelaçada a outra “constituindo o solo em que seu pensar se movimenta, onde a lógica de produção de ambas as disciplinas, bem como os respectivos conteúdos temáticos e discursos que articulam as ideias que se mostram [...] devem ser de domínio do seu cotidiano” (BICUDO, 2012, p. 25).

5.3 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

O objetivo desta pesquisa é compreender os modos como os professores de Matemática de uma escola estadual de Aparecida realizam a dedução da demonstração de uma propriedade geométrica que estabelece a relação entre o número de diagonais de um prisma (D_p) com o número de diagonais de sua base (D_b), concluindo a partir de seus conhecimentos e observações que $D_p = 2 \times D_b$. A escolha da metodologia para a elaboração deste trabalho é o estudo de caso, pois essa atividade será desenvolvida com um número restrito de professores dessa mesma escola e, após as transcrições realizaremos as análises Ideográfica e Nomotética para a compreensão dos resultados.

5.3.1 Estudo de Caso

Goldenberg (2009) explicita sobre a origem do termo estudo de caso e como ela pode se estender a diferentes ciências e estudos. A autora relata que o termo estudo de caso “vem de uma tradição de pesquisa médica e psicológica, na qual se refere a uma análise detalhada de um caso individual que explica a dinâmica e a patologia de uma doença dada” (p. 33), mas de que modo o estudo de caso se relaciona com a educação matemática?

A investigação de um estudo de caso, tanto na pesquisa médica, psicológica ou mesmo

na educação presume que a partir de uma exploração intensa de um caso é possível adquirir conhecimento sobre determinado fenômeno. Goldenberg (2009) pontua que:

O estudo de caso não é uma técnica específica, mas uma análise holística, a mais completa possível, que considera a unidade social estudada como um todo, seja um indivíduo, uma família, uma instituição ou uma comunidade, com o objetivo de compreendê-los em seus próprios termos. O estudo de caso reúne o maior número de informações detalhadas, por meio de diferentes técnicas de pesquisa, com o objetivo de apreender a totalidade de uma situação e descrever a complexidade de um caso concreto (GOLDENBERG, 2009, p. 34).

Assim, o estudo de caso proporciona que as particularidades sejam levadas em consideração durante a análise dos resultados de uma pesquisa, revelando comportamentos e diferenças que em alguns casos podem ser contrárias ao que se tem como padrão. Goldenberg (2009, p. 34) finaliza referindo-se que “essa técnica, complementada pelas técnicas de entrevista em profundidade, revela o *significado* daquelas situações para os indivíduos, que sempre é mais amplo do que aquilo que aparece em um questionário padronizado”.

Yin (2015, p. 04) diz que o estudo de caso “é usado em muitas situações, para contribuir ao nosso conhecimento dos fenômenos individuais, grupais, organizacionais, sociais, políticos e relacionados”, o autor ainda supõe que “a necessidade diferenciada da pesquisa de estudo de caso surge do desejo de entender fenômenos sociais complexos [...], permite que os investigadores foquem em um “caso” e retenham uma perspectiva holística e do mundo real” (YIN, 2015, p. 04), portanto esse tipo de estudo dá conta da pesquisa que nos propomos a realizar por se tratar de uma análise voltada a um grupo de professores, focando nossa atenção para os professores que ministram aulas de matemática de modo que possamos compreender de forma global, ou seja, de maneira holística como se dá a compreensão do desenvolvimento do teorema que se refere a quantidade de diagonais de um prisma se comparado com as diagonais de sua base a partir de recursos tecnológicos.

5.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O objetivo desse trabalho foi entender como os professores de matemática de uma escola estadual de Aparecida compreendem o processo de dedução da demonstração de uma propriedade geométrica a partir de tecnologias, no caso deste trabalho, a partir do GeoGebra.

Para o desenvolvimento deste projeto a equipe gestora da escola em questão cedeu o horário de HTPC dos professores, que ocorre semanalmente, para que uma formação fosse ofertada a eles, principalmente aos professores de Matemática. Em conversas com o

coordenador pedagógico, os professores disseram que não tinham contato com o programa, mas que já haviam ouvido falar sobre ele em algum momento de sua formação. A partir de um interesse da escola para que essa formação fosse oferecida, o coordenador propôs que durante sete semanas o HTPC fosse direcionado para essa atividade, porém, como nem todos os discentes tinham interesse, por considerarem supérfluo às suas aulas, o coordenador deixou em aberto a participação desses professores ou não.

O projeto foi desenvolvido ao longo de sete encontros, cada um deles contando com 1h30min de duração. Durante os sete encontros, foram expostos ao grupo uma apresentação do GeoGebra e o vasto leque de atividades que poderiam ser exploradas a partir do programa. As atividades foram planejadas e revisadas com antecedência antes de serem expostas ao grupo e, a participação dos professores variou ao longo dos encontros. No encontro inicial, participaram professores de Física, Matemática, Química, Português, Artes e Geografia, mas ao longo das semanas, o grupo foi se restringindo devido a não aplicabilidade do GeoGebra em algumas disciplinas (segundo os próprios professores). Nos encontros finais (5º ao 7º), somente os professores de Matemática participaram, o que não afetou o resultado dessa pesquisa já que nossa proposta tinha como foco os professores de Matemática.

5.4.1 Primeiro encontro

O primeiro encontro consistiu na apresentação do GeoGebra para os professores de Matemática vinculados à escola, pois eles mencionaram, em um primeiro contato, que não conheciam o GeoGebra, mas que já haviam ouvido falar sobre ele.

Para que se chegasse ao objetivo deste trabalho, alguns elementos básicos deveriam ser de conhecimento dos sujeitos da pesquisa e, para isso, nesse encontro foram apresentadas a interface e algumas ferramentas do programa, além de discutir as possibilidades de propostas que poderiam ser realizadas com os discentes.

Os professores puderam reconhecer a interface, ou seja, as barras de ferramentas, barra de menu, janela de álgebra, janela de visualização, entrada de dados e a lista de comandos, mostrando onde pode-se localizar todos esses itens para darem suporte as construções futuras. O encontro também possibilitou que os envolvidos na pesquisa aprendessem a realizar a instalação do GeoGebra nos computadores e nos celulares, a partir do aplicativo, facilitando o acesso mesmo que eles não estejam no ambiente escolar.

5.4.2 Segundo encontro

No segundo encontro foi abordada a construção de linhas retas: retas, semirretas, segmentos de reta, vetores e caminhos poligonais tanto pela entrada de dados, quanto pela barra de ferramentas.

Nos primeiros traços os professores demonstraram não ter muita familiaridade com o programa, mas mostraram-se dispostos a trabalhar com a nova ferramenta. Após a apresentação das linhas retas, outras ferramentas relacionadas a reta foram abordadas como a perpendicular, paralela, bissetriz, mediatriz e mediana.

Assim como no encontro anterior, ao final deste encontro os professores discutiram a respeito dos conceitos que foram trabalhados, relacionando as construções elaboradas com as geradas a partir de régua e compasso.

5.4.3 Terceiro encontro

Para o terceiro encontro foi proposta a construção de polígonos com a utilização do mouse e por meio da digitação dos comandos na entrada de dados.

Inicialmente os polígonos foram construídos a partir de dois pontos específicos através das ferramentas polígono regular e polígono rígido. Os professores relataram que acharam interessante o uso dessas ferramentas, já que alguns polígonos são difíceis de serem feitas em salas de aula convencionais.

5.4.4 Quarto encontro

No quarto encontro foi feito o estudo dos entes geométricos e suas propriedades.

Ao realizar a construção de um ente geométrico no GeoGebra, ele é exibido com atributos predefinidos, ou seja, cor, espessura da linha, transparência/ opacidade. Porém, esses atributos podem ser modificados com a finalidade de facilitar ou diferenciar aspectos de uma construção.

Nesse encontro, os sujeitos dessa pesquisa foram conduzidos a modificar essas características dos objetos através da Janela de Propriedades de cada objeto, além de fazer a alteração do nome do objeto, mostrando algumas possibilidades que seu uso pode proporcionar.

5.4.5 Quinto encontro

Nesse encontro, foi apresentado o controle deslizante para que alguns elementos dos objetos projetados pudessem ser manipulados e alterados pelo próprio usuário, ajudando na percepção do que ocorre quando os valores do controle deslizante sofrem modificações, possibilitando investigações referente às atividades.

Para explorar as ferramentas estudadas ao longo dos encontros, foram propostas atividades diversas para que os professores se familiarizassem com os comandos e construções.

5.4.6 Sexto encontro

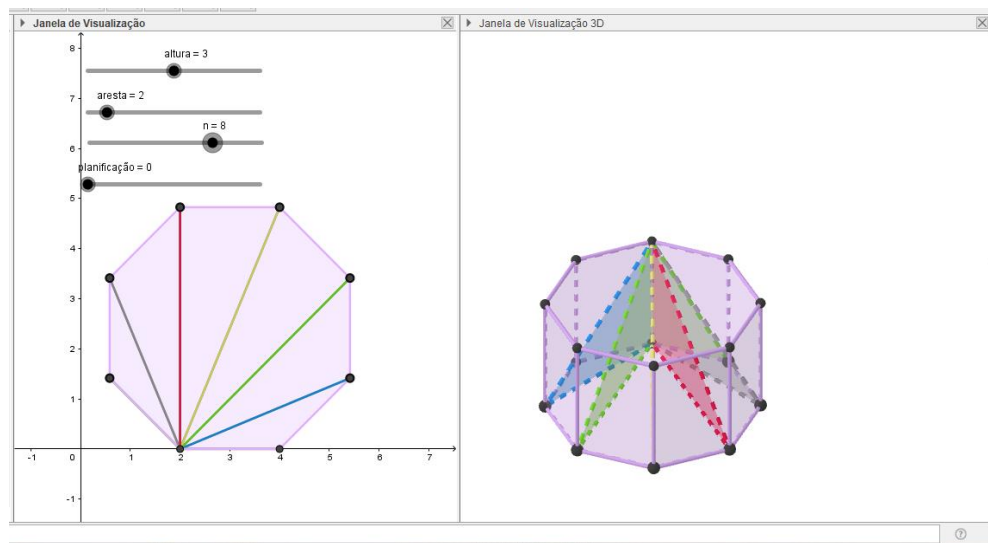
No sexto encontro, a janela de visualização 3D foi apresentada e explorada, gerando espanto aos professores que afirmaram que não haviam trabalhado com nada parecido antes.

Nesse encontro foram construídos os primeiros sólidos geométricos como prismas e pirâmides, assim como sua planificação. Esse encontro foi fundamental para a atividade do encontro posterior, servindo como base para o sétimo encontro, que é o foco de nosso estudo.

5.4.7 Sétimo encontro

Após o grupo conhecer um pouco a respeito das possibilidades e ferramentas do GeoGebra, foi proposta a atividade que pedia que os professores participantes dessa formação realizassem a dedução da demonstração da propriedade geométrica que diz que o número de diagonais de um prisma de base qualquer tem o dobro do número de diagonais de sua base.

O objetivo desta atividade é perceber como os professores constroem a demonstração dessa propriedade a partir de um trabalho com o GeoGebra.

Figura 1: Janelas de Visualização 2D e 3D

Fonte: Autoria própria (2018).

5.5 A DEMONSTRAÇÃO FORMAL

Segundo Dolce e Pompeo (1997, p. 136) “diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono”.

O número de diagonais d de um polígono de n lados ($n \geq 3$) é dado por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Dolce e Pompeo (1997, p. 137) deduzem a fórmula que se refere ao número de diagonais de um polígono de n lados ($n \geq 3$) da seguinte forma:

Seja $A_1A_2A_3\dots A_n$ vértices de um polígono de n lados.

Com extremidade num dos vértices do polígono (vértice A_1 , por exemplo), temos: $(n - 3)$ diagonais.

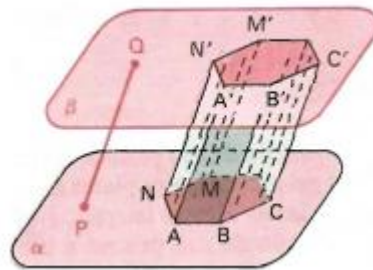
Se com extremidade em cada vértice temos $(n - 3)$ diagonais, então com extremidades nos n vértices, temos: $n(n - 3)$ diagonais.

Porém, nesta conta $n(n - 3)$ cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidades em 2 vértices. (Por exemplo, na conta acima, A_1A_3 e A_3A_1 , são contadas como duas diagonais, quando na realidade é uma só $A_1A_3 = A_3A_1$)

Logo o número d de diagonais é dado por:

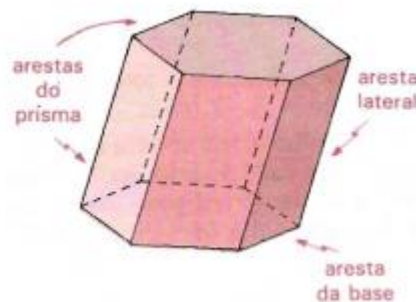
$$d = \frac{n(n-3)}{2} \quad (\text{DOLCE e POMPEO, 1997, p. 137}).$$

Dolce e Pompeo (ano, p. 139) definem prisma como “à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ , com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espço dos determinados por α ”.

Figura 2: Prisma

Fonte: Dolce e Pompeo (2005)

Conhecendo o número de vértices do polígono da base, precisamos saber a quantidade de diagonais do prisma. Para isso, deve-se considerar os elementos do prisma: arestas do prisma, aresta lateral e aresta da base.

Figura 3: Elementos do Prisma

Fonte: Dolce e Pompeo (2005)

Entretanto, quando nos referimos às diagonais de um prisma, não levamos em consideração as diagonais das bases e nem as das faces laterais dele.

Considerando que, se um prisma possui uma quantidade de vértices (V), então o número de vértices desse prisma equivale a $2 \times n$ (onde n é a quantidade de lados do polígono da base).

E, cada vértice desse prisma pode se unir a um outro vértice desse mesmo prisma, onde cada um dos segmentos poderá originar arestas (da base ou lateral) ou diagonais (da base, das laterais ou dos prismas).

Portanto, o número de diagonais (D) de um prisma de base qualquer é o resultado de todas as combinações possíveis de ligações entre 2 vértices ($C_{V,2}$), excluindo as arestas (A) e as diagonais das faces (laterais e da base). Assim podemos expressa-la segundo a fórmula:

$$D = C_{V,2} - A - \sum d(I)$$

Onde D é o número de diagonais do prisma, A é o número de arestas, $\sum d$ é o número de diagonais da base e, $C_{v,2}$ é o total de ligações possíveis entre 2 vértices distintos.

A quantidade de arestas (A) desse prisma se refere as arestas da base ($n + n = 2 \times n$) e, a quantidade de arestas laterais (n), totalizando $3 \times n$.

As diagonais das faces do prisma ($\sum d$) são o somatório das diagonais das bases (d_b) com as diagonais das suas laterais (d_l). Como as laterais formam um quadrilátero, logo cada uma delas possui duas diagonais, totalizando $2 \times n$ diagonais nas faces laterais e, na face representada pela base (d_b) temos $2 \times d$, onde d é a diagonal do polígono da base (deduzido anteriormente), assim, $F_b = 2 \times d$:

$$d_b = 2 \times d, \text{ mas } d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Logo, $d_b = n(n-3)$.

Como $d_b = n(n-3)$ e $d_l = 2 \times n$, vem que:

$$\begin{aligned}\sum d &= d_b + d_l \\ \sum d &= n(n-3) + 2n.\end{aligned}$$

Retomando (I), vem que:

$$D = C_{v,2} - A - \sum d$$

Mas $A = 3n$, $\sum d = n(n-3) + 2n$ e $V=2n$

$$D = C_{2n,2} - 3n - [n(n-3) + 2n]$$

$$D = \frac{2n!}{2!(2n-2)!} - 5n - n^2 + 3n$$

$$D = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-2)!} - n^2 - 2n$$

$$D = n^2 - 3n$$

$$\therefore D = n(n-3)$$

$$\text{Como } d = \frac{n(n-3)}{2}, \text{ logo } 2d = n(n-3)$$

$$\therefore D = 2d \#$$

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os dados produzidos nesta pesquisa foram organizados e analisados levando em consideração que a abordagem adotada para esta investigação é a metodologia utilizada nas pesquisas fenomenológicas. É importante salientar que não se trata de uma abordagem fenomenológica de pesquisa, mas acreditamos que, pelas características dos dados coletados e da questão norteadora da pesquisa, a utilização dessa metodologia de pesquisa, em específico, possibilita ao pesquisador explicitar o que compreendeu acerca do seu objeto de estudo (Pereira, 2017).

Encontramos nos procedimentos da fenomenologia uma maneira de organizar os dados coletados na pesquisa, em que o pesquisador busca por uma compreensão dos sentidos atribuídos pelos sujeitos acerca do fenômeno investigado (BICUDO, 2011).

De acordo com Machado (1994, p. 40), a “análise do fenômeno situado, portanto, daquele que colocamos diante dos nossos olhos, abandonamos a maneira comum de olhar, estabelecendo contato direto com o fenômeno vivido, através de uma leitura cuidadosa de todas as descrições”, envolve dois grandes momentos: o da Análise Ideográfica e o da Análise Nomotética.

6.1 FENOMENOLOGIA

Fenômeno é o que está sendo investigado. Etimologicamente “vem da palavra grega *fainomenon* – que deriva do verbo *fainestai* – e significa o que se mostra, o que se manifesta, o que aparece. É o que se manifesta para uma consciência” (BICUDO, 1994, p. 17), sendo assim, fenômeno é aquilo que se mostra para o pesquisador através de uma intencionalidade, que a autora chama de consciência, e, essa intencionalidade é a busca pela compreensão do que se pretende investigar, “é o estar voltado para... atentivamente” (BICUDO, 1994, p. 17).

Para Martins (1992), a fenomenologia é:

[...] principalmente, um nome que se dá a um movimento cujo objetivo precípua é a investigação direta e a descrição de fenômenos que são experienciado pela consciência, sem teoria sobre a sua explicação causal e tão livre quanto possível de pressupostos e de pré-conceitos (MARTINS, 1992, p.50).

Deve-se lembrar de que quando algo está a mostra, ele não se mostra de imediato, depende a todo instante da intenção do sujeito que interroga, do rigor e da insistência para se obter aquilo que é característico, básico e essencial do fenômeno. Sendo o fenômeno

percebido pelo sujeito, a percepção é particular. Nesse sentido, a realidade já não será mais objetiva, mas se torna aquilo que se compreendeu, que se interpretou e que se comunicou do percebido. “É portanto, *perspectival*, não havendo uma única realidade, mas tantas quantas forem suas interpretações e comunicações” (BICUDO, 1994, p. 18).

“Trabalhar na perspectiva fenomenológica é buscar a compreensão do fenômeno focado em suas formas de se doar ao pesquisador” (SANTOS; VENTURIN, 2010, p.2). Nesse sentido, os autores entendem por compreensão do fenômeno o ato de buscar peculiaridades, buscando as respostas para a indagação inicial, ou seja, como o fenômeno é experienciado e percebido.

Abordar o tema fenomenologicamente significa que procuramos compreendê-lo, partindo de como ele se mostra a nós, em nossa experiência vivida, ou seja, nas transcrições de áudio e vídeo de como a dedução da demonstração da propriedade geométrica que relaciona o total de diagonais do prisma com o número de diagonais de sua base é compreendida pelos professores de Matemática de uma escola estadual do município de Aparecida- SP.

As análises ideográfica e nomotética são momentos importantes na pesquisa fenomenológica por auxiliar no processo de teorização do fenômeno, buscando as respostas para o que se deseja compreender, isso é ressaltado por Santos e Venturin (2010, p.5) quando dizem que “a passagem de uma para outra é um caminhar que inicialmente dá destaque às análises dos individuais, buscando então um ato de teorização, as generalizações possíveis ao apontar as características estruturantes subjacentes àqueles individuais”.

6.1.1 Análise ideográfica

A análise ideográfica é o momento em que as descrições são colocadas em foco e são observados os aspectos interessantes e relevantes para a interrogação inicial. Além disso, é através dessa análise que começa a compreensão do fenômeno, revelando as unidades de significados. Nessa etapa, “o pesquisador deve deixar que o sentido se revele, e, esse deixar requer uma atividade elevada, e não passiva, já que é nela que emergem as possibilidades de compreensão do que está sendo investigado” (PAULO, 2006, p.54).

Durante a análise ideográfica, o pesquisador deve se colocar na perspectiva do sujeito de sua pesquisa, buscando esclarecer nas descrições as manifestações que conduzem para a compreensão do fenômeno. Conforme Paulo; Amaral e Santiago (2010, p. 74), “nessa fase, o pesquisador realiza uma hermenêutica, buscando explicitar o que compreende do dito pelo

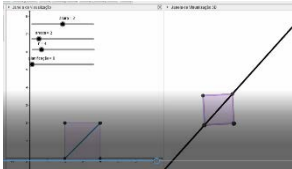
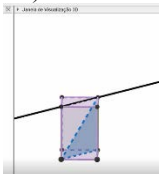
sujeito, construindo as asserções articuladas ou, colocando na linguagem do pesquisador, o sentido percebido nos discursos do sujeito”.

A identificação utilizada na tabela 1 segue uma ordem: a letra P refere-se ao professor, o primeiro número refere-se ao sujeito e o segundo à unidade de significado de cada sujeito. Exemplificando, a identificação P1.1 refere-se a primeira (1) unidade de significado do professor 1 (P1).

Como os professores compreendem a dedução da demonstração da propriedade que diz respeito ao número de diagonais de um prisma a partir de um trabalho com tecnologia digital?

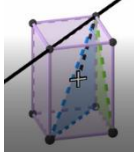
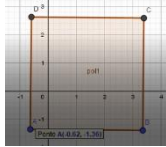
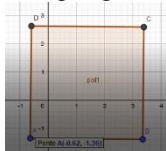
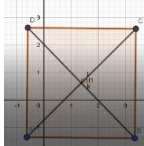
Quadro 1: Análise Ideográfica

(continua)

Identificação	Fala do Sujeito	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
P1.1	[...] quando observarmos a diagonal deste quadrado existe a possibilidade de estarmos observando a projeção da diagonal do cubo. [Na janela de visualização 3D, o prisma é visto por cima e a diagonal da face – quadrado – é marcada com a ferramenta de construção da reta]	Com essa passagem, o professor mostrou a partir da visualização da diagonal do quadrado, como ele visualiza a projeção da diagonal do prisma de base quadrangular. 	Visualização como justificativa da projeção da diagonal da base como diagonal do prisma.
P1.2	[...] podemos pensar que qualquer reta no plano pode ser pensada como uma superposição de duas retas, uma que sobe, outra que desce.	A ideia de “superposição” de duas retas, como P1 evidencia que “sobe” e “desce” é visualizada quando o polígono da base de um prisma é observado de cima, não permite identificar se a diagonal parte de A até D’ ou de D até A’, por isso a diagonal do polígono é descrita como uma “superposição” de outras duas retas (diagonais do prisma). 	Movimenta a figura para ver a projeção das diagonais. “Arrasta”, para visualizar a figura e justificar sua fala sobre as diagonais do prisma.

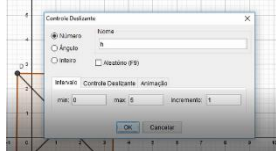
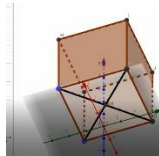
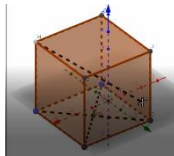
Quadro 2: Análise Ideográfica

(continuação)

Identificação	Fala do Sujeito	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
P1.3	[...] então uma reta no plano é uma “superposição” da projeção de duas retas no espaço	Para a fixação da ideia, a ferramenta segmento de reta foi selecionada para que a representação da diagonal da face (situada no plano), fosse estendida ao espaço para que a diagonal do prisma fosse ressaltada. 	Tentativa de visualização espacial
P2.1	[...] então vamos por aqui, que tenha quatro, quatro vértices, então a diagonal, ele não pode ser esse lado e nem esse lado aqui [apontando para dois vértices consecutivos A, B e D]	Percebe-se neste início que P2 procurou mostrar os casos em que o segmento que interliga 2 vértices não caracterizam a diagonal de um polígono. Para isso, P1 utilizou-se de recursos visuais quando mostrou quais seriam esses vértices. 	Identifica na figura características da diagonal
P2.2	[...] porque pra ele ser diagonal, o ponto, ele tem que tá do outro lado, é..., deixa eu ver, ele vai ter que ser, vai ter que tá oposto, não, adjacente, ele não vai ser adjacente com nenhuma dessas retas [apontando para as arestas que unem vértices consecutivos]	P2 mostra a definição de diagonal, evidenciando o fato de que a diagonal é o segmento que liga dois vértices não consecutivos de um polígono 	Identifica na figura características da diagonal
P2.3	[...] então eu teria, um segmento, uma diagonal aqui e uma outra diagonal aqui [P2 utilizou como apoio visual um prisma de base quadrangular e mostrou como diagonal o segmento que une os vértices não consecutivos, identificando duas diagonais]	Para elucidar quais são as diagonais do polígono que será utilizado como base do prisma, P2 faz uso da ferramenta segmento de reta para unir os vértices não consecutivos. 	A partir da definição de diagonal é feita a construção da diagonal da base

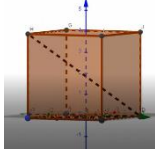
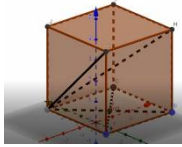
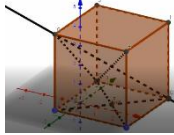
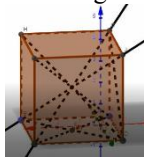
Quadro 3: Análise Ideográfica

(continuação)

Identificação	Fala do Sujeito	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
P2.4	[...] vou colocar uma altura, mas essa altura, ela pode, é o que vai tá formando o meu prisma, porque ele tá aqui embaixo no plano, daí ele vai conseguir subir até um ponto[...]	O recurso controle deslizante foi utilizado para que P2 pudesse interagir com o software através da variação da altura do prisma, possibilitando mobilidade para analisar o comportamento do sólido. 	Construção do sólido geométrico a partir da base quadrada
P2.5	[...] então, aqui, fica um pouco melhor pra gente ver assim ó. Eu tenho a diagonal que eu tinha feito desse lado aqui ó [indicando uma das diagonais da base], e aparece aqui ó, essas duas diagonais [mostrando os segmentos que unem os vértices da base]	Com a janela de visualização 3D e da possibilidade do “arrastar” do mouse, P2 rotaciona o sólido mostrando as diagonais da base. 	Move o objeto construído para ver as diagonais da base.
P2.6	Eu não sei explicar, mas eu posso fazer assim ó, um monte de ligaçãozinha do vértice [...]	Apesar de dizer não saber explicar como descobrir o número de vértices do prisma, P2 mostra as ligações que considera como sendo diagonal. Visualmente falando, P2 utiliza a ferramenta segmento de reta, de maneira tracejada, para demarcar essa diagonal. 	A partir da visualização faz um traçado pela ideia/definição de diagonal.

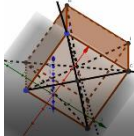
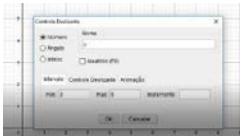
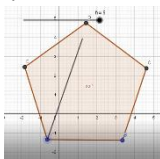
Quadro 4: Análise Ideográfica

(continuação)

Identificação	Fala do Sujeito	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
P2.7	[...] Então, esse vértice D aqui, deixa eu virar, ó, eu tenho um, uma diagonal partindo desse ponto aqui,	O movimento da figura permite identificar uma diagonal do prisma. 	Movimento da figura auxiliando na identificação de uma diagonal
P2.8	[...] mas se eu pegar esse ponto lá, se eu pegar esse ponto e tentar ligar aqui ó, eu não vou ter a diagonal do prisma, eu vou ter o do lado do prisma [...]	Com o mesmo vértice escolhido no passo anterior e com o uso de segmento de reta, P2 uniu o primeiro vértice com um vértice localizado no mesmo plano, mostrando assim que esse segmento, não caracterizou uma diagonal do prisma, mas sim a diagonal de uma das suas faces. 	P2.8
P2.9	[...] Então também vai ser um ponto, vai ser uma diagonal daqui do C até G, daí do E até o J, daí do A até o I, do I até o A [...]	Com a ferramenta reta, P2 forma algumas diagonais do prisma, ligando inicialmente os vértices C e G.  Com a mesma ferramenta, P2 mostrou as outras diagonais construídas e utilizou do recurso de movimentação do GeoGebra para visualizar de diferentes ângulos o que aconteceu com as diagonais. 	Movimentação da figura do prisma para identificar as demais diagonais

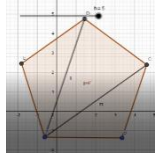
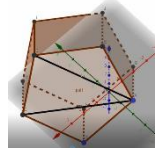
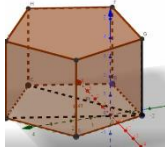
Quadro 5: Análise Ideográfica

(continuação)

Identificação	Fala do Sujeito	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
P2.10	[...] então ó, ..., aqui na minha base eu tenho 2, que é aquelas duas que descobri aqui e aqui eu vou ter um que parte daqui, um que parte de cada um dos vértices, que são quatro.	Nesse momento, P2 faz uma recapitulação sobre o que foi mostrado até esse ponto. Para se chegar a uma conclusão sobre o número de diagonais da base e do prisma ele utilizou do artifício de arrastar o objeto na janela de visualização 3D, onde apontou o número das diagonais.  Com o apoio da imagem, verificou-se que em um quadrilátero, tem-se 2 diagonais, enquanto no prisma 4 diagonais.	Visualização de outra perspectiva do objeto construído, auxiliando na relação entre o número de diagonais da polígono e do prisma
P2.11	[...] agora vou fazer assim, vou apagar esse, nossa apagou tudo. [Nesse momento P2 recriou o polígono da base, considerando controle deslizante para alterar a quantidade de lados]	Para generalizar a conclusão que foi chegada considerando uma base quadrilátera, foi feito um polígono onde um controle deslizante determina a quantidade de lados da base do prisma, pois assim a validade da propriedade geométrica pode ser estendida de um caso para os outros. 	Generalização a partir da visualização de um caso anterior (base quadrada) para uma base de polígono qualquer.
P2.12	[...] Vou ver quais são as diagonais que tenho aqui, então se eu pegar o ponto A, ele não pode ser diagonal de... com B e nem com o E, porque o B e o E, ele está, ele está muito perto, eles estão unidos nesse, nesse ponto.	Assim como no polígono do caso anterior, P2 fez uso da ferramenta segmento de reta para unir os vértices não consecutivos, retomando a definição de diagonal utilizada no polígono anterior. 	Construção da diagonal da base.

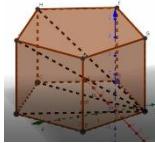
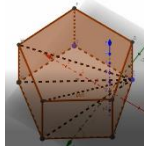
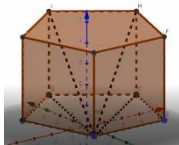
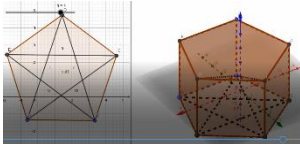
Quadro 6: Análise Ideográfica

(continuação)

Identificação	Fala do Sujeito	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
P2.13	[...] Então nesse caso aqui, quando eu tenho por exemplo cinco vértices, eu tenho duas diagonais, eu tenho até aquela formulinha que a diagonal é o, é n que multiplica n menos três [...]	P2 mostra que para um dos vértices do polígono de 5 lados temos 2 diagonais e, para determinar a quantidade de diagonais existentes nesse polígono P2 fez alusão a uma relação já existente, mesmo que descrita de maneira errada por P2. $d = \frac{n(n-3)}{2},$ onde d é o número de diagonais do polígono e n o número de lados. 	Recorre a fórmula para justificar quantas diagonais pode ter.
P2.14	[...] eu tenho aqui, na minha base que é, essa mesma figura que eu tenho aqui do lado ó, deixa eu virar, aqui ó, a mesma figura que eu tenho ali, então eu tenho a diagonal da base são duas [...]	Com a janela de visualização 3D o prisma de base pentagonal é projetado e, a partir da movimentação do cursor, o sólido é rotacionado e as diagonais inicialmente marcadas no polígono da base, são vistas no prisma. 	Movimentação do prisma para expor a compreensão sobre quais segmentos são diagonais.
P2.15	[...] então vou pegar o segmento pra ver a diagonal, então ó, do A eu não consigo até o G, porque aqui não forma uma diagonal, ele forma só, ele forma aqui assim, um ângulo de 90°, ele não é uma diagonal [...]	Com o apoio da ferramenta segmento de reta e do sólido projetado, P2 mostra que a aresta do prisma forma um ângulo reto com a base, estando em 2 planos compreendendo as faces laterais do prisma. 	Caracterização de diagonal do prisma.

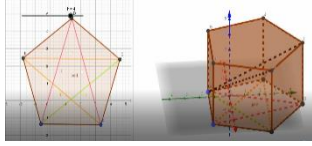
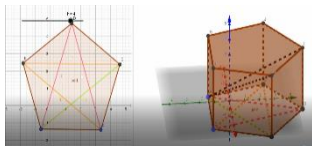
Quadro 7: Análise Ideográfica

(continuação)

Identificação	Fala do Sujeito	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
P2.16	[...] A diagonal, ele vai ser com o H, com o H que tá do outro lado e vou ter outra diagonal de A até esse ponto I [...]	Neste momento da demonstração, P2 utiliza o mesmo vértice escolhido para retratar as diagonais do polígono da base e verifica quantas diagonais do prisma partem dela. 	Visualização do objeto construído, auxiliando na contagem do número das diagonais.
P2.17	[...] da diagonal aqui ó, eu vou ter desses dois porque ele não vai fazer diagonal com, com esse daqui ó, porque ele tá no mesmo, no mesmo plano, então ele não é do prisma, ele é desse sólido, dessa figura do lado [...]	P2 discute o fato de que as diagonais que partem desse vértice são duas, desconsiderando as ligações entre os vértices pertencentes ao mesmo plano. 	Caracterização da diagonal do prisma.
P2.18	[...] e é a mesma com G e é a mesma coisa quando eu olho esse J. Ele tá no mesmo plano, então ele não tem a diagonal ali [...]	O sólido foi rotacionado para obter uma melhor visualização dos vértices que se encontram no mesmo plano, explicitando que não caracteriza diagonal do prisma. 	Justifica a posição das diagonais relativamente aos vértices.
P2.19	[...] só que por exemplo, aqui eu tenho essa quantidade de diagonais, de diagonal, supondo ele, esse A, só que eu tenho que considerar o B que também vai ter dois, o C, calma aí, do B tem dois que ele pega do E até B e do D até B. Do ponto C eu vou ter do C até o A, que eu já tinha, do C até o E que eu não tinha e do D, ele já tá partindo dois aqui ó.	Neste passo, P1 estendeu o que acontecia no vértice A, que foi utilizado anteriormente, para os demais vértices do polígono da base. 	Generalização partindo da análise de um dos vértices para os demais, relacionando-as.

Quadro 8: Análise Ideográfica

(conclusão)

Identificação	Fala do Sujeito	Asserção Articulada	Ideia Nuclear
P2.20	[...] eu vou ter pra cada vértice que tiver aqui ó, na minha base, eu vou ter duas diagonais subindo.	Para cada um dos vértices do polígono da base é possível descrever duas diagonais do prisma. Exemplificado através da movimentação do prisma, onde é comparado o polígono da base com o prisma. Para facilitar a visualização P2 alterou a cor das diagonais do polígono para que a análise ficasse mais simples devido a quantidade de diagonais que estava sendo mostrada em uma única construção. 	Relaciona as diagonais do prisma com os vértices da base.
P2.21	[...] Então, toda vez que eu tiver a diagonal da minha base, ele vai tá ligado com o do meu prisma. O do meu prisma sempre vai ser o... eu pego do ponto e tenho que ver quantas diagonais ele vai ligar e a mesma coisa na base, é assim que demonstra.	Nesse momento P2 procura concluir seu raciocínio através da visualização dos objetos concluídos em conjunto com suas deduções anteriores. 	Relaciona as diagonais do polígono da base com o prisma.

Fonte: Autoria própria (2018).

Para Machado (1994), a análise ideográfica “caracteriza-se pela busca da essência ou da estrutura do fenômeno”. Dessa forma, a análise ideográfica permite destacar os aspectos individuais, o que para cada professor faz sentido, como eles se colocam em atividade para solucionar um problema que lhe foi proposto. Essa busca da convergência de sentidos/significados é o que dá início a análise nomotética.

6.1.2 Análise nomotética

Para Machado (1994, p. 42), “o termo nomotético deriva-se de nomos, que significa uso de leis, portanto, normatividade ou generalidade, assumindo um caráter de princípio ou de lei”. A autora ressalta que em uma pesquisa qualitativa, a análise nomotética é a passagem do nível individual, para o nível geral. O nível geral é resultado das convergências e divergências dos discursos dos sujeitos observadas pelo olhar do pesquisador, que se deixa desvelar pelo fenômeno, à luz da sua interrogação.

A partir da análise nomotética é feita uma redução das unidades significativas obtidas na análise ideográfica onde se busca uma convergência dessas unidades. “A redução se realiza pela busca de proposições que expressem as convergências reveladas. Trata-se de um andar em torno das unidades significativas, focando-as a partir da pergunta diretriz” (SANTOS; VENTURIN, 2010, p. 7).

“A fim de desvelar o fenômeno focado, o investigador busca compreender as categorias que o constituem, articulando-a se expondo o fio que tece essa articulação, permitindo um salto de teorização diante do interrogado” (SANTOS; VENTURIN, 2010, p. 8).

Machado (1994, p. 42) diz que a análise nomotética é uma reflexão sobre a estrutura do fenômeno, ou seja, é a generalização que indica a perspectiva do fenômeno, o que responde a interrogação inicial, baseando-se não em conceitos pré-estabelecidos, mas em como o fenômeno é percebido.

O quadro 2 representa as convergências que foram sendo constituídas no movimento interpretativo, separadas em seis categorias abertas, ou seja, nos mostra como generalizações desse estudo seis perspectivas para o fenômeno estudado que foram identificadas por cores diferentes dentro da coluna 1 redução.

Quadro 9: Análise Nomotética – 1ª Redução

(continua)

Ideias nucleares	Identificação das falas	1ª redução
Visualização como justificativa da projeção da diagonal da base como diagonal do prisma.	P1.1	Visualização dos objetos construídos
A movimentação da figura para visualização da projeção das diagonais	P1.2	Movimentação dos objetos
Tentativa de visualização espacial	P1.3	Visualização dos objetos construídos

Quadro 10: Análise Nomotética – 1ª Redução

(continuação)

Ideias nucleares	Identificação das falas	1ª redução
Identifica na figura características da diagonal	P2.1	Visualização dos objetos construídos
Identifica na figura características da diagonal	P2.2	Visualização dos objetos construídos
A partir da definição de diagonal é feita a construção da diagonal da base	P2.3	Construção dos objetos envolvidos
Construção do sólido geométrico a partir da base quadrada	P2.4	Construção dos objetos envolvidos
Move o objeto construído para ver as diagonais da base.	P2.5	Movimentação dos objetos
A partir da visualização faz um traçado pela ideia/definição de diagonal.	P2.6	Visualização dos objetos construídos
Movimento da figura auxiliando na identificação de uma diagonal	P2.7	Movimentação dos objetos
Visualização da característica de coplanaridade da diagonal prisma.	P2.8	Visualização dos objetos construídos
Movimentação da figura do prisma para identificar as demais diagonais	P2.9	Movimentação dos objetos
Visualização de outra perspectiva do objeto construído, auxiliando na relação entre o número de diagonais da polígono e do prisma	P2.10	Visualização dos objetos construídos
Generalização a partir da visualização de um caso anterior para uma base de polígono qualquer.	P2.11	Generalização da figura construída
Construção da diagonal da base.	P2.12	Construção dos objetos envolvidos
Recorre a fórmula para justificar quantas diagonais pode ter.	P2.13	Relação entre figura e conhecimento anterior
Movimentação do prisma para expor a compreensão sobre quais segmentos são diagonais.	P2.14	Movimentação dos objetos
Caracterização da diagonal do prisma.	P2.15	Caracterização dos objetos construídos
Visualização do objeto construído, auxiliando na contagem do número das diagonais.	P2.16	Visualização dos objetos construídos

Quadro 11: Análise Nomotética – 1ª Redução

(conclusão)

Ideias nucleares	Identificação das falas	1ª redução
Caracterização da diagonal do prisma.	P2.17	Caracterização dos objetos construídos
Justifica a posição das diagonais relativamente aos vértices.	P2.18	Visualização dos objetos construídos
Generalização partindo da análise de um dos vértices para os demais, relacionando-as.	P2.19	Generalização da figura construída
Relaciona as diagonais do prisma com os vértices da base.	P2.20	Relação entre as figuras construídas
Relaciona as diagonais do polígono da base com o prisma.	P2.21	Relação entre as figuras construídas

Fonte: Autoria Própria (2018).

Após essa análise, as proposições ainda poderiam ser reduzidas para atingirmos uma maior compreensão dos aspectos que se mostraram na análise ideográfica. As categorias abertas determinam quais aspectos das estruturas individuais são capazes de manifestar uma verdade geral e elas responderão a nossa indagação.

Quadro 12: Análise Nomotética – 2ª Redução

Unidades de Significado	1ª Redução	2ª Redução
P1.1, P1.3, P2.1, P2.2, P2.6, P2.8, P2.10, P2.16, P2.18	Visualização de objetos construídos.	Visualização espacial
P1.2, P2.5, P2.7, P2.9, P2.14	Movimentação de objetos	Movimentação
P2.15, P2.17	Caracterização dos objetos construídos	Generalização
P2.3, P2.4, P2.12	Construção dos objetos envolvidos	
P2.11, P2.19	Generalização da figura construída	
P2.13, P2.20, P2.21	Relação entre as figuras construídas	

Fonte: Autoria Própria (2018).

Ao realizar a análise nomotética, as convergências são encaradas como alicerces do fenômeno em questão, isso se dá pelo fato das convergências determinarem os aspectos da

estrutura individual, as descrições de cada sujeito, capazes de manifestarem uma verdade geral, caracterizando a estrutura geral do fenômeno (MACHADO, 1994, p. 42).

O resultado final das análises nos leva as categorias abertas, que são encontradas a partir das convergências advindas dos pontos de vista do discurso dos sujeitos. Paulo, Amaral e Santiago (2010, p. 74) definem categoria aberta como “grandes regiões de generalidades que passam a ser interpretadas pelo pesquisador”, portanto as categorias abertas permitem que o pesquisador compreenda o fenômeno da maneira em que ele se mostra.

6.2 DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS

“Para que o fenômeno se mostre, não basta vive-lo, pois, na imersão, a amplitude de visão se restringe. A compreensão exige transcender esta perspectiva e espreitar as diferentes possibilidades através da visão e do sentir do outro” (MACHADO, 1994, p. 35).

No decorrer da atividade de dedução da demonstração proposta neste trabalho pudemos observar que os entes geométricos criados no GeoGebra pelos professores foram importantes no processo dedutivo. Durante os encontros, o sujeito P1 disse preferir fazer a demonstração de maneira manual, ou seja, utilizando somente papel e lápis, embora ele tenha experimentado usar o GeoGebra, explorando principalmente o recurso de movimentação para explicitar o que queria mostrar durante sua argumentação. Acredita-se que a não utilização ou o receio de seu uso por parte desse professor se dê devido à pouca familiaridade ou mesmo por resistência aos recursos tecnológicos, que apesar de estar se tornando algo cada vez mais próximo, ainda causa medo por parte de algumas pessoas.

As análises levaram a compreensão de que as figuras são um meio relevante na percepção durante o levantamento de hipóteses, conjecturas e também, na exploração de diversas situações. A utilização de construções dinâmicas permite rotacionar, alterar características, arrastar, entre outras coisas que dependendo da maneira como o professor se comporta perante a utilização, pode contribuir em deduções e/ou levantamento de hipóteses. A partir desses pontos, pode-se considerar que o uso de figuras no processo de demonstração geométrica é um fator importante e pode contribuir para a produção de conhecimento, auxiliando na indução de resultados a partir da manipulação dos objetos e das variações que essas construções permitem.

Durante algumas falas dos sujeitos, comparando com a demonstração formal, percebemos que eles não demonstraram a propriedade, mas conseguiram deduzir e generalizar alguns passos importantes do processo de demonstração da propriedade geométrica a partir

das construções dinâmicas. Ressaltamos que, embora os sujeitos participantes dos encontros não tenham conseguido demonstrar o proposto, as construções no GeoGebra conduziram os professores na articulação dos passos da construção da proposta. Esse fato é notado principalmente nas descrições do sujeito P2, que procurou construir suas falas em conjunto com os recursos tecnológicos ofertados pelo GeoGebra.

As categorias abertas ao final da análise foram: visualização espacial, movimentação e generalização.

6.2.1 Primeira categoria: visualização espacial

O termo visualização possui diferentes definições, mas, para esta pesquisa assumiremos a definição utilizada por Santos (2014, p. 6) que compreende visualização como “elemento estruturante na formação das imagens mentais para o desenvolvimento do pensamento visual”, ou seja, a visualização é o ato de formar imagens mentais para que o indivíduo seja capaz de desenvolver um raciocínio visual que permita a compreensão de algumas ideias. Para a autora, as dificuldades em questões matemáticas podem estar relacionadas com a inabilidade de percepção de conceitos abstratos com a visualização, esse fato é descrito pela autora quando ela diz que “uma relação entre esta dificuldade e a inabilidade em articular os conceitos abstratos com a visualização, que neste caso pode se dar pela intuição, imaginação e também pelas imagens mentais”.

Duval (2003 *apud* PALLES e SILVA, 2012, p. 6)²¹ argumenta que, enquanto a visão fornece um acesso direto ao objeto, a visualização mostra relações. Portanto, há uma diferenciação entre os termos e a visualização vai além do só olhar a imagem, ela busca a compreensão de relações. Como relações podemos considerar as propriedades imutáveis ou alguma relação numérica, como a demonstração da propriedade que os professores foram conduzidos a elaborar, que relacionou o número de diagonais da base com os diagonais do prisma.

Para Amado, Sanchez e Pinto (2015), as figuras em ambientes de geometria dinâmica, são capazes de promover conhecimento e, isso acontece, segundo os autores, na medida em que se utilizam conceitos geométricos durante as construções dinâmicas. Assim, a partir da manipulação e observação das construções, algumas propriedades são mantidas durante a

²¹ DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus, 2003 *apud* PALLES,

manipulação e, desta forma, é possível formular conjecturas e validar hipóteses através delas. Chamaremos de invariantes essas características que se mantém intactas, mesmo expostas a condições distintas de sua construção inicial (AMADO, SANCHEZ e PINTO, 2015, p. 645).

A visualização, no sentido adotado neste trabalho, busca dar forma a determinados conceitos, como quando observamos os invariantes geométricos ou quando tratamos dos postulados de Euclides, que podem ser desvelados pela visualização (SANTOS, 2014, p. 38). Do ponto de vista epistemológico, as imagens particulares serão úteis ao conhecimento matemático se elas possuírem “características de generalidade” como teriam os chamados exemplos genéricos.

A visualização, o uso de imagens pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem, desde que não substituam o pensamento abstrato. Ou seja, o uso ingênuo de imagens pode ocasionar distorções conceituais, substituindo o sentido abstrato por analogias que não condizem em sua totalidade (SANTOS, 2014, p. 40).

Como visão espacial tomamos por exemplificação o artifício da janela de visualização 3D e do arrastar. A construção de sólidos, polígonos ou alguns de seus elementos contribuem na argumentação e na exposição de ideias, pois permitem que o sujeito visualize o que está sendo argumentado, sendo de grande valia, pois algumas construções, principalmente as tridimensionais são abstratas quando estão só no campo das ideias ou projetadas no plano.

6.2.2 Segunda categoria: movimentação

Entendemos que “os ambientes de geometria dinâmica e, em particular, o Geogebra permitem o movimento das figuras e a conservação das suas propriedades, fazendo emergir conjecturas e sendo um estímulo para novas demonstrações” (SANTOS, 2014, p. 644). Assim, quando observamos as propriedades imutáveis, estamos visualizando os invariantes geométricos, ou seja, as propriedades que se conservam, como por exemplo os ângulos retos (sempre apresentando um ângulo de 90°). Segundo (LIMA, LINS e PEREIRA, 2018, p. 207), “essa função de arrastar as construções possibilita que os alunos tenham novas maneiras de raciocinar, operar e até mesmo de conceber a Geometria”, a essa condição dada aos alunos, estenderemos aos professores.

A movimentação de objetos através do arrastar possibilita uma gama de possibilidade de exploração, permitindo que o usuário possa testar hipóteses e descobrir novos fatos a partir de outros já declarados anteriormente. Ou seja, a movimentação na geometria dinâmica permite

uma compreensão acerca de hipóteses e teses, sendo de grande valia no ato de demonstrar alguma propriedade geométrica, por exemplo. Lima, Lins e Pereira (2018, p. 125) acrescenta que “esta compreensão é fundamental para a construção de uma demonstração e podem levar o aluno a construir o *fazer matemático*, isto é, os alunos poderão experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar”.

Assim, para Janzen (2011 *apud* LIMA, LINS e PEREIRA, 2018, p. 206)²², no GeoGebra “há múltiplas construções possíveis para um mesmo objeto geométrico e assim os alunos/ professores passam a compreender que a partir de certos fatos declarados (hipóteses) outros desses decorrem, os fatos estáveis implícitos (a tese do teorema), então passíveis de explicação”, sendo parte fundamental para a construção de uma demonstração.

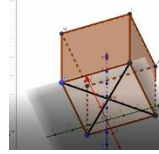
Durante as análises efetuadas neste estudo, podemos perceber algumas ações partindo do sujeito 2 (P2) onde o uso da movimentação e visualização foram largamente utilizados como recursos para compreender a demonstração da propriedade envolvendo o número de diagonais do prisma. O uso da movimentação teve como objetivo apontar elementos da construção, como os vértices do polígono que formam as diagonais, ou mesmo a partir da alteração das dimensões ou número de lados do polígono da base, através do uso de controles deslizantes. Entretanto, apesar do movimentar permitir investigar propriedades da figura, principalmente as que se conservam com o “arrastar”, os sujeitos desse estudo se limitaram a utilizar o “arrastar” para apontar elementos da construção e não para investigar as propriedades.

O artifício de arrastar um objeto colabora na dedução da propriedade porque o professor pode indicar ou manipular o objeto de diferentes perspectivas, dando autonomia para que se busque percepções de várias angulações.

Podemos destacar algumas falas de sujeitos da nossa pesquisa para exemplificar o recurso de visualização espacial e movimentação:

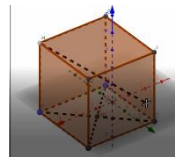
[...] então, aqui, fica um pouco melhor pra gente ver assim ó. Eu tenho a diagonal que eu tinha feito desse lado aqui ó [indicando uma das diagonais da base], e aparece aqui ó, essas duas diagonais [mostrando os segmentos que unem os vértices da base] (P2.5, dados da pesquisa)

²² JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de Geometria Dinâmica**. 194f. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011 *apud* LIMA, M. L. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo geogebra: incentivo à visualização de alunos do 2º ano do ensino médio. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 199-221, 2018.

Figura 4: Diagonais da base

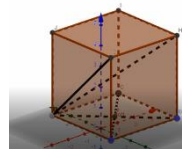
Fonte: P2.5, dados da pesquisa (2018).

Eu não sei explicar, mas eu posso fazer assim ó, um monte de ligaçãozinha do vértice.
(P2.6, dados da pesquisa)

Figura 5: Diagonais do prisma

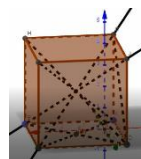
Fonte: P2.6, dados da pesquisa (2018).

[...] mas se eu pegar esse ponto lá, se eu pegar esse ponto e tentar ligar aqui ó, eu não vou ter a diagonal do prisma, eu vou ter o do lado do prisma [...] (P2.8, dados da pesquisa)

Figura 6: Diagonais da face do prisma

Fonte: P2.8, dados da pesquisa (2018).

[...] Então também vai ser um ponto, vai ser uma diagonal daqui do C até G, daí do E até o J, daí do A até o I, do I até o A [...] (P2.9, dados da pesquisa)

Figura 7: Construções das diagonais

Fonte: P2.9, dados da pesquisa (2018).

Nesse ponto da argumentação, o sujeito 2 utiliza dos efeitos visuais e movimentação

para mostrar que as diagonais que foram definidas na base do prisma, aparecem também na projeção 3D e que, de cada um dos vértices dessa base partem as diagonais do prisma (ligaçãoezinhas).

Com base na visualização e movimentação do sólido construído alguns conhecimentos prévios foram lembrados e conceitos como coplanaridade foram discutidos através das construções. A esses conhecimentos prévios, verificamos que foram essenciais para que a demonstração proposta caminhasse, sem eles dificilmente os sujeitos chegariam a uma conclusão acerca da relação entre diagonais da base e diagonais do prisma.

6.2.3 Terceira categoria: generalização

As generalizações são as operações que conduzem a universalização das ideias apresentadas para que o processo final, nesse caso, a demonstração seja alcançada. Segundo o dicionário Abbagnano, generalização significa:

GENERALIZAÇÃO (in. Generalization; fr. Généralisation; al. Verallgemeinerung; it. Generalizzazione). Operação de abstração que dá ensejo a um termo ou uma proposição geral. Algumas vezes também se dá o nome de G. à indução (v.) ou à construção de uma hipótese (v.) que com mais propriedade deveriam ser chamadas de operações de universalização. Fala-se de G. principalmente em matemática. (ABBAGNANO, 1998, p.487).

INDUÇÃO (gr. ἐρευνᾶν; lat. Inductio, in. Induction; fr. Induction; al. Induktion; it. Induzione). ‘A I. é o procedimento que leva do particular ao universal’: com esta definição de Aristóteles (Top., I, 12, 105 a 11) concordaram todos os filósofos. O próprio Aristóteles vê na I. um dos dois caminhos pelos quais conseguimos formar nossas crenças; a outra é a dedução (silogismo) (ABBAGNANO, 1998, p.568).

Segundo Zulatto (2002), fazer o levantamento de hipóteses, através de explorações e manipulação dos objetos, como o arrastar ou rotacionar, pode ser uma alternativa para o uso de softwares de Geometria Dinâmica, não mais enfatizando o convencimento, que é adquirido com o manuseio do software, e sim, instigar a explicação do porquê da veracidade de suas conjecturas (ZULATTO, 2002).

Gravina e Santarosa (1998 *apud* LIMA, LINS e PEREIRA, 2018, p. 208)²³ afirmam que “a aprendizagem matemática, em especial da Geometria, dependerá de ações que caracterize o fazer matemático, ou seja, os alunos poderão experimentar, interpretar, visualizar, induzir,

²³ GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: Anais do IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998 *apud* LIMA, M. L. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo geogebra: incentivo à visualização de alunos do 2º ano do ensino médio. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 199-221, 2018.

conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar”. Ao fazer uso de tecnologias digitais para ajudar no processo de demonstração poderá haver um encorajamento já que poderá apresentar facilidade nas construções, movimentação e visualização, tratando-se do GeoGebra.

Nesse sentido, Bennet (2004 *apud* LIMA, LINS e PEREIRA, 2018, p. 208)²⁴ afirma que:

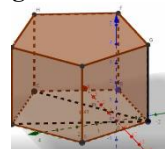
[...] o uso do GeoGebra poderá auxiliar no processo de transformação daquilo que é abstrato para o concreto (visível), uma vez que o ambiente de Geometria Dinâmica encorajará os alunos descobrirem novas representações, isto é, o aluno perceberá como um matemático, inicialmente, visualiza e analisa um determinado problema, fazendo conjecturas anterior a provar e demonstrar (BENNET, 2004 *apud* LIMA, LINS e PEREIRA, 2018, p. 208).

Nesse sentido, quando trabalhamos com provas e demonstrações matemáticas utilizando o GeoGebra, estas aparecem como alternativa de incentivo a conjecturar, argumentar e conduz ao raciocínio hipotético-dedutivo.

Alguns dos processos que contribuem para a generalização podem ser visualizados nos seguintes trechos extraídos da pesquisa:

[...] então vou pegar o segmento pra ver a diagonal, então ó, do A eu não consigo até o G, porque aqui não forma uma diagonal, ele forma só, ele forma aqui assim, um ângulo de 90° , ele não é uma diagonal [...] (P2.15, dados da pesquisa).

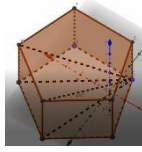
Figura 8: Arestas



Fonte: P2.15, dados da pesquisa (2018).

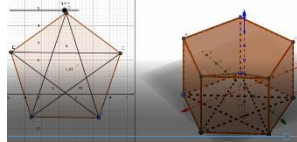
[...] da diagonal aqui ó, eu vou ter desses dois porque ele não vai fazer diagonal com, com esse daqui ó, porque ele tá no mesmo, no mesmo plano, então ele não é do prisma, ele é desse sólido, dessa figura do lado [...] (P2.17, dados da pesquisa)

²⁴ BENNETT, D. **Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad**. Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 2004 *apud* LIMA, M. L. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo geogebra: incentivo à visualização de alunos do 2º ano do ensino médio. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 199-221, 2018.

Figura 9: Prisma e seus elementos

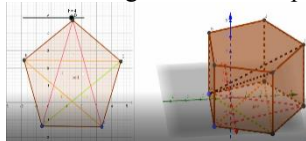
Fonte: P2.17, dados da pesquisa (2018).

[...] só que por exemplo, aqui eu tenho essa quantidade de diagonais, de diagonal, supondo ele, esse A, só que eu tenho que considerar o B que também vai ter dois, o C, calma aí, do B tem dois que ele pega do E até B e do D até B. Do ponto C eu vou ter do C até o A, que eu já tinha, do C até o E que eu não tinha e do D, ele já tá partindo dois aqui ó. (P2.19, dados da pesquisa)

Figura 10: Processo de generalização

Fonte: P2.19, dados da pesquisa (2018).

[...] Então, toda vez que eu tiver a diagonal da minha base, ele vai tá ligado com o do meu prisma. O do meu prisma sempre vai ser o... eu pego do ponto e tenho que ver quantas diagonais ele vai ligar e a mesma coisa na base, é assim que demonstra. (P2.21, dados da pesquisa)

Figura 11: Polígono da base x prisma

Fonte: P2.21, dados da pesquisa (2018).

Através de construções dinâmicas os professores podem chegar a resultados, desenvolver e elaborar novas demonstrações de acordo com sua percepção que, sem a utilização dessas construções, seriam de difícil compreensão e realização. Entretanto, se o professor não tiver claro os objetivos do que foi proposto e nem ter os conhecimentos prévios bem definidos, o software permitirá uma interação, um espaço para explorar as construções, conjecturas, porém não acarretará a dedução e demonstração devida, como foi o caso de P1, que mostrou algumas noções, mas não demonstrou a propriedade em questão.

Todavia, observamos que esses trabalhos no GeoGebra não são demonstrações, uma vez que demonstrações dependem do formalismo matemático, mas as tecnologias digitais contribuem para a argumentação e desenvolvimento do processo de demonstração.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As demonstrações matemáticas podem ser pensadas como formas de argumentação dentro de uma teoria formal (GARNICA, 2002). Entretanto, entendemos que ensinar matemática a partir de um ponto de vista formal, requer planejamento e dedicação, pois, para inserir as demonstrações matemáticas no contexto escolar, é preciso domínio dos procedimentos lógicos da linguagem matemática (símbolos, inferências lógicas e os métodos de demonstração). “A capacidade de compreender uma demonstração ou uma justificação teórica precisa de algum tempo, é certo, mas é algo que se pode desenvolver se houver intenção de o fazer e clareza e sensatez nos objetivos a atingir” (FREITAS, 2011, p.8).

Pensando na dificuldade em planejar atividades desse porte no ambiente escolar, procuramos através de um estudo de caso, investigar como os professores compreendem a demonstração da propriedade que diz respeito ao número de diagonais de um prisma a partir de um trabalho com tecnologia digital.

Ao propor essa pesquisa procuramos trabalhar o GeoGebra, devido a facilidade de instalação, ser gratuito e, principalmente pelas vantagens oferecidas devido ao seu caráter dinâmico. A partir do dinamismo e da movimentação do GeoGebra, as análises e construções são feitas de forma mais interativa e rápidas, proporcionando além dessa interatividade, um meio onde pode-se explorar e identificar propriedades importantes no processo de demonstração.

As construções a partir de régua e compasso são válidas e algumas vezes professores preferem fazer uso desse recurso, seja por falta de familiaridade com computadores, medo do novo ou receio por considerar que alguns problemas inibem o raciocínio lógico, o processo de pensar por si próprio. Todavia, construções a partir de régua e compasso levam mais tempo para serem realizados e, para cada análise diferente que se queira fazer, os traços teriam que ser feitos novamente, já com o uso do GeoGebra, um controle deslizante levaria a inúmeras possibilidades na mesma construção. Outra coisa possível com o software é o recurso de apagar os passos errados com facilidade e testar outras hipóteses.

Ressaltamos nessa pesquisa que o GeoGebra contribuiu para que os professores envolvidos pudessem evidenciar os passos considerados relevantes para deduzirem a propriedade.

O computador pode servir ao matemático na verificação de passagens em demonstrações matemáticas. Ele é capaz de oferecer ferramentas de cálculos, resoluções, simulações, explorações e esboços, por exemplo. Ele, o computador, é

importante para o trabalho do matemático se tomado como ferramenta que pode ser utilizada nesse processo de demonstração, no entanto, para ser utilizado precisa ser programado pelo próprio homem para fazer operações localizadas nas partes da argumentação da demonstração (BATISTELA, BARBARIZ e LAZARI, 2016, p. 207).

Consequentemente, as tecnologias informáticas são compreendidas como sendo coautoras na produção de conhecimento e nos permitem entender o papel da tecnologia na escola como sendo um personagem potenciador e reorganizador em vez de inibidor da lógica, porém depende muito da maneira como seu uso é realizado pelo professor.

Os resultados das transcrições conduziram a três categorias abertas, que foram: visão espacial, movimentação e generalização. Essas categorias levaram ao entendimento da pergunta norteadora deste trabalho, mostrando-nos como os professores compreendem a demonstração de uma propriedade geométrica a partir de um trabalho com tecnologia.

Os softwares de geometria dinâmica, em particular, o GeoGebra, utilizado nesta pesquisa, nos proporcionam uma visão mais abrangente do objeto em estudo. Toda vez que trabalhamos com uma demonstração em relação a um objeto matemático estamos tentando comprovar uma propriedade que se mantém no objeto, dessa forma, o GeoGebra permite aos professores levantar hipóteses e pensar sobre uma propriedade geométrica procurando alternativas para confirmar sua validade. Ou seja, através do GeoGebra os professores fazem um ensaio intuitivo, baseado na experimentação (movimentação, traçado, visualização) que vão tornando claro para eles que essa propriedade pode ser válida, podendo chegar a tese da demonstração.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C.A.A.P. A contribuição da geometria dinâmica na resolução de problemas. In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, 2, 2011, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: UNESP, 2011.
- ABAR, C.A.A.P.; ALMEIDA, M. V. Geogebra como organizador de recursos tecnológicos para o ensino e aprendizagem da matemática em uma formação de professores. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 136-144, 2017.
- ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 1026 p.
- ALMEIDA, M. E. **Informática e formação de professores**. Brasília: Ministério da Educação - Secretaria de Educação à Distância, 2000. v.1 - 2.
- AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A Utilização do geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 637-657, 2015.
- BATISTELA, R. F.; BARBARIZ, T. A. M.; LAZARI, H. Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador. **Revemat**, Florianópolis, v.11, p. 204-215, 2016.
- BICUDO, I. Demonstração em matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 15, n. 18, set. 2002. p. 79-90, 2002.
- BICUDO, M.A.V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **RBECT**, Ponta Grossa, v.15, n.2, mai/ago. 2012.
- BICUDO, M.A.V. Ensino de matemática e educação matemática: algumas considerações sobre seus significados. **Bolema**, Rio Claro, v.12, n.13, 1999.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M.G. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
- BORBA, Marcelo C. Educação matemática a distância online: balanço e perspectivas. In: Conferência interamericana de Educação Matemática, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011. p. 1-10.
- BRASIL. **Base nacional comum curricular (BNCC): educação é a base**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.
- CHIZZOTTI, A. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. **Revista Portuguesa de Educação**, Minho, v.16, n.2, p.221-236, 2003.
- D'AMBRÓSIO, U. et. al. A educação matemática focalizando questões sociais maiores. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 99-124, 2011.
- D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 16. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 7 ed. São Paulo: Atual, 1997.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1997.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **Bolema**, Rio Claro, v. 15, n.18, p. 55-67, 2002.

FERREIRA, E. B.; SOARES, A. B.; LIMA, J. C. As Demonstrações no ensino da geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias. **Bolema**, Rio Claro, v. 22, n. 34, p. 185-207, 2009.

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 150 p.

GERHARDT, T.E.; SILVEIRA, D.T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. 11. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Pós-Graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996, Local. **Anais...** Belo Horizonte, 1996. p. 1-13. v. 1.

LIMA, M. L. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo geogebra: incentivo à visualização de alunos do 2º ano do ensino médio. **VIDYA**, Santa Maria, v. 38, n. 1, p. 199-221, 2018.

LOUREIRO, C.; BASTOS, R. Demonstração: uma questão polemica. **Ensino e aprendizagem da geometria**, Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE), p. 105-128, 2002.

LOURENÇO, M. L. A demonstração com informática aplicada à educação. **Bolema**. Rio Claro, v. 15, n.18, p. 100-111, 2002.

MACHADO, O. V. M. Pesquisa qualitativa: modalidade fenômeno situado. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Org.) **A pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Editora Unimep, 1994. p. 35-46.

MIGUEL, A. A constituição do paradigma do formalismo pedagógico clássico em educação matemática. **Revista Zetetiké**, Campinas, SP, ano 3, v. 3, p. 7-39, 1995.

MOCROSKY, L. F.; BAUMANN, A. P. P.; MONDINI, F. Um ensaio sobre demonstrações geométricas na Educação Básica. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Ponta Grossa: PR. **Anais...** Ponta Grossa, 2009. p. 1177-1193.

MOD, L.F.A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de regionantanus**: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra. 2016. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

MORAIS FILHO, D.C. **Um convite à matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 455 p.

NAGAFUCHI, T.; BATISTA, I. de L. O que é demonstração? aspectos filosóficos. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: UNESP, 2008.

PALLES, C.; SILVA, M. J. F. Visualização em geometria dinâmica. In: ENCONTRO DE PRODUÇÃO DISCENTE PUCSP/CRUZEIRO DO SUL, 2012, São Paulo. **Anais...** São Paulo, v. 1, n. 1, 2012.

PAULO, R. M.; AMARAL, C. L. C.; SANTIAGO, R. A. A pesquisa na perspectiva fenomenológica: explicitando uma possibilidade de compreensão do ser-professor de matemática. **RBPEC**, Belo Horizonte, v.10, n. 3, p. 71-86, 2010.

PAULO, R. M. **O Significado epistemológico dos diagramas na construção do conhecimento matemático e no ensino de matemática**. 2006. 192 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SANTOS, A. H. dos. **Um Estudo epistemológico da visualização matemática**: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

SANTOS, M.C. **Investigando provas e demonstrações matemáticas por alunos do ensino médio**: realidades e necessidades. 2015. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

SANTOS, M. R.; VENTURIN, J.A. Pesquisa fenomenologica e educacao matemática: apresentação de procedimentos e discussão de alguns aspectos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, 4., 2010, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: UNESP, 2010.

SOUZA, J.S. **A abdução em Peirce**: um estudo hermenêutico. 2014. 93 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

VILLARREAL, M. E. Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. **Virtualidad, Educación y Ciencia**, Córdoba, v. 3, n. 5, p. 73-94, 2012.

YIN, R.K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica:** suas características e perspectivas. 2002. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

APÊNDICE A – Transcrições

P1

Para mostrar essa propriedade da diagonal, podemos pensar que uma reta no plano é uma projeção de uma reta no espaço... por exemplo, se observar de um helicóptero um trecho retilíneo de uma rodovia, não temos informação nenhuma a respeito de sua inclinação... Ou seja, não saberemos se um carro tá subindo ou se tá descendo. Da mesma forma podemos pensar que um quadrado é na verdade a projeção de um cubo e, quando observamos a diagonal deste quadrado existe a possibilidade de estarmos observando a projeção da diagonal do cubo. Contudo, não temos informação se essa reta do espaço está subindo ou descendo.

Na verdade as duas soluções são possíveis, então podemos pensar que qualquer reta no plano pode ser pensada como uma superposição de duas retas, uma que sobe, outra que desce.

Então uma reta no plano é uma superposição da projeção de duas retas no espaço.

P2

Bom... para mostrar, primeiro vamos fazer um polígono, unindo dois pontos e vamos colocar um x , que é o número do vértice (pausa) e pôr o primeiro controle deslizante. Controle deslizante x , colocar de 3 a 5 (pausa) $x...$ é, ixi, apaga, criar de novo, controle deslizante, agora vai ser v , letra v de vértice e vai de 3 a 5, incremento de quanto ele vai pular né? Um.

E agora tem que mostrar, vou fazer um polígono a partir desses 2 pontos e a quantidade de vértices vai variar conforme aquele controle deslizante que é o v .

Então... por aqui... eu acho que dá pra gente tentar ver a diagonal da base, porque se é um prisma qualquer. Então vamos por aqui, que tenha... 4, 4 vértices, então a diagonal, ele não pode ser esse lado e nem esse lado aqui ó. Do ponto A que nem até o B e nem até o ponto D , porque pra ele ser diagonal, o ponto ele tem que tá do outro lado, é... deixa eu ver, ele vai ter que ser, vai ter que tá oposto, não adjacente, ele não vai ser adjacente com nenhuma dessas retas, então por exemplo, eu teria (pausa), um segmento, uma diagonal aqui e uma outra diagonal aqui... Só que eu conto ela uma vez e essa aqui uma vez, porque tanto faz se eu vou, se eu tô subindo ou se eu tô descendo, aqui também, eu posso tá subindo ou posso tá descendo, então tá bom. A base aqui, ele tem 2, tem 2 aqui... Então agora tentar fazer no prisma.

Então no prisma eu vou precisar de uma altura pra... pra ele. Então eu vou colocar uma altura também. Vou colocar uma altura, mas essa altura, ela pode, é o que vai tá formando o meu prisma, porque ele tá aqui em baixo, no plano, daí ele vai conseguir subir até um ponto.

Vamos colocar esse ponto uma altura, por exemplo aqui ó, daqui pra cima. Então vamos colocar um segmento, segmento não, um ponto de interseção, por exemplo, onde eles vão cruzar, essa com essa, é um ponto aqui. E agora, tem que fazer o, o 3D lá né?

Agora que complica, agora eu não sei, eu vou ter que ter um ponto que... pra ele variar aqui, pra eu formar meu polígono, por exemplo, eu tenho um ponto $x(a)$, $y(a)$ que é um x e y , porque

Ele vai ter que tá igual o negócio da base e num... numa mesma altura, então aqui, quando eu variar aqui ó, eu tenho esse ponto aqui ó. Então, vou fazer o prisma, que eu pego um ponto aqui embaixo e esse ponto da altura, não deu... eu viajei. Eu pego a minha base e levo nessa altura, é isso.

Então (pausa), aqui (pausa), fica um pouco melhor pra gente ver assim ó. Eu tenho, a diagonal que eu tinha feito desse lado aqui ó, e aparece aqui ó, essas 2 diagonais. Essa aqui é minha diagonal da base, agora, vamos ver quantas diagonais tem no... tem no prisma. Eu não sei explicar, mas eu posso fazer assim ó, um monte de ligaçãozinha do vértice ó. Então esse vértice D aqui ó, deixa eu virar, ó, eu tenho um, uma diagonal partindo desse ponto aqui ó, mas se eu pegar esse ponto lá, se eu pegar esse ponto e tentar ligar aqui ó, eu não vou ter a diagonal do prisma, eu vou ter o do lado do prisma, então ó, desse ponto aqui ó eu vou ter uma diagonal. Só que esse outro ponto que também tá aqui embaixo, eu também tenho que fazer aqui em cima. Então também vai ser um ponto, vai ser uma diagonal daqui do C até G , daí do E até o J , daí do A até o I , do I até o A aqui ó, então ó... aqui na minha base eu tenho 2, que é aquelas 2 que eu descobri aqui. E aqui eu vou ter um que parte daqui, um que parte de cada um dos vértices que são 4.

Então eu mostrei, que o número de diagonais daqui, quer dizer, o número de diagonais do meu, do meu prisma, ele vai ser, é, o dobro daqui, porque se aqui eu tenho 2, aqui eu vou ter 4. Agora, e agora complicou (pausa) ó, agora vou fazer assim, vou apagar esse, nossa, apagou tudo, tá, vou fazer de novo. Polígono, vamos lá, daqui até aqui, 2 pontos e vamos colocar aquele v , igual da outra vez, tá (pausa). Vou ver quais são as diagonais que tenho aqui, então se eu pegar o ponto A , ele não pode ser diagonal de... com B e nem com o E , porque o B e o E , porque o B e o E , ele está, ele está muito perto, eles estão unidos nesse, nesse ponto. Então ele só pode ir lá para o outro lado, com o D ou então com o C . Então nesse caso aqui, quando eu tenho por exemplo 5 vértices, eu tenho 2 diagonais, eu tenho até aquela formulinha que a diagonal é o, é n que multiplica $n-3$, ah, eu não lembro. Ah... eu sei que, eu sei que tenho que fazer isso, pra gente ver aqui, de um ponto até o outro, mas ele não pode, não pode ser

coladinho, então pra gente fazer aqui um, fazer aqui um prisma, vou continuar com aquele pontinho que eu tinha.

Então é, aqui, pego da base até essa altura. Então ó, a gente pode pôr a altura dele aqui, tá, vamos mexer nele então. Ó, eu tenho aqui, na minha base que é, essa mesma figura que eu tenho aqui do lado ó, deixa eu virar, aqui ó, a mesma figura que eu tenho ali, então eu tenho a diagonal da base são 2, agora pra eu saber quantas que tem aqui no prisma, vamos considerar esse ponto que eu usei pra fazer a, ah, pra encontrar as 2 diagonais de lá. Vamos ver quantos, quantas diagonais eu consigo daqui até o até esse outro essa outra figura que tá paralela. Então vou pegar o segmento pra ver a diagonal, então ó, do A eu não consigo até o G , porque aqui não formou uma diagonal, ele formou só, ele forma aqui assim, um ângulo de 90° , ele não é uma diagonal. A diagonal ele vai ser com o H , com o H que tá do outro lado e vou ter outra diagonal de A até esse ponto I , deixa e ver se tem mais alguma.

Então ó, (pausa), da diagonal aqui ó, eu vou ter desses 2 porque ele não vai fazer diagonal, ele não vai fazer diagonal com, com esse aqui ó, porque ele tá no mesmo, no mesmo plano, então ele não é do prisma, ele é desse sólido, dessa figura do lado e é a mesma coisa com o G e é a mesma coisa quando eu olho esse J . Ele tá no mesmo plano, então ele não tem a diagonal ali. Só que por exemplo, aqui eu tenho essa quantidade de diagonais, de diagonal, supondo ele, esse A , só que eu tenho que considerar o B que também vai ter 2, o C , calma aí, o B tem 2 que ele pega do E até B e do D até B . Do ponto C eu vou ter do C até o A , que eu já tinha, do C até o E que eu não tinha e do D , ele já tá partindo 2 aqui ó. Então aqui eu vou ter 1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, identificar aqui com outra cor, ó (pausa). Tenho 1, opa, ó, 1, 2, 3, 4, e 5 e aqui ó, no outro prisma, eu vou ter 2 diagonais subindo.

Então se eu tenho 5 vértices e cada um vai subir 2, então vai ficar 2×5 , que é 10. E aqui ó, a diagonal também é. Então toda vez que eu tiver a diagonal da minha base, ele vai tá ligado com o do meu prisma. O do meu prisma sempre vai ser o... eu pego do ponto e tenho que ver quantas diagonais ele vai ligar e a mesma coisa na base, é assim que demonstra.