

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

**LYARA CAROLINY DE CASTRO MENEZES**

**PROJETO DE REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA PARA  
SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM RESTRIÇÕES NA TAXA DE  
DECAIMENTO**

Ilha Solteira  
2025

**LYARA CAROLINY DE CASTRO MENEZES**

**PROJETO DE REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA PARA  
SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM RESTRIÇÕES NA TAXA DE  
DECAIMENTO**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do diploma no curso de Graduação em Engenharia Elétrica.

Nome do orientador

**Prof. Dr. Flávio Andrade Faria**

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

M543p Menezes, Lyara Caroliny de Castro.  
Projeto de realimentação estática da saída para sistemas lineares incertos com restrições na taxa de decaimento / Lyara Caroliny de Castro Menezes. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2025  
27 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, 2025


Orientador: Flávio Andrade Faria

Inclui bibliografia

1. Realimentação estática da saída. 2. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). 3. Controle robusto. 4. Sistemas lineares incertos.


## ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos cinco dias do mês de novembro do ano de dois mil e vinte e cinco, a discente **Lyara Caroliny de Castro Menezes**, matriculada sob o nº 201050455, tendo como banca examinadora o seu orientador, o *Prof. Dr. Flávio Andrade Faria*, o *Prof. Dr. Leandro José Elias* e o *Doutorando Hugo Fernando Yamanaka*, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "**PROJETO DE REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM RESTRIÇÕES NA TAXA DE DECAIMENTO**", obtendo a nota 9,5 ( nove e meio ) e conceito Aprovado.

Documento assinado digitalmente  
 **FLAVIO ANDRADE FARIA**  
Data: 05/11/2025 11:34:48-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Flávio Andrade Faria  
- Orientador-

Documento assinado digitalmente  
 **LYARA CAROLINY DE CASTRO MENEZES**  
Data: 05/11/2025 11:42:19-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Lyara Caroliny de Castro Menezes  
- Discente -

Documento assinado digitalmente  
 **LEANDRO JOSE ELIAS**  
Data: 05/11/2025 12:02:13-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Leandro José Elias  
- Membro da Banca -

Documento assinado digitalmente  
 **HUGO FERNANDO YAMANAKA**  
Data: 05/11/2025 12:52:49-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Doutorando Hugo Fernando Yamanaka  
- Membro da Banca -

## RESUMO

Sistemas lineares sujeitos a incertezas politópicas representam um desafio recorrente na área de controle. Em situações práticas, a impossibilidade de medir todos os estados do sistema limita a utilização da realimentação de estados e torna necessária a adoção de estratégias alternativas. Nesse contexto, a realimentação estática da saída (do inglês, *Static Output Feedback* – SOF) surge como uma solução viável, por depender apenas das variáveis de saída disponíveis e medidas. No entanto, SOF envolve desafios teóricos e computacionais. As condições obtidas pela sua formulação direta resultam em desigualdades matriciais bilineares (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities* – BMIs), que são de alta complexidade para resolução. Para contornar essa questão, diversos estudos têm proposto relaxações capazes de reescrever o problema em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs). Por se tratar de problemas convexos, as LMIs podem ser resolvidas de forma eficiente, favorecendo a viabilidade de sua aplicação. O uso de ferramentas computacionais como MATLAB, e os pacotes YALMIP e SeDuMi nesse estudo permitiram a avaliação de soluções e o estudo do conservadorismo associado a cada método abordado. Assim, a utilização da SOF associada a técnicas baseadas em LMIs se apresentam como um caminho promissor para o desenvolvimento de controladores robustos, permitindo resultados consistentes em relação a incertezas presentes nos sistemas.

**Palavras-chave:** Realimentação estática da saída. LMIs. Controle robusto. Sistemas lineares incertos.

## ABSTRACT

Linear systems subject to polytopic uncertainties represent a recurrent challenge in the field of control. In practical situations, the impossibility of measuring all system states limits the application of state feedback and makes it necessary to adopt alternative strategies. In this context, Static Output Feedback (SOF) emerges as a viable solution, as it relies solely on the available and measurable output variables. However, SOF involves theoretical and computational challenges. In general, the conditions obtained through direct formulation result in Bilinear Matrix Inequalities (BMIs), which are highly complex to solve. To overcome this issue, several studies have proposed relaxations capable of reformulating the problem in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs). Since LMIs are convex problems, they can be solved efficiently, favoring the practical feasibility of the method. In this scenario, computational tools such as MATLAB, along with packages like YALMIP and SeDuMi, play a fundamental role by enabling the evaluation of results and the analysis of the conservatism associated with each approach. Thus, the use of SOF combined with LMI-based techniques stands out as a promising path for the development of robust controllers, ensuring consistent results in the presence of system uncertainties.

**Keywords:** Static Output Feedback. LMIs. Robust Control. Uncertain Linear Systems.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b>	- Região de factibilidade do Lema 1 (●) e Lema 2 (●, □) .....	21
<b>Figura 2</b>	- Saídas do sistema incerto (12) .....	22
<b>Figura 3</b>	- Sistema de suspensão ativa .....	23
<b>Figura 4</b>	- Comportamento da saída do sistema (13) .....	25
<b>Figura 5</b>	- Comportamento dinâmico de $u(t)$ .....	25
<b>Figura 6</b>	- Código referente à simulação da Figura 2 .....	30
<b>Figura 7</b>	- Código referente à construção do Lema 1 .....	31
<b>Figura 8</b>	- Código referente à construção do Lema 2 .....	32

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	14
1.1. REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA .....	15
1.2. CONTROLE ROBUSTO .....	15
1.3. LIMITE DE TAXA DE DECAIMENTO .....	16
<b>2. PROBLEMATIZAÇÃO</b> .....	17
<b>3. RESULTADOS E EXEMPLOS</b> .....	20
3.1. REGIÃO DE FACTIBILIDADE .....	20
3.2. APLICAÇÃO SUSPENSÃO ATIVA .....	22
<b>4. CONCLUSÃO</b> .....	27
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	28
<b>APÊNDICE</b> .....	30

## 1. INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações práticas, não é possível medir todos os estados de um sistema devido a restrições de sensores ou custos, o que inviabiliza a utilização da realimentação de estados no projeto de controle. Para lidar com essa limitação, uma alternativa eficiente é a realimentação estática da saída.

A SOF utiliza apenas os sinais disponíveis na saída do sistema para controlar sua dinâmica. Essa característica torna a técnica mais simples e econômica, sendo atrativa para aplicações práticas. No entanto, seu projeto apresenta desafios significativos, como discutido em estudos recentes sobre sistemas incertos e robustez (Dong; Yang, 2007; Dong; Yang, 2013; Jeung; Lee, 2014; Sadabadi; Chang; Park; Zhou, 2015; Peaucelle, 2016; Carniato Et Al., 2020; Elias Et Al., 2022). Em geral, as condições de estabilidade obtidas pelo método direto de Lyapunov resultam em desigualdades matriciais bilineares (BMIs), cuja resolução é classificada como um problema *np-hard*, ou seja, de elevada complexidade computacional (Crusius; Trofino, 1999), dificultando a implementação direta em microcomputadores.

Nesse cenário, diferentes metodologias têm sido propostas para reformular o problema em termos das LMIs, que são convexas e, portanto, resolvidas de forma mais eficiente por algoritmos numéricos. No ambiente MATLAB, pacotes como o YALMIP (Löfberg, 2004), o LMI Control Toolbox (Gahinet et al., 1994) e o SeDuMi (Sturm, 1999) permitem a implementação prática dessas condições, uma vez que operam com algoritmos de tempo de execução polinomial.

Além disso, o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (do inglês, *Parameter-Dependent Lyapunov Function* – PDLF) tem se mostrado promissor para reduzir conservadorismo em problemas da SOF. Pesquisas recentes, como a apresentada em Faria et al., (2023), demonstram o avanço da área na busca por condições menos restritivas e mais aplicáveis ao projeto de controladores robustos.

Ao longo do texto o símbolo  $\mathbb{K}_s$  é usado para descrever o conjunto de números naturais  $\mathbb{K}_s = \{1, 2, \dots, s\}$ . O símbolo  $*$ , que denota o elemento transposto em uma matriz simétrica. A transposta de uma matriz é denotada por  $A'$  e  $He(A) = A + A'$ . A desigualdade matricial  $A < 0$  ( $A > 0$ ) significa que  $A$  é simétrica definida negativa (positiva). O símbolo  $I_s$  representa uma matriz identidade de dimensão  $s$ . Em matrizes simétricas  $\lambda_{min}(A)$  e  $\lambda_{max}(A)$  descrevem o menor e o maior autovalor da matriz respectivamente.

## 1.1 REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA

A realimentação estática da saída é uma técnica de controle que utiliza apenas as variáveis de saída medidas do sistema para a síntese de um controlador fixo ao longo do tempo. Diferente da realimentação de estados, na qual todo o vetor de estados é utilizado no cálculo da lei de controle (Ogata, 2010), na realimentação da saída apenas um subconjunto das variáveis do sistema, ou seja, as saídas efetivamente medidas, é utilizado. Isso torna a técnica mais realista em situações práticas, em que nem todos os estados estão disponíveis para medição ou estimação.

No entanto, o problema do projeto da SOF apresenta maiores desafios teóricos e computacionais. A síntese da SOF leva às BMIs, que não são convexas e, portanto, muito mais difíceis de resolver diretamente (Geromel; Colaneri, 2006). Do ponto de vista da complexidade computacional, esse problema é classificado como *np-hard*, ou seja, não existe atualmente um método conhecido que consiga sempre resolvê-lo em tempo polinomial, o que explica a dificuldade em tratá-lo de maneira geral.

Para contornar essas dificuldades, a literatura tem explorado diferentes relaxações e reformulações do problema, buscando condições mais acessíveis baseadas em LMIs que garantam estabilidade e desempenho robusto (Dong; Yang, 2013). Estratégias como a introdução de variáveis auxiliares, o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e métodos iterativos vêm sendo propostas para lidar com a natureza não convexa do problema.

O interesse pela SOF se dá tanto do ponto de vista prático quanto teórico. Na prática, é desejável utilizar um controlador simples, fixo e que dependa apenas de sinais medidos, o que facilita sua aplicação. Por outro lado, o desenvolvimento de condições menos conservadoras para a síntese da SOF continua sendo um desafio aberto e ativo na área de controle robusto, com pesquisas em andamento para superar a barreira da não convexidade e da dificuldade computacional.

## 1.2 CONTROLE ROBUSTO

O controle robusto tem como objetivo garantir que um sistema permaneça estável e com um bom desempenho mesmo quando existem incertezas no modelo. Na prática, nenhum sistema físico é representado de forma exata por equações matemáticas, devido a variações de parâmetros, simplificações na modelagem e perturbações externas (Ogata, 2010). Quando

apenas um modelo nominal no projeto é utilizado, pequenas diferenças podem comprometer a estabilidade ou reduzir significativamente a qualidade da resposta.

No caso da realimentação estática da saída, essa necessidade se torna ainda mais notável. Como a técnica utiliza apenas um subconjunto das variáveis disponíveis, o problema de síntese já é naturalmente mais restritivo e sensível a incertezas. Sem considerar a robustez, um controlador estático estabilizaria o modelo nominal, mas poderia apresentar desempenho insatisfatório frente a pequenas variações, comprometendo sua confiabilidade em aplicações reais.

### 1.3 LIMITE DE TAXA DE DECAIMENTO

Em sistemas lineares contínuos, a condição de estabilidade exige apenas que todos os polos em malha fechada estejam localizados no semiplano esquerdo do plano complexo, ou seja, que possuam parte real negativa (Ogata, 2010). Contudo, como observado na análise de resposta transitória, essa condição não garante necessariamente um bom desempenho, pois sistemas estáveis podem apresentar respostas lentas ou oscilatórias.

Para lidar com essa limitação, utiliza-se o conceito de taxa mínima de decaimento. Essa restrição define que os polos do sistema não apenas estejam no semiplano esquerdo, mas suficientemente afastados do eixo imaginário, garantindo assim uma velocidade mínima de convergência da resposta. De forma prática, essa ideia define um limite mínimo para a dinâmica do sistema, garantindo estabilidade e desempenho transitório satisfatório.

Esse conceito foi formalizado em abordagens baseadas em desigualdades matriciais lineares, nas quais a região de estabilidade é deslocada por um parâmetro que representa a taxa de decaimento (Boyd et al., 1994). Assim, a estabilidade inclui também um requisito explícito de desempenho dinâmico.

## 2. PROBLEMATIZAÇÃO

Considere a família de sistemas lineares incertos descrita por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (1)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  vetor de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  a saída do sistema,  $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$  matrizes constantes conhecidas,  $r$  o número de vértices matriciais e  $\alpha_i$  constantes desconhecidas satisfazendo

$$\forall i \in \mathbb{K}_r, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \quad (2)$$

O projeto consiste em estudar condições para a estabilização do sistema (1) usando entradas de controle baseadas na realimentação estática da saída. Durante o projeto serão estudadas condições baseadas na lei de controle:

$$u(t) = Ky(t) \quad (3)$$

sendo  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  o ganho estabilizante do controlador.

Aplicando a entrada de controle (3) em (1) obtém-se o seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i + B_i KC)x(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (4)$$

Sendo o objetivo de controle encontrar uma matriz constante  $K$  que garante a estabilidade assintótica do sistema (4).

O desenvolvimento do trabalho utilizará o sistema (4) como referência. Todos os resultados a serem estudados são baseados no critério de estabilidade de Lyapunov, isto é, sendo  $\beta > 0$ , na existência de uma função  $V(x(t)) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as propriedades

$$V(0) = 0, V(x(t)) > 0 \text{ e } \dot{V}(x(t)) < -\beta V(x(t)), \forall x(t) \neq 0. \quad (5)$$

O parâmetro  $\beta$ , além de garantir que a função de Lyapunov decresça ao longo das

trajetórias do sistema, possibilita que esse decaimento ocorra a uma taxa mínima especificada por  $\beta$ . Assim, quanto maior o valor de  $\beta$ , mais rápida é a convergência da trajetória em direção à origem, implicando maior velocidade de estabilização do sistema. No entanto, valores muito elevados de  $\beta$  podem restringir a região de factibilidade das LMIs, tornando a síntese do controlador mais conservadora ou até inviável.

A função  $V(x(t))$  permite estudar o comportamento dinâmico do sistema (1) sem conhecer a expressão analítica da solução. Por outro lado, não existe um método analítico para encontrar uma função satisfazendo as condições (5). O que se faz, em geral, é verificar se uma determinada função candidata satisfaz as condições de estabilidade. A fim de ilustrar a dificuldade existente no projeto da realimentação da saída, considere uma função de Lyapunov quadrática  $V(x(t)) = x(t)'Px(t)$ . Essa é a candidata mais simples relatada na literatura. Substituindo a função quadrática em (5) e considerando o sistema (4) conclui-se que as condições de estabilidade são equivalentes a resolver as desigualdades matriciais

$$P > 0 \quad (6)$$

$$(A_i + B_iKC)'P + P(A_i + B_iKC) + 2\beta P < 0 \quad (7)$$

Na desigualdade (7), como as matrizes  $P$  e  $K$  são variáveis a serem encontradas, então os termos  $PB_iKC$  e  $C'K'B_i'P$  são não lineares, produzindo uma BMI. Esse tipo de problema é muito complexo de ser resolvido numericamente. A alternativa para solucionar o problema consiste em explorar transformações matriciais ou resultados de álgebra linear para converter (7) em uma LMI.

Considerando o estudo da teoria abordada, o próximo passo consiste em prosseguir com o resultado obtido em Faria et al., (2023), buscando soluções menos conservadoras e mais aprimoradas para o Lema 1, permitindo encontrar um valor de beta que promova uma estabilização mais rápida do sistema, trazendo melhorias significativas no desempenho.

**Lema 1.** Dados  $\beta > 0$  e  $\tau > 0$ , se existirem matrizes  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  satisfazendo as condições (8) e (9), então o sistema (4), com ganho  $K = YG^{-1}$ , é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que  $\beta$ .

$$P_i > 0 \quad (8)$$

$$Y_{ij} + Y_{ji} < 0 \quad (9)$$

sendo  $i, j \in \mathbb{K}_r, i \leq j$ .

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} \text{He}(A_i P_j + B_i Y C) + 2\beta P_j & * \\ C P_j - G C + \tau Y' B_i' & -\tau(G + G') \end{bmatrix}$$

**Demonstração:** Consultar (Dong; Yang, 2013), substituindo a condição  $\dot{V}((x(t))) < 0$  por  $\dot{V}((x(t))) < -\beta V((x(t)))$ .

O Lema 1 estabelece condições de estabilidade expressas em termos de LMIs e representa uma base sólida para o projeto de controladores por realimentação estática da saída. Apesar de sua relevância, o resultado ainda impõe certo conservadorismo, já que não explora adequadamente as informações da matriz de saída  $C$ . O Lema 2, por sua vez, incorpora a decomposição matricial proposta por Rubió-Massegú et al. (2013), permitindo que essas informações adicionais sejam utilizadas na construção das LMIs. Essa reformulação contribui para reduzir o conservadorismo e ampliar a aplicabilidade prática, fornecendo condições menos restritivas e mais eficazes para a síntese de controladores SOF, em relação ao que é obtido pelo Lema 1.

**Lema 2.** Dados  $\beta > 0$ ,  $\tau > 0$  e  $L \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_y}$  se existirem matrizes  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $W_R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ ,  $W_Q \in \mathbb{R}^{n_x - n_y \times n_x - n_y}$  e  $Y_R \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  satisfazendo as condições (10) e (11), então o sistema (4), com ganho  $K = Y_R W_R^{-1}$ , é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que  $\beta$ .

$$P_i > 0 \tag{10}$$

$$\Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0 \tag{11}$$

sendo  $i, j \in \mathbb{K}_r$

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \text{He}(A_i P_j + B_i Y) + 2\beta P_j & * \\ P_j - W + \tau(B_i Y)' & -\tau(W + W') \end{bmatrix}$$

$$W = Q W_Q' Q + R W_R R'$$

$$Y = Y_R R'$$

$$R = C^\dagger + Q L$$

em que  $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x - n_y}$  é uma matriz cujas colunas formam base para o núcleo de  $C$  e  $C^\dagger$  a

pseudo inversa de Moore-Penrose de  $C$ . É considerado  $C^\dagger = C'(CC')^{-1}$ .

**Demonstração:** Consultar (Faria, et al. 2023).

Na sequência, a eficácia do método indicado no Lema 2 é discutida a partir da resolução de diferentes exemplos numéricos.

### 3. RESULTADOS E EXEMPLOS

#### 3.1 REGIÃO DE FACTIBILIDADE

Com o intuito de se comparar os métodos apresentados anteriormente, foi considerado o seguinte sistema incerto:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 + a_1 & 0 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & a_1^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 - a_1 & 0 & a_2^2 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & a_1^2 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 + a_1 & 0 & 1 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 - a_1 & 0 & a_2^2 & -0.1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

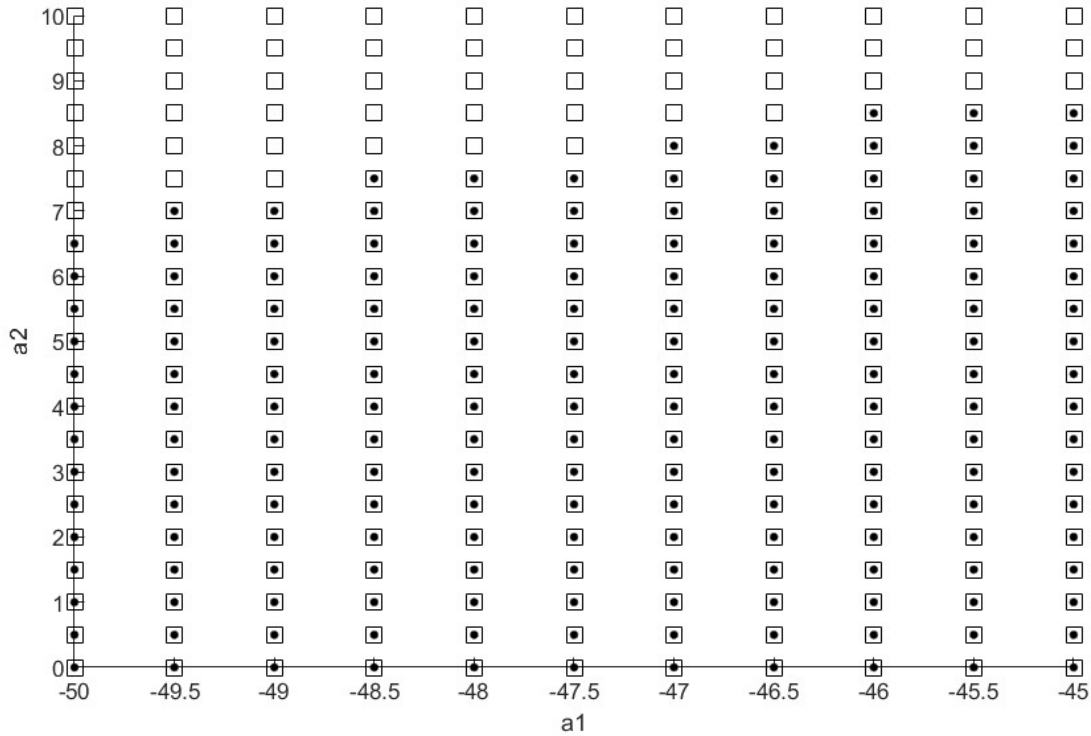
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

A região de factibilidade é obtida na Figura 1, utilizando os pacotes “YALMIP” (Lofberg, 2004) e “SDPT3” (Toh; Todd; Tütüncü, 1999) do MATLAB. Para a simulação, os parâmetros usados para a solução das LMIs foram  $\beta = 0.29$ ,  $\tau \in [10^{-15} \ 10^{-2}]$ ,  $a_1 \in [-50 \ -45]$ ,  $a_2 \in [0 \ 10]$ .

A Figura 1 mostra que a região de factibilidade obtida com o Lema 2, além de sobrepor a região associada ao Lema 1, também abrange todos os pontos do conjunto avaliado, indicando menor conservadorismo. Assim, o Lema 2 é o critério preferível neste estudo, pois no cenário

analisado, fornece a maior região factível, sem aumento de complexidade da sua implementação (YALMIP/SDPT3).

Figura 1 – Região de factibilidade do Lema 1 (●) e Lema 2 (●, □).

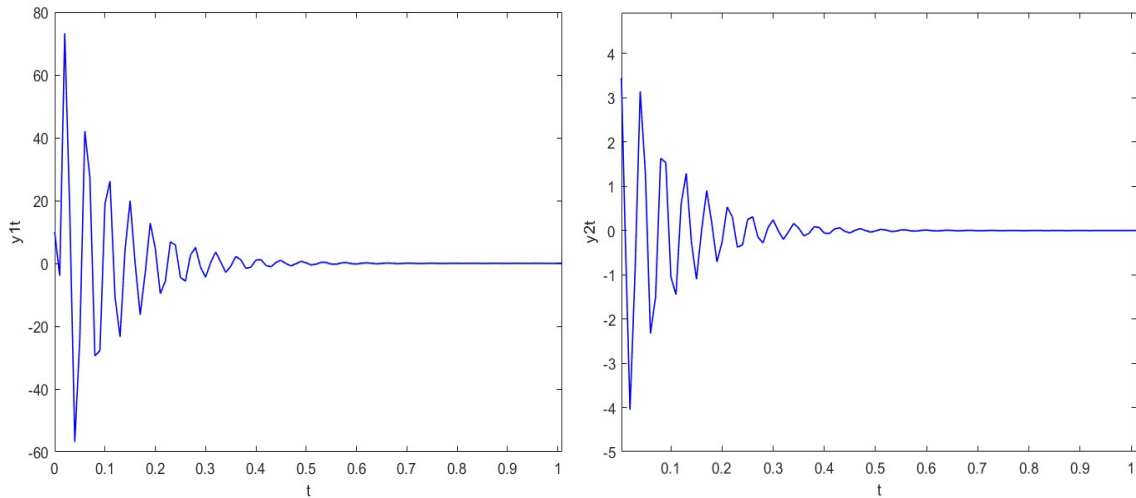


Fonte: Próprio autor.

Ainda, considerando o sistema incerto apresentado anteriormente para estudo da região de factibilidade, aplica-se o Lema 2, fixando a taxa de decaimento em  $\beta = 5$  e o parâmetro  $\tau = 10^{-5}$ , com o intuito de ilustrar o bom desempenho que o método proporciona para o mesmo sistema. Em seguida, é feita a síntese do ganho e apresentada a resposta temporal obtida no MATLAB, atendendo à especificação de decaimento. A partir da condição inicial  $x_0 = [10; 0; 5; 0]$  e dos valores  $a_1 = -49$  e  $a_2 = 10$ , foram obtidas a seguinte matriz de ganho  $K$ , na Figura 2, as respectivas saídas do sistema:

$$K = 10^6 [-0.1267 \quad -2.2904] \quad (13)$$

Figura 2 – Saídas do sistema incerto (12).



Fonte: Próprio autor.

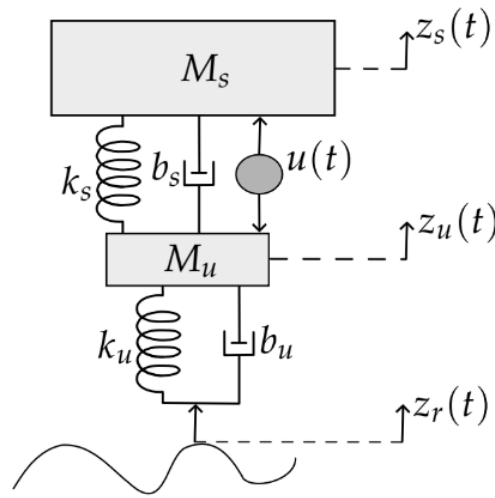
A Figura 2 mostra que, apesar do ganho elevado obtido na síntese, o controlador projetado estabiliza o sistema incerto, levando as saídas a convergirem rapidamente para zero. O ganho elevado se deve ao fato de que a matriz  $L$  é nula nesta simulação, o que aumenta o conservadorismo do projeto e faz com que, na prática, esse não seja o resultado de ganho mais adequado. No entanto, esse resultado evidencia que a estratégia de realimentação estática da saída, associada às condições de estabilidade com taxa mínima de decaimento, foi eficaz em garantir estabilidade e desempenho dinâmico satisfatório, ainda que com maior esforço de controle.

### 3.2 APLICAÇÃO SUSPENSÃO ATIVA

Este exemplo é baseado no estudo proposto por Sereni et al. (2020), que apresenta um sistema de suspensão ativa utilizado em estudos de controle automotivo. Esse sistema segue a estrutura de um modelo composto por duas massas:  $M_s$ , representando 1/4 da massa total do veículo, e  $M_u$ , que representa a massa não suspensa associada à roda e ao pneu. Essas massas são conectadas por elementos elásticos e dissipativos, molas  $k_s$ ,  $k_u$  e amortecedores  $b_s$ ,  $b_u$ , formando uma estrutura massa-mola-amortecedor capaz de atenuar vibrações provocadas por irregularidades da pista  $z_r(t)$ . Um atuador é inserido entre  $M_s$  e  $M_u$ , gerando a força de controle  $u(t)$ , que modifica dinamicamente a resposta do sistema. O sistema é apresentado na Figura 3 e o modelo de espaço de estados é descrito em (14).

Neste exemplo, também se adota um parâmetro variável no tempo  $\rho$ , introduzido artificialmente no modelo da suspensão ativa para simular uma falha no atuador, conforme descrito em Sereni et al. (2020). Esse parâmetro representa a saturação do atuador e é utilizado para considerar a perda de até 30% de seu desempenho nominal, ou seja,  $\rho = 0.7$  indica que o atuador opera com eficiência reduzida em relação ao valor de referência. Dessa forma, a representação politópica do sistema incorpora essa limitação, permitindo avaliar a robustez do controlador frente a possíveis falhas no atuador.

Figura 3 – Sistema de suspensão ativa.



Fonte: Faria et al. (2024).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_u} & \frac{b_s}{M_u} & -\frac{k_u}{M_u} & -\frac{(b_s + b_u)}{M_u} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{\rho}{M_u} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]x(t) \quad (14)$$

Com  $x(t) = [z_s(t) - z_u(t) \quad \dot{z}_s(t) \quad z_u(t) - z_r(t) \quad \dot{z}_u(t)]'$  e os parâmetros  $1,455 \leq M_s \leq 2,45 \text{ kg}$ ,  $M_u = 1 \text{ kg}$ ,  $k_s = 900 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $k_u = 2500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $b_s = 7,5 \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}$ ,  $b_u = 5 \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}$ ,  $0,7 \leq \rho \leq 1$ . A matriz de saída  $C$  foi adotada para que apenas a velocidade da carroceria fosse utilizada na realimentação, simulando uma situação prática em que há número

reduzido de sensores disponíveis. Essa configuração foi baseada no trabalho de Sereni et al. (2020), aplicado ao sistema de suspensão ativa.

Assim, é possível escrever o sistema com os seguintes vértices matriciais:

Vértice 1 –  $M_s = 1.455$ ,  $\rho = 1$ :

$$\mathbf{A}_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0.001 & 0 & -0.001 \\ -0.6186 & -0.0052 & 0 & 0.0052 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \\ 0.900 & 0.0075 & -2.500 & -0.0125 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6873 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (15)$$

Vértice 2 –  $M_s = 2.45$ ,  $\rho = 1$ :

$$\mathbf{A}_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0.001 & 0 & -0.001 \\ -0.3673 & -0.0031 & 0 & 0.0031 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0010 \\ 0.9000 & 0.0075 & -2.5000 & -0.0125 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4082 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1 \quad (16)$$

Vértice 3 –  $M_s = 1.455$ ,  $\rho = 0.7$ :

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4811 \\ 0 \\ -0.7 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_1 \quad (17)$$

Vértice 4 –  $M_s = 2.45$ ,  $\rho = 0.7$ :

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2857 \\ 0 \\ -0.7 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_1 \quad (18)$$

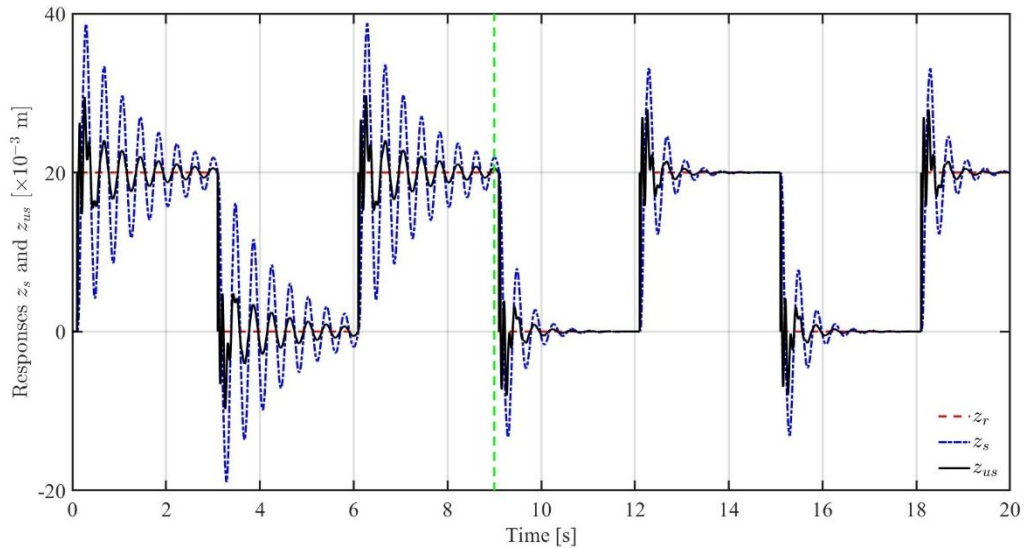
O sistema foi resolvido a partir do Lema 2 utilizando os pacotes “YALMIP” e “SeDuMi” e os parâmetros  $\tau = 0.3$  e  $\beta = 13$ . Assim, foi obtido o seguinte ganho  $K$ :

$$K = -10.5758 \quad (19)$$

A Figura 4 mostra o comportamento do sistema (14), considerando a síntese do ganho (19), condição inicial nula e o comportamento  $z_r$  proveniente do perfil da pista. Foi

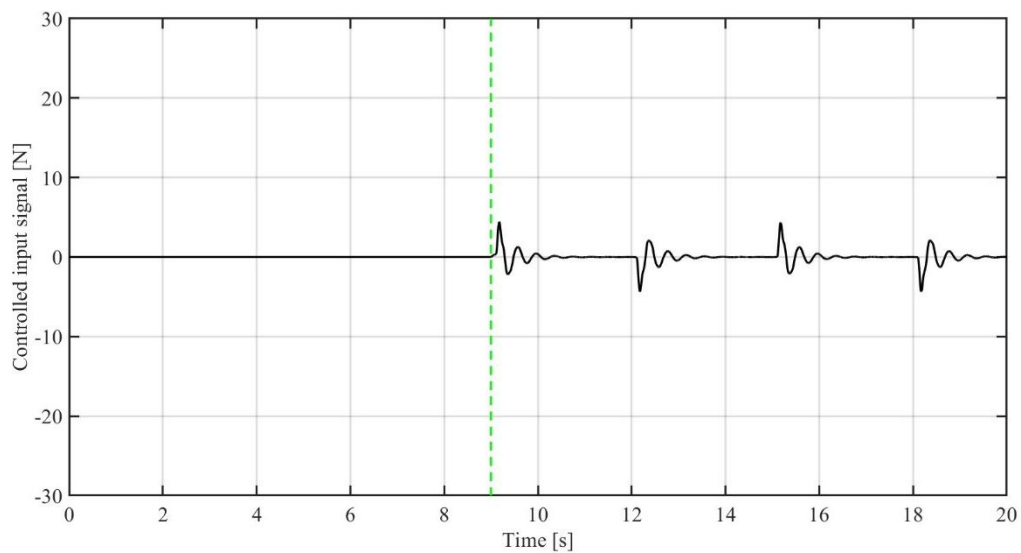
comparado assim, o sistema simulado para os deslocamentos das massas suspensa ( $z_s$ ) e não suspensa ( $z_{us}$ ). Já a Figura 5 mostra o comportamento dinâmico da entrada de controle.

Figura 4 – Comportamento da saída do sistema (14).



Fonte: Próprio autor.

Figura 5 – Comportamento dinâmico de  $u(t)$ .



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 4, o sinal  $z_r$  apresenta variações em degrau que representam irregularidades na pista. Cada uma dessas perturbações gera uma resposta diferente nas duas massas do sistema. A massa não suspensa ( $z_{us}$ ) reage com oscilações mais rápidas, o que é esperado devido à sua menor massa e ao contato direto com a irregularidade da estrada. Já a massa

suspensa, indicada por  $z_s$ , oscila mais lentamente e com amplitudes maiores. Essa diferença evidencia o acoplamento entre os dois graus de liberdade do modelo e suas dinâmicas distintas. Também é possível perceber uma mudança no comportamento das variáveis após o instante marcado pela linha verde, momento em que o controlador passa a atuar. Apesar de o sistema ser naturalmente estável, a ação do controlador altera o amortecimento do conjunto, contribuindo para uma resposta transitória mais suave.

A Figura 5 mostra o sinal de controle  $u(t)$ , gerado pelo controlador de realimentação estática de saída. Antes da ativação, o sinal permanece em zero, evidenciando que o sistema opera em malha aberta. Depois da linha verde, começam a surgir picos de atuação sincronizados com as variações no perfil da estrada, seguidos de pequenas oscilações. Esses pulsos representam a ação imediata do controlador para reduzir a amplitude do transitório causada pelos degraus na pista, enquanto as oscilações menores indicam o ajuste fino necessário para manter o sistema dentro da região de estabilidade.

Dessa forma, percebe-se que o sistema permanece estável mesmo diante das excitações introduzidas pela estrada e que o controlador consegue reduzir as oscilações de forma eficiente, sem exigir esforços excessivos ou até mesmo levar o atuador à saturação. Esse resultado evidencia que o Lema 2 estabiliza o sistema de maneira satisfatória e melhora seu comportamento transitório, mostrando-se viável para o sistema analisado.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram analisadas condições para a síntese de controladores por realimentação estática da saída aplicados a sistemas lineares incertos com restrições na taxa de decaimento. Inicialmente, apresentaram-se a formulação do problema e a dificuldade inerente à sua natureza não convexa, que leva à presença de BMIs de difícil resolução. Em seguida, foram estudadas duas estratégias provenientes da literatura, Lema 1 e Lema 2, ambas reformuladas em termos de LMIs, com o objetivo de avaliar o comportamento e o grau de conservadorismo de cada abordagem.

A análise comparativa mostrou que o Lema 2 proporcionou uma região de factibilidade maior em relação ao Lema 1, evidenciando ser um método menos conservador e mais flexível para o projeto de controladores robustos. Além disso, a imposição de uma taxa mínima de decaimento permitiu garantir estabilidade robusta e respostas dinâmicas mais rápidas e controladas, atendendo ao critério de desempenho estabelecido. Na aplicação prática ao sistema de suspensão ativa, verificou-se que o controlador obtido reduziu significativamente as oscilações em relação ao caso em malha aberta, diminuindo o tempo de estabilização e suavizando a resposta frente às perturbações. Dessa forma, os resultados confirmam a eficiência da abordagem baseada no Lema 2, que, ao explorar condições em LMIs, conciliou simplicidade de implementação, menor conservadorismo e desempenho consistente, mesmo na presença de incertezas paramétricas.

Como continuação e aprofundamento desta pesquisa, sugere-se investigar novas formulações de síntese de controladores SOF robustos baseadas em técnicas híbridas de busca, como a proposta por Gopmandal (2021), que pode oferecer alternativas promissoras para redução de conservadorismo e melhoria de desempenho em sistemas multivariáveis incertos.

## REFERÊNCIAS

BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

CARNIATO, A.; CARNIATO, A.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R.; JÚNIOR, E.; ASSUNÇÃO, E. **Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback**. *International Journal of Control*, 2020.

CHANG, X. H.; PARK, J. H.; ZHOU, J. **Robust static output feedback  $H_\infty$  control design for linear systems with polytopic uncertainties**. *Systems & Control Letters*, v. 85, p. 23–32, 2015.

CRUSIUS, C. A. R.; TROFINO, A. **Sufficient LMI conditions for output feedback control problems**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, 1999.

DONG, J.; YANG, G. H. **Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties**. *Automatica*, v. 49, n. 6, p. 1821–1829, 2013.

DONG, J.; YANG, G. H. **Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 10, p. 1930–1936, 2007.

ELIAS, L. J.; FARIA, F.; ARAUJO, R.; MAGOSSO, R.; OLIVEIRA, V. **Robust static output feedback  $H_\infty$  control for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems**. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 30, no. 10, pp. 4434-4446, 2022.

FARIA, F. A.; MENEZES, L. C. C.; ONCOY, D. J. S.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. **Controle chaveado de sistemas lineares incertos usando realimentação estática da saída**. In: XVI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2023), Manaus, AM. Anais [...]. Sociedade Brasileira de Automática (SBA), 2023. p. 1-6.

FARIA, F. A.; PAZINI, R. C. N.; ONCOY, D. J. S.; YAMANAKA, H. F.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, V. A. **Alocação regional de polos usando realimentação estática da saída**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO – CBA 2024, 2024. Anais... Sociedade Brasileira de Automática, 2024. p. 1-6.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **The LMI control toolbox**. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, v. 3, p. 2038–2041, Orlando, USA, 1994.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. **Stability and Stabilization of Continuous-Time Switched Linear Systems**. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.

GOPMANDAL, Falguni; GHOSH, Arun. **A hybrid search based synthesis of static output feedback controllers for uncertain systems with application to multivariable PID control**. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 31, n. 12, p. 6069-6090, 2021.

JEUNG, E. T.; LEE, K. R. **Static output feedback control for continuous-time T-S fuzzy systems: An LMI approach.** *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 12, n. 3, p. 703–708, 2014.

LÖFBERG, J. **YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB.** In: *Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan: IEEE, 2004.

OGATA, K. **Modern control engineering.** 5. ed. New Delhi: PHI Learning Private Ltd., 2010.

RUBIÓ-MASSEGUÉ, J.; ROSSELL, J. M.; KARIMI, H. R.; PALACIOS-QUIÑONERO, F. **Static output-feedback control under information structure constraints.** *Automatica*, v. 49, n. 1, p. 313–316, 2013.

SADABADI, M. S.; PEAUCELLE, D. **From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey.** *Annual Reviews in Control*, v. 42, p. 11–26, 2016.

SERENI, B.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. **New gain-scheduled static output feedback controller design strategy for stability and transient performance of LPV systems.** *IET Control Theory & Applications*, v. 14, n. 5, p. 717–725, 2020.

STURM, J. F. **Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones.** *Optimization Methods and Software*, v. 11–12, p. 625–653, 1999.

## APÊNDICE – CÓDIGOS DESENVOLVIDOS EM MATLAB

A seguir, serão apresentados os códigos desenvolvidos em MATLAB, utilizando os pacotes ‘SEDUMI’ e ‘YALMIP’, para construir as LMIs presentes nos Lemas 1 e 2 e simular o comportamento representado na Figura 2.

Figura 6 – Código referente à simulação da Figura 2.

```

1  % *** ANÁLISE DE ESTABILIDADE - FUZZY LYAPUNOV FUNCTION ***
2  % *****
3  % VERIFICANDO A REGIÃO DE ESTABILIDADE
4  % *****
5  % Limpeza de memória
6  close all;
7  clear all;
8  beep off;
9  clc;
10 % PARÂMETROS DO PROBLEMA
11 ri=4;
12 A = cell(1,ri);
13 B = cell(1,ri);
14 C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
15 alfa=zeros(1,4);
16 nafa=length(alfa);
17 % Considerando o caso particular
18 a1=-49; a2=10;
19 alfa(1,1)=0.4; alfa(1,2)=0.1; alfa(1,3)=0.3;
20 alfa(1,4)=1-sum(alfa(1,1:nafa-1));
21 alfa
22 % % -----
23 % Entre com os vértices de A:
24 A{1,1} = [1+a1 0 1 -0.1
25           1 -2 0 0
26           1 a1^2 -0.3 0
27           0 0 1 -1];
28 A{1,2} = [1-a1 0 a2^2 -0.1
29           1 -2 0 0
30           1 a1^2 -0.3 0
31           0 0 a2 -1];
32 A{1,3} = [1+a1 0 1 -0.1
33           1 -2 0 0
34           1 0 -0.3 0
35           0 0 1 -1];
36 A{1,4} = [1-a1 0 a2^2 -0.1
37           1 -2 0 0
38           1 0 -0.3 0
39           0 0 a2 -1];
40 % -----
41 % Entre com os vértices de B:
42 B{1,1} = [1/2;0;0;0];
43 B{1,2} = [1/2;0;0;0];
44 B{1,3} = [1;0;0;0];
45 B{1,4} = [1;0;0;0];
46 be=5;
47 tau=1E-1;
48 while tau>1E-14
49     K3 = lmi_SBAI2023_Corolario (A,B,C,tau,be);
50     if ~isempty(K3)
51         tau
52         break
53     end
54     tau=tau*0.1;
55 end
56 % Simulando o sistema
57 if ~isempty(K3)
58     K3
59     Ah=0*A{1,1};
60     Bh=0*B{1,1};
61     for i1=1:nafa
62         Ah=Ah+alfa(1,i1)*A{1,i1};
63         Bh=Bh+alfa(1,i1)*B{1,i1};
64     end
65     Auto=eig(Ah+Bh*K3*C);
66     Auto=max(real(Auto))
67     if(Auto<0)
68         disp('O ganhos K garante estabilidade robusta')
69     else
70         disp('O teste do ganho falhou')
71     end
72     inter1=0:0.01:2;
73     x0=[10;0;5;0];
74     [t1,y1] = ode23tb('Exemplo_1_ODE', inter1, x0,[],Ah,Bh,C,K3);
75     figure(2)
76     plot(t1,y1(:,1),'b-', 'Linewidth',1)
77     xlabel('t')
78     ylabel('y1t')
79     figure(3)
80     plot(t1,y1(:,3),'b-', 'Linewidth',1)
81     xlabel('t')
82     ylabel('y2t')
83 end
84

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 7 – Código referente à construção do Lema 1.

```

1 function L = lmi_Dong2013_td_Cfixo (A,B,C,tau,be)
2
3 rp = size(A,2);
4 % Condições de estabilidade baseadas no Dong 2013 com
5 nA = size(A{1,1},2);
6 nB = size(B{1,1},2);
7 nC = size(C,1);
8 % Criando as variáveis matriciais
9 G = sdpvar(nC,nC,'full');
10 J = inv(C*C');
11 P = cell(1,rp);
12 L = sdpvar(nB,nC,'full');
13 Restr = [];
14 for t1=1:rp
15     P{1,t1} = sdpvar(nA,nA,'symmetric');
16     Restr = [Restr,P{1,t1}>=0];
17 end
18 % Criando as estruturas matriciais usadas nas LMIs
19 LMI = cell(rp,rp);
20 for t1=1:rp
21     for t2=1:rp
22         a11=A{1,t1}*P{1,t2}+P{1,t2}*A{1,t1}'+...
23             B{1,t1}*L*C'+(B{1,t1})'*L*C'+2*be*P{1,t2};
24         a21=C*P{1,t1}-G*C+tau*(B{1,t1}*L)';
25         a22=-tau*(G+G');
26         LMI{t1,t2} = [a11 a21';a21 a22];
27     end
28 end
29 % Criando as LMIs
30 for t1=1:rp
31     for t2=t1:rp
32         Restr = [Restr,LMI{t1,t2}+LMI{t2,t1}<=0];
33     end
34 end
35 % Configurando o Solver.
36 opts=sdpsettings;
37 % opts.solver='sedumi';
38 opts.solver='sdpt3';
39 % opts.solver='mosek';
40 opts.verbose=0;
41 % Resolvendo as LMIs
42 sol = optimize(Restr,[],opts);
43 % if sol.problem ~= 1
44 che=min(check(Restr));
45 if che > 0
46     G = value(G);
47     L = value(L)*inv(G);
48 else
49     display('DONG2013 Infatível')
50     L=[];
51 end

```

Fonte: Próprio autor.

Figura 8 – Código referente à construção do Lema 2.

```

1 function K = lmi_SBAI2023_Corolario (A,B,C,tau,be)
2   rp = size(A,2);
3   % Condições de estabilidade baseadas no Dong 2013 com
4   nA = size(A{1,1},2);
5   nB = size(B{1,1},2);
6   nC = size(C,1);
7   % Criando as variáveis matriciais
8   S = cell(1,rp);
9   Restr = [];
10  for t1=1:rp
11      S{1,t1} = sdpvar(nA,nA,'symmetric');
12      Restr = [Restr,S{1,t1}>=0];
13  end
14  % Criando a matriz variável X_nxn simétrica
15  Q = null(C);
16  L = zeros(nA-nC,nC);
17  R = pinv(C)+Q*L;
18  GQ = sdpvar(nA-nC,nA-nC,'full');
19  GR = sdpvar(nC,nC,'full');
20  KR = sdpvar(nB,nC,'full');
21  G = Q*GQ*Q'+R*GR*R';
22  K = KR*R';
23  % Criando as estruturas matriciais usadas nas LMIs
24  LMI = cell(rp,rp);
25  for t1=1:rp
26      for t2=1:rp
27          a11=A{1,t1}*S{1,t2}+S{1,t2}*A{1,t1}'+...
28              B{1,t1}*K+(B{1,t1}*K)'+be*S{1,t2};
29          a21=S{1,t2}-G+tau*(B{1,t1}*K)';
30          a22=-tau*(G+G');
31          LMI{t1,t2} = [a11 a21';a21 a22];
32      end
33  end
34  % Criando as LMIs
35  for t1=1:rp
36      for t2=t1:rp
37          Restr = [Restr,LMI{t1,t2}+LMI{t2,t1}<=0];
38      end
39  end
40  % Configurando o Solver.
41  opts=sdpsettings;
42  opts.solver='sedumi';
43  %opts.solver='sdpt3';
44  opts.verbose=0;
45  % Resolvendo as LMIs
46  sol = optimize(Restr,[],opts)
47  if sol.problem ~= 1
48      % che=min(check(Restr));
49      % if che > 0
50      GR = value(GR);
51      K = value(KR)/GR;
52      AutoIndus=eig(A{1,1}+B{1,1}*K*C);
53      for ik=2:rp
54          AutoIndus=[AutoIndus;eig(A{1,ik}+B{1,ik}*K*C)];
55      end
56      AutoIndus = max(real(AutoIndus));
57      if AutoIndus<0
58          display('Corolario - SIM')
59      else
60          K=[];
61          display('Corolario - Solução Ruim')
62      end
63  else
64      display('Corolario - Infatível')
65      K=[];
66  end

```

Fonte: Próprio autor.