



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

O Índice dos Pontos Fixos

Lucas Antonio Caritá

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

2014

514.2 Caritá, Lucas Antonio
C277i O Índice dos Pontos Fixos/ Lucas Antonio Caritá- Rio Claro:
[s.n.], 2014.
59 f.: il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientador: João Peres Vieira

1. Topologia Algébrica. 2. Grau Local. 3. Grau de Brouwer. 4. Teoria do Índice. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Lucas Antonio Caritá
O ÍNDICE DOS PONTOS FIXOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Prof. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP/Rio Claro - SP

Prof. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP/São José do Rio Preto - SP

Rio Claro, 18 de Fevereiro de 2014

À todas as pessoas que torcem pelo meu sucesso, dedico.

Agradecimentos

À Deus.

À Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), por me oferecer a estrutura física e professores exemplares.

Ao Prof. Dr. João Peres Vieira, que me orienta desde o segundo ano de graduação, sempre me inspirando e servindo como bom exemplo. Um dia, gostaria de ser como você. Obrigado por se mostrar muito além do que um orientador e me conceder seu ombro amigo quando necessitei.

À todos os professores que contribuíram para minha sólida formação: matemática, ética e moral. Um agradecimento especial às professoras: Dra. Suzinei A. S. Marconato, Dra. Alice K. M. Libardi, Dra. Elíris C. Rizziolli e Dra. Marta C. Gadotti que, além do meu estimado orientador, toleraram minhas inúmeras visitas e solicitações de cartas de recomendação para o doutorado. Uma parte desta minha próxima conquista deverei à vocês.

Aos colegas e amigos que conheci no decorrer desta longa jornada, obrigado pela agradável companhia. Um agradecimento especial ao amigo Glalco Silva Costa, que foi meu companheiro durante toda a graduação e um forte apoio nos momentos difíceis. Valeu, Glalcão!

À toda minha família, mas principalmente aos meus pais Jaime Caritá e Maria Cristina J. Caritá, ao meu irmão Gabriel A. Caritá e à minha avó Ignez L. Jacomini, que acompanharam o meu esforço de perto.

Possuo também, uma gratidão sem medida a uma pessoa que sempre me influenciou positivamente. Alguém que, com seu jeito singular, me mostrou o mundo de um modo que eu desconhecia. Obrigado por abrir meus olhos, mostrar o tamanho do meu potencial e me apoiar nas decisões difíceis. Obrigado por me incentivar, me ouvir e sempre me aconselhar. Obrigado por me expor a beleza de viver e dividir comigo momentos que jamais esquecerei. Infelizmente a estrada da vida é cheia de obstáculos e caminhos tortuosos; é impossível, por mais que se tente, ter o controle sobre tudo. Porém, gostaria que soubesse que sou eternamente grato à você, Mariana C. M. Fernandes.

"I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me."

Isaac Newton

"Eu não sei como pareço aos olhos do mundo, mas vejo-me como um menino brincando em beira-mar, divertindo-me vez por outra encontrando uma pedra ou uma concha mais bonita que o normal, enquanto o grande oceano da verdade se estende totalmente inexplorado diante de mim."

(Tradução Livre)

Isaac Newton

Resumo

Este trabalho é espelhado no livro “Teoria do Índice” [1] de Daciberg Lima Gonçalves e José Carlos de Souza Kiihl, publicado em 1983 no 14º Colóquio Brasileiro de Matemática pelo IMPA.

Para a leitura deste trabalho é necessário uma familiaridade prévia com Topologia Algébrica, na qual indicamos [2] e [3] para consulta.

Inicialmente apresentaremos alguns pré-requisitos algébricos e topológicos necessários para o desenvolvimento do trabalho e a seguir estudaremos: pontos fixos de aplicações contínuas de X em X , em que X é um espaço topológico; Grau de Brouwer de aplicações contínuas de S^n em S^n (ou respectivamente (B^{n+1}, S^n) em (B^{n+1}, S^n)); Grau Local de uma aplicação contínua f de V em S^n em torno de um ponto $Q \in S^n$, em que $V \subset S^n$ é um aberto e $f^{-1}(Q)$ é um compacto e Índices dos Pontos Fixos de uma aplicação contínua de V em S^n , em que $V \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto.

Palavras-chave: Topologia Algébrica, Grau Local, Grau de Brouwer, Teoria do Índice.

Abstract

This work is based on the book titled “Teoria do Índice” [1] by Daciberg Lima Gonçalves and José Carlos de Souza Kiihl , published in 1983 in the 14° Brazilian Math Colloquium held by IMPA .

In order to perform the reading of this work, a basic acquaintance from the algebraic topology is needed, on which we can indicate the following [2] and [3] references.

Firstly, for the development of the work, some previous necessary algebraic and topological requirements are shown and the next topics will be studied: fixed points of continuous maps from X to X , where X is a topological space, Brouwer’s degree of continuous maps from S^n to S^n (or respectively (B^{n+1}, S^n) to (B^{n+1}, S^n)), Local Degree of continuous maps from V to S^n around a point $Q \in S^n$, where $V \subset S^n$ is an open set and $f^{-1}(Q)$ is a compact set and Fixed Points Index of continuous maps from V to S^n , where $V \subset \mathbb{R}^n$ is an open set.

Keywords: Algebraic Topology, Local Degree, Map’s Degree, Index Theory.

Lista de Figuras

1.1	Simplexos Padrão	21
1.2	Teorema do Ponto Fixo de Brouwer aplicado no intervalo $[-1, 1]$	28
1.3	Semirreta $\overrightarrow{f(x)x}$, que começa em $f(x)$ e passa por x , interseccionando a esfera S^n em $g(x)$	29
2.1	A Suspensão de S^n	36
2.2	Caminho em S^n entre $Af(x)$ e $g(x)$ obtido através da projeção radial.	39
3.1	Figura de referência para a obtenção de exc'	44
4.1	Possíveis tipos de gráficos de g no caso particular de P sendo a origem.	53

Sumário

1	Noções Preliminares e O Teorema do Ponto Fixo de Brower	19
1.1	Elementos Básicos	19
1.1.1	n -esfera usual, n -disco usual e n -bola aberta usual	19
1.2	Homotopia	19
1.2.1	Aplicações Homotópicas	19
1.3	Homologia Singular	20
1.3.1	Simplexos Padrão e Aplicações Lineares	20
1.3.2	O Complexo Singular	22
1.3.3	A Homologia Singular	24
1.4	O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	27
1.4.1	Propriedades do Ponto Fixo	30
2	Grau de Brouwer	33
2.1	O Grau de Brouwer	33
2.1.1	Primeiras Propriedades do Grau	33
2.2	Um Teorema Relevante	35
2.2.1	A Suspensão de um Espaço Topológico X	36
2.3	A Aplicação Antípoda	38
3	Graus Locais	43
3.1	O Grau Local	43
3.1.1	Propriedades Iniciais do Grau Local	44
3.2	Quatro Propriedades Relevantes do Grau Local	46
3.2.1	Uma Demonstração Alternativa	48
4	O Índice dos Pontos Fixos	51
4.1	O Índice dos Pontos Fixos	51
4.2	Seis Propriedades Relevantes do Índice dos Pontos Fixos	53
	Referências	59

Introdução

Seja X um espaço topológico qualquer. Dada uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow X$, uma pergunta natural de se fazer é a seguinte: Existem pontos x em X tais que $f(x) = x$?

Esses pontos, quando existem, são denominados de pontos fixos da f , e o conjunto de todos os pontos fixos da f é denotado por $Fix(f)$. Dizemos que um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo se para toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow X$ tivermos $Fix(f) \neq \emptyset$.

Um exemplo bem simples é o intervalo $[-1, 1]$, que tem a propriedade do ponto fixo. Na verdade, esse intervalo é apenas um caso particular, para $n = 1$, de $X = B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$.

No primeiro capítulo, apresentaremos uma demonstração, devida a Hirsh, do fato citado acima, que é conhecido como "Teorema do Ponto Fixo de Brouwer". A demonstração devida a Brouwer, é bastante diferente e, conduziu à definição de Grau de Brouwer de uma aplicação $f : S^n \longrightarrow S^n$, em que $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ é a esfera unitária. No segundo capítulo estudaremos as propriedades e aplicações do Grau de Brouwer. Neste capítulo demonstraremos um relevante teorema que afirma que para qualquer inteiro k existe uma aplicação de S^n em S^n de modo que essa aplicação tenha grau k . Para demonstrarmos esse fato, definiremos suspensão de um espaço topológico X .

A noção de grau conduz naturalmente à noção de grau local: Suponha que V é um subconjunto aberto de S^n e $f : V \longrightarrow S^n$ é uma aplicação contínua. Assim, podemos definir o grau local de f em torno de $Q \in S^n$, desde que $f^{-1}(Q)$ seja compacto. Se $f^{-1}(Q)$ tiver um número finito de pontos, então o grau local de f em torno de Q , conta o número de pontos, levando-se em conta a “multiplicidade” de cada um.

No terceiro capítulo, estudaremos grau local e suas principais propriedades. Neste capítulo, embasados nas novas propriedades, apresentaremos uma demonstração alternativa para o teorema que chamamos a atenção no segundo capítulo.

Retornando a questão dos pontos fixos de uma aplicação, observamos que se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua então a aplicação $(id - f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $(id - f)(x) = x - f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, é tal que $Fix(f) = (id - f)^{-1}(0)$.

Logo, o grau local de $(id - f)$ em torno da origem, quando definido, nos dá o “número” de pontos fixos de f , contados com suas “multiplicidades”.

Essa ideia motiva a definição de índices dos pontos fixos de uma aplicação contínua definida em um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^n$.

No quarto capítulo, definiremos o índice dos pontos fixos e estudaremos suas principais propriedades.

1 Noções Preliminares e O Teorema do Ponto Fixo de Brower

Inicialmente, abordaremos conceitos de Homologia Singular e Homotopia que são fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Elementos Básicos

1.1.1 n-esfera usual, n-disco usual e n-bola aberta usual

Definição 1.1. *Seja $n \geq 1$. Definimos:*

- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ a n -esfera usual;
- $B^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$ a n -disco usual;
- $\overset{\circ}{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| < 1\}$ a n -bola aberta usual ou n -célula usual.

Observação 1.1. S^n é a fronteira de B^{n+1} .

1.2 Homotopia

1.2.1 Aplicações Homotópicas

Definição 1.2. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas entre espaços topológicos. Dizemos que f é homotópica a g , $f \simeq g$, se existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. A aplicação H é chamada homotopia entre f e g .*

Definição 1.3. *Dois espaços topológicos X e Y tem o mesmo tipo de homotopia ($X \simeq Y$) se existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ de modo que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$. As aplicações f e g são denominadas equivalências homotópicas.*

Definição 1.4. *Um espaço topológico é contrátil se tiver o mesmo tipo de homotopia de um ponto.*

Lema 1.1. B^n é contrátil.

Demonstração. Considere $f : B^n \rightarrow \{0\}$ contínua dada por $f(x) = 0, \forall x \in B^n$ e $i : \{0\} \subset B^n \hookrightarrow B^n$ a inclusão.

Temos $(f \circ i)(0) = f(0) = 0$, ou seja, $f \circ i = Id_{\{0\}}$ e assim $f \circ i \simeq Id_{\{0\}}$.

Também $(i \circ f)(x) = i(0) = 0$. Provemos que $i \circ f \simeq Id_{B^n}$.

Note que $H : B^n \times I \rightarrow B^n$ dada por $H(x, t) = tx + (1 - t)(i \circ f)(x)$ é contínua, $H(x, 0) = (i \circ f)(x)$ e $H(x, 1) = Id_{B^n}(x)$. Logo H é uma homotopia entre $i \circ f$ e Id_{B^n} .

Portanto, B^n é contrátil. $\square$

1.3 Homologia Singular

1.3.1 Simplexos Padrão e Aplicações Lineares

Definição 1.5. O q -simplexo Δ_q consiste de todos os pontos $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$ tais que:

- a) $0 \leq x_i \leq 1, i \in \{0, 1, 2, \dots, q\}$
- b) $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_q = 1$

Os vetores unitários $e^j = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^j, 0, \dots, 0)$ de $\mathbb{R}^{q+1}$ estão em Δ_q e são denominados vértices de Δ_q .

Exemplo 1.1. Geometricamente:

- Δ_0 é um ponto;
- Δ_1 é um segmento de reta;
- Δ_2 é um triângulo equilátero;
- Δ_3 é um tetraedro regular.

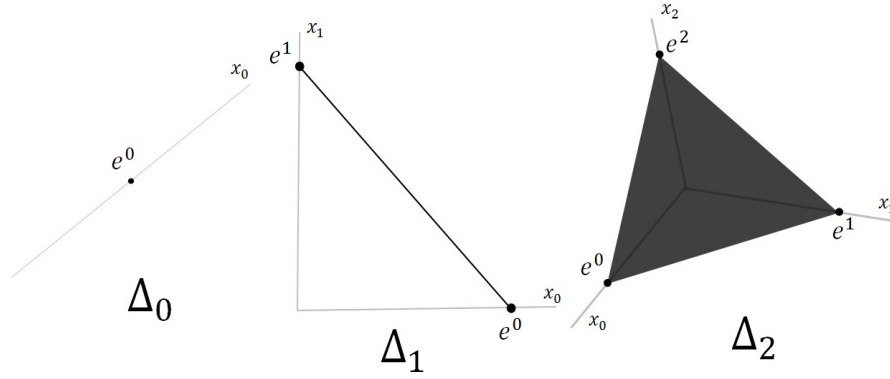


Figura 1.1: Simplexos Padrão

Definição 1.6. Uma aplicação $f : \Delta_q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dita linear se existir uma transformação linear $F : \mathbb{R}^{q+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F|_{\Delta_q} = f$.

Note que sendo $P^0, P^1, \dots, P^q \in \mathbb{R}^n$ pontos arbitrários a única aplicação linear $f : \Delta_q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(e^i) = P^i$ é dada por $f(x) = x_0 P^0 + \dots + x_q P^q$.

A imagem $f(\Delta_q)$ consiste de todos os pontos $P = x_0 P^0 + \dots + x_q P^q$ de $\mathbb{R}^n$ com $0 \leq x_i \leq 1, i \in \{0, 1, \dots, q\}$, e $x_0 + \dots + x_q = 1$; fazendo com que as aplicações lineares de Δ_q fiquem completamente determinadas quando conhecemos os seus valores nos vértices.

Em particular, consideremos a aplicação linear

$$\varepsilon_{q-1}^j : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q$$

$$(x_0, \dots, x_j, \dots, x_{q-1}) \longmapsto (x_0, \dots, x_{j-1}, \overbrace{0}^{j+1}, x_j, \dots, x_{q-1}), j \in \{0, 1, \dots, q\}$$

Denominamos as imagens desta aplicação como as $(q-1)$ -faces de Δ_q .

A união de todas as $(q-1)$ -faces de Δ_q é chamada de bordo de Δ_q e a denotaremos por $\dot{\Delta}_q$. Note que $\dot{\Delta}_q$ consiste de todos os pontos $x \in \Delta_q$ com pelo menos uma coordenada sendo zero.

Lema 1.2. $\varepsilon_{q+1}^j \varepsilon_q^k = \varepsilon_{q+1}^k \varepsilon_q^{j-1}$, se $k < j$.

Demonstração. De fato, por um lado temos:

$$\varepsilon_{q+1}^j(\varepsilon_q^k(x_0, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_q)) = \varepsilon_{q+1}^j(x_0, \dots, x_{k-1}, \overbrace{0}^{k+1}, \overbrace{x_k}^{k+2}, \dots, \overbrace{x_{j-1}}^{j+1}, \overbrace{x_j}^{j+2}, \dots, \overbrace{x_q}^{q+1}) =$$

$$(x_0, \dots, x_{k-1}, \overbrace{0}^{k+1}, x_k, \dots, \overbrace{x_{j-2}}^j, \overbrace{0}^{j+1}, \overbrace{x_{j-1}}^{j+2}, \overbrace{x_j}^{j+3}, \dots, \overbrace{x_q}^{q+2})$$

E por outro lado:

$$\varepsilon_{q+1}^k(\varepsilon_q^{j-1}(x_0, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_q)) = \varepsilon_{q+1}^k(x_0, \dots, x_k, \dots, x_{j-2}, \overbrace{0}^j, \overbrace{x_{j-1}}^{j+1}, \overbrace{x_j}^{j+2}, \dots, \overbrace{x_q}^{q+1}) =$$

$$(x_0, \dots, x_{k-1}, \overbrace{0}^{k+1}, x_k, \dots, \overbrace{x_{j-2}}^j, \overbrace{0}^{j+1}, \overbrace{x_{j-1}}^{j+2}, \overbrace{x_j}^{j+3}, \dots, \overbrace{x_q}^{q+2})$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

1.3.2 O Complexo Singular

Definição 1.7. Uma categoria $\mathcal{C}$ é definida do seguinte modo:

- a) Uma classe de objetos, denotada por $Ob(\mathcal{C})$ ou apenas por $\mathcal{C}$, quando não houver risco de confusão;
- b) Para qualquer par X, Y de objetos, tem-se um conjunto de morfismos de X para Y , denotado por $\mathcal{C}(X, Y)$ ou $[X, Y]$;
- c) Para toda tripla ordenada de objetos X, Y, Z , tem-se uma aplicação (α, β) de $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z)$ para $\mathcal{C}(X, Z)$, chamada composição; a imagem de (α, β) é denotada por $\beta \circ \alpha$ ou $\beta\alpha$, e será denominada composta de α com β .

Além do mais, devem ser satisfeitos os dois axiomas:

- d) $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$, em que $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} W$ com α, β, γ morfismos;
- e) Existe um morfismo identidade $id = id_X : X \rightarrow X$, para cada objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$, tal que $\alpha \circ id_X = \alpha$ e $id_Y \circ \alpha = \alpha$ em que $\alpha : X \rightarrow Y$ é morfismo.

Observação 1.2. O morfismo identidade do axioma acima é único.

Demonstração. Suponha que existam dois: $id_X^1 : X \rightarrow X$ e $id_X^2 : X \rightarrow X$.

Logo $id_X^1 = id_X^1 \circ id_X^2 = id_X^2$ e segue o resultado. $\square$

Definição 1.8. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor T de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, é definido por:

- a) Uma aplicação $T : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{D})$, e
- b) Aplicações $T = T_{XY} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(TX, TY)$, para cada $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$, que preservam composições e identidades, isto é, tal que
- c) $T(\beta \circ \alpha) = (T\beta) \circ (T\alpha)$, para todos morfismos $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$ em $\mathcal{C}$,
- d) $T(id_X) = id_{TX}$, para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$.

Definição 1.9. Um complexo de cadeias $K = (K_n, \partial_n)$ é definido por um par de sequências: uma sequência de grupos abelianos $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e uma sequência de homomorfismos $\partial_n : K_n \rightarrow K_{n-1}$, tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \rightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \rightarrow \cdots$$

Nosso objetivo agora é, construir um funtor, chamado complexo singular, que leva espaço topológicos em complexos de cadeia.

Definição 1.10. *Seja X um espaço topológico. Um q -simplexo singular de X é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$ em que $q \geq 0$.*

Consideremos o conjunto de todos os q -simplexos singulares; este conjunto gera um grupo abeliano livre denotado por $S_q X$, cujos elementos $\sigma_j \in S_q X$ são denominados q -cadeias singulares de X .

Pela definição de grupo livre, todo $\sigma \in S_q X$ possui representação única como combinação linear finita de q -simplexos singulares σ_j , $\sigma = \sum_j c_j \sigma_j$, com coeficientes inteiros c_j .

Observação 1.3. A operação, em $S_q(X)$, do grupo de todos os q -simplexos singulares de X é dada por: $\psi, \gamma \in S_q X$ logo $\psi = \sum_j d_j \sigma_j$ e $\gamma = \sum_j c_j \sigma_j$. Assim definimos a operação $\psi + \gamma = \sum_j (d_j + c_j) \sigma_j$.

Vamos definir um homomorfismo $\partial_q : S_q X \longrightarrow S_{q-1} X$, $\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ \varepsilon_{q-1}^i)$, em que $\varepsilon_{q-1}^i : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q$ denota o operador da $(q-1)$ -ésima face de Δ_q .

A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada na página 31 do livro do Dold [2].

Proposição 1.1. *A sequência $\cdots \longrightarrow S_{q+1} X \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q X \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1} X \longrightarrow \cdots$ é um complexo de cadeias, isto é, $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Essa sequência é conhecida como complexo singular de X , e é denotada por SX .*

Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua e $\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$ é um simplexo singular de X , então a composta $f \circ \sigma : \Delta_q \longrightarrow Y$ é um simplexo singular de Y e obtemos um homomorfismo $S_q f : S_q X \longrightarrow S_q Y$ dado por $S_q f(\sigma) = f \circ \sigma$.

Proposição 1.2. $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$ e $S(id_X) = id_{SX}$.

Demonstração. De fato, para qualquer $q \in \mathbb{Z}$ segue que $S_q(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = S_q(g)(f \circ \sigma) = S_q(g)(S_q(f)(\sigma)) = [S_q(g) \circ S_q(f)](\sigma)$, e também, para qualquer $q \in \mathbb{Z}$ segue que $S_q(id_X)(\sigma) = id_X \circ \sigma = \sigma = id_{S_q X}(\sigma)$. $\square$

Vamos generalizar o processo para pares de espaços topológicos (X, A) .

Definição 1.11. *Um par de espaços topológicos (X, A) consiste de um espaço topológico X e um subespaço topológico $A \subset X$.*

Definição 1.12. Se (X, A) e (Y, B) são pares de espaços topológicos, denominamos aplicação de pares, uma aplicação $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, tal que $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e $f(A) \subset B$.

Se $i : A \longrightarrow X$ é a aplicação inclusão então $Si : SA \longrightarrow SX$ é um monomorfismo, pois $Ker(Si) = \{0\}$, e por isso SA pode ser tratado como um subcomplexo de SX . O quociente $S(X, A) = \frac{SX}{SA}$ é chamado complexo singular relativo de (X, A) . Se j denota a passagem para o quociente então

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{S_i} SX \xrightarrow{S_j} S(X, A) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta que se fatora em todas as dimensões, $S_q X = S_q A \oplus S_q(X, A)$, $\forall q$. De fato, a base $\{\sigma : \Delta_q \longrightarrow X\}$ de $S_q X$ se divide em duas partes: A dos simplexes em A , e dos simplexes não em A ; que, respectivamente, formam bases para $S_q A$ e $S_q(X, A)$.

Note que $S(X, \emptyset) = SX$.

Uma aplicação de pares $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ induz um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} O & \longrightarrow & SA & \xrightarrow{S_i} & SX & \xrightarrow{S_j} & S(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow S_{f|A} & & \downarrow S_f & & \downarrow \overline{Sf} \\ O & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & SY & \longrightarrow & S(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

de aplicações de cadeias com linhas exatas. A aplicação $\overline{Sf}$ é obtida de Sf passando ao quociente.

A Proposição 1.2 é válida para aplicações de pares de espaços topológicos.

1.3.3 A Homologia Singular

Definição 1.13. Os grupos de homologia singular de um espaço topológico X (respectivamente um par de espaços topológicos (X, A)) são, por definição, os grupos de homologia do complexo singular SX (respectivamente $S(X, A)$).

Escrevemos $HX = HSX$ (respectivamente $H(X, A) = HS(X, A)$).

Os grupos $H(X, A)$ também são conhecidos como grupos de homologia relativos de X módulo A , em contraste com os grupos absolutos HX .

Dizemos que $z \in SX$ é um ciclo módulo A se $\partial(z) \in SA$, e que z é um bordo módulo A , se $z = \partial x + y$ para algum $x \in SX$ e $y \in SA$.

O grupo de homologia relativa $H_q(X, A)$ é então isomorfo ao grupo dos q -ciclos módulo A quocientado pelo grupo dos q -bordos módulo A .

$$H_q(X, A) \cong \frac{Z_q(X, A)}{B_q(X, A)}$$

Se $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ é uma aplicação de pares, então $Sf : S(X, A) \longrightarrow S(Y, B)$ induz homomorfismos $Hf = f_* : H(X, A) \longrightarrow H(Y, B)$; do seguinte modo: $S(f) : S(X, A) \longrightarrow S(Y, B)$ implica $H(S(f)) : H(S(X, A)) \longrightarrow H(S(Y, B))$ e simplificando a notação de $H(S(f))$ por Hf , de $H(S(X, A))$ por $H(X, A)$ e de $H(S(Y, B))$ por $H(Y, B)$ segue o resultado. Isto torna a homologia singular em um funtor de pares de espaços topológicos para grupos graduados.

O homomorfismo de conexão $\delta_{q+1} : H_{q+1}(X, A) \longrightarrow H_q(A)$ da sequência $0 \longrightarrow SA \longrightarrow SX \longrightarrow S(X, A) \longrightarrow 0$, dado por $\delta_{q+1}(c + B_{q+1}(X, A)) = \delta_{q+1}(c) + B_q(A)$ é chamado de homomorfismo de conexão do par (X, A) e a sequência exata

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(A) \xrightarrow{i_{*q+1}} H_{q+1}(X) \xrightarrow{j_{*q+1}} H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(A) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(X) \longrightarrow \cdots$$

é chamada sequência de homologia do par (X, A) .

Se $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ é uma aplicação de pares, então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{q+1}(A) & \longrightarrow & H_{q+1}(X) & \longrightarrow & H_{q+1}(X, A) & \longrightarrow & H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) \\ (f|A)_{*q+1} \downarrow & & f_{*q+1} \downarrow & & f_{*q+1} \downarrow & & (f|A)_{*q} \downarrow & & \downarrow f_{*q} \\ H_{q+1}(B) & \longrightarrow & H_{q+1}(Y) & \longrightarrow & H_{q+1}(Y, B) & \longrightarrow & H_q(B) & \longrightarrow & H_q(Y) \end{array}$$

é comutativo e com linhas exatas. Para maiores detalhes vide Ruy [3] (Dissertação).

Denotamos $H_q(X, A)$ o q -ésimo grupo de homologia de X módulo A . Se $A = \emptyset$, denotamos simplesmente $H_q(X)$.

Observação 1.4. No caso em que $A = B = \emptyset$, se $f : X \longrightarrow Y$ é aplicação contínua, então $Sf : S(X) \longrightarrow S(Y)$ induz homomorfismos $Hf = f_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(Y), \forall q \geq 0$.

Observação 1.5. Se P é um ponto, temos que $\begin{cases} H_0(P) = \mathbb{Z} \\ H_i(P) = 0, i \neq 0 \end{cases}$

Observação 1.6. Para cada espaço topológico X a aplicação constante $c : X \longrightarrow P$ induz um homomorfismo $c_* : H_*(X) \longrightarrow H_*(P)$, que é conhecido como aumentação. Denotamos $\tilde{H}_q(X) = \ker(c_q : H_q(X) \longrightarrow H_q(P))$ e o nomearemos de grupo de homologia reduzida do espaço topológico X .

Observação 1.7. Se um espaço topológico X possui o mesmo tipo de homotopia de um ponto, então seu grupo de homologia é isomorfo ao grupo de homologia do ponto.

Observação 1.8. Se $f \simeq g$, então $f_* = g_*$ (Vide Ruy [3] [dissertação], página 108).

Lema 1.3. $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$, para $q \neq 0$ e $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para $q \neq 0$, temos pela Observação 1.5 que $H_q(P) = 0$. Assim $c_q : H_q(X) \longrightarrow 0$ e portanto $\tilde{H}_q(X) = \ker(c_q) = H_q(X)$. A segunda parte segue do fato de que a sequência exata $0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{c_0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$, esplita porque $\mathbb{Z}$ é livre. $\square$

Definição 1.14. Se (X, A) é um par de espaços topológicos, dizemos que A é um retrato de X , se existe uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = id_A$, onde $i : A \hookrightarrow X$ é a aplicação inclusão. A aplicação r é chamada de retração de X em A .

Exemplo 1.2. Seja X um espaço topológico. Cada ponto P de X é um retrato de X .

De fato, considere a aplicação $r : X \rightarrow \{P\}$ em que $r(x) = P$.

Temos que $r \circ i(P) = r(P) = P = id_{\{P\}}(P)$, em que $i : \{P\} \hookrightarrow X$ é a aplicação inclusão.

Portanto, segue o resultado.

Utilizaremos a notação $X \approx Y$ para indicar que existe um homeomorfismo entre X e Y .

Exemplo 1.3. Sejam A e B espaços topológicos e Q um ponto de B . Então $A \approx A \times \{Q\} \subset A \times B$ e $r : A \times B \rightarrow A \times \{Q\}$, dada por $r(a, b) = (a, Q)$ é uma retração de $A \times B$ em $A \times \{Q\}$.

De fato, o homeomorfismo $h : A \rightarrow A \times \{Q\}$ é dado por $h(a) = (a, Q)$.

Mostremos que $r : A \times B \rightarrow A \times \{Q\}$, dada por $(a, b) \mapsto (a, Q)$, é uma retração de $A \times B$ em $A \times \{Q\}$.

Considere $i : A \times \{Q\} \hookrightarrow A \times B$ a aplicação inclusão. Segue que $r \circ i(a, Q) = r(a, Q) = (a, Q) = id_{A \times \{Q\}}(a, Q)$.

Portanto, segue o resultado.

Definição 1.15. Se (X, A) é um par de espaços topológicos, então A é dito um retrato de vizinhança em X , se A tem uma vizinhança em X da qual é retrato de X .

Observação 1.9. Todo retrato de X é um retrato de vizinhança de X ; mas a recíproca é falsa. Seja $X = [0, 1]$ intervalo unitário e $A = \{0, 1\}$; então A é um retrato de vizinhança em X que não é retrato de X .

De fato, primeiramente mostremos que A é retrato de vizinhança de $X = [0, 1]$.

Tome $V = [0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1]$ vizinhança aberta de X e considere $r : V \xrightarrow{ab} [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$, dada por $r(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \epsilon) \\ 1, & x \in (1 - \epsilon, 1] \end{cases}$. Desse modo segue que $r \circ i(0) = 0$ e $r \circ i(1) = 1$, implicando $r \circ i = id_{\{0, 1\}}$.

Agora mostremos que A não é retrato de $X = [0, 1]$.

Suponha que exista $r : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ contínua tal que $r \circ i = id_{\{0, 1\}}$. Absurdo! Pois $[0, 1]$ é conexo e $\{0, 1\}$ não.

A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada na página 56 do livro do Dold [2].

Proposição 1.3. (a) $\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \mathbb{Z}, & k = n \end{cases}$

$$(b) \ H_k(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \mathbb{Z}, & k = n \end{cases}$$

$$(c) \ H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - P) = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \mathbb{Z}, & k = n \end{cases} \text{ para qualquer } P \in \mathbb{R}^n.$$

Como consequência da proposição, segue:

Corolário 1.1. *Esferas de dimensões diferentes não são homeomorfas. Espaços euclidianos de dimensões diferentes não são homeomorfos.*

Demonstração. Sejam S^n e S^m esferas com $m \neq n$. Temos $\tilde{H}_m(S^m) = \mathbb{Z}$ e $\tilde{H}_m(S^n) = 0$. Dessa forma $\tilde{H}_m(S^m) \neq \tilde{H}_m(S^n)$ o que implica que S^m e S^n não são homeomorfas, pois se S^m e S^n fossem homeomorfas os grupos de homologia reduzida seriam isomorfos.

Agora, suponha que $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja um homeomorfismo. Logo h induz um homeomorfismo de pares $h : (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{h(0)\})$. Dessa forma $\mathbb{Z} = H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\}) = H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{h(0)\})$ implicando $m = n$.

Logo, se $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ são homeomorfos temos que $m = n$ e segue o resultado. $\square$

Corolário 1.2. S^n não é retrato de B^{n+1} .

Demonstração. Considere $i : S^n \hookrightarrow B^{n+1}$ a aplicação inclusão.

Se $r : B^{n+1} \rightarrow S^n$ fosse uma retração de B^{n+1} em S^n teríamos que $r \circ i = id_{S^n}$, donde seguiria que a composta $\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(B^{n+1}) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_n(S^n)$ seria a identidade de $\tilde{H}_n(S^n)$. Mas isto é impossível pois $\tilde{H}_n(S^n) \neq 0$ e $\tilde{H}_n(B^{n+1}) = 0$. $\square$

Para os próximos capítulos, enunciaremos o teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada na página 275 do livro do Hatcher [6].

Teorema 1.1 (TEOREMA DE KUNNETH). *Sendo (X, A) e (Y, B) pares de espaços topológicos, vale:*

$$H_r((X, A) \times (Y, B)) \cong \sum_{i+j=r} [H_i(X, A) \otimes H_j(Y, B)] \oplus \sum_{i+j=r-1} \text{Tor}(H_i(X, A), H_j(Y, B))$$

em que $\sum$ é a soma direta e $(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$.

1.4 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Considere X um espaço topológico qualquer e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Seria natural nos perguntarmos se existem pontos $x \in X$ de modo que $f(x) = x$.

Esses pontos, quando existem, são conhecidos como pontos fixos de f e o conjunto de todos os pontos fixos de uma aplicação f é denotado por $\text{Fix}(f)$. Quando um espaço topológico X é tal que $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$ para toda aplicação f dizemos que X tem a propriedade do ponto fixo.

Por uma questão de motivação, estudaremos primeiramente um exemplo bem simples:

Exemplo 1.4. $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ tem a propriedade do ponto fixo.

Sejam $X = [-1, 1]$ intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua qualquer.

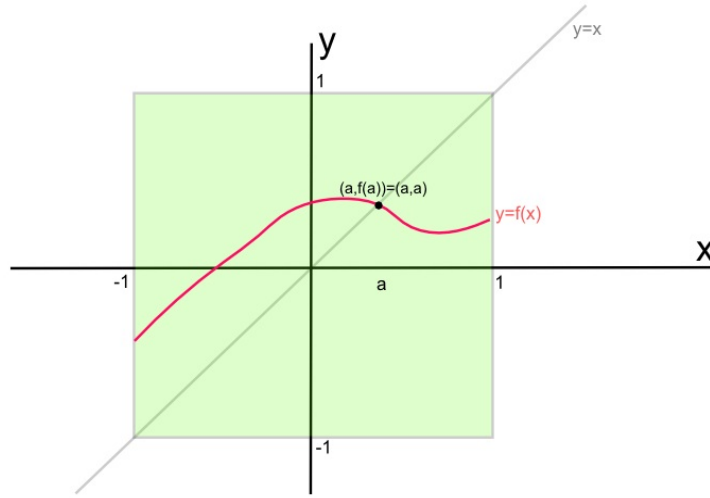


Figura 1.2: Teorema do Ponto Fixo de Brouwer aplicado no intervalo $[-1, 1]$.

Se $f(-1) = -1$ ou $f(1) = 1$, então f tem um ponto fixo. Vamos supor, então, que os extremos do intervalo não sejam pontos fixos. Então $f(-1) > -1$ e $f(1) < 1$.

Agora considere a aplicação $g : X \rightarrow X$ definida por $g(x) = f(x) - x$, para todo $x \in X$. Temos que $g(-1) > 0$ e $g(1) < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe $a \in X$ de modo que $g(a) = 0$; ou seja, $f(a) - a = 0$ e assim $f(a) = a$.

Provamos, desse modo, que f tem um ponto fixo no interior do intervalo X .

Como a aplicação f era qualquer, acabamos de demonstrar que $X = [-1, 1]$ tem a propriedade do ponto fixo.

Na verdade, o intervalo $[-1, 1]$ é apenas um caso particular de $X = B^n$. Em 1912, Luitzen Egbertus Jan Brouwer demonstrou que B^n tem a propriedade do ponto fixo.

Lema 1.4. *Sejam $f : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ uma aplicação contínua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in B^{n+1}$ e $\overrightarrow{g} : B^{n+1} \rightarrow S^n$ dada por $\overrightarrow{g}(x) = \overrightarrow{f(x)x} \cap S^n = P_x$, para todo $x \in B^{n+1}$, em que $\overrightarrow{f(x)x}$ é a semirreta que começa em $f(x)$ e passa por x . Então $\overrightarrow{g}$ é contínua e, se $x \in S^n$, $\overrightarrow{g}(x) = x$.*

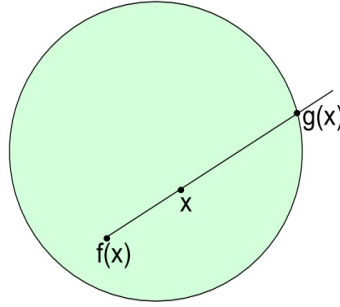


Figura 1.3: Semirreta $\overrightarrow{f(x)x}$, que começa em $f(x)$ e passa por x , interseccionando a esfera S^n em $g(x)$.

Demonstração. Notemos, primeiramente, que P_x é o ponto de intersecção de S^n com a semirreta $\overrightarrow{f(x)x} = \{f(x) + t(x - f(x)), t \geq 0\}$. Como $P_x \in S^n$, segue que $\|P_x\| = \|f(x) + t(x - f(x))\| = 1$.

Tome $y = x - f(x) \neq 0$, para facilitar a notação.

Temos que $\|f(x) + ty\|^2 = \langle f(x) + ty, f(x) + ty \rangle = 1$, ou seja, $\|f(x)\|^2 + 2t \langle f(x), y \rangle + t^2\|y\|^2 = 1$. Rearranjando os termos da expressão anterior, obtemos uma equação do segundo grau em t :

$$\|y\|^2 t^2 + 2 \langle f(x), y \rangle t + (\|f(x)\|^2 - 1) = 0 \quad (1.1)$$

em que $\Delta = 4 \langle f(x), y \rangle^2 - 4\|y\|^2(\|f(x)\|^2 - 1) = 4(\langle f(x), y \rangle^2 - \|y\|^2(\|f(x)\|^2 - 1)) = 4(\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2))$.

Como $f(x) \in B^{n+1}$, temos $1 - \|f(x)\|^2 \geq 0$ e assim $\Delta \geq 0$.

Desse modo, a equação (1.1) possui soluções:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-2 \langle f(x), y \rangle \pm \sqrt{4 \langle f(x), y \rangle^2 + 4\|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{2\|y\|^2} = \\ &= \frac{-\langle f(x), y \rangle \pm \sqrt{\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|y\|^2}. \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$, temos que:

$$t = \frac{-\langle f(x), y \rangle + \sqrt{\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|y\|^2} \quad (1.2)$$

Assim, para cada $x \in B^{n+1}$, temos $g(x) = P_x = f(x) + ty$ em que $y = x - f(x) \neq 0$ e t é dado por (1.2).

Portanto, g está bem definida e é contínua.

Suponha, agora, que $x \in S^n$. Então:

$$\begin{aligned} \text{i) } \langle f(x), y \rangle &= \langle y, f(x) \rangle = \langle x - f(x), f(x) \rangle = \langle x, f(x) \rangle - \langle f(x), f(x) \rangle = \\ &= \langle x, f(x) \rangle - \|f(x)\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \|y\|^2 &= \|x - f(x)\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x, f(x) \rangle + \|f(x)\|^2 = \\ &= 1 - 2 \langle x, f(x) \rangle + \|f(x)\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & \langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2) = \langle f(x), x \rangle^2 - 2 \langle f(x), x \rangle \|f(x)\|^2 + \\ & \|f(x)\|^4 + 1 - 2 \langle x, f(x) \rangle + \|f(x)\|^2 - \|f(x)\|^2 + 2 \langle x, f(x) \rangle \|f(x)\|^2 - \\ & \|f(x)\|^4 = \langle f(x), x \rangle^2 - 2 \langle x, f(x) \rangle + 1 = (\langle f(x), x \rangle - 1)^2. \end{aligned}$$

Como $\|x\| = 1$, pois $x \in S^n$, temos que $\langle f(x), x \rangle = \|f(x)\| \cos \theta$, em que θ é o ângulo entre $f(x)$ e x . Como $\|f(x)\| \leq 1$, pois $f(x) \in B^{n+1}$, segue que $\langle f(x), x \rangle \leq 1$ e portanto $\langle f(x), x \rangle - 1 \leq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} t &= \frac{-\langle f(x), y \rangle + \sqrt{(\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2))}}{\|y\|^2} \\ &= \frac{\|f(x)\|^2 - \langle f(x), x \rangle + \sqrt{(\langle f(x), x \rangle - 1)^2}}{\|y\|^2} \\ &= \frac{\|f(x)\|^2 - \langle f(x), x \rangle + |\langle f(x), x \rangle - 1|}{\|y\|^2} \\ &= \frac{\|f(x)\|^2 - \langle f(x), x \rangle + 1 - \langle f(x), x \rangle}{\|y\|^2} \\ &= \frac{\|f(x)\|^2 - 2 \langle f(x), x \rangle + 1}{\|y\|^2} \\ &= \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $g(x) = P_x = f(x) + 1 \cdot y = f(x) + x - f(x) = x$ para todo $x \in S^n$. □

Teorema 1.2 (TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER). *Se $f : B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ é uma aplicação contínua, então f tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Supondo que f não tenha ponto fixo, teríamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in B^{n+1}$. Neste caso, estaríamos exatamente nas mesmas hipóteses do lema anterior.

Desse modo, poderíamos definir $g : B^{n+1} \rightarrow S^n$ nas mesmas condições do lema e teríamos g contínua e $g(x) = x$ para todo $x \in S^n$. Porém, isso contraria o Corolário 1.2, pois $g \circ i = id|_{S^n}$ e S^n seria retrato de B^{n+1} .

Concluimos assim, que f possui, pelo menos um, ponto fixo. □

Vamos agora observar agora algumas propriedades do ponto fixo:

1.4.1 Propriedades do Ponto Fixo

Proposição 1.4. *Se um espaço topológico X possui a propriedade do ponto fixo e $r : X \rightarrow A$ é uma retração de X em A , então A possui a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Temos por hipótese que para qualquer $f : X \rightarrow X$ contínua existe $x_0 \in X$ de modo que $f(x_0) = x_0$ e que $r : X \rightarrow A$ é uma retração, ou seja, se $i : A \hookrightarrow X$ denota a inclusão então $r \circ i = id_A$.

Seja $g : A \longrightarrow A$ uma aplicação contínua qualquer. Então a composta $i \circ g \circ r : X \longrightarrow X$ é contínua. Logo, existe $y_0 \in X$ tal que $i \circ g \circ r(y_0) = y_0$.

Então $r \circ i \circ g \circ r(y_0) = r(y_0)$ e, como $r \circ i = id_A$, segue que $g \circ r(y_0) = r(y_0)$.

Logo, $g(r(y_0)) = r(y_0)$ e portanto g possui ponto fixo. $\square$

Teorema 1.3. *A propriedade do ponto fixo é um invariante topológico.*

Demonstração. Sejam X e Y espaços topológicos homeomorfos com X tendo a propriedade do ponto fixo.

Considere $h : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo e $f : Y \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua.

Tome $g = h^{-1} \circ f \circ h : X \longrightarrow X$. Como X possui a propriedade do ponto fixo, existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = x_0$.

Note agora que $f(h(x_0)) = f \circ h(x_0) = h \circ g(x_0) = h(g(x_0)) = h(x_0)$. Portanto $h(x_0)$ é ponto fixo de f e segue o resultado. $\square$

Exemplo 1.5. Se um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo e $A \subset X$, o espaço quociente $\frac{X}{A}$ pode não ter a propriedade do ponto fixo.

Considere $X = B^2$ e $A = S^1$. Assim $\frac{X}{A} = \frac{B^2}{S^1} = S^2$.

Para mostrar que S^2 não possui a propriedade do ponto fixo, basta considerar a aplicação antípoda.

Antes de passarmos para o próximo capítulo, enunciaremos a proposição abaixo. Sua demonstração pode ser encontrada na página 34 do livro do Dold [2].

Proposição 1.5. *Se (X, A) é um par de espaços topológicos e $A \neq \emptyset$, então temos a sequência exata*

$$\cdots \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_{q+1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{q+1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

Essa sequência é chamada "sequência de homologia reduzida do par (X, A) ".

2 Grau de Brouwer

2.1 O Grau de Brouwer

Recordemos que, sendo $h : G \longrightarrow G$ um endomorfismo sobre um grupo G cíclico e infinito, então existe um único $d \in \mathbb{Z}$ tal que $h(x) = d.x$, para todo $x \in G$.

A ideia é aplicar este resultado a grupos de homologia e extrair daí a definição de grau de Brouwer (grau de uma aplicação).

Definição 2.1. Se $f : S^n \longrightarrow S^n$ (respectivamente $f : (B^{n+1}, S^n) \longrightarrow (B^{n+1}, S^n)$) é uma aplicação contínua qualquer, então o endomorfismo induzido $f_* : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_n}}(S^n) \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_n}}(S^n)$, (respectivamente $f_* : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_{n+1}}}(B^{n+1}, S^n) \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_{n+1}}}(B^{n+1}, S^n)$), é dado por $f_*(x) = \deg(f).x$, em que $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ e é único. Este inteiro $\deg(f)$ é denominado grau de f ou grau de Brouwer.

Para determinar $\deg(f)$, devemos tomar um gerador $a \in \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{H_n}}(S^n)$. Assim $f_*(a) = \deg(f).a$. Se o gerador tomado for $-a$, temos: $f_*(-a) = -f_*(a) = -\deg(f).a = \deg(f).(-a)$.

Como podemos notar, $\deg(f)$ não depende da escolha do gerador.

Vamos apresentar algumas propriedades iniciais do grau de Brouwer:

2.1.1 Primeiras Propriedades do Grau

Proposição 2.1. São verdadeiras:

- (a) $\deg(id) = +1$
- (b) $\deg(f \circ g) = \deg(f).\deg(g)$
- (c) Se $f \simeq g$, então $\deg(f) = \deg(g)$
- (d) Se f é constante, então $\deg(f) = 0$
- (e) Se f é uma equivalência homotópica, então $\deg(f) = \pm 1$

(f) Se $f : (B^{n+1}, S^n) \longrightarrow (B^{n+1}, S^n)$, então $\deg(f) = \deg(f|_{S^n})$

Demonstração. (a) $id_*(a) = a = 1.a \Rightarrow \deg(id) = +1$

(b) $(f \circ g)_*(a) = f_* \circ g_*(a) = f_*(g_*(a)) = \deg(g).f_*(a) = \deg(g).\deg(f).a = f_*(\deg(g).a) = \deg(f).[\deg(g).a] = \deg(f).\deg(g).a \Rightarrow \deg(f \circ g) = \deg(f).\deg(g)$

(c) Se $f \simeq g$, pela Observação 1.8, temos $f_* = g_*$ e portanto $\deg(f) = \deg(g)$

(d) $f(x) = k, \forall x \in S^n$

Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ & \searrow g & \nearrow i \\ & \{k\} & \end{array}$$

em que $g : S^n \longrightarrow \{k\}, g(x) = k, \forall x \in S^n$ e $i : \{k\} \hookrightarrow S^n$ é a inclusão. Assim, induzindo homomorfismos, obtemos:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(S^n) \\ & \searrow g_* & \nearrow i_* \\ & \tilde{H}_n(\{k\}) & \end{array}$$

Segue que $f_*(a) = i_* \circ g_*(a) = i_*(g_*(a)) = i_*(0) = 0 = 0.a$ e portanto $\deg(f) = 0$.

(e) Como f é equivalência homotópica, existe $g : S^n \longrightarrow S^n$ tal que $f \circ g \simeq g \circ f \simeq Id_{S^n}$. Induzindo homomorfismos temos $f_* \circ g_* = Id_{\tilde{H}(S^n)} = g_* \circ f_*$. Por (a) e (b), $\deg(f).\deg(g) = 1 = \deg(g).\deg(f)$. Como $\deg(f), \deg(g) \in \mathbb{Z}$ então $\deg(f) = +1 = \deg(g)$ ou $\deg(f) = -1 = \deg(g)$.

(f) Da proposição 1.5, montamos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 = \tilde{H}_{n+1}(B^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(B^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(B^{n+1}, S^n) \\ & & \downarrow \delta_* \cong & & \downarrow \cong \delta_* \\ & & \mathbb{Z} & & \\ & & \downarrow i_* & & \\ & & \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{(f|_{S^n})_*} & \tilde{H}_n(S^n) \\ & & \downarrow i_* & & \\ & & \tilde{H}_n(B^{n+1}) & = & 0 \end{array}$$

Temos $(f|_{S^n})_*(a) = \delta_* \circ f_* \circ \delta_*^{-1}(a)$.

Note que existe um único b gerador de $H_{n+1}(B^{n+1}, S^n) = \mathbb{Z}$ tal que $\delta_*(b) = a$. Assim,

$(f|_{S^n})(a) = \delta_* \circ f_* \circ \delta_*^{-1}(a) = \delta_*(f_*(b)) = \delta_*(deg(f).b) = deg(f).\delta_*(b) = deg(f).a$
em que a é gerador de $\tilde{H}_n(S^n)$.

Segue o resultado. □

Um resultado mais sofisticado, devido a Hopf, é a recíproca da propriedade (c): Se $deg(f) = deg(g)$ então $f \simeq g$. A demonstração pode ser encontrada na página 398 do livro do Spanier [4].

2.2 Um Teorema Relevante

Nosso intuito agora será demonstrar que para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ existe uma aplicação $f : S^n \rightarrow S^n$ de modo que $deg(f) = k$.

O que segue é uma leve variação da noção de grau.

Definição 2.2. Se $\mu : S^n \times S^n \rightarrow S^n$, $n > 0$, é uma aplicação então o homomorfismo induzido $\mu_* : H_n(S^n) \oplus H_n(S^n) \xrightarrow{\psi} H_n(S^n \times S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ possui a forma $\mu_*(x_1, x_2) = d_1x_1 + d_2x_2$ em que d_1 e d_2 são inteiros unicamente determinados. O par (d_1, d_2) é denominado bigrau de μ . Suas propriedades são análogas as propriedades de grau exibidas na Proposição 2.1.

Observação 2.1. O isomorfismo ψ , da Definição 2.2, é consequência direta do Teorema 1.1, de Kunneth.

Proposição 2.2. Se $f_1, f_2 : S^n \rightarrow S^n$ são aplicações, então o grau da composição $S^n \xrightarrow{(f_1, f_2)} S^n \times S^n \xrightarrow{\mu} S^n$ é dado por $deg[\mu(f_1, f_2)] = d_1.deg(f_1) + d_2.deg(f_2)$.

Demonstração. Sejam $p_1, p_2 : S^n \times S^n \rightarrow S^n$ duas projeções. Temos $p_i(f_1, f_2) = f_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Então $(p_{1*}, p_{2*})(f_1, f_2)_*(x) = (f_{1*}(x), f_{2*}(x)) = (deg(f_1).x, deg(f_2).x)$, onde $x \in H_n(S^n)$.

Desse modo, $\mu_*(f_1, f_2)_*(x) = [d_1.deg(f_1) + d_2.deg(f_2)](x)$ □

Intuitivamente, nós imaginamos μ como uma estrutura multiplicativa em S^n , tal como a multiplicação dos números complexos se $n = 1$ ou quaternions se $n = 3$; nesses casos $\mu(z_1, z_2) = z_1.z_2$ possui bigrau $(1, 1)$, pois $\mu|_{S^1 \times \{1\}}$ e $\mu|_{\{1\} \times S^1}$ são identidade e portanto possuem grau 1. Assim $d_1 = 1$ e $d_2 = 1$. Portanto temos:

Corolário 2.1. Se $f_1, f_2 : S^n \rightarrow S^n$ são aplicações, então $deg(f_1.f_2) = deg(f_1) + deg(f_2)$.

Lema 2.1. Seja $k \in \mathbb{Z}$ um inteiro arbitrário. Então a aplicação $p_k : S^1 \rightarrow S^1$ (respectivamente $p_k : S^3 \rightarrow S^3$) dada por $p_k(z) = z^k$ potenciação dos números complexos (respectivamente quaterniônicos) possui grau k .

Demonstração. Faremos por indução sobre k .

- Para $k = 1$, $p_1 : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(z) = z^1 = z$ possui grau 1, pois é a identidade.
- Suponha válido para $k - 1$, ou seja, $p_{k-1} : S^1 \rightarrow S^1$ em que $p_{k-1}(z) = z^{k-1}$ possui grau $k - 1$.
- Mostremos para k :

$$\deg(p_k) = \deg(p_{k-1}) + \deg(id) = (k - 1) + 1 = k.$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

2.2.1 A Suspensão de um Espaço Topológico X

Definição 2.3. Seja X um espaço topológico e $I = [0, 1]$. A suspensão ΣX é o espaço obtido de $X \times I$ pela identificação de $X \times \{0\}$ a um ponto e $X \times \{1\}$ a um outro ponto.

Exemplo 2.1. Seja $X = S^n$, notemos que $\Sigma S^n = S^{n+1}$.

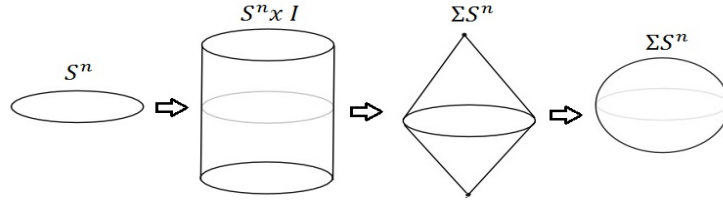


Figura 2.1: A Suspensão de S^n .

Podemos dizer que ΣS^n é um cone duplo sobre S^n : Uma união de duas cópias do cone $CS^n = \frac{S^n \times I}{S^n \times \{1\}}$, com base $S^n = S^n \times \{0\}$.

Assim, $\frac{CS^n}{S^n} = \Sigma S^n = S^{n+1}$.

Observação 2.2. Note que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ induz uma aplicação $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ entre as suspensões.

Proposição 2.3. Seja $f : S^n \rightarrow S^n$ contínua e $\Sigma f : \Sigma S^n \rightarrow \Sigma S^n$ sua induzida. Então $\deg(\Sigma f) = \deg(f)$.

Demonstração. Temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & S^n & & S^{n+1} & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \Sigma S^n & & \Sigma S^n & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 S^n \times \{0\} & \longrightarrow & S^n \times I & \xrightarrow{\pi_1} & CS^n & \xrightarrow{\pi_2} & \frac{CS^n}{S^n} \\
 \uparrow f & & \downarrow id \times f & & \downarrow & & \downarrow \Sigma f \\
 S^n & & S^n & & CS^n & & \frac{CS^n}{S^n} \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 S^n \times \{0\} & \longrightarrow & S^n \times I & \xrightarrow{\pi_1} & CS^n & \xrightarrow{\pi_2} & \frac{CS^n}{S^n}
 \end{array}$$

Temos $\Sigma f : \frac{CS^n}{S^n} \longrightarrow \frac{CS^n}{S^n}$.

Considere o par (CS^n, S^n) . Da Proposição 1.5 segue a seguinte sequência exata:

$$\begin{aligned}
 \dots \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_{n+1}(S^n) &\xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n+1}(CS^n) \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(CS^n, S^n) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_n(S^n) \\
 &\xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(CS^n) \xrightarrow{j_*} \dots
 \end{aligned}$$

Mas, note que $CS^n = B^{n+1}$ e assim $\tilde{H}_{n+1}(CS^n) = 0$ e também $\tilde{H}_n(CS^n) = 0$. Por fim, note também que $H_{n+1}(CS^n, S^n) = H_{n+1}(\Sigma S^n) = \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1})$.

Logo, segue:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) \xrightleftharpoons[\delta_*^{-1} = \sigma]{\delta_*} \tilde{H}_n(S^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Considere então o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) \\
 \uparrow f_* & & \uparrow (\Sigma f)_* \\
 \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1})
 \end{array}$$

que é comutativo devido a naturalidade de σ .

Existe um único $a \in \tilde{H}_n(S^n)$ de modo que se $\alpha \in \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1})$ tenhamos $\alpha = \sigma(a)$, pois σ é isomorfismo.

Alem disso, $(\Sigma f)_*(\alpha) = (\Sigma f)_*(\sigma(a)) = (\Sigma f)_* \circ \sigma(a) = \sigma \circ f_*(a) = \sigma(f_*(a)) = \sigma(deg(f).a) = deg(f). \sigma(a) = deg(f). \alpha$

O que implica $deg(\Sigma f) = deg(f)$. □

Teorema 2.1. Dado um inteiro $k \in \mathbb{Z}$, existe uma aplicação $f : S^n \longrightarrow S^n$ tal que $deg(f) = k$, $\forall n \geq 1$.

Demonstração. Faremos por indução sobre n .

- Para $n = 1$, $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(z) = z^k$ possui grau k .
- Suponha válido para n , ou seja, existe $f : S^n \rightarrow S^n$ tal que $\deg(f) = k$.
- Mostremos para $n + 1$:

Pela proposição anterior, temos $\Sigma f : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ e $\deg(\Sigma f) = \deg(f) = k$.

□

Temos assim que o Grau de Brouwer é um invariante algébrico completo para o estudo das classes de homotopia de aplicações de S^n em S^n .

2.3 A Aplicação Antípoda

A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada na página 63 do livro do Dold [2].

Proposição 2.4. *O grau de uma aplicação linear $f : (\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \rightarrow (\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ que permuta os vértices é igual ao sinal da permutação, isto é, $\deg(f) = \text{sign}(f|_{\{e^0, e^1, \dots, e^n\}})$. O grau de uma aplicação ortogonal $g : S^n \rightarrow S^n$ é igual a seu determinante, isto é, $\deg(g) = \det(g)$.*

Definição 2.4. *A aplicação $A : S^n \rightarrow S^n$ em que $A(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_{n+1})$ é chamada aplicação antípoda.*

Vamos encontrar o grau de Brouwer da aplicação A . A matriz da aplicação A , em relação à base canônica, é escrita como:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é o produto dos elementos da diagonal principal, pois a matriz é diagonal. Ou seja, $\det(A) = (-1)^{n+1}$. Desse modo, pela proposição 2.4, temos que $\deg(A) = (-1)^{n+1}$.

Definição 2.5. *A aplicação $r : S^n \rightarrow S^n$ em que $r(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$ é chamada aplicação reflexão.*

Analogamente ao que fizemos com a aplicação antípoda, podemos através do determinante da matriz da aplicação r , concluir que $\deg(r) = -1$.

Proposição 2.5. Se $f, g : S^n \rightarrow S^n$ são duas aplicações contínuas com $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in S^n$, então g é homotópica a $A \circ f$.

Demonstração. Podemos, para encontrar a homotopia, visualizar geometricamente o problema.

Assim, podemos considerar $f(x)$ e a sua antípoda $Af(x)$. Como $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in S^n$, a ideia é que o segmento em $\mathbb{R}^{n+1}$ que une $Af(x)$ e $g(x)$ não passa pela origem de S^n .

Projetando radialmente da origem sobre a esfera obtemos caminhos em S^n que unem $Af(x)$ e $g(x)$.

Um desses caminhos irá definir a nossa homotopia.

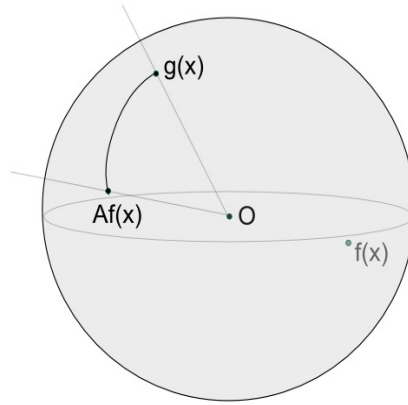


Figura 2.2: Caminho em S^n entre $Af(x)$ e $g(x)$ obtido através da projeção radial.

Definimos:

$$H(x, t) = \frac{(1-t)Af(x) + t.g(x)}{\|(1-t)Af(x) + t.g(x)\|}$$

Este é um caminho unindo $Af(x)$ a $g(x)$ e é a nossa homotopia.

Note que:

$$H(x, 0) = \frac{(1-0)Af(x) + 0.g(x)}{\|(1-0)Af(x) + 0.g(x)\|} = \frac{Af(x)}{\|Af(x)\|} = Af(x)$$

e

$$H(x, 1) = \frac{(1-1)Af(x) + 1.g(x)}{\|(1-1)Af(x) + 1.g(x)\|} = \frac{g(x)}{\|g(x)\|} = g(x)$$

□

Observação 2.3. Se $f = id$, a proposição acima nos diz que se $g : S^n \rightarrow S^n$ não possui pontos fixos, então g é homotópica a aplicação antípoda $A : S^n \rightarrow S^n$. Neste caso $\deg(g) = (-1)^{n+1}$.

Observação 2.4. Se $f = A$, a proposição acima nos diz que se g não possui antípodas, isto é, $g(x) \neq -x$ para todo $x \in S^n$, então g é homotópica a identidade. Neste caso $\deg(g) = +1$.

Corolário 2.2. *Toda aplicação $g : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ tem pelo menos um ponto fixo ou antípoda.*

Demonstração. Suponha que g não possua pontos fixos. Temos então $g(x) \neq x$ para todo $x \in S^{2n}$. Neste caso, segundo a observação 2.3, g é homotópica a aplicação antípoda $A : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$.

Agora suponha que g não possua antípoda. Temos então que $g(x) \neq -x$ para todo $x \in S^{2n}$. Neste caso, segundo a observação 2.4, g é homotópica a identidade $id : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$.

Por fim, suponha que ambas as condições não valham simultaneamente.

Assim, $\deg(A) = \deg(g) = \deg(id)$.

Contudo, $\deg(A) = (-1)^{2n+1} = -1$ e $\deg(id) = +1$, temos um absurdo. $\square$

Para demonstrarmos o próximo teorema, primeiro, precisamos definir campo vetorial sobre a esfera S^n .

Definição 2.6. *Um campo vetorial sobre a esfera S^n é uma aplicação contínua $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que x é ortogonal a $v(x)$, para todo $x \in S^n$.*

Definição 2.7. *Um campo de vetores $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é dito não-nulo se $v(x) \neq 0$ para todo $x \in S^n$.*

Teorema 2.2. *São verdadeiras as afirmações:*

(i) *Não existe nenhum campo de vetores não-nulo em S^{2n} .*

(ii) *Sempre existe campo de vetores não-nulo em S^{2n+1} .*

Demonstração. (i) Suponha que exista v um campo de vetores não-nulo em S^{2n} .

Note que $w(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ é um campo de vetores em S^{2n} de comprimento 1 em que $w : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ é uma aplicação contínua com $w(x)$ ortogonal a x para cada x . Esse fato contradiz o Corolário 2.2, pois w não possui ponto fixo e nem antípoda.

(ii) Basta definir em S^{2n+1} , por exemplo, o campo de vetores:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2n+1}, -x_{2n})$$

E assim:

$$\langle x, v(x) \rangle = \langle (x_1, x_2, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}), (x_2, -x_1, \dots, x_{2n+1}, -x_{2n}) \rangle = x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_1 + \dots + x_{2n} \cdot x_{2n+1} - x_{2n+1} \cdot x_{2n} = 0.$$

□

Lema 2.2. *Se $f : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ não possui ponto fixo, então f é homotópica a identidade.*

Demonstração. Se $f : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ não possui pontos fixos, então, pela Observação 2.3, $\deg(f) = (-1)^{(2n+1)+1} = (-1)^{2n+2} = +1$.

Pela recíproca da propriedade 2.1 c), por Hopf, segue que f é homotópica a identidade, pois $\deg(id) = +1$. □

Observação 2.5. Note que o lema acima prova que $A : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ (antípoda) é homotópica a identidade.

Lema 2.3. *Se $f : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$ é homotópica a constante, então f possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Se f é homotópica a constante, então $\deg(f) = 0$.

Suponha que f não possua pontos fixos, então, pelo lema anterior, f é homotópica a identidade e $\deg(f) = +1$. Absurdo!

Logo, f possui pelo menos um ponto fixo. □

3 Graus Locais

3.1 O Grau Local

Vamos, neste momento, estender a noção de grau vista no capítulo anterior.

Utilizaremos a noção de grau local para definir o conceito de índice de uma função em torno de um ponto fixo isolado ou, mais geralmente, em torno de um subconjunto compacto contendo o conjunto dos pontos fixos.

Para iniciarmos nossos estudos, vamos enunciar o Teorema da Excisão, cuja demonstração pode ser encontrada na página 54 do livro do Vick [5].

Teorema 3.1. *Se (X, A) é um par de espaços topológicos e $U \subset A$ com $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$ então a aplicação inclusão $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induz um isomorfismo $i_* = exc : H_*(X - U, A - U) \longrightarrow H_*(X, A)$.*

Isto é, tal conjunto U pode ser excedido sem alterar o grupo de homologia relativo de X módulo A .

Definição 3.1. *Considere a esfera $S^n, n > 0$. Sejam $V \subset S^n$ um subconjunto aberto e $f : V \longrightarrow S^n$ uma aplicação contínua. Fixemos um ponto $Q \in S^n$ tal que $f^{-1}(Q)$ seja um compacto. Considere a aplicação composta (de $H_n(S^n)$ em $H_n(S^n)$):*

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) \xrightarrow[\cong]{exc'} H_n(V, V - f^{-1}(Q)) \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n - Q) \xrightarrow[\cong]{\bar{j}_*^{-1}} H_n(S^n)$$

onde exc' é o isomorfismo induzido pela excisão exc e $\bar{j}_*$ é o isomorfismo dado pelo fato de que $S^n - P$, em que P é um ponto qualquer, é homotópica a um ponto. A composta é um homomorfismo da forma $x \longmapsto deg_Q(f).x$ em que $deg_Q(f)$ é um inteiro chamado de grau local de f em torno de Q .

Observação 3.1. $\bar{j}_*^{-1}$ é fornecido pela sequência exata

$$0 = \tilde{H}_n(S^n - Q) \longrightarrow H_n(S^n) \xleftarrow[\bar{j}_*]{\bar{j}_*^{-1}} H_n(S^n, S^n - Q) \longrightarrow H_{n-1}(S^n, S^n - Q) = 0$$

Observação 3.2. exc' pode ser exemplificada assim:

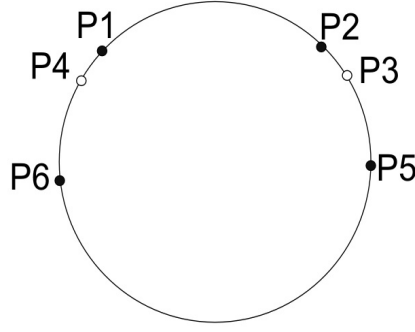


Figura 3.1: Figura de referência para a obtenção de exc' .

Tomando $X = S^n$ e $A = S^n - f^{-1}(Q)$
 $f^{-1}(Q) = \widehat{P1P2}$, $V = \widehat{P4P3}$ e $U = \widehat{P6P5}$, em que os arcos são tomados no sentido horário.

Pelo Teorema da Excisão, temos que

$$H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) \xrightarrow{exc} H_n(X - U, A - U) \xrightarrow{\varphi} H_n(V, V - f^{-1}(Q))$$

pois $(X - U, A - U) \simeq (V, V - f^{-1}(Q))$, onde $\simeq$ indica ter o mesmo tipo de homotopia.

Assim,

$$exc' = \varphi \circ exc$$

Observaremos, na proposição seguinte, que quando $V = S^n$ o grau em torno de qualquer ponto $Q \in S^n$ é o mesmo grau da f .

Proposição 3.1. *Sejam $f : S^n \rightarrow S^n$ e $Q \in S^n$, então segue que $deg(f) = deg_Q(f)$.*

Demonstração. Olhemos para o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) \\ f_* \downarrow & & f_* \downarrow \\ \tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) & \xleftarrow[\bar{j}_*]{\bar{j}_*^{-1}} & H_n(S^n, S^n - Q) \end{array}$$

Logo $\bar{j}_*^{-1} \circ f_* \circ j_* = f_*$. Note que $f_*(x) = \bar{j}_*^{-1} \circ f_* \circ j_*(x) = deg_Q(f) \cdot x$ e portanto $deg(f) = deg_Q(f)$.

□

3.1.1 Propriedades Iniciais do Grau Local

Proposição 3.2. *Sejam $V \subset S^n$ um aberto e $f : V \rightarrow S^n$ uma aplicação contínua. Então temos:*

- (i) $\deg_Q(f) = 0$, se $Q \notin \text{Im}(f)$;
- (ii) $\deg_Q(f) = +1$, para todo $Q \in V$ se f é a inclusão;
- (iii) $\deg_Q(f) = \pm 1$, para todo $Q \in f(V)$ se f é um homeomorfismo sobre um aberto $f(V)$ de S^n .

Demonstração. (i) Se $Q \notin \text{Im}(f)$ então $f^{-1}(Q) = \emptyset$ e

$$H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) = H_n(S^n, S^n - \emptyset) = H_n(S^n, S^n) = 0$$

Então $j_*^{-1} \circ f_* \circ \text{exc}' \circ j_*(x) = 0, \forall x \in H_n(S^n)$ e portanto segue o resultado.

(ii) Se f é a inclusão, note que

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^n - Q) \xrightarrow{\cong \text{exc}'} H_n(V, V - Q) \xrightarrow{\cong \text{exc}'^{-1}} H_n(S^n, S^n - Q) \xrightarrow{j_*^{-1}} H_n(S^n)$$

e portanto $j_*^{-1} \circ \text{exc}'^{-1} \circ \text{exc}' \circ j_* = \text{id}$ e $\deg_Q(f) = +1$.

(iii) Considere f como a composta $V \xrightarrow{g} f(V) \xrightarrow{i} S^n$ em que g é homeomorfismo.

Note que $f_* = (i \circ g)_* = i_* \circ g_*$ e também $f^{-1}(Q) = g^{-1} \circ i^{-1}(Q) = g^{-1}(Q)$.

Temos assim:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} = H_n(S^n) &\xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) \xrightarrow{\cong \text{exc}'} H_n(V, V - f^{-1}(Q)) \\ &\xrightarrow{\cong g_*} H_n(f(V), f(V) - Q) \xrightarrow{\cong \text{exc}'' = i_*} H_n(S^n, S^n - Q) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n) = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

em que exc'' é obtida tomando $X = S^n$, $A = S^n - Q$ e $U = S^n - f(V)$ no Teorema da Excisão; g_* é isomorfismo porque é induzida de homeomorfismo e j_* é isomorfismo porque f é homeomorfismo fazendo $f^{-1}(Q) = Q$ (caso contrário, f não seria injetiva).

□

A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada na página 36 do livro do Dold [2].

Proposição 3.3. *Seja X um espaço topológico arbitrário com componentes conexas por caminho X_λ , $\lambda \in \Lambda$; seja $A \subset X$ um subespaço e $A_\lambda = A \cap X_\lambda$. Então as aplicações inclusões $i_\lambda : (X_\lambda, A_\lambda) \hookrightarrow (X, A)$ induzem uma representação em soma direta $\{i_\lambda\} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda, A_\lambda) \cong S_n(X, A)$ e então $\{i_{\lambda*}\} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda, A_\lambda) \cong H_n(X, A)$.*

3.2 Quatro Propriedades Relevantes do Grau Local

Apresentaremos agora, quatro propriedades relevantes de grau local que serão aplicadas no estudo do índice que faremos no próximo capítulo.

Proposição 3.4 (LOCALIZAÇÃO). *Sejam $V \subset S^n$ um subconjunto aberto, $f : V \rightarrow S^n$ uma aplicação contínua e $Q \in S^n$. Se $f^{-1}(Q) \subset K \subset U \subset V$, em que K é um subconjunto compacto e U é uma vizinhança de K , então o grau local em torno de Q pode, também, ser dado pela composta*

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^n - K) \xrightarrow[\cong]{exc} H_n(U, U - K) \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n - Q) \xrightarrow[\cong]{} H_n(S^n)$$

Demonstração. A prova segue imediatamente da comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - f^{-1}(Q)) \\ & \nearrow j_* & \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\ H_n(S^n) & & & & \\ & \searrow j_* & H_n(S^n, S^n - K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(U, U - K) \\ & & & & \nearrow f_* \\ & & & & H_n(S^n, S^n - Q) \end{array}$$

□

A proposição acima é a responsável pelo adjetivo "local" no nome deste grau. Pois note que podemos reduzir V a qualquer vizinhança de U de $f^{-1}(Q)$. A vizinhança U pode ser qualquer $f^{-1}(W)$ em que W é uma vizinhança aberta qualquer de Q .

Proposição 3.5 (ADITIVIDADE). *Sejam $V \subset S^n$ aberto, $f : V \rightarrow S^n$ contínua e $Q \in S^n$ tal que $f^{-1}(Q)$ é compacto. Suponha que V é a união finita de subconjuntos abertos, $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$, de modo que os subconjuntos $f_i^{-1}(Q)$, em que $f_i = f|_{V_i}$, são mutuamente disjuntos. Então $\deg_Q(f) = \sum_{i=1}^r \deg_Q(f_i)$.*

Demonstração. Sejam U_i vizinhanças abertas e conexas por caminho de $f_i^{-1}(Q)$ em V_i de modo que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Tome $U = \bigcup_{i=1}^r U_i$ e considere o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(U, U - f^{-1}(Q)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n - Q) & \xrightarrow[\cong]{} & H_n(S^n) \\ \{id\} \downarrow & & \{k_{i_*}\} \downarrow & & \uparrow \cong \{k'_{i_*}\} & & \uparrow \{id\} & & \uparrow \{id\} \\ \oplus H_n(S^n) & \xrightarrow{\oplus j_{i_*}} & \oplus H_n(S^n, S^n - f_i^{-1}(Q)) & \xrightarrow[\cong]{exc_i} & \oplus H_n(U_i, U_i - f_i^{-1}(Q)) & \xrightarrow{\oplus f_{i_*}} & \oplus H_n(S^n, S^n - Q) & \xrightarrow[\cong]{} & \oplus H_n(S^n) \end{array}$$

em que todas as somas $\oplus$ são para $i = 1, \dots, r$ onde $\{id\}$ é a aplicação cujas componentes são todas iguais a identidade e k_i e k'_i denotam inclusões. Note que a função $\{k'_{i*}\}$ é isomorfismo pela Proposição 3.3, pois U é união disjunta de U_i .

Talvez o segundo quadrado do diagrama possa gerar dúvidas quanto a comutatividade. Mas note que ele afirma que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(U, U - f^{-1}(Q)) \\ k_{i*} \downarrow & & \uparrow k_{j*} \\ H_n(S^n, S^n - f_i^{-1}(Q)) & \xrightarrow{exc_1} & H_n(U_j, U_j - f_j^{-1}(Q)) \end{array}$$

comuta.

Se $i = j$, temos que $k'_{j*} \circ exc_1 \circ k_{j*} = exc$ e se $i \neq j$, temos que $k'_{j*} \circ exc_1 \circ k_{i*} = 0 = exc$, pois $U_j \subset S^n - f_i^{-1}(Q)$.

Pela Proposição da Localização 3.4, a linha superior, do penúltimo diagrama, define $deg_Q(f)$ e a inferior define $deg_Q(f_i)$, para cada i . Portanto, pela comutatividade do diagrama

$$deg_Q(f) = \sum_{i=1}^r deg_Q(f_i)$$

.

□

Proposição 3.6 (INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA). *Sejam $f_t : V \rightarrow S^n$ uma homotopia, $V \subset S^n$ aberto e $Q \in S^n$ tal que $f_t^{-1}(Q)$ é compacto para todo $t \in [0, 1]$. Suponha, também, que a união $\bigcup \{f_t^{-1}(Q), t \in [0, 1]\}$ é compacto. Então $deg_Q(f_0) = deg_Q(f_1)$.*

Demonstração. Seja $K_t = f_t^{-1}(Q)$, $t \in I$ e $K = \bigcup_{t \in I} f_t^{-1}(Q)$, que são compactos. Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & H_n(S^n, S^n - K_0) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(V, V - K_0) & \\ & \uparrow i_{0*} & & \uparrow i_{0*} & \searrow f_{0*} \\ H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n - K) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(V, V - K) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n - Q) \cong H_n(S^n) \\ & \downarrow i_{1*} & & \downarrow i_{1*} & \nearrow f_{1*} \\ & H_n(S^n, S^n - K_1) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(V, V - K_1) & \end{array}$$

Para mostrarmos que $deg_Q(f_0) = deg_Q(f_1)$, basta mostrar que $f_{0*} \circ i_{0*} = f_{1*} \circ i_{1*}$.

Como $f_t : (V, V - K) \rightarrow (S^n, S^n - Q)$ é homotopia de pares entre f_0 e f_1 então $f_t \circ i_t$ onde $i_t : (V, V - K) \rightarrow (V, V - K_t)$ é inclusão de pares, é uma homotopia de pares entre $f_0 \circ i_0$ e $f_1 \circ i_1$.

Assim $(f_0 \circ i_0)_* = (f_1 \circ i_1)_*$ e portanto $f_{0*} \circ i_{0*} = f_{1*} \circ i_{1*}$ como queríamos. □

Observação 3.3. Na proposição acima, observamos que a condição da compacidade de $\bigcup_{t \in I} f_t^{-1}(Q)$ é realmente necessária.

De fato, considere $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $V = \mathbb{R}$ e sejam $f_t : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ a aplicação induzida por $r_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $r_t(x) : t + (1 - t)x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Neste caso, $\bigcup_{t \in I} f_t^{-1}(0) =] - \infty, 0]$ não é compacto, $\deg_0(f_0) = +1$ e $\deg_0(f_1) = 0$.

Proposição 3.7. *Sejam $V \subset S^n$ um subconjunto aberto, $f : V \rightarrow S^n$ e $g : S^n \rightarrow S^n$ duas aplicações contínuas. Se $\deg_Q(f)$ está definido para algum $Q \in S^n$, então o grau local em torno de Q está, também, definido para a aplicação composta $f \circ g : g^{-1}(V) \rightarrow S^n$ e vale $\deg_Q(f \circ g) = \deg_Q(f) \cdot \deg(g)$.*

Demonstração. Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(Q)) & \xrightarrow[\cong]{exc'} & H_n(V, V - f^{-1}(Q)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n - Q) \xrightarrow[\cong]{j_*^{-1}} H_n(S^n) \\
 \uparrow g_* & & \uparrow g_* & & \uparrow g_* & \searrow (f \circ g)_* & \\
 H_n(S^n) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(S^n, S^n - g^{-1}(Q)) & \xrightarrow[\cong]{exc''} & H_n(S^n, S^n - g^{-1}(f^{-1}(Q))) & &
 \end{array}$$

A linha superior define $\deg_Q(f)$ e a inferior define $\deg_Q(f \circ g)$ e como $(j_*^{-1} \circ f_* \circ exc' \circ j_*) \circ g_* = [j_*^{-1} \circ (f \circ g)_* \circ exc'' \circ j'_*]$ segue que $\deg_Q(f) \cdot \deg(g) = \deg_Q(f \circ g)$. $\square$

Observação 3.4. Note que se f é inclusão, $\deg_Q(g) = \deg(g)$, pois neste caso $\deg_Q(f) = +1$

Observação 3.5. Observe que não vale em geral $\deg_Q(g \circ f) = \deg_P(f) \cdot \deg(g)$ em que $g(P) = Q$.

De fato, basta tomar $g : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $g(z) = z^2$, considerar $V = \{e^{i\theta} \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$, a aplicação $f : V \rightarrow S^1$ inclusão e escolher $P = Q = 1$.

Então $\deg_P(f) = 1$ e $\deg(g) = 2$. Note que $\deg_Q(g \circ f) = +1$ ou $\deg_Q(g \circ f) = -1$, pois $g \circ f$ é um homeomorfismo sobre o aberto $W = g \circ f(V) = \{e^{i2\theta} \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ e $\pm 1 \neq 1 \cdot 2 = 2$.

3.2.1 Uma Demonstração Alternativa

Exemplo 3.1. Seja $n > 0$. Para todo inteiro $k \in \mathbb{Z}$ temos que existe uma aplicação $f_k : S^n \rightarrow S^n$ tal que $\deg(f_k) = k$. Ao longo desta dissertação já demonstramos este fato partindo de uma aplicação de S^1 em S^1 , $z \mapsto z^k$, e usamos a noção de suspensão. Apresentaremos a seguir uma outra construção de uma aplicação com a mesma propriedade. Desta vez utilizaremos a ideia sugerida pelo resultado da Proposição da Aditividade 3.5.

Demonstração. Vamos definir $f : S^n \longrightarrow S^n$ tal que $\deg(f) = k$.

Identificamos S^n com $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Primeiramente, defina $g : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ pondo

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{2 - \|x\|}, & \text{se } 1 \leq \|x\| < 2 \\ \infty, & \text{se } \|x\| \geq 2 \end{cases}$$

Pela proposição 3.1 temos que $\deg(g) = \deg_0(g) = +1$.

Para cada ponto $P \in \mathbb{R}^n$ considere também a translação paralela $t_P : S^n \longrightarrow S^n$ onde $t_P(x) = x - P$ se $x \in \mathbb{R}^n$ e $t_P(\infty) = \infty$.

Temos que $H : I \times S^n \longrightarrow S^n$ que leva $(t, x) \longmapsto tx + (1 - t)(x - P)$ se $x \in \mathbb{R}^n$ e $(t, \infty) \longmapsto \infty$ é uma homotopia entre t_P e id_{S^n} .

Como $t_P \simeq id_{S^n}$ temos, pela Proposição 3.7, que $\deg(g \circ t_P) = \deg_0(g) \cdot \deg(t_P) = \deg_0(g) \cdot 1 = \deg_0(g) = 1$.

Suponha agora que $k > 0$ e escolha k pontos $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ de modo que a distância entre quaisquer dois deles seja maior que 4. Seja $B_i = B(P_i, 2)$ e $V = \bigcup_{i=1}^k B_i$; segue que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Defina $f : S^n \longrightarrow S^n$, $f|_{B_i} = (g \circ t_{P_i})|_{B_i}$, $f(x) = \infty$ para $x \notin V$.

Temos que $f^{-1}(0) = \{P_1, \dots, P_k\}$ compacto, e pela Proposição 3.1, $\deg(f) = \deg_0(f)$

e, usando a Proposição da Aditividade 3.5, $\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg_0(f|_{B_i}) = \sum_{i=1}^k (g \circ t_{P_i})|_{B_i} = \overbrace{1 + \dots + 1}^{k \text{ vezes}} = k$.

Se $k < 0$ então $-k > 0$, logo, usando o procedimento acima, conseguimos encontrar $l : S^n \longrightarrow S^n$ tal que $\deg(l) = -k$. Defina $g : S^n \longrightarrow S^n$ por $g(x) = r \circ l(x)$ onde $r : S^n \longrightarrow S^n$ é a reflexão por um hiperplano. Como já vimos, $\deg(r) = -1$, e assim $\deg(g) = \deg(r \circ l) = \deg(r) \cdot \deg(l) = (-1) \cdot (-k) = k$.

Se $k = 0$, considere $w : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $w(x) = (1, 0, \dots, 0)$, $\forall x \in S^n$ e assim $\deg(w) = 0$.

Portanto, para todo $k \in \mathbb{Z}$, conseguimos construir uma aplicação de grau k . $\square$

4 O Índice dos Pontos Fixos

4.1 O Índice dos Pontos Fixos

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Dizemos que $(\mathbb{R}^n, g, V)$ é uma terna admissível se o conjunto $Fix(g) = \{x \in V \mid g(x) = x\}$ for compacto. Iremos definir um inteiro $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ para toda terna admissível e o denominaremos de índice da terna $(\mathbb{R}^n, g, V)$. Assim, sempre que mencionarmos índice de uma terna subentendemos que a terna é admissível, mesmo que não seja explicitado. Para facilitar a notação, algumas vezes, denotaremos $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ por $I(g)$. Este índice é também denominado de índice dos pontos fixos de g .

Note que, sendo $i : V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão, temos:

$$(i - g)^{-1}(0) = Fix(g)$$

Deste modo, o "número" de pontos fixos de g deveria ser medido pelo grau da aplicação $(i - g)$ em torno de $0 \in \mathbb{R}^n$. Esta ideia nos leva à definição que segue.

Definição 4.1. *Dada a terna admissível $(\mathbb{R}^n, g, V)$, denotaremos o compacto $Fix(g)$ por K . Seja D uma bola fechada em torno da origem contendo K , isto é, $K \subset D$. Considere a composta:*

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \xrightarrow[\cong]{exc} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) \xrightarrow{j^*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \xrightarrow[\cong]{exc} H_n(V, V - K) \xrightarrow{(i-g)^*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

Como sabemos que $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, temos que a composta é um endomorfismo de $\mathbb{Z}$. Logo, este endomorfismo é da forma:

$$x \mapsto I(\mathbb{R}^n, g, V) \cdot x$$

em que $I(\mathbb{R}^n, g, V) = I(g)$ é o único inteiro que determina o endomorfismo dado pela composta. Chamamos este inteiro de índice dos pontos fixos de g .

Observamos que a sequência utilizada acima para definir o índice dos pontos fixos de g , provém de uma sequência geométrica, a saber:

$$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \xleftarrow{j_1} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) \xrightarrow{j_2} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \xleftarrow{j_3} (V, V - K) \xrightarrow{(i-g)} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

em que as aplicações j_t são as inclusões óbvias e $(i - g)$ é a aplicação $(i - g)(x) = x - g(x)$ mencionada anteriormente. Quando consideramos as induzidas em homologia, j_{1*} é isomorfismo, pois j_1 é uma equivalência homotópica; j_{3*} é o isomorfismo *exc'* da Observação 3.2 e j_{2*} é denotado no diagrama simplesmente por j_* .

Exemplo 4.1. Sejam $P \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e considere $V = (P - \varepsilon, P + \varepsilon)$ o intervalo dos números reais $P - \varepsilon < x < \varepsilon + P$. Seja $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $Fix(g) = \{P\}$. Quais os possíveis valores para o índice $I(\mathbb{R}, g, V)$? Ilustraremos cada caso com um gráfico.

Usando a definição de índice, temos:

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \{0\}) \xrightarrow{\cong} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - V) \xrightarrow{\cong} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \{P\}) \xrightarrow{\cong} H_1(V, V - \{P\}) \xrightarrow{(i-g)_*} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \{0\}) .$$

Simplificando, devemos calcular a composta:

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \{0\}) \xrightarrow{\cong} H_1(V, V - \{P\}) \xrightarrow{(i-g)_*} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \{0\})$$

Para isso considere o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_1(V, V - \{P\}) & \xrightarrow{(i-g)_*} & H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \{0\}) \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ H_0(\mathbb{R} - \{0\}) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_0(V - \{P\}) & \xrightarrow{(i-g)_*} & H_0(\mathbb{R} - \{0\}) \end{array}$$

Sejam $a \in H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ e $b, c \in H_0(\mathbb{R} - \{0\}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ geradores. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\delta(a) = b - c$. (A única outra possibilidade seria $\delta(a) = c - b$).

Para determinarmos a composta, basta sabermos o que acontece com $h = (i - g)|_{(V - \{P\})} : V - \{P\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$. São três casos:

- Caso 1: $Im(h)$ está contida em uma componente de $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Caso 2: h preserva componentes.
- Caso 3: h permuta componentes.

Em homologia isto corresponde a:

- Caso 1: A imagem de $\delta(a)$ é levada no zero, logo o índice é zero.
- Caso 2: A imagem de $\delta(a)$ é levada em $-b + c$ que é $-\delta(a)$, e o índice é -1 .
- Caso 3: A imagem de $\delta(a)$ é levada em $b - c$, e o índice é 1 .

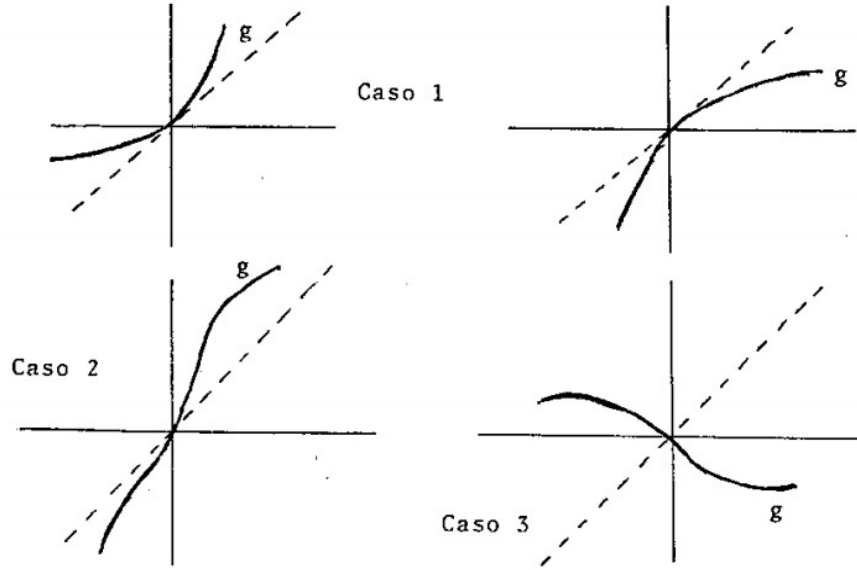


Figura 4.1: Possíveis tipos de gráficos de g no caso particular de P sendo a origem.

4.2 Seis Propriedades Relevantes do Índice dos Pontos Fixos

Proposição 4.1. *Seja $(\mathbb{R}^n, g, V)$ uma terna admissível e $K = \text{Fix}(g)$. Seja K' um subconjunto compacto tal que $K = \text{Fix}(g) \subset K'$. Então a definição de $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ é a mesma se utilizarmos a sequência abaixo:*

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K') \xrightarrow{\cong} H_n(V, V - K') \xrightarrow{(i-g)_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

em que $K' \subset V$ está no lugar de K .

Demonstração. A demonstração segue imediatamente da comutatividade do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - K) \\
 & j_* \nearrow & \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) & & & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \\
 & j_* \searrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K') & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - K') \\
 & & \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\
 & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - K)
 \end{array}$$

□

Proposição 4.2 (LOCALIZAÇÃO). *Seja $(\mathbb{R}^n, g, V)$ uma terna admissível. Se W é um aberto tal que $K \subset W \subset V$, e se denotarmos $g' = g|_W$, então temos $I(\mathbb{R}^n, g, V) = I(\mathbb{R}^n, g', W)$.*

Demonstração. A prova segue imediatamente da comutatividade do diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(V, V - K) \\
 & \nearrow j_* & \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) & & & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \\
 & \searrow j_* & \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\
 & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(W, W - K)
 \end{array}$$

□

Proposição 4.3 (ADITIVIDADE). *Seja $(\mathbb{R}^n, g, V)$ uma terna admissível. Suponha que $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$, em que cada V_i é um aberto. Seja $g_i = g|_{V_i}$ e vamos supor que para cada i , $K_i = \text{Fix}(g_i)$ é compacto e dois a dois disjuntos, isto é, $K_i \cap K_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Então $K = \text{Fix}(g) = \bigcup_{i=1}^r K_i$ e temos $I(\mathbb{R}^n, g, V) = \sum_{i=1}^r I(\mathbb{R}^n, g_i, V_i)$.*

Demonstração. Sejam U_j vizinhanças abertas e conexas por caminho de K_j em V_j , de modo $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Tome $U = \bigcup_{j=1}^r U_j$ e considere o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) & \xrightarrow{j_*} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(U, U - K) \xrightarrow{(i-g)_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \\
 \{id_1\} \downarrow & & \{id_2\} \downarrow & & \{k_{j*}\} \downarrow & & \uparrow \{k'_{j*}\} \\
 \oplus H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) & \xrightarrow{\cong} & \oplus H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) & \xrightarrow{\oplus j_{j*}} & \oplus H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_j) & \xrightarrow{\cong} & \oplus H_n(U_j, U_j - K_j) \xrightarrow{(i-g_j)_*} \oplus H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \\
 & & & & & & \uparrow \{id_1\}
 \end{array}$$

em que todas as somas $\oplus$ são para $j = 1, \dots, r$ onde $\{id_1\}$ e $\{id_2\}$ são aplicações cujos componentes são todas iguais a identidade e k_j e k'_j denotam inclusões. Note que a aplicação $\{k'_j\}$ é um isomorfismo, pela Proposição 3.3, pois U é a união disjunta de U_j .

Talvez o terceiro quadrado possa gerar dúvidas quanto a comutatividade, mas note que ele afirma que o diagrama :

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(U, U - K) \\
 k_{j*} \downarrow & & \uparrow k'_{i*} \\
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_j) & \xrightarrow{exc_1} & H_n(U_i, U_i - K_i)
 \end{array}$$

comuta.

De fato, se $i = j$, $k'_{j*} \circ exc_1 \circ k_{j*} = exc$ e se $i \neq j$, $k'_{i*} \circ exc_1 \circ k_{j*} = exc$, pois $U_i \subset \mathbb{R}^n - K_j$.

Pela Proposição da Localização 4.2, a linha superior, do penúltimo diagrama, define $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ e a inferior define $I(\mathbb{R}^n, g_j, V_j)$, para j . Pela comutatividade do diagrama

$$I(\mathbb{R}^n, g, V) = \sum_{j=1}^r I(\mathbb{R}^n, g_j, V_j).$$

□

Proposição 4.4 (INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA). *Seja $g_t = V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma homotopia tal que $(\mathbb{R}^n, g_t, V)$ é uma terna admissível para cada $t \in I = [0, 1]$. Além disso, supomos que a união $\bigcup \{Fix(g_t); t \in I\}$ é um subconjunto compacto. Então temos que $I(\mathbb{R}^n, g_0, V) = I(\mathbb{R}^n, g_1, V)$.*

Demonstração. Sejam $K_t = Fix(g_t), t \in I$ e $K = \bigcup_{t \in I} Fix(g_t)$ que são compactos.

Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_0) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(V, V - K_0) & & \\
 & \nearrow & \uparrow i_{0*} & & \uparrow i_{0*} & \searrow (i-g_0)_* & \\
 H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(V, V - K) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \\
 & \searrow & \downarrow i_{1*} & & \downarrow i_{1*} & \nearrow (i-g_1)_* & \\
 & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_1) & \xrightarrow[\cong]{exc} & H_n(V, V - K_1) & &
 \end{array}$$

Para mostrarmos que $I(\mathbb{R}^n, g_0, V) = I(\mathbb{R}^n, g_1, V)$, basta mostrarmos que $(i - g_0)_* \circ i_{0*} = (i - g_1)_* \circ i_{1*}$.

Como $g_t : (V, V - K_t) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ é homotopia de pares entre g_0 e g_1 , temos que $(i - g_t) \circ i_t$ em que $i_t : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K_t)$ é inclusão de pares, é homotopia de pares entre $(i - g_0) \circ i_0$ e $(i - g_1) \circ i_1$.

Assim, $[(i - g_0) \circ i_0]_* = [(i - g_1) \circ i_1]_*$ e portanto $(i - g_0)_* \circ i_{0*} = (i - g_1)_* \circ i_{1*}$ como queríamos. $\square$

Observação 4.1. Observamos que a condição que $\bigcup Fix(g_t)$ seja um subconjunto compacto é realmente necessária na proposição acima.

Demonstração. Considere $g_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_t(x) = 1 + tx$. Temos pelo Exemplo 4.1 que $I(\mathbb{R}, g_0, \mathbb{R}) = 1$ (Caso 3), mas por outro lado temos que $I(\mathbb{R}, g_1, \mathbb{R}) = 0$, pois $Fix(g_1) = \emptyset$. $\square$

Observação 4.2. Note que a Proposição 4.4 nos diz que se $I(\mathbb{R}^n, g, V) \neq 0$, nós temos uma obstrução para deformar g em uma f sem pontos fixos através de uma homotopia h_t em que $\bigcup Fix(g_t)$ é compacto, pois $I(\mathbb{R}^n, f, V) = 0$.

Proposição 4.5 (MULTIPLICATIVIDADE). *Sejam $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $g' : V' \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tais que $(\mathbb{R}^n, g, V)$ e $(\mathbb{R}^m, g', V')$ são ternas admissíveis e considere $g \times g' : V \times V' \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Então temos $Fix(g \times g') = Fix(g) \times Fix(g')$ e $I(g \times g') = I(g).I(g')$.*

Demonstração. A primeira afirmação segue do fato que $g(x) = x$ e $g'(x') = x'$ se, e somente se, $(g \times g')(x, x') = (x, x')$.

Vamos demonstrar a segunda afirmação.

Para simplificar a notação indicaremos $\mathbb{R}_0^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$, $\mathbb{R}_D^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D)$, $V_K = (V, V - K)$ onde $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \supset D \supset K$. Analogamente para g' .

Inicialmente, demonstraremos que

$$I(g \times 0) = I(g) \tag{4.1}$$

em que 0 é a aplicação constante que manda todo $\mathbb{R}^m$ em $0 \in \mathbb{R}^m$. Consideremos a composta:

$$\mathbb{R}_D^n \times \mathbb{R}_{D'}^m \xrightarrow{j_2 \times id} \mathbb{R}_K^n \times \mathbb{R}_{D'}^m \xleftarrow{j_3 \times id} V_K \times \mathbb{R}_{D'}^m \xrightarrow{(i-g) \times id} \mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}_{D'}^m$$

onde as aplicações são aquelas dadas na Definição 4.1 produto com a identidade. Em particular, a última aplicação é $(i - g) \times id = i - (g \times 0)$ e passando-se para homologia, temos $(i - (g \times 0))_* : H_{n+m}(V_K \times \mathbb{R}_{D'}^m) \rightarrow H_{n+m}(\mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}_{D'}^m)$ de modo que $[(x, y)] \mapsto [((i - g)(x), y)]$, ou seja, a segunda componente é a identidade. Vamos usar o Teorema 1.1 [Teorema de Kunnet] para demonstrar a fórmula (4.1). Aplicando o teorema, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+m}(V_K \times \mathbb{R}_{D'}^m) & \xrightarrow{\cong} & \sum_{i+j=n+m} [H_i(V_K) \otimes H_j(\mathbb{R}_{D'}^m)] \oplus & \sum_{i+j=n+m-1} \overset{0}{=} Tor[H_i(V_K) \otimes H_j(\mathbb{R}_{D'}^m)] & \xrightarrow{\cong} & H_n(V_K) \otimes H_m(\mathbb{R}_{D'}^m) \cong H_n(V_K) \\ \downarrow (i - (g \times 0))_* & & & & & \downarrow (i - g)_* \\ H_{n+m}(\mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}_{D'}^m) & \xrightarrow{\cong} & \sum_{i+j=n+m} [H_i(\mathbb{R}_0^n) \otimes H_j(\mathbb{R}_{D'}^m)] \oplus & \sum_{i+j=n+m-1} \overset{0}{=} Tor[H_i(\mathbb{R}_0^n) \otimes H_j(\mathbb{R}_{D'}^m)] & \xrightarrow{\cong} & H_n(\mathbb{R}_0^n) \otimes H_m(\mathbb{R}_{D'}^m) \cong H_n(\mathbb{R}_0^n) \end{array}$$

e como o diagrama acima comuta, segue o resultado.

Considere agora o seguinte diagrama onde as aplicações são aquelas óbvias:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_D^n \times \mathbb{R}_{D'}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}_K^n \times \mathbb{R}_{D'}^m & \longrightarrow & V_K \times \mathbb{R}_{D'}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}_{D'}^m \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}_D^n \times \mathbb{R}_{K'}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}_K^n \times \mathbb{R}_{K'}^m & \longrightarrow & V_K \times \mathbb{R}_{K'}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}_D^n \times \mathbb{R}_{D'}^{K'} \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}_D^n \times V_{K'} & \longrightarrow & \mathbb{R}_K^n \times V_{K'} & \longrightarrow & V_K \times V_{K'} & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^n \times V_{K'} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \mathbb{R}_D^n \times \mathbb{R}_{0'}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}_K^n \times \mathbb{R}_{0'}^m & \longrightarrow & V_K \times \mathbb{R}_{0'}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^n \times \mathbb{R}_{0'}^m \end{array}$$

Passando-se para homologia, por 4.1, a primeira linha nos dá $I(g)$, enquanto a primeira coluna $I(g')$. Por outro lado, a diagonal nos dá $I(g \times g')$. Pela comutatividade do diagrama, segue o resultado; pois a induzida da diagonal é dada por $x \mapsto I(g \times g').x$. Mas a induzida da diagonal é a composta das induzidas da primeira coluna com a última linha. Assim $I(g \times g').x = I(g').I(g).x$. $\square$

Para a Proposição abaixo, lembremos que $\approx$ indica homeomorfismo.

Proposição 4.6 (COMUTATIVIDADE). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $U' \subset \mathbb{R}^m$ dois abertos e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações contínuas. Então as aplicações compostas $g \circ f : V = f^{-1}(U') \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f \circ g : V' = g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazem $Fix(g \circ f) \approx Fix(f \circ g)$. E, se estes conjuntos forem compactos, temos também que $I(f \circ g) = I(g \circ f)$.*

Demonstração. Nesta demonstração, utilizaremos Gf para indicar o gráfico da aplicação f .

Temos $Fix(g \circ f) \approx Fix(f \circ g)$, pois

$$Fix(g \circ f) = \{x \in V \mid g \circ f(x) = x\} \xrightleftharpoons[g]{f} Fix(f \circ g) = \{y \in V' \mid f \circ g(y) = y\}$$

tais que $f \circ g(y) = y = id_{Fix(f \circ g)}(y)$ e $g \circ f(x) = x = id_{Fix(g \circ f)}$.

Suponhamos que os conjuntos sejam compactos e definamos $\gamma : V \times V' \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\gamma(x, y) = (g(y), f(x))$.

Primeiramente, mostremos que $Fix(\gamma)$ é compacto.

De fato, $Fix(\gamma) = \{(x, y) \mid g(y) = x \text{ e } f(x) = y\} = \{(x, f(x)) \mid g(f(x)) = x\} = \{(x, f(x)) \mid x \in Fix(g \circ f)\} = Gf$ onde $f : Fix(g \circ f) \longrightarrow Fix(f \circ g) \subset V' \subset U' \subset \mathbb{R}^m$

Portanto $Gf \subset Fix(g \circ f) \times Fix(f \circ g)$ em que Gf é fechado e $Fix(g \circ f) \times Fix(f \circ g)$ é compacto. Desse modo, $Gf = Fix(\gamma)$ é compacto.

Usando a propriedade da invariância homotópica, sendo $Fix(\gamma)$ compacto, mostraremos que $I(\gamma) = I(g \circ f)$ e $I(\gamma) = I(f \circ g)$.

Considere a deformação de γ : $\gamma_t(x, y) = (tg \circ f(x) + (1-t)g(y), f(x))$ com $x \in V$, $y \in V'$ e $t \in [0, 1]$.

Esta deformação, nos dá uma homotopia entre $\gamma_0(x, y) = (g(y), f(x)) = \gamma(x, y)$ e $\gamma_1(x, y) = (g \circ f(x), f(x))$.

Por outro lado, $Fix(\gamma_t) = \{(x, y) \mid x \in Fix(g \circ f), y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in Fix(g \circ f)\} = Gf$ onde $f : Fix(g \circ f) \longrightarrow Fix(f \circ g) \subset \mathbb{R}^m$.

Portanto $Fix(\gamma_t)$ é compacto para qualquer $t \in I$. E como $Fix(\gamma_t)$ não depende de t , segue que $\bigcup_{t \in I} Fix(\gamma_t) = Gf$ é compacto e assim, pela Proposição da Invariância Homotópica 4.4, $I(\gamma) = I(\gamma_0) = I(\gamma_1)$.

A aplicação γ_1 , por sua vez, pode ser considerada como restrição da aplicação $\delta : V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$, $\delta(x, y) = (g \circ f(x), f(x))$. Note que $Fix(\delta) = \{(x, y) \mid g \circ f(x) = x \text{ e } y = f(x)\} = Fix(\gamma)$ e portanto $Fix(\delta)$ é compacto. Considerando $K = Fix(\delta) \subset V \times U' \subset V \times \mathbb{R}^m$, estamos nas hipóteses da Proposição da Localização 4.2. Assim, segue que $I(\delta) = I(\gamma_1)$ e assim $I(\delta) = I(\gamma)$.

Seja $\phi : Fix(g \circ f) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em que $(x, t) \longrightarrow (1-t)f(x)$. ϕ induz $\phi_t : Fix(g \circ f) \longrightarrow \phi_t(Fix(g \circ f)) \subset \mathbb{R}^m$, contínua, em que $x \longmapsto \phi(x, t) = (1-t)f(x)$, $\forall t \in I$.

Consideremos agora a deformação de δ : $\delta_t : V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\delta_t(x, y) = (g \circ f(x), (1-t)f(x))$ a qual realiza a homotopia entre $\delta_0(x, y) = \delta(x, y)$ e $\delta_1(x, y) = (g \circ f(x), 0)$.

Note que $Fix(\delta_t) = \{(x, \phi_t(x)) \mid x \in Fix(g \circ f)\} = G\phi_t \subset Fix(g \circ f) \times \phi_t(Fix(g \circ f))$, $\forall t \in I$ em que $G\phi_t$ é fechado e $Fix(g \circ f) \times \phi_t(Fix(g \circ f))$ é compacto. Portanto $Fix(\delta_t)$ é compacto.

Mostremos que $\bigcup_{t \in I} \text{Fix}(\delta_t) \approx G\phi$ e que $G\phi$ é compacto. Para isso observemos que

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\delta_0) &= \{(x, f(x)) \mid x \in \text{Fix}(g \circ f)\} \\ &\vdots \\ \text{Fix}(\delta_{1/2}) &= \{(x, \frac{1}{2}f(x)) \mid x \in \text{Fix}(g \circ f)\} \\ &\vdots \\ \text{Fix}(\delta_1) &= \{(x, 0) \mid x \in \text{Fix}(g \circ f)\} \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\bigcup_{t \in I} \text{Fix}(\delta_t) \approx \{((x, 0), f(x)), \dots, ((x, \frac{1}{2}), \frac{1}{2}f(x)), \dots, ((x, 1), 0)\} = G\phi$$

Como $\phi : \text{Fix}(g \circ f) \times [0, 1] \longrightarrow \phi(\text{Fix}(g \circ f) \times [0, 1]) \subset \mathbb{R}^m$ e $G\phi \subset (\text{Fix}(g \circ f) \times [0, 1]) \times \phi(\text{Fix}(g \circ f) \times [0, 1])$ em que $G\phi$ é fechado e $(\text{Fix}(g \circ f) \times [0, 1]) \times \phi(\text{Fix}(g \circ f) \times [0, 1])$ é compacto; segue que $G\phi$ é compacto e portanto $\bigcup_{t \in I} \text{Fix}(\delta_t)$ também.

Assim, pela Proposição da Invariância Homotópica 4.4, $I(\delta) = I(\delta_0) = I(\delta_1)$. Segue então que $I(\gamma) = I(\delta_1)$.

Mas note que $\delta_1 = (g \circ f) \times 0$ e assim, pela Proposição da Multiplicatividade 4.5, $I(\gamma) = I(\delta_1) = I(g \circ f)$, ou seja, $I(\gamma) = I(g \circ f)$.

Repetindo o mesmo raciocínio, considerando-se as deformações $(g(y), tf \circ g(y) + (1-t)f(x))$ e $((1-t)g(y), f \circ g(y))$ se demonstra que $I(\gamma) = I(f \circ g)$ o que conclui a demonstração.

□

Referências

- [1] GONÇALVES, D. L.; KIIHL, J. *Teoria do Índice*. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [2] DOLD, A. *Lectures on Algebraic Topology*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1972.
- [3] RUY, A. C. *Homologia Singular*. São Paulo: Dissertação de Mestrado UNESP, 2011.
- [4] SPANIER, E. H. *Algebraic Topology*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [5] VICK, J. W. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [6] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. 1. ed. London: Cambridge University Press, 2002.
- [7] WALL, C. T. C. *A Geometric Introduction to Topology*. 1. ed. ??: Addison Wesley Publisinhg Company, 1972.
- [8] LIBARDI, A. K. M.; VIEIRA, J. P.; MELO, T. *Invariantes Topológicos*. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2012.
- [9] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: IMPA, 1970.