



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.625/03

Fenomenologia do Mercado Futuro de DI

Marcel Doumen

Orientador

Gerson Francisco

Março de 2005

b:230000003403



## Agradecimentos

Aos meus pais que sempre me proporcionaram um bom ambiente familiar criando condições para eu estudar todos esses anos me deixando livre para caminhar sobre meus próprios caminhos.

A minha amada Bruna que me preenchia com seu afeto nos momentos de grande solidão que foram exigidos por esse trabalho.

Aos colegas Marcelo, Bira, Bolinha, Márcio, Crepaldi e ao Gerson que sempre mostraram solidariedade nos momentos em que ela se fazia necessária.

A CAPES e ao IFT pelas condições materiais oferecidas para a realização dessa dissertação.

## Resumo

Neste trabalho, estudamos alguns aspectos empíricos do mercado futuro de DI, e como ele se comporta frente aos modelos de equilíbrio de Vasicek, Cox, Ingersoll, Ross e o modelo misto. Para isto, fizemos um estudo empírico detalhado sobre as hipóteses que os modelos de equilíbrio exigem tais como o acordo dos parâmetros do modelo para a taxa de juros à vista (DI) e os dos modelos de equilíbrio; além de verificar a parametrização exponencial. Dentro dos resultados apresentados na dissertação, podemos destacar a dupla dependência dos contratos com a taxa à vista. Este fato pode levar a novos modelos teóricos e entender esse comportamento pode ser uma ferramenta para uma melhor precificação dos contratos.

**Palavras Chaves:** Mercado Futuro de DI; Taxa de Juros; modelos de equilíbrio.

**Áreas do conhecimento:** Finanças; Econofísica



# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>O Mercado Futuro de DI</b>                      | <b>1</b>  |
| 1.1      | O Mercado Interbancário . . . . .                  | 1         |
| 1.2      | Dinâmica do Mercado Futuro de DI . . . . .         | 2         |
| 1.2.1    | Especificações do Mercado Futuro de DI . . . . .   | 3         |
| <b>2</b> | <b>Análises Preliminares</b>                       | <b>6</b>  |
| 2.1      | Os Dados Analisados . . . . .                      | 6         |
| 2.2      | Abordagens de Análise . . . . .                    | 8         |
| 2.3      | Organizando os Dados . . . . .                     | 9         |
| 2.4      | Médias, Desvios e Correlações . . . . .            | 10        |
| 2.4.1    | PU . . . . .                                       | 10        |
| 2.4.2    | Variáveis de nível 2 . . . . .                     | 10        |
| <b>3</b> | <b>Aspectos Teóricos dos Modelos de Equilíbrio</b> | <b>14</b> |
| 3.1      | A Metodologia Proposta por Vasicek . . . . .       | 14        |
| 3.2      | O Modelo Proposto por Vasicek . . . . .            | 17        |
| 3.3      | O Modelo de Cox, Ingersoll e Ross . . . . .        | 18        |
| 3.4      | O Modelo Misto . . . . .                           | 19        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>4 Fenomenologia dos Modelos de Equilíbrio</b>                    | <b>22</b> |
| 4.1 Spot Rate . . . . .   | 22        |
| 4.1.1 A Spot Rate segundo Vasicek . . . . .                         | 27        |
| 4.1.2 A Spot Rate segundo CIR . . . . .                             | 28        |
| 4.2 A Parametrização Exponencial . . . . .                          | 31        |
| 4.3 Parametrização Exponencial e os Modelos de Equilíbrio . . . . . | 34        |
| 4.3.1 A e B segundo Vasicek . . . . .                               | 36        |
| 4.3.2 A e B segundo CIR . . . . .                                   | 37        |
| 4.3.3 A e B segundo o Modelo Misto . . . . .                        | 38        |
| <b>5 Conclusões e Perspectivas</b>                                  | <b>40</b> |
| <b>A Lema de Itô</b>  | <b>41</b> |
| <b>Referências</b>  | <b>43</b> |

# Capítulo 1

## O Mercado Futuro de DI

O mercado Futuro de DI é o principal mercado de renda fixa do Brasil movimentando um grande volume financeiro todos os dias. O objetivo básico desse mercado, é a possibilidade de proteção contra as oscilações dos juros do mercado interbancário. Portanto, nos pregões da BM&F negociam-se juros, e como os juros são uma mercadoria muito abstrata, criou-se um mecanismo bastante sofisticado para possibilitar a sua negociação.

Nas próximas seções, daremos uma breve introdução ao mercado interbancário e ao mecanismo no qual o Mercado Futuro de DI opera.

### 1.1 O Mercado Interbancário

Neste mercado, participam apenas os bancos e os *brokers*, que fazem a ponte entre compradores e vendedores de dinheiro com lastro em títulos privados. Essas negociações, são feitas através dos CDI (Certificados de Depósito Interbancário).

Os CDI são títulos de emissão das instituições financeiras monetárias e não monetárias, que lastreiam as operações do mercado interbancário. Sua função é, portanto, transferir recursos de uma instituição financeira para outra. As operações se realizam fora do âmbito do Banco Central, tanto que, neste mercado, não há incidência de qualquer tipo de imposto. Também não existem contratos de CDI, as transações são fechadas por meio eletrônico e registradas nos computadores das in-

stituições envolvidas e nos terminais da Central de Custódia e Liquidação de Títulos Privados (Cetip).

A maioria das operações é negociada por um só dia. Os CDI de um dia também são conhecidos como Depósitos Interfinanceiros (DI). Suas vantagens são: não haver taxação, ser rápido e seguro. Normalmente, o custo do dinheiro de um dia negociado no mercado interbancário é muito próximo do custo de troca das reservas bancárias disponíveis lastreadas em títulos federais que ocorrem no mercado aberto. Os CDI de um dia (DI) estabelecem um padrão de taxa média diária, o CDI *over*. É o CDI *over* que reflete a expectativa de custo das reservas bancárias para a manhã seguinte do fechamento das transações.

Apesar do mercado interbancário ser um mercado restrito, ele é de extrema importância para a sociedade. O fato das instituições participantes serem consideradas seguras, dá ao DI o status de juros livre de risco, sendo este juros um limite inferior. Os juros cobrados no cartão de crédito, empréstimos a empresas, serão o DI mais um fator de risco.

## 1.2 Dinâmica do Mercado Futuro de DI

O mecanismo pelo qual esse mercado opera têm suas raízes nos contratos futuros. O contrato futuro é um acordo entre duas partes de compra ou venda de uma mercadoria numa determinada data por um determinado preço.

Existem dois tipos de contratos futuros: os *Forward Contracts* e os *Future Contracts*. Ambos os contratos são acordos de compra ou venda por um certo preço numa certa data futura. O *Forward Contract* é negociado no *over-the-counter market*\* e não existe tamanho e especificações de entrega do contrato padronizados. Normalmente, uma única data de entrega é especificada e o contrato é mantido até o fim de sua vida, e então é exercido.

O *Future Contract*, é um contrato padronizado negociado numa bolsa. Esses

---

\*São negociações feitas fora de bolsas usualmente por instituições financeiras. A vantagem central do *over-the-counter market* é que os termos dos contratos não precisam ser aqueles especificados por uma bolsa. A sua desvantagem, é que estando fora de uma bolsa, existe o risco do acordo não ser cumprido.

contratos são negociados diariamente, e através dessas negociações é possível especificar uma série de contratos de vencimentos diferentes. Raramente quem negocia o contrato, o mantém até a data de seu exercício, o negociando antes.

O Mercado Futuro de DI, é um *Future Contract* na medida em que ele é negociado dentro de uma bolsa, a BM&F (Bolsa de Mercadorias e Futuros), e possui especificações padronizadas.

### 1.2.1 Especificações do Mercado Futuro de DI

A idéia desse mercado seria ver o dinheiro como uma mercadoria, ou seja, na data futura especificada seria entregue uma certa quantia padronizada (R\$ 100.000 no caso da BM&F). A pergunta a ser respondida pelo pregão, é quanto vale um contrato hoje sendo que no vencimento ele pagará R\$ 100.000 valorizando a cada dia pelo DI. A esse valor para o contrato, dá-se o nome de Preço Unitário (PU). Para existir o pregão deveríamos ter quem compre e quem venda o contrato, por isso temos as expressões comprado e vendido em PU. Para se evitar que os compromissos assumidos entre as partes não seja cumprido, faz-se uma marcação a mercado do contrato através dos ajustes diários (AD).

Devido a essa motivação vinda do Mercado Futuro de Mercadorias, temos essa nomenclatura (PU, comprado e vendido em PU, ajustes diários), mas não é exatamente dessa forma que ocorre o pregão. Devemos ressaltar que o principal objetivo do Mercado Futuro de DI é a possibilidade da proteção dos agentes econômicos contra as oscilações do DI. Para se fazer isso, basta que os ajustes diários sejam pagos, isto é, não há a necessidade de quem está comprando o contrato deposite o valor da PU na conta de quem está vendendo, ou que no vencimento o vendedor deposite R\$ 100.000 na conta do comprador. Para participar desse mercado, basta um depósito de margem estabelecido pela BM&F para cada um dos participantes para cada contrato, afim de garantir que os ajustes diários sejam pagos. Como o intuito do mercado é a negociação de juros e não de contratos, as expressões comprado e vendido em PU vêm sendo substituídas por vendido e comprado em taxa respectivamente.

Uma melhor forma de percebermos como este mercado funciona é através de uma alegoria. Suponha que José tenha uma dívida indexada ao DI, e que com uma

possível alta do DI, ele não consiga honrar seus compromissos. Uma solução para o seu problema seria ir ao pregão da BM&F e tentar negociar uma posição comprada em PU (vendido em taxa). Sem saber disso, João acredita que os juros irão baixar, querendo tirar proveito dessa situação, vai ao pregão da BM&F tentar negociar uma posição vendida em PU. O negócio acontece quando José e João se encontram e concordam numa taxa. Com esse acordo, são feitos os respectivos depósitos de margem junto a BM&F e a taxa negociada é transformada em PU pela fórmula:

$$PU = PO = \frac{100.000}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{\frac{n}{252}}} \quad (1.1)$$

Onde  $PO$  é o preço da operação,  $i$  é a taxa negociada,  $n$  é o número de saques-reserva, compreendido entre a data de negociação, inclusive, e a data de vencimento do contrato, exclusive.

No final do dia, apurados todos os negócios, a BM&F define o Preço de Ajuste ( $PA$ ) para todos os contratos. Com esse Preço de ajuste, podemos calcular o Ajuste Diário ( $AD$ ) da operação realizada entre José e João:

$$AD_t = (PA_t - PO) \times M \times N \quad (1.2)$$

Onde  $M$  é o valor em reais de cada ponto do contrato (atualmente  $M = \text{R\$ } 1$ ),  $N$  é o número de contratos negociados entre José e João.

O sinal de  $AD_t$  determina o fluxo do dinheiro, se  $AD_t > 0$  então o comprador de  $PU$  (José) recebe  $AD_t$  do vendedor de  $PU$  (João). Da mesma forma que se  $AD_t < 0$  o vendedor de  $PU$  (João) recebe  $AD_t$  do comprador (José).

Possivelmente, no dia seguinte, José e João poderão negociar suas posições com outras pessoas, mas vamos supor que eles as mantenham dando o status dos seus contratos de contratos em aberto. No próximo pregão, outros Josés e Joãos negociarão outros contratos, possibilitando a BM&F definir  $PA_{t+1}$ . Os contratos em aberto serão ajustados pela fórmula:

$$AD_{t+1} = [PA_{t+1} - (PA_t \times FC_{t+1})] \times M \times N \quad (1.3)$$

onde:

$$FC_{t+1} = \left(1 + \frac{DI_t}{100}\right)^{\frac{1}{252}}$$

quando houver um saque reserva entre o último pregão e o dia do ajuste e

$$FC_{t+1} = \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{DI_j}{100}\right)^{\frac{1}{252}}$$

quando houver mais de um saque-reserva entre o último pregão e o dia do ajuste.

## Análises Preliminares

### 2.1. O Mercado Analisado

Este capítulo apresenta uma análise preliminar do mercado futuro de DI. O objetivo principal é descrever as características principais do mercado, incluindo o volume de negociações, a liquidez e a volatilidade. A análise é baseada em dados históricos e visa fornecer uma visão geral do comportamento do mercado. O capítulo está dividido em duas partes principais: a primeira descreve o contexto econômico e financeiro que influencia o mercado, e a segunda apresenta os resultados da análise estatística e econômica. A análise estatística inclui a estimativa dos parâmetros de volatilidade e a verificação de hipóteses sobre a distribuição dos retornos. A análise econômica foca na relação entre o mercado futuro de DI e o mercado à vista, bem como no impacto das mudanças de política monetária e das expectativas de inflação.

---

\*Sobre este assunto temos a bibliografia: [1, 2, 3, 4, 5].

## Capítulo 2

### Análises Preliminares

Neste capítulo, vamos tentar ganhar um pouco de intuição de como o mercado funciona através uma estatística descritiva.

#### 2.1 Os Dados Analisados

Os dados foram obtidos gentilmente pelo sistema de recuperação de dados da BM&F. As informações que tive acesso vieram em planilhas Excel com as colunas: Data de Referência, Vencimento da Série, Data de Vencimento, Número de Negócios, Contratos Negociados, Contratos Derivados, Volume Financeiro (em reais\*), Volume Financeiro (US\$), Preço de Exercício, Valor do Ponto do Contrato, Valor do Ajuste Anterior, Preço de Abertura, Preço Mínimo, Preço Máximo, Preço Médio, Valor do Fechamento, Valor do Ajuste, Saques, Úteis, Corridos. A coluna Preço de Exercício teve o valor constante 0, e a coluna Contratos Derivados não teve nenhum valor assinalado. A cada linha tínhamos as informações de cada contrato negociado. Na tabela 2.1, mostramos as primeiras 4 colunas dos contratos negociados em 02/01/2004. Foram obtidos contratos desde 01/07/1991 a 25/05/2004 mas, na maior parte do trabalho, utilizamos contratos a partir de 1996 devido ao plano real estar melhor estabelecido a partir desse período.

Juntamente com esses dados fornecidos pela BM&F, também analisamos a série do CDI diário (DI) fornecida pelo *site* do Banco Central do mesmo período.

---

\*Neste item temos o Volume financeiro em moeda brasileira, sendo real a partir de 1994

| Data de Referencia | Vencto Serie | Data de Vencimento | N de Negocios | ... |
|--------------------|--------------|--------------------|---------------|-----|
| 02/01/2004         | JAN4         | 02/01/2004         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | FEV4         | 02/02/2004         | 21            | ... |
| 02/01/2004         | MAR4         | 01/03/2004         | 2             | ... |
| 02/01/2004         | ABR4         | 01/04/2004         | 19            | ... |
| 02/01/2004         | MAI4         | 03/05/2004         | 1             | ... |
| 02/01/2004         | JUL4         | 01/07/2004         | 135           | ... |
| 02/01/2004         | OUT4         | 01/10/2004         | 47            | ... |
| 02/01/2004         | JAN5         | 03/01/2005         | 39            | ... |
| 02/01/2004         | ABR5         | 01/04/2005         | 2             | ... |
| 02/01/2004         | JUL5         | 01/07/2005         | 5             | ... |
| 02/01/2004         | OUT5         | 03/10/2005         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | JAN6         | 02/01/2006         | 6             | ... |
| 02/01/2004         | ABR6         | 03/04/2006         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | JUL6         | 03/07/2006         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | OUT6         | 02/10/2006         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | JAN7         | 02/01/2007         | 2             | ... |
| 02/01/2004         | ABR7         | 02/04/2007         | 1             | ... |
| 02/01/2004         | JUL7         | 02/07/2007         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | OUT7         | 01/10/2007         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | JAN8         | 02/01/2008         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | JUL8         | 01/07/2008         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | OUT8         | 01/10/2008         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | JAN9         | 02/01/2009         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | JAN0         | 04/01/2010         | 0             | ... |
| 02/01/2004         | ABR0         | 01/04/2010         | 0             | ... |

Tabela 2.1: Fragmento das informações dos contratos negociados em 02/01/2004

## 2.2 Abordagens de Análise

Para um estudo empírico, precisamos ter em mente o que procuramos e como vamos abordar o problema. Neste trabalho daremos ênfase à escola dos economistas. Segundo essa escola, José e João brigarão por seus interesses até quando concordarem num preço. Este preço será um preço justo, ou seja, nesta hipótese não precisaremos olhar para variáveis de nível 2 como número de negócios, volume financeiro e contratos negociados; no máximo, basta olhar para as variáveis de nível 1 como o DI<sup>†</sup> e a série de PU<sup>‡</sup>.

A existência desse preço justo é um assunto bastante polêmico entre os que estudam a Hipótese de Mercado Eficiente (HME) [6, 7, 8], mas apesar de existirem esses estudos, a HME é um dos pilares da literatura de finanças.

Uma crítica a essa abordagem é que nunca teremos uma descrição completa do mercado, ou seja, ao escolher esse caminho, não temos uma descrição para as variáveis de nível 2.

Uma forma alternativa de abordar o problema vem sendo dada por alguns físicos. Podemos destacar duas linhas de pesquisa, que podem fornecer uma descrição mais completa para as variáveis do mercado. Uma linha [9, 10, 11, 12, 13], é analisar o *limit order book*, onde são assinalados a oferta e a procura por determinados ativos, e as consequências desse mecanismo na formação dos preços. Uma outra linha [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22], procura analisar as propriedades das distribuições dos retornos das variáveis do mercado, e a partir dessas propriedades fazer afirmativas sobre seu funcionamento.

Apesar de muito interessantes, essas duas linhas de pesquisa foram criadas para o mercado de ações, portanto, para a sua implementação, seria necessária uma adaptação para o mercado de juros e, além dessa adaptação seriam necessárias variáveis que não possuíamos tais como as armazenadas no *limit order book*. Por esse fato, na seção 2.4.2, nos limitaremos a uma análise superficial de algumas propriedades das variáveis de nível 2.

---

<sup>†</sup>Na literatura, o DI (juros a vista), é conhecido como *spot rate*

<sup>‡</sup>Como o Futuro de DI é um mercado de curto prazo, não analizaremos modelos que utilizam toda a estrutura a termo da curva de juros mas sim modelos que precificam os contratos a partir da *spot rate*.

## 2.3 Organizando os Dados

Para uma análise estatística descritiva de uma população, precisamos, antes de qualquer coisa, definir a população. A priori, não existe uma regra para essa escolha, classificamos os elementos de acordo com propriedades que desejamos analisar. Esta tarefa nem sempre é fácil num sistema complexo, pois se tentarmos analisar certa propriedade, encobriremos outro fator.

No nosso caso, podemos colecionar os contratos de diversas formas. Uma delas seria analisar a história individual de cada contrato, desde a sua abertura até seu fechamento. Dessa maneira teríamos uma estrutura temporal em cada contrato.

Outra forma, seria colecionar os contratos de acordo com seu lançamento na bolsa. A BM&F permite a abertura de contratos com vencimentos de mês em mês até um ano e depois de três em três meses para contratos mais longos. Por exemplo, na tabela 2.1, vemos que em 02/01/2004 estavam sendo negociados contratos com vencimento em quase todos os meses de 2004 e os contratos com vencimento a partir de 2005 tinham periodicidade de três meses. Essa forma de colecionar os contratos seria útil para se tentar construir a estrutura a termo da taxa de juros <sup>§</sup>.

Na maior parte deste trabalho, optamos por colecionar os contratos segundo sua maturidade diária ( $m$ ), ou seja, o número de dias úteis entre a data de referência ( $t$ ) e a data de seu vencimento ( $s$ ). Esta classificação nos parece mais adequada sendo esse mercado essencialmente de curto prazo, também por esse motivo, na maior parte da análise, consideramos  $m \leq 128$ .

Como estamos considerando dias úteis, a primeira data de referência atribuímos 1, a segunda 2 etc. Nesse calendário temos:

$$m = s - t \quad (2.1)$$

Com essa nomenclatura, podemos rotular uma grandeza  $G$  como  $G = G(t, m)$ , ou  $G = G(t, s)$ .

---

<sup>§</sup>A Estrutura a termo da Taxa de Juros são os juros para cada periodo de tempo futuro [1, 5]

## 2.4 Médias, Desvios e Correlações

Nesta seção, estaremos interessados em como o contrato evolui desde sua abertura até seu vencimento, ou seja, estaremos interessados apenas na característica do contrato possuir um valor determinado no seu vencimento (R\$ 100.000). Por isso, consideramos  $P(t_1, m)$ , e  $P(t_2, m)$  como ensaios de uma mesma amostra, ou seja, nos faz sentido fazer uma estatística descritiva desses dados por possuírem a propriedade de ter o mesmo  $m$ . Portanto, definimos para uma grandeza  $G$ :

$$\langle G(m) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G(t_i, m) \quad (2.2)$$

$$\sigma_G(m) = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n G(t_i, m)^2 - (\sum_{i=1}^n G(t_i, m))^2}{n(n-1)}} \quad (2.3)$$

$$\text{corr}_{G_i, G_j}(m) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (G_i(t_k, m) - \langle G_i(m) \rangle) (G_j(t_k, m) - \langle G_j(m) \rangle)}{\sigma_{G_i} \sigma_{G_j}} \quad (2.4)$$

Onde  $n$  é o número de elementos da amostra definida por  $m$  e  $t_i$  é o  $i$ -ésimo elemento dessa amostra.

### 2.4.1 PU

Nessa análise, o PU médio parece evoluir de uma forma bastante simples, bastando uma reta para descrever a curva  $\langle P(m) \rangle$  como mostra a figura 2.1

O desvio  $\sigma_P(m)$  é bem descrito por uma lei de potência do tipo  $\sigma_P(m) = km^\delta$  com  $\delta \approx 0,85$ , como mostra a figura 2.2.

### 2.4.2 Variáveis de nível 2

Temos quatro variáveis de nível 2 a serem consideradas: número de negócios  $N$ , contratos negociados  $C$ , volume financeiro  $V$  e contratos em aberto  $A$ . Essas variáveis são globais, na medida em que são síntese das negociações do dia, indexando

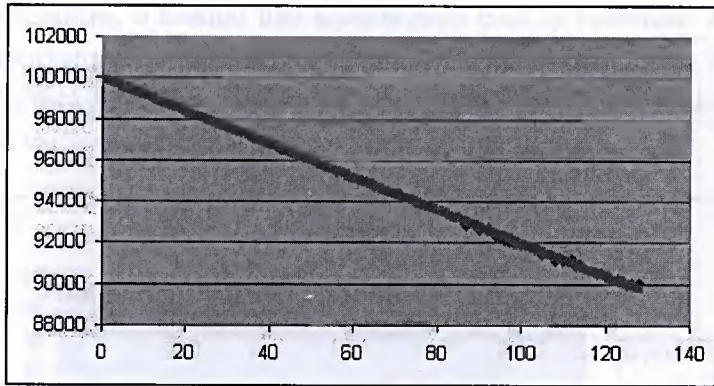


Figura 2.1: Gráfico de  $\langle P(m) \rangle$  x  $m$  e ajuste linear. Basta uma reta para descrever a curva  $\langle P(m) \rangle$ .

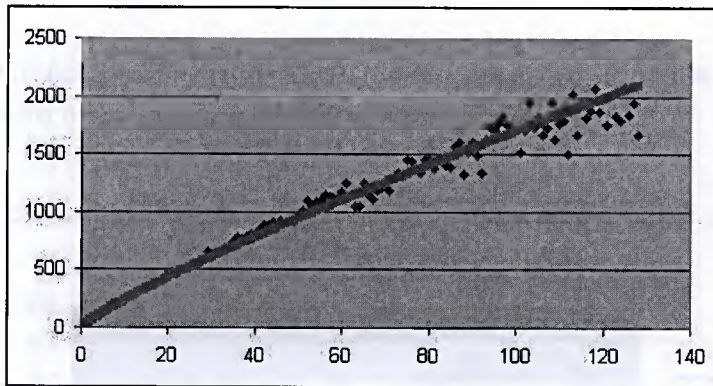


Figura 2.2: Gráfico de  $\sigma_P(m)$  x  $m$  e ajuste  $km^\delta$ . No ajuste, obtemos  $\delta \approx 0,85$ .

a  $i$ -ésima negociação, temos as relações:

$$V = \sum_{i=1}^N C_i P U_i \tag{2.5}$$

$$C = \sum_{i=1}^N C_i \tag{2.6}$$

Através dessas relações, vemos que  $V$ ,  $N$  e  $C$  devem possuir propriedades es-

tatísticas semelhantes, o mesmo não acontecendo com os contratos em aberto que possuem comportamento estatístico diferente das demais grandezas. Nas figuras 2.3 e 2.4 este fato está explícito. Devido a isso, usaremos  $F$  para indicar o conjunto formado pelas variáveis  $V$ ,  $N$ , e  $C$ .

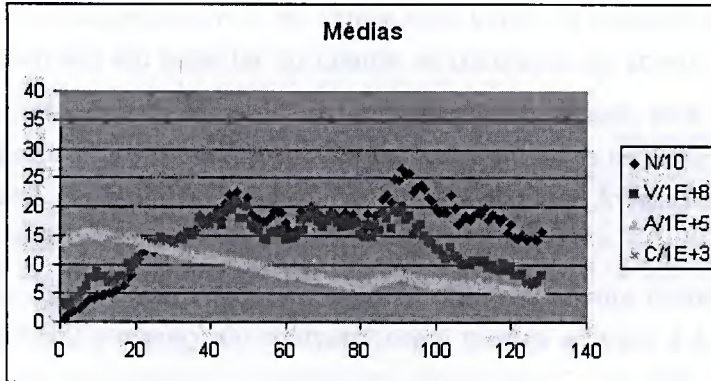


Figura 2.3: Gráfico de  $\langle N(m) \rangle$ ,  $\langle V(m) \rangle$ ,  $\langle C(m) \rangle$  e  $\langle A(m) \rangle$  divididos por um fator afim de deixa-los na mesma ordem de grandeza

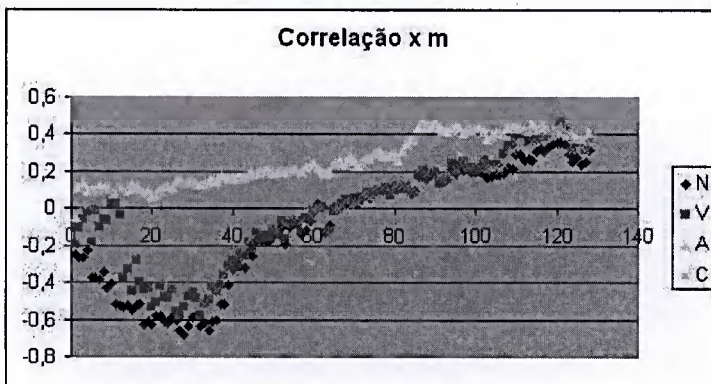


Figura 2.4: Gráfico de  $corr_{P,G}(m) \times m$  onde  $G = N, V, C, A$ .

Na figura 2.3, vemos que  $\langle A(m) \rangle$  é predominantemente decrescente, mostrando que os *traders* seguram mais suas posições quando os contratos estão mais próximos do vencimento. Este fato é acompanhado por uma diminuição dos contratos

negociados, sendo que,  $\langle N(m) \rangle$ ,  $\langle C(m) \rangle$  e  $\langle V(m) \rangle$  diminuem em  $47 \geq m \geq 0$ .

Em  $48 \leq m \leq 93$  a diminuição de  $\langle A(m) \rangle$  não é acompanhada por um aumento de  $\langle F(m) \rangle$ , nessa região,  $\langle F(m) \rangle$  parece manter-se constante atingindo seu maior valor.

Nos contratos longos com  $m > 90$ , vemos uma perda de liquidez, havendo pouco interesse do mercado em negociar ou manter os contratos em aberto.

O fato da curva  $\langle A(m) \rangle$  ser predominantemente decrescente, está de acordo com o fato de  $\sigma_P(m)$  ser crescente, sendo natural esperar que se as posições são mantidas, ocorra uma diminuição na volatilidade dos contratos. A relação entre as duas grandezas se mostra clara com o cálculo de  $\text{corr}_{\langle A(m) \rangle, \sigma_P(m)} = -0,96$ .

Através da equação 2.5, podemos esperar que exista uma correlação entre as variáveis de nível 2 e o preço do contrato, como mostra a figura 2.4. Nesta figura, vemos que para os contratos de curtíssimo prazo ( $m \leq 30$ )  $F$  é negativamente correlacionado com  $P$ . Para os contratos com  $30 < m \leq 84$ , vemos que a correlação assume seu menor valor absoluto, e para os contratos mais longos ( $m > 85$ ), temos maior dependência de  $F$  e  $P$  com uma correlação positiva. Este fato mostra que as variáveis de nível 2 influenciam consideravelmente o preço dos contratos, portanto, um modelo que precifique os contratos corretamente deve descrever essas variáveis.

## Capítulo 3

# Aspectos Teóricos dos Modelos de Equilíbrio

Neste capítulo, faremos um apanhado teórico dos modelos de equilíbrio, considerando os modelos propostos por Vasicek e Cox, Ingersoll e Ross. Com base nestes modelos, propomos um modelo misto.

### 3.1 A Metodologia Proposta por Vasicek

Nesta metodologia, não só consideramos a propriedade dos contratos começarem de um determinado valor e, no seu vencimento, assumirem o valor 100.000; como também consideramos que cada data de referência define um momento econômico diferente que deve influenciar no preço do contrato.

Esse momento econômico seria representado simplesmente pelos juros de curto prazo\*  $r(t)$ . Logo, vemos que o contrato deve depender de  $t$ ,  $s$  e  $r(t)$ :

$$P(t, s) = P(t, s, r(t)) \quad (3.1)$$

---

\*Em modelos mais elaborados, o momento econômico é representado não só pelo juros a vista mas também por pela estrutura a termo da taxa de juros definido na data de referência em questão. Embora existem modelos mais elaborados, acreditamos que os modelos de um fator devem descrever bem o Mercado Futuro de DI sendo esse mercado essencialmente de curto prazo.

Portanto, se tivermos um modelo para  $r(t)$ , basta utilizar o lema de Itô para termos a evolução de  $P$  no tempo. Para  $r(t)$ , vamos supor que a *spot rate* siga um processo de Markov contínuo. A propriedade de Markov implica que o processo de  $r(t)$  é caracterizado por uma única variável de estado, o seu valor atual. Portanto, a distribuição de probabilidade do segmento  $\{r(\tau), \tau \geq t\}$  é completamente determinado pelo valor de  $r(t)$ . Processos que são Markov e contínuos são chamados de processos de difusão. Esses processos podem ser descritos por uma equação estocástica da forma:

$$dr = f(r, t)dt + \rho(r, t)dz \quad (3.2)$$

onde  $z(t)$  é um processo de Wiener com incremento de variância  $dt$ . As funções  $f(r, t)$ ,  $\rho^2(r, t)$  são o *drift* e a variância instantâneos, respectivamente, do processo  $r(t)$ .

Logo, aplicando o lema de Itô a 3.1 considerando 3.2 vemos que o incremento percentual de  $P$  evolui da forma:

$$\frac{dP}{P} = \mu(t, s)dt - \sigma(t, s)dz \quad (3.3)$$

onde:

$$\mu(t, s, r) = \frac{1}{P(t, s, r)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] P(t, s, r) \quad (3.4)$$

$$\sigma(t, s, r) = -\frac{1}{P(t, s, r)} \rho \frac{\partial}{\partial r} P(t, s, r) \quad (3.5)$$

As funções  $\mu(t, s, r)$  e  $\sigma^2(t, s, r)$  são a média e a variância, respectivamente, da taxa instantânea de retorno no tempo  $t$  de um contrato com vencimento em  $s$ , dado que a *spot rate* é  $r(t) = r$ .

Agora que sabemos como o contrato evolui no tempo, podemos aplicar um argumento de arbitragem semelhante ao modelo de Black & Scholes [23]. Para isso, supomos que um investidor no tempo  $t$  construa uma carteira de  $W$  reais vendendo  $W_1$  contratos com vencimento em  $s_1$ , e simultaneamente comprando  $W_2$  contratos com vencimento em  $s_2$ . Logo, o ganho instantâneo dessa carteira será o ganho obtido pelo contrato que vence em  $s_2$  menos o ganho obtido com o contrato que vence em  $s_1$ , ou seja:

$$dW = W_2 \frac{dP(t, s_2, r)}{P(t, s_2, r)} - W_1 \frac{dP(t, s_1, r)}{P(t, s_1, r)} \quad (3.6)$$

substituindo pelas expressões 3.5 e 3.4 obtemos:

$$dW = (W_2\mu(t, s_2) - W_1\mu(t, s_1))dt - (W_2\sigma(t, s_2) - W_1\sigma(t, s_1))dz \quad (3.7)$$

Assim como em [23], a nossa intenção é fazer com que a carteira seja determinística, ou seja, que não haja componentes aleatórias, para isso, escolhemos  $W_1$  e  $W_2$  de forma a zerar o termo que multiplica  $dz$ . Escolhendo  $W_1 = W \frac{\sigma(t, s_2)}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)}$  e  $W_2 = W \frac{\sigma(t, s_1)}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)}$  alcançamos tal objetivo. Portanto, 3.7 se torna:

$$dW = W \frac{\mu(t, s_2)\sigma(t, s_1) - \mu(t, s_1)\sigma(t, s_2)}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)} dt \quad (3.8)$$

Ainda inspirados pelo modelo de Black & Scholes, supomos que a carteira  $W$  evolua com a *spot rate* livre de risco  $r(t)$ , ou seja:

$$dW = Wr(t)dt \quad (3.9)$$

de 3.8 e 3.9 temos:

$$\frac{\mu(t, s_1) - r(t)}{\sigma(t, s_1)} = \frac{\mu(t, s_2) - r(t)}{\sigma(t, s_2)} \quad (3.10)$$

Como 3.10 é válida para vencimentos arbitrários  $s_1$  e  $s_2$ , segue que a razão  $(\mu(t, s) - r(t))/\sigma(t, s)$  é independente de  $s$ . Chamando essa razão de  $q$ , temos:

$$q(t, r) = \frac{\mu(t, s) - r(t)}{\sigma(t, s)} \quad (3.11)$$

Podemos chamar  $q$  de *Market Price of Risk* sendo  $q$  o excesso do retorno instantâneo esperado de qualquer contrato do mercado por sua unidade de risco correspondente. Escrevendo 3.11 na forma:

$$P\mu(t, s, r) - q(t, r)P\sigma(t, s, r) - rP = 0 \quad (3.12)$$

e substituindo  $\mu$ ,  $\sigma$  das equações 3.5 e 3.4, temos:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (f + \rho q) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (3.13)$$

A equação 3.13 é a equação básica a precificação dos contratos dadas as hipóteses assumidas. Para precificar um contrato, precisamos especificar o *drift*  $f$  e a variância

$\rho$  instantâneos do modelo para a *spot rate*, a função *Market Price of Risk*  $q(t, r)$  e resolver 3.13 sujeita a condição de contorno<sup>†</sup>:

$$P(s, s, r) = 100.000 \quad (3.14)$$

### 3.2 O Modelo Proposto por Vasicek

Afim de ilustrar como funcionaria sua metodologia, Vasicek [24] propõe de todas as hipóteses razoáveis para  $q$  e  $r$  as mais simples. Para  $r$ , supôs um processo de reversão a média com variância instantânea constante, ou seja:

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz \quad (3.15)$$

onde  $\alpha$  é a taxa com que  $r$  tende a retornar a sua média  $\gamma$  com o incremento tendo variância constante  $\rho^2$ . E para o *Market Price of Risk*  $q$ , Vasicek supôs que fosse constante. Com essas hipóteses podemos resolver 3.13 com a condição de contorno 3.14 obtendo a solução:

$$P(t, s, r) = P(m, r) = A(m)e^{B(m)r} \quad (3.16)$$

Lembrando que  $m = s - t$ , onde

$$A(m) = 10^5 \exp \left[ \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha m}) R_\infty(\gamma, q, \rho) - m R_\infty(\gamma, q, \rho) - \frac{\rho^2}{4\alpha^3} (1 - e^{-\alpha m})^2 \right] \quad (3.17)$$

$$B(m) = \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha m} - 1) \quad (3.18)$$

com

$$R_\infty(\gamma, q, \rho) = \gamma + \rho q / \alpha - \frac{1}{2} \rho^2 / \alpha^2 \quad (3.19)$$

---

<sup>†</sup>Alternativamente, as soluções de equações parabólicas ou elípticas tais como 3.13 podem ser representadas na forma integral em termos do processo estocástico envolvido. Essa representação para o preço do contrato como solução da equação 3.13 e sua condição de contorno é dada por:

$$P(t, s) = E_t \exp \left( - \int_t^s r(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^s q^2(\tau, r(\tau)) d\tau + \int_t^s q(\tau, r(\tau)) dz(\tau) \right)$$

### 3.3 O Modelo de Cox, Ingersoll e Ross

Quando Vasicek propõe o modelo como exemplo de sua metodologia, não mostra nenhum argumento empírico ou teórico para sustentar a hipótese sobre o *Market Price of Risk*, ele o assume constante por simplicidade. Por não ser mensurável, dificilmente fariam-se hipóteses com bases empíricas, mas apenas oito anos depois de Vasicek publicar seu artigo, Cox, Ingersoll & Ross (CIR) [25] tentaram dar sustentação teórica a uma hipótese para essa grandeza.

Em seu trabalho, CIR consideram que a precificação de *bonds*<sup>‡</sup> constitui um problema da teoria de equilíbrio geral. Dessa forma seria possível prever como possíveis mudanças num grande número de variáveis que permeiam o mercado <sup>§</sup> influenciariam o preço dos contratos.

Para isso, CIR constroem uma economia que produz uma mercadoria através de  $n$  processos produtivos. A taxa de retorno do valor esperado de cada sistema produtivo, depende de um vetor de variáveis estado de  $k$  dimensões que representa o estado tecnológico de cada sistema. Supõem que cada agente dessa economia aja racionalmente procurando maximizar seu lucro. O resultado dessa maximização mostra quanto cada agente deve investir em cada processo de produção e em seus respectivos *contingent claims* <sup>¶</sup>. O dinheiro restante a ser investido emprestando ou tomando emprestado a uma taxa de juros  $r$  é então limitado pelo orçamento. No equilíbrio dessa sociedade homogênea, a taxa de juros e a taxa de retorno esperada dos *contingent claims* devem se ajustar até toda a riqueza ser investida nos processos produtivos. A partir desse ponto, podemos fazer diferentes considerações sobre as variáveis de estado gerando diferentes modelos para os contratos. Neste trabalho, consideraremos o modelo mais simples proposto por CIR. Nesse modelo, fazemos  $k = 1$ , as médias e variâncias das taxas de retorno dos processos produtivos serão proporcionais às variáveis de estado e suporemos que as variáveis de estado sigam um processo estocástico de forma que a *spot rate* possua a forma:

<sup>‡</sup>São títulos que possuem um valor determinado no seu vencimento.

<sup>§</sup>Essas variáveis não são as variáveis de nível 2, mas variáveis tais como o estado de tecnologia de cada sistema produtivo, a função utilidade de cada agente etc.

<sup>¶</sup>Do inglês podemos traduzir como direitos condicionais, são os seguros criados para garantir os processos produtivos.

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz \quad (3.20)$$

O processo 3.20 poderia descrever melhor a *spot rate* sendo que se os parâmetros forem positivos e  $2\alpha\gamma \geq \sigma^2$  a taxa de juros nunca chega a ser negativa.

Utilizando a condição de equilíbrio para os *contingent claims* e as hipóteses citadas CIR chegam a equação :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \alpha(\gamma - r) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} - \lambda r \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0 \quad (3.21)$$

Onde  $\lambda$  é um multiplicador de Lagrange originário do problema de maximização da função utilidade dos agentes dessa economia.

comparando 3.21 com 3.13, vemos que:

$$q(t, r) = -\frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r} \quad (3.22)$$

Resolvendo 3.21 com a condição 3.14 obtemos a solução com a mesma forma 3.16 onde  $A(m)$  e  $B(m)$  são:

$$A(m) = \left[ \frac{2\nu e^{[(\alpha+\lambda+\nu)m]/2}}{(\nu + \alpha + \lambda)(e^{\nu m} - 1) + 2\nu} \right]^{2\alpha\gamma/\sigma^2} \quad (3.23)$$

$$B(m) = -\frac{2(e^{\nu m} - 1)}{(\nu + \alpha + \lambda)(e^{\nu m} - 1) + 2\nu} \quad (3.24)$$

onde

$$\nu = \sqrt{(\alpha + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

### 3.4 O Modelo Misto

A idéia dessa seção é explorar mais possibilidades fornecidas pela metodologia de Vasicek. Inspirados pelas soluções de CIR e do próprio Vasicek vamos utilizar a parametrização 3.16 para obter:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -A'e^{rB} - rB'Ae^{rB} = -P \left( \frac{A'}{A} + rB' \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = BP$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = B^2 P$$

onde  $(') = \frac{\partial}{\partial m} = -\frac{\partial}{\partial t}$

Para a spot rate, vamos supor um processo de reversão a média com uma variância instantânea  $\rho(t, r)$ , ou seja:

$$dr = \alpha(\gamma - r) + \rho(t, r)dz \tag{3.25}$$

substituindo na equação 3.13, temos

$$f_1(t) + f_2(t)r + f_3(t, r) = 0 \tag{3.26}$$

onde:

$$f_1(t) = -\frac{A'}{A} + \alpha\gamma B \tag{3.27}$$

$$f_2(t) = -B' - \alpha B - 1 \tag{3.28}$$

$$f_3(t, r) = \rho(t, r)q(t, r)B + \frac{1}{2}\rho(t, r)^2 B^2 \tag{3.29}$$

Derivando 3.26 em relação a  $r$  temos:

$$\frac{\partial f_3}{\partial r} = \frac{\partial(\rho q)}{\partial r} B + \rho \frac{\partial \rho}{\partial r} B^2 = -f_2(t) \tag{3.30}$$

Para que o lado esquerdo de 3.30 seja uma função apenas de  $t$  assim como no lado direito, devemos ter:

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial r} = c_1(t) \tag{3.31}$$

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial r} = c_2(t) \tag{3.32}$$

resolvendo a equação 3.32 obtemos:

$$\rho = \sqrt{2c_2(t)r + 2c_3(t)} \tag{3.33}$$

com esse resultado, podemos resolver 3.31 para obter o *Market Price of Risk*:

$$q(t, r) = \frac{c_1(t)r + c_4(t)}{\sqrt{2c_2(t)r + 2c_3(t)}} \tag{3.34}$$

Se  $c_3(t) = c_4(t) = 0$ ,  $c_1(t) = -\lambda$  e  $c_2(t) = \sigma^2/2$  temos a solução de CIR enquanto que se  $c_1(t) = c_2(t) = 0$ ,  $c_3(t) = \rho^2/2$  e  $c_4(t) = \rho q$  com  $\rho$  e  $q$  constantes, temos a solução de Vasicek. Esse fato justifica a nomenclatura adotada para o modelo. Por simplicidade, vamos supor  $c_1, c_2, c_3, c_4$  constantes. Portanto, com essas hipóteses 3.30 se torna:

$$f_2(t) = -c_1 B - c_2 B^2 \tag{3.35}$$

substituindo 3.28 em 3.35, obtemos a equação para  $B$ :

$$B' = c_2 B^2 + (c_1 - \alpha) B - 1 \tag{3.36}$$

com a condição inicial

$$B(0) = 0 \tag{3.37}$$

Obtendo a solução de  $B(m)$ , podemos substituir 3.33, 3.34, 3.35, 3.27 e 3.29 em 3.26 para obter a equação:

$$A' = A[(\alpha\gamma + c_4)B + c_3 B^2] \tag{3.38}$$

com a condição inicial:

$$A(0) = 10^5 \tag{3.39}$$

Revolvemos o modelo misto numericamente discretizando 3.36:

$$B_{m+\delta} = B_m + [c_2 B_m^2 + (c_1 - \alpha) B_m - 1] \delta \tag{3.40}$$

onde  $\delta$  é a unidade de tempo escolhida para discretização. Com a condição inicial dada por 3.37. Tendo a solução de  $B$ , discretizamos a equação 3.38:

$$A_{m+\delta} = A_m + A_m [(\alpha\gamma + c_4) B_m + c_3 B_m^2] \delta \tag{3.41}$$

com a condição inicial dada por 3.39.

## Capítulo 4

# Fenomenologia dos Modelos de Equilíbrio

Neste capítulo, justificamos o título da dissertação analisando propriedades empíricas dos contratos embasados com os aspectos teóricos desenvolvidos no capítulo 3. Como vimos no capítulo anterior na metodologia de Vasicek, o modelo para a *spot rate* deve influenciar na precificação dos contratos. O acordo entre as estimativas dos parâmetros obtidos pela *spot rate* e os contratos poderia ser um indicador da veracidade dos modelos e da metodologia.

### 4.1 Spot Rate

Antes de precificarmos os contratos, precisamos de um modelo para a *spot rate*. Nesta seção, analisaremos algumas propriedades empíricas do DI e como os modelos propostos por Vasicek e CIR se ajustam a ele.

Para estudarmos a estrutura temporal de uma série empírica estocástica, precisamos de um modelo previamente escolhido. Antes de assumirmos tal modelo, abriremos mão temporariamente da estrutura temporal para um breve estudo das propriedades da distribuição incondicional dos retornos  $h$  do DI. A idéia seria que a cada instante, o DI sofresse uma mudança devido a um choque aleatório. É a distribuição desses choques que estaríamos interessados.

Definimos:

$$h_t = \ln(r_t) - \ln(r_{t-1}) \quad (4.1)$$

onde  $r$  é a *spot rate* DI.

Calculando a curtose de  $h$  dos dados referentes de 02/01/1996 a 04/10/2004, (que resulta numa amostra de 2202 dados) obtemos o valor 489 que sugere caudas bem gordas\* (*fat tails*). Por isso, consideramos a possibilidade de  $h$  possuir uma distribuição não Gaussiana. Se ainda quisermos trabalhar com distribuições estáveis como a Gaussiana, devemos olhar para o trabalho de Lévy. Lévy resolveu o problema genérico de determinar toda a classe de distribuições estáveis. Dentro dessa classe, encontramos a distribuição Gaussiana, a Lorentziana e a de Levy-Smirnov como exemplos de distribuições com representação analítica<sup>†</sup>. A vantagem de se trabalhar com distribuições estáveis provém do fato de que associados a elas temos um teorema de limite afirmando que a pdf  $P$  (*probability distribution function*) da soma de  $n$  variáveis i.i.d. (independentes e igualmente distribuídas)  $x_i$  converge, em probabilidade, para uma distribuição estável sob certas condições na pdf da variável aleatória  $x_i$ . Considerando o processo estocástico  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ , com  $x_i$  sendo variáveis aleatórias i.i.d., suponha:

$$P(x_i) \sim \begin{cases} C_- |x_i|^{-(1+\alpha)} & \text{para } x \rightarrow -\infty \\ C_+ |x_i|^{-(1+\alpha)} & \text{para } x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.2)$$

e

$$\beta \equiv \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-} \quad (4.3)$$

Então  $\tilde{P}(\tilde{S}_n) \equiv P(S_n)n^{1/\alpha}$  com  $\tilde{S}_n \equiv \frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$  converge para uma distribuição de Levy  $P_L(x)$  de índice  $\alpha$  e parâmetro de assimetria  $\beta$ , e  $P(S_n)$  pertence a base do atração de  $P_L(x)$  (ver [26]).

---

\*Para uma distribuição normal, temos a curtose igual a zero.

<sup>†</sup>Podemos representar a distribuição de Lévy  $P_L(x)$  através da sua transformada de Fourier:

$$P_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(q) e^{-iqx} dq$$

$$\ln \phi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma|q|^\alpha \left[ 1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right] & [\alpha \neq 1] \\ i\mu q - \gamma|q| \left[ 1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln|q| \right] & [\alpha = 1] \end{cases}$$

Para tentar explorar essas propriedades dos dados do DI, definimos:

$$S_{t,\tau} = \sum_{i=1}^{\tau} h_{t+i} = \ln r_{t+\tau} - \ln r_t \quad (4.4)$$

Também podemos definir os retornos normalizados  $G_{t,\tau}$ :

$$G_{t,\tau} = \frac{S_{t,\tau} - \langle S_{\tau} \rangle}{\sigma_{S_{\tau}}} \quad (4.5)$$

Dessa forma, a amostra  $G_{\tau} = \{G_{t,\tau}\}_{t=1}^{T_{\tau}}$  sendo  $T_{\tau} = T_f - \tau$  e  $T_f$  o dia referente ao último dado da série do DI, se satisfizer o teorema limite, deve possuir  $\zeta_{\tau} = 1 + \alpha_{\tau}$  constante. Para estimar  $\zeta_{\tau}$ , utilizamos o método proposto em [27]. Neste método, estimamos  $\zeta_{\tau}$  referente à parte positiva da distribuição, ordenando os elementos da amostra em ordem crescente de modo que  $G_{1,\tau} \leq G_{2,\tau} \leq \dots \leq G_{T_{\tau}-\tau,\tau}$ . Podemos estimar  $\hat{\zeta}_{\tau}$  como:

$$\hat{\zeta}_{\tau} = \left( s^{-1} \sum_{j=1}^s \log G_{(T_{\tau}-j+1),\tau} - \log G_{(T_{\tau}-s),\tau} \right)^{-1} \quad (4.6)$$

onde  $s$  é o tamanho da amostra referente a cauda da distribuição. Para estimar  $s = s_{\tau}(T_{\tau})$ , usamos  $s_{\tau}(T_{\tau}) = \min(0, 1T_{\tau}, \lambda T_{\tau}^{2/3})$  onde

$$\hat{\lambda} = |\hat{\zeta}_1 / 2^{1/2} (T/s_2) (\hat{\zeta}_1 - \hat{\zeta}_2)|^{2/3}$$

$\hat{\zeta}_1$  e  $\hat{\zeta}_2$  são estimativas preliminares de  $\zeta_{\tau}$  usando  $s_1 = T_{\tau}^{\sigma}$  e  $s_2 = T_{\tau}^{\nu}$  com  $\sigma = 0,6$  e  $\nu = 0,9$ . Ao analisarmos  $\hat{\zeta}_{\tau}$ , vemos que no intervalo  $1 < \tau < 86$ ,  $\hat{\zeta}_{\tau}$  é delimitado em  $0,9 < \hat{\zeta}_{\tau} < 1,5$ . Também vemos uma descontinuidade em  $\tau = 86$  com  $\hat{\zeta}_{\tau}$  sendo delimitado entre  $2 < \hat{\zeta}_{\tau} < 2,5$  para  $\tau > 86$  como mostra a figura 4.1.

Onde  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $\gamma$  é um fator de escala positivo,  $\mu$  é qualquer número real, e  $\beta$  é o parâmetro de assimetria que vai de -1 a 1.

A forma analítica de  $P_L(x)$  é conhecida apenas para alguns valores de  $\alpha$  e  $\beta$  entre esses valores temos:

- $\alpha = 1/2, \beta = 0$  (Lévy-Smirnov)
- $\alpha = 1, \beta = 0$  (Lorentziana)
- $\alpha = 2, \beta = 0$  (Gaussiana)

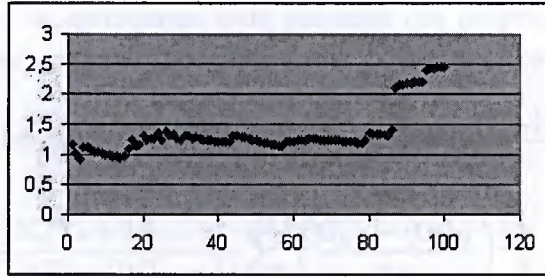


Figura 4.1: Gráfico de  $\zeta_\tau$  x  $\tau$  dos dados normalizados  $G_{t,\tau} = \frac{S_{t,\tau} - (S_\tau)}{\sigma_{S_\tau}}$

Devido a essa regularidade de  $\hat{\zeta}_\tau$ , variando lentamente nos intervalos  $1 < \tau < 86$ , e  $86 < \tau < 100$  e pelo fato de  $\hat{\alpha}_\tau = \hat{\zeta}_\tau - 1$  ser compatível com o intervalo  $0 < \hat{\alpha}_\tau < 2$  somos levados a inferir que os retornos do DI podem possuir uma distribuição de Lévy com variância infinita no intervalo  $1 \leq \tau \leq 86$ .

Esta conclusão é comprometida quando calculamos  $\zeta_\tau^-$  referente a parte negativa da distribuição. Para este cálculo, basta repetir o procedimento anterior ordenando os dados na ordem decrescente. Quando comparamos o comportamento dos dois expoentes, vemos que eles possuem um comportamento grosseiramente semelhante apenas na região  $\tau > 86$  como mostra a figura 4.2 contrariando a expressão 4.2 onde se esperaria o mesmo expoente para ambos os lados da distribuição. Este

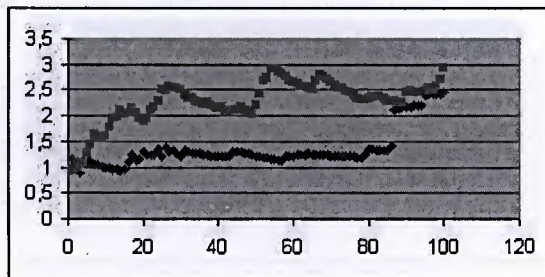


Figura 4.2: Gráfico dos expoentes  $\hat{\zeta}_\tau^+$  e  $\hat{\zeta}_\tau^-$

fato, nos mostra empiricamente que a taxa de juros brasileira sobe abruptamente e cai lentamente. Entretanto, vemos que com o aumento de  $\tau$  as propriedades das

distribuições de  $G_{t,\tau}$  se aproximam cada vez mais das propriedades da Gaussiana. Este fato se confirma quando calculamos a distorção e a curtose definidas como :

$$\text{dist}_{G_\tau} = \frac{T_\tau}{(T_\tau - 1)(T_\tau - 2)} \sum_{i=1}^{T_\tau} \left( \frac{G_{t,\tau} - \langle G_{t,\tau} \rangle}{\sigma_{G_\tau}} \right)^3 \tag{4.7}$$

$$\text{curt}_{G_\tau} = \left\{ \frac{T_\tau(T_\tau + 1)}{(T_\tau - 1)(T_\tau - 2)(T_\tau - 3)} \sum_{i=1}^{T_\tau} \left( \frac{G_{t,\tau} - \langle G_{t,\tau} \rangle}{\sigma_{G_\tau}} \right)^4 \right\} - \frac{3(T_\tau - 1)^2}{(T_\tau - 2)(T_\tau - 3)} \tag{4.8}$$

Como vemos nas figuras 4.3 e 4.4, as curvas  $\text{dist}_G(\tau)$  e  $\text{curt}_G(\tau)$  tendem a zero quando  $\tau \rightarrow \infty$ .

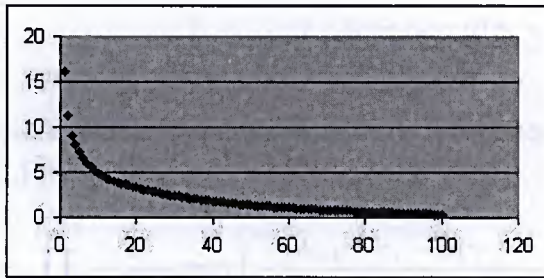


Figura 4.3: Gráfico de  $\text{dist}_G(\tau)$

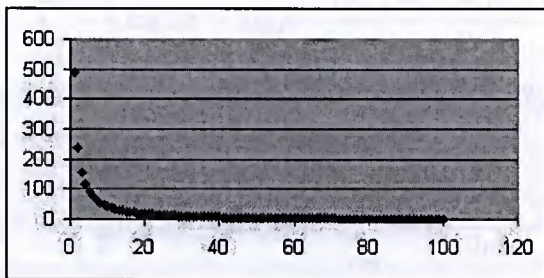


Figura 4.4: Gráfico de  $\text{curt}_G(\tau)$

Analisadas algumas propriedades da distribuição incondicional dos retornos do DI, nas duas próximas subseções, estaremos estudando o ajuste dos modelos para a *spot rate* sugeridos por Vasicek e CIR.

### 4.1.1 A Spot Rate segundo Vasicek

Lembrando a seção 3.2, Vasicek sugere que a *spot rate* siga o processo 3.15:

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz$$

discretizando essa equação temos:

$$r_{t+1} = r_t + \alpha(\gamma - r_t) + \rho z \quad z \sim N(0, 1) \quad (4.9)$$

de 4.9 podemos aproximar a função densidade de probabilidade de  $r_{t+1}$  assumir o valor  $r$  dado que era  $r_t$  em  $t$  por:

$$P(r_{t+1} = r | r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho^2}} \exp\left(-\frac{(r - r_t - \alpha(\gamma - r_t))^2}{2\rho^2}\right) \quad (4.10)$$

nessa aproximação, para estimar os parâmetros  $\alpha, \gamma$  e  $\rho$  devemos maximizar a função *likelihood function*<sup>†</sup>  $LF(\alpha, \gamma, \rho)$  :

$$LF = \prod_{t=1}^{T_f-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho^2}} \exp\left(-\frac{(r_{t+1} - r_t - \alpha(\gamma - r_t))^2}{2\rho^2}\right) \quad (4.11)$$

Por simplicidade podemos, ao invés de maximizar 4.11, maximizar o seu logaritmo LLF:

$$LLF = \sum_{t=1}^{T_f-1} -\frac{1}{2} \log 2\pi - \log \rho - \frac{(r_{t+1} - r_t - \alpha(\gamma - r_t))^2}{2\rho^2} \quad (4.12)$$

Introduzindo a notação:  $n = T_f - 1$ ,  $x = \{r_t; t = 1, \dots, T_f - 1\}$ ,  $y = \{r_t; t = 2, \dots, T_f\}$  e  $\hat{y}_i(\alpha, \gamma) = \alpha(\gamma - x_i)$  4.12 se torna:

$$LLF = -\frac{n}{2} \log 2\pi - n \log \rho - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i(\alpha, \gamma))^2}{2\rho^2} \quad (4.13)$$

Fazendo  $\frac{\partial LLF}{\partial \omega} = 0$  com  $\omega = \alpha, \gamma, \rho$  obtemos um sistema de equações que têm como solução:

$$\hat{\gamma} = \frac{\bar{x}S_{xy} - \bar{y}S_{xx}}{S_x(\bar{x} - \bar{y}) - S_{xx} + S_{xy}} \quad (4.14)$$

<sup>†</sup>Para estimarmos os parâmetros desse modelo utilizamos o método da máxima verossimilhança por ser o método mais simples que fornece uma estimativa para  $\rho$ .

|                |               |
|----------------|---------------|
| $\hat{\alpha}$ | 0,007240345   |
| $\hat{\gamma}$ | 0,00076633082 |
| $\hat{\rho}$   | 0,00002488508 |

Tabela 4.1: tabela com as estimativas do modelo de Vasicek para a spot rate aplicada a série do DI.

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\bar{x} - \hat{\gamma}} \quad (4.15)$$

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i(\alpha, \gamma))^2}{n}} \quad (4.16)$$

Onde  $\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$  e  $S_{AB} = \sum_{i=1}^n A_i B_i$ . Na tabela 4.1, temos esses resultados aplicados a série do DI.

Com essas estimativas, podemos voltar para os dados e verificar se  $z_i = \frac{y_i - \hat{y}_i(\alpha, \gamma)}{\hat{\rho}}$  é distribuído como uma distribuição normal de média zero e variância 1. Na tabela 4.2 temos um resumo com a estatística descritiva de  $z_i$ . Nessa tabela vemos que a média e a variância são tais como as da Gaussiana, mas a curtose e a distorção são bastante diferentes, mostrando caudas gordas e uma tendência da previsão estar abaixo do valor real para a maior parte dos dados e estar superestimada para um pequeno número de pontos. Este fato novamente confirma que os juros sobem abruptamente e caem lentamente no período considerado. Outra conclusão importante é que a reversão á média não foi capaz de filtrar os efeitos não gaussianos verificados na seção anterior.

#### 4.1.2 A Spot Rate segundo CIR

Como citado na seção 3.3 CIR sugerem para a spot rate o processo dado pela equação:

$$dr = \alpha_{cir}(\gamma_{cir} - r)dt + \rho_{cir}\sqrt{r}dz \quad (4.17)$$

Se discretizarmos 4.17 e repetir o procedimento da subseção anterior, encontraremos um sistema que não possui solução real para a série dada. Isto se deve ao fato da solução de 4.17 possuir uma distribuição condicional  $\chi^2$  não central sendo a

| <i>Estatística de <math>z_i</math></i> |              |
|--|--------------|
| Média                                  | 7,41816E-15  |
| Mediana                                | -0,021626644 |
| Variância da amostra                   | 1,000474608  |
| Curtose                                | 584,8093117  |
| Assimetria                             | 18,40592197  |

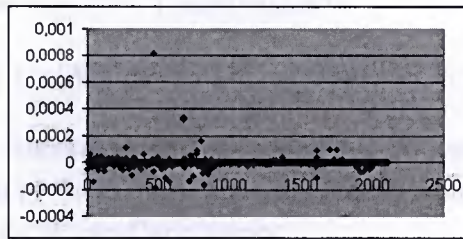
Tabela 4.2: Tabela com o resumo da estatística descritiva de  $z_i$  do modelo de Vasicek.

Figura 4.5: Gráfico de  $z_i$  em função do tempo. Neste gráfico, podemos ver a presença de eventos extremos e uma tendência da previsão estar pouco subestimada na maior parte das vezes e superestimada para um pequeno conjunto de pontos.

aproximação Gaussiana imprópria para a discretização dada. Para resolver esse problema, utilizaremos o método SML<sup>§</sup>. Neste método, consideramos o processo:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \quad (4.18)$$

sendo  $W_t$  um processo de Wiener. Se  $p(y|x, \delta)$  é a densidade de probabilidade exata de  $X_{t+\delta}$  assumir o valor  $y$  dado que em  $t$  era  $X_t = x$ ; e que a aproximação Gaussiana deve ser suficiente na discretização por um  $\delta \ll \Delta$  escolhemos  $\delta = \Delta/N$  para um  $N$  suficientemente grande, e utilizando o teorema de Chapman-Kolmogorov podemos escrever:

$$p(y|x; \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y|z; \delta)p(z|x; \Delta - \delta)dz = E^z\{p(y|z; \delta)|x; \Delta - \delta\} \quad (4.19)$$

<sup>§</sup>do Inglês *Simulated Maximum Likelihood*, algo como o método da máxima verossimilhança simulada [28].

Fazendo a hipótese que a aproximação Gaussiana é válida para o intervalo  $\delta$  :

$$p(y|z; \delta) \approx \phi(y|z; \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2(z)\delta}} \exp \left[ -\frac{\{y - z - \mu(z)\delta\}^2}{2\sigma^2(z)\delta} \right] \quad (4.20)$$

Reduzimos o nosso problema ao cálculo do valor esperado  $E^z(\cdot)$  da equação 4.19, sendo que se obtivermos  $p(y|x; \Delta)$ , podemos aplicar o método da máxima verossimelhança assim como na subseção anterior. Como não sabemos a forma analítica de  $p(z|x; \Delta - \delta)$  usaremos simulações de Monte-Carlo.

Começando de  $x = X_t$ , simulamos uma realização  $z_i$  de  $p(z|x; \Delta - \delta)$  utilizando a discretização de Euler com  $N - 1$  subdivisões<sup>¶</sup>:

$$X_{t+(j+1)\delta} = X_{t+j\delta} + \mu(X_{t+j\delta})\delta + \sigma(X_{t+j\delta})\sqrt{\delta}u_{i,j} \quad j = 0, 1, \dots, N - 2 \quad (4.21)$$

onde  $u_{i,j} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Repetindo esse procedimento  $M$  vezes, obtemos a amostra  $\{z_i\}_{i=1}^M$  da distribuição  $p(z|x; \Delta - \delta)$ . Dessa forma, podemos estimar  $p(X_{t+\Delta}|X_t)$  através de simulações de Monte-Carlo como:

$$p^{(M,N)}(X_{t+\Delta}|X_t; \Delta) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \phi(X_{t+\delta}|z_i; \delta) \quad (4.22)$$

com  $\phi(\cdot)$  dado por 4.20. Temos a convergência de  $p^{(M,N)}(X_{t+\Delta}|X_t; \Delta) \rightarrow p(X_{t+\Delta}|X_t; \Delta)$  quando  $M, N \rightarrow +\infty$ . Segundo Honoré citado em [28], um valor moderado para  $N$  deve ser suficiente, (a aproximação com  $N = 2$  já melhora bastante em relação a aproximação pura de Euler  $N = 1$ ), o importante é que  $M \gg N$ . De posse de  $p^{(M,N)}(X_{t+\Delta}|X_t; \Delta)$ , podemos maximizar a LLF:

$$\text{LLF} = \sum_{t=1}^{T_f-1} \log p^{(M,N)}(X_{t+\Delta}|X_t; \Delta) \quad (4.23)$$

para encontrar os parâmetros presentes nas funções  $\sigma_\Delta(X_t)$  e  $\mu_\Delta(X_t)$ . No caso da estimativa de CIR:  $\mu_\Delta(X_t) = \alpha_{cir}(\gamma_{cir} - r_t)$  e  $\sigma_\Delta(X_t) = \rho_{cir}\sqrt{r_t}$  com  $\Delta = 1$ .

Utilizando  $M = 1000$ ,  $N = 5$  maximizamos 4.23 com método *downhill simplex* de Nelder e Mead [29] com condições iniciais adequadas encontrando estimativas para os parâmetros  $\hat{\alpha}_{cir}$ ,  $\hat{\gamma}_{cir}$  e  $\hat{\rho}_{cir}$ , como mostra a tabela 4.3:

<sup>¶</sup>Note que  $(N - 1)\delta = \Delta - \delta$

|                      |              |
|----------------------|--------------|
| $\hat{\alpha}_{cir}$ | 0,0072369    |
| $\hat{\gamma}_{cir}$ | 0,00076047   |
| $\hat{\rho}_{cir}$   | 0,0000259259 |

Tabela 4.3: Tabela com as estimativas do modelo para a *spot rate* proposto por CIR através do método SML.

## 4.2 A Parametrização Exponencial

Como vimos no capítulo 3, a solução da equação 3.13 para diferentes especificações do *Market Price of Risk* e do modelo para a *spot rate* parece ter a dependência em  $r(t)$  com a forma:

$$P(m, r) = A(m)e^{B(m)r} \quad (4.24)$$

Para dar sustentação empírica a essa hipótese, separamos os contratos por sua maturidade  $m$  tal como na seção 2.3, e definindo:

$$l(m, r) = \ln(P(m, r)) = \ln A(m) + B(m)r \quad (4.25)$$

calculamos a correlação:

$$\text{corr}_{l,r}(m) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (l(t_k, m) - \langle l(m) \rangle) (r(t) - \langle r(t) \rangle)}{\sigma_l \sigma_r} \quad (4.26)$$

Onde as médias são calculadas com relação a amostra definida por  $m$ . Utilizando dados de 1991 a 2004, vemos que um modelo linear para  $l(m, r)$  explicaria bem os dados para quase todo  $m$  como mostra a figura 4.6 onde  $\text{corr}_{l,r}(m) \approx -1$  para a maior parte das maturidades.

Com o ajuste 4.25, determinamos  $A(m)$  e  $B(m)$  como mostram as figuras 4.7 e 4.8.

Nestes gráficos vemos uma anomalia nos pontos em que  $m > 79$ , pois nesses pontos,  $B(m)$  começa crescer com  $m$  e  $A(m)$  cai abruptamente. Este fato além de ir contra a intuição, não é explicado por nenhum modelo conhecido. A causa dessa anomalia reside no fato de que nessa análise utilizamos os dados do período de 1991 a 1994 quando a política monetária brasileira não estava bem estabelecida, podendo ser a causa de tal anomalia. Chamamos a atenção a esse fato pois essa anomalia

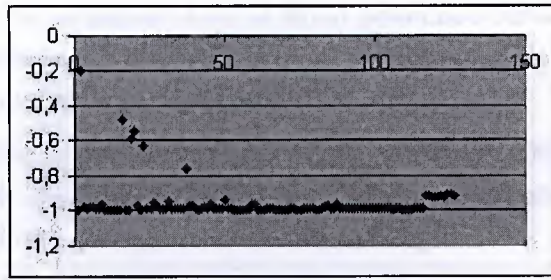


Figura 4.6: Gráfico de  $\text{corr}_{l,r}(m)$  para os dados de 1994 a 2004, um modelo linear para  $l(m,r)$  descreveria bem os dados para quase todo  $m$ .

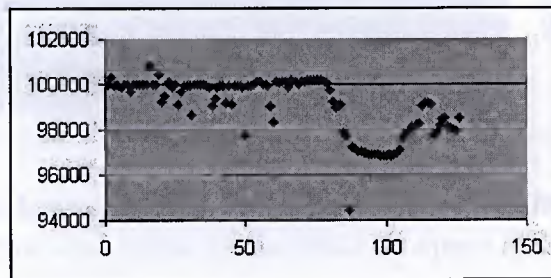


Figura 4.7: Gráfico de  $A(m)$  utilizando os dados de 1991 a 2004. Neste gráfico, vemos um comportamento anômalo para  $m > 79$  onde  $A$  cai abruptamente devido ao aumento de  $B$ .

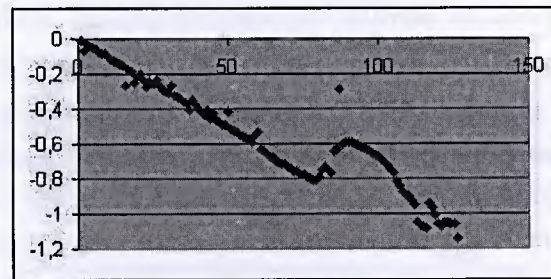


Figura 4.8: Gráfico de  $B(m)/100$  para o período de 1991 a 2004. Para  $m > 79$   $B$  começa a aumentar com  $m$ , fato que não é explicado por nenhum modelo de equilíbrio conhecido.

possui um padrão com as curvas  $A(m)$  e  $B(m)$  possuindo certa continuidade e com coeficiente de correlação do ajuste de  $l(m, r) \times r$  próximo de  $-1$ , mostrando que deve existir algum modelo que explique esse fato.

Então, para evitar anomalias, utilizamos os dados de 1996 a 2004. Para esses dados, vemos que o ajuste linear 4.25 parece perder qualidade quando olhamos o coeficiente de correlação  $\text{corr}_{l,r}(m)$  como mostra a figura 4.9.

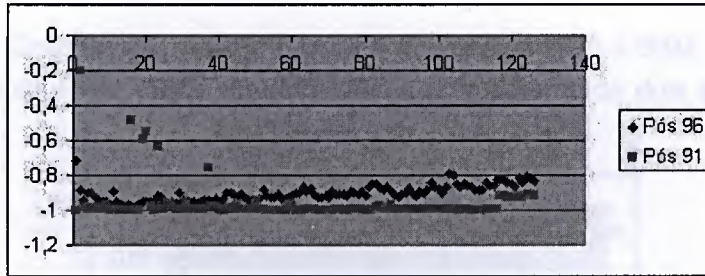


Figura 4.9: Gráfico da correlação de  $l$  e  $r$  para os dados de 1991 a 2004 e de 1996 a 2004, vemos que houve uma perda da qualidade do ajuste quando desconsideramos os dados de 1991 a 1995.

Uma explicação para tal perda de qualidade do ajuste é o fato de que com os dados a partir de 1996, temos o DI bem menor que no período de 1991 a 1995. Isto nos permite constatar outro fato estranho: a presença de dois comportamentos para  $l(m, r)$  com dois ajustes lineares distintos que estavam encobertos devido a presença de grandes valores de  $r$  nos dados pós 1991.

Para separar os dados referentes a cada comportamento, a partir do ajuste preliminar, separamos os pontos que estavam acima e abaixo desse ajuste gerando dois novos conjuntos de dados. Temos então três ajustes referente a cada conjunto de pontos:  $l_{\text{up}}(m, r)$ ,  $l_{\text{down}}(m, r)$  e  $l_{\text{med}}(m, r)$ , para os dados acima e abaixo do ajuste preliminar e os do próprio ajuste preliminar respectivamente.

Calculando a correlação entre  $l$  e  $r$  nessa nova classificação, vemos que o duplo comportamento se justifica, pois  $|\text{corr}_{l_{\text{up}},r}(m)| > 0,93$  para todo  $m$  como mostra a figura 4.11 e, apesar do ajuste de  $l_{\text{down}}(m, r)$  não ser tão bom, revela uma melhora em relação a  $l_{\text{med}}(m, r)$  como mostra a figura 4.12.

Quando calculamos os novos coeficientes  $B_{\text{up}}$  e  $B_{\text{down}}$ , vemos que a nomenclatura

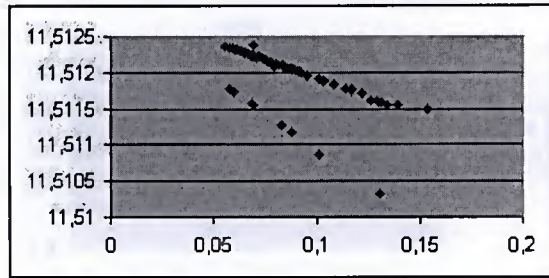


Figura 4.10: Gráfico de  $l(m = 1, r)$  para o período de 1996 a 2004. Neste gráfico, temos um exemplo do duplo comportamento de  $l$ , possuindo dois ajustes lineares distintos.

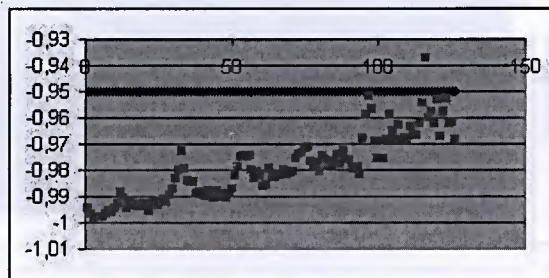


Figura 4.11: Gráfico da correlação  $\text{corr}_{l_{up}, r} \times m$

se justifica como mostra a figura 4.13. Os coeficientes  $\ln A(m)$  não mostram o mesmo comportamento, sendo  $\ln A_{med}$  e  $\ln A_{up}$  sendo muito próximos e  $\ln A_{down}$  flutuando entre essas duas curvas como mostra a figura 4.14

### 4.3 Parametrização Exponencial e os Modelos de Equilíbrio

Verificada empiricamente a parametrização exponencial, precisamos explicar as curvas  $A(m)$  e  $B(m)$  por algum modelo, e para validar a metodologia de Vasicek, deve haver certo acordo entre as estimativas dos parâmetros dos modelos da *spot rate* com os parâmetros obtidos das curvas A e B.

Apesar de não estimarmos os parâmetros do modelo misto a partir do DI, este

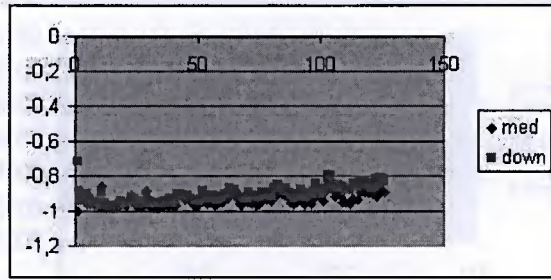


Figura 4.12: Gráfico da correlação  $\text{corr}_{l_{\text{med}},r}$  e  $\text{corr}_{l_{\text{down}},r} \times m$

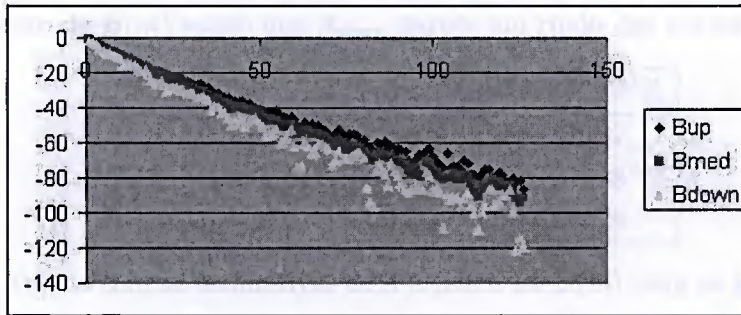


Figura 4.13: Gráfico de  $B_{\text{down}}$ ,  $B_{\text{med}}$  e  $B_{\text{up}}$ . Neste gráfico vemos que a nomenclatura se justifica sendo que  $B_{\text{down}}$  está abaixo da média  $B_{\text{med}}$  e  $B_{\text{up}}$  estando acima.

modelo é interessante na medida em que poderia descrever melhor os dados possuindo um parâmetro a mais que os modelos de Vasicek e CIR.

Para o ajuste dos modelos dos contratos aos dados, utilizamos o método dos mínimos quadrados por simplicidade. Neste método devemos minimizar a função:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i^M(\{p_1, \dots, p_k\})]^2 \tag{4.27}$$

Onde  $\hat{y}_i^M(\{p_1, \dots, p_k\})$  é o valor calculado para a maturidade  $i$  através de um modelo  $M$  dados os parâmetros  $\{p_1, \dots, p_k\}$ , e  $y_i$  é o valor obtido a partir dos dados.

Para minimizar 4.27, utilizamos o mesmo algoritmo de Nelder e Mead citado na seção 4.1.2 com condições iniciais adequadas, obtendo assim os  $k$  parâmetros.

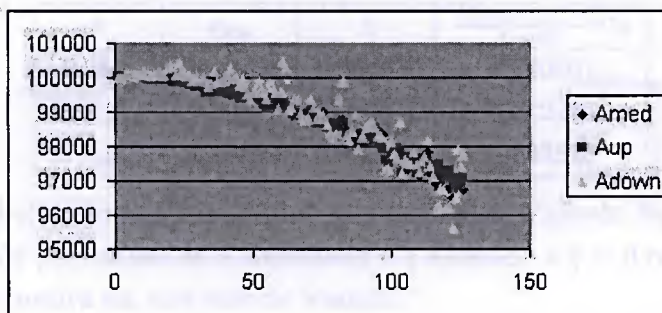


Figura 4.14: Gráfico de  $A_{down}$ ,  $A_{med}$  e  $A_{up}$ . Neste gráfico, não vemos o mesmo comportamento de  $B(m)$  sendo que  $A_{down}$  parece um ruído das curvas  $A_{med}$  e  $A_{up}$ .

| x          | $\hat{\alpha}$ | $\Lambda$ | $\frac{\Lambda(\hat{\alpha}_{série}) - \Lambda(\hat{\alpha}_B)}{\Lambda(\hat{\alpha}_{série})} \%$ |
|------------|----------------|-----------|--|
| $B_{up}$   | 0,007673       | 476,3839  | 18,92167   |
| $B_{med}$  | 0,005516       | 509,4227  | 80,07588   |
| $B_{down}$ | 0,002546       | 5626,652  | 76,90228   |

Tabela 4.4: Tabela com as estimativas de  $\alpha$  a partir de  $B(m)$  para os três conjuntos de dados: acima e abaixo da média e a própria média. Através dessa análise, vemos que o conjunto de pontos que possui maior acordo com a estimativa da *spot rate* é o conjunto *up*.

### 4.3.1 A e B segundo Vasicek

Por ser mais simples, começamos com o ajuste de Vasicek para  $B(m)$ . Como mostra a equação 3.18, precisamos de apenas um parâmetro para o ajuste dos dados. Na tabela 4.4 temos o resultado do ajuste. Nesta tabela vemos que o valor de  $\alpha$  obtido a partir do ajuste de  $B_{up}$  é bastante próximo do valor obtido pela *spot rate* de Vasicek diferindo cerca de 5% desse valor. Essa tabela também nos mostra três comportamentos bastante diferentes para  $B(m)$  com o valor obtido através dos ajustes se afastando cada vez mais do valor obtido a partir da série; mostra também que embora relativamente próximos, o ajuste de  $B_{up}$  é bastante sensível a variações no valor de  $\alpha$ .

Para o ajuste de  $\ln A$  segundo a equação 3.17, vemos que a princípio teríamos 4 parâmetros para ajustar. Com essa consideração, a função a ser ajustada seria

| x              | $q_{vas}$ | $\Lambda$ | $\frac{\Lambda(q_{vas})-\Lambda(q=0)}{\Lambda(q=0)}\%$ |
|----------------|-----------|-----------|--|
| $\ln A_{up}$   | -0,00409  | 0,000222  | 4,540507   |
| $\ln A_{med}$  | -0,00053  | 0,000313  | 0,072275   |
| $\ln A_{down}$ | -0,00893  | 0,002636  | 1,893813   |

Tabela 4.5: Tabela com o ajuste de  $\ln A$  pelo modelo de Vasicek. Na terceira coluna temos a variação percentual de  $\Lambda$  utilizando o  $q$  ajustado e  $q = 0$  com os valores de  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\rho$  da estimativa da *spot rate* de Vasicek.

| x              | $q_{cir}$ | $\Lambda$   |
|----------------|-----------|-------------|
| $\ln A_{up}$   | 0,000894  | 0,000216829 |
| $\ln A_{med}$  | 0,000769  | 0,000332628 |
| $\ln A_{down}$ | 0,000856  | 0,00268146  |

Tabela 4.6: Tabela com o ajuste de  $q$  através dos valores estimados da *spot rate* do modelo de CIR.

complexa demais para achar um mínimo global. Por isso, para o ajuste de  $\ln A$ , utilizamos os valores obtidos da *spot rate* de Vasicek, reduzindo um problema de dimensão 4 a uma única dimensão; e se a estimativa e a metodologia estiverem correta, esta única dimensão deve ser suficiente para obtermos um bom ajuste. Esse bom ajuste é obtido para pequenos valores de  $q$ . Na tabela 4.5 temos a variação percentual de  $\Lambda$  para o  $q$  ajustado e  $q = 0$ , nesta tabela vemos que  $\Lambda$  varia menos que 5% para cada conjunto de dados, mostrando que os dados são compatíveis com um valor pequeno de  $q$  e com a *spot rate*.

### 4.3.2 A e B segundo CIR

Para estimarmos o modelo de  $\ln A(m)$  proposto por CIR dado pela equação 3.23 vemos que se utilizarmos os valores de  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\rho$  da tabela 4.3 e estimarmos  $q$  teremos um bom ajuste assim como no ajuste de Vasicek. Esse ajuste mostra um melhor acordo entre os valores de  $q$  obtidos a partir de cada conjunto de dados como vemos na tabela 4.6, apesar do  $\Lambda$  de CIR ser bastante próximo do  $\Lambda$  de Vasicek.

Como vemos na equação 3.24, temos três parâmetros para o ajuste de  $B(m)$

| x          | $q_{cir}$ | $\Lambda$   | $\frac{\Lambda(q_{A_{up}}) - \Lambda}{\Lambda} \%$ |
|------------|-----------|-------------|--|
| $B_{up}$   | 0,000379  | 476,3851318 | 31,25777941  |
| $B_{med}$  | -0,00178  | 509,4216919 | 909,709908   |
| $B_{down}$ | -0,00475  | 5626,644531 | 453,872  |

Tabela 4.7: Tabela com os resultados da estimativa de  $q_{cir}$  a partir de  $B(m)$  utilizando  $\alpha$  e  $\rho$  da tabela 4.3 no modelo de CIR.

| x          | $c_1$    | $c_2$    | $\Lambda$ | $\frac{\Delta_{cir} - \Delta_{misto}}{\Delta_{cir}} \%$ |
|------------|----------|----------|-----------|---|
| $B_{up}$   | -0,00275 | -4,5E-05 | 390,6945  | 17,98769  |
| $B_{med}$  | 0,003193 | 2,47E-05 | 470,6474  | 7,611427  |
| $B_{down}$ | 0,011099 | 9,76E-05 | 4601,457  | 18,22023  |

Tabela 4.8: Tabela com o resultado do ajuste do modelo misto aos dados. Neste ajuste utilizamos  $\alpha$  da *spot rate* de CIR.

segundo o modelo de CIR. Utilizando os valores de  $\alpha$  e  $\rho$  da tabela 4.3, estimamos  $q_{cir}$ . Na tabela 4.7 temos os resultados dessa estimativa. Como era de se esperar, vemos um comportamento de  $q$  bastante diferente para cada conjunto de dados de  $B$ , e assim como no ajuste do modelo de Vasicek temos maior coerência através dos dados no conjunto *up* onde  $q$  obtido a partir de  $\ln A$  é mais próximo do  $q$  de  $B$ .

### 4.3.3 A e B segundo o Modelo Misto

Como citado anteriormente, a possível vantagem de precificar os contratos utilizando o modelo misto reside no fato desse modelo possuir uma constante a mais em relação aos outros modelos. Essa constante a mais pode descrever melhor os dados como mostram as tabelas 4.8 e 4.9.

## Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

| x              | $c_3$    | $c_4$    | $\Lambda$ | $\frac{\Delta_{cir} - \Delta_{mista}}{\Delta_{cir}} \%$ |
|----------------|----------|----------|-----------|---|
| $\ln A_{up}$   | 1,69E-08 | 8,56E-07 | 0,000209  | 3,552732  |
| $\ln A_{med}$  | -1,8E-08 | -1,4E-06 | 0,000276  | 16,9284   |
| $\ln A_{down}$ | -5,5E-08 | -4,7E-06 | 0,002153  | 19,69725  |

Tabela 4.9: Tabela com o resultado do ajuste do modelo misto aos dados. Para o ajuste desse modelo, utilizamos  $\alpha$  e  $\gamma$  do modelo da *spot rate* de CIR e  $c_1$  e  $c_2$  do ajuste de B da tabela 4.8.

## Capítulo 5

### Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho verificamos que os contratos futuros de DI ( $P$ ) possuem dupla dependência com o DI ( $r(t)$ ), ou seja, existem duas curvas distintas  $P_{\text{up}}(m, r) = A(m)e^{B_{\text{up}}(m)r}$  e  $P_{\text{down}}(m, r) = A(m)e^{B_{\text{down}}(m)r}$  para uma boa descrição do mercado utilizando apenas a *spot rate*  $r$ .

Os modelos de equilíbrio de Vasicek e CIR descrevem bem a curva *up* com bom acordo entre os parâmetros estimados da *spot rate* e dos parâmetros das curvas  $A(m)$  e  $B(m)$  validando a metodologia de Vasicek para esse conjunto de dados. O mesmo não ocorreu com a curva *down* com os parâmetros de  $A_{\text{down}}$  e  $B_{\text{down}}$  sendo incompatíveis com os parâmetros da *spot rate*. Este fato mostra que os modelos de equilíbrio não possuem uma descrição completa das variáveis de nível 1.

O entendimento dos dados referentes a curva *down* onde os modelos de equilíbrio falham pode levar a uma melhor precificação dos contratos, sendo uma nova ferramenta para os *traders* que operam com análise técnica.

O modelo misto proposto nesse trabalho, mostrou que devido ao seu parâmetro extra também colabora com a análise técnica apresentando uma sensível melhora no ajuste dos dados.

Também verificamos que embora bons para precificar os contratos, o modelo para os retornos da *spot rate* apresenta efeitos não gaussianos com assimetria e curtose elevados. Este fato também deve nos levar a outros modelos para o DI.

# Apêndice A

## Lema de Itô

Suponha que o valor da variável  $r$  siga o processo de Itô:

$$dr = f(r, t)dt + \rho(r, t)dz \quad (\text{A.1})$$

Onde  $dz$  é um processo de Wiener. O lema de Itô mostra que a função  $P = P(t, s, r)$  também segue um processo de Itô com a forma:

$$dP = \left( f \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} + \rho^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \rho \frac{\partial P}{\partial r} dz \quad (\text{A.2})$$

Para obtermos a taxa instântenea de retorno dos contratos, divimos ambos os lados da expressão A.2 por  $P$ :

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{P} \left( f \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} + \rho^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \frac{1}{P} \rho \frac{\partial P}{\partial r} dz \quad (\text{A.3})$$

Logo, temos o *drif*  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  instânteneos do processo A.3 dados por:

$$\mu(t, s, r) = \frac{1}{P} f \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} + \rho^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma(t, s, r) = -\frac{1}{P} \rho \frac{\partial P}{\partial r} \quad (\text{A.5})$$

O sinal na expressão A.5 se deve ao fato que  $\sigma$  deve ser positivo. Como  $P(t, s, r)$  é o contrato no vencimento descontado pela taxa de juros na medida *neutral risk*, devemos ter  $\frac{\partial P}{\partial r} < 0$ . Logo para termos  $\sigma > 0$  temos o sinal na expressão A.5 justificado.

Com as expressões A.4 e A.5, escrevemos A.3 como:

$$\frac{dP}{P} = \mu(t, s, r)dt - \sigma(t, s, r)dz \quad (\text{A.6})$$

## Referências Bibliográficas

- [1] J. C. Hull, Options, Futures and Other Derivatives fifth edition (Prentice Hall 2002)
- [2] E. Fortuna. Mercado Financeiro Produtos e Serviços, (15ª edição QualityMark 2002).
- [3] G. Varga. Preço e estratégias com futuro de DI e FRA. Resenha BM&F 158, 83-95.
- [4] Especificações do Contrato Futuro de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia. OFÍCIO CIRCULAR 133/2001-DG, DE 13/11/2001.
- [5] L.F.R. Ferreira, Manual de Gestão de Renda Fixa (Bookman 2004)
- [6] P.H. Cootner, The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, Cambridge, MA, 1964
- [7] J.D. Farmer, A.W. Lo, Frontiers of finance: Evolution and efficient markets, <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0210475>
- [8] A. Lo, C. MacKinlay A Non-Random Walk Down Wall Street (Princeton Univ. Press, Princeton 1999)
- [9] M.G. Daniels, J.D. Farmer, L.G. Gillemot, G. Iorri, E. Smith, Quantitative Model of Price Diffusion and Market Friction Based on Trading as a Mechanistic Random Process, Phys. Rev. Lett 90,108102 (2003).
- [10] E. Smith, J.D. Farmer, L. Gillemot, S. Krishnamurthy, Statistical theory of continuous double auction, <http://xxx.lanl.gov/adap-org/9912001>

- [11] F. Lillo, J.D. Farmer, The long memory of the efficient market, <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0311053>
- [12] J.D. Farmer, F. Lillo, On the origin of power law tails in price fluctuations, <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0309416>
- [13] J.D. Farmer, L.Gillemot, F. Lillo, S. Mike, A. Sen, What really causes large price changes?, <http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0312703>
- [14] V. Pleurou, P. Gopikrishnan, L.A.N. Amaral, M. Meyer, H.E. Stanley, Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies. *Phys. Rev. E* 60, 6519-6529 (1999).
- [15] P. Gopikrishnan, V. Plerou, L.A.N. Amaral, M. Meyer, H.E. Stanley. Scaling of the distributions of fluctuations of financial market indices. *Phys. Rev. E* 60, 5305-5316 (1999).
- [16] Y. Liu, et al. The statistical properties of the volatility of price fluctuations. *Phys. Rev. E* 60, 1390-1400 (1999)
- [17] V. Pleurou, P. Gopikrishnan, L.A.N. Amaral, X. Gabaix, H.E. Stanley. Economic fluctuations and anomalous diffusion. *Phys. Rev. E* 62, R3023-R3026 (2000)
- [18] P. Gopikrishnan, V. Pleurou, X. Gabaix, H.E. Stanley. Statistical properties of share volume traded in financial markets. *Phys Rev. E* 62, R4493-R4496 (2000)
- [19] V. Pleurou, P. Gopikrishnan, X. Gabaix, H.E. Stanley. Quantifying stock price response to demand fluctuations. *Phys. Rev. E* 66, 027104 (2002).
- [20] X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Pleurou, H.E. Stanley. A Theory of Large Fluctuations in Stock Market Activity. [http://econ-www.mit.edu/faculty/download\\_pdf.php?id=237](http://econ-www.mit.edu/faculty/download_pdf.php?id=237)
- [21] X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Pleurou, H.E. Stanley. Understanding the cubic and half-cubic laws of financial fluctuations. *Physica A* 324 (2003) 1-5.

- [22] X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Pleurou, H.E. Stanley. A theory of power law distributions in financial market fluctuations. *Nature* 423, 267-70 (2003).
- [23] F. Black, M. Scholes (1973), The price of options and corporate liabilities, *Journal of political economy* 81, 637-654.
- [24] O.A. Vasicek (1977), An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.
- [25] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross (1985), A theory of term structure of interest rates. *Econometrica* 53, 385-407.
- [26] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *An introduction to Econophysics: Correlation and Complexity in Finance* ( Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
- [27] T.C. Mills, *The econometric Modelling of Financial Time Series Second Edition* ( Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999)
- [28] Jesper Lund, *Estimation of continuous- Time Models* Ph.D. course, CBS, May 17-19, 1999 <http://www.JesperLund.com>
- [29] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and P.B. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77 The Art of Scientific Computing Second Edition* ( Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992)
- [30] P.L.O. Costa Neto. *Estatística* ( Editora Edgard Blucher Ltda 1977).
- [31] J.P. Bouchaud, N. Sagna, C. Cont, N. E. Karoui, M. Potters (1999), Phenomenology of the interest rate curve, *Applied Mathematical Finance* 6,209-232.

